T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

UYUMLU TÜREVLİ DEĞİŞİM ANALİZİ VE OPTİMAL KONTROL PROBLEMLERİ İÇİN KARŞITLIK KOŞULLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DİLARA YAPIŞKAN

BALIKESİR, HAZİRAN - 2019

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

UYUMLU TÜREVLİ DEĞİŞİM ANALİZİ VE OPTİMAL KONTROL PROBLEMLERİ İÇİN KARŞITLIK KOŞULLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DİLARA YAPIŞKAN

Jüri Üyeleri: **Dr. Öğr. Üyesi Beyza Billur İSKENDER EROĞLU (Tez Danışmanı)**
Prof. Dr. Metin DEMİRTAŞ
Dr. Öğr. Üyesi Mehmet YAVUZ

BALIKESİR, HAZİRAN – 2019

KABUL VE ONAY SAYFASI

Dilara YAPIŞKAN tarafından hazırlanan **"UYUMLU TÜREVLİ DEĞİŞİM ANALİZİ VE OPTİMAL KONTROL PROBLEMLERİ İÇİN KARŞITLIK KOŞULLARI"** adlı tez çalışmasının savunma sınavı 11.06.2019 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Dr.Öğr.Üyesi B. Billur İSKENDER EROĞLU	....
Üye Prof. Dr. Metin DEMİRTAŞ	....
Üye Dr. Öğr. Üyesi Mehmet YAVUZ	....

Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Prof. Dr. Necati ÖZDEMİR ....

Bu tez çalışması Balıkesir Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi tarafından 2018/022 nolu proje ile desteklenmiştir.

ÖZET

UYUMLU TÜREVLİ DEĞİŞİM ANALİZİ VE OPTİMAL KONTROL PROBLEMLERİ İÇİN KARŞITLIK KOŞULLARI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

DİLARA YAPIŞKAN
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI: DR. ÖĞR. ÜYESİ B. BİLLUR İSKENDER EROĞLU)

BALIKESİR, HAZİRAN - 2019

Son yıllarda, klasik türevin limit tanımı genişletilerek kesirli mertebeden türev operatörlerine alternatif bir tanım önerilmiştir. Uyumlu türev olarak adlandırılan bu yerel türev operatörü sağ ve sol türev yaklaşımlarına genelleştirilmiş ve yüksek mertebeden uyumlu türev tanımı da verilmiştir. Pek çok araştırmacı klasik türevin temel özelliklerinin uyumlu türevler için de sağlandığını göstermiştir. Dolayısıyla, uyumlu türevli diferansiyel denklemler analitik yollar ile kolaylıkla çözülebilmektedir. Uyumlu türevin bu avantajı uyumlu diferansiyel denklemlerin gerçek dünya problemlerine hem modelleme hem de kontrol anlamında hızlı bir şekilde uygulanmasına yol açmıştır.

Bu tezde, uyumlu türevli değişim analizi ve optimal kontrol problemlerinin karşıtlık koşulları verilmektedir. İlk olarak, uyumlu integral ile tanımlanan uyumlu türevli değişim analizi problemleri için var olan gerekli koşul farklı olarak değişim yöntemiyle elde edilmiş ve karşıtlık koşulları önerilmiştir. Daha sonra, klasik integral ile tanımlanan genelleştirilmiş uyumlu türevli değişim analizi problemi için gerekli koşul ve karşıtlık koşulları elde edilmiştir. Değişim analizi için elde edilen sonuçlardan faydalanarak, uyumlu integral ile tanımlanan uyumlu türevli optimal kontrol problemi için karşıtlık koşulları Hamilton formülasyonu ve Lagrange çarpanı tekniği ile verilmiştir. Benzer şekilde, klasik integral ile tanımlanan genelleştirilmiş uyumlu türevli optimal kontrol problemi için karşıtlık koşulları önerilmiştir. Uygulama problemi olarak, zaman uyumlu türev ile tanımlanan yayılım denkleminin optimal kontrolü incelenmiştir. Optimal kontrol kuralı, durum ve kontrol değişkenlerinin özfonksiyon açılımlarının kullanılması ile elde edilen uyumlu türevli lineer diferansiyel denklemlerin analitik olarak çözülmesi ile bulunmuştur. Tüm sonuçlar MATLAB programı kullanılarak çizdirilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Uyumlu türev, uyumlu integral, değişim analizi, optimal kontrol, karşıtlık koşulu

ABSTRACT

TRANSVERSALITY CONDITIONS FOR CALCULUS OF VARIATIONS AND OPTIMAL CONTROL PROBLEMS WITH CONFORMABLE DERIVATIVE

MSC THESIS

DİLARA YAPIŞKAN

BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE

MATHEMATICS

(SUPERVISOR: ASSIST. PROF. DR. B. BİLLUR İSKENDER EROĞLU)

BALIKESİR, JUNE 2019

In recent years, an alternative definition to fractional order derivative operators has been proposed by expanding the limit definition of the classical derivative. This local operator, named as conformable derivative, has been generalized with the left and right derivative approaches and also the higher order conformable derivatives have been given. Many researchers have shown that some fundamental properties of the classical derivative are provided for conformable derivative. Therefore, differential equations with conformable derivative became easily solvable in an analytical way. This advantage of conformable derivative leads quick applications of the conformable differential equations to the real world problems both in the view of modeling and control.

In this thesis, transversality conditions for the calculus of variations and optimal control problems with conformable derivative are presented. First of all, the existing necessary condition for the calculus of variations problems with conformable derivative is obtained by variation method and the transversality conditions are proposed. Then, the necessary condition and transversality conditions for the generalized calculus of variations problems with conformable derivative defined by classical integral are acquired. Utilizing the results obtained for the calculus of variations, the transversality conditions for the optimal control problem with conformable derivative defined by conformable integral are given by the Hamiltonian formulation and the Lagrange multiplier technique. As a similar manner, the transversality conditions for the generalized optimal control problem with conformable derivative defined by the classical integral are proposed. Optimal control of the diffusion equation defined by time conformable derivative is examined as an application problem. The optimal control is achieved by solving the obtained linear differential equation with conformable derivative arising from eigenfunction expansions of state and control variables. All results are plotted using MATLAB program.

KEYWORDS: Conformable derivative, conformable integral, calculus of variations, optimal control, transversality condition

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

Sembol	Açıklaması
$\mathbb{R}$	:Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^{+}$	:Doğal sayılar kümesi, pozitif doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^{+}$	:Tam sayılar kümesi, pozitif tam sayılar kümesi
$C^{\alpha}\left(\left[a,b\right]\times\mathbb{R}^{2}\right)$	:$\left[\mathrm{a,b}\right]\times\mathbb{R}^{2}$ üzerinde tanımlı α mertebeden sürekli uyumlu diferansiyellenebilir fonksiyonların kümesi
${}_{a}^{RL}D_{t}^{-\alpha}$	:Riemann–Liouville kesirli integrali
${}_{a}^{RL}D_{t}^{\alpha}$	:Sol Riemann–Liouville kesirli türevi
${}_{t}^{RL}D_{b}^{\alpha}$	:Sağ Riemann–Liouville kesirli türevi
${}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha}$	:Sol Caputo kesirli türevi
${}_{t}^{C}D_{b}^{\alpha}$	:Sağ Caputo kesirli türevi
$\dfrac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}}f\left(t\right)$	:Uyumlu türev
$f^{(\alpha)}\left(t\right)$	:Uyumlu türev
$D_{\alpha}f\left(t\right)$	:Uyumlu türev
$\dfrac{d_{a}^{\alpha}}{dt_{a}^{\alpha}}f\left(t\right)$	:Sol uyumlu türev
$f_{a}^{(\alpha)}\left(t\right)$	:Sol uyumlu türev
D_{a}^{α}	:Sol uyumlu türev
$\dfrac{{}_{b}d^{\alpha}}{{}_{b}dt^{\alpha}}f\left(t\right)$	:Sağ uyumlu türev

${}_{b}f^{(\alpha)}(t)$	:Sağ uyumlu türev
${}_{b}D^{\alpha}$	:Sağ uyumlu türev
$f^{(n)}(t)$	:Ardışık uyumlu türev
${}^{n}\dfrac{d_a^{\alpha}}{dt_a^{\alpha}} f(t)$	:Ardışık uyumlu türev
$\dfrac{\partial^{\alpha}}{\partial x_i^{\alpha}} f(x_1, x_2, ..., x_m)$	:Uyumlu kısmi türev
I_{α}	:Uyumlu integral
I_{α}^{a}	:Sol uyumlu integral
${}^{b}I_{\alpha}$	:Sağ uyumlu integral
$\Delta\tau$	:Zayıf değişim
$O(\cdot)$	:Kalan sınıfı
$\eta(t)$	:Keyfi fonksiyon
$\eta^{\alpha}(t)$	: $\alpha-$diferansiyellenebilir keyfi fonksiyon
$\lambda(t)$	:Keyfi fonksiyon
$\zeta(t)$	:Keyfi fonksiyon
$\Lambda(t)$	:Keyfi fonksiyon

ÖNSÖZ

Lisansüstü eğitimime başlamam için beni yüreklendiren ve bana güvenen, çalışmalarımda yardımını esirgemeyen değerli hocalarım Prof. Dr. Necati ÖZDEMİR ile Dr. Öğr. Üyesi Derya AVCI'ya; katkılarından dolayı hocam Prof. Dr. Nihal ÖZGÜR'e; tezimi hazırlarken, bana her konuda ve her koşulda yardımcı olup bilgilerini ve tecrübelerini her zaman benimle paylaşan değerli hocam Dr. Öğr. Üyesi Beyza Billur İSKENDER EROĞLU'na teşekkür ederim.

Her anımda yanımda hissettiğim, sevgisiyle bana güç veren değerli aileme de beni bu yolda yalnız bırakmadıkları için sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

1. GİRİŞ

Klasik analiz kavramlarının tamsayı olmayan mertebeden türev ve integrallere genişletilmesi fikri 17. yüzyıla dayanmaktadır ve çıkış tarihindeki gelişmelerden dolayı literatürde halen içeriğini tam olarak yansıtmayan Kesirli Analiz ile anılmaktadır.

Kesirli analiz, keyfi mertebe seçme imkanı verdiği için pek çok bilim dalına ait problemlerin modellenmesinde önemli rol oynamaktadır. Örneğin biyoloji ve biyomühendislik, fizik, elektromanyetik teori, termodinamik, mekanik, sinyal ve sistem teorisi, kaos teorisi ve fraktallar, jeoloji, akışkanlar mekaniği ve kompleks sistemler içerisindeki madde iletimi teorisi, olasılık ve istatistik teorileri, elektrik–elektronik ve kontrol teori kesirli analizin en yaygın olarak kullanıldığı başlıca uygulama alanlarıdır [1–9].

Kesirli analiz, L'Hospital'in 1695'te $n=\frac{1}{2}$ için $\frac{d^n f}{dx^n}$ in ne anlama geldiğini sorması üzerine Leibniz tarafından tanımlanmıştır. Sonraki yıllarda Riemann–Liouville, Caputo, Hadamard, Grünwald–Letnikov, Riesz vb. pek çok araştırmacı kesirli türevin farklı tanımlamalarını yapmıştır. Kesirli türev tanımlarının birden fazla olması, birbirleri arasındaki ilişkiler ve farklılıklar sistemin yapısına en uygun olanını seçme fırsatını sunmaktadır. Riemann–Liouville ve Caputo kesirli türevleri özellikle uygulama problemlerinde sıkça tercih edilen kesirli türevlerdir. Her iki türev operatörü de singüler çekirdeğe sahip konvolüsyon integralleri ile tanımlanır. Bu sebeple hafıza etkisine sahip süreçleri modellemekte oldukça başarılıdırlar. Ancak singüler çekirdek fonksiyonlarına sahip olmaları sebebiyle modelledikleri fiziksel süreçlere dair analitik çözümleri bulmak oldukça zor ve çoğu zaman da imkansızdır. Dolayısıyla kesirli mertebeden türev içeren diferansiyel denklemlerin çözümlerini bulmak için sayısal yöntemler üzerine yapılan çalışmalar oldukça önemli ve ilgi çekicidir [10–14].

Kesirli mertebeden diferansiyel denklemleri çözmenin zorluğu araştırmacılarda genel olarak analitik çözüme imkan veren farklı tipte kesirli operatörler tanımlama isteği uyandırmıştır [15–18]. Bu operatörler genel olarak yerel özellikte olduklarından hafızalı sistemleri modellemeye elverişli değildirler. Ancak yerel olmayan kesirli operatörlerin aksine klasik türevin çarpma kuralı, bölme kuralı ve zincir kuralı gibi pek çok özelliğini sağlamaktadırlar. Geleneksel kesirli türev operatörlerinin konvolüsyon özelliğini sağlamadığı için kesirli operatör sınıfına dahil edilmeyen yerel operatörlerin yerel ölçeklendirmeleri ve kesirli diferansiyellenebilirliği araştırmada oldukça kullanışlı olduğu gösterilmiştir [15].

Literatürde farklı tiplerde kesirli mertebeden yerel türev operatörleri tanımlanmıştır. Geleneksel kesirli operatörlerde olduğu gibi hangi tip kesirli mertebe yerel türev operatörünün seçileceği de problem tipine uygun olarak belirlenir [19]. Bu tezde klasik türev tanımının bir genelleştirmesi olarak Khalil ve diğ. [18] tarafından tanımlanan ve uyumlu türev olarak adlandırılan yerel türev operatörü ile bu operatörün tersi olan uyumlu integral operatörü ele alınmıştır. Oldukça ilgi çeken bu operatörlere ait analiz kavramları pek çok araştırmacı tarafından çalışılmıştır. Abdeljawad, tanımlanan bu yeni yerel türevi, sol ve sağ türev yaklaşımlarıyla genelleştirmiştir ve yüksek mertebeden uyumlu türev (ardışık uyumlu türev) tanımını vermiştir [20]. Ayrıca, uyumlu türev için zincir kuralı, kısmi integrasyon, Taylor seri açılımı ve Laplace dönüşümü de Abdeljawad tarafından önerilmiştir. Iyiola ve Nwaeze [21], uyumlu türev ve uyumlu integral operatörlerinin bazı sonuçlarını kanıtlamışlardır. Abu Hammad ve Khalil [22], uyumlu türev için uyumlu Fourier serilerini vermiştir ve Fourier serilerini uyumlu kısmi diferansiyel denklemleri çözmek için kullanmıştır. Atangana ve diğ. [23], kısmi ve ardışık uyumlu türevle ilgili bazı yararlı özellikleri ve teoremleri tanıtmıştır. Zhao ve Luo [24], uyumlu türevin fiziksel ve geometrik yorumlarını vermiş ve böylece bu türevin fizik ve mühendislik alanındaki potansiyel uygulamalarına dikkat çekmiştir. Uyumlu türev klasik türevin bazı temel özelliklerini sağladığı için uyumlu diferansiyel denklemlerin analitik yöntemlerle kolayca çözülebilir olduğu gösterilmiştir [25–28]. Uyumlu türevin bu avantajı, kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin gerçek dünya problemlerine hızlı bir şekilde uygulanmasını sağlamıştır. Bu yüzden uyumlu türev birçok araştırmacı tarafından kabul görmüş ve son yıllarda biyoloji [29], fizik

[30–32], modelleme [33–35] ve kontrol teori [35–39] gibi pek çok uygulama alanında çalışılmıştır.

Bilindiği üzere kesirli mertebeden sistemlerin modellemedeki etkililiği bu sistemlerin kontrol tasarımlarını önemli kılmıştır. Kesirli mertebeden kontrol tasarımı çalışmalarının öncüsü ve oldukça ilgi göreni kesirli optimal kontroldür [40–44]. Bunun doğal sonucu olarak, uyumlu türev içeren sistemlerin optimal kontrolü de literatürde yerini almaya başlamıştır. Optimal kontrolün temeli değişim analizi olduğu için uyumlu türevli optimal kontrol çalışmalarının başlangıcı uyumlu türeve bağlı terim içeren uyumlu integral ile tanımlanan değişim analizine dayanmaktadır. Bu kavram ilk kez Chung [30] daha sonra Lazo ve Torres [36] tarafından incelenmiştir. Dinamik kısıtları uyumlu diferansiyel denklem ve uyumlu türevli performans indeksi içeren optimal kontrol problemleri için gerekli koşullar yine Lazo ve Torres tarafından elde edilmiştir [36]. Bu tezin konusu olan optimal kontrol problemleri için karşıtlık koşulları için henüz literatürde yer alan bir çalışma yoktur. Bu boşluğun doldurulması için tezde öncelikle değişim analizi ve sonrasında uyumlu türevli optimal kontrol problemleri için karşıtlık koşulları Euler–Lagrange denklemleri, Hamilton formülasyonu ve Lagrange çarpanı teknikleriyle incelenmektedir. Elde edilen sonuçların uygulaması olarak uyumlu türev ile modellenen yayılım sisteminin optimal kontrolü verilecektir. Uyumlu türev ile modellenen yayılım denklemlerinin farklı formları Çenesiz ve Kurt [45], Avcı ve diğ. [46,47] çalışmalarında bulunabilir. Uyumlu türevli ısı denkleminin optimal sınır sıcaklığı kontrolü ise İskender Eroğlu ve diğerleri [37] tarafından çalışılmıştır.

Bu tezin 2. Bölümünde kesirli merteben yerel olmayan türev operatörlerine değinilerek yerel türev operatörlerinin tanımlanmasındaki etken açıklanmıştır. Singüleritesi olmayan uyumlu türev operatörü ile uyumlu integral opretörünün literatürde var olan temel özellikleri verilmiştir. Literatüre katkı olarak uyumlu Rolle teoremi ve ortalama değer teoreminin birbirine denk olduğu gösterilmiş, uyumlu integralin bazı özellikleri verilmiştir.

3. Bölümde uyumlu integral ile tanımlanan uyumlu değişim analizi problemleri incelenmiştir. Literatürde var olan Euler–Lagrange denklemi burada farklı olarak değişim yöntemi ile elde edilmiştir. Daha sonra uyumlu türevli değişim analizi problemi için karşıtlık koşulu önerilmiştir. Uyumlu karşıtlık koşulunun genel durumundan yola çıkarak özel durumları incelenmiştir. Son olarak uyumlu karşıtlık koşulları için uygulama örnekleri verilmiştir. Buradan elde edilen 3.1.1 Teorem ve 3.1.1.1 Sonuç ile elde edilen orijinal sonuçlar [48]'de yayınlanmıştır. Ayrıca klasik integral ile tanımlanan genelleştirilmiş uyumlu türevli değişim analizi problemi için Euler–Lagrange denklemi ve karşıtlık koşulları elde edilmiştir. Genelleştirilmiş uyumlu karşıtlık koşullarının özel durumları incelenmiş ve uygulama örnekleri verilmiştir.

4. Bölümde uyumlu integral ile tanımlanan uyumlu türevli optimal kontrol problemi incelenmiştir. Literatürde var olan gerekli optimallik koşulları burada farklı olarak değişim yöntemi ile elde edilmiştir. Daha sonra uyumlu integral ile tanımlanan uyumlu türevli optimal kontrol problemi için karşıtlık koşulu önerilmiştir. Genel durumdaki karşıtlık koşulunun özel durumları incelenmiştir ve son olarak uyumlu karşıtlık koşulu için uygulama örneği verilmiştir. 4.1.1 Teorem ve 4.1.1.1 Sonuç ile elde edilen orijinal sonuçlar [48]' yayınlanmıştır. Ayrıca klasik integral ile tanımlanan genelleştirilmiş uyumlu türevli optimal kontrol problemi için karşıtlık koşulları elde edilmiştir. Genelleştirilmiş uyumlu karşıtlık koşullarının özel durumları incelenmiş ve uygulama örneği verilmiştir.

5. Bölümde karşıtlık koşulunun bir uygulaması olarak, zamana göre uyumlu türev içeren yayılım sisteminin optimal kontrolü ele alınmıştır. Optimal kontrol kuralı, durum ve kontrol değişkenlerinin özfonksiyon açılımlarının kullanılması ile elde edilen uyumlu türevli lineer diferansiyel denklemlerin analitik olarak çözülmesi ile bulunmuş, sonuçlar [48]'de yayınlanmıştır.

2. KESİRLİ TÜREV VE İNTEGRAL TANIMLARI

Bu bölümde öncelikle kesirli analizin çıkış noktası olan Riemann–Liouville kesirli türevi ve uygulamalarda sıkça tercih edilen Caputo kesirli türev tanımlarına değinilerek kesirli mertebeden yerel türevlerin tanımlanmasındaki etken açıklanacaktır.

2.1 Tanım (Riemann–Liouville kesirli integral [1]): *f*, $[a,b]$ reel aralığı üzerinde integrallenebilen bir fonksiyon ve $\alpha > 0$ olmak üzere *Riemann–Liouville integrali*

$$ {}_{a}^{RL}D_{t}^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a}^{t} (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\, d\tau \tag{2.1} $$

biçiminde tanımlanır.

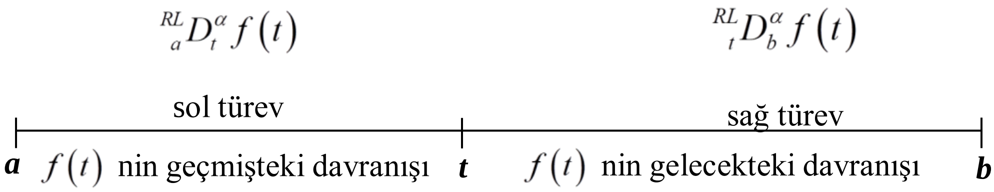
2.2 Tanım (Riemann–Liouville kesirli türevleri [1]): *f*, $[a,b]$ reel aralığı üzerinde integrallenebilen zaman değişkenli bir fonksiyon ve $n-1 \leq \alpha < n \left(n \in \mathbb{N}^{+}\right)$ olmak üzere α. mertebeden sol ve sağ *Riemann–Liouville kesirleri* sırasıyla

$$ {}_{a}^{RL}D_{t}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^{n}}{dt^{n}} \int_{a}^{t} (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau)\, d\tau, \tag{2.2} $$

$$ {}_{t}^{RL}D_{b}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d^{n}}{dt^{n}}\right) \int_{t}^{b} (\tau-t)^{n-\alpha-1} f(\tau)\, d\tau \tag{2.3} $$

biçiminde tanımlanır.

