

**T.C.  
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**



**ATANGANA-BALEANU TÜREVLİ LİNEER ADVEKSİYON-  
DİFÜZYON DENKLEMİNİN BAŞLANGIÇ-SINIR DEĞER  
PROBLEMLERİ**

**YÜKSEK LİSANS**

**AYLİN YETİM**

**BALIKESİR, HAZİRAN - 2019**

**T.C.  
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**



**ATANGANA-BALEANU TÜREVLİ LİNEER ADVEKSİYON-  
DİFÜZYON DENKLEMİNİN BAŞLANGIÇ-SINIR DEĞER  
PROBLEMLERİ**

**YÜKSEK LİSANS**

**AYLİN YETİM**

**Jüri Üyeleri : Dr. Öğr. Üyesi Derya AVCI (Tez Danışmanı)**

**Prof. Dr. Necati ÖZDEMİR**

**Dr. Öğr. Üyesi Mehmet YAVUZ**

**BALIKESİR, HAZİRAN - 2019**

## KABUL VE ONAY SAYFASI

AYLİN YETİM tarafından hazırlanan "ATANGANA-BALEANU TÜREVLİ LİNEER ADVEKSİYON-DİFÜZYON DENKLEMİNİN BAŞLANGIÇ-SINIR DEĞER PROBLEMLERİ" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 11.06.2019 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Danışman  
Dr. Öğr. Üyesi Derya AVCI

Üye  
Prof. Dr. Necati ÖZDEMİR

Üye  
Dr. Öğr. Üyesi Mehmet YAVUZ

  
.....  
  
.....  
  
.....

Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Prof. Dr. Necati ÖZDEMİR

.....

**Bu tez çalışması Balıkesir Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi tarafından BAP 2018/056 nolu proje ile desteklenmiştir.**

## ÖZET

### ATANGANA-BALEANU TÜREVLİ LİNEER ADVEKSİYON-DİFÜZYON DENKLEMİNİN BAŞLANGIÇ-SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

YÜKSEK LİSANS

AYLİN YETİM

BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK

(TEZ DANIŞMANI: DR. ÖĞR. ÜYESİ DERYA AVCI)

BALIKESİR, HAZİRAN – 2019

Kesirli analiz tam sayı mertebeli türev ve integrallerin, keyfi mertebeye genişletilmesi olarak tanımlanmaktadır. Kesirli operatörler, gerçek hayatta karşılaşılabilen birçok problem için problemin gerçekliğine en yakın modellenme olanağı verdiklerinden dolayı uygulamalı matematik, fen ve mühendislik alanlarında kullanılmaktadır. En yaygın kullanılan operatörler Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türev operatörleri olarak ifade edilebilmektedir. Bu kesirli türevler, problemlerin modellenmesinde avantaj sahibi olmalarına rağmen, singüler yapıda çekirdek fonksiyonu ile tanımlandıklarından çoğu zaman analitik çözümlerin bulunmasında zorluklara neden olmaktadır. Bu duruma ek olarak bu türevlerin, doğadaki üstel fonksiyon yasasına uygun davranan süreçlerin modellenmesinde, bazı zayıflıkları olduğu bilinmektedir.

2015 yılı itibarıyla, Caputo-Fabrizio ve Atangana-Baleanu olmak üzere iki türev tanımı ortaya konmuştur. Bu türevler, singüler olmayan üstel tipten çekirdeğe sahiptir. Dolayısıyla ilgili türevler modelleme sürecindeki eksiklikleri gidermekte ve pek çok problemin analitik çözümlerine ulaşmasına imkân vermektedir. Bu sebeple uygulama alanları günden güne artmaktadır.

Bir maddenin yatay olarak taşınması adveksiyon, yayılarak taşınması ise difüzyon olarak ifade edilmektedir. Bir taşınım olayında, adveksiyon ve difüzyonun maddeye etki etmesi durumunda, problemin modellenmesi adveksiyon-difüzyon denklemiyle ifade edilmektedir. Yer altı suyunun akışı, deniz suyunda kimyasal reaksiyona giren sıvının yayılması, havaya salınan gazların atmosferi kirletmesi, gözenekli ortamdaki ısı ve kütle transferleri gibi birçok taşınım olayı adveksiyon-difüzyon denklemiyle ifade edilebilmektedir.

Bu çalışmada, Atangana-Baleanu türevli adveksiyon-difüzyon denkleminin belli başlangıç-sınır değerleri için temel çözümleri incelenmektedir. Bunun için Laplace ve Fourier integral dönüşüm teknikleri kullanılmakta ve bir veya iki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonları cinsinden temel çözümler elde edilmektedir. Ayrıca, grafik çizimi için MAPLE programı kullanılıp kesirli mertebenin ve sürüklenme hızı parametresinin etkileri yorumlanmaktadır.

**ANAHTAR KELİMELELER:** Atangana-Baleanu türevi, adveksiyon-difüzyon denklemi, Mittag-Leffler fonksiyonu, Laplace dönüşümü, Fourier dönüşümü, temel çözüm.

## ABSTRACT

### INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR LINEAR ADVECTION-DIFFUSION EQUATION WITH ATANGANA-BALEANU DERIVATIVE

MSC THESIS

AYLİN YETİM

BALIKESİR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE  
MATHEMATICS

(SUPERVISOR: ASSIST. PROF. DR. DERYA AVCI )

BALIKESİR, JUNE 2019

Fractional calculus is defined as the extension of integer order derivatives and integrals to arbitrary order. Fractional operators give the opportunity to model the reality of the problem for many real-world problems, for this reason, they are used in applied mathematics, science and engineering. The most commonly used operators are Riemann-Liouville and Caputo fractional derivative operators. Although these fractional derivatives have the advantage of modeling problems, they often cause difficulties in finding analytical solutions since they are defined by the kernel function in the singular structure. In addition, it is known that these derivatives have some weaknesses in the modeling of processes that comply with the law of exponential function in nature.

By year of 2015, two derivative definitions, Caputo-Fabrizio and Atangana-Baleanu, have been put forward. These derivatives have a non-singular exponential type kernel, therefore, the related derivatives eliminate the deficiencies in the modeling process and enables analytical solutions to many problems.

Horizontal transport of a substance is referred to as advection and diffuse transport is referred to as diffusion. In a transport event, if the advection and diffusion affect the substance, the modeling of the problem is expressed by the advection-diffusion equation. Many transport phenomena, such as groundwater flow, diffusion of chemically reacted liquid in sea water, polluting the atmosphere by gases released into the air, heat and mass transfers in porous media, can be expressed by advection-diffusion equation.

In this study, fundamental solutions of advection-diffusion equation with Atangana-Baleanu derivative under certain initial-boundary values are examined. For this reason, Laplace and Fourier integral transformation techniques are used and fundamental solutions in terms of one or two parameter Mittag-Leffler functions are obtained. In addition, MAPLE program is used for graphing and the effects of fractional order and drift velocity parameter are interpreted.

**KEYWORDS:** Atangana-Baleanu derivative, advection-diffusion equation, Mittag-Leffler function, Laplace transform, Fourier transform, fundamental solution.

# İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.....	i
ABSTRACT .....	ii
İÇİNDEKİLER .....	iii
ŞEKİL LİSTESİ.....	iv
SEMBOL LİSTESİ .....	v
KISALTMALAR LİSTESİ.....	vii
ÖNSÖZ.....	viii
<b>1. GİRİŞ.....</b>	<b>1</b>
<b>2. TEMEL KÜTLE VE ISI TRANSFERİ TÜRLERİ .....</b>	<b>3</b>
2.1 Adveksiyon.....	3
2.2 Difüzyon.....	3
2.3 Kondüksiyon .....	5
2.4 Konveksiyon.....	5
2.5 Radyasyon .....	6
<b>3. KESİRLİ ANALİZİN BAZI TEMEL KAVRAMLARI.....</b>	<b>8</b>
3.1 Laplace İntegral Dönüşümü ve Özellikleri .....	17
3.2 Ters Laplace Dönüşümü ile Mittag-Leffler Fonksiyonu Arasındaki İlişki....	20
3.3 Fourier İntegral Dönüşümü .....	21
3.4 Singüler Olmayan Üstel Tipten Çekirdek Fonksiyonlu Türev Operatörleri..	25
3.4.1 Caputo-Fabrizio Türevi.....	25
3.4.2 Atangana-Baleanu Kesirli Türevi .....	28
3.4.3 Literatür Çalışmaları .....	32
<b>4. ADVEKSİYON-DİFÜZYON DENKLEMİ .....</b>	<b>35</b>
<b>5. ATANGANA-BALEANU TÜREVLİ ADVEKSİYON-DİFÜZYON DENKLEMİNİN TEMEL ÇÖZÜMLERİ.....</b>	<b>37</b>
5.1 Reel Eksende Cauchy Probleminin Çözümü .....	37
5.2 Reel Eksende Kaynak Probleminin Çözümü .....	42
5.3 Yarı Sonsuz Aralıkta Cauchy Probleminin Çözümü.....	46
5.4 Yarı Sonsuz Aralıkta Dirichlet Probleminin Çözümü.....	50
5.5 Sınırlı Aralıkta Cauchy Probleminin Çözümü .....	53
5.6 Sınırlı Aralıkta Dirichlet Probleminin Çözümü .....	56
5.6.1 Birinci Durum .....	56
5.6.2 İkinci Durum.....	60
<b>6. SONUÇ VE ÖNERİLER .....</b>	<b>63</b>
<b>7. KAYNAKLAR.....</b>	<b>65</b>

## ŞEKİL LİSTESİ

### Sayfa

<b>Şekil 2.1:</b> (a) Adveksiyon, (b) Difüzyon iletim süreçleri. ....	4
<b>Şekil 2.2:</b> Isı iletimi türleri: (a) Konveksiyon, (b) Kondüksiyon, (c) Radyasyon. ....	7
<b>Şekil 3.1:</b> (a) $0 \leq \alpha \leq 1$ için $E_\alpha(-x)$ tek parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu (b) $0 \leq \alpha \leq 1$ için $E_{\alpha,\alpha}(-x)$ çift parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu.....	11
<b>Şekil 5.1:</b> Cauchy probleminin temel çözümünde $a = v = t_{son} = 1$ değerleri için $\alpha$ nın değişmesiyle oluşan konsantrasyon değişimi.....	41
<b>Şekil 5.2:</b> Cauchy probleminin temel çözümünde $\alpha = 0.5$ , $a = t_{son} = 1$ değerleri için $v$ sapma parametresinin etkisi. ....	41
<b>Şekil 5.3:</b> Kaynak probleminin temel çözümünde $a = v = t_{son} = 1$ değerleri için $\alpha$ nın değişmesiyle oluşan fiziksel davranış. ....	45
<b>Şekil 5.4:</b> Kaynak probleminin temel çözümünde $\alpha = 0.5$ , $a = t_{son} = 1$ değerleri için $v$ sapma parametresinin etkisi. ....	46
<b>Şekil 5.5:</b> Cauchy probleminin temel çözümünde $a = v = t_{son} = 1$ değerleri için $\alpha$ nın değişmesiyle oluşan difüzyon probleminin karşılaştırılması. ....	49
<b>Şekil 5.6:</b> Cauchy probleminin temel çözümünde $\alpha = 0.5$ , $a = t_{son} = 1$ değerleri için $v$ hız parametresinin etkisi. ....	49
<b>Şekil 5.7:</b> Yarı sonsuz aralıkta Dirichlet probleminin temel çözümünde $\alpha$ nın değişimi. ....	52
<b>Şekil 5.8:</b> Cauchy probleminin temel çözümünde $\alpha = 0.5$ , $a = t = 1$ değerleri için $v$ sapma parametresinin etkisi. ....	55
<b>Şekil 5.9:</b> Cauchy probleminin temel çözümünde $\alpha = a = t = 1$ değerleri için $v$ sapma parametresinin etkisi. ....	56
<b>Şekil 5.10:</b> $\alpha = 0.5$ alındığında konsantrasyon ifadesinin birinci durumdaki Dirichlet probleminin sınır değerlerinden kaynaklanan değişimi. ....	59
<b>Şekil 5.11:</b> $\alpha = 1$ durumunda $v$ sapma parametresinin değişiminin konsantrasyon fonksiyonuna etkileri.....	59
<b>Şekil 5.12:</b> Dirichlet probleminin ikinci durumunda $v = 1$ alınarak farklı kesirli derecelerde konsantrasyon fonksiyonunun değişimi.....	62



## SEMBOL LİSTESİ

$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\Gamma(\cdot)$	: Gamma fonksiyonu
$B(x, y)$	: Beta fonksiyonu
$E_a(\cdot)$	: Tek parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu
$E_{a,\beta}(\cdot)$	: İki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu
${}^RL_a\mathcal{D}_t^\alpha$	: Sol Riemann-Liouville kesirli türevi
${}^RL_t\mathcal{D}_b^\alpha$	: Sağ Riemann-Liouville kesirli türevi
${}^C_a\mathcal{D}_t^\alpha$	: Sol Caputo kesirli türevi
${}^C_t\mathcal{D}_b^\alpha$	: Sağ Caputo kesirli türevi
$\mathcal{L}$	: Laplace dönüşüm operatörü
$\mathcal{L}^{-1}$	: Ters Laplace dönüşüm operatörü
$\mathbf{I}$	: İntegral operatörü
$*$	: Konvolüsyon çarpım
$\mathcal{F}$	: Fourier dönüşüm operatörü
$\mathcal{F}^{-1}$	: Ters Fourier dönüşüm operatörü
${}^{ABC}_b\mathcal{D}_t^\alpha$	: Caputo anlamında Atangana-Baleanu türevi
${}^{ABR}_b\mathcal{D}_t^\alpha$	: Riemann anlamında Atangana-Baleanu türevi

${}^{AB}I_t^\alpha$  : Atangana-Baleanu integrali

**sin** : Sinüs fonksiyonu

**cos** : Kosinüs fonksiyonu

$H^1$  : Sobolev uzayı

$L^1$  : Banach uzayı

$L^2$  : Hilbert uzayı

## **KISALTMALAR LİSTESİ**

**RL** : Riemann-Liouville

**CF** : Caputo-Fabrizio

**AB** : Atangana-Baleanu

## ÖNSÖZ

Yüksek lisans öğrenimine başladığım günden itibaren bana yol gösteren, tecrübeleriyle beni aydınlatan, desteğini ve rehberliğini benden esirgemeyen sevgili danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Derya AVCI'ya sonsuz teşekkür ederim.

Çalışmalarına destek veren ve çalışmam boyunca yardımlarını benden esirgemeyen Dr. Öğr. Üyesi Beyza Billur İSKENDER EROĞLU ve Dr. Öğr. Üyesi Mehmet YAVUZ'a, aynı zamanda akademik alanda her türlü desteği vermeye hazır olan Prof. Dr. Necati ÖZDEMİR'e teşekkür ederim.

Yüksek lisans öğrenimimde "2210-A Genel Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı" kapsamında maddi destek veren TÜBİTAK' a teşekkür ederim.

Lise hayatımın başlangıcından itibaren her daim yanımda olan manevi desteklerini benden esirgemeyen arkadaşlarım Aslıhan Çakır, Büşra Gövenç, Kübra Selçuk ve Tubanur Bulut'a ve aynı zamanda yüksek lisans için beni cesaretlendiren arkadaşım Elif Yüzügüldü'ye teşekkür ederim.

Hayatım boyunca maddi ve manevi her türlü destekte bulunan biricik aileme teşekkür ederim.

# 1. GİRİŞ

Adveksiyon olayı basit anlamıyla bir maddenin sıvı veya gaz içerisinde yatay olarak taşınması, difüzyon ise bir maddenin aynı şekilde madde içerisinde yayılması olarak ifade edilmektedir. Madde sıvı veya gazın içerisine bırakıldığında bu maddeye iki olay da etki edebilir. Yani madde yatay olarak taşınırken bir yayılma gösterebilir. Bu olay adveksiyon-difüzyon denklemiyle ifade edilmektedir. Bu denklem ile okyanuslardaki veya herhangi bir su topluluğundaki kirlilik, havaya karışan zararlı gazların yayılması ve aynı zamanda yeraltı suyu oluşumlarındaki kirlilik gibi birçok doğa olayı açıklanabilmektedir.

Kesirli analiz, tam sayı mertebeli türev ve integrallerin tam sayı olmayan mertebeye genişletilmesi şeklinde tanımlanır. 1695 yılında Leibniz ve L'Hospital arasındaki mektuplaşmalar ile kesirli analiz çalışmalarının başladığı varsayılmaktadır. Bu alanda birçok bilim adamı yeni türev tanımları geliştirmiştir. Bu tanımlar Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville, Caputo, Hadamard, Marchaud, Riesz, Riesz-Miller, Miller-Ross, Weyl, Erdélyi-Kober türev tanımlarıdır. Literatürde kesirli türev ile ilgili sıkça kullanılan türevler Caputo ve Riemann-Liouville kesirli türevleridir. Bu türev tanımları; madde taşınımı, akışkanlar mekaniği, popülasyon modelleri, kontrol sistemleri, finansal değişimler gibi pek çok gerçek hayat problemine etkili bir şekilde uygulanmıştır.

Geleneksel kesirli türev tanımları her ne kadar literatürde yaygın kullanım alanı bulsalar da tanımlarından kaynaklanan bazı zayıf yönleri bulunmaktadır. Geleneksel türevlerin zayıflıklarını gidermek amacıyla 2015 yılında Caputo-Fabrizio [1] ve 2016 yılında Atangana-Baleanu [2] türev tanımları ortaya konmuştur. Bu türev tanımları, çekirdek fonksiyonun değiştirilmesiyle oluşturulmuştur. Isı transferi sistemlerinde, kapalı akifer içindeki yeraltı suyu akışı, sığ su yüzündeki dalga hareketi, elektrik devreleri, dielektrik ortamda elektromanyetik dalgalar gibi problemlerde başarıyla kullanılmışlardır [3-8].

Bu tezde Atangana-Baleanu türevli adveksiyon-difüzyon denklemi farklı tanım bölgelerinde ele alınmıştır.

Bu bağlamda tez beş ana bölümden meydana gelmiştir.

İkinci bölümde, temel kütle ve ısı transferi türleri incelenmiştir.

Üçüncü bölümde, kısaca kesirli analizin tarihsel geçmişi, kesirli analizin bazı temel fonksiyonları ve özellikleri, başlıca kesirli türev tanımları, Laplace ve Fourier dönüşümleri ve bunların temel özellikleri, singüler olmayan çekirdekli türev tanımları, özellikleri ve neden tercih edildiği verilmiştir.

Dördüncü bölümde, adveksiyon-difüzyon denkleminin ortaya çıkışı, tanımı ve bununla ilgili yapılan çalışmalar yer almıştır.

Beşinci bölümde, Atangana-Baleanu kesirli türevi ile oluşturulan adveksiyon-difüzyon denkleminin reel ekseninde Cauchy ve kaynak problemlerinin yarı sonsuz ve sonlu aralıklarda Cauchy ve Dirichlet problemleri ele alınmıştır. Temel çözümler grafik yorumları ile birlikte verilmiştir.

Altıncı bölümde, çalışmanın sonuçları değerlendirilmiştir.

## 2. TEMEL KÜTLE VE ISI TRANSFERİ TÜRLERİ

### 2.1 Adveksiyon

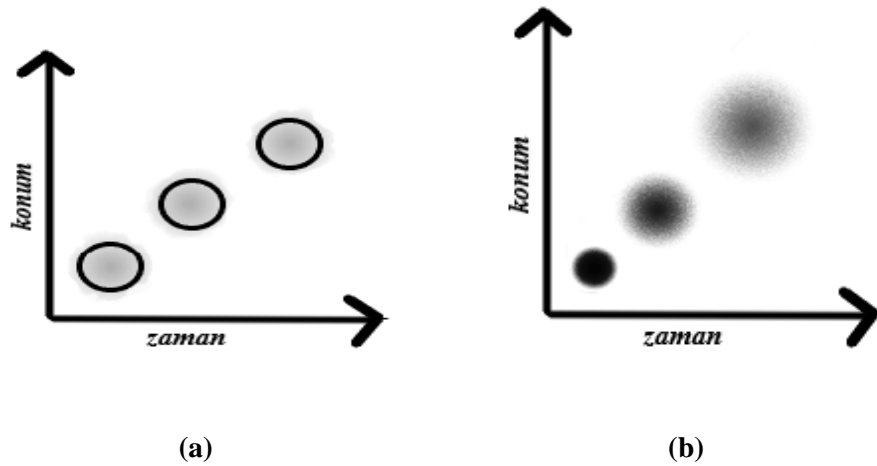
Sıvının veya havanın hareketi sonucunda atmosfer içindeki herhangi bir özelliğin veya bir maddenin yatay hareket ile taşınımına adveksiyon denir. Burada sıvı olarak adlandırılan maddeyi su olarak kabul edebiliriz. Okyanuslardaki su akıntılarında veya atmosferdeki büyük çaplı hava hareketlerinde adveksiyon oluşur. Eğer taşınım mekanizması saf adveksiyon ve kirletici tek parçacık olarak kabul edilir ise bu parçacığın hızı akımın ortalama hızına eşit bir hızla taşınmaktadır. Böylece bir parçacığın konumu, hareketinden  $t$  süre sonraki hızı ile zamanın çarpımı olan  $Vt$  biçimindedir. Bu şekilde bir parçacık kümesi düşünüldüğünde bu kümedeki bütün parçacıklar benzer yer değiştirmeyi yapacaklardır. Teorik olarak bu taşınım sürecinde maddenin şekli aynı kalmaktadır. Bu durum adveksiyon olarak ifade edilmektedir.

### 2.2 Difüzyon

İlk olarak Brownian hareketin tanımını yaparsak, Brownian hareket aynı zamanda rastlantısal hareket olarak ifade edilmektedir. Rastlantısal hareket, toz parçacıkları veya polen gibi büyük parçacıklara sıvı veya gaz molekülleri gibi küçük parçacıkların etkisi sonucunda oluşan hareket olarak tanımlanır. Bir hareketsiz suyun içinde bir parçacık alırsak bu parçacığa etrafındaki su moleküllerinin Brownian hareketinden dolayı kuvvetler etki etmektedir. Bu parçacık eğer su ile aynı yoğunlukta ise Brownian hareketin rastgele doğasından dolayı parçacığa etki eden net bir kuvvet olmamaktadır. Bundan dolayı bu parçacık bir süre ilk konumunu korumaktadır. Ama bir parçacık kümesi ele alınırsa parçacık hareketini belirlemede parçacık sayısı önemli hale gelmektedir. Alınan bir parçacığın herhangi bir yöne gitme olasılığı eşittir. Fakat maddelerin arasında derişim farkı var ise parçacıklar derişimin yüksek olduğu yerlerden az olduğu yerlere doğru ilerler. Bu durum difüzyon olarak ifade edilmektedir. Fiziksel olarak difüzyon olayı, moleküler

difüzyon ve türbülanslı difüzyon olmak üzere ikiye ayrılmaktadır. Moleküler difüzyon; durgun ve akıntı olmayan sıvı veya gaz ortamında asılı duran parçacıkların rastgele hareketi sonucu taşınmasıdır. Türbülanslı difüzyon ise türbülanslı bir akışkanın içerisinde maddenin daha büyük derişimde rastgele hareketleri sonucu oluşan taşınım mekanizmasıdır.

Eğer difüzyon tanımında kullanılan hareketsiz madde yerine akışın olduğu bir madde ele alınırsa adveksiyon ve difüzyon süreçleri birleşecektir. Parçacık kümesi adveksiyon tanımındaki gibi hız çarpı zaman olarak ifade edilen  $Vt$  kadar yer değiştirecektir. Fakat difüzyon etkisinden dolayı şeklini koruyamayacak ve dağılacaktır. Bu taşınan parçacıklar, çevredeki düşük derişimli bölgelere dağılmaya devam edecektir. Bu dağılmanın etkisiyle taşınan küme genişleyecektir.



Şekil 2.1: (a) Adveksiyon, (b) Difüzyon iletim süreçleri.

Kütle transferiyle benzer yapıya sahip olan ısı transferi iki madde arasında ısının değişmesiyle oluşan fiziksel termal enerjidir. Sıcaklık arttıkça moleküllerin hareketi ve titreşimi artar. Bu yüzden kinetik enerji yüksek sıcaklıktaki bölgeden daha düşük sıcaklıktaki bölgeye doğru aktarılır. Isı iletimi kondüksiyon (iletim), konveksiyon (taşınım) ve radyasyon (ışınım) olarak temel anlamda sınıflandırılabilir.



### 2.3 Kondüksiyon

Moleküllerin doğrudan birbiri ile çarpışması sonucu oluşan ısı transferine iletim yolu ile ısı transferi denir. Bu transfer boyunca kütle değişimi yoktur. Kinetik enerji, yüksek enerjiye sahip bir alandan düşük enerjiye sahip bir alana taşınır. Bu taşınma sırasında yüksek hızdaki parçacıklar düşük hızdaki parçacıklarla çarpışır. Bu çarpışma sonucu hızı düşük olan parçacıkların da kinetik enerjisi artar. Kondüksiyon fiziksel temas yolu ile gerçekleşen en yaygın ısı transferi yöntemidir. Bir demir çubuğu ateşin üzerine yerleştirdiğimizde çubukta oluşan ısı bu ısı transferi yöntemine örnek olarak verilebilir. Herhangi bir cisimde sıcaklık akışı daima kinetik enerjisi yüksek olan bölgeden düşük olan bölgeye doğru veya sıcaktan soğuğa doğru olur. Farklı sıcaklıktaki iki madde arasında termal denge sağlandığında ısı transferi durur. Karmaşık olmayan bir ısı iletimi probleminde iletilen ısının miktarı aşağıdaki denklem ile hesaplanır.

$$Q = \left[ k \times A \times (T_{sıcak} - T_{soğuk}) \right] / d \quad (2.1)$$

Burada kullanılan  $Q$  = birim zamanda transfer edilen ısı miktarı,  $k$  = ısı transferi iletim katsayısı,  $A$  = ısı transferi yüzey alanı,  $T_{sıcak}$  = sıcak bölgenin sıcaklığı,  $T_{soğuk}$  = soğuk bölgenin sıcaklığı,  $d$  = malzemenin kalınlığını ifade etmektedir.

### 2.4 Konveksiyon

Akışkan bir madde içinde ısının kütle hareketi aracılığıyla taşınmasına konveksiyon denir. Akışkan bir madde ısıtıldığında oluşan ısı farkından dolayı termal enerji de taşınır. Isıtılan bir sıvı genişler. Bu yüzden sıvı daha az yoğunlaşır ve yükselir. Molekül düzeyinde düşünürsek moleküllere termal enerji uygulandığında moleküller genişler. Sıvı kütleinin sıcaklığı arttıkça doğru orantılı olarak bu moleküllerin genişlemesinden dolayı sıvının hacmi de artar. Sıvı üzerinde bu etki sıvının yer değiştirmesine sebep olur. Yani sıcak madde yükselirken soğuk madde

aşağıya çöker. Aşağıdaki denklem ile konveksiyon ısı iletimi birim zamanda elde edilen ısı transferi miktarı hesaplanabilir.

$$Q = h_c \times A \times (T_s - T_f) \quad (2.2)$$

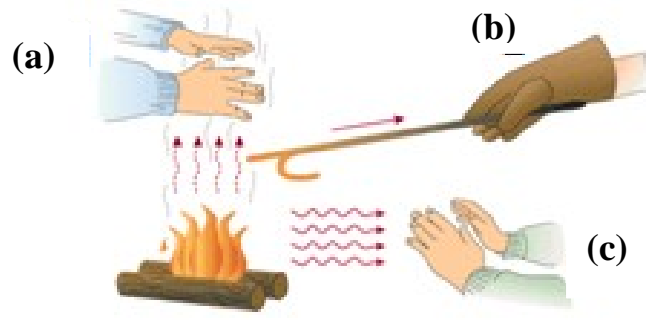
Bu denklemde  $Q$  = birim zamanda transfer edilen ısı miktarı,  $h_c$  = taşınım ile ısı transferi katsayısı,  $A$  = ısı transferi yüzey alanı,  $T_s$  = yüzey sıcaklığı,  $T_f$  = akışkanın sıcaklığını ifade etmektedir.

## 2.5 Radyasyon

Elektromanyetik dalgaların yayınımlı ile oluşan ısı transferine radyasyon ile ısı transferi denir. Maddenin temel yapısını atomlar oluşturur. Atomların çekirdeği proton ve nötrondan oluşmaktadır. Aynı zamanda çevresinde dönmekte olan elektronlar mevcuttur. Yüklü proton ve elektronların hareketi, elektromanyetik dalgaların yayılmasına neden olur. Isı radyasyonuna örnek olarak Güneş verilebilir. Güneş radyasyonla ısı yayılımı sayesinde Güneş sistemi boyunca ısı yaymaktadır. Radyasyon ile taşınımında kütle değişimi yoktur. Saf radyant enerji ışık hızında hareket eder. Termal radyasyon Stefan-Boltzman yasası kullanılarak aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$P = e \times \sigma \times A \times (T_r^4 - T_c^4) \quad (2.3)$$

Denklemde  $P$  = toplam güç,  $e$  = yayılabilme katsayısı,  $\sigma$  = Boltzmann sabiti,  $A$  = radyasyon alanı,  $T_c$  = çevrenin sıcaklığını göstermektedir.



**Şekil 2.2:** Isı iletimi türleri: (a) Konveksiyon, (b) Kondüksiyon, (c) Radyasyon.

Bahsedilen ısı iletim türlerinin gerçek hayattan örnek bir gösterimi şekil 2.2 de verilmiştir. Burada (a) şekliyle ifade edilen, ısının yükselmesinden dolayı konveksiyonu ifade etmektedir. Isınan hava genişlemekte bu yüzden (b) şekilli gösterim çubuktaki moleküller ile ısının yayılımını ifade eden kondüksiyondur. Son olarak (c) gösterimi manyetik dalgalar ile ısının yayılmasını göstermektedir. Bu da bilindiği gibi radyasyon ifadesidir.

### 3. KESİRLİ ANALİZİN BAZI TEMEL KAVRAMLARI

Bu bölümde, camsı veya gözenekli ortamdaki madde iletimi, dielektrik materyallerin davranışları, polimerlerin yapısal özellikleri, kalıtımsal özellikler, hafızalı mekanik sistemler gibi birçok karmaşık dinamiği tanımlamak için kullanılan güçlü bir araç olan kesirli analizin bazı temel fonksiyonları ve sıkça kullanılan Riemann-Liouville ve Caputo türevlerinin tanımları verilmektedir.

**3.1 Tanım** (Gamma Fonksiyonu [9]):  $\Gamma(\cdot)$  notasyonu ile gösterilen gamma fonksiyonu,  $\Gamma : \mathbb{C}/\{0, -1, -2, \dots\} \rightarrow \mathbb{C}$  için

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad (3.1)$$

biçiminde tanımlanmaktadır. Gamma fonksiyonu, faktöriyel fonksiyonunun keyfi mertebeye genişlemesi olarak ifade edilen bir fonksiyondur. Aşağıdaki özelliklere sahiptir.

**i.**  $\Gamma(x+1) = x!$ , ( $x \in \mathbb{N}$ ), (3.2)

**ii.**  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ , (3.3)

**iii.**  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ , (3.4)

**iv.**  $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$ , (3.5)

- v. Gamma fonksiyonu  $x = -n, (n = 0, 1, \dots)$  noktalarında basit kutba sahiptir.

### 3.2 Tanım (Beta Fonksiyonu [9]): Beta fonksiyonu

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad (3.6)$$

integraliyle veya buna denk olarak

$$B(x, y) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^{2x-1} (\cos \theta)^{2y-1} d\theta, \quad (3.7)$$

$$B(x, y) = \int_0^{\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} du \quad (3.8)$$

integralleriyle tanımlanır.

Gamma fonksiyonu ile arasında aşağıdaki bağıntılar mevcuttur:

i. 
$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad (3.9)$$

ii. 
$$B(x, 1-x) = \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}. \quad (3.10)$$

**3.3 Tanım** (Tek Parametrelili Mittag-Leffler Fonksiyonu [9]):  $\alpha > 0$  olmak üzere  $E_\alpha(\cdot)$  notasyonu ile gösterilen ve

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha > 0, z \in \mathbb{C} \quad (3.11)$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona bir parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu denir.

Bu fonksiyon üstel fonksiyonun bir genelleştirilmesi olarak ifade edilmektedir. 1903 yılında İsveçli bir matematikçi olan Magnus Gustaf Mittag-Leffler tarafından bulunmuştur. Özel halde,  $\alpha = 1$  alındığında

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z \quad (3.12)$$

olur.

**3.4 Tanım** (Çift Parametrelili Mittag-Leffler Fonksiyonu [9]):  $\alpha > 0$  ve  $\beta > 0$  olmak üzere çift parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad z \in \mathbb{C}, \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \alpha, \beta > 0 \quad (3.13)$$

biçiminde tanımlanır.

1953 yılında Ravi P. Agarwal ve Arthur Erdelyi tarafından bulunmuştur.  $\alpha$  ve  $\beta$  parametrelerinin özel seçimleriyle bilinen bazı fonksiyonlara dönüşmektedir.

$$i. \quad E_{\alpha,1}(z) = E_{\alpha}(z), \quad (3.14)$$

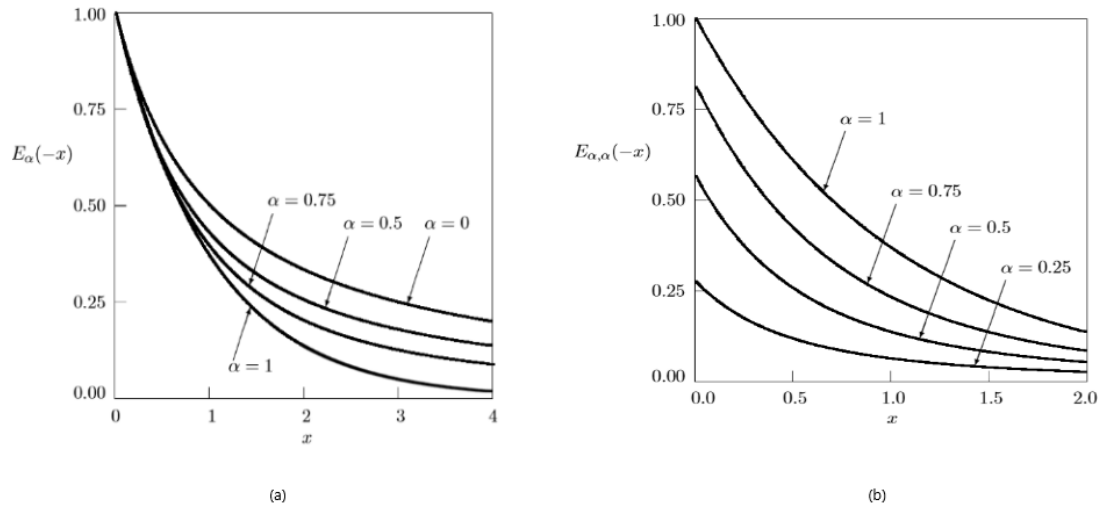
$$\text{ii. } E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = e^z, \quad (3.15)$$

$$\text{iii. } E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^{z-1}}{z}, \quad (3.16)$$

$$\text{iv. } E_{2,1}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh(z), \quad (3.17)$$

$$\text{v. } E_{2,2}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k+1)!} = \frac{\sinh(z)}{z}. \quad (3.18)$$

Kesirli diferansiyel denklem çözümlerinde sıklıkla ortaya çıkan Mittag-Leffler fonksiyonun bazı geometrik davranışları aşağıdaki grafiklerle verilmiştir [10].



**Şekil 3.1:** (a)  $0 \leq \alpha \leq 1$  için  $E_\alpha(-x)$  tek parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu (b)  $0 \leq \alpha \leq 1$  için  $E_{\alpha,\alpha}(-x)$  çift parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu.

**3.5 Tanım** (Riemann-Liouville Kesirli İntegrali [9]):  $[a, b]$  ( $-\infty < a < b < \infty$ ) aralığında tanımlanan bir  $f(t)$  fonksiyonunun  $\alpha$  katlı sol ve sağ Riemann-Liouville kesirli integrali sırasıyla

$${}_a I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad t > a, \quad \alpha > 0, \quad (3.19)$$

$${}_t I_b^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (\tau-t)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad t < b, \quad \alpha > 0. \quad (3.20)$$

olarak tanımlanır.

Bu integral tanımını klasik katlı integral yaklaşımıyla veya sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemlerin Laplace dönüşümü yöntemiyle çözümü esnasında ortaya çıkar. Faktöriyel fonksiyonunun gamma fonksiyonu ile yer değiştirmesi fikriyle de genelleştirilmiş olur.

**3.6 Tanım** (Riemann-Liouville Kesirli Türevi [9]):  $f, [a, b] \subset \mathbb{R}$  üzerinde integrallenebilen zaman değişkenli bir fonksiyon ve  $n-1 \leq \alpha < n$  ( $n \in \mathbb{N}^+$ ) olmak üzere  $\alpha$ . mertebeden sol ve sağ Riemann-Liouville kesirli türevleri sırasıyla

$${}^R L D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left( \frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (3.21)$$

$${}^R L D_b^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left( -\frac{d}{dt} \right)^n \int_t^b (\tau-t)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (3.22)$$



şeklinde tanımlanır.  $\alpha \in \mathbb{Z}^+$  olması durumunda  ${}^{RL}D_t^\alpha f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^\alpha$  ve

${}^{RL}D_b^\alpha f(t) = \left(-\frac{d}{dt}\right)^\alpha$  şeklinde tam sayı mertebeli türevlere dönüşür.

Riemann-Liouville (RL) kesirli türevinin özelliklerini aşağıdaki gibi sıralayabiliriz.

- 1)  $p > 0$  ve  $t > a$  için  ${}^{RL}D_t^p \left( {}^{RL}D_t^{-p} f(t) \right) = f(t)$  dir. Bu da RL kesirli türev operatörünün aynı  $p$ . mertebeden RL kesirli operatörün sol tersi olduğu anlamına gelmektedir.
- 2)  $k-1 \leq p < k$  olacak şekilde

$${}^{RL}D_t^{-p} \left( {}^{RL}D_t^p f(t) \right) = f(t) - \sum_{j=1}^k \left[ {}^{RL}D_t^{p-j} f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-j}}{\Gamma(p-j+1)} \quad (3.23)$$

ifadesi elde edilir.