Fiziksel problemlerde, zaman değişkenine bağlı bir f fonksiyonu ele alındığında sol Riemann–Liouville kesirli türevi kullanılıyorsa geçmiş zamandaki verilere, sağ Riemann–Liouville kesirli türevi kullanılıyorsa gelecek zamandaki verilere ulaşılmak isteniyordur.



Şekil 2.1: $f(t)$ sürecinin sol ve sağ kesirli türev yorumu.

Riemann–Liouville yaklaşımında kesirli türevli başlangıç koşullarına sahip başlangıç değer problemlerinin başarılı bir şekilde çözülebilmesine rağmen, bu başlangıç koşullarının bilinen bir fiziksel anlamı yoktur. Dolayısıyla, burada matematiksel teori ve pratik ihtiyaçlar arasında bir uyuşmazlık meydana gelmektedir. Bu uyuşmazlığın ortadan kaldırılması için ilk olarak M. Caputo deneysel verilerden hareketle yeni bir türev tanımı önermiştir [49]. Caputo yaklaşımının temel avantajı, Caputo türevli kesirli diferansiyel denklemler için tanımlanan başlangıç koşulları ile tamsayı mertebeli diferansiyel denklemler için tanımlanan başlangıç koşullarının aynı olmasıdır.

2.3 Tanım (Caputo kesirli türevleri [1]): f, $[a,b]$ reel aralığı üzerinde sürekli türevlenebilen fonksiyon ve $n-1 \leq \alpha < n \; (n \in \mathbb{N})$ olmak üzere α. mertebeden sol ve sağ *Caputo kesirli türevleri* sırasıyla

$$
{}^{C}_{a}D^{\alpha}_{t} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{a}^{t} (t-\tau)^{n-\alpha-1} \left(\frac{d}{dt}\right)^{n} f(\tau)\, d\tau, \tag{2.4}
$$

$$ {}_{t}^{C}D_{b}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t}^{b} (\tau - t)^{n-\alpha-1} \left(-\frac{d}{dt}\right)^{n} f(\tau)\, d\tau \tag{2.5} $$

biçiminde tanımlanır.

Riemann–Liouville ve Caputo kesirli türev tanımları incelendiğinde her iki türev tanımının da çekirdek fonksiyonlarında singüleritenin olduğu görülür. Ayrıca Riemann–Liouville ve Caputo kesirli türevlerinin sıfır başlangıç koşulları için denk olduğu bilinmektedir [1].

2.4 Teorem: $f(t)$ sonlu (a,t) aralığında sürekli ve integrallenebilir bir fonksiyon olsun. $m-1 \le \alpha < m$ $\left(m \in \mathbb{Z}^{+}\right)$ olmak üzere $f^{k}(t)$, $(k = 0,1,2,\ldots,m+1)$ türevleri de $[a,t]$ üzerinde sürekli ve integrallenebilir ise $k = 0,1,2,\ldots,m+1$ için $f^{k}(a) = 0$ koşulları sağlanırsa

$$ {}_{a}^{RL}D_{t}^{\alpha} f(t) = {}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha} f(t) \tag{2.6} $$

olarak bulunur [1].

Riemann–Liouville ve Caputo türevi de dahil olmak üzere tüm kesirli türev tanımları lineerlik özelliğini sağlamaktadır. Buna rağmen bu tanımların pek çoğu sabitin türevinin sıfır olması, çarpım kuralı, bölüm kuralı, bileşke kuralı, Rolle teoremi, ortalama değer teoremi vb. gibi klasik türev özelliklerini sağlamazlar [1–3]. Bu ise mevcut tanımların pek çok alandaki uygulamalarının kapsamını sınırlandırarak kesirli analiz yaklaşımının araştırmalarını kısıtlamaktadır. Kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin mevcut tanımlar ile analitik çözümlerinin elde edilmesi zordur ve çoğu zaman mümkün olmamaktadır.

Khalil ve diğ. [18] kesirli mertebeden başlangıç değer problemini kolay bir şekilde çözebilmek ve bahsedilen zorlukların üstesinden gelmek için klasik türevin alışılmış limit tanımlamasını genişleterek singüleritesi olmayan yeni ve ilgi çekici bir tanımlama yapmıştır. Bu tanımlama klasik türevin pek çok özelliğini sağladığı için *‘‘uyumlu türev’’* olarak adlandırılmaktadır. Daha sonra Katugampola [19], [18]’de tanımlanan uyumlu türeve benzer olarak yeni bir yerel kesirli türev tanımlamıştır. Literatürde yine uyumlu türev olarak anılmaya başlayan bu türev operatörü de [18]’de tanımlanan uyumlu türevin pek çoğunu sağladığı için oldukça ilgi gören bir operatör olmuştur. Ancak bu operatör tezin kapsamı dışında tutulmuş ve karmaşa olmaması açısından operatörün tanım ve özelliklerine burada değinilmeyecektir.

2.1 Uyumlu Türev

Khalil ve diğ. uyumlu türev tanımını aşağıdaki şekilde vermiştir.

2.1.1 Tanım (Uyumlu türev [18]): $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyon, $0<\alpha\leq 1$ ve $t>0$ olmak üzere f fonksiyonunun α. mertebeden *uyumlu türevi*,

$$\frac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}}f(t)=f^{(\alpha)}(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f\left(t+\varepsilon t^{1-\alpha}\right)-f(t)}{\varepsilon} \tag{2.7}$$

biçiminde tanımlanır. f, $a>0$ için $(0,a)$ aralığı üzerinde α-diferansiyellenebilir ve $\lim_{t\to 0^{+}} f^{(\alpha)}(t)$ var ise

$$f^{(\alpha)}(0)=\lim_{t\to 0^{+}} f^{(\alpha)}(t) \tag{2.8}$$

biçiminde tanımlanır. Yukarıdaki gösterimlerin yanı sıra uyumlu türev operatörü için D_{α} notasyonu kullanılacaktır.

Abdeljawad [20], [18]’de tanımlanan uyumlu türevi genelleştirerek sol ve sağ uyumlu türev tanımlamalarını vermiştir.

2.1.2 Tanım (Sol uyumlu türev): $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ fonksiyon, $0<\alpha\leq 1$ ve $t>a$ olmak üzere f fonksiyonunun a noktasından başlayan α. mertebeden *sol uyumlu türevi*

$$\frac{d_a^{\alpha}}{dt_a^{\alpha}}f(t)=f_a^{(\alpha)}(t)=\lim_{\varepsilon\rightarrow 0}\frac{f\left(t+\varepsilon(t-a)^{1-\alpha}\right)-f(t)}{\varepsilon} \tag{2.9}$$

biçiminde tanımlanır. (a,b) üzerinde $f_a^{(\alpha)}(t)$ var ise o halde

$$f_a^{(\alpha)}(a)=\lim_{t\rightarrow a^{+}}f_a^{(\alpha)}(t) \tag{2.10}$$

elde edilir.

2.1.3 Tanım (Sağ uyumlu türev): $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ fonksiyon, $0<\alpha\leq 1$ ve $t<b$ olmak üzere f fonksiyonunun b noktasından sonlanan α. mertebeden *sağ uyumlu türevi*

$$\frac{{}_b d^{\alpha}}{{}_b dt^{\alpha}}f(t)={}_b f^{(\alpha)}(t)=-\lim_{\varepsilon\rightarrow 0}\frac{f\left(t+\varepsilon(b-t)^{1-\alpha}\right)-f(t)}{\varepsilon} \tag{2.11}$$

biçiminde tanımlanır. (a,b) üzerinde ${}_b f^{(\alpha)}(t)$ var ise o halde

$$\frac{{}_b d^{\alpha}}{{}_b dt^{\alpha}}f(b)={}_b f^{(\alpha)}(b)=\lim_{t\rightarrow b^{-}}{}_b f^{(\alpha)}(t) \tag{2.12}$$

elde edilir.

Yukarıdaki gösterimlerin yanı sıra sol uyumlu türev operatörü için D_a^{α}, sağ uyumlu türev operatörü için ${}_bD^{\alpha}$ notasyonu kullanılacaktır. Bu çalışmada, genellikle sol uyumlu türev kullanılmıştır, dolayısıyla bundan sonraki kısımda uyumlu türev denildiğinde sol uyumlu türev anlaşılacaktır.

2.2 Uyumlu Türevin Özellikleri

α mertebeden uyumlu türevi mevcut olan f fonksiyonuna $\alpha-$diferansiyellenebilir bir fonksiyon denir. Süreklilik kavramı ile $\alpha-$diferansiyellenebilirlik kavramı arasındaki ilişki aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

2.2.1 Teorem: $t>0$ ve $0<\alpha\leq 1$ olmak üzere $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $\alpha-$diferansiyellenebilir ise f fonksiyonu t noktasında süreklidir [18].

Uyumlu türevin tüm temel özellikleri aşağıdaki teorem ile verilmiştir [18,20,35]:

2.2.2 Teorem (Uyumlu türevin özellikleri): f,g bir $t>0$ noktasında $\alpha-$diferansiyellenebilir fonksiyonlar ve $0<\alpha\leq 1$ olsun. Bu durumda $\forall c,d,p,\lambda\in\mathbb{R}$ için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

i. $$(cf+dg)_a^{(\alpha)}(t)=cf_a^{(\alpha)}(t)+dg_a^{(\alpha)}(t), \tag{2.13}$$

ii. $$(fg)_a^{(\alpha)}(t)=f_a^{(\alpha)}(t)g(t)+f(t)g_a^{(\alpha)}(t) \tag{2.14}$$

iii. $$\left(\frac{f}{g}\right)_a^{(\alpha)}(t)=\frac{f_a^{(\alpha)}(t)g(t)-f(t)g_a^{(\alpha)}(t)}{g^2(t)} \tag{2.15}$$

iv. $\lambda_a^{(\alpha)}=0$, (Tüm sabit fonksiyonlar için $f(t)=\lambda$) (2.16)

v. f diferansiyellenebilir ise $f_a^{(\alpha)}(t) = (t-a)^{1-\alpha} \dfrac{df}{dt}(t)$ (2.17)

vi. $\left((t-a)^p\right)_a^{(\alpha)}(t) = p(t-a)^{p-\alpha}$, (2.18)

İspat: ***i. ii. iii. iv.*** ve ***vi.*** özelliklerinin ispatı [18]'de verilmiştir. Burada [18]'de ispatı verilmeyen ***v.*** özelliğin ispatına değinilecektir.

v. (2.7) eşitliği ile verilen uyumlu türev tanımı içerisindeki $\varepsilon(t-a)^{1-\alpha} = h$ olarak alınırsa $\varepsilon = h(t-a)^{\alpha-1}$ olduğu görülür. Ele alınan dönüşüm (2.7) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} f_a^{(\alpha)}(t) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f\left(t+\varepsilon(t-a)^{1-\alpha}\right) - f(t)}{\varepsilon} = \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h(t-a)^{\alpha-1}} \\ &= (t-a)^{1-\alpha} \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = (t-a)^{1-\alpha} \frac{df}{dt}(t) \end{aligned} \quad (2.19)$$

olur. □

Bazı özel durumlarda f fonksiyonunun klasik türevi olmadığı halde uyumlu türevi olabilir.

2.2.3 Örnek: $f(t) = 2\sqrt{t}$ fonksiyonunun $t = 0$ noktasında birinci mertebeden klasik türevi olmamasına rağmen $\frac{1}{2}$. mertebeden uyumlu türevinin $f^{\left(\frac{1}{2}\right)}(t) = \left(2\sqrt{t}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)} = 2\frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = 1$ mevcut olduğu görülür.

2.2.2 Teoremin bir sonucu olarak bazı belirli fonksiyonların α mertebeden uyumlu türevi şu şekildedir [18]:

i. $$\frac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}}(1)=0 \tag{2.20}$$

ii. $$\frac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}}(\ell nt)=t^{-\alpha} \tag{2.21}$$

iii. $$\frac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}}\left(e^{cx}\right)=cx^{1-\alpha}e^{cx} \ , \ c\in\mathbb{R} \tag{2.22}$$

iv. $$\frac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}}(\sin bx)=bx^{1-\alpha}\cos bx, \ b\in\mathbb{R} \tag{2.23}$$

v. $$\frac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}}(\cos bx)=-bx^{1-\alpha}\sin bx \ , b\in\mathbb{R} \tag{2.24}$$

vi. $$\frac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}}\left(\frac{1}{\alpha}t^{\alpha}\right)=1 \tag{2.25}$$

vii. $$\left(\sin\frac{1}{\alpha}t^{\alpha}\right)^{(\alpha)}=\cos\frac{1}{\alpha}t^{\alpha} \tag{2.26}$$

viii. $$\frac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}}\left(\cos\frac{1}{\alpha}t^{\alpha}\right)=-\sin\frac{1}{\alpha}t^{\alpha} \tag{2.27}$$

ix. $$\frac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}}\left(e^{\frac{1}{\alpha}t^{\alpha}}\right)=e^{\frac{1}{\alpha}t^{\alpha}} \tag{2.28}$$

Abdejawad [20]'de ardışık uyumlu türev ve uyumlu Taylor açılımı tanımlarını aşağıdaki şekilde vermiştir.

2.2.4 Tanım (Ardışık uyumlu türev): $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonun uyumlu türevi var ve $f^{(n)}(t)$ sürekli olsun. $0<\alpha\leq 1$ ve $n\in\mathbb{Z}^{+}$ olmak üzere n. mertebeden ardışık uyumlu türev sırasıyla

$$^{n}\frac{d_a^{\alpha}}{dt_a^{\alpha}}f(t)=\underbrace{\frac{d_a^{\alpha}}{dt_a^{\alpha}}\frac{d_a^{\alpha}}{dt_a^{\alpha}}\cdots\frac{d_a^{\alpha}}{dt_a^{\alpha}}}_{\text{n-kez}}f(t) \tag{2.29}$$

$$^{n}\frac{{}_{b}d^{\alpha}}{{}_{b}dt}f(t)=\underbrace{\frac{{}_{b}d^{\alpha}}{{}_{b}dt}\frac{{}_{b}d^{\alpha}}{{}_{b}dt}\cdots\frac{{}_{b}d^{\alpha}}{{}_{b}dt}}_{\text{n-kez}}f(t) \tag{2.30}$$

sol ve sağ ardışık uyumlu türev olarak adlandırılır.

Ayrıca kesirli mertebeden sol uyumlu türev için $n=2$ ve $0<\alpha\leq\frac{1}{2}$ özel durumunda,

$$^{2}\frac{d_a^{\alpha}}{dt_a^{\alpha}}f(t)=\begin{cases}(1-\alpha)(t-a)^{1-2\alpha}f'(t)+(t-a)^{2-2\alpha}f''(t), & t>a\\ 0 & , \quad t<a\end{cases} \tag{2.31}$$

olur.

2.2.5 Tanım (Uyumlu Taylor açılımı [20]): f, t_0 noktasının bir komşuluğunda $0<\alpha\leq 1$ için sonsuz kez $\alpha-$differansiyellenebilir fonksiyon olsun. Bu durumda $R>0$ için $t\in\left(t_0,t_0+R^{1/\alpha}\right)$ aralığında f fonksiyonunun uyumlu Taylor seri açılımı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$f(t)=f(t_0)+f_a^{(\alpha)}(t_0)\frac{(t-t_0)^{\alpha}}{\alpha}+{}^{2}f_a^{(\alpha)}(t_0)\frac{(t-t_0)^{2\alpha}}{\alpha^2 2!}+\ldots+{}^{n}f_a^{(\alpha)}(t_0)\frac{(t-t_0)^{n\alpha}}{\alpha^n n!}. \tag{2.32}$$

Atangana ve diğ. [23] kısmi uyumlu türevi aşağıdaki şekilde tanımlamıştır.

2.2.6 Tanım (Uyumlu kısmi türev): f bir fonksiyon ve $x_1, x_2, ..., x_m$ değişkenleri olsun ve x_i noktasındaki değişkene göre $0 < \alpha \leq 1$ mertebeden uyumlu kısmi türevi

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x_i^\alpha} f\left(x_1, x_2, ..., x_m\right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f\left(x_1, ..., x_{i-1}, x_i + \varepsilon x_i^{1-\alpha}, ..., x_m\right) - f\left(x_1, ..., x_m\right)}{\varepsilon} \tag{2.33}$$

olarak tanımlanır.

Birçok kesirli türev tarafından sağlanamayan zincir kuralı özelliğinin uyumlu türev için sağlandığı, Abdeljawad tarafından [20]'de gösterilmiştir.

2.2.7 Teorem (Uyumlu zincir kuralı): $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ $0 < \alpha \leq 1$ için $\alpha -$ diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsun. $g(t) \neq 0$ ve $t \neq a$ için $\alpha -$ diferansiyellenebilirdir öyle ki

$$\left(f \circ g\right)_a^{(\alpha)}(t) = f_a^{(\alpha)}\left(g(t)\right) g_a^{(\alpha)}(t) g_a^{(\alpha-1)}(t) \tag{2.34}$$

dir. Ayrıca $t = a$ ise

$$\left(f \circ g\right)_a^{(\alpha)}(a) = \lim_{t \to a^+} f_a^{(\alpha)}\left(g(t)\right) g_a^{(\alpha)}(t) g_a^{(\alpha-1)}(t) \tag{2.35}$$

şeklindedir.

İspat: $\left(f \circ g\right)(t) = f\left(g(t)\right) = h(t)$ olsun. Uyumlu türev tanımı içerisindeki $t + \varepsilon(t-a)^{1-\alpha} = u$ olarak adlandırılsın. g fonksiyonunun sürekliliği kullanılarak

$$
\begin{aligned}
h_a^{(\alpha)}(t) &= \lim_{u\to t}\frac{f(g(u))-f(g(t))}{u-t}(t-a)^{1-\alpha} \\
&= \lim_{u\to t}\frac{f(g(u))-f(g(t))}{g(u)-g(t)}\frac{g(u)-g(t)}{u-t}(t-a)^{1-\alpha} \\
&= \lim_{g(u)\to g(t)}\frac{f(g(u))-f(g(t))}{g(u)-g(t)}\lim_{u\to t}\frac{g(u)-g(t)}{u-t}(t-a)^{1-\alpha} \\
&= f'(g(t))g'(t)(t-a)^{1-\alpha} \\
&= f_a^{(\alpha)}(g(t))+g_a^{(\alpha)}(t)g_a^{(\alpha-1)}(t)
\end{aligned}
\tag{2.36}
$$

elde edilir. □

Temel analiz teoremlerinden Rolle teoremi ve ortalama değer teoremini Khalil ve diğ. uyumlu türev için [18]'de aşağıdaki şekilde ifade etmiştir.

2.2.8 Teorem (Uyumlu Rolle teoremi): $a>0$ ve $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ aşağıdaki koşulları sağlayan bir fonksiyon olsun:

i. f , $[a,b]$ aralığında süreklidir,

ii. f , $0<\alpha<1$ için (a,b) aralığında $\alpha-$diferansiyellenebilirdir,

iii. $f(a)=f(b)$.

Bu durumda

$$
f^{(\alpha)}(c)=0 \tag{2.37}
$$

olacak şekilde $c\in(a,b)$ vardır.

İspat: f , $[a,b]$ aralığında sürekli ve $f(a)=f(b)$ olduğundan bir $c\in(a,b)$ yerel ekstremum noktası vardır. Genelliği kaybetmeden c noktasının yerel minimum noktası olduğu kabul edilsin. O halde,

$$f^{(\alpha)}(c)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{f\left(c+\varepsilon c^{1-\alpha}\right)-f(c)}{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0^-}\frac{f\left(c+\varepsilon c^{1-\alpha}\right)-f(c)}{\varepsilon} \tag{2.38}$$

Olsun. Ancak ilk limit negatif değildir, ikinci limit pozitif değildir. Buradan

$$f^{(\alpha)}(c)=0 \tag{2.39}$$

sonucuna ulaşılır. □

2.2.9 Teorem (Uyumlu ortalama değer teoremi): $a>0$ ve $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ aşağıdaki koşulları sağlayan bir fonksiyon olsun:

i. f , $[a,b]$ aralığında süreklidir

ii. f , $0<\alpha<1$ için (a,b) aralığında $\alpha-$diferansiyellenebilirdir,

Bu durumda

$$f^{(\alpha)}(c)=\frac{f(b)-f(a)}{\frac{1}{\alpha}b^{\alpha}-\frac{1}{\alpha}a^{\alpha}} \tag{2.40}$$

olacak şekilde bir $c\in(a,b)$ vardır.

İspat:

$$g(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{\frac{1}{\alpha}b^{\alpha}-\frac{1}{\alpha}a^{\alpha}}\left(\frac{1}{\alpha}x^{\alpha}-\frac{1}{\alpha}a^{\alpha}\right) \tag{2.41}$$

fonksiyonu tanımlansın. g fonksiyonunun Rolle teoreminin koşullarını sağladığı kolaylıkla görülür.

$$g^{(\alpha)}(c)=0 \tag{2.42}$$

olacak şekilde $c\in(a,b)$ vardır. Böylece

$$f^{(\alpha)}(c)-\frac{f(b)-f(a)}{\frac{1}{\alpha}b^{\alpha}-\frac{1}{\alpha}a^{\alpha}}\left(\left(\frac{1}{\alpha}x^{\alpha}\right)^{(\alpha)}-\left(\frac{1}{\alpha}a^{\alpha}\right)^{(\alpha)}\right)=0 \tag{2.43}$$

olur. Buradan

$$f^{(\alpha)}(c)=\frac{f(b)-f(a)}{\frac{1}{\alpha}b^{\alpha}-\frac{1}{\alpha}a^{\alpha}} \tag{2.44}$$

elde edilir. □

Klasik analizin Rolle teoremi ve ortalama değer teoreminin denkliği Qazi [51] tarafından verilmiştir. Benzer bir yaklaşımla uyumlu Rolle teoremi ve ortalama değer teoreminin denkliği aşağıdaki teorem ile verilir.

2.2.10 Teorem: Uyumlu ortalama değer teoremi ve Uyumlu Rolle teoremleri birbirine denktir.

İspat: Uyumlu ortalama değer teoreminin koşullarını sağlayan bir f fonksiyonun uyumlu Rolle teoremini sağladığı açıktır. Tersine uyumlu Rolle teoremini sağlayan f fonksiyonunun uyumlu ortalama değer teoremini sağladığını göstermek için aşağıdaki fonksiyon tanımlansın:

$$g(x)=\begin{vmatrix} f(x) & f(a) & f(b) \\ \frac{1}{\alpha}x^{\alpha} & \frac{1}{\alpha}a^{\alpha} & \frac{1}{\alpha}b^{\alpha} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= f(x)\begin{vmatrix}\frac{1}{\alpha}a^{\alpha} & \frac{1}{\alpha}b^{\alpha}\end{vmatrix} - f(a)\begin{vmatrix}\frac{1}{\alpha}x^{\alpha} & \frac{1}{\alpha}b^{\alpha}\end{vmatrix} + f(b)\begin{vmatrix}\frac{1}{\alpha}x^{\alpha} & \frac{1}{\alpha}a^{\alpha}\end{vmatrix} \tag{2.45}$$

Dikkat edilirse, $g(x)$ fonksiyonu (a,b) açık aralığında $\alpha-$diferansiyellenebilir $[a,b]$ aralığında sürekli ve $g(a)=g(b)$ dir. Dolayısıyla g uyumlu Rolle teoremi sağlar yani $g^{(\alpha)}(c)=0$ olacak şekilde bir $c\in(a,b)$ noktası vardır. g fonksiyonunun tanımı kullanıldığında

$$f(b)-f(a)=f^{(\alpha)}(c)\left|\frac{1}{\alpha}b^{\alpha}-\frac{1}{\alpha}a^{\alpha}\right| \tag{2.46}$$

olarak elde edilir ki bu ise f fonksiyonunun uyumlu diferansiyellenebilir fonksiyonlar için ortalama değer teoremini sağladığını gösterir. □

2.3 Uyumlu İntegral

Uyumlu integral yaklaşımında integrali tanımlamak için en önemli fonksiyon sınıfı sürekli fonksiyon uzaylarıdır. Khalil ve diğ. [18], Weierstrass Yaklaşım teoremini kullanarak integralin polinomlarda tanımlanmasının yeterli olduğunu göstermiştir.

2.3.1 Teorem (Weierstrass yaklaşım teoremi): f, sonlu $[a,b]$ reel aralığında sürekli bir fonksiyon ise $[a,b]$ reel aralığı üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsayan bir $P_n(x)$ polinom dizisi vardır [50].

Khalil ve diğ. [18] bu teoreme göre, $0<\alpha<\infty$ ve $p\neq-\alpha$ özelliğindeki herhangi bir $p\in\mathbb{R}$ için t^p nin kesirli integralini

$$\mathrm{I}_\alpha\left(t^p\right)=\frac{t^{p+\alpha}}{p+\alpha} \tag{2.47}$$

biçiminde tanımlamışlardır. Böylece düzgün yakınsak bir $f(t)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$ serisi için $f(t)$ fonksiyonunun α. mertebeden kesirli integrali

$$\mathrm{I}_\alpha\left(f(x)\right)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k \mathrm{I}_\alpha\left(t^k\right)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{t^{k+\alpha}}{k+\alpha} \tag{2.48}$$

olarak vermişlerdir. $\alpha=1$ olması durumunda I_α kesirli integrali klasik integrale eşittir.

2.3.2 Örnek: $f(t)=\cos t$ fonksiyonunun $\frac{1}{2}$. mertebeden I_α kesirli integrali, $f(t)=\cos t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}$ kuvvet serisinden yararlanılarak

$$\mathrm{I}_{\frac{1}{2}}\left(f(t)\right)=\mathrm{I}_{\frac{1}{2}}\left(\cos t\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n+\frac{1}{2}}}{\left(2n+\frac{1}{2}\right)(2n)!} \tag{2.49}$$

olarak elde edilir.

Bu örnek, aşağıdaki f fonksiyonunun $a\geq 0$ noktasından başlayan α mertebeden uyumlu integral tanımını akla getirmiştir. Khalil ve diğ. [18], uyumlu integrali klasik integral ile ilişkilendirerek tanımlamıştır.

2.3.3 Tanım (Uyumlu integral): $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyon, $0<\alpha\leq 1$ ve $t>0$ olmak üzere f fonksiyonunun α. mertebeden *uyumlu integrali*

$$I_\alpha^a(f)(t) = I_1^a\left(t^{\alpha-1} f\right)(t) = \int_a^t f(x)\, x^{\alpha-1} dx \tag{2.50}$$

biçiminde tanımlanır.

Abdeljawad [20], [18]'de tanımlanan uyumlu integrali sol ve sağ integral yaklaşımlarını ele alarak genelleştirmiş ve aşağıdaki tanımı vermiştir.

2.3.4 Tanım (Sol uyumlu integral): $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ sürekli fonksiyon, $n<\alpha\leq n+1$ $(n\in\mathbb{N})$ ve $\beta=\alpha-n$ olmak üzere f fonksiyonunun α. mertebeden *sol uyumlu integrali* aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\left(I_\alpha^a f\right)(t) = \boldsymbol{I}_{n+1}^a\left((t-a)^{\beta-1} f\right) = \frac{1}{n!}\int_a^t (t-x)^n (x-a)^{\beta-1} f(x)\, dx. \tag{2.51}$$

Dikkat edilirse, $\alpha=n+1$ için $\beta=1$ olduğundan (2.51) eşitliği

$$\left(I_\alpha^a f\right)(t) = \left(\boldsymbol{I}_{n+1}^a f\right)(t) = \frac{1}{n!}\int_a^t (t-x)^n f(x)\, dx \tag{2.52}$$

olur. Bu eşitlik f fonksiyonunun $(a,t]$ aralığı üzerindeki $n+1$ katlı integralidir.

2.3.5 Tanım (Sağ uyumlu integral): $f:(-\infty,b]\to\mathbb{R}$ sürekli fonksiyon, $n<\alpha\leq n+1$ $(n\in\mathbb{N})$ ve $\beta=\alpha-n$ olmak üzere f fonksiyonunun α. mertebeden *sağ uyumlu integrali* aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\left({}^bI_\alpha f\right)(t) = {}^b\boldsymbol{I}_{n+1}\left((b-t)^{\beta-1} f\right)(t) = \frac{1}{n!}\int_t^b (x-t)^n (b-x)^{\beta-1} f(x)\, dx. \tag{2.53}$$

2.4 Uyumlu İntegralin Özellikleri

2.4.1 Teorem (Uyumlu integralin temel teoremi I [18]): $0<\alpha\leq 1$ ve f sürekli bir fonksiyon olsun. $t\geq a$ için,

$$D_a^{\alpha} I_{\alpha}^{a}(f)(t)=f(t) \tag{2.54}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: f fonksiyonu sürekli olduğundan, $I_{\alpha}^{a}(f)(t)$ türevlenebilirdir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} D_a^{\alpha}\left(I_{\alpha}^{a}(f)\right) &= (t-a)^{1-\alpha}\frac{d}{dt}I_{\alpha}^{a}(f)(t)=(t-a)^{1-\alpha}\frac{d}{dt}\int_a^t \frac{f(x)}{(x-a)^{1-\alpha}}dx \\ &= (t-a)^{1-\alpha}\frac{f(t)}{(t-a)^{1-\alpha}}=f(t) \end{aligned} \tag{2.55}$$

olduğu görülür. □

2.4.2 Teorem (Uyumlu integralin temel teoremi II [18]): $0<\alpha\leq 1$ ve f türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $t\geq a$ için,

$$I_{\alpha}^{a} f_a^{(\alpha)}(t)=f(t)-f(a) \tag{2.56}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: f türevlenebilir bir fonksiyon olduğu için

$$
\begin{aligned}
I_{\alpha}^{a} f_{a}^{(\alpha)}(t) &= \int_{a}^{t} (x-a)^{\alpha-1} f_{a}^{(\alpha)}(x)\,dx = \int_{a}^{t} (x-a)^{\alpha-1} (x-a)^{1-\alpha} f'(x)\,dx \\
&= \int_{a}^{t} f'(x)\,dx = f(t) - f(a)
\end{aligned}
\tag{2.57}
$$

olduğu görülür. □

Burada [52]'de verilen özelliklerin özel bir hali olarak uyumlu integralin özellikleri ifade edilecektir.

2.4.3 Teorem (Uyumlu integralin özellikleri): $0 < \alpha \le 1,\ \ a > 0$ ve $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar olsun. Uyumlu integral özellikleri şu şekildedir:

i. $$\int_{a}^{b} \lambda f(x)\, d_{a}^{\alpha} x = \lambda \int_{a}^{b} f(x)\, d_{a}^{\alpha} x, \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \tag{2.58}$$

ii. $$\int_{a}^{b} \left[f(x) \mp g(x) \right] d_{a}^{\alpha} x = \int_{a}^{b} f(x)\, d_{a}^{\alpha} x \mp \int_{a}^{b} g(x)\, d_{a}^{\alpha} x \tag{2.59}$$

iii. $$\int_{a}^{a} f(x)\, d_{a}^{\alpha} x = 0 \tag{2.60}$$

iv. $$\int_{a}^{b} f(x)\, d_{a}^{\alpha} x = -\int_{b}^{a} f(x)\, d_{a}^{\alpha} x \tag{2.61}$$

v. $$\int_{a}^{b} f(x)\, d_{a}^{\alpha} x = \int_{a}^{c} f(x)\, d_{a}^{\alpha} x + \int_{c}^{b} f(x)\, d_{a}^{\alpha} x \tag{2.62}$$

İspat: Özelliklerin ispatları sırasıyla aşağıdaki şekilde gösterilir:

i. $$I_{\alpha}^{a}(\lambda f)(t) = \int_{a}^{b} \lambda f(x)\, d_{a}^{\alpha} x = \lambda \int_{a}^{b} f(x)\, d_{a}^{\alpha} x = \lambda I_{\alpha}^{a} f(t) \tag{2.63}$$

ii. $\int_a^b \left[f(x) \mp g(x) \right] d_a^\alpha x = \int_a^b \left[f(x) \mp g(x) \right] x^{\alpha-1} dx$

$$= \int_a^b f(x) x^{\alpha-1} dx \mp \int_a^b g(x) x^{\alpha-1} dx \tag{2.64}$$

$$= \int_a^b f(x) d_a^\alpha x \mp \int_a^b g(x) d_a^\alpha x$$

iii. $\int_a^a f(x) d_a^\alpha x = F(a) - F(a) = 0$ (2.65)

iv. $\int_a^b f(x) d_a^\alpha x = F(b) - F(a) = -\left(-F(a) + F(b)\right) = -\int_b^a f(x) d_a^\alpha x$ (2.66)

v. $\int_a^b f(x) d_a^\alpha x = F(b) - F(a) = F(b) - F(c) + F(c) - F(a)$

$$= \int_a^c f(x) d_a^\alpha x + \int_c^b f(x) d_a^\alpha x \tag{2.67}$$

Uyumlu kısmi integrasyon özelliği Abdeljawad tarafından [20]'de elde edilmiştir.

2.4.4 Teorem (Uyumlu kısmi integrasyon): $0 < \alpha \leq 1$, $a > 0$ ve $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ iki fonksiyon öyle ki fg diferansiyellenebilir olsun. Bu durumda uyumlu kısmı integrasyon formülü aşağıdaki şekildedir:

$$\int_a^b f(x) g_a^{(\alpha)}(x) d_a^\alpha x = f(x) g(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(x) f_a^{(\alpha)}(x) d_a^\alpha x. \tag{2.68}$$

3. UYUMLU TÜREVLİ DEĞİŞİM ANALİZİ

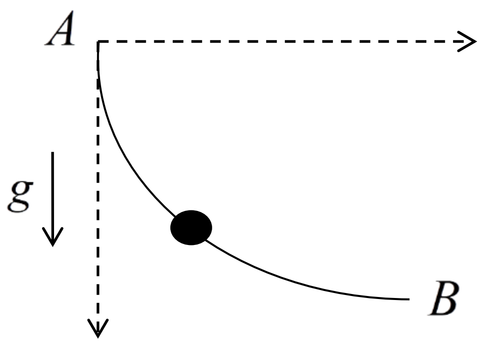
İntegrallerin optimizasyon teorisi olan değişim analizi belirli bir integralin minimum (ya da maksimum) değerinin varlığı ve varsa bu minimum fonksiyonun bulunması problemi olarak tanımlanmaktadır. Yani değişim analizi problemi

$$J(x)=\int_a^b F\left(t,x(t),\dot{x}(t)\right)dt \tag{3.1}$$

ile tanımlanan J performans indeksini minimize (veya maksimize) eden $x(t)$ fonksiyonunu bulmayı amaçlar. Değişim analizinde fonksiyonelin $x(a)=x_a$ ve $x(b)=x_b$ sınır koşullarına bitiş veya uç noktaları denir. Özel olarak $x(a)=x_a$ başlangıç noktası $x(b)=x_b$ ise bitiş noktası olarak adlandırılır. Bu koşulların her ikisi birden sabit veya değişken olabilir. Uygulama problemlerinde genellikle başlangıç noktası sabit kabul edilip bitiş noktasının sabit olmadığı durumlar incelenir.

Değişim analizinin kökleri, M.Ö. 1. yüzyılın sonlarında Kraliçe Dido ve Aristo gibi Yunan düşünürlerin eserlerine kadar uzanmaktadır. Bir efsaneye göre, Tyrian prensesi Dido, Carthage şehrini işgal etmeden önce bulunduğu alanı maksimize etmek için sığır derisinden yapılan çember yayı formunda bir ip kullanmıştır. Carthage şehrinin kuruluş hikâyesi hayali olsa da yeni bir matematik alanına, değişim analizi ve optimal kontrol teorisine esin kaynağı olmuştur. Fonksiyonların ekstremum değerlerini bulma teorisi Yunan matematikçiler Zenodorus (M.Ö. 495–435) ve Poppus'un (M.S. 300) ele aldığı isoperimetrik problemler ile başlamıştır. 17. yüzyılda, Galileo, Fermat ve Newton gibi pek çok fizikçi ve matematikçi bazı değişim problemlerini araştırmış ancak bu problemleri çözmek için değişim yöntemlerini kullanılmamışlardır. Değişim analizi, 1696'da

Johann Bernoulli'nin (1667–1748) "*brachistochrone (en kısa zaman) problemi"* olarak adlandırdığı problemle gelişmeye başlamıştır [53].



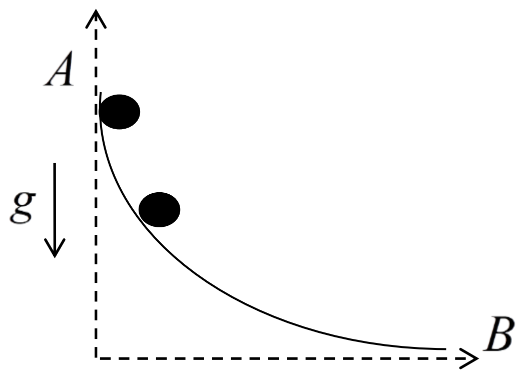
Şekil 3.1: Brachistochrone problemi.

Şekil 3.1'de görüldüğü gibi brachistochrone probleminde; A ve B gibi aynı düşey veya yatay çizgi üzerinde olmayan sabit iki noktayı birleştiren bir tel boyunca yer çekimi ile hareket eden boncuğun en kısa zamanda B noktasına ulaşması için telin alması gereken şekil araştırılmaktadır. Bu problem ilk olarak 1638'de Galileo (1564–1642) tarafından düşünülmüş, John ve kardeşi Jacob (1654–1705), Gottfried Leibniz (1646–1716) ve Isaac Newton (1642–1727) tarafından çözülmüştür. Leonard Euler (1707–1783) ve Bernoulli ise yaptıkları ortak çalışma ile bu çözüme önemli katkılar sağlamışlardır. Euler ve Bernoulli'nin çalışmasından oldukça etkilenen Joseph–Louis Lagrange (1736–1813) bu tip problemlerin çözülmesi için ilk değişim metodunu vermiş ve böylece bir fonksiyonun ekstremumu için gerekli koşul Euler–Lagrange denklemi olarak adlandırılmıştır. Lagrange, değişken bitiş noktasına sahip problemler üzerine çalışarak optimizasyon teorisinde önemli bir yere sahip olan ve daha sonra Lagrange çarpanı olarak adlandırılan yöntemi bulmuştur. Değişim analizinde fonksiyonun ekstemumunu bulmak için yeterli koşullar, ikinci değişim de dikkate alınarak 1786'da Adrien Marie Legendre (1752–1833) tarafından verilmiştir. 1836'da Jacob Jacobi (1804–1851) yeterli koşulu incelemiş ve bu koşul sonradan Legendre–Jacobi koşulu olarak adlandırılmıştır. Aynı zamanda Sir William Rowan Hamilton (1788–1856) uzayda çeşitli dış kuvvetler tarafından etkilenen bir parçacığın hareketinin, iki tane birinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemi sağlayan tek bir fonksiyonla temsil edilebileceğini göstererek mekanik problemleri üzerine önemli katkılarda bulunmuştur. 1838'de Jacobi'nin bu çalışmaya bazı itirazları olmuş ve yalnızca tek bir kısmi diferansiyel denklemin gerekli olduğunu göstermiştir. Jacobi–Hamilton denklemi olarak adlandırılan bu denklemin mekanikte olduğu kadar değişim analizi ve dinamik programlama ile optimal kontrole de derin etkisi olmuştur.

Karl Weierstrass (1815–1897) güçlü ve zayıf ekstremum arasındaki ayrımı vermiştir ve bu ayrım için yeterli koşullar Weierstrass koşulu olarak adlandırılmıştır. Sonrasında Rudolph Clebsch (1833–1872) ve Adolph Mayer, daha genel problem sınıfları için koşulları oluşturmaya devam etmiştir. Clebsch, diferansiyel denklemler formundaki sınır koşullarının yanı sıra ikinci değişime dayanan bir koşul ispatlayarak değişim analizi problemini formülize etmiştir. 1868'de Mayer, Clebsch'in çalışmasını tekrar gözden geçirmiş ve değişim analizindeki genel problem için daha güzel sonuçlar elde etmiştir. Daha sonra Mayer bu problemleri 1878'de Lagrange problemi ve 1895'te Mayer problemini ayrıntılı olarak tanımlamıştır.

1898'de Adolf Kneser, Karl Gauss'un (1777–1855) jeodeziklerdeki sonucunu kullanarak değişim analizine yeni bir yaklaşım önermiştir. Sabit olmayan bitiş noktası problemleri için ortogonalliği özel bir durum olarak içeren karşıtlık koşulunu elde etmiştir. Kneser, Oskar Bolza (1857–1942) ile birlikte bu problemler için yeterlilik koşulunu ispat etmiştir. 1900'de David Hilbert (1862–1943) öz değer ve öz fonksiyonlarla kuadratik formdaki bir fonksiyonel için ikinci değişimi göstermiştir. 1908–1910 yılları arasında Gilbert Bliss (1876–1951) ve Max Mason, Kneser'in sonuçlarını detaylandırmışlardır. 1913'de Bolza, Bolza problemini Lagrange ve Mayer problemlerinin genel bir formu olarak açıklamıştır. Bliss bu üç problemin denk olduğunu göstermiştir [53]. Günümüzde değişim analizi hakkında Desineni Subbaram Naidu [53], Alpha C. Chiang [54], Enid R. Pinch [55], Bruce van Brunt [56], Daniel Liberzon [57] ve Donald E. Kirk [58] ve daha birçok matematikçinin kitapları bulunmaktadır.

Değişim analizindeki gelişmeler devam ederken değişim analizi ile kesirli analiz arasındaki ilk ilişki 19. yüzyılda Niels Abel'in "*tautochrone* (*aynı zaman*)" probleminin genelleştirilmesinde yer alan bir integral denklemin çözümünde kesirli analizi kullanması ile ortaya çıkmıştır (Abel,1823). Bununla birlikte, her iki alanın birleştirildiği "değişimlerin kesirli analizi" ancak yüzyıl sonra 1996–1997 yıllarında Fred Riewe'in çalışmalarıyla doğmuştur [59,60].



Şekil 3.2: Tautochrone problemi.

Şekil 3.2'de görüldüğü gibi tautochrone probleminde; A ve B gibi aynı düşey veya yatay çizgi üzerinde olmayan sabit iki noktayı birleştiren bir tel boyunca yer çekimi ile hareket eden kütlelerin farklı noktalardan aynı anda bırakıldıklarında B noktasına aynı anda ulaşmaları için telin alması gereken şekil araştırılmaktadır.