- 3)  $f(t)$  sürekli olmak üzere

$${}^{RL}D_t^p \left( {}^{RL}D_t^{-q} f(t) \right) = {}^{RL}D_t^{p-q} f(t) \quad (3.24)$$

şeklindedir. Eğer  $p \geq q \geq 0$  ise  ${}^{RL}D_t^{p-q} f(t)$  türevi mevcuttur.

$${}^{RL}D_t^{-p} \left( {}^{RL}D_t^q f(t) \right) = {}^{RL}D_t^{q-p} f(t) - \sum_{j=1}^k \left[ {}^{RL}D_t^{q-j} f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-j}}{\Gamma(1+p-j)} \quad (3.25)$$

eşitliği sağlanır.

**3.7 Tanım** (Caputo Kesirli Türevi [9]):  $f$ ,  $n$ . mertebeden sürekli türevlenebilir bir fonksiyon ve  $n-1 < \alpha < n$  ( $n \in \mathbb{N}^+$ ) olmak üzere sol ve sağ kesirli Caputo türevleri sırasıyla

$${}_a^c D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \left( \frac{d}{d\tau} \right)^n f(\tau) d\tau \quad (3.26)$$

$${}_t^c D_b^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b (\tau-t)^{n-\alpha-1} \left( -\frac{d}{d\tau} \right)^n f(\tau) d\tau \quad (3.27)$$

olarak tanımlanır.

RL ve Caputo türevleri arasında ilişki şöyledir:

$$\begin{aligned} {}_0^c D_t^\alpha f(t) &= \left[ {}_0^{RL} D_t^\alpha I^\alpha \right] {}_0^c D_t^\alpha f(t) \\ &= {}_0^{RL} D_t^\alpha \left[ I^\alpha {}_0^c D_t^\alpha f(t) \right] \\ &= {}_0^{RL} D_t^\alpha \left[ f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(0) \right] \\ &= {}_0^{RL} D_t^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0) \end{aligned} \quad (3.28)$$

veya

$${}_0^{RL} D_t^\alpha f(t) = {}_0^c D_t^\alpha f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0). \quad (3.29)$$

**3.1 Teorem:**  $f$  fonksiyonu her sonlu  $(a, t)$  aralığında sürekli ve integrallenebilir bir fonksiyon olsun.  $m$ ,  $m-1 < \alpha < m$  olacak şekilde pozitif bir tam sayı ve  $\alpha$  herhangi bir pozitif sayı olmak üzere  $f^{(k)}(t)$ , ( $k = 0, 1, 2, \dots, m-1$ ) türevleri de  $[a, t]$  kapalı aralığında sürekli ve integrallenebilir olsun. Bu takdirde eğer  $k = 0, 1, 2, \dots, m-1$  için  $f^{(k)}(a) = 0$  şartları sağlanırsa

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) = {}^C D_t^\alpha f(t) \quad (3.30)$$

eşitliği sağlanır.

Kesirli analizin önemli iki türevi olan RL ve Caputo kesirli türevlerinin bazı yönlerden karşılaştırmaları aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

**i.** RL kesirli türeviyle tanımlanan başlangıç değer problemleri limit durumunda ifade edilen

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow a} [{}_a D_t^{\alpha-1} f(t)] &= b_1 \\ \lim_{t \rightarrow a} [{}_a D_t^{\alpha-2} f(t)] &= b_2 \\ &\dots \\ \lim_{t \rightarrow a} [{}_a D_t^{\alpha-k} f(t)] &= b_k, (k = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (3.31)$$

başlangıç koşullarını gerektirebilmektedir. Bu tip koşullar matematiksel hesaplamalarda oldukça kullanışlı olmasına rağmen fiziksel olarak yorumlanabilir olmadıklarından uygulamada çok kullanışlı olmayabilirler.

**ii.** Caputo kesirli türevinin Laplace dönüşümü tam sayı mertebeli fiziksel olarak yorumlanabilir başlangıç koşulları gerektirir. Bu anlamda mühendislik uygulamalarında yaygın olarak kullanılmaktadır.

iii. Bir sabitin RL kesirli türevi  ${}^{RL}D^\alpha c = \frac{ct^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \neq 0$ ,  $\alpha \geq 0$ ,  $t \geq 0$  dir. Bu ise yine

fiziksel olarak yorumlanabilir bir sonuç değildir. Buna karşın sabitin Caputo türevi sıfırdır.

iv. RL ve Caputo kesirli türevleri arasındaki diğer önemli bir fark ise, Caputo türevi için

$${}^cD_t^\alpha ({}^cD_t^m f(t)) = {}^cD_t^{\alpha+m} f(t), \quad (m = 0, 1, 2, \dots; n-1 < \alpha < n) \quad (3.32)$$

olmasına karşın RL kesirli türevi için

$${}_aD_t^m ({}_aD_t^\alpha f(t)) = {}_aD_t^{\alpha+m} f(t), \quad (m = 0, 1, 2, \dots; n-1 < \alpha < n) \quad (3.33)$$

olmasıdır. (3.32) ve (3.33) denklemlerinde diferansiyel operatörlerin yer değiştirebilmesi aşağıdaki koşullar altında mümkün olmaktadır.

$${}^cD_t^\alpha ({}^cD_t^m f(t)) = {}^cD_t^m ({}^cD_t^\alpha f(t)) = {}^cD_t^{\alpha+m} f(t)$$

$$f^{(s)}(0) = 0, \quad s = n, n+1, \dots, m \quad (m = 0, 1, 2, \dots; n-1 < \alpha < n) \quad (3.34)$$

$${}_aD_t^m ({}_aD_t^\alpha f(t)) = {}_aD_t^\alpha ({}_aD_t^m f(t)) = {}_aD_t^{\alpha+m} f(t)$$

$$f^{(s)}(0) = 0, \quad s = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (m = 0, 1, 2, \dots; n-1 < \alpha < n)$$

(3.34) eşitliğinden de görülmektedir ki RL yaklaşımının aksine, Caputo türevinde  $f^{(s)}(0) = 0$ ,  $(s = 0, 1, 2, \dots, n-1)$  değerlerinde herhangi bir kısıtlama yoktur.

v. Caputo anlamında bir fonksiyonun kesirli türevinin var olabilmesi için tam sayı mertebeden türevlenebilir olması gerekir ki bu şart, RL kesirli türevindeki süreklilik şartına göre matematiksel olarak daha ağır bir koşuldur.

vi. Ortak dezavantaj, singüler çekirdek fonksiyonu ile tanımlanmaları problemlerin analitik çözümlerinin bulunmasını çoğunlukla güçleştirir. Literatürde sıklıkla nümerik çalışmalara rastlanmasının nedeni budur.

### 3.1 Laplace İntegral Dönüşümü ve Özellikleri

**3.1.1 Tanım** (Laplace Dönüşümü [10]):  $f, t > 0$  zaman değişkeninin tek değerli bir fonksiyonu olsun  $f(t)$ 'nin Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = f^*(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad s \in \mathbb{C} \quad (3.35)$$

biçiminde tanımlanır.

**3.1.2 Tanım** [11]: Bir  $T \geq 0$  için  $e^{-\alpha t} |f(t)| \leq M$  olacak şekilde  $M > 0$  ve  $\alpha$  sabitleri varsa  $f(t)$  fonksiyonuna,  $t \rightarrow \infty$  durumunda  $\alpha$  üstel mertebededir denir.

**3.1.3 Tanım** [11]: Bir  $f(t)$  fonksiyonunun  $\lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t) = f(t_0^+)$  ve  $\lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t) = f(t_0^-)$  sağ ve sol limitleri var iken  $f(t_0^+) \neq f(t_0^-)$  ise  $f'$ 'nin  $t_0$  noktasında bir sıçrama süreksizliği vardır denir.

**3.1.4 Tanım** [11]: Eğer bir  $f(t)$  fonksiyonu sıçrama süreksizliğine sahip olduğu sonlu sayıda nokta hariç  $[a, b]$  aralığının her noktasında sürekli ise fonksiyona parçalı sürekli denir.

**3.1.1 Teorem [11]:**  $f$  fonksiyonu  $[0, \infty)$  aralığında parçalı sürekli ve bir  $\alpha$  reel sayısı için  $\alpha$  üstel basamaktan ise  $\mathcal{L}\{f(t)\}$  Laplace dönüşümü  $s > \alpha$  için mevcuttur.

**3.1.5 Tanım (Ters Laplace Dönüşümü [10]):**  $t > 0$  ve  $\mathcal{L}\{f(t)\} = f^*(s)$  olsun. O halde ters Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}^{-1}\{f^*(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f^*(s) e^{st} ds, \quad t > 0, c \in \mathbb{R}^+, \quad (3.36)$$

şeklinde tanımlanır.

Laplace dönüşümünün bazı temel özellikleri aşağıdaki gibidir:

**i.** (Lineerlik Özelliği)  $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$  ve  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$  ve  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

olmak üzere

$$\mathcal{L}\{c_1 f(t) + c_2 g(t)\} = c_1 \mathcal{L}\{f(t)\} + c_2 \mathcal{L}\{g(t)\} = c_1 F(s) + c_2 G(s) \quad (3.37)$$

bağıntısı geçerlidir.

**ii.**  $f(t)$  fonksiyonunun integrali  $I\{f(t)\} = \int_0^t f(\tau) d\tau$  olmak üzere Laplace dönüşümü  $\mathcal{L}\{If(t)\} = \frac{1}{s} f^*(s)$  dir. Benzer şekilde  $f(t)$  fonksiyonunun  $m$  katlı

$I^m f(t) = \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{m-1}} f(t_m) dt_m$  integralinin Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}\{I^m f(t)\} = \frac{1}{s^m} f^*(s) \quad (3.38)$$

olur.

**iii.**  $f, f', \dots, f^{(m-1)}$  türevleri sürekli ve üstel mertebeden ve  $f^{(m)}$  parçalı sürekli ise

$$\mathcal{L}\{f^{(m)}(t)\} = s^m f^*(s) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0^+) s^{m-1-k} \quad (3.39)$$

şeklindedir.

**iv.**  $t > 0$  olmak üzere  $f(t)$  ve  $g(t)$  fonksiyonlarının konvolüsyon çarpımı

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau \text{ ve bunun Laplace dönüşümü}$$

$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = F(s)G(s)$  biçimindedir. Burada  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$  ve  $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$  dir.

RL ve Caputo kesirli türevleri için Laplace dönüşümü özellikleri aşağıda verilmektedir.

**3.1.6 Tanım** (RL Kesirli Türevinin Laplace Dönüşümü [10]): RL kesirli türevinin Laplace dönüşümü:

$$\mathcal{L}\{D_{RL}^\alpha f(t)\} = s^\alpha f^*(s) - \sum_{k=0}^{m-1} D^k I^{m-\alpha} f(0^+) s^{m-1-k}, \quad m-1 < \alpha < m. \quad (3.40)$$

dir.

Dikkat edilirse bu tanım, kesirli türevli başlangıç koşulları gerektirmektedir.

**3.1.7 Tanım** (Caputo Kesirli Türevinin Laplace Dönüşümü [10]): Caputo kesirli türevinin Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha}\right\} = s^\alpha f^*(s) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0^+) s^{\alpha-1-k}, \quad m-1 < \alpha < m. \quad (3.41)$$

bağıntısı ile tanımlanır.

Burada RL türevinden farklı olarak tam sayı mertebeli türevli başlangıç koşulları yer almaktadır. Bu ise özellikle analitik çözüm aranılan problemlerde Caputo türevini kullanışlı yapmaktadır.

### 3.2 Ters Laplace Dönüşümü ile Mittag-Leffler Fonksiyonu Arasındaki İlişki

Kesirli türevli diferansiyel denklemlerin analitik çözümleri bulunurken ters Laplace dönüşümü uygulandığında iki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu elde edilir:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha + b}\right\} = t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(-bt^\alpha). \quad (3.42)$$

Özel halde  $\beta$  sırasıyla  $\beta = 1$ ,  $\beta = 2$  ve  $\beta = \alpha$  alındığında;



$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + b}\right\} = E_\alpha(-bt^\alpha), \quad (3.43)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{\alpha-2}}{s^\alpha + b}\right\} = tE_{\alpha,2}(-bt^\alpha), \quad (3.44)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^\alpha + b}\right\} = t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-bt^\alpha). \quad (3.45)$$

sonuçlarına ulaşılır. Analitik çözüm sürecinde eğer bu bağıntılarla sonuç elde edilebiliyorsa bu önemli bir avantajdır. Ancak bazen ters Laplace dönüşümü alındığında Mittag-Leffler gibi özellikleri bilinen cebirsel fonksiyonlar ortaya çıkmaz ve bu yüzden Laplace dönüşümü için nümerik yöntemlere başvurulur.

### 3.3 Fourier İntegral Dönüşümü

**3.3.1 Tanım** (Üstel ve Ters Üstel Fourier Dönüşümleri [10]):  $-\infty < x < \infty$  aralığında tanımlanan bir  $f(x)$  fonksiyonu eğer mutlak integrallenebilirse yani  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$  integrali yakınsak ise Fourier (Üstel Fourier) ve ters Fourier dönüşümleri sırasıyla

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \tilde{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix\xi} dx, \quad (3.46)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{\tilde{f}(\xi)\} = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\xi) e^{-ix\xi} d\xi \quad (3.47)$$

şeklinde tanımlanır.

Bir fonksiyonun  $m$ . mertebeden türevinin Fourier dönüşümü

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{d^m f(x)}{dx^m} \right\} = (-i\xi)^m \tilde{f}(\xi) \quad (3.48)$$

ve özel halde ikinci mertebeden türevinin Fourier dönüşümü

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right\} = -\xi^2 \tilde{f}(\xi) \quad (3.49)$$

biçimindedir. Bu özellik diferansiyel denklem çözümlerinde sıkça kullanılır. Üstel Fourier dönüşümünün konvolüsyon özelliği şöyledir:

$$f(x) * g(x) = \mathcal{F}^{-1} \{ \tilde{f}(\xi) \tilde{g}(\xi) \} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u) g(u) du. \quad (3.50)$$

**3.3.2 Tanım** (Sin-Fourier ve Ters Sin-Fourier Dönüşümleri [10]):  $0 \leq x < \infty$  aralığında mutlak integrallenebilir bir  $f(x)$  fonksiyonunun sin-Fourier ve ters dönüşümü sırasıyla aşağıdaki biçimde tanımlanır:

$$\mathcal{F} \{ f(x) \} = \tilde{f}(\xi) = \int_0^{\infty} f(x) \sin(x\xi) dx, \quad (3.51)$$

$$\mathcal{F}^{-1} \{ \tilde{f}(\xi) \} = f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{f}(\xi) \sin(x\xi) d\xi. \quad (3.52)$$

Eğer bir sınır-değer problemi Dirichlet sınır koşulları altında tanımlanmışsa sin-Fourier dönüşümü uygulanarak çözüme ulaşılır. İkinci mertebeden türev için dönüşümün özelliği

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right\} = -\xi^2 \tilde{f}(\xi) + \xi f(x) \Big|_{x=0} \quad (3.53)$$

olmaktadır.

**3.3.3 Tanım** (Cos-Fourier ve Ters Cos-Fourier Dönüşümleri [10]):  $0 \leq x < \infty$  aralığında mutlak integrallenebilir bir  $f(x)$  fonksiyonunun cos-Fourier ve ters dönüşümü sırasıyla aşağıdaki biçimde tanımlanır:

$$\mathcal{F} \{ f(x) \} = \tilde{f}(\xi) = \int_0^{\infty} f(x) \cos(x\xi) dx, \quad (3.54)$$

$$\mathcal{F}^{-1} \{ \tilde{f}(\xi) \} = f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{f}(\xi) \cos(x\xi) d\xi. \quad (3.55)$$

Benzer şekilde ikinci mertebeden türevin cos-Fourier dönüşümü

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right\} = -\xi^2 \tilde{f}(\xi) - \frac{df(x)}{dx} \Big|_{x=0} \quad (3.56)$$

dir. Bu özellikten de görüldüğü gibi eğer Neumann sınır koşulları altında sınır-değer problemi çözümlüyorsa cos-Fourier dönüşümü uygulanır.

### 3.3.4 Tanım (Sonlu Sin-Fourier ve Ters Sonlu Sin-Fourier Dönüşümleri

[10]):  $0 \leq x \leq L$  aralığında tanımlanan  $f(x)$  fonksiyonunun sonlu sin-Fourier ve ters

dönüşümü,  $\xi_k = \frac{k\pi}{L}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) olmak üzere

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \tilde{f}(\xi_k) = \int_0^L f(x) \sin(x\xi_k) dx, \quad (3.57)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{\tilde{f}(\xi_k)\} = f(x) = \frac{2}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{f}(\xi_k) \sin(x\xi_k). \quad (3.58)$$

olarak tanımlanır. Yine ikinci mertebeden türev için Dirichlet sınır koşulu gerektiren bağıntı

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\right\} = -\xi_k^2 \tilde{f}(\xi_k) + \xi_k \left[ f(0) - (-1)^k f(L) \right] \quad (3.59)$$

biçimindedir.

### 3.3.5 Tanım (Sonlu Cos-Fourier ve Ters Sonlu Cos-Fourier Dönüşümleri

[10]):  $0 \leq x \leq L$  aralığında tanımlanan  $f(x)$  fonksiyonunun sonlu cos-Fourier ve ters

dönüşümleri,  $\xi_k = \frac{k\pi}{L}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) olmak üzere

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \tilde{f}(\xi_k) = \int_0^L f(x) \cos(x\xi_k) dx \quad (3.60)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{\tilde{f}(\xi_k)\} = f(x) = \frac{1}{L} \tilde{f}(0) + \frac{2}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{f}(\xi_k) \cos(x\xi_k) = \frac{2}{L} \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{f}(\xi_k) \cos(x\xi_k) \quad (3.61)$$

olacak şekilde tanımlanır. Burada, toplam sembolünün üzerindeki tırnak gösterimi,  $k = 0$  a karşılık gelen terimin  $\frac{1}{2}$  ile çarpılması gerektiğini belirtir. Neumann sınır koşulu altında türev özelliği

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right\} = -\xi_k^2 \tilde{f}(\xi_k) - \frac{df(x)}{dx} \Big|_{x=0} + (-1)^k \frac{df(x)}{dx} \Big|_{x=L} \quad (3.62)$$

bağıntısı ile verilir.

### 3.4 Singüler Olmayan Üstel Tipten Çekirdek Fonksiyonlu Türev Operatörleri

#### 3.4.1 Caputo-Fabrizio Türevi

Bilindiği üzere RL ve Caputo gibi geleneksel kesirli türev tanımları singüler yapıdaki kuvvet çekirdek fonksiyonu içerir. Teorik olarak kendiliğinden ortaya çıkan bu tipteki çekirdek fonksiyonları matematiksel modellemede iki sebepten zorluk ortaya çıkarmaktadır. Bunlardan ilki, singüleriteden kaynaklanan hesapsal zorluk ve yoğun nümerik hesaplamaların gerekliliğidir ki bu çoğu zaman oldukça karmaşık bilgisayar algoritmalarının geliştirilmesiyle aşılabılır. Bu ise hem zaman hem de maliyet açısından dezavantaja dönüşebilir. İkinci zorluk ise kuvvet fonksiyonu şeklindeki çekirdek fonksiyonlarının doğada üstel tipten davranış gösteren olguların modellenmesindeki yetersizlikleridir. Örneğin, birden fazla reaksiyona giren maddenin yer aldığı bir kimyasal reaksiyon olayındaki konsantrasyon değişimi, akiferlerdeki yer altı suyunun yayılımı, ısı transferi, metabolizma içindeki ilaç salınımları ve toksik maddelerin taşınımı, elektromanyetik radyasyon yoğunluğu, mekanik sarkaçların sönümleri gibi çok sayıda olay üstel fonksiyon yasasına uygun davranır. Tüm bunları göz önüne alarak Caputo ve Fabrizio 2015 yılında Caputo kesirli türevinin çekirdek fonksiyonu olan  $(t - \tau)^{-\alpha}$  ifadesini  $\exp\left(-\frac{a}{1-a}t\right)$  ifadesi

ile  $\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}$  katsayısını  $\frac{M(\alpha)}{1-\alpha}$  katsayısı ile değiştirerek aşağıdaki tanımı elde etmişlerdir.

**3.4.1.1 Tanım [12]:**  $(a, b)$  aralığında bir boyutlu Sobolev uzayı

$$H^1(a, b) = \{u \mid u \text{ mutlak sürekli ve } u' \in L^2(a, b)\} \quad (3.63)$$

olarak tanımlanır.

**3.4.1.2 Tanım (Caputo-Fabrizio Türevi [1]):**  $f \in H^1(a, b)$ ,  $b > a$  ve  $0 < \alpha \leq 1$  olmak üzere Caputo-Fabrizio türevi

$${}^{CF}D_t^\alpha f(t) = \frac{M(\alpha)}{(1-\alpha)} \int_a^t f'(\tau) \exp\left[-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}\right] d\tau \quad (3.64)$$

biçiminde tanımlanır. Burada  $M(\alpha)$ ,  $M(0) = M(1) = 1$  şartını sağlayan bir normleştirme fonksiyonudur.

Eğer özel halde  $\sigma = \frac{1-\alpha}{\alpha} \in [0, \infty]$  ve  $\alpha = \frac{1}{1+\sigma} \in [0, 1]$  olarak alınırsa tanım aşağıdaki formda ifade edilir:

$${}^{CF}D_t^\sigma(f(t)) = \frac{N(\sigma)}{\sigma} \int_a^t f'(x) \exp\left[-\frac{(t-\tau)}{\sigma}\right] d\tau. \quad (3.65)$$

Dikkat edilirse Caputo-Fabrizio (CF) türevinde de Caputo türevindeki gibi sabitin türevi 0'dır. Ancak Caputo türevinden farklı olarak CF tanımında  $t = \tau$  noktasında singülerite yoktur.

CF türevi  $H^1(a, b)$  ait olmayan fonksiyonlara da uygulanabilir.  $\alpha \in (0, 1]$  için ve  $f \in L^1(-\infty, b)$  olmak üzere

$${}^{CF}D_t^\alpha f(t) = \frac{\alpha M(\alpha)}{1-\alpha} \int_{-\infty}^t (f(t) - f(\tau)) \exp\left[-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}\right] d\tau \quad (3.66)$$

Ayrıca

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma} \exp\left[-\frac{(t-\tau)}{\sigma}\right] = \delta(t-\tau) \quad (3.67)$$

özellği göz önüne alınarak

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} {}^{CF}D_a^\alpha f(t) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{N(\sigma)}{\sigma} \int_a^t f'(\tau) \exp\left[-\frac{(t-\tau)}{\sigma}\right] d\tau = f'(t) \quad (3.68)$$

olduğu görülür. Diğer yandan,  $\alpha \rightarrow 0$  ( $\sigma \rightarrow +\infty$ ) olduğunda,

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} {}^{CF}D_a^\alpha f(t) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_a^t f'(\tau) \exp\left[-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}\right] d\tau \\ &= \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{N(\sigma)}{\sigma} \int_a^t f'(\tau) \exp\left[-\frac{(t-\tau)}{\sigma}\right] d\tau = f(t) - f(a) \end{aligned} \quad (3.69)$$

elde edilir.

$0 < \alpha \leq 1$  olmak üzere CF türevinin Laplace dönüşümü konvolüsyon özelliği göz önüne alınarak aşağıdaki biçimde elde edilebilir [1].

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{{}^{CF}D_a^\alpha f(t)\right\} &= \frac{1}{1-\alpha} \int_0^\infty \exp(-st) \int_0^t f'(\tau) \exp\left[-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}\right] d\tau dt \\
&= \frac{1}{1-\alpha} \mathcal{L}\{f'(t)\} \mathcal{L}\left\{\exp\left[-\frac{\alpha t}{1-\alpha}\right]\right\} \\
&= \frac{s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)}{s + \alpha(1-s)},
\end{aligned} \tag{3.70}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{{}^{CF}D_a^{\alpha+1} f(t)\right\} &= \frac{1}{1-\alpha} \mathcal{L}\{f''(t)\} \mathcal{L}\left\{\exp\left[-\frac{\alpha t}{1-\alpha}\right]\right\} \\
&= \frac{s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)}{s + \alpha(1-s)}
\end{aligned} \tag{3.71}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{{}^{CF}D_a^{\alpha+n} f(t)\right\} &= \frac{1}{1-\alpha} \mathcal{L}\{f^{(n+1)}(t)\} \mathcal{L}\left\{\exp\left[-\frac{\alpha t}{1-\alpha}\right]\right\} \\
&= \frac{s^{n+1}\mathcal{L}\{f(t)\} - s^n f(0) - s^{n-1} f'(0) - \dots - f^{(n)}(0)}{s + \alpha(1-s)}
\end{aligned} \tag{3.72}$$

### 3.4.2 Atangana-Baleanu Kesirli Türevi

Atangana ve Baleanu 2016 yılında CF kesirli türevindeki üstel çekirdek fonksiyonunu Mittag-Leffler fonksiyonu ile değiştirerek daha genel bir tanım elde



etmişlerdir. Atangana-Baleanu türevi olarak bilinen bu yeni tanımın ortaya çıkışı aşağıdaki yaklaşıma dayanmaktadır:

$$E_\alpha(-t^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (3.73)$$

fonksiyonunu göz önüne alalım.  $t$  noktasının bir komşuluğunda  $\exp(-(t-y))$  fonksiyonunun Taylor serisi açılımı

$$\exp(-a(t-y)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-a(t-y))^k}{k!} \quad (3.74)$$

biçimindedir. Burada  $a = \frac{\alpha}{1-\alpha}$  alınır ve (3.64) eşitliğinde yerine yazılırsa

$${}^{CF}_b D_t^\alpha (f(t)) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-a)^k}{k!} \int_b^t \frac{df(y)}{dy} (t-y)^k dy \quad (3.75)$$

ifadesi elde edilir. (3.75) eşitliğindeki  $k!$  terimi  $\Gamma(\alpha k + 1)$  ve  $(t-y)^k$  çekirdeği  $(t-y)^{\alpha k}$  ile değiştirilirse

$${}^{CF}_b D_t^\alpha (f(t)) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-a)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \int_b^t \frac{df(y)}{dy} (t-y)^{\alpha k} dy \quad (3.76)$$

sonucuna ulaşılır. Bunun sonucu olarak, aşağıdaki türev tanımı ortaya konmuştur.

**3.4.2.1 Tanım** (Caputo Anlamında Atangana-Baleanu Türevi [2]):  
 $f \in H^1(a,b)$ ,  $b > a$  ve  $\alpha \in [0,1]$  olsun. Caputo anlamında Atangana-Baleanu türevi

$${}^{ABC}D_t^\alpha (f(t)) = \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} \int_b^t f'(x) E_\alpha \left[ -\alpha \frac{(t-x)^\alpha}{1-\alpha} \right] dx \quad (3.77)$$

olarak tanımlanır. Buradaki  $B(\alpha)$ , CF türevinde yer alan normalleştirme fonksiyonudur.

Dikkat edilirse verilen fonksiyonun orijinde sıfır olması durumu hariç  $\alpha \rightarrow 0$  limit durumunda türev hesaplandığında fonksiyonun kendisi elde edilemez. Bu zayıflığı gidermek için türev tanımı RL formunda aşağıdaki biçimde de önerilmiştir.

**3.4.2.2 Tanım** (RL Anlamında Atangana-Baleanu Türevi [2]):  
 $f \in H^1(a,b)$ ,  $b > a$  ve  $\alpha \in [0,1]$  olmak üzere RL anlamında Atanga-Baleanu türevi

$${}^{ABR}D_t^\alpha (f(t)) = \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} \frac{d}{dt} \int_b^t f(x) E_\alpha \left[ -\alpha \frac{(t-x)^\alpha}{1-\alpha} \right] dx \quad (3.78)$$

olarak tanımlanır.

Caputo anlamında olduğu gibi sabit fonksiyonun türevi sıfırdır. Sırasıyla Caputo ve RL anlamında Atangana-Baleanu (AB) türevinin Laplace dönüşümü özellikleri

$$\mathcal{L}\left\{{}^{ABR}D_t^\alpha (f(t))\right\}(s) = \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} \frac{s^\alpha \mathcal{L}\{f(t)\}(s)}{s^\alpha + \frac{\alpha}{1-\alpha}}, \quad (3.79)$$

$$\mathcal{L}\{ {}^{ABC}D_t^\alpha (f(t)) \}(s) = \frac{B(\alpha) s^\alpha \mathcal{L}\{f(t)\}(s) - s^{\alpha-1} f(0)}{s^\alpha + \frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad (3.80)$$

olarak bilinir. (3.79) ve (3.80) eşitlikleri kullanılarak aşağıdaki teorem verilebilir.

**3.4.2.1 Teorem [2]:**  $f \in H^1(a,b)$ ,  $b > a$  ve  $\alpha \in [0,1]$  olsun. İki türev arasındaki ilişki

$${}^{ABC}D_t^\alpha (f(t)) = {}^{ABR}D_t^\alpha (f(t)) - \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} f(0) E_\alpha \left[ -\frac{\alpha}{1-\alpha} t^\alpha \right] \quad (3.81)$$

bağıntısı ile açıklanır.

$f$ ,  $n \in \mathbb{N}$  olmak üzere  $n$ . mertebeden diferansiyellenebilir bir fonksiyon ise  $f^{(k)}(0) = 0$  ( $k = 1, 2, 3, \dots, n$ ) koşulları altında aşağıdaki bağıntı geçerlidir:

$${}^{ABC}D_t^\alpha \left( \frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) = \frac{d^n}{dt^n} \left( {}^{ABR}D_t^\alpha (f(t)) \right). \quad (3.82)$$

**3.4.2.3 Tanım (Atangana-Baleanu İntegrali [2]):** Atangana-Baleanu integrali,

$${}^{AB}I_t^\alpha \{f(t)\} = \frac{1-\alpha}{B(\alpha)} f(t) + \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_a^t f(y)(t-y)^{\alpha-1} dy \quad (3.83)$$

$\alpha = 0$  olduğunda başlangıç fonksiyonunu sağlar ve  $\alpha = 1$  olduğunda klasik integral elde edilir.

### 3.4.3 Literatür Çalışmaları

RL ve Caputo kesirli türevleri, gerçek dünya problemlerinden ortaya çıkan kalıtsallık ve bellek özelliklerini tanımlamak için avantajlı olsa da, her iki türev de hafızalı sistemlerdeki hafıza özelliğini tam olarak ifade etmede yeterli değildir. Aynı zamanda tanımlarındaki çekirdek fonksiyonu singüler özelliğe sahip olduğundan dolayı analitik çözümler elde etmek genellikle zordur [13-18]. Ayrıca difüzyon, ısı transferi ve gerilme-gerinme ilişkileri gibi birçok dağıtıcı fiziksel süreç, çekirdek fonksiyonuna tam olarak uymaz. Geleneksel kesirli türevlerin doğal tanımlarından kaynaklanan tüm bu yetersizlikler, singüler olmayan çekirdekli yeni kesirli türevlerin tanımlanmasına sebep olmuştur.

Bu eksiklikleri gidermek amacıyla ilk olarak 2015 yılında Caputo ve Fabrizio [1] kendi adlarıyla anılan singüler olmayan üstel çekirdek fonksiyonlu kesirli türevi; ardından 2016 yılında Atangana ve Baleanu [2] genelleştirilmiş üstel fonksiyona karşılık gelen Mittag-Leffler çekirdek fonksiyonlu kesirli türevleri ortaya koymuşlardır. Bu operatörler mühendislik problemlerinde zaman filtreleri olarak da düşünülmektedir ve bu nedenle kesirli parametre bir türev mertebesi olmasının yanı sıra bir filtre regülatörü olarak da işlev görmektedir [19,20]. Bu yeni singüler olmayan operatörler, uygulamalı bilimlerin çeşitli alanlarında madde heterojenliklerini göz önüne almak ve farklı ölçeklerdeki birçok taşıma olayını modellemek için geleneksel kesirli türevlere oldukça iyi alternatif olmuştur. Losada ve Nieto [21], CF türevinin kesirli integralini tanımlamışlardır. İntegral tanımını kullanarak, Caputo ve Fabrizio [22], kesirli difüzyon denklemiyle ilgili temel matematiksel ilişkiler ortaya koymuşlardır. Caputo ve CF türevlerinin bir kısmı diferansiyel denklem üzerindeki etkilerini karşılaştırmak için Baleanu ve diğ. [23] bazı iterasyonel teknikleri kullanarak nümerik çözümleri vermişlerdir. Rubbab ve diğ. [24], CF türevli bir adveksiyon-difüzyon denkleminin Dirichlet probleminin analitik çözümlerini incelemişlerdir. Hristov [25], Jeffrey'nin üstel çekirdeği tarafından modellenen akı gevşemesi için Cattaneo modeli ile CF türevli ısı difüzyonu arasındaki gerçek fiziksel ilişkiyi vermiştir. Yine, Hristov [26], CF tanımının akı ile üstel bozunma yasasının gradyanı arasındaki temel bir ilişkiden kaynaklandığını göstermiştir. Singh ve diğ. [27], CF türeviyle tanımlanan bilgisayar

virüsleri için epidemiyolojik bir modelin çözümünün varlığını ve tekliğini incelemişlerdir. Evirgen ve Yavuz [28], CF türevli optimizasyon problemi için optimal çözüm yörüngelerini araştırmışlardır. Owolabi ve Atangana [29], CF türevi ile tanımlanan adi diferansiyel denklem için yeni bir üç adımlı kesirli Adams-Bashforth şeması önermişlerdir. Alkahtani ve Atangana [30], CF türevi ile modellenen sıgı suyun hareketini kontrol etmişlerdir. Zhou ve diğ. [31], gözenekli ortamdaki Darcian olmayan akış ve çözünen madde taşınımını CF türevi ile modellemişler ve çözüm için Laplace integral dönüşümünü kullanarak analitik çözümler elde etmişlerdir. Ullah ve diğ. [32], CF türevinin tüberküloz modelinin dinamikleri üzerindeki etkisini incelemişlerdir. Qureshi ve diğ. [33], CF türevinin nümerik yönlerini araştırmışlar ve çalışmalarında yeni nümerik bir yaklaşım tanımlamışlardır. Dokuyucu ve diğ. [34], kanser tedavisi için bir model incelemişler ve modelin çözümünün varlığını incelemek için CF türevini uygulamışlardır. Ardından, çözümün tekliği araştırmış ve modelin hangi koşullar altında tek bir çözüm sağladığı tespit edilmişlerdir.

Yavuz ve Özdemir [35], CF ve AB türevlerini içeren kısmi diferansiyel denklem tipleri için nümerik bir çözüm yöntemi olan Laplace homotopi dönüşüm yöntemini önermişlerdir. Uçar ve diğ. [36], sigara içme modelinin dinamiklerini ve halk sağlığı üzerindeki etkisini AB türevi ile incelemişlerdir. İlgili modele ait varlık ve teklik problemlerini, sabit nokta teorisi ile incelemişlerdir. Owolabi ve Atangana [37], Adams-Bashforth methodunu kullanarak AB türeviyle modellenen bir kaotik sistemin yaklaşık çözümlerini elde etmişlerdir. Aynı şekilde Owolabi ve Atangana [38], AB türevli epidemik bir HIV / AIDS bulaşıcı sisteminin davranışını incelemişlerdir. Owolabi [39], Caputo ve AB türevlerini içeren lineer olmayan reaksiyon-difüzyon denklemini yarı-nümerik Laplace Adams - Bashforth metodunu kullanarak çözmüşlerdir. Gomez-Aguilar ve diğ. [40], çalışmalarında AB türevini Caputo ve RL anlamında kullanarak, RC, LC ve RL elektrik serileri için analitik çözümler elde etmişlerdir. Alkahtani ve Koca [41], bir av-avcı modelindeki hafıza etkisini AB türeviyle ilişkilendirerek çözümlerin varlığı ve tekliği üzerine çalışmışlardır. Alkahtani [42], serbest akifer olarak bilinen yeraltı oluşumunda AB türevli yer altı suyu modelini incelemiştir. Atangana ve Koca [43], AB türevine sahip Lorenz çekicinin doğrusal olmayan bir sistemdeki kaotik yapısını incelemişlerdir.

Yavuz ve diğ. [44], singüler ve singüler olmayan çekirdekli zaman kesirli kısmi diferansiyel denklemlerin yaklaşık analitik çözümlerini elde etmişlerdir. Farklı bir bakış açısı kazandırarak Atangana [45-47], RL, CF ve AB türevlerinin olasılık teorisiyle ilişkisini karşılaştırmalı olarak ortaya koymuştur. Otomatik kontrol ve sinyal alanlarında singüler olmayan türevler tarafından modellenen gerçek dünya problemlerinin kararlılık ve yakınsama analizini tanımlamak için transfer fonksiyonları ve Bode diyagramları yine Atangana tarafından sunulmuştur [48]. Bütün bu çalışmalara ek olarak literatürde CF ve AB türevlerinin birçok gerçek dünya problemlerine uygulaması yer almaktadır [49-56].