Değişimlerin kesirli analizi, fonksiyonelin, sınır koşulların veya her ikisinin birden kesirli operatörlerle ifade edildiği problemler ile ilgilenir ve asıl amaç, bu tür bir kesirli fonksiyoneli minimize (ya da maksimize) eden fonksiyonu bulmaktır. Değişim analizinin fonksiyoneli bir eylemi, enerjiyi veya maliyet fonksiyonunu temsil edebilir. Bu yüzden fizik, mühendislik ve ekonomi gibi çeşitli alanlardaki problemler için kullanılmaktadır.

Değişim problemlerine yerel olmayan kesirli operatörlerin eklenmesiyle hafıza etkisine sahip bazı modellerin geliştirilmesi uygun hale gelmiştir. Oldukça hızlı gelişen bu alanda Lagrange formülasyonu, Riemann–Liouville veya Caputo kesirli türevlerine, kesirli integrallere veya tam sayı ve kesirli mertebelerin birlikte yer aldığı operatörlere bağlı olarak farklı yaklaşımlarla geliştirilmiştir. Örneğin, Riewe [59,60], korunumlu olmayan (non–conservative) Lagrange ve Hamilton mekaniğini incelemiş ve Euler–Lagrange denklemlerinin kesirli türevli değişim problemleri için bir uyarlamasını elde etmiştir. Agrawal, bu çalışma üzerine çalışmaya devam ederek literatürde yaygın olarak kullanılan Riemann–Liouville, Caputo ve Riesz gibi türev operatörlerini içeren bazı tipteki kesirli değişim problemleri için kesirli Euler–Lagrange denklemlerini elde etmiştir [61–64].

Daha sonralarda birçok araştırmacı Caputo, Riemann–Liouville, Riesz kesirli türevleri vb. operatörler ile kesirli türevli değişim analizini genelleştirmek için çeşitli yaklaşımlar geliştirmiştir [65–72]. Ayrıca kontrol teorisinin altında yatan matematiğin büyük bir kısmı değişim analizinin bir parçası olduğundan son zamanlarda kesirli türevli değişim analizi, klasik ve kuantum mekaniği, hareket prensibi, kuantumlama, korunumlu, korunumsuz ve zorlanmış sistemlerin tanımlamaları ve daha birçok fizik alanı için ilgi çekici bir hal almıştır [73–79]. Günümüzde kesirli değişim analizi ile ilgili kitaplar [72,80,81] numaralı kaynaklarda bulunabilir.

Literatüre eklenen yeni kesirli mertebe türev operatörleri ile birlikte bu operatörlerin değişim analizi de yeni birer inceleme başlığı haline gelmiştir. Bu tezde ele alınan uyumlu türev operatörü için değişim analizi ilk olarak Chung [30] daha sonra Lazo ve Torres [36] tarafından incelenmiştir. Chung, Lazo ve Torres yalnızca belirli uyumlu integral ile uyumlu türevli değişim analizi için sonuçlar elde etmişlerdir. Ancak, karşıtlık koşulu yani yeterli sayıda uygun sınır koşullunu içermeyen uyumlu türevli değişim analizi problemleri için henüz bir çalışma bulunmadığı görülmektedir. Bu boşluğu doldurabilmek için bu bölümde sabit olmayan bitiş noktasına sahip uyumlu türevli değişim analizi problemleri için karşıtlık koşulları, hem uyumlu integral hem de klasik integral ile tanımlanan uyumlu türevli değişim analizi problemleri için elde edilmiş ve uygulamaları verilmiştir.

Aşağıdaki kısımda uyumlu türevli değişim analizi için temel kavramlar verilmektedir.

3.1 Tanım (Temel değişim analizi problemi [36]): Sürekli fonksiyonlar kümesinde tanımlanan $x:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu için performans indeksi

$$J(x)=\int_a^b F\left(t,x(t),x_a^{(\alpha)}(t)\right)d_a^{\alpha}t \tag{3.2}$$

olsun. Burada $t\in[a,b]$ için $x(t)$ fonksiyonu, $x_a^{(\alpha)}$ uyumlu türevi var olan bir fonksiyondur. Ayrıca $F:[a,b]\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ fonksiyonelinin her bir değişkenine göre C^{α} sınıfından olduğunu varsayılır.

Uyumlu türevli değişim analizinin temel problemi, J performans indeksini minimize (veya maksimize) eden fonksiyonu bulmak amaçlanır.

3.2 Tanım (Kabul edilebilir fonksiyon): $x(a)=x_a$ ve $x(b)=x_b$ başlangıç ve bitiş noktası koşullarını sağlayan $\alpha-$diferansiyellenebilir fonksiyonlara kabul edilebilir fonksiyon denir.

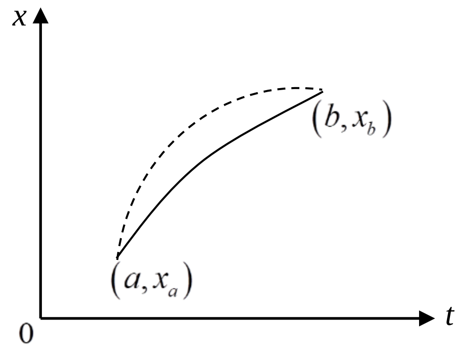
3.3 Tanım (Zayıf değişim): $x^*(t)$ bir minimizasyon fonksiyonu ve $x(t)$ kabul edilebilir bir fonksiyon olsun. Her $t\in[a,b]$ için

$$\left|x^*(t)-x(t)\right|<\varepsilon_1^{\alpha} \quad \text{ve} \quad \left|x_a^{*(\alpha)}(t)-x_a^{(\alpha)}(t)\right|<\varepsilon_2^{\alpha} \tag{3.3}$$

olacak şekilde yeterince küçük ε_1^{α} ve ε_2^{α} pozitif reel sayıları varsa $x(t)$ fonksiyonuna $x^*(t)$ fonksiyonunun zayıf değişimi denir. (3.3) eşitsizliğine denk olarak zayıf değişim aşağıdaki eşitlik ile de elde edilebilir:

$$x(t) = x^*(t) + \varepsilon^\alpha \eta(t), \tag{3.4}$$

burada ε^α, $|\varepsilon^\alpha| \ll 1$ özelliğindeki bir sayı ve $\eta \in C^\alpha[a,b]$, $\eta(a) = \eta(b) = 0$ özelliğini sağlayan keyfi fonksiyondur.



Şekil 3.3: Zayıf değişim.

3.4 Tanım (Yerel minimum ve maksimum): J performans indeksi için $x^*(t)$ bir yerel ekstremum olsun. $\varepsilon^\alpha > 0$ için $x(t) = x^*(t) + \varepsilon^\alpha \eta(t)$ zayıf değişimine karşılık

$$\Delta J = J(x) - J(x^*) \geq 0 \tag{3.5}$$

ise $x^*(t)$ yerel minimum;

$$\Delta J = J(x) - J(x^*) \leq 0 \tag{3.6}$$

ise $x^*(t)$ yerel maksimumdur. Burada ΔJ, J fonksiyonelinin değişimi olarak bilinmektedir.

3.5 Yardımcı Teorem (Uyumlu türevli değişim analizi yardımcı teoremi [36]): M ve η $[a,b]$ aralığı üzerinde sürekli fonksiyonlar olsun. Eğer $\eta(a)=\eta(b)=0$ özelliğindeki herhangi bir $\eta \in C[a,b]$

$$\int_a^b \eta(t)\mathrm{M}(t)\,d_a^{\alpha}t = 0 \tag{3.7}$$

ise her $t \in [a,b]$ için

$$\mathrm{M}(t) = 0 \tag{3.8}$$

olur.

Lazo ve Torres [36], uyumlu türevli değişim analizinin optimallik için gerekli koşulunu ifade eden uyumlu Euler–Lagrange denklemini Gateux türevini kullanarak elde etmişlerdir. Bu kısımda uyumlu Euler–Lagrange denklemi [36]'dan farklı olarak değişim ile elde edilecektir.

3.6 Teorem (Uyumlu Euler–Lagrange denklemi): $0<\alpha\le 1$ ve $F \in C^{\alpha}\left([a,b]\times\mathbb{R}^2\right)$ için J performans indeksi

$$J(x) = \int_a^b F\left(t, x(t), x_a^{(\alpha)}(t)\right) d_a^{\alpha}t \tag{3.9}$$

olsun. $x:[a,b]\to\mathbb{R}$ $\alpha-$diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $x(a)=x_a$ ve $x(b)=x_b$ $(x_a, x_b \in \mathbb{R})$ sabit sınır koşulları olsun. $x(t)$, J performans indeksinin bir ekstremumu ise aşağıdaki uyumlu Euler–Lagrange denklemini sağlar.

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d_a^{\alpha}}{dt_a^{\alpha}}\left(\frac{\partial F}{\partial x_a^{(\alpha)}}\right) = 0 \tag{3.10}$$

İspat: $x^*(t)$, J performans indeksinin ekstremumu olsun. $\eta(t)$, $\eta(a)=\eta(b)=0$ özelliğindeki keyfi bir fonksiyon ve $|\varepsilon| \ll 1$ olmak üzere $x(t)$ fonksiyonu için zayıf değişim,

$$x(t)=x^*(t)+\varepsilon^\alpha \eta(t) \tag{3.11}$$

şeklinde ifade edilsin. $x_a^{(\alpha)}(t)$ uyumlu türevi var olduğundan $x(t)$ fonksiyonu için

$$x_a^{(\alpha)}(t)=x_a^{*(\alpha)}(t)+\varepsilon^\alpha \eta_a^{(\alpha)}(t) \tag{3.12}$$

yazılabilir. $x^*(t)$ minimumunu bulmak için performans indeksin değişimi incelenmelidir:

$$\Delta J = J\left(x^*+\varepsilon^\alpha \eta\right)-J\left(x^*\right)=\int_a^b F\left(t,x(t),x_a^{(\alpha)}(t)\right)d_a^\alpha t-\int_a^b F\left(t,x^*(t),x_a^{*(\alpha)}(t)\right)d_a^\alpha t. \tag{3.13}$$

(3.11) ve (3.12) zayıf değişimleri (3.13) eşitliğinde yerine yazılırsa J performans indeksindeki değişim

$$\Delta J=\int_a^b \left(F\left(t,x^*(t)+\varepsilon\eta(t),x_a^{*(\alpha)}(t)+\varepsilon\eta_a^{(\alpha)}(t)\right)-F\left(t,x^*(t),x_a^{*(\alpha)}(t)\right)\right)d_a^\alpha t \tag{3.14}$$

şeklinde elde edilir. (3.14) eşitliğindeki değişimi bulmak amacıyla $F\left(t,x(t),x_a^{(\alpha)}(t)\right)$ fonksiyonunun $t\in[a,b]$ için $\left(x^*,x_a^{*(\alpha)}\right)$ noktası civarında $\left(\varepsilon^\alpha\eta,\varepsilon^\alpha\eta_a^{(\alpha)}\right)$ değişkenlerine göre Taylor seri açılımı yapılırsa

$$\Delta J=\int_a^b\left\{F\left(t,x^*(t),x_a^{*(\alpha)}(t)\right)+\frac{\partial F}{\partial x}\varepsilon^\alpha\eta(t)+\frac{\partial F}{\partial x_a^{(\alpha)}}\varepsilon^\alpha\eta_a^{(\alpha)}(t)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\varepsilon^\alpha\eta(t)\right)^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial x_a^{(\alpha)}}\varepsilon^\alpha\eta(t)\varepsilon^\alpha\eta_a^{(\alpha)}(t)+\frac{\partial^2 F}{\partial\left(x_a^{(\alpha)}\right)^2}\left(\varepsilon^\alpha\eta_a^{(\alpha)}(t)\right)^2\right)\right\}d_a^\alpha t \quad (3.15)$$
$$-\int_a^b F\left(t,x^*(t),x_a^{*(\alpha)}(t)\right)d_a^\alpha t+O\left(\varepsilon^{3\alpha}\right)$$

bulunur. (3.15) ifadesi

$$\delta J=\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial x}\varepsilon^\alpha\eta(t)+\frac{\partial F}{\partial x_a^{(\alpha)}}\varepsilon^\alpha\eta_a^{(\alpha)}(t)\right)d_a^\alpha t \quad (3.16)$$

$$\delta^2 J=\int_a^b\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\varepsilon^\alpha\eta(t)\right)^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial x_a^{(\alpha)}}\varepsilon^\alpha\eta(t)\varepsilon^\alpha\eta_a^{(\alpha)}(t)+\frac{\partial^2 F}{\partial x_a^{(\alpha)^2}}\left(\varepsilon^\alpha\eta_a^{(\alpha)}(t)\right)^2\right)d_a^\alpha t \quad (3.17)$$

biçiminde ayrılırsa δJ ilk değişimi, $\delta^2 J$ ikinci değişimi ifade etmek üzere

$$\Delta J=\varepsilon^\alpha\delta J+\varepsilon^{2\alpha}\delta^2 J+O\left(\varepsilon^{3\alpha}\right) \quad (3.18)$$

yazılır. $x^*(t)$, J performans indeksi minimize eden bir fonksiyon ise $C^\alpha[a,b]$ sınıfından $\eta(a)=\eta(b)=0$ özelliğindeki tüm kabul edilebilir $\eta(t)$ fonksiyonları için

$$\Delta J=\varepsilon^\alpha\delta J+\varepsilon^{2\alpha}\delta^2 J+O\left(\varepsilon^{3\alpha}\right)\geq 0 \quad (3.19)$$

olmalıdır. ε^α pozitif veya negatif olabileceği için (3.19) eşitsizliğinin her iki tarafı ε^α a bölünürse

$$\delta J+\varepsilon^\alpha\delta^2 J+O\left(\varepsilon^{2\alpha}\right)\leq 0,\ \varepsilon^\alpha>0 \text{ için} \quad (3.20)$$

$$\delta J + \varepsilon^{\alpha}\delta^{2}J + O\left(\varepsilon^{2\alpha}\right) \geq 0,\ \varepsilon^{\alpha} < 0 \text{ için} \tag{3.21}$$

olur. $\varepsilon^{\alpha} \to 0$ için limit alındığında $\delta J \leq 0$ ve $\delta J \geq 0$ eşitsizliklerinden ilk değişimin sıfır olması gerektiği görülür. Dolayısıyla minimum için gerekli koşul

$$\delta J = \int_{a}^{b}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\eta(t) + \frac{\partial F}{\partial x_{a}^{(\alpha)}}\eta_{a}^{(\alpha)}(t)\right)d_{a}^{\alpha}t = 0 \tag{3.22}$$

şeklinde elde edilir. (3.22) eşitliğindeki $\int_{a}^{b}\frac{\partial F}{\partial x_{a}^{(\alpha)}}\eta_{a}^{(\alpha)}(t)\,d_{a}^{\alpha}t$ integrali için uyumlu kısmi integrasyon formülü (2.68) kullanılırsa

$$\int_{a}^{b}\frac{\partial F}{\partial x_{a}^{(\alpha)}}\eta_{a}^{(\alpha)}(t)\,d_{a}^{\alpha}t = \frac{\partial F}{\partial x_{a}^{(\alpha)}}\eta(t)\Big|_{a}^{b} - \int_{a}^{b}\frac{d_{a}^{\alpha}}{dt_{a}^{\alpha}}\left(\frac{\partial F}{\partial x_{a}^{(\alpha)}}\right)\eta(t)\,d_{a}^{\alpha}t \tag{3.23}$$

bulunur. $\eta(a) = \eta(b) = 0$ olduğundan (3.23) eşitliğinde yalnızca uyumlu integral terimi kalır. (3.23) eşitliği (3.22) eşitliğinde yerine yazılıp, ilk değişim $\eta(t)$ keyfi fonksiyonuna göre düzenlenirse

$$\delta J = \int_{a}^{b}\left(\frac{\partial F\left(t, x^{*}(t), x_{a}^{*(\alpha)}(t)\right)}{\partial x} - \frac{d_{a}^{\alpha}}{dt_{a}^{\alpha}}\left(\frac{\partial F\left(t, x^{*}(t), x_{a}^{*(\alpha)}(t)\right)}{\partial x_{a}^{(\alpha)}}\right)\right)\eta(t)\,d_{a}^{\alpha}t = 0 \tag{3.24}$$

elde edilir. 3.4 yardımcı teorem kullanılarak

$$\frac{\partial F\left(t, x^{*}(t), x_{a}^{*(\alpha)}(t)\right)}{\partial x} - \frac{d_{a}^{\alpha}}{dt_{a}^{\alpha}}\left(\frac{\partial F\left(t, x^{*}(t), x_{a}^{*(\alpha)}(t)\right)}{\partial x_{a}^{(\alpha)}}\right) = 0 \tag{3.25}$$

uyumlu Euler–Lagrange denklemine ulaşılır. □

Uyumlu türevli Euler–Lagrange denklemi, birinci gerekli optimallik koşuludur, yani optimal çözüm uyumlu Euler–Lagrange denklemini sağlar. Bununla birlikte uyumlu Euler–Lagrange denklemi genellikle problemin optimum çözümünü bulmak için yeterli olarak da kabul edilir. Çünkü problemin optimal çözümünün olup olmadığı genellikle fiziksel problemin yapısından anlaşılmaktadır (brachistorene probleminde olduğu gibi).

Dikkat edilirse, sabit başlangıç ve bitiş noktalarına sahip olan uyumlu türevli değişim problemlerinde $\eta(t)$ keyfi fonksiyonu (3.23) eşitliğindeki sınır koşullarında sıfıra eşit olur ve bu yüzden $\eta(t)$ uyumlu Euler–Lagrange denkleminde açıkça yer almaz. Bu tezde de kabul edileceği gibi, başlangıç ya da bitiş noktasından herhangi biri sabit değilse (3.23) integrali için bir sınır koşulu eksik olacaktır. Böyle bir durumda $\eta(t)$ keyfi fonksiyonu uyumlu Euler–Lagrange denkleminde açıkça yer alacaktır. Bununla birlikte uyumlu Euler–Lagrange denklemini çözmek için gereken iki koşuldan biri eksik olacağından ek bir koşula ihtiyaç duyulur. Elde edilmesi gereken ek koşul "*karşıtlık koşulu*" olarak adlandırılmaktadır.

3.1 Uyumlu Türevli Değişim Analizi Problemi için Karşıtlık Koşulu

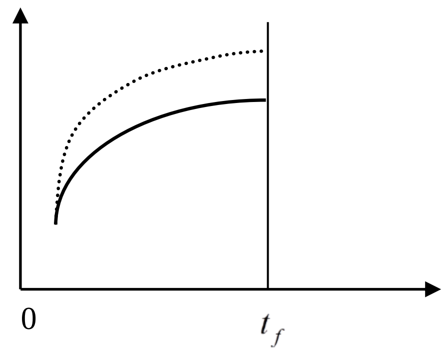
Fizik ve geometride açığa çıkan değişim analizi problemleri her zaman için yeterli sayıda sınır koşulu içermeyebilir. Değişim analizinin öne çıkan özelliklerinden biri metodun daima doğru sayıda sınır koşulunu sağlamasıdır. Yukarıda da bahsedildiği gibi karşıtlık koşulu, yeterli sayıda uygun sınır koşuluna sahip olmayan değişim analizi problemlerinde Euler–Lagrange denkleminin çözülebilmesi için çözüm sürecine dâhil edilmesi gereken sınır koşullarıdır.

Karşıtlık koşulları, t_0 başlangıç ve t_f bitiş noktasını göstermek üzere

$$J(x)=\int_{t_0}^{t_f} F\left(t,x(t),x_{t_0}^{(\alpha)}(t)\right)d_{t_0}^{\alpha}t \tag{3.26}$$

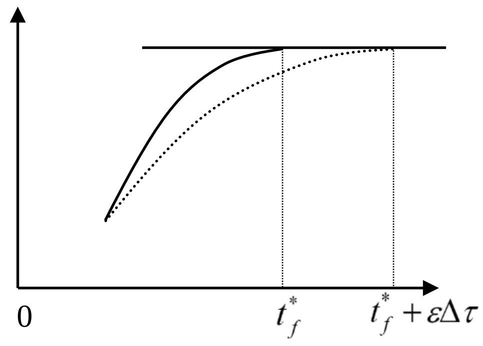
değişim analizi problemi için başlangıç ve bitiş noktalarının birinin veya her ikisinin de değişken olduğu durumlarda incelenebilir. Kolaylık olması bakımından bu tezde başlangıç noktası sabit kabul edilip bitiş noktasına göre karşıtlık koşulları incelenecektir. Verilecek bitiş zamanı ve bitiş zamanındaki $x(t)$ durum fonksiyonuna dayatılan şartlara bağlı olarak üç farklı tipte değişim problemi ele alınacaktır:

***i.* Düşey bitiş doğrusu problemi:** t_f sabit bitiş zamanı ve $x(t_f)$ sabit olmayan durum fonksiyonunu içeren problemdir.



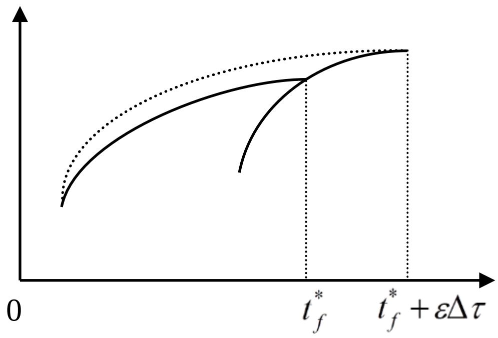
Şekil 3.4: Düşey bitiş doğrusundaki değişim problemi.