#### 4. ADVEKSİYON-DİFÜZYON DENKLEMİ

Herhangi bir güç alanında, belli bir düzlemin belli bir kesitinden geçtiği varsayılan güç çizgisi akı olarak ifade edilmektedir. Bir nehirde veya akıntı olan bir akışkan maddeden küçük bir kesit alanı alındığında bu alana giren ve çıkan akı miktarlarını düşünerek aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$V \frac{dc}{dt} = q(x, t)A - q(x + \Delta x, t)A. \quad (4.1)$$

Burada  $c$  kesit alandaki madde konsantrasyonunu ve  $q$  akıyı ifade eder. (4.1) eşitliği düzenirse

$$\frac{dc}{dt} = -\frac{q(x + \Delta x, t) - q(x, t)}{\Delta x} \quad (4.2)$$

ifadesi elde edilir. (4.2) eşitliği aşağıdaki gibi yeniden ifade edilebilir:

$$\Delta x : \frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x}. \quad (4.3)$$

Akı ve konsantrasyon arasındaki ilişkiyi açıklayan birinci Fick yasası

$$q = -a \frac{\partial c}{\partial x} \quad (4.4)$$

bağıntısı ile bilinir. (4.3) ve (4.4) eşitlikleri kullanılarak

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( a \frac{\partial c}{\partial x} \right) = a \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad (4.5)$$

sonucuna ulaşılır. (4.5) eşitliği difüzyon denkleminin ifadesidir. Bu eşitliğe adveksiyon tipi iletim de etki ederse adveksiyon-difüzyon denklemi elde edilmiş olur. Bir boyutlu adveksiyon-difüzyon denklemi

$$\frac{\partial c}{\partial t} = a \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - v \frac{\partial c}{\partial x} \quad (4.6)$$

şeklindedir. Bu denklemde  $a$  difüzyon katsayısını ve  $v$  sapma parametresi (yatay yönlü iletim hızı) olarak bilinir. Yer altı suyunun akışı, gözenekli ortamdaki ısı ve kütle transferleri, nehirlerde kirletici madde taşınımı, deniz suyunda kimyasal olarak reaksiyona giren sıvının yayılması, havaya salınan gazların atmosferi kirletmesi gibi birçok taşınım olayı adveksiyon-difüzyon denklemiyle ifade edilmektedir. Farklı bilim alanlarında uygulamaları olması nedeniyle araştırmacılar arasında ilgi duyulan bir konu olmuştur. [57-60].

Fick yasasının lokal olmayan genellemesi, Caputo türevli adveksiyon-difüzyon denkleminin yol açar. Kesirli adveksiyon-difüzyon denkleminin matematiksel ve fiziksel arka planına dair kapsamlı bir araştırma Povstenko tarafından ortaya konmuştur [61]. Farklı boyutlu kesirli adveksiyon-difüzyon denkleminin analitik çözümleri Green, Fox ve H- fonksiyonları cinsinden elde edilmiştir [62, 63]. Diğer yandan, zaman kesirli adveksiyon-difüzyon denkleminin temel çözümleri, kaztezyen düzlemin farklı bölgelerinde integral dönüşüm teknikleri kullanılarak Mittag-Leffler fonksiyonların çeşitli kombinasyonları şeklinde elde edilmiştir [64-67].



## 5. ATANGANA-BALEANU TÜREVLİ ADVEKSİYON-DİFÜZYON DENKLEMİNİN TEMEL ÇÖZÜMLERİ

Bu tezde, adveksiyon-difüzyon denklemi AB türeviyle tanımlanmaktadır. Belli başlangıç ve sınır koşulları göz önüne alınarak farklı iletim (taşınım) bölgelerindeki difüzyon davranışı incelenmiştir. Temel çözümlerin elde edilmesinde tanım bölgesine uygun integral dönüşüm teknikleri seçilmiştir. Elde edilen sonuçların avantajı vurgulanırken Povstenko'nun [61,64-67] çalışmaları referans olarak alınmıştır.

### 5.1 Reel Eksende Cauchy Probleminin Çözümü

Bu kısımda, AB türevli adveksiyon-difüzyon denklemi

$${}^{ABC}D_t^\alpha c(x,t) = a \frac{\partial^2 c(x,t)}{\partial x^2} - v \frac{\partial c(x,t)}{\partial x}, \quad (5.1)$$
$$(0 < \alpha \leq 1, -\infty < x < \infty, 0 < t < \infty)$$

olmak üzere

$$t = 0: \quad c(x,0) = \delta(x) \quad (5.2)$$

başlangıç koşulu ve

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} c(x,t) = 0 \quad (5.3)$$

sonsuzdaki limit koşulu dikkate alınmaktadır.

Fiziksel olarak  $a > 0$  difüzyon katsayısını ve  $v > 0$  yatay yönlü sıvı iletim hızını, diğer bir deyişle  $x$ -ekseni boyunca sapma parametresini ifade eder. (5.1)-(5.3) eşitlikleriyle tanımlanan problemi daha basit forma indirgemek için  $u(x,t)$  yardımcı fonksiyonu tanımlanır:

$$c(x,t) = \exp\left(\frac{vx}{2a}\right)u(x,t). \quad (5.4)$$

Burada Dirac delta fonksiyonunun  $f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x)$  özelliğini kullanarak problem

$${}^{ABC}D_t^\alpha u(x,t) = a \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{v}{4a}u(x,t) \quad (5.5)$$

$$u(x,0) = \delta(x), \quad (5.6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x,t) = 0$$

şeklinde indirgenir. Bu indirgenmiş problemin çözümü için  $t$  zaman değişkenine Laplace dönüşümü,  $x$  değişkenine denklemin tanım aralığı göz önüne alınarak üstel Fourier dönüşümü uygulandığında

$$\tilde{u}^*(\xi, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\gamma}{\gamma + a\xi^2 + \frac{v^2}{4a}} \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \frac{\alpha\gamma \left(a\xi^2 + \frac{v^2}{4a}\right)}{\gamma + a\xi^2 + \frac{v^2}{4a}}}, \quad \gamma = \frac{1}{1-\alpha} \quad (5.7)$$

şeklinde elde edilir. Burada  $\mathcal{L}\{u(x,t)\} = u^*(x,s)$  ve  $\mathcal{F}\{u(x,t)\} = \tilde{u}(\xi,t)$  gösterimleri kullanılmıştır.

İntegral dönüşümlerinin tersi uygulandığında ve Euler formülü dikkate alındığında yardımcı fonksiyon

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma}{\gamma + a\xi^2 + \frac{v^2}{4a}} E_{\alpha} \left( -\frac{\alpha\gamma \left( a\xi^2 + \frac{v^2}{4a} \right)}{\gamma + a\xi^2 + \frac{v^2}{4a}} t^{\alpha} \right) \cos(x\xi) d\xi \quad (5.8)$$

olarak elde edilir. Elde edilen  $u(x,t)$  yardımcı fonksiyonu (5.4) eşitliğinde yerine yazılırsa reel ekseninde tanımlanan Cauchy probleminin temel çözümü

$$c(x,t) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(\frac{vx}{2a}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma}{\gamma + a\xi^2 + \frac{v^2}{4a}} E_{\alpha} \left( -\frac{\alpha\gamma \left( a\xi^2 + \frac{v^2}{4a} \right)}{\gamma + a\xi^2 + \frac{v^2}{4a}} t^{\alpha} \right) \cos(x\xi) d\xi \quad (5.9)$$

şeklinde elde edilir. Özel halde  $\alpha = 1$  ( $\gamma \rightarrow \infty$ ) olması durumunda klasik adveksiyon-difüzyon denkleminin temel çözümüne ulaşılır:

$$c(x,t) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(\frac{vx}{2a}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\left(a\xi^2 + \frac{v^2}{4a}\right)t\right) \cos(x\xi) d\xi. \quad (5.10)$$

Sonucu sadeleştirmek için

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at\xi^2} \cos(x\xi) d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{at}} \exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right) \quad (5.11)$$

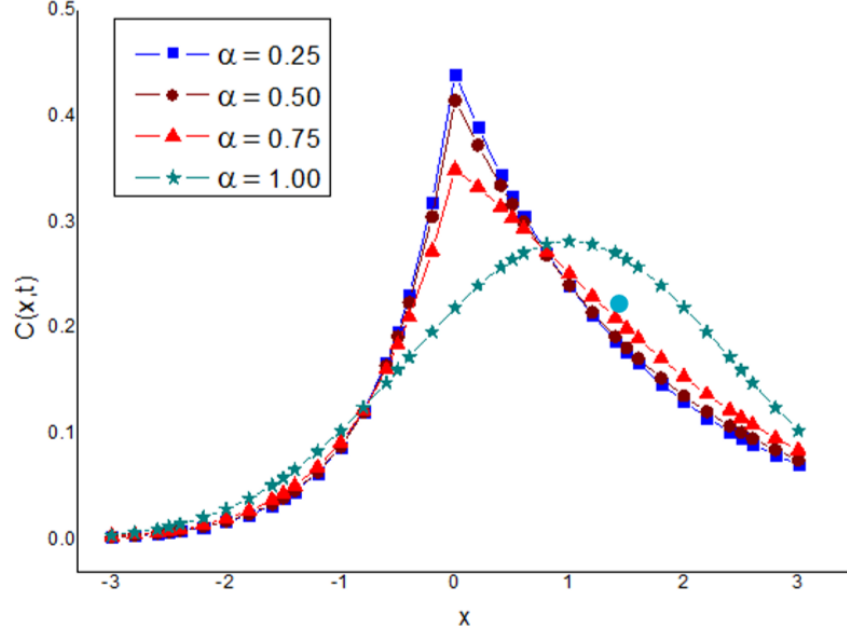
bağıntısından yararlanılırsa çözüm aşağıdaki forma dönüşür:

$$c(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \exp\left[-\frac{(x-vt)^2}{4at}\right]. \quad (5.12)$$

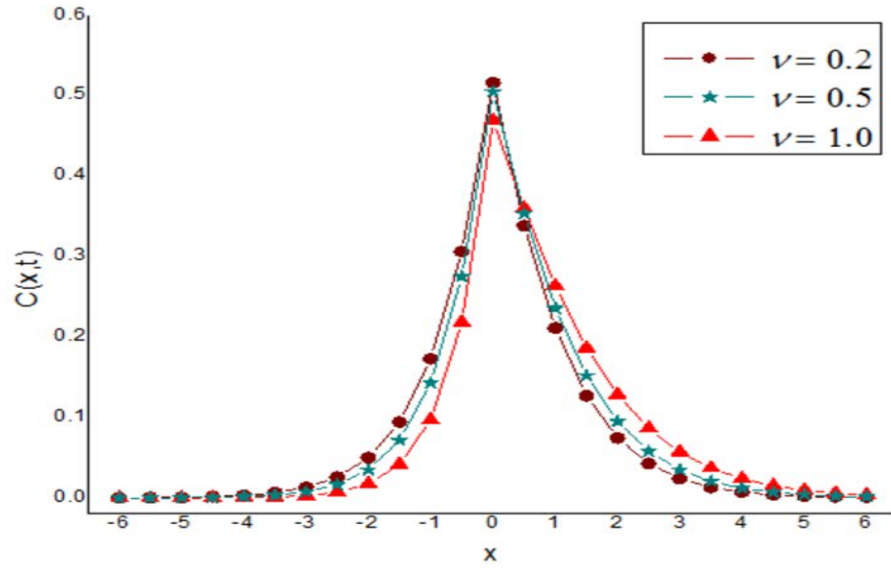
Bu ve bundan sonraki bölümlerde elde edilen matematiksel çözümlerin fiziksel davranışlarını problem parametrelerinin değişimine göre incelemek için MAPLE programı kullanılarak elde edilen grafiklere yer verilmiştir.

Bu amaçla Şekil 5.1’de  $a = v = t_{son} = 1$  keyfi parametre seçimleri yapılarak  $\alpha$  ’nın değişimi altında konsantrasyon değişimi incelenmiştir.  $\alpha \in (0,1)$  için orijin etrafında keskin bir yayılım gözlenirken  $\alpha = 1$  durumunda yerini düzgün bir davranışa bırakmıştır.  $v$  parametresi, yatay yönlü hız alanını belirtir. Bu yüzden sapma parametresi olarak da bilinir.

Şekil 5.2’de  $\alpha = 0.5$  alınarak  $v$  sapma parametresinin etkisi araştırılmıştır. Sapmanın 0’dan 1’e değiştiğe konsantrasyonun maksimum değeri küçülmektedir. Ancak davranışında anlamlı bir değişim söz konusu değildir.



Şekil 5.1: Cauchy probleminin temel çözümünde  $a = v = t_{son} = 1$  değerleri için  $\alpha$  nın değişmesiyle oluşan konsantrasyon değişimi.



Şekil 5.2: Cauchy probleminin temel çözümünde  $\alpha = 0.5$  ,  $a = t_{son} = 1$  değerleri için  $\nu$  sapma parametresinin etkisi.

## 5.2 Reel Eksende Kaynak Probleminin Çözümü

Kaynak terimli, AB türevli adveksiyon-difüzyon denklemi

$${}^{ABC}D_t^\alpha c(x,t) = a \frac{\partial^2 c(x,t)}{\partial x^2} - v \frac{\partial c(x,t)}{\partial x} + \delta(x)\delta(t) \quad (5.13)$$

$$0 < \alpha \leq 1, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t < \infty, \quad a > 0, \quad v > 0$$

biçiminde tanımlanmıştır. Problemin başlangıç koşulu ve sonsuzdaki limit koşulu sırasıyla

$$t = 0: \quad c(x,0) = 0, \quad (5.14)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} c(x,t) = 0$$

olarak alınır. Cauchy probleminde yaptığımız çözüme benzer şekilde (5.4) denklemiyle ifade edilen yardımcı fonksiyon kullanılır. Bu durumda kaynak probleminin indirgenmiş formu:

$${}^{ABC}D_t^\alpha u(x,t) = a \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{v^2}{4a} u(x,t) + \delta(x)\delta(t) \quad (5.15)$$

olur. Denklemin başlangıç ve limit koşulu ise

$$u(x,t) = 0, \quad (5.16)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x,t) = 0$$

şekline dönüşür. (5.15) denkleminde Laplace ve üstel Fourier dönüşümleri uygulandığında

$$\tilde{u}^*(\xi, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{1}{\gamma + a\xi^2 + \frac{v^2}{4a}} + \frac{\alpha\gamma^2}{\left(\gamma + a\xi^2 + \frac{v^2}{4a}\right)^2} \frac{1}{s^\alpha + \frac{\alpha\gamma\left(a\xi^2 + \frac{v^2}{4a}\right)}{\gamma + a\xi^2 + \frac{v^2}{4a}}} \right) \quad (5.17)$$

ifadesi elde edilir. Bu denkleme ters Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$\tilde{u}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{\delta(t)}{\gamma + a\xi^2 + \frac{v^2}{4a}} + \frac{\alpha\gamma^2}{\left(\gamma + a\xi^2 + \frac{v^2}{4a}\right)^2} t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha} \left( -\frac{\alpha\gamma\left(a\xi^2 + \frac{v^2}{4a}\right)}{\gamma + a\xi^2 + \frac{v^2}{4a}} t^\alpha \right) \right) \quad (5.18)$$

şeklinde elde edilir.  $|x| > 0, t > 0$  için denkleminde birinci terimdeki  $\delta(t) = 0$  dır ve  $t = 0$  noktasında tanımlı değildir. Bu durum göz önünde bulundurularak ters üstel Fourier dönüşümü uygulanırsa

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha\gamma^2}{\left(\gamma + a\xi^2 + \frac{v^2}{4a}\right)^2} t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha} \left( -\frac{\alpha\gamma\left(a\xi^2 + \frac{v^2}{4a}\right)}{\gamma + a\xi^2 + \frac{v^2}{4a}} t^\alpha \right) \cos(x\xi) d\xi \quad (5.19)$$

sonucu elde edilir. (5.4) eşitliğinde yerine yazılırsa problemin çözümü

$$c(x,t) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(\frac{vx}{2a}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\alpha\gamma^2}{\left(\gamma + a\xi^2 + \frac{v^2}{4a}\right)^2} \right. \\ \left. \times t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left( -\frac{\alpha\gamma \left( a\xi^2 + \frac{v^2}{4a} \right)}{\gamma + a\xi^2 + \frac{v^2}{4a}} t^\alpha \right) \cos(x\xi) \right] d\xi \quad (5.20)$$

olarak elde edilir. (5.20) çözümünde  $\alpha=1$  ( $\gamma \rightarrow \infty$ ) alırsa kaynak terim ile tanımlanan klasik adveksiyon-difüzyon denkleminin temel çözümü

$$c(x,t) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(\frac{vx}{2a}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\left(a\xi^2 + \frac{v^2}{4a}\right)t\right) \cos(x\xi) d\xi \quad (5.21)$$

bulunur. Reel ekseninde Cauchy probleminin çözümünde kullanılan (5.11) bağıntısı (5.21) çözümünde kullanıldığında

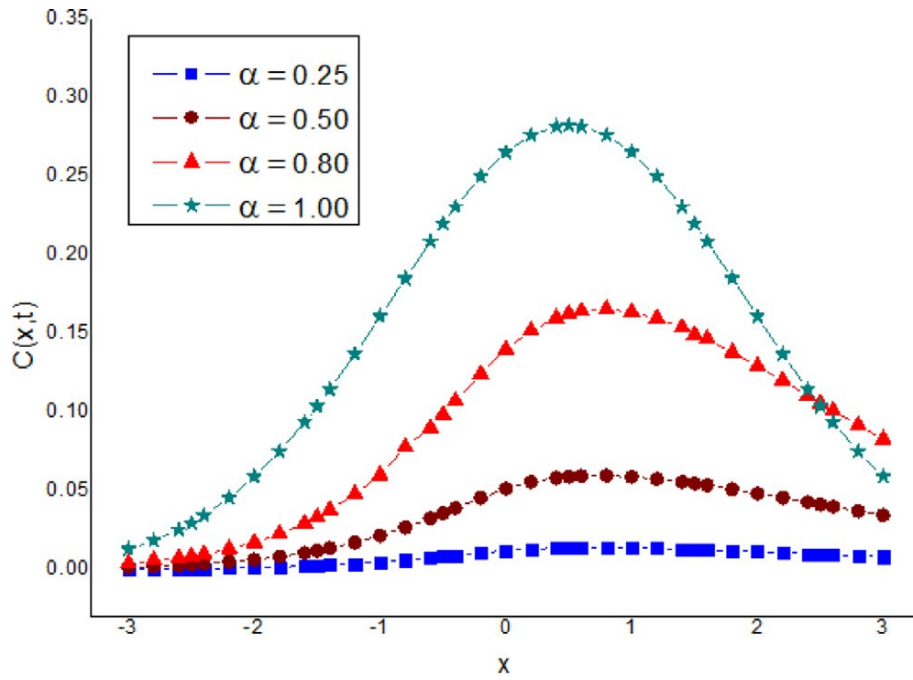
$$c(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \exp\left[-\frac{(x-vt)^2}{4at}\right] \quad (5.22)$$

elde edilir.