***ii.* Yatay bitiş doğrusu problemi:** t_f sabit olmayan bitiş zamanı ve $x(t_f)$ sabit durum fonksiyonunu içeren problemdir.



Şekil 3.5: Yatay bitiş doğrusundaki değişim problemi.

iii. **Bitiş eğrisi problemi:** t_f sabit olmayan bitiş zamanı ve $x(t_f)$ sabit olmayan durum fonsiyonunu içeren problemdir.



Şekil 3.6: Bitiş eğrisi üzerindeki değişim problemi.

Kesirli değişim problemlerinde sabit olmayan sınır koşulları ilk olarak Agrawal tarafından ele alınmıştır (Agrawal,2006). Bununla birlikte birçok araştırmacı yeterli sayıda uygun sınır koşulu içermeyen kesirli değişim problemlerini farklı kesirli operatörler ile ele alarak uygun karşıtlık koşullarını elde etmişlerdir [62–64,69,70,82–86]. Literatürde var olan kesirli türev operatörleriyle tanımlanan sabit olmayan bitiş noktalı bazı kesirli değişim problemlerinin kesirli Euler–Lagrange denklemini analitik olarak çözmek oldukça zordur. Bu problemleri çözmek için çeşitli sayısal yöntemler geliştirilmiştir [10–14,39–41,84,85]. Bu bölümde, başlangıç koşulu sabit olan fakat bitiş noktası belirli bir eğri üzerinde bulunan genel durumdaki uyumlu türevli değişim analizi problemi için karşıtlık koşulu elde edilecektir. Genel durumdan yola çıkarak ii ve iii özel durumları için uyumlu karşıtlık koşulları önerilecektir. Son olarak uyumlu karşıtlık koşulları için uygulama örnekleri verilecektir.

Uyumlu türevli değişim analizi için genel durumdaki uyumlu karşıtlık koşulu aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

3.1.1 Teorem (Uyumlu türevli değişim analizi için karşıtlık koşulu): $0 < \alpha \leq 1$, $x:[t_0, t_f] \to \mathbb{R}$ $\alpha-$diferansiyellenebilir fonksiyon ve

$F \in C^{\alpha}\left(\left[t_0, t_f\right] \times \mathbb{R}^2\right)$ olsun. $x(t_0) = x_0$ sabit nokta ve $x(t_f) = x_f$ belirli bir $x = \gamma(t)$ eğrisi üzerinde bulunan sabit olmayan nokta olmak üzere

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} F\left(t, x(t), x_{t_0}^{(\alpha)}(t)\right) d_{t_0}^{\alpha} t \tag{3.27}$$

performans indeksini minimize eden fonksiyon $x(t)$ olsun. O halde uyumlu türevli değişim analizi için genel durumdaki karşıtlık koşulu

$$F\left(t_f, x(t_f), x_{t_0}^{(\alpha)}(t_f)\right)\Delta\tau^{\alpha} + \frac{\partial F}{\partial x_{t_0}^{(\alpha)}}\Big|_{t_f} \eta(t_f) = 0 \tag{3.28}$$

şeklindedir. Burada $\eta \in C^{\alpha}\left(\left[t_0, t_f\right] \times \mathbb{R}^2\right)$ ve $\Delta\tau$ sırasıyla, $x(t)$ ve t zayıf değişimleri için keyfi fonksiyonlardır.

İspat: J performans indeksini minimize eden $x^*(t)$ eğrisinin $\gamma(t)$ hedef eğrisiyle $t_f = t_f^*$ noktasında kesiştiğini varsayalım $\left(x^*(t_f^*) = \gamma(t_f^*)\right)$. $\eta(t)$, $\eta(t_0) = 0$ özelliğindeki keyfi fonksiyon ve $\left|\varepsilon^{\alpha}\right| \ll 1$ olmak üzere, $x(t)$ fonksiyonu ve t_f zaman değişkeni için zayıf değişimler

$$x(t) = x^*(t) + \varepsilon^{\alpha}\eta(t), \tag{3.29}$$

$$x_{t_0}^{(\alpha)}(t) = x_{t_0}^{*(\alpha)}(t) + \varepsilon^{\alpha}\eta_{t_0}^{(\alpha)}(t), \tag{3.30}$$

$$t_f = t_f^* + \varepsilon\Delta\tau \tag{3.31}$$

şeklinde ifade edilsin. $x^*(t)$ minimumunu bulmak için performans indeksin değişimi incelenmelidir. (3.29), (3.30) ve (3.31) zayıf değişimleri sonucunda J performans indeksindeki değişim,

$$
\begin{aligned}
\Delta J = &\int_{t_0}^{t_f^*+\varepsilon\Delta\tau} F\left(t, x^*(t)+\varepsilon^\alpha \eta(t), x_{t_0}^{*(\alpha)}(t)+\varepsilon^\alpha \eta_{t_0}^{(\alpha)}(t)\right) d_{t_0}^\alpha t \\
&-\int_{t_0}^{t_f^*} F\left(t, x^*(t), x_{t_0}^{*(\alpha)}(t)\right) d_{t_0}^\alpha t
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

şeklinde elde edilir. (3.32) eşitliğindeki uyumlu integrallerin sınır değerleri zaman değişkenindeki değişime göre düzenlenirse,

$$
\begin{aligned}
\Delta J = &\int_{t_f^*}^{t_f^*+\varepsilon\Delta\tau} F\left(t, x(t), x_{t_0}^{(\alpha)}(t)\right) d_{t_f^*}^\alpha t \\
&+\int_{t_0}^{t_f^*}\left(F\left(t, x^*(t)+\varepsilon^\alpha \eta(t), x_{t_0}^{*(\alpha)}(t)+\varepsilon^\alpha \eta_{t_0}^{(\alpha)}(t)\right)-F\left(t, x^*(t), x_{t_0}^{*(\alpha)}(t)\right)\right) d_{t_0}^\alpha t
\end{aligned}
\tag{3.33}
$$

olarak bulunur. (3.33) eşitliğindeki değişimi bulabilmek amacıyla $F\left(t, x(t), x_{t_0}^{(\alpha)}(t)\right)$ fonksiyonunun $t\in\left[t_0, t_f\right]$ için $\left(x^*, x_{t_0}^{*(\alpha)}\right)$ noktası civarında $\left(\varepsilon^\alpha\eta, \varepsilon^\alpha\eta_{t_0}^{(\alpha)}\right)$ değişkenlerine göre Taylor seri açılımı yapılırsa

$$
\begin{aligned}
\Delta J = &\int_{t_f^*}^{t_f^*+\varepsilon\Delta\tau}\left(F\left(t, x^*(t), x_{t_0}^{*(\alpha)}(t)\right)+\frac{\partial F}{\partial x}\varepsilon^\alpha\eta(t)+\frac{\partial F}{\partial x_{t_0}^{(\alpha)}}\varepsilon^\alpha\eta_{t_0}^{(\alpha)}(t)\right) d_{t_f^*}^\alpha t \\
&+\int_{t_0}^{t_f^*}\left(F\left(t, x^*(t), x_{t_0}^{*(\alpha)}(t)\right)+\frac{\partial F}{\partial x}\varepsilon^\alpha\eta(t)+\frac{\partial F}{\partial x_{t_0}^{(\alpha)}}\varepsilon^\alpha\eta_{t_0}^{(\alpha)}(t)\right) d_{t_0}^\alpha t \\
&-\int_{t_0}^{t_f^*} F\left(t, x^*(t), x_{t_0}^{*(\alpha)}(t)\right) d_{t_0}^\alpha t+O\left(\varepsilon^{2\alpha}\right)
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

bulunur. İlk uyumlu integrali hesaplamak için $d_{t_f^*}^\alpha t=\left(t-t_f^*\right)^{\alpha-1} dt$ ve $t=t_f=t_f^*+\varepsilon\Delta\tau$ olduğu göz önüne alınarak $d_{t_f^*}^\alpha t=\left(\varepsilon\Delta\tau\right)^{\alpha-1} dt$ yazılır. Böylece klasik hale indirgenen integrali yaklaşık olarak hesaplamak için dikdörtgen yöntemi kullanılırsa aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\Delta J = \left(F\left(t_f^*, x^*\left(t_f^*\right), x_{t_0}^{*(\alpha)}\left(t_f^*\right)\right) + \frac{\partial F}{\partial x}\varepsilon^\alpha \eta\left(t_f^*\right) + \frac{\partial F}{\partial x_{t_0}^{(\alpha)}}\varepsilon^\alpha \eta_{t_0}^{(\alpha)}\left(t_f^*\right) \right)\varepsilon^\alpha \Delta\tau^\alpha$$
$$+\int_{t_0}^{t_f^*} \left(F\left(t, x^*(t), x_{t_0}^{*(\alpha)}(t)\right) + \frac{\partial F}{\partial x}\varepsilon^\alpha \eta(t) + \frac{\partial F}{\partial x_{t_0}^{(\alpha)}}\varepsilon^\alpha \eta_{t_0}^{(\alpha)}(t) \right) d_{t_0}^\alpha t \qquad (3.35)$$
$$-\int_{t_0}^{t_f^*} F\left(t, x^*(t), x_{t_0}^{*(\alpha)}(t)\right) d_{t_0}^\alpha t + O\left(\varepsilon^{2\alpha}\right).$$

(3.35) eşitliği düzenlenirse minimum için gerekli koşul gereği ilk değişim sıfıra eşittir:

$$\delta J = F\left(t_f^*, x^*\left(t_f^*\right), x_{t_0}^{*(\alpha)}\left(t_f^*\right)\right)\Delta\tau^\alpha + \int_{t_0}^{t_f^*}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\eta(t) + \frac{\partial F}{\partial x_{t_0}^{(\alpha)}}\eta_{t_0}^{(\alpha)}(t) \right) d_{t_0}^\alpha t = 0. \quad (3.36)$$

(3.36) eşitliğindeki $\int_{t_0}^{t_f^*} \frac{\partial F}{\partial x_{t_0}^{(\alpha)}}\eta_{t_0}^{(\alpha)}(t)\, d_{t_0}^\alpha t$ integrali için uyumlu kısmi integrasyon formülü (2.68) kullanılırsa

$$\int_{t_0}^{t_f^*} \frac{\partial F}{\partial x_{t_0}^{(\alpha)}}\eta_{t_0}^{(\alpha)}(t)\, d_{t_0}^\alpha t = \frac{\partial F}{\partial x_{t_0}^{(\alpha)}}\eta(t)\Big|_{t_0}^{t_f^*} - \int_{t_0}^{t_f^*} \frac{d_{t_0}^\alpha}{dt_{t_0}^\alpha}\left(\frac{\partial F}{\partial x_{t_0}^{(\alpha)}}\right)\eta(t)\, d_{t_0}^\alpha t \qquad (3.37)$$

elde edilir. Varsayım gereği $\eta(t_0) = 0$ olduğundan (3.37) eşitliği

$$\int_{t_0}^{t_f^*} \frac{\partial F}{\partial x_{t_0}^{(\alpha)}}\eta_{t_0}^{(\alpha)}(t)\, d_{t_0}^\alpha t = \frac{\partial F}{\partial x_{t_0}^{(\alpha)}}\Big|_{t_f^*}\eta\left(t_f^*\right) - \int_{t_0}^{t_f^*} \frac{d_{t_0}^\alpha}{dt_{t_0}^\alpha}\left(\frac{\partial F}{\partial x_{t_0}^{(\alpha)}}\right)\eta(t)\, d_{t_0}^\alpha t \qquad (3.38)$$

olarak bulunur. (3.38) eşitliği, (3.36) eşitliğinde yerine yazılır ve $\eta(t)$ keyfi fonksiyonuna göre düzenlenirse aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\delta J = F\left(t_f^*, x^*\left(t_f^*\right), x_{t_0}^{*(\alpha)}\left(t_f^*\right)\right)\Delta\tau^\alpha + \frac{\partial F}{\partial x_{t_0}^{(\alpha)}}\Big|_{t_f^*}\eta\left(t_f^*\right)$$

$$+\int_{t_0}^{t_f^*}\eta(t)\left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d_{t_0}^\alpha}{dt_{t_0}^\alpha}\left(\frac{\partial F}{\partial x_{t_0}^{(\alpha)}}\right)\right)d_{t_0}^\alpha t = 0. \tag{3.39}$$

(3.39) eşitliğinde uyumlu integral içerisindeki ifade uyumlu Euler–Lagrange denklemine eşit olduğundan sıfıra eşittir. Sonuç olarak uyumlu türevli değişim analizi için genel karşıtlık koşulu

$$F\left(t_f^*, x^*\left(t_f^*\right), x_{t_0}^{*(\alpha)}\left(t_f^*\right)\right)\Delta\tau^\alpha + \frac{\partial F}{\partial x_{t_0}^{(\alpha)}}\Big|_{t_f^*}\eta\left(t_f^*\right) = 0 \tag{3.40}$$

şeklinde bulunur. □

3.1.1 Özel Durumlardaki Uyumlu Türevli Değişim Analizi Problemleri İçin Karşıtlık Koşulları

Bu bölümde uyumlu türevli değişim analizi için elde edilen genel durumdaki karşıtlık koşulunun özel durumları incelenecektir. Genel durumdaki karşıtlık koşulu bitiş eğrisi üzerindedir, özel durumları ise düşey bitiş doğrusu ve yatay bitiş doğrusudur.

Uyumlu türevli değişim analizi için genel karşıtlık koşulu olarak adlandırılan (3.28) denklemindeki $\eta\left(t_f\right)$ ve $\Delta\tau^\alpha$ keyfi fonksiyonlarının değeri bilinmemektedir. $\eta\left(t_f\right)$ keyfi fonksiyonunun değerini bulabilmek için

$$x\left(t_f\right) = x\left(t_f^* + \varepsilon\Delta\tau\right) = x^*\left(t_f^* + \varepsilon\Delta\tau\right) + \varepsilon^\alpha\eta\left(t_f^* + \varepsilon\Delta\tau\right) \tag{3.41}$$

eşitliğini göz önüne alarak t_f^* noktası civarında $\varepsilon\Delta\tau$ değişkenine göre uyumlu Taylor seri açılımları yapılırsa

$$x\left(t_f\right)=x^*\left(t_f^*\right)+\frac{x_{t_f^*}^{*(\alpha)}\left(t_f^*\right)}{\alpha}\varepsilon^{\alpha}\Delta\tau^{\alpha}+\varepsilon^{\alpha}\eta\left(t_f^*\right)+O\left(\varepsilon^{2\alpha}\right) \tag{3.42}$$

bulunur. Ayrıca $x(t)$ eğrisinin $\gamma(t)$ hedef eğrisi ile $t=t_f$ noktasında kesiştiği varsayıldığından $\gamma\left(t_f^*+\varepsilon\Delta\tau\right)$ eğrisi için t_f^* noktası civarında $\varepsilon\Delta\tau$ değişkenine göre uyumlu Taylor seri açılımı yapılır

$$\gamma\left(t_f^*+\varepsilon\Delta\tau\right)=\gamma\left(t_f^*\right)+\frac{\gamma_{t_f^*}^{(\alpha)}\left(t_f^*\right)}{\alpha}\varepsilon^{\alpha}\Delta\tau^{\alpha}+O\left(\varepsilon^{2\alpha}\right) \tag{3.43}$$

(3.42) ile (3.43) eşitliklerinden $\eta\left(t_f^*\right)$ keyfi fonksiyonu

$$\eta\left(t_f^*\right)=\left(\frac{\gamma_{t_f^*}^{(\alpha)}\left(t_f^*\right)-x_{t_f^*}^{*(\alpha)}\left(t_f^*\right)}{\alpha}\right)\Delta\tau^{\alpha} \tag{3.44}$$

şeklinde bulunur. (3.44) eşitliğindeki $\eta\left(t_f^*\right)$ keyfi fonksiyonu (3.40) eşitliğinde yerine yazılır ve eşitlik $\Delta\tau^{\alpha}$ keyfi fonksiyonu göre düzenlenirse

$$\left(F\left(t_f^*,x^*\left(t_f^*\right),x_{t_0}^{*(\alpha)}\left(t_f^*\right)\right)+\frac{\partial F}{\partial x_{t_0}^{(\alpha)}}\Big|_{t_f^*}\left(\frac{\gamma_{t_f^*}^{(\alpha)}\left(t_f^*\right)-x_{t_f^*}^{*(\alpha)}\left(t_f^*\right)}{\alpha}\right)\right)\Delta\tau^{\alpha}=0 \tag{3.45}$$

olur. Burada $\Delta\tau^{\alpha}$ sıfırdan farklı bir keyfi fonksiyon olduğundan parantez içerisindeki ifade sıfıra eşittir ve böylece uyumlu türevli değişim analizi için genel karşıtlık koşulu

$$F\left(t_f,x^*\left(t_f\right),x_{t_0}^{*(\alpha)}\left(t_f\right)\right)+\frac{\partial F}{\partial x_{t_0}^{(\alpha)}}\Big|_{t_f^*}\left(\frac{\gamma_{t_f^*}^{(\alpha)}\left(t_f^*\right)-x_{t_f^*}^{*(\alpha)}\left(t_f^*\right)}{\alpha}\right)=0 \tag{3.46}$$

şeklinde elde edilir.

3.1.1.1 Sonuç: (3.46) eşitliği ile verilen uyumlu türevli değişim analizi için genel durumdaki karşıtlık koşulunun özel durumları aşağıdaki gibi incelenir.

i. **Bitiş Eğrisi Problemi:** Eğer $x\left(t_f\right)$ bitiş noktası diferansiyellenebilir bir $x=\gamma\left(t\right)$ eğrisi üzerinde ise karşıtlık koşulu

$$F\left(t_f, x\left(t_f\right), x_{t_0}^{(\alpha)}\left(t_f\right)\right)+\frac{\partial F}{\partial x_{t_0}^{(\alpha)}}\Big|_{t_f}\left(\frac{\gamma_{t_f}^{(\alpha)}\left(t_f\right)-x_{t_f}^{(\alpha)}\left(t_f\right)}{\alpha}\right)=0 \tag{3.47}$$

olarak elde edilir. (3.47) eşitliği uyumlu türevli değişim analizi için genel durumdaki karşıtlık koşuludur.

ii. **Yatay Bitiş Doğrusu (Sabit Bitiş Noktası) Problemi:** Eğer $x\left(t_f\right)$ sabit ve t_f sabit olmayan bir nokta ise c sabit bir sayı olmak üzere $x=\gamma\left(t_f\right)=c$ olur. Dolayısıyla $\gamma_{t_f}^{(\alpha)}\left(t_f\right)=0$ olduğundan karşıtlık koşulu

$$F\left(t_f, x\left(t_f\right), x_{t_0}^{(\alpha)}\left(t_f\right)\right)-\frac{x_{t_f}^{(\alpha)}\left(t_f\right)}{\alpha}\frac{\partial F}{\partial x_{t_0}^{(\alpha)}}\Big|_{t_f}=0 \tag{3.48}$$

olarak elde edilir.

iii. **Düşey Bitiş Doğrusu (Sabit Zaman) Problemi:** t_f sabit ve $x\left(t_f\right)$ sabit olmayan ise $\gamma_{t_f}^{(\alpha)}\left(t_f\right)$, x eksenine dik ve eğitimi sonsuz olan bir doğrudur. $\gamma_{t_f}^{(\alpha)}\left(t_f\right)\neq 0$ olduğundan (3.47) eşitliği $\gamma_{t_f}^{(\alpha)}\left(t_f\right)$ fonksiyonuna bölünür ve $\gamma_{t_f}^{(\alpha)}\left(t_f\right)$ fonksiyonu sonsuz olduğundan karşıtlık koşulu,

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial F}{\partial x_{t_0}^{(\alpha)}}\Big|_{t_f}=0 \tag{3.49}$$

olarak elde edilir. Bu koşul fonksiyonelin dışındaki etkenlerden kaynaklanmayıp doğrudan değişim formülasyonunda ortaya çıktığından doğal sınır koşulu olarak adlandırılır.

Şimdi, klasik türevli değişim problemlerinin bazı uygulamaları, uyumlu türevli değişim analizi problemleri için ele alınacaktır [55].

3.1.1.2 Örnek: Aşağıdaki fonksiyoneli verilen koşullar altında minimize eden $x(t)$ fonksiyonlarını bulunuz.

$$J(x)=\int_0^T\left(x_0^{(\alpha)}(t)\right)^2 d_0^{\alpha}t \tag{3.50}$$

a) $x(0)=1,\ x(T)=2$,

b) $x(0)=1,\ T=2$,

c) $x(0)=1$, T sabit olmayan bitiş noktası ve $x(T)$ fonksiyonu T noktasında $\gamma(t)=2+\left(t^{\alpha}-1\right)^2$ hedef eğrisi üzerinde olsun.

Çözüm: J minimize eden fonksiyonu bulmak için uyumlu Euler–Lagrange denklemi oluşturulursa

$$2x_0^{(\alpha)}(t)\,x_0^{(\alpha)}(t)=0 \tag{3.51}$$

bulunur. (3.51) eşitliğindeki uyumlu diferansiyel denklemin kökleri $r_{1,2}=0$ şeklinde katlı kök olarak gelmektedir. Anderson ve Ulness tarafından [28]' de verilen teorem yardımıyla, $x(t)$ fonksiyonu,

$$x(t)=c_1t^{\alpha}+c_2 \tag{3.52}$$

formunda elde edilir. $x(0)=1$ başlangıç koşulundan $c_2=1$ bulunur ve $x(t)$ fonksiyonu

$$x(t)=c_1t^{\alpha}+1 \tag{3.53}$$

formundadır. Şimdi c_1 sabitini bulmak için verilen koşullar ayrı ayrı incelenir.

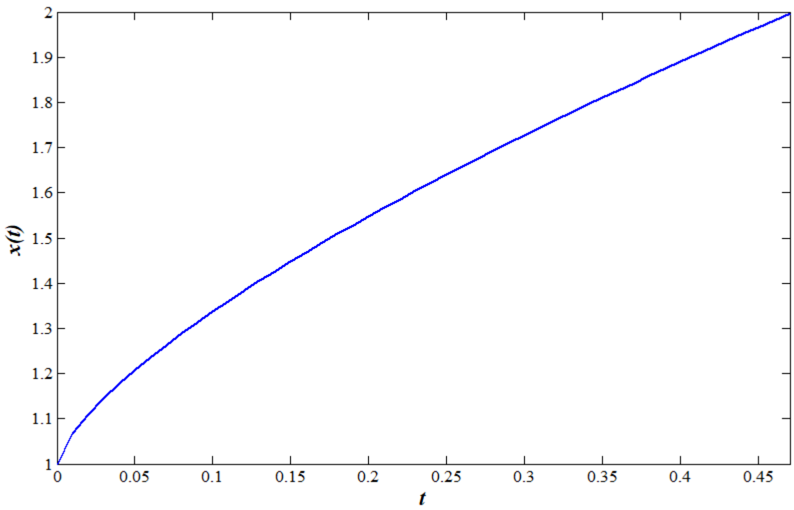
a) $x(T)=2$ ve T sabit olmayan bir nokta olduğundan (3.48) eşitliğindeki karşıtlık koşulu kullanılacaktır. (3.53) eşitliği (3.48) eşitliğindeki karşıtlık koşulunda yazılırsa $c_1=\pm\sqrt{\frac{2}{\alpha}}$ olarak bulunur. Ayrıca (3.53) eşitliği $x(T)=2$ sınır koşulunda yerine yazılırsa $\sqrt{\frac{2}{\alpha}}T^{\alpha}=1$ ya da $-\sqrt{\frac{2}{\alpha}}T^{\alpha}=1$ olur. $-\sqrt{\frac{2}{\alpha}}T^{\alpha}=1$ eşitliğinin T noktası için pozitif çözümü mevcut olmadığından $\sqrt{\frac{2}{\alpha}}T^{\alpha}=1$ alınır ve

$$x(T)=\sqrt{\frac{2}{\alpha}}T^{\alpha}+1 \tag{3.54}$$

bulunur. Buradan

$$T=\left(\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\right)^{1/\alpha} \tag{3.55}$$

olarak elde edilir. $\alpha=0.7$ değeri için MATLAB programında sembolik araç kutusu kullanılarak çözülmüş ve çözümler $c_1=1.6903$, $T=0.4724$ olarak elde edilmiştir. $x(t)$ fonksiyonunun $T=0.4724$ noktasındaki grafiği MATLAB programı yardımıyla şekil 3.7'de çizdirilmiştir.



Şekil 3.7: Yatay bitiş doğrusu probleminde $x(t)$ minimizasyon fonksiyonu.

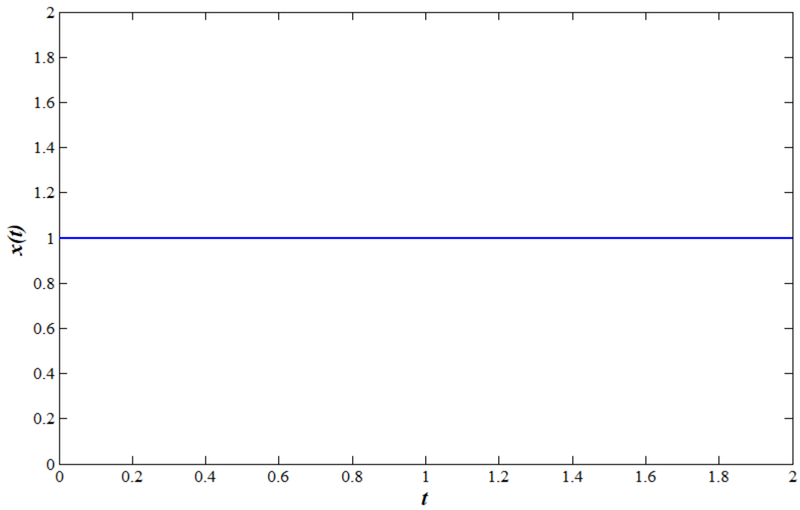
b) T sabit ve $x(T)$ sabit olmayan bir nokta olduğundan (3.49) eşitliğindeki karşıtlık koşulu kullanılacaktır. $x_0^{(\alpha)}(2)=0$ eşitliğinden $c_1=0$ olur. Buradan ekstremum

$$x(T)=1 \tag{3.56}$$

ve

$$x(2)=1 \tag{3.57}$$

şeklinde bulunur. $\alpha=0.7$ değeri için $x(t)$ fonksiyonunun $T=2$ noktasındaki grafiği MATLAB programı yardımıyla şekil 3.8'de çizdirilmiştir.



Şekil 3.8: Düşey bitiş doğrusu probleminde $x(t)$ minimizasyon fonksiyonu.

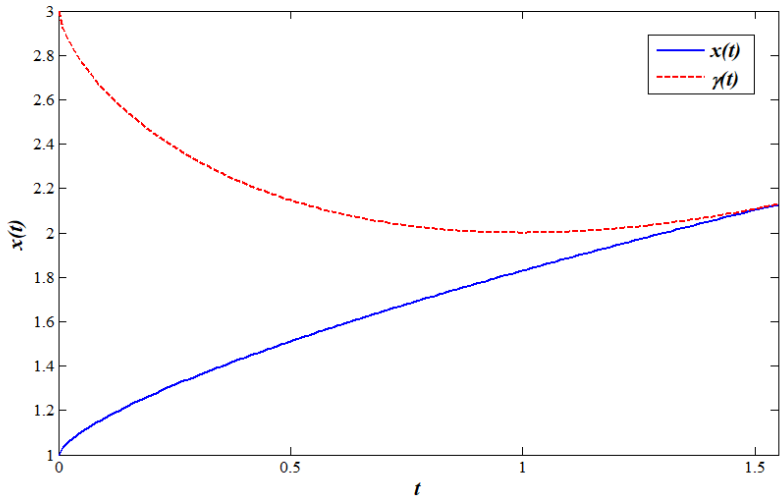
c) Bitiş noktası değeri bilinmediğinden dolayı c_1 katsayısı bulunamamaktadır. $x(t)$ fonksiyonu T noktasında $\gamma(t)$ hedef eğrisi üzerinde olduğundan bu iki fonksiyon eşitlenir

$$c_1T^{\alpha} - (T-1)^2 - 1 = 0 \tag{3.58}$$

ve bitiş eğrisi üzerindeki karşıtlık koşulu (3.47) kullanılırsa

$$c_1\alpha + 2c_1\alpha\left(2(T-1)^{2-\alpha} - c_1\right) = 0 \tag{3.59}$$

eşitlikleri elde edilir. (3.58) ve (3.59) eşitlikleri $\alpha = 0.7$ değeri için MATLAB programında sembolik araç kutusu kullanılarak çözülmüş ve çözümler $c_1 = 0.8302$, $T = 1.5598$ olarak elde edilmiştir. Son olarak $x(t)$ fonksiyonu ve $\gamma(t)$ hedef eğrisinin T noktasındaki grafiği MATLAB programı yardımıyla Şekil 3.9'da çizdirilmiştir.



Şekil 3.9: Bitiş eğrisi probleminde $x(t)$ minimizasyon fonksiyonu.

3.2 Genelleştirilmiş Uyumlu Türevli Değişim Analizi Problemi için Karşıtlık Koşulu

Genelleştirilmiş karşıtlık koşulu, performans indeksi klasik integral ile tanımlanmış, integralinde uyumlu türev terimi içeren uyumlu türevli değişim analizi problemleri için elde edilecektir. Genelleştirilmiş karşıtlık koşulunu elde etmek için öncelikle genelleştirilmiş uyumlu Euler–Lagrange denkleminin elde edilmesi gerekmektedir. Genelleştirilmiş Euler–Lagrange denklemi aşağıdaki şekilde elde edilecektir.

3.2.1.Teorem (Genelleştirilmiş uyumlu Euler–Lagrange denklemi): $0<\alpha\leq 1$ ve $F\in C^{\alpha}\left([a,b]\times\mathbb{R}^2\right)$ için J performans indeksi

$$J(x)=\int_a^b F\left(t,x(t),x_a^{(\alpha)}(t)\right)dt \tag{3.60}$$

olsun. $x:[a,b]\to\mathbb{R}$ $\alpha-$diferansiyellenebilir fonksiyon, $x(a)=x_a$ ve $x(b)=x_b$ $(x_a,x_b\in\mathbb{R})$ sabit sınır koşulları olsun. $x(t)$, J performans indeksinin bir ekstremumu ise aşağıdaki genelleştirilmiş uyumlu Euler–Lagrange denklemini sağlar

$$(t-a)^{1-\alpha}\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d_a^\alpha}{dt_a^\alpha}\left((t-a)^{1-\alpha}\frac{\partial F}{\partial x_a^{(\alpha)}}\right)=0. \tag{3.61}$$

İspat: $x^*(t)$, J performans indeksinin ekstremumu olsun. $\eta(t)$, $\eta(a)=\eta(b)=0$ özelliğindeki keyfi bir fonksiyon ve $|\varepsilon|\ll 1$ olmak üzere $x(t)$ fonksiyonu için zayıf değişim,

$$x(t)=x^*(t)+\varepsilon\eta(t) \tag{3.62}$$

şeklinde ifade edilsin. $x_a^{(\alpha)}(t)$ uyumlu türevi var olduğundan $x(t)$ fonksiyonu için

$$x_a^{(\alpha)}(t)=x_a^{*(\alpha)}(t)+\varepsilon\eta_a^{(\alpha)}(t) \tag{3.63}$$

yazılabilir. $x^*(t)$ minimumunu bulmak için performans indeksin değişimi incelenmelidir:

$$\Delta J=\int_a^b F\left(t,x(t),x_a^{(\alpha)}(t)\right)dt-\int_a^b F\left(t,x^*(t),x_a^{*(\alpha)}(t)\right)dt. \tag{3.64}$$

(3.62) ve (3.63) zayıf değişimleri (3.64) eşitliğinde yerine yazılırsa J performans indeksindeki değişim,

$$\Delta J=\int_a^b\left(F\left(t,x^*(t)+\varepsilon\eta(t),x_a^{*(\alpha)}(t)+\varepsilon\eta_a^{(\alpha)}(t)\right)-F\left(t,x^*(t),x_a^{*(\alpha)}(t)\right)\right)dt \tag{3.65}$$

şeklinde elde edilir. (3.65) eşitliğindeki değişimi bulmak için $F\left(t, x(t), x_a^{(\alpha)}(t)\right)$ fonksiyonunun $t \in [a,b]$ için $\left(x^*, x_a^{*(\alpha)}\right)$ noktası civarında $\left(\varepsilon\eta, \varepsilon\eta_a^{(\alpha)}\right)$ değişkenlerine göre Taylor seri açılımı yapılırsa

$$\begin{aligned}\Delta J = \int_a^b \Bigg\{ & F\left(t, x^*(t), x_a^{*(\alpha)}(t)\right) + \frac{\partial F}{\partial x}\varepsilon\eta(t) + \frac{\partial F}{\partial x_a^{(\alpha)}}\varepsilon\eta_a^{(\alpha)}(t) \\ & + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\varepsilon\eta(t)\right)^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial x_a^{(\alpha)}}\varepsilon\eta(t)\varepsilon\eta_a^{(\alpha)}(t) + \frac{\partial^2 F}{\partial x_a^{(\alpha)^2}}\left(\varepsilon\eta_a^{(\alpha)}(t)\right)^2\right)\Bigg\} dt \\ & - \int_a^b F\left(t, x^*(t), x_a^{*(\alpha)}(t)\right) dt + O\left(\varepsilon^3\right)\end{aligned} \tag{3.66}$$

bulunur. (3.66) ifadesi

$$\delta J = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial x}\varepsilon\eta(t) + \frac{\partial F}{\partial x_a^{(\alpha)}}\varepsilon\eta_a^{(\alpha)}(t)\right) dt \tag{3.67}$$

$$\delta^2 J = \int_a^b \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\varepsilon\eta(t)\right)^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial x_a^{(\alpha)}}\varepsilon\eta(t)\varepsilon\eta_a^{(\alpha)}(t) + \frac{\partial^2 F}{\partial\left(x_a^{(\alpha)}\right)^2}\left(\varepsilon\eta_a^{(\alpha)}(t)\right)^2\right) dt \tag{3.68}$$

biçiminde ayrılırsa δJ ilk değişimi, $\delta^2 J$ ikinci değişimi ifade etmek üzere

$$\Delta J = \varepsilon\delta J + \varepsilon^2\delta^2 J + O\left(\varepsilon^3\right) \tag{3.69}$$

yazılır. $x^*(t)$, J performans indeksi minimize eden bir fonksiyon ise $C^\alpha[a,b]$ sınıfından $\eta(a) = \eta(b) = 0$ özelliğindeki tüm kabul edilebilir $\eta(t)$ fonksiyonları için

$$\Delta J = \varepsilon\delta J + \varepsilon^2\delta^2 J + O\left(\varepsilon^3\right) \geq 0 \tag{3.70}$$

olmalıdır. ε pozitif veya negatif olabileceği için (3.70) eşitsizliğinin her iki tarafı ε a bölünürse

$$\delta J + \varepsilon \delta^2 J + O\left(\varepsilon^2\right) \leq 0,\ \ \varepsilon > 0 \text{ için} \tag{3.71}$$

$$\delta J + \varepsilon \delta^2 J + O\left(\varepsilon^2\right) \geq 0,\ \ \varepsilon < 0 \text{ için} \tag{3.72}$$

olur. $\varepsilon \to 0$ için limit alındığında $\delta J \leq 0$ ve $\delta J \geq 0$ eşitsizliklerinden ilk değişimin sıfır olması gerektiği görülür. Dolayısıyla minimum için gerekli koşul aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\delta J = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial x} \eta(t) + \frac{\partial F}{\partial x_a^{(\alpha)}} \eta_a^{(\alpha)}(t) \right) dt = 0. \tag{3.73}$$

(3.73) eşitliğindeki uyumlu türevli terim içeren $\int_a^b \frac{\partial F}{\partial x_a^{(\alpha)}} \eta_a^{(\alpha)}(t)\,dt$ integralini hesaplamak için uyumlu kısmi integrasyon formülünün kullanılması gerektiği açıktır. Bunun için

$$\tilde{F}\left(t, x(t), x_a^{(\alpha)}(t)\right) = (t-a)^{1-\alpha} F\left(t, x(t), x_a^{(\alpha)}(t)\right) \tag{3.74}$$

dönüşümü (3.73) integraline uygulanırsa ilk değişim uyumlu integral ile aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\delta J = \int_a^b \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x} \eta(t) + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_a^{(\alpha)}} \eta_a^{(\alpha)}(t) \right) d_a^{\alpha} t = 0. \tag{3.75}$$

(3.75) eşitliğinde uyumlu kısmi integrasyon formülü (2.68) kullanılırsa,

$$\int_a^b \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_a^{(\alpha)}} \eta_a^{(\alpha)}(t)\, d_a^\alpha t = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_a^{(\alpha)}} \eta(t)\Big|_a^b - \int_a^b \frac{d_a^\alpha}{dt_a^\alpha}\left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_a^{(\alpha)}}\right)\eta(t)\, d_a^\alpha t \tag{3.76}$$

elde edilir. $\eta(a)=\eta(b)=0$ olduğundan (3.76) eşitliğinde yalnızca uyumlu integral terimi kalır. Son olarak ilk değişim $\eta(t)$ keyfi fonksiyonuna göre düzenlenirse

$$\delta J = \int_a^b \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x} - \frac{d_a^\alpha}{dt_a^\alpha}\left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_a^{(\alpha)}}\right)\right)\eta(t)\, d_a^\alpha t = 0 \tag{3.77}$$

elde edilir. 3.4 Yardımcı Teorem kullanılarak

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x} - \frac{d_a^\alpha}{dt_a^\alpha}\left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_a^{(\alpha)}}\right) = (t-a)^{1-\alpha}\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d_a^\alpha}{dt_a^\alpha}\left((t-a)^{1-\alpha}\frac{\partial F}{\partial x_a^{(\alpha)}}\right) = 0 \tag{3.78}$$

genelleştirilmiş uyumlu Euler–Lagrange denklemine ulaşılır. □

Genelleştirilmiş uyumlu türevli değişim analizi için genel durumdaki genelleştirilmiş uyumlu karşıtlık koşulu aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

3.2.2 Teorem (Genelleştirilmiş uyumlu türevli değişim analizi için karşıtlık koşulu): $0<\alpha\le 1$, $x:[t_0,t_f]\to\mathbb{R}$ $\alpha-$diferansiyellenebilir fonksiyon ve $F\in C^\alpha\left([t_0,t_f]\times\mathbb{R}^2\right)$ olsun. $x(t_0)=x_0$ sabit nokta ve $x(t_f)=x_f$ belirli bir $x=\gamma(t)$ eğrisi üzerinde bulunan sabit olmayan nokta olmak üzere

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} F\left(t, x(t), x_{t_0}^{(\alpha)}(t)\right) dt \tag{3.79}$$

performans indeksini minimize eden fonksiyon $x(t)$ olsun. O halde genelleştirilmiş uyumlu türevli değişim analizi için genel durumdaki karşıtlık koşulu

$$F\left(t_f, x\left(t_f\right), x_{t_0}^{(\alpha)}\left(t_f\right)\right)\Delta\tau + \left(t_f - t_0\right)^{1-\alpha} \frac{\partial F}{\partial x_{t_0}^{(\alpha)}}\Big|_{t_f} \eta\left(t_f\right) = 0 \tag{3.80}$$

şeklindedir. Burada $\eta \in C^{\alpha}\left(\left[t_0, t_f\right] \times \mathbb{R}^2\right)$ ve $\Delta\tau$ sırasıyla, $x(t)$ ve t zayıf değişimleri için keyfi fonksiyonlardır.

İspat: J performans indeksini minimize eden $x^*(t)$ eğrisinin $\gamma(t)$ hedef eğrisiyle $t_f = t_f^*$ noktasında kesiştiğini varsayalım $\left(x^*\left(t_f^*\right) = \gamma\left(t_f^*\right)\right)$. $\eta(t)$, $\eta\left(t_0\right) = 0$ özelliğindeki keyfi fonksiyon ve $|\varepsilon| \ll 1$ olmak üzere, $x(t)$ fonksiyonu ve t_f zaman değişkeni için zayıf değişimler

$$x(t) = x^*(t) + \varepsilon\eta(t) \tag{3.81}$$

$$x_{t_0}^{(\alpha)}(t) = x_{t_0}^{*(\alpha)}(t) + \varepsilon\eta_{t_0}^{(\alpha)}(t) \tag{3.82}$$

$$t_f = t_f^* + \varepsilon\Delta\tau \tag{3.83}$$

şeklinde ifade edilsin. $x^*(t)$ minimumunu bulmak için performans indeksin değişimi incelenmelidir. (3.81), (3.82) ve (3.83) zayıf değişimleri sonucunda J performans indeksindeki değişim,

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_f^* + \varepsilon\Delta\tau} F\left(t, x^*(t) + \varepsilon\eta(t), x_{t_0}^{*(\alpha)}(t) + \varepsilon\eta_{t_0}^{(\alpha)}(t)\right)dt - \int_{t_0}^{t_f^*} F\left(t, x^*(t), x_{t_0}^{*(\alpha)}(t)\right)dt \tag{3.84}$$

olarak elde edilir. (3.84) eşitliğindeki uyumlu integralin sınır değerleri zaman değişkenindeki değişime göre düzenlenirse,

$$\Delta J = \int_{t_f^*}^{t_f^*+\varepsilon\Delta\tau} F\left(t, x(t), x_{t_0}^{(\alpha)}(t)\right)dt$$
$$+\int_{t_0}^{t_f^*}\left(F\left(t, x^*(t)+\varepsilon\eta(t), x_{t_0}^{*(\alpha)}(t)+\varepsilon\eta_{t_0}^{(\alpha)}(t)\right)-F\left(t, x^*(t), x_{t_0}^{*(\alpha)}(t)\right)\right)dt \tag{3.85}$$

bulunur. (3.85) eşitliğindeki değişimi bulmak için $F\left(t, x(t), x_{t_0}^{(\alpha)}(t)\right)$ fonksiyonunun $t \in \left[t_0, \mathrm{t}_f\right]$ için $\left(x^*, x_{t_0}^{*(\alpha)}\right)$ noktası civarındaki $\left(\varepsilon\eta, \varepsilon\eta_{t_0}^{(\alpha)}\right)$ değişkenlerine göre Taylor seri açılımı yapılırsa

$$\Delta J = \int_{t_f^*}^{t_f^*+\varepsilon\Delta\tau}\left(F\left(t, x^*(t), x_{t_0}^{*(\alpha)}(t)\right)+\frac{\partial F}{\partial x}\varepsilon\eta(t)+\frac{\partial F}{\partial x_{t_0}^{(\alpha)}}\varepsilon\eta_{t_0}^{(\alpha)}(t)\right)dt$$
$$+\int_{t_0}^{t_f^*}\left(F\left(t, x^*(t), x_{t_0}^{*(\alpha)}(t)\right)+\frac{\partial F}{\partial x}\varepsilon\eta(t)+\frac{\partial F}{\partial x_{t_0}^{(\alpha)}}\varepsilon\eta_{t_0}^{(\alpha)}(t)\right)dt \tag{3.86}$$
$$-\int_{t_0}^{t_f^*} F\left(t, x^*(t), x_{t_0}^{*(\alpha)}(t)\right)dt+O\left(\varepsilon^2\right)$$

bulunur. (3.86) eşitliğindeki ilk integrali hesaplamak için dikdörgen yöntemi kullanılır ve ikinci integral düzenlenirse

$$\Delta J = \left(F\left(t_f^*, x^*\left(t_f^*\right), x_{t_0}^{*(\alpha)}\left(t_f^*\right)\right)+\frac{\partial F}{\partial x}\varepsilon\eta\left(t_f^*\right)+\frac{\partial F}{\partial x_{t_0}^{(\alpha)}}\varepsilon\eta_{t_0}^{(\alpha)}\left(t_f^*\right)\right)\varepsilon\Delta\tau$$
$$+\int_{t_0}^{t_f^*}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\varepsilon\eta(t)+\frac{\partial F}{\partial x_{t_0}^{(\alpha)}}\varepsilon\eta_{t_0}^{(\alpha)}(t)\right)dt \tag{3.87}$$

bulunur. Minimum için gerekli koşul gereği ilk değişim sıfıra eşittir:

$$\delta J = F\left(t_f^*, x^*\left(t_f^*\right), x_{t_0}^{*(\alpha)}\left(t_f^*\right)\right)\Delta\tau+\int_{t_0}^{t_f^*}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\eta(t)+\frac{\partial F}{\partial x_{t_0}^{(\alpha)}}\eta_{t_0}^{(\alpha)}(t)\right)dt = 0. \tag{3.88}$$