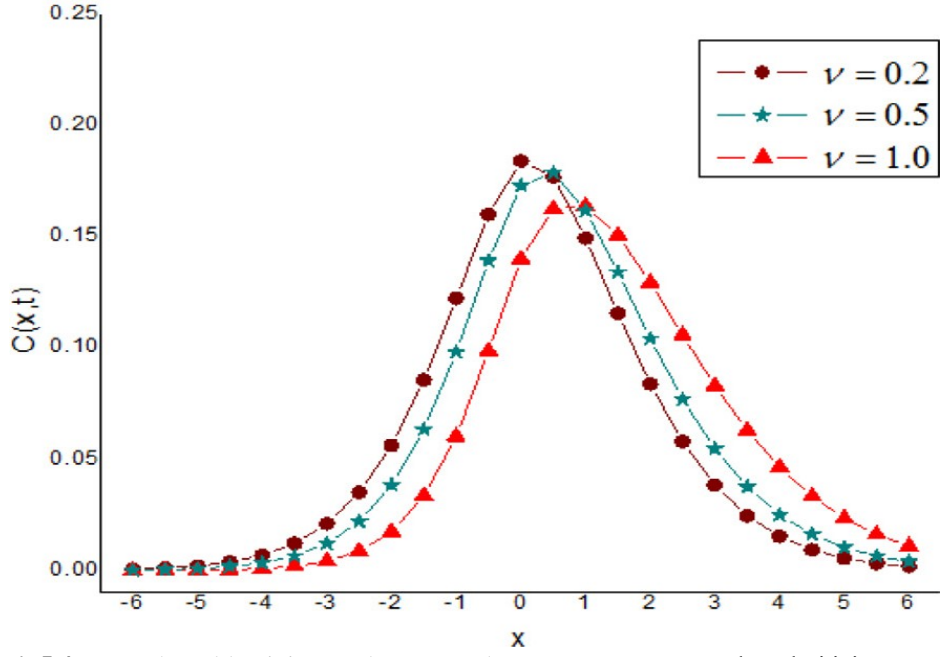
Şekil 5.3'te Cauchy sonuçlarında meydana gelen başlangıçtaki keskinliğin Source çözümlerinde görünmemektedir. Grafik farklı  $\alpha$  kesirli parametre değerleri için konsantrasyon fonksiyonunun profillerini gösterir. Beklendiği gibi  $\alpha$ , 0 ile 1 arasında değişirken konsantrasyon artar.



$\nu$  sapma parametresinin etkisi Şekil 5.4'te görüldüğü gibi Cauchy problemine oldukça benzerdir. Ayrıca konsantrasyon fonksiyonu,  $x$  – yönünde kayda değer bir sapma özelliğine sahiptir. Bu da kaynak sonuçlarının sapma parametresine Cauchy probleminden daha duyarlı olduğunu ortaya çıkarır.



Şekil 5.3: Kaynak probleminin temel çözümünde  $a = \nu = t_{son} = 1$  değerleri için  $\alpha$  'nın değişmesiyle oluşan fiziksel davranış.



Şekil 5.4: Kaynak probleminin temel çözümünde  $\alpha = 0.5$  ,  $a = t_{son} = 1$  değerleri için  $\nu$  sapma parametresinin etkisi.

### 5.3 Yarı Sonsuz Aralıkta Cauchy Probleminin Çözümü

AB türevli adveksiyon-difüzyon denklemi aşağıdaki şekilde ele alındığında,

$${}^{ABC}D_{\alpha}^t c(x,t) = a \frac{\partial^2 c(x,t)}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial c(x,t)}{\partial x} \quad (5.23)$$

$$0 < \alpha \leq 1, 0 < x < \infty, 0 < t < \infty, a > 0, \nu > 0$$

eşitliği elde edilir. Bu problemin başlangıç ve sınır koşulları

$$t = 0 \quad c(x,t) = \delta(x - \zeta) \quad 0 < \zeta < \infty,$$

$$x = 0 \quad c(x,t) = 0, \quad (5.24)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} c(x,t) = 0$$

olarak alınır. Daha sonra (5.4) eşitliği problemde kullanıldığında

$${}^{ABC}D_t^\alpha u(x,t) = a \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{v^2}{4a} u(x,t) \quad (5.25)$$

eşitliği ve

$$u(x,0) = \exp\left(-\frac{v\xi}{2a}\right) \delta(x-\xi),$$

$$u(x,t) = 0, \quad (5.26)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u(x,t) = 0$$

başlangıç ve sınır koşulları elde edilir. Laplace dönüşümü ve tanımlı olduğu aralıktan dolayı sin-Fourier dönüşümü uygulanırsa aşağıdaki form elde edilir:

$$\tilde{u}^*(\xi, s) = \exp\left(-\frac{v\xi}{2a}\right) \sin(\xi\xi) \frac{\gamma}{\gamma + a\xi^2 + \frac{v^2}{4a}} \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \frac{\alpha\gamma \left(a\xi^2 + \frac{v^2}{4a}\right)}{\gamma + a\xi^2 + \frac{v^2}{4a}}}. \quad (5.27)$$

Ters Laplace ve ters sin-Fourier dönüşümleri uygulandığında

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi} \exp\left(-\frac{v\zeta}{2a}\right) \int_0^\infty \left[ \frac{\gamma}{\gamma + a\xi^2 + \frac{v^2}{4a}} E_\alpha \left( -\frac{\alpha\gamma \left( a\xi^2 + \frac{v^2}{4a} \right)}{\gamma + a\xi^2 + \frac{v^2}{4a}} t^\alpha \right) \right. \\ \left. \times \sin(\zeta\xi) \sin(x\xi) \right] d\xi \quad (5.28)$$

ifadesine ulaşılır. Bulduğumuz sonuç (5.4) yardımcı fonksiyonunuda yerine yazıldığında temel çözüm bulunur:

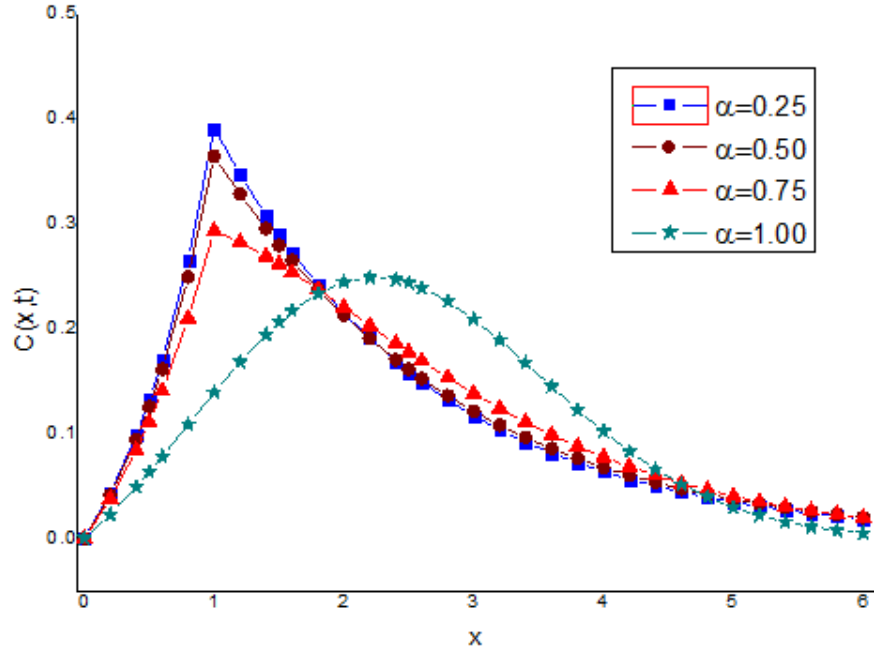
$$c(x,t) = \frac{2}{\pi} \exp\left(\frac{v}{2a}(x-\zeta)\right) \int_0^\infty \left[ \frac{\gamma}{\gamma + a\xi^2 + \frac{v^2}{4a}} E_\alpha \left( -\frac{\alpha\gamma \left( a\xi^2 + \frac{v^2}{4a} \right)}{\gamma + a\xi^2 + \frac{v^2}{4a}} t^\alpha \right) \right. \\ \left. \times \sin(\zeta\xi) \sin(x\xi) \right] d\xi \quad (5.29)$$

$\alpha = 1 (\gamma \rightarrow \infty)$  durumunda klasik çözüm elde edilir.

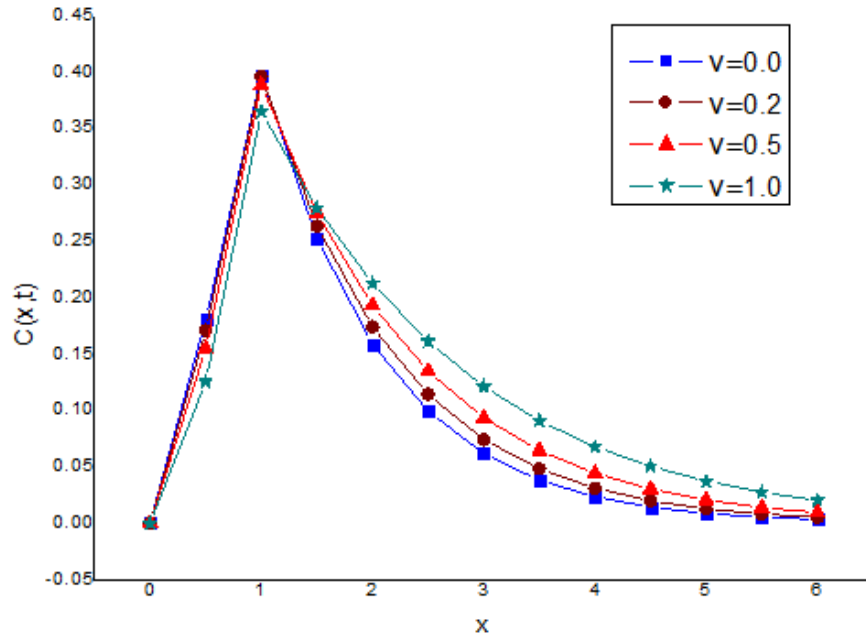
$$c(x,t) = \frac{2}{\pi} \exp\left(\frac{v}{2a}(x-\zeta)\right) \int_0^\infty \exp\left(-\left(a\xi^2 + \frac{v^2}{4a}\right)t\right) \sin(\zeta\xi) \sin(x\xi) d\xi \quad (5.30)$$

Şekil 5.5'te  $\alpha$ 'nın değişimi altında konsantrasyon davranışı incelenmiştir.  $\alpha \in (0,1)$  için orijin etrafında keskin bir yayılım durumu varken  $\alpha = 1$  durumunda davranış düzgün bir davranıştır.

Şekil 5.6'da  $\alpha = 0.5$  alınıp  $v$  sapma parametresinin etkisi araştırılmıştır. Sapma parametresi 0'dan 1'e geçtikçe konsantrasyonun maksimum değeri azalmakta fakat davranışında anlamlı bir değişim olmamaktadır.



Şekil 5.5: Cauchy probleminin temel çözümünde  $a = v = t_{son} = 1$  değerleri için  $\alpha$  nın değişmesiyle oluşan difüzyon probleminin karşılaştırılması.



Şekil 5.6: Cauchy probleminin temel çözümünde  $\alpha = 0.5$  ,  $a = t_{son} = 1$  değerleri için  $v$  hız parametresinin etkisi.

## 5.4 Yarı Sonsuz Aralıkta Dirichlet Probleminin Çözümü

(5.23) denklemi aşağıdaki başlangıç ve Dirichlet sınır koşulları altında

$$\begin{aligned} t = 0: \quad c(x, 0) &= 0, \\ x = 0: \quad c(x, t) &= \delta(t), \end{aligned} \tag{5.31}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} c(x, t) = 0$$

ele alınır. Yardımcı fonksiyon olan (5.4) denklemi kullanılıp problem indirgenildiğinde yarı uzayda Cauchy problemine benzer şekilde (5.25) eşitliği ve

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 0, \\ u(0, t) &= \delta(t), \end{aligned} \tag{5.32}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = 0$$

başlangıç ve sınır koşulları elde edilir. Bu probleme Laplace ve sin-Fourier integral dönüşümleri uygulanırsa

$$\tilde{u}^*(\xi, s) = a\xi \left( \frac{1}{\gamma + a\xi^2 + \frac{v^2}{4a}} + \frac{\alpha\gamma^2}{\left(\gamma + a\xi^2 + \frac{v^2}{4a}\right)^2} - \frac{1}{s^\alpha + \frac{\alpha\gamma\left(a\xi^2 + \frac{v^2}{4a}\right)}{\gamma + a\xi^2 + \frac{v^2}{4a}}} \right) \tag{5.33}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğe ters Laplace ve sin-Fourier integral dönüşümleri uygulandığında

$$\begin{aligned}
u(x,t) = & \frac{2}{\pi} a \int_0^{\infty} \xi \left( \frac{\delta(t)}{\gamma + a\xi^2 + \frac{v^2}{4a}} \right. \\
& \left. + \frac{\alpha\gamma^2}{\left(\gamma + a\xi^2 + \frac{v^2}{4a}\right)^2} t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left( -\frac{\alpha\gamma \left(a\xi^2 + \frac{v^2}{4a}\right)}{\gamma + a\xi^2 + \frac{v^2}{4a}} t^\alpha \right) \sin(x\xi) \right) d\xi
\end{aligned} \tag{5.34}$$

ifadesi elde edilir. Temel çözüme ulaşabilmek için bulunan  $u(x,t)$  çözümü (5.4) eşitliğinde yerine yazılırsa

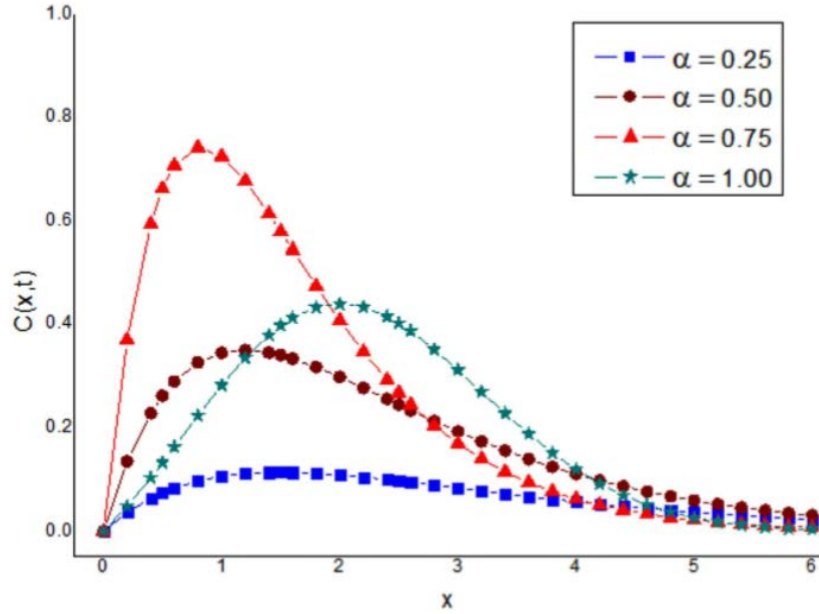
$$\begin{aligned}
c(x,t) = & \frac{2}{\pi} a \exp\left(\frac{vx}{2a}\right) \int_0^{\infty} \xi \left( \frac{\delta(t)}{\gamma + a\xi^2 + \frac{v^2}{4a}} \right. \\
& \left. + \frac{\alpha\gamma^2}{\left(\gamma + a\xi^2 + \frac{v^2}{4a}\right)^2} t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left( -\frac{\alpha\gamma \left(a\xi^2 + \frac{v^2}{4a}\right)}{\gamma + a\xi^2 + \frac{v^2}{4a}} t^\alpha \right) \sin(x\xi) \right) d\xi
\end{aligned} \tag{5.35}$$

çözümüne ulaşılır. Burada (3.42) eşitliği dikkate alınmıştır. (5.35) denklemindeki ilk terim  $t > 0$  için  $\delta(t) = 0$  dır. Benzer bir matematiksel sonuç, adveksiyon-difüzyon denkleminin CF türevli temel çözümleri için elde edilmiştir [54]. Adveksiyon-difüzyon denkleminin AB türevi ve CF türevi ile elde edilen sonuçlar, Caputo türevinin ilk teriminden farklıdır. Matematiksel açıdan bu dikkat çekicidir.

$\alpha = 1 (\gamma \rightarrow \infty)$  durumunda ve aynı zamanda  $t > 0$  için klasik çözüm aşağıdaki şekilde elde edilebilir:

$$c(x,t) = \frac{2}{\pi} a \exp\left(\frac{vx}{2a}\right) \int_0^{\infty} \xi \sin(x\xi) \exp\left(-\left(a\xi^2 + \frac{v^2}{4a}\right)t\right) d\xi. \quad (5.36)$$

Dirichlet probleminden elde edilen çözümün grafiği Şekil 5.7 ile gösterilmektedir. Sonuçların Cauchy çözümlerinden anlamlı bir şekilde farklı olduğu dikkat çekicidir. Örneğin maksimum konsantrasyon değeri,  $\alpha = 0.25$  yerine  $\alpha = 0.75$  için ortaya çıkar.



Şekil 5.7: Yarı sonsuz aralıkta Dirichlet probleminin temel çözümünde  $\alpha$  nın değişimi.



## 5.5 Sınırlı Aralıkta Cauchy Probleminin Çözümü

Adveksiyon-difüzyon denklemi önceki problemlerde olduğu gibi ele alınırsa

$${}^{ABC}D_t^\alpha c(x,t) = a \frac{\partial^2 c(x,t)}{\partial x^2} - v \frac{\partial c(x,t)}{\partial x}, \quad (5.37)$$

$$0 < \alpha \leq 1, 0 < x < L, 0 < t < \infty, a > 0, v > 0$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada başlangıç koşulunun

$$t = 0: c(x,t) = \delta(x - \zeta), \quad \zeta \in (0, L) \quad (5.38)$$

olduğu kabul edilir. Ayrıca, homojen sınır koşulları

$$x = 0: c(x,t) = 0, \quad (5.39)$$

$$x = L: c(x,t) = 0$$

olarak alınır. Ana problemi basitleştirmek amacıyla (5.4) yardımcı fonksiyonu kullanılırsa problem aşağıdaki forma dönüşür:

$${}^{ABC}D_t^\alpha u(x,t) = a \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{v^2}{4a} u(x,t) \quad (5.40)$$

$$u(x,0) = \delta(x - \zeta) \exp\left(-\frac{v\zeta}{2a}\right), \quad (5.41)$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0.$$

Başlangıç koşulunu elde ederken  $f(x)\delta(x-\zeta) = f(\zeta)\delta(x-\zeta)$  özelliği kullanılır. Laplace ve sonlu sin-Fourier dönüşümleri uygulandıktan sonra

$$\tilde{u}^*(\xi_k, s) = \frac{\gamma}{\gamma + a\xi_k^2 + \frac{v^2}{4a}} \frac{s^{\alpha-1}}{\alpha\gamma \left( a\xi_k^2 + \frac{v^2}{4a} \right)} \sin(\xi_k \zeta) \exp\left(-\frac{v\zeta}{2a}\right) \quad (5.42)$$

şeklinde sonuç elde edilir. Burada  $\xi_k = \frac{k\pi}{L}$  şeklinde tanımlıdır. Çözümüne ulaşmak için integral dönüşümlerinin tersi uygulandığında

$$u(x, t) = \frac{2}{L} \exp\left(-\frac{v\zeta}{2a}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma}{\gamma + a\xi_k^2 + \frac{v^2}{4a}} E_{\alpha} \left( -\frac{\alpha\gamma \left( a\xi_k^2 + \frac{v^2}{4a} \right)}{\gamma + a\xi_k^2 + \frac{v^2}{4a}} t^{\alpha} \right) \times \sin(\xi_k \zeta) \sin(\xi_k x) \quad (5.43)$$

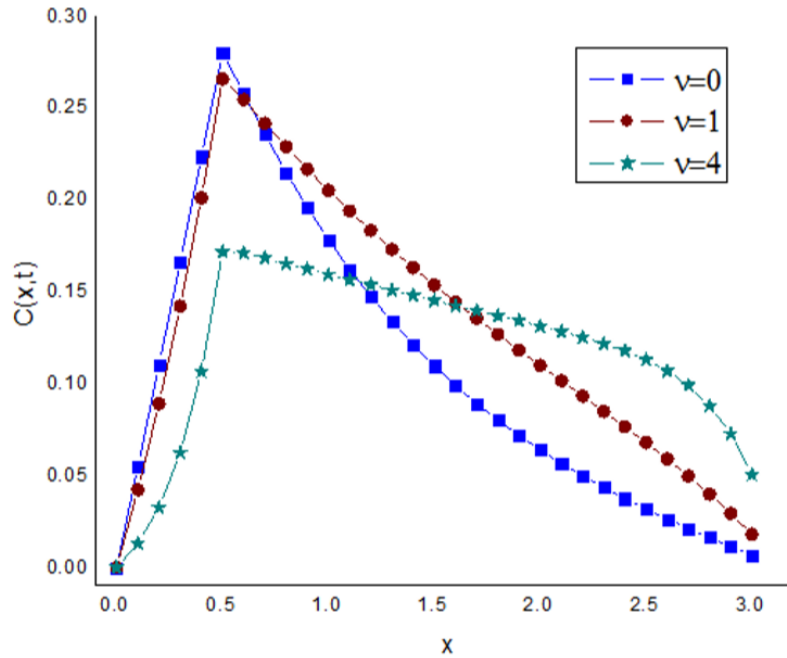
şeklinde yardımcı fonksiyonun çözümü elde edilir.  $c(x, t)$  konsantrasyon fonksiyonunun çözümünü elde etmek için (5.43) eşitliği (5.4) ifadesinde yerine yazıldığında sınırlı aralıkta Cauchy probleminin temel çözümü

$$c(x, t) = \frac{2}{L} \exp\left(\frac{v(x-\zeta)}{2a}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma}{\gamma + a\xi_k^2 + \frac{v^2}{4a}} E_{\alpha} \left( -\frac{\alpha\gamma \left( a\xi_k^2 + \frac{v^2}{4a} \right)}{\gamma + a\xi_k^2 + \frac{v^2}{4a}} t^{\alpha} \right) \times \sin(\xi_k \zeta) \sin(\xi_k x) \quad (5.44)$$

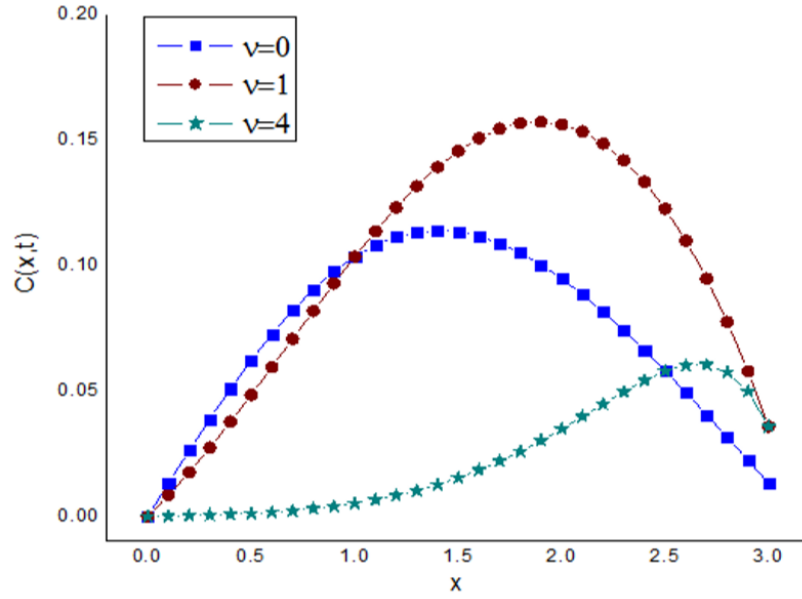
olarak bulunur.  $\alpha = 1 (\gamma \rightarrow \infty)$  olması durumunda klasik çözüm aşağıdaki gibi elde edilir:

$$c(x,t) = \frac{2}{L} \exp\left(\frac{v(x-\zeta)}{2a}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(-\left(a\xi_k^2 + \frac{v^2}{4a}\right)t\right) \sin(\xi_k \zeta) \sin(\xi_k x). \quad (5.45)$$

Hesaplama kolaylığı açısından  $a$  (difüzyon katsayısı) =  $t$  (zaman) = 1 olduğu varsayılarak şekil 5.8 ve şekil 5.9 grafikleri çizilmiştir. Grafiklerde farklı  $\alpha$  değerleri için  $v$  sapma parametresinin değişimi ile  $c(x,t)$  konsantrasyon miktarları arasındaki ilişki incelenmiştir. Şekil 5.8’de görüldüğü gibi  $\alpha = 0.5$  değeri için farklı sapma parametreleri göz önüne alındığında konsantrasyon  $x = 0.5$  civarında maksimum değerine ulaşır. Fakat farklı sapma parametreleri için  $\alpha = 1$  olması durumunda konsantrasyonun maksimum değerleri şekil 5.9’da görüldüğü gibi  $x$  değişkenine göre farklılık gösterir.



Şekil 5.8: Cauchy probleminin temel çözümünde  $\alpha = 0.5$ ,  $a = t = 1$  değerleri için  $v$  sapma parametresinin etkisi.



**Şekil 5.9:** Cauchy probleminin temel çözümünde  $\alpha = a = t = 1$  değerleri için  $\nu$  sapma parametresinin etkisi.

## 5.6 Sınırlı Aralıkta Dirichlet Probleminin Çözümü

Sınırlı aralıkta AB türevli adveksiyon-difüzyon denklemi farklı iki tip sınır değer problemiyle ele alındığında sonuçları aşağıdaki biçimde değerlendirebiliriz.

### 5.6.1 Birinci Durum

Bu bölümde (5.37) denklemi homojen başlangıç ve Dirichlet sınır koşullarıyla ele alınmıştır:

$$t = 0: c(x, t) = 0,$$

$$x = 0: c(x, t) = \delta(t), \quad (5.46)$$

$$x = L: c(x, t) = 0.$$

Önceki problemlere benzer şekilde (5.37) denklemi ve (5.46) başlangıç-sınır koşullarıyla tanımlanan problem (5.4)'teki yardımcı fonksiyon ile indirgenerek (5.40) denklemi ve aşağıdaki koşullar elde edilir:

$$\begin{aligned}
 u(x,0) &= 0, \\
 u(0,t) &= \delta(t), \\
 u(L,t) &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.47}$$

Sırasıyla Laplace ve sonlu sin-Fourier dönüşümleri uygulandığında

$$\tilde{u}^*(\xi_k, s) = a\xi_k \left( \frac{1}{\gamma + a\xi_k^2 + \frac{v^2}{4a}} + \frac{\alpha\gamma^2}{\left(\gamma + a\xi_k^2 + \frac{v^2}{4a}\right)^2} \frac{1}{s^\alpha + \frac{\alpha\gamma\left(a\xi_k^2 + \frac{v^2}{4a}\right)}{\gamma + a\xi_k^2 + \frac{v^2}{4a}}} \right) \tag{5.48}$$

ifadesi elde edilir. Benzer şekilde ters integral dönüşümleri alındığında yardımcı fonksiyonun çözümü

$$\begin{aligned}
 u(x,t) &= \frac{2}{L} a \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \left( \frac{\delta(t)}{\gamma + a\xi_k^2 + \frac{v^2}{4a}} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\alpha\gamma^2}{\left(\gamma + a\xi_k^2 + \frac{v^2}{4a}\right)^2} t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left( -\frac{\alpha\gamma\left(a\xi_k^2 + \frac{v^2}{4a}\right)}{\gamma + a\xi_k^2 + \frac{v^2}{4a}} t^\alpha \right) \sin(\xi_k x) \right) \tag{5.49}
 \end{aligned}$$

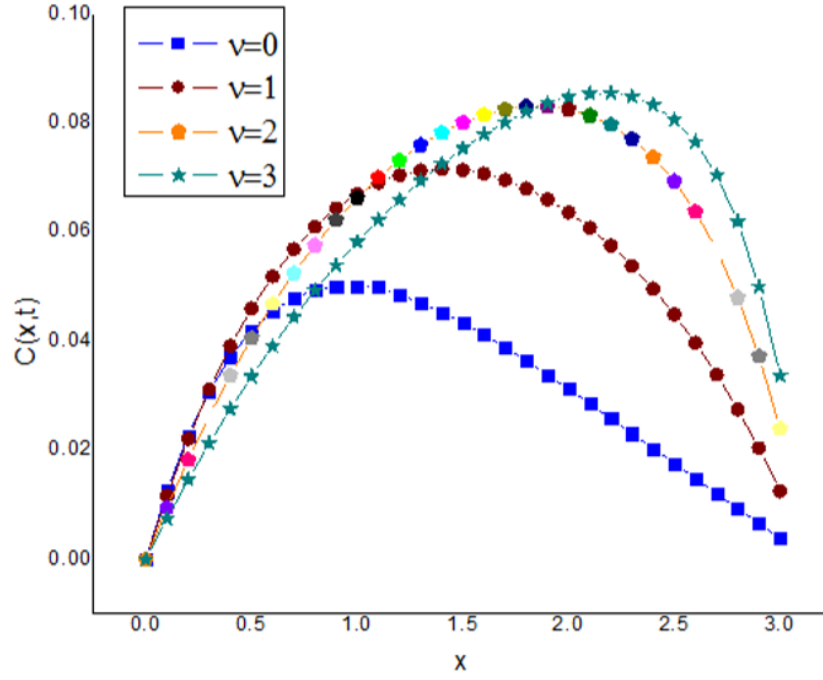
şeklinde elde edilir. Bu çözüme ulaşmak için (3.45) eşitliği kullanılır. Konsantrasyon fonksiyonu olan  $c(x,t)$ 'ye dönmek için (5.4) eşitliği ve  $t > 0$  için  $\delta(t) = 0$  olduğu göz önüne alınır. O halde temel çözüm

$$c(x,t) = \frac{2}{L} a \exp\left(\frac{vx}{2a}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \frac{\alpha \gamma^2}{\left(\gamma + a \xi_k^2 + \frac{v^2}{4a}\right)^2} E_{\alpha,\alpha} \left( -\frac{\alpha \gamma \left(a \xi_k^2 + \frac{v^2}{4a}\right)}{\gamma + a \xi_k^2 + \frac{v^2}{4a}} t^\alpha \right) \times t^{\alpha-1} \sin(\xi_k x) \quad (5.50)$$

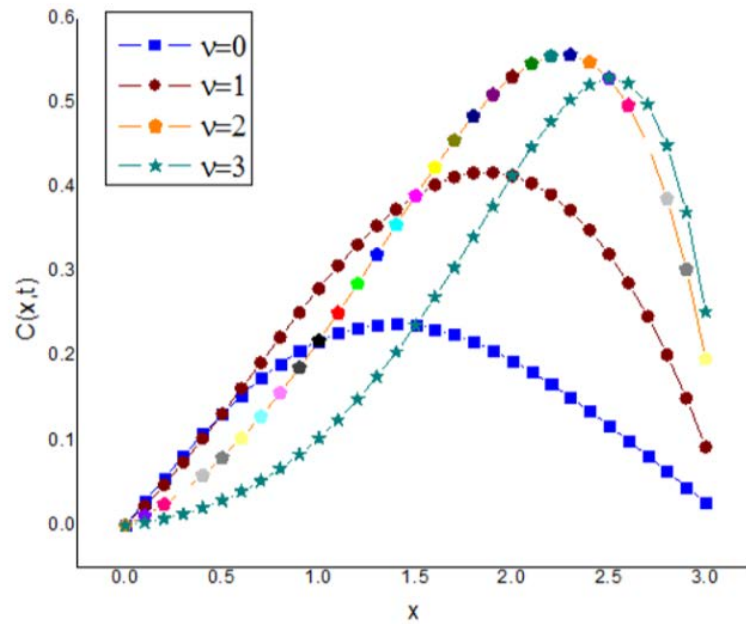
olur.  $\alpha = 1 (\gamma \rightarrow \infty)$  durumunda klasik çözüm aşağıdaki gibi elde edilir:

$$c(x,t) = \frac{2}{L} a \exp\left(\frac{vx}{2a}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \exp\left(-\left(a \xi_k^2 + \frac{v^2}{4a}\right)t\right) \sin(\xi_k x). \quad (5.51)$$

Şekil 5.10 ve şekil 5.11,  $v$  sapma parametresinin değişimi durumunda sınırlı aralıkta Dirichlet problemi için birinci duruma ait  $c(x,t)$  konsantrasyon değişimlerini gösterir. Bu grafikler  $\alpha = 0.5$  ve  $\alpha = 1$  alındığında çözümün  $v$  sapma parametresinin değişiminden etkilenme durumu verir. Sapma parametresi  $v$ 'nin çözümlerin çarpıklığını etkilediği açıkça görülebilir.



**Şekil 5.10:**  $\alpha = 0.5$  alındığında konsantrasyon ifadesinin birinci durumdaki Dirichlet probleminin sınır değerlerinden kaynaklanan değişimi.



**Şekil 5.11:**  $\alpha = 1$  durumunda  $\nu$  sapma parametresinin değişiminin konsantrasyon fonksiyonuna etkileri

## 5.6.2 İkinci Durum

Sınırlı aralıkta Dirichlet probleminin ikinci durumunu incelemek için (5.37) eşitliği ele alınır. Başlangıç ve sınır koşulları sırasıyla

$$\begin{aligned}
 t = 0: \quad c(x, t) &= 0, \\
 x = 0: \quad c(x, t) &= c_0 \quad (c_0 \in \mathbb{R}), \\
 x = L: \quad c(x, t) &= 0
 \end{aligned} \tag{5.52}$$

şeklinde tanımlanır. Yine (5.4)'teki yardımcı fonksiyon kullanılarak (5.40) denkleminde

$$\begin{aligned}
 u(x, 0) &= 0, \\
 u(0, t) &= c_0, \\
 u(L, t) &= 0
 \end{aligned} \tag{5.53}$$

başlangıç ve sınır koşulları elde edilir. Laplace ve tanım aralığından dolayı sonlu sin-Fourier integral dönüşümleri uygulandığında

$$\tilde{u}^*(\xi_k, s) = \frac{\xi_k c_0}{\xi_k^2 + \frac{v^2}{4a^2}} \left( \frac{1}{s} - \frac{\gamma}{\gamma + a\xi_k^2 + \frac{v^2}{4a}} \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \frac{\alpha\gamma \left( a\xi_k^2 + \frac{v^2}{4a} \right)}{\gamma + a\xi_k^2 + \frac{v^2}{4a}}} \right) \tag{5.54}$$



sonucuna ulaşılır. Ters integral dönüşümlerinin uygulanmasıyla

$$u(x,t) = c_0 \left[ \frac{\sinh\left(\frac{v}{2a}(L-x)\right)}{\sinh\left(\frac{vL}{2a}\right)} - \frac{2}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k \gamma}{\left(\xi_k^2 + \frac{v^2}{4a^2}\right) \left(\gamma + a\xi_k^2 + \frac{v^2}{4a}\right)} \right. \\ \left. \times E_{\alpha} \left( -\frac{\alpha \gamma \left(a\xi_k^2 + \frac{v^2}{4a}\right)}{\gamma + a\xi_k^2 + \frac{v^2}{4a}} t^{\alpha} \right) \sin(\xi_k x) \right] \quad (5.55)$$

elde edilir. Bu çözüm (5.4) eşitliğinde yazıldığında temel çözüm

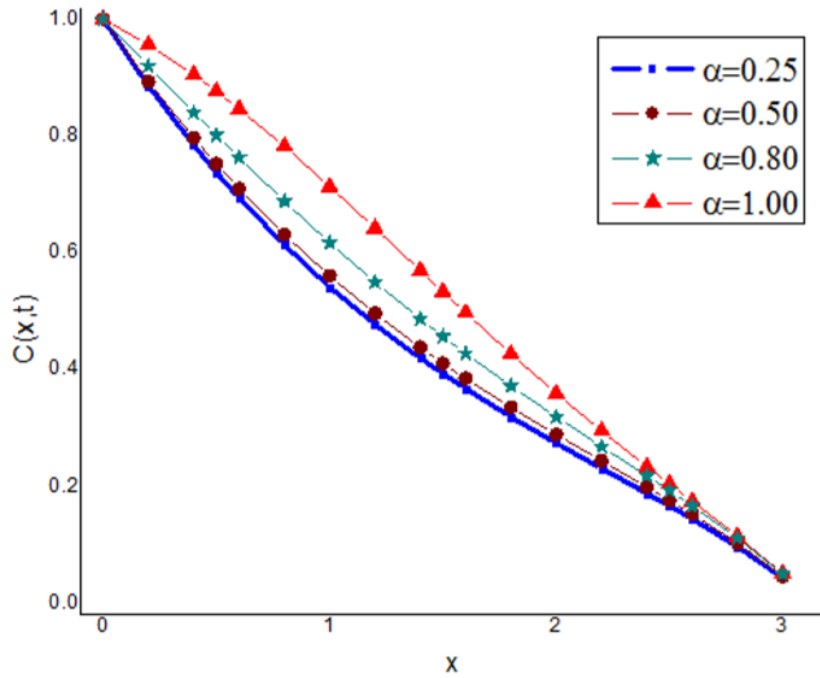
$$c(x,t) = c_0 \exp\left(\frac{vx}{2a}\right) \left[ \frac{\sinh\left(\frac{v}{2a}(L-x)\right)}{\sinh\left(\frac{vL}{2a}\right)} - \frac{2}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k \gamma}{\left(\xi_k^2 + \frac{v^2}{4a^2}\right) \left(\gamma + a\xi_k^2 + \frac{v^2}{4a}\right)} \right. \\ \left. \times E_{\alpha} \left( -\frac{\alpha \gamma \left(a\xi_k^2 + \frac{v^2}{4a}\right)}{\gamma + a\xi_k^2 + \frac{v^2}{4a}} t^{\alpha} \right) \sin(\xi_k x) \right] \quad (5.56)$$

olarak bulunur. Klasik çözüme ulaşmak için  $\alpha = 1 (\gamma \rightarrow \infty)$  alınır ve

$$c(x,t) = c_0 \exp\left(\frac{vx}{2a}\right) \left[ \frac{\sinh\left(\frac{v}{2a}(L-x)\right)}{\sinh\left(\frac{vL}{2a}\right)} - \frac{2}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{\xi_k^2 + \frac{v^2}{4a^2}} \right. \\ \left. \times \exp\left(-\left(a\xi_k^2 + \frac{v^2}{4a}\right)t\right) \sin(\xi_k x) \right] \quad (5.57)$$

elde edilir.