(3.74) eşitliği ilk değişimdeki integrale uygulanırsa ilk değişim uyumlu integral cinsinden aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\delta J = F\left(t_f^*, x^*\left(t_f^*\right), x_{t_0}^{*(\alpha)}\left(t_f^*\right)\right)\Delta\tau + \int_a^b \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}\eta(t) + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_{t_0}^{(\alpha)}}\eta_{t_0}^{(\alpha)}(t) \right) d_{t_0}^{\alpha}t = 0. \quad (3.89)$$

(3.89) eşitliğinde uyumlu kısmi integrasyon formülü (2.68) kullanılırsa,

$$\int_{t_0}^{t_f^*} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_{t_0}^{(\alpha)}}\eta_{t_0}^{(\alpha)}(t)\, d_{t_0}^{\alpha}t = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_{t_0}^{(\alpha)}}\eta(t)\Big|_{t_0}^{t_f^*} - \int_{t_0}^{t_f^*} \frac{d_{t_0}^{\alpha}}{dt_{t_0}^{\alpha}}\left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_{t_0}^{(\alpha)}} \right)\eta(t)\, d_{t_0}^{\alpha}t \quad (3.90)$$

elde edilir. Varsayım gereği $\eta\left(t_0\right) = 0$ olduğundan (3.90) eşitliği

$$\int_{t_0}^{t_f^*} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_{t_0}^{(\alpha)}}\eta_{t_0}^{(\alpha)}(t)\, d_{t_0}^{\alpha}t = \frac{\partial F}{\partial x_{t_0}^{(\alpha)}}\Big|_{t_f^*}\left(t_f^* - t_0\right)^{1-\alpha}\eta\left(t_f^*\right) - \int_{t_0}^{t_f^*} \frac{d_{t_0}^{\alpha}}{dt_{t_0}^{\alpha}}\left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_{t_0}^{(\alpha)}} \right)\eta(t)\, d_{t_0}^{\alpha}t \quad (3.91)$$

olarak bulunur. (3.91) eşitliği (3.89) eşitliğinde yerine yazılır ve $\eta(t)$ keyfi fonksiyonuna göre düzenlenirse,

$$\begin{aligned} \delta J &= F\left(t_f^*, x^*\left(t_f^*\right), x_{t_0}^{*(\alpha)}\left(t_f^*\right)\right)\Delta\tau + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_{t_0}^{(\alpha)}}\Big|_{t_f^*}\eta\left(t_f^*\right) \\ &+ \int_{t_0}^{t_f^*} \eta(t)\left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x} - \frac{d_{t_0}^{\alpha}}{dt_{t_0}^{\alpha}}\left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_{t_0}^{(\alpha)}} \right) \right) d_{t_0}^{\alpha}t = 0 \end{aligned} \quad (3.92)$$

olur. İntegral içerisindeki ifade genelleştirilmiş uyumlu türevli Euler–Lagrange denklemi olduğundan sıfıra eşittir. Böylece elde edilen

$$F\left(t_f^*, x^*\left(t_f^*\right), x_{t_0}^{*(\alpha)}\left(t_f^*\right)\right)\Delta\tau + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_{t_0}^{(\alpha)}}\Big|_{t_f^*}\eta\left(t_f^*\right) = 0 \quad (3.93)$$

eşitliğinde (3.74) yerine yazılırsa, genelleştirilmiş uyumlu türevli değişim analizi için genel durumdaki karşıtlık koşulu

$$F\left(t_f^*, x^*\left(t_f^*\right), x_{t_0}^{*(\alpha)}\left(t_f^*\right)\right)\Delta\tau + \left(t_f^* - t_0\right)^{1-\alpha} \frac{\partial F}{\partial x_{t_0}^{(\alpha)}}\Big|_{t_f^*} \eta\left(t_f^*\right) = 0 \tag{3.94}$$

şeklinde bulunur. □

3.2.1 Özel Durumlardaki Genelleştirilmiş Uyumlu Türevli Değişim Analizi Problemleri İçin Karşıtlık Koşulları

Bu bölümde uyumlu türevli değişim analizi için elde edilen genel durumdaki genelleştirilmiş karşıtlık koşulunun özel durumları incelenecektir. Genel durumdaki karşıtlık koşulu bitiş eğrisi üzerindedir, özel durumları ise düşey bitiş doğrusu ve yatay bitiş doğrusudur.

(3.80) eşitliğindeki $\eta\left(t_f\right)$ ve $\Delta\tau$ keyfi fonksiyonlarının değeri bilinmemektedir. Bu keyfi fonksiyonların değerini bulabilmek için

$$x\left(t_f\right) = x\left(t_f^* + \varepsilon\Delta\tau\right) = x^*\left(t_f^* + \varepsilon\Delta\tau\right) + \varepsilon\eta\left(t_f^* + \varepsilon\Delta\tau\right) \tag{3.95}$$

eşitliğini göz önüne alarak t_f^* noktası civarında $\varepsilon\Delta\tau$ değişkenine göre Taylor seri açılımları yapılırsa

$$x^*\left(t_f^* + \varepsilon\Delta\tau\right) + \varepsilon\eta\left(t_f^* + \varepsilon\Delta\tau\right) = x^*\left(t_f^*\right) + \dot{x}^*\left(t_f^*\right)\varepsilon\Delta\tau + \varepsilon\eta\left(t_f^*\right) + O\left(\varepsilon^2\right) \tag{3.96}$$

bulunur. Ayrıca $x(t)$ eğrisinin $\gamma(t)$ hedef eğrisi ile $t = t_f$ noktasında kesiştiği varsayıldığından $\gamma\left(t_f^* + \varepsilon\Delta\tau\right)$ eğrisi için t_f^* noktası civarında $\varepsilon\Delta\tau$ değişkenine göre Taylor seri açılımı yapılır

$$\gamma\left(t_f^* + \varepsilon\Delta\tau\right) = \gamma\left(t_f^*\right) + \dot{\gamma}\left(t_f^*\right)\varepsilon\Delta\tau + O\left(\varepsilon^2\right) \tag{3.97}$$

ve (3.96) ile (3.97) eşitliklerinden $\eta\left(t_f^*\right)$ keyfi fonksiyonu

$$\eta\left(t_f^*\right)=\left(\dot{\gamma}\left(t_f^*\right)-\dot{x}^*\left(t_f^*\right)\right)\Delta\tau \tag{3.98}$$

bulunur. (3.98) eşitliğindeki $\eta\left(t_f^*\right)$ keyfi fonksiyonu (3.80) eşitliğinde yerine yazılırsa ve eşitlik $\Delta\tau$ keyfi fonksiyonuna göre düzenlenirse

$$\left(F\left(t_f^*,x^*\left(t_f^*\right),x_{t_0}^{*(\alpha)}\left(t_f^*\right)\right)+\left(t_f^*-t_0\right)^{1-\alpha}\frac{\partial F}{\partial x_{t_0}^{(\alpha)}}\bigg|_{t_f^*}\left(\dot{\gamma}\left(t_f^*\right)-\dot{x}^*\left(t_f^*\right)\right)\right)\Delta\tau=0 \tag{3.99}$$

olur. Burada $\Delta\tau$ sıfırdan farklı bir keyfi fonksiyon olduğundan parantez içerisindeki ifade sıfıra eşittir ve genelleştirilmiş uyumlu türevli değişim analizi için genel durumdaki karşıtlık koşulu

$$F\left(t_f^*,x^*\left(t_f^*\right),x_{t_0}^{*(\alpha)}\left(t_f^*\right)\right)+\left(t_f^*-t_0\right)^{1-\alpha}\frac{\partial F}{\partial x_{t_0}^{(\alpha)}}\bigg|_{t_f^*}\left(\dot{\gamma}\left(t_f^*\right)-\dot{x}^*\left(t_f^*\right)\right)=0 \tag{3.100}$$

şeklinde elde edilir.

3.2.1.1 Sonuç: (3.100) eşitliği ile verilen uyumlu türevli değişim analizi için genel durumdaki genelleştirilmiş karşıtlık koşulunun özel durumları aşağıdaki gibi incelenir.

***i.* Bitiş Eğrisi Problemi:** Eğer $x\left(t_f\right)$ bitiş noktası diferansiyellenebilir bir $x=\gamma\left(t\right)$ eğrisi üzerinde ise karşıtlık koşulu

$$F\left(t_f,x\left(t_f\right),x_{t_0}^{(\alpha)}\left(t_f\right)\right)+\left(t_f-t_0\right)^{1-\alpha}\frac{\partial F}{\partial x_{t_0}^{(\alpha)}}\bigg|_{t_f}\left(\dot{\gamma}\left(t_f\right)-\dot{x}\left(t_f\right)\right)=0 \tag{3.101}$$

olarak elde edilir. (3.101) eşitliği genelleştirilmiş uyumlu türevli değişim analizi için genel durumdaki karşıtlık koşuludur.

ii. **Yatay Bitiş Doğrusu (Sabit Bitiş Noktası) Problemi:** Eğer $x\left(t_f\right)$ sabit ve t_f sabit olmayan bir nokta ise c sabit bir sayı olmak üzere $x=\gamma\left(t_f\right)=c$ olur. Dolayısıyla $\dot{\gamma}\left(t_f\right)=0$ olduğundan karşıtlık koşulu

$$F\left(t_f, x\left(t_f\right), x_{t_0}^{(\alpha)}\left(t_f\right)\right)-\left(t_f-t_0\right)^{1-\alpha}\dot{x}\left(t_f\right)\frac{\partial F}{\partial x_{t_0}^{(\alpha)}}\Big|_{t_f}=0 \tag{3.102}$$

olarak elde edilir.

iii. **Düşey Bitiş Doğrusu (Sabit Zaman) Problemi:** t_f sabit ve $x\left(t_f\right)$ sabit olmayan ise $\dot{\gamma}\left(t_f\right)$, x eksenine dik ve eğitimi sonsuz olan bir doğrudur. $\dot{\gamma}\left(t_f\right)\neq 0$ olduğundan (3.101) eşitliği $\dot{\gamma}\left(t_f\right)$ fonksiyonuna bölünür ve $\dot{\gamma}\left(t_f\right)$ fonksiyonu sonsuz olduğundan karşıtlık koşulu,

$$\left(t_f-t_0\right)^{1-\alpha}\frac{\partial F}{\partial x_{t_0}^{(\alpha)}}\Big|_{t_f}=0 \tag{3.103}$$

olarak elde edilir. (3.103) eşitliği genelleştirilmiş uyumlu türevli değişim analizi için doğal sınır koşulu olarak adlandırılır.

3.2.1.2 Örnek: Aşağıdaki fonksiyoneli verilen koşullar altında minimize eden $x(t)$ fonksiyonlarını bulunuz

.

$$J(x)=\int_0^T\left(1-x_0^{(\alpha)}(t)\right)^2 dt \tag{3.104}$$

a) $x(0)=1,\ x(T)=2$,

b) $x(0)=1,\ T=2$,

c) $x(0)=1$, T sabit olmayan bitiş noktası ve $x(T)$ fonksiyonu T noktasında $\gamma(t)=2+\left(t^{\alpha}-1\right)^{2}$ hedef eğrisi üzerinde olsun.

Çözüm: J minimize eden fonksiyonu bulmak için genelleştirilmiş uyumlu Euler–Lagrange denklemi oluşturulursa

$$x_0^{(\alpha)}(t)x_0^{(\alpha)}(t)+(1-\alpha)t^{-\alpha}x_0^{(\alpha)}(t)=(1-\alpha)t^{-\alpha} \tag{3.105}$$

bulunur. (3.105) eşitliğindeki uyumlu diferansiyel denklemin çözümünü bulabilmek için Abu Hammad ve Khalil tarafından [22]'de verilen teorem yardımıyla, $x(t)$ fonksiyonu,

$$x(t)=c_1+c_2\frac{t^{2\alpha-1}}{2\alpha-1} \tag{3.106}$$

formunda elde edilir. $x(0)=1$ başlangıç koşulundan $c_1=1$ bulunur ve $x(t)$ fonksiyonu

$$x(t)=1+c_2\frac{t^{2\alpha-1}}{2\alpha-1} \tag{3.107}$$

formundadır. Şimdi c_2 sabitini bulmak için verilen koşullar ayrı ayrı incelenir.

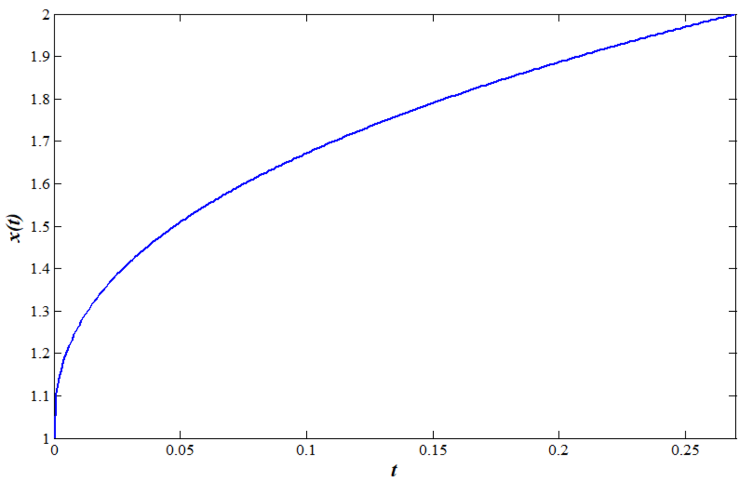
a) $x(T)=2$ ve T sabit olmayan bir nokta olduğundan (3.102) eşitliğindeki karşıtlık koşulu kullanılacaktır. (3.104) ve (3.107) eşitlikleri (3.102) eşitliğindeki karşıtlık koşulunda yazılırsa

$$\left(c_2 T^{\alpha-1}\right)^2 = 1 \tag{3.108}$$

olarak bulunur. Ayrıca (3.107) eşitliği $x(T)=2$ sınır koşulunda yerine yazılırsa

$$c_2 T^{2\alpha-1} = 2\alpha - 1 \tag{3.109}$$

bulunur. (3.108) ve (3.109) eşitlikleri $\alpha = 0.7$ için MATLAB programında sembolik araç kutusu kullanılarak çözülmüş ve çözümler $T = 0.2701$ ve $c_2 = 0.6752$ olarak elde edilmiştir. $x(t)$ fonksiyonunun $T = 0.2701$ noktasındaki grafiği MATLAB programı yardımıyla şekil 3.10'da çizdirilmiştir.

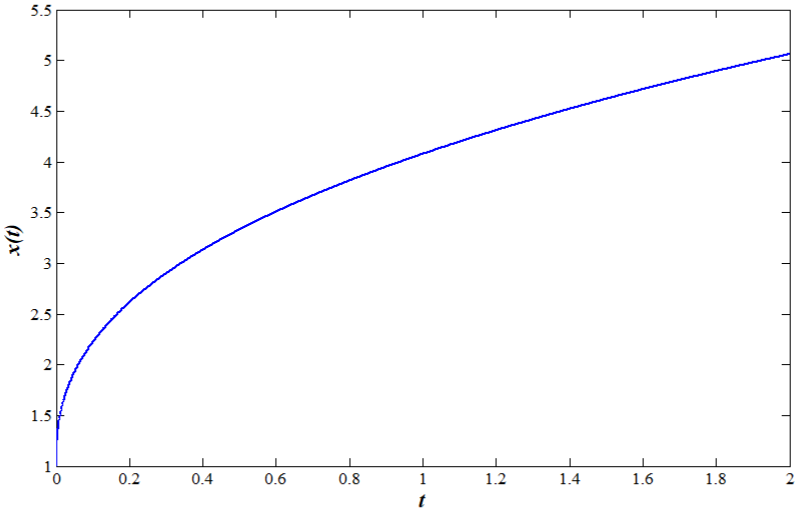


Şekil 3.10: Yatay bitiş doğrusu probleminde $x(t)$ minimizasyon fonksiyonu.

b) T sabit ve $x(T)$ sabit olmayan bir nokta olduğundan (3.103) eşitliğindeki karşıtlık koşulu kullanırsa

$$\left(1 - c_2 T^{\alpha-1}\right)\left(1 - c_2 T^{\alpha-1} - 2T^{1-\alpha}\right) = 0 \tag{3.110}$$

elde edilir. $T=2$ ve $\alpha=0.7$ için (3.110) eşitliğinde yazılırsa $c_2=1.2311$ olarak bulunur. $\alpha=0.7$ değeri için $x(t)$ fonksiyonunun $T=2$ noktasındaki grafiği MATLAB programı yardımıyla şekil 3.11'de çizdirilmiştir.



Şekil 3.11: Düşey bitiş doğrusu probleminde $x(t)$ minimizasyon fonksiyonu.

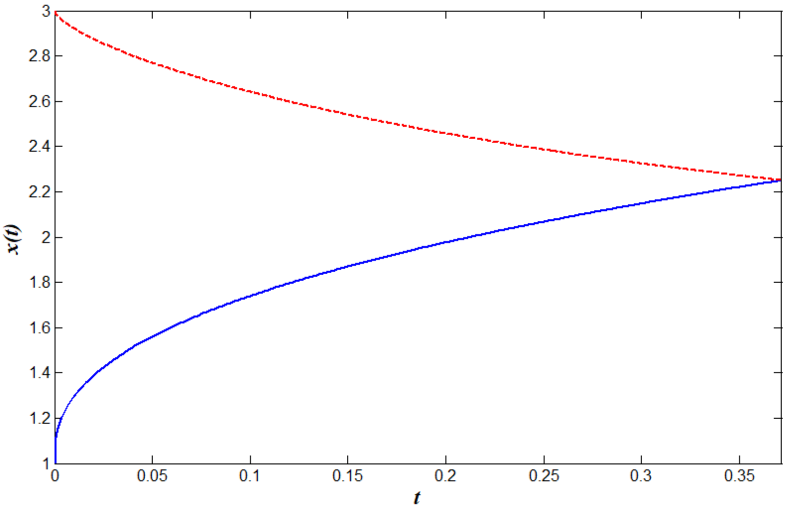
c) Bitiş noktası değeri bilinmediğinden dolayı c_2 katsayısı bulunamamaktadır. $x(t)$ fonksiyonu T noktasında $\gamma(t)$ hedef eğrisi üzerinde olduğundan bu iki fonksiyon eşitlenir

$$c_2\frac{T^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}-\left(T^{\alpha-1}\right)^2-1=0 \tag{3.111}$$

ve bitiş eğrisi üzerindeki karşıtlık koşulu (3.101) kullanılırsa

$$\left(1-c_2T^{\alpha-1}\right)\left(1-c_2T^{\alpha-1}-\left(4\alpha\left(T^{\alpha}-1\right)-2c_2T^{\alpha-1}\right)\right)=0 \tag{3.112}$$

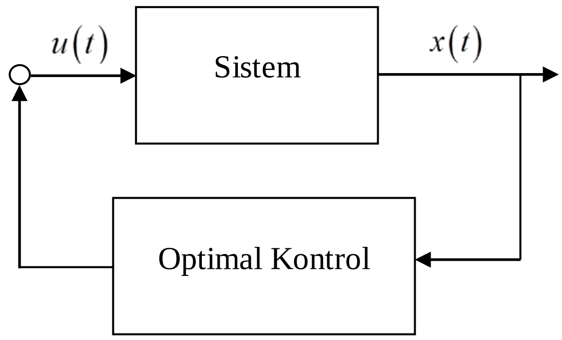
eşitlikleri elde edilir. (3.111) ve (3.112) eşitlikleri $\alpha=0.7$ değeri için MATLAB programında sembolik araç kutusu kullanılarak çözülmüş ve çözümler c_2 = 0.7430, $T=0.3715$ olarak elde edilmiştir. Son olarak $x(t)$ fonksiyonu ve $\gamma(t)$ hedef eğrisinin T noktasındaki grafiği MATLAB programı yardımıyla Şekil 3.12'de çizdirilmiştir.



Şekil 3.12: Bitiş eğrisi probleminde $x(t)$ minimizasyon fonksiyonu.