Şekil 5.12’de sapma parametresi  $\nu=1$  alınarak farklı  $\alpha$  değerleri için konsantrasyon fonksiyonu  $c(x,t)$ 'nin değişimi incelenmiştir.  $\alpha$ 'nın azalan değerleri için konsantrasyon değişiminin fiziksel olarak anlamlı olmadığı aşikardır. Ele alınan bu problemin fiziksel davranışlarının Caputo anlamında ele alınan model [66] ile benzerlik gösterdiği görülebilir. Bu sonuç, önceki kısım problemlerinde de olduğu gibi AB türevinin adveksiyon-difüzyon süreçlerinin modellenmesinde Caputo tanımına iyi bir alternatif olduğu gerçeğini ortaya koymuştur. Üstelik AB türev tanımının singüler olmayan yapısı hesapsal olarak da avantaj sağlamıştır. Temel çözümlerin hepsinde elde edilen sonuçlara bakıldığında Mittag-Leffler fonksiyonunun farklı kombinasyonları olduğu görülmektedir.



Şekil 5.12: Dirichlet probleminin ikinci durumunda  $\nu=1$  alınarak farklı kesirli derecelerde konsantrasyon fonksiyonunun değişimi.

## 6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Tezin beş ana bölümünün değerlendirilmesi aşağıda biçimde yapılabilir.

Birinci bölüm giriş bölümü olmakla birlikte tezin ana hatları çizilmiştir.

İkinci bölümde temel kütle ve ısı transferi türleri verilmiştir. Bu başlık altında adveksiyon, difüzyon, kondüksiyon, konveksiyon ve radyasyon kavramları matematiksel ve fiziksel açıdan değerlendirilmiştir.

Üçüncü bölümde kesirli analizin bazı temel fonksiyonları ve temel ilişkileri anlatılmıştır. Literatürde en çok kullanılan Caputo ve RL kesirli türevlerinin tanımları ve özellikleri verilmiştir. Laplace ve Fourier integral dönüşümleri tanımlanmış olup bu dönüşümlere ait bazı önemli özelliklere yer verilmiştir. Bunlara ek olarak 2015 yılı ve sonrasında tanımlanan CF ve AB türevleri tanıtılmış, bu türevlerin özellikleri, avantajları ve literatürde yapılan çalışmalar sunulmuştur.

Dördüncü bölümde tezin ana problemi olan adveksiyon-difüzyon denkleminin ortaya çıkışı ve uygulama alanlarından bahsedilmiştir.

Beşinci bölümde ise singüler olmayan çekirdeğe sahip olan AB türevli adveksiyon-difüzyon denkleminin reel ekseninde, yarı sonsuz ve sınırlı aralıklardaki temel çözümleri araştırılmıştır. Reel ekseninde Cauchy ve kaynak problemlerinin ele alındığı çalışma “Cauchy and source problems for an advection-diffusion equation with Atangana–Baleanu derivative on the real line” [68] başlığıyla Choas, Solutions and Fractals dergisinde yayınlanmıştır. Ayrıca yarı sonsuz ve sınırlı aralıktaki Cauchy ve Dirichlet problemlerinin çözümleri sırası ile “Analysis of advective–

diffusive transport phenomena modelled via non-singüler Mittag-Leffler kernel” [69] başlığıyla *Mathematical Modelling of Natural Phenomena* dergisinde, “Analytical solutions to the advection-diffusion equation with the Atangana-Baleanu derivative over a finite domain” [70] başlığıyla da *BAUN Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisinde* yayımlanmıştır. Problemlerin temel çözümlerini elde etmek için Laplace dönüşümü ve tanım aralıklarına uygun Fourier dönüşümleri kullanılmıştır. Temel çözümler, Mittag-Leffler fonksiyonu ve trigonometrik fonksiyonların çeşitli kombinasyonları olarak elde edilmiştir. Grafik çizimi için Maple yazılım programı kullanılmış, grafiklerde  $\alpha$ 'nın ve  $\nu$  sapma parametresinin etkileri incelenmiştir. Sonuç olarak bu çalışmada, Atangana-Baleanu türevinin bir adveksiyon-difüzyon tipi taşıma sürecinin modellenmesinde Caputo kesirli türevine oldukça iyi bir alternatif olduğu ve bu türevin singüler olmayan çekirdeğinden dolayı hesapsal olarak daha avantajlı olduğu gerçeği de ortaya konmuştur.  $\alpha = 1$  olması durumunda klasik çözümlerin örtüşmesi de aşikar bir sonuçtur.

## 7. KAYNAKLAR

- [1] Caputo, M. and Fabrizio, M., “A New Definition of Fractional Derivative Without Singular Kernel”, *Progress in Fractional Differentiation and Applications*, 1 (2), 73-85, (2015).
- [2] Atangana, A. and Baleanu, D., “New Fractional Derivatives with Nonlocal and Non-Singular Kernel: Theory and Application to Heat Transfer Model”, *Thermal Science*, 20 (2), 763-769, (2016).
- [3] Khan, A., Ali Abro, K., Tassaddiq, A. and Khan, I., “Atangana–Baleanu and Caputo Fabrizio analysis of fractional derivatives for heat and mass transfer of second grade fluids over a vertical plate: a comparative study”, *Entropy*, 19 (8), 279(12 pages), (2017).
- [4] Atangana, A. and Alqahtani, R.T., “Numerical approximation of the space-time Caputo-Fabrizio fractional derivative and application to groundwater pollution equation”, *Advances in Difference Equations*, 2016 (1), 156(13 pages) , (2016).
- [5] Tahir, M., Imran, M.A., Raza, N., Abdullah, M. and Aleem, M., “Wall slip and non-integer order derivative effects on the heat transfer flow of Maxwell fluid over an oscillating vertical plate with new definition of fractional Caputo-Fabrizio derivatives”, *Results in Physics*, 7, 1887-1898, (2017).
- [6] Alqahtani, R.T., “Fixed-point theorem for Caputo-Fabrizio fractional Nagumo equation with nonlinear diffusion and convection”, *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, 9 (5), 1991-1999, (2016).
- [7] Gómez-Aguilar, J.F., Escobar-Jiménez, R.F., López-López, M.G. and Alvarado-Martínez, V.M., “Atangana-Baleanu fractional derivative applied to electromagnetic waves in dielectric media”, *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, 30 (15), 1937-1952, (2016).
- [8] Abdollahi, R., Khastan, A., Nieto, J.J. and Rodríguez-López, R., “On the linear fuzzy model associated with Caputo–Fabrizio operator”, *Boundary Value Problems*, 2018 (1), 91(18 pages), (2018).

- [9] Podlubny, I., *Fractional Differential Equations*, San Diego: Academic Press, (1999).
- [10] Povstenko, Y., *Linear fractional diffusion-wave equation for scientists and engineers*, Heidelberg: Birkhäuser, (2015).
- [11] Güngör, F., *Diferansiyel Denklemler*, İstanbul Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi: Beta Basım Yayım Dağıtım A.Ş, 303-306, (2000).
- [12] Djida, J.D., Area, I. and Atangana, A., “New Numerical Scheme of Atangana-Baleanu Fractional İntegral: an Application to Groundwater Flow Within Leaky Aquifer”, arXiv:1610.08681 (2016).
- [13] Meerschaert, M.M. and Tadjeran, C., “Finite Difference Approximations For Fractional Advection-Dispersion Flow Equations”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 172 (1), 65–77, (2004).
- [14] Liu, F., Anh, V. and Turner, I., “Numerical solution of the space fractional Fokker–Planck equation”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 166 (1), 209–219, (2004).
- [15] Momani, S., “An algorithm for solving the fractional convection diffusion equation with nonlinear source term”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 12 (7), 1283–1290, (2007).
- [16] Huang, H. and Cao, X., “Numerical method for two dimensional fractional reaction subdiffusion equation”, *European Physical Journal Special Topics*, 222 (8), 1961–1973, (2013).
- [17] Baskonus, H.M. and Bulut, H., “On the numerical solutions of some fractional ordinary differential equations by fractional Adams–Bashforth–Moulten method”, *Open Mathematics*, 13 (1), 4255-4270, (2015).
- [18] Esen, A., Sulaiman, T.A., Bulut, H. and Baskonus, H.M., “Optical solitons to the space–time fractional  $(1+ 1)$ –dimensional coupled nonlinear Schrödinger equation”, *Optik*, 167, 150–156, (2018).

- [19] Algahtani, O.J.J., “Comparing the Atangana–Baleanu and Caputo–Fabrizio derivative with fractional order: Allen–Cahn model”, *Chaos, Solitons & Fractals*, 89, 552-559, (2016).
- [20] Abro, K.A., Memon, A.A. and Uqaili, M.A., “A comparative mathematical analysis of RL and RC electrical circuits via Atangana–Baleanu and Caputo–Fabrizio fractional derivatives”, *The European Physical Journal Plus*, 133 (3), 113(9 pages), (2018).
- [21] Losada, J. and Nieto, J.J., “Properties of a new fractional derivative without singular kernel”, *Progress in Fractional Differentiation and Applications*, 1(2), 87-92, (2015).
- [22] Caputo, M. and Fabrizio, M., “Applications of New Time and Spatial Fractional Derivatives with Exponential Kernels”, *Progress in Fractional Differentiation and Applications*, 2 (2), 1-11, (2016).
- [23] Baleanu, D., Agheli, B. and Al Qurashi, M.M., “Fractional advection differential equation within Caputo and Caputo-Fabrizio derivatives”, *Advances in Mechanical Engineering*, 8 (12), 1-8, (2016).
- [24] Rubbab, Q., Mirza, I. A. and Qureshi, M.Z.A., “Analytical solutions to the fractional advection diffusion equation with time-dependent pulses on the boundary”, *AIP Advances*, 6 (7), 075318(12 pages), (2016).
- [25] Hristov, J., “Transient heat diffusion with a non-singular fading memory: from the cattaneo constitutive equation with Jeffrey’s kernel to the Caputo Fabrizio time-fractional derivative”, *Thermal Sciences*, 20 (2), 757-762, (2016).
- [26] Hristov, J., “Derivatives with non-singular kernels from the Caputo-Fabrizio definition and beyond: Appraising analysis with emphasis on diffusion models”, *Frontiers in Fractional Calculus*, 1, 270-342, (2017).
- [27] Singh, J., Kumar, D., Hammouch, Z. and Atangana, A., “A fractional epidemiological model for computer viruses pertaining to a new fractional derivative”, *Applied Mathematics and Computation*, 316, 504-515, (2018).

- [28] Evirgen, F. and Yavuz, M., “An Alternative Approach for Nonlinear Optimization Problem with Caputo-Fabrizio Derivative”, *ITM Web of Conferences*, 22, 01009(10 pages), (2018).
- [29] Owolabi, K.M. and Atangana, A., “Analysis and application of new fractional Adams–Bashforth scheme with Caputo–Fabrizio derivative”, *Chaos, Solitons & Fractals*, 105,111–119, (2017).
- [30] Alkahtani, B.S.T. and Atangana, A., “Controlling the wave movement on the surface of shallow water with the Caputo–Fabrizio derivative with fractional order”, *Chaos, Solitons & Fractals*, 89, 539–546, (2016).
- [31] Zhou, H.W., Yang, S. and Zhang, S.Q., “Modeling non-Darcian flow and solute transport in porous media with the Caputo–Fabrizio derivative”, *Applied Mathematical Modelling*, 68, 603-615, (2019).
- [32] Ullah, S., Khan, M.A., Farooq, M., Hammouch, Z. and Baleanu, D., “A fractional model for the dynamics of tuberculosis infection using Caputo-Fabrizio derivative”, *Discrete & Continuous Dynamical Systems*, doi: 10.3934/dcdss.2020057-11-27, (2019).
- [33] Qureshi, S., Rangaig, N.A. and Baleanu, D., “New Numerical Aspects of Caputo-Fabrizio Fractional Derivative Operator”, *Mathematics*, 7 (4), 374(14 pages), (2019).
- [34] Dokuyucu, M.A., Celik, E., Bulut, H. and Baskonus, H.M., “Cancer treatment model with the Caputo–Fabrizio fractional derivative”, *The European Physical Journal Plus*, 133 (3), 92(6 pages), (2018).
- [35] Yavuz, M. and Özdemir, N., “Comparing the new fractional derivative operators involving exponential and Mittag-Leffler kernel”, *Discrete & Continuous Dynamical Systems*, doi: 10.3934/dcdss.2020058-1098-1107, 995-1006, (2019).
- [36] Uçar, S., Uçar, E., Özdemir, N. and Hammouch, Z., “Mathematical analysis and numerical simulation for a smoking model with Atangana–Baleanu derivative”, *Chaos, Solitons & Fractals*, 118, 300-306, (2019).



- [37] Owolabi, K. M. and Atangana, A., “On the formulation of Adams-Bashforth scheme with Atangana-Baleanu-Caputo fractional derivative to model chaotic problems”, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 29 (2), doi.org/10.1063/1.5085490 023111, (2019).
- [38] Owolabi, K.M. and Atangana, A., “Mathematical analysis and computational experiments for an epidemic system with nonlocal and nonsingular derivative”, *Chaos, Solitons & Fractals*, 126, 41-49, (2019).
- [39] Owolabi, K.M., “Numerical patterns in reaction–diffusion system with the Caputo and Atangana–Baleanu fractional derivatives”, *Chaos, Solitons & Fractals*, 115, 160-169, (2018).
- [40] Gómez-Aguilar, J.F., Atangana, A. and Morales-Delgado, V.F., “Electrical circuits RC, LC, and RL described by Atangana–Baleanu fractional derivatives”, *International Journal of Circuit Theory and Applications*, 45 (11), 1514-1533, (2017).
- [41] Alkahtani, B.S.T. and Koca, I., “A new numerical scheme applied on revisited nonlinear model of predator-prey based on derivative with non-local and non-singular kernel”, *Discrete & Continuous Dynamical Systems*, doi: 10.3934/dcdss.2020024-337-341, (2019).
- [42] Alqahtani, R.T., “Atangana-Baleanu derivative with fractional order applied to the model of groundwater within an unconfined aquifer”, *Journal of Nonlinear Science and Applications*, 9, 3647-3654, (2016).
- [43] Atangana, A. and Koca, I., “Chaos in a simple nonlinear system with Atangana–Baleanu derivatives with fractional order”, *Chaos, Solitons & Fractals*, 89, 447–454, (2016).
- [44] Yavuz, M., Özdemir, N. and Baskonus M., “Solutions of partial differential equations using the fractional operator involving Mittag–Leffler kernel”, *The European Physical Journal Plus*, 133 (6), 215 (11 pages), (2018).
- [45] Atangana, A. and Gómez-Aguilar, J.F., “Decolonisation of fractional calculus rules: breaking commutativity and associativity to capture more natural phenomena”, *European Physical Journal Plus*, 133 (4), 166(22 pages), (2018).

- [46] Atangana, A. and Gómez-Aguilar, J.F., “Fractional derivatives with no-index law property: application to chaos and statistics”, *Chaos Solitons & Fractals*, 114, 516–535, (2018).
- [47] Atangana, A., “Non validity of index law in fractional calculus: a fractional differential operator with Markovian and non-Markovian properties”, *Physica A*, 505, 688–706, (2018).
- [48] Atangana, A., “Blind in a commutative world: simple illustrations with functions and chaotic attractors”, *Chaos Solitons & Fractals*, 114, 347–363, (2018).
- [49] Hristov, J., “Transient heat diffusion with a non-singular fading memory”, *Thermal Sciences*, 20 (2), 757–762, (2016).
- [50] Yavuz, M. and Özdemir, N., “European vanilla option pricing model of fractional order without singular kernel”, *Fractal and Fractional*, 2 (3), (11 pages), (2018).
- [51] Koca, I., Atangana, A., “Solutions of Cattaneo-Hristov model of elastic heat diffusion with Caputo-Fabrizio and Atangana-Baleanu fractional derivatives”, *Thermal Sciences*, 21 (6), 2299-2305, (2017).
- [52] Koca, I., “Modelling the spread of Ebola virus with Atangana-Baleanu fractional operators”, *The European Physical Journal Plus*, 133 (3), 100(11 pages), (2018).
- [53] Hristov, J., “Steady-state heat conduction in a medium with spatial non-singular fading memory: derivation of Caputo–Fabrizio space-fractional derivative with Jeffrey’s kernel and analytical solution”, *Thermal Sciences*, 21 (2), 827–839, (2017).
- [54] Mirza, I.A. and Vieru, D., “Fundamental solutions to advection-diffusion equation with time-fractional Caputo–Fabrizio derivative”, *Computers & Mathematics with Applications*, 73, 1–10, (2017).

- [55] Baleanu, D., Jajarmi, A. and Hajipour, M.A., “New formulation of the fractional optimal control problems involving Mittag–Leffler non-singular kernel”, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 175 (3), 718–737, (2017).
- [56] Solís-Pérez, J.E., Gómez-Aguilar, J.F. and Atangana, A., “Novel numerical method for solving variable-order fractional differential equations with power, exponential and Mittag–Leffler laws”, *Chaos Solitons & Fractals*, 114, 175–185, (2018).
- [57] Carslaw, H.S. and Jaeger, J.C., *Conduction of Heat in Solids*, London: Oxford University Press, (1959).
- [58] Crank, J., *The Mathematics of Diffusion*, London: Oxford Science Publications, (1980).
- [59] Ozisik, M.N., *Heat Conduction, 2nd edn.*, Canada: John Wiley & Sons, (1993).
- [60] Kaviany, M., *Principles of Heat Transfer in Porous Media*, 2nd edn., New York: Springer Science & Business Media, (1995).
- [61] Povstenko, Y., “Theory of diffusive stresses based on the fractional advection-diffusion equation”, (eds: R. Abi Zeid Daou and M. Xavier), *Fractional Calculus: Applications*, New York: Nova Science Publishers., 227-241, (2015).
- [62] Liu, F., Anh, V., Turner, I. and Zhuang, P., “Time fractional advection dispersion equation”, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 13 (1-2), 233-245, (2003).
- [63] Huang, F. and Liu, F., “The time fractional diffusion equation and the advection-dispersion equation”, *ANZIAM Journal*, 46 (3), 317-330, (2005).
- [64] Povstenko, Y. and Klekot, J., “Fundamental solution to the Cauchy problem for the time-fractional advection-diffusion equation”, *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics*, 13 (1), 95-102, (2014).
- [65] Povstenko, Y., “Generalized boundary conditions for the time-fractional advection diffusion equation” *Entropy*, 17, 4028-4039, (2015).

- [66] Povstenko, Y. and Klekot, J., “The Dirichlet problem for the time-fractional advection-diffusion equation in a line-segment”, *Boundary Value Problems*, 2016 (1), 89(8 pages), (2016).
- [67] Povstenko, Y. and Klekot, J., “The Cauchy problem for the time-fractional advection diffusion equation in a layer”, *Technical Sciences*, 19 (3), 231-244. (2016).
- [68] Avcı, D. and Yetim, A., “Cauchy and source problems for an advection-diffusion equation with Atangana–Baleanu derivative on the real line”, *Chaos, Solitons & Fractals*, 118, 361-365, (2019).
- [69] Avcı, D. and Yetim, A., “Analysis of advective–diffusive transport phenomena modelled via non-singular Mittag-Leffler kernel”, *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, 14 (3), 309(13 pages), (2019).
- [70] Avcı, D. and Yetim, A., “Analytical solutions to the advection-diffusion equation with the Atangana-Baleanu derivative over a finite domain”, *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 20 (2), 382-395, (2018).