4. UYUMLU TÜREVLİ OPTİMAL KONTROL

Optimal kontrol, 1950 yıllarından bu yana güneş sistemini keşfetmeye yönelik Amerikan ve Rus bilim adamlarının çabalarına yanıt almak için geliştirilmiş bir alandır. Uzay seferlerinin matematiksel modellemeleri optimizasyon problemleri içerir. Bu problemlerden biri, küçük bir roket motoru tarafından kontrol edilen bir uzay aracının varış noktasına en kısa zamanda minimum yakıt miktarını kullanarak ulaşacağı yörüngeleri oluşturmaktır. Optimal kontrol problemleri, mühendislik, matematik ve çeşitli fen alanlarında ortaya çıkmaktadır (Hestenes, 1966, Bryson ve Ho, 1975, Gregory ve Lin, 1992). Klasik optimal kontrol probleminin amacı bazı fiziksel kısıtları sağlarken aynı zamanda verilen bir performans indeksi minimize (veya maksimize) eden kontrol sinyallerinin belirlemesidir [58].



Şekil 4.1: Kontrol sistemi.

Kesirli mertebeden türevler yardımıyla pek çok fiziksel sürecin daha iyi modelleniyor olması kesirli optimal kontrol problemlerinin formülize edilmesi ve çözüm stratejilerinin belirlenmesini gerektirmiştir. Kesirli optimal kontrol problemi performans indeksi ya da sistemin dinamik kısıtlarından en az birinin kesirli türevli terim içerdiği optimal kontrol problemleridir.

Literatürde kesirli optimal kontrol ilk olarak Riemann–Liouville kesirli türeviyle Agrawal tarafından [87]'de değişim analizi, Lagrange çarpanı tekniği ve kısmi kesirli integrasyon formülü kullanılarak optimallik koşullarını ifade eden

Euler–Lagrange denklemleri biçiminde elde edilmiştir. Agrawal burada klasik optimal kontrol problemini de içine alan daha genel bir yapı ortaya koymuştur. Yine Agrawal [40,64], Caputo ve Riesz kesirli türev operatörüyle tanımlanan kesirli optimal kontrol problemini ele almış ve problemin çözümü için doğrudan nümerik bir çözüm tekniği önermiştir. Baleanu ve diğ. kesirli optimal kontrol probleminin bir çözümü için merkezi fark nümerik metodu önermişlerdir [88]. Agrawal ve diğ. yüksek boyutlu kontrol sistemleri için optimal kontrol problemlerini tanımlamış ve yine nümerik çözüm sürecini önermişlerdir. Kesirli optimal kontrol problemleri farklı koordinat sistemlerinde Özdemir ve diğ. tarafından Riemann–Liouville operatörü ile ele alınmış ve nümerik çözümleri verilmiştir [44,89]. Ayrıca, Riesz operatörü ile uzay–zaman kesirli mertebeden sistemlerin optimal kontrolü Özdemir ve Avcı tarafından incelenmiştir [90].

Bir veya iki sınır koşulunun eksik olduğu kesirli optimal kontrol problemlerinin ek sınır koşulları olarak bilinen karşıtlık koşulları için çeşitli çözüm yöntemleri önerilmiştir. Tricaud ve Chen, genel formdaki kesirli mertebeden optimal kontrol problemlerini nümerik olarak çözmek için yaklaşık bir yöntem önermiştir [91]. Biswas ve Sen, kesirli optimal kontrol problemlerinin sabit ve sabit olmayan bitiş noktası koşullarını Hamilton fonksiyonuyla formüle etmiş ve çözümünü önermiştir [92,93]. Dzielinski ve Czyronis, ayrık zamanlı lineer kuadratik kesirli mertebeden dinamik sistemlerin sabit bitiş zamanlı optimal kontrol problemini Riemann–Liouville kesirli operatörüyle ele almıştır [94]. Almeida ve Torres, Caputo operatörü ile optimal kontrol probleminin çözümü için farklı bir yöntem önermiştir [95]. Pooseh ve diğ. dinamik sistemi tamsayı ve kesirli mertebeden türev içeren, sabit olmayan bitiş noktası problemi için gerekli optimallik koşullarını elde etmiştir [96]. Alizadeh ve Effati, kesirli optimal kontrol probleminin çözümü için değişimsel iterasyon yöntemi kullanmıştır [97]. Kesirli operatörlerle ele alınan optimal kontrol problemi için sabit olmayan bitiş noktası problemlerinin uygulamaları [98–101] numaralı kaynaklarda bulunabilir.

Son yıllarda tanımlanan uyumlu türev operatörü için optimal kontrol probleminin temeli Chung [30] tarafından uyumlu türevli değişim analizi ile atılmıştır. Daha sonra Lazo ve Torres [36] uyumlu türevli optimal kontrol problemini tanımlayarak optimallik koşullarını Hamilton formülasyonu ve Lagrange çarpanı tekniği ile elde etmiştir. Iskender ve diğ. zaman uyumlu bir ısı iletim denklemine bağlı olarak, bir levhada termal gerilimlerin optimal sınır sıcaklık kontrolünü vermiştir [37]. Ziaei ve diğ. [38], lineer olmayan uyumlu türevli optimal kontrol için yaklaşık bir çözüm bulmaya yönelik yeni bir yöntem önermiştir. Ziaei ve Farahi, zaman gecikmeli uyumlu türevli optimal kontrol problemlerinin bir sınıfını çalışmıştır [39].

Tezin bu bölümünde ana amaç uyumlu türevli optimal kontrol problemleri için karşıtlık koşullarını elde etmektir. Bu sebeple, öncelikle Lazo ve Torres [36] tarafından Gateux türev ile elde edilen optimallik koşulları değişim ile elde edilerek yeni bir yaklaşım verilecektir. Sonrasında ise literatürde eksikliği görülen uyumlu türevli optimal kontrol problemlerinin karşıtlık koşulları yine değişim yaklaşımı ile elde edilecektir. Elde edilen sonuçlar yayınlanmıştır [48].

4.1 Tanım: Uyumlu türevli optimal kontrol problemi

$$J(x,u)=\int_a^b F\big(t,x(t),u(t)\big)\,d_a^{\alpha}t \tag{4.1}$$

performans indeksini minimize eden $\big(x(\cdot),u(\cdot)\big)$ fonksiyon çiftinin belirlenmesi sürecidir. Burada J, $x(t)$ durum fonksiyonu ve $u(t)$ kontrol fonksiyonuna bağlı performans indekstir. Kesirli mertebeden uyumlu türevli dinamik sistem

$$x_a^{(\alpha)}(t)=g\big(t,x(t),u(t)\big) \tag{4.2}$$

performans indeksinin dinamik kısıtıdır ve

$$x(a)=x_a \qquad x(b)=x_b \tag{4.3}$$

öngörülen başlangıç ve sınır koşullarıdır. (4.1) ve (4.2) eşitliklerindeki F ve g fonksiyonları $[a,b]\times\mathbb{R}^2$ bölgesinde en az C^α sınıfına ait fonksiyonlardır. Ayrıca, $x(t)$ durum fonksiyonu, $x_a^{(\alpha)}(t)$ uyumlu türevi var olan bir fonksiyondur.

Bu kısımda (4.1)–(4.3) eşitlikleri ile verilen problemin optimallik koşulları Hamilton formulasyonu ve Lagrange çarpanı teknikleri kullanılarak değişim ile elde edilecektir. Lagrange çarpanı tekniğinde performans indeksin fonksiyoneli

$$L(t,x,u,\lambda)=F\big(t,x(t),u(t)\big)+\lambda(t)\Big(x_a^{(\alpha)}(t)-g\big(t,x(t),u(t)\big)\Big) \tag{4.4}$$

şeklinde düzenlenir. Burada $\lambda(t)$, $\alpha-$diferansiyellenebilir bir fonksiyondur ve *Lagrange çarpanı* olarak adlandırılır. Aynı zamanda $\lambda(t)$, kontrol ve durum fonksiyonları arasındaki ilişkiyi verdiğinden *yardımcı durum değişkeni* olarak da adlandırılmaktadır. Uyumlu türevli optimal kontrol probleminde gerekli koşulları bulmak amacıyla performans indeksi Lagrange çarpanı yardımıyla şu şekilde ifade edilir:

$$I(x,u,\lambda)=\int_a^b F\big(t,x(t),u(t)\big)+\lambda(t)\Big(x_a^{(\alpha)}(t)-g\big(t,x(t),u(t)\big)\Big)d_a^\alpha t. \tag{4.5}$$

(4.5) eşitliğindeki uyumlu integral parçalanırsa

$$I(x,u,\lambda)=\int_a^b F\big(t,x(t),u(t)\big)d_a^\alpha t+\int_a^b \lambda(t)\Big(x_a^{(\alpha)}(t)-g\big(t,x(t),u(t)\big)\Big)d_a^\alpha t \tag{4.6}$$

elde edilir. Hesaplamalarda kolaylık olması bakımından bu iki integral ayrı ayrı incelenecektir. İlk integral performans indeksi olduğundan J ile, ikinci integrali ise Φ ile adlandırılacaktır. İki fonksiyonelin de değişiminin incelenmesi için öncelikle durum, kontrol ve yardımcı durum değişkeni fonksiyonları için değişimin yapılması gerekir. Bunun için $x^*(t)$, $x_a^{*(\alpha)}(t)$, $u^*(t)$ ve $\lambda^*(t)$ fonksiyonlarının ekstremum fonksiyonları olduğu kabul edilir. Böylece $\eta(t)$, $\eta_a^{(\alpha)}(t)$, $\zeta(t)$ ve $\Lambda(t)$ keyfi fonksiyonlar ve $|\varepsilon| \ll 1$ olmak üzere, $x(t)$, $x_a^{(\alpha)}(t)$, $u(t)$ ve $\lambda(t)$ fonksiyonları için zayıf değişimler sırasıyla,

$$x(t) = x^*(t) + \varepsilon^\alpha \eta(t) \tag{4.7}$$

$$x_a^{(\alpha)}(t) = x_a^{*(\alpha)}(t) + \varepsilon^\alpha \eta_a^{(\alpha)}(t) \tag{4.8}$$

$$u(t) = u^*(t) + \varepsilon^\alpha \zeta(t) \tag{4.9}$$

$$\lambda(t) = \lambda^*(t) + \varepsilon^\alpha \Lambda(t) \tag{4.10}$$

şeklinde ifade edilir. J nin değişimi ΔJ ve Φ nin değişimi $\Delta\Phi$ sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\Delta J = \int_a^b F\left(t, x(t), u(t)\right) - F\left(t, x^*(t), u^*(t)\right) d_a^\alpha t \tag{4.11}$$

$$\Delta\Phi = \int_a^b \lambda(t)\left(x_a^{(\alpha)}(t) - g\left(t, x(t), u(t)\right)\right) - \lambda^*(t)\left(x_a^{*(\alpha)}(t) - g\left(t, x^*(t), u^*(t)\right)\right) d_a^\alpha t \tag{4.12}$$

Durum, kontrol ve yardımcı durum değişkeni fonksiyonları için ele alınan değişimler fonksiyonellerde yazıldığında aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$\Delta J = \int_a^b \left(F\left(t, x^*(t) + \varepsilon\eta(t), u^*(t) + \varepsilon\zeta(t)\right) - F\left(t, x^*(t), u^*(t)\right)\right) d_a^\alpha t, \tag{4.13}$$

$$
\begin{aligned}
\Delta\Phi &= \int_a^b \left(\lambda^*(t)+\varepsilon^\alpha \Lambda(t)\right)\left(x_a^{*(\alpha)}(t)+\varepsilon^\alpha \eta_a^{(\alpha)}(t)\right) d_a^\alpha t \\
&-\int_a^b \left(\lambda^*(t)+\varepsilon^\alpha \Lambda(t)\right) g\left(t,x^*(t)+\varepsilon^\alpha \eta(t),u^*(t)+\varepsilon^\alpha \zeta(t)\right) d_a^\alpha t \\
&-\int_a^b \lambda^*(t)\left(x_a^{*(\alpha)}(t)-g\left(t,x^*(t),u^*(t)\right)\right) d_a^\alpha t.
\end{aligned} \tag{4.14}
$$

(4.13) ve (4.14) eşitliklerindeki değişimleri bulmak için $F\left(t,x(t),u(t)\right)$ ve $g\left(t,x(t),u(t)\right)$ fonksiyonlarının $t\in[a,b]$ için $\left(x^*,u^*\right)$ noktası civarında $\left(\varepsilon^\alpha \eta,\varepsilon^\alpha \zeta\right)$ değişkenlerine göre Taylor seri açılımları yapılırsa

$$
\begin{aligned}
\Delta J &= \int_a^b \left(F\left(t,x^*(t),u^*(t)\right)+\frac{\partial F}{\partial x}\varepsilon^\alpha \eta(t)+\frac{\partial F}{\partial u}\varepsilon^\alpha \zeta(t)-F\left(t,x^*(t),u(t)\right)\right) d_a^\alpha t \\
&+O\left(\varepsilon^{2\alpha}\right)
\end{aligned} \tag{4.15}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta\Phi &= \int_a^b \left(\lambda^*(t)+\varepsilon^\alpha \Lambda(t)\right)\left(x_a^{*(\alpha)}(t)+\varepsilon^\alpha \eta_a^{(\alpha)}(t)\right) d_a^\alpha t \\
&-\int_a^b \left(\lambda^*(t)+\varepsilon^\alpha \Lambda(t)\right)\left(g\left(t,x^*(t),u^*(t)\right)+\frac{\partial g}{\partial x}\varepsilon^\alpha \eta(t)+\frac{\partial g}{\partial u}\varepsilon^\alpha \zeta(t)\right) d_a^\alpha t \\
&-\int_a^b \lambda^*(t)\left(x_a^{*(\alpha)}(t)-g\left(t,x^*(t),u^*(t)\right)\right) d_a^\alpha t+O\left(\varepsilon^{2\alpha}\right)
\end{aligned} \tag{4.16}
$$

bulunur. (4.15) ve (4.16) eşitlikleri düzenlenirse

$$
\Delta J = \int_a^b \varepsilon^\alpha \left(\frac{\partial F}{\partial x}\eta(t)+\frac{\partial F}{\partial u}\zeta(t)\right) d_a^\alpha t+O\left(\varepsilon^{2\alpha}\right) \tag{4.17}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta\Phi &= \int_a^b \varepsilon^\alpha \Lambda(t)\left(x_a^{*(\alpha)}(t)-g\left(t,x^*(t),u^*(t)\right)\right) d_a^\alpha t \\
&-\int_a^b \lambda^*(t)\left(\varepsilon^\alpha \eta_a^{(\alpha)}(t)+\frac{\partial g}{\partial x}\varepsilon^\alpha \eta(t)+\frac{\partial g}{\partial u}\varepsilon^\alpha \zeta(t)\right) d_a^\alpha t+O\left(\varepsilon^{2\alpha}\right)
\end{aligned} \tag{4.18}
$$

elde edilir. Sonuç olarak (4.17) ve (4.18) eşitliklerindeki ilk değişimler sırasıyla aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\delta J = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial x} \eta(t) + \frac{\partial F}{\partial u} \zeta(t) \right) d_a^\alpha t = 0, \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned} \delta\Phi &= \int_a^b \Lambda(t)\left(x_a^{*(\alpha)}(t) - g\left(t, x^*(t), u^*(t)\right)\right) d_a^\alpha t \\ &+ \int_a^b \lambda^*(t)\left(\eta_a^{(\alpha)}(t) - \frac{\partial g}{\partial x}\eta(t) - \frac{\partial g}{\partial u}\zeta(t)\right) d_a^\alpha t = 0. \end{aligned} \tag{4.20}$$

(4.20) eşitliğindeki $\int_a^b \lambda^*(t)\eta_a^{(\alpha)}(t)\, d_a^\alpha t$ terimi için uyumlu kısmi integrasyon formülü (2.68) kullanılırsa

$$\int_a^b \lambda^*(t)\eta_a^{(\alpha)}(t)\, d_a^\alpha t = \lambda^*(t)\eta(t)\Big|_a^b - \int_a^b \lambda_a^{*(\alpha)}(t)\eta(t)\, d_a^\alpha t \tag{4.21}$$

bulunur. $\eta(a) = \eta(b) = 0$ olduğundan (4.21) eşitliğinde yalnızca uyumlu integral terimi kalır ve (4.18) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \delta\Phi &= \int_a^b \Lambda(t)\left(x_a^{*(\alpha)}(t) - g\left(t, x^*(t), u^*(t)\right)\right) d_a^\alpha t \\ &+ \int_a^b \left(\eta(t)\left(-\lambda^*(t)\frac{\partial g}{\partial x} - \lambda_a^{*(\alpha)}(t)\right) - \zeta(t)\left(\lambda^*(t)\frac{\partial g}{\partial u}\right)\right) d_a^\alpha t = 0 \end{aligned} \tag{4.22}$$

şeklinde elde edilir. Varsayım gereği elde edilen δJ ve $\delta\Phi$ değişimleri toplanır

$$
\begin{aligned}
\delta\Phi+\delta J &= \int_a^b \Lambda(t)\left(x_a^{*(\alpha)}(t)-g\left(t,x^*(t),u^*(t)\right)\right)d_a^\alpha t \\
&+\int_a^b \eta(t)\left(\frac{\partial F}{\partial x}-\lambda^*(t)\frac{\partial g}{\partial x}-\lambda_a^{*(\alpha)}(t)\right)d_a^\alpha t \\
&+\int_a^b \zeta(t)\left(\frac{\partial F}{\partial u}-\lambda^*(t)\frac{\partial g}{\partial u}\right)d_a^\alpha t=0
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

$\Lambda(t)$, $\eta(t)$ ve $\zeta(t)$ keyfi fonksiyonlar olduğundan (4.23) eşitliğindeki her bir bileşenin bağımsız olarak sıfıra eşit olması gerekmektedir. Böylece uyumlu türevli optimal kontrol için *Euler–Lagrange denklemleri* olarak adlandırılan

$$
\left.
\begin{aligned}
x_a^{*(\alpha)}(t)-g\left(t,x^*(t),u^*(t)\right)=0 \\
\frac{\partial F}{\partial x}-\lambda^*(t)\frac{\partial g}{\partial x}-\lambda_a^{*(\alpha)}(t)=0 \\
\frac{\partial F}{\partial u}-\lambda^*(t)\frac{\partial g}{\partial u}=0
\end{aligned}
\right\}
\tag{4.24}
$$

sistem elde edilir. Uyumlu türevli optimal kontrol için *Hamilton fonksiyonu*

$$
H(t,x,u,\lambda)=-F\left(t,x(t),u(t)\right)+\lambda(t)g\left(t,x(t),u(t)\right)
\tag{4.25}
$$

şeklinde tanımlandığından (4.24) eşitliğindeki ifadeler Hamilton formunda yazılırsa elde edilen Euler–Lagrange denklemleri aşağıdaki şekilde adlandırılır:

$$
\left.
\begin{aligned}
\text{durum fonksiyonu:}\quad & \frac{\partial H}{\partial \lambda}\left(t,x^*,u^*,\lambda^*\right)=x_a^{*(\alpha)}(t), \\
\text{yardımcı durum fonksiyonu:}\quad & -\frac{\partial H}{\partial x}\left(t,x^*,u^*,\lambda^*\right)=\lambda_a^{*(\alpha)}(t), \\
\text{kontrol fonksiyonu:}\quad & \frac{\partial H}{\partial u}\left(t,x^*,u^*,\lambda^*\right)=0.
\end{aligned}
\right\}
\tag{4.26}
$$

(4.26) ile elde edilen koşullar, (4.1)–(4.3) eşitlikleri ile verilen optimal kontrol probleminin gerekli optimallik koşullarıdır. Bu denklemler ortak çözüldüğünde optimal kontrol ve durum fonksiyonları elde edilir. Dikkat edilirse incelenen problem için performansı indeksi sabit başlangıç ve sabit bitiş noktalarına sahiptir. Ancak bazı kesirli optimal kontrol problemleri yeterli sayıda uygun sınır koşullarını içermediğinden optimal çözümün bulunması için yardımcı sınır koşullarına ihtiyaç vardır. Yani, bir ya da her iki sınır koşulu eksik olduğunda, doğal sınır koşulları ya da karşıtlık koşulu olarak bilinen bir ya da iki yardımcı koşulun denklemi çözülmesi için elde edilmesi gerekir.

Bu tezde, başlangıç noktası sabit kabul edilerek sabit olmayan bitiş zamanı için karşıtlık koşulları elde edilecektir. Sonuçlar, başlangıç noktasının sabit olmadığı durumlara genişletilebilir. Uyumlu türevli optimal kontrol problemleri için karşıtlık koşulları, uyumlu türevli değişim analizi problemlerinde olduğu gibi bitiş zamanı ve durum fonksiyonuna dayatılan şartlara bağlı olarak üç farklı tipte ele alınacaktır:

i. Düşey doğrusu problemi: Sabit bitiş zamanı, sabit olmayan durum fonsiyonu,

ii. Yatay doğrusu problemi: Sabit olmayan bitiş zamanı, sabit bitiş zamanı durum fonksiyonu,

iii. Bitiş eğrisi problemi: Sabit olmayan bitiş zamanı, sabit olmayan bitiş zamanı için durum fonsiyonu.

4.1 Uyumlu Türevli Optimal Kontrolün Karşıtlık Koşulları

4.1.1 Teorem (Uyumlu türevli optimal kontrol için karşıtlık koşulu): J minimize edilecek performans indeks, $g\left(t,x(t),u(t)\right)$ uyumlu türevli dinamik sistem, t_0 ve $x\left(t_0\right)=x_{t_0}$ sabit noktalar t_f ve $x\left(t_f\right)=x_{t_f}$ sabit olmayan noktalar olsun.

$$J\left(x,u\right)=\int_{t_0}^{t_f} F\left(t,x(t),u(t)\right)d_{t_0}^{\alpha}t \tag{4.27}$$

$$x_{t_0}^{(\alpha)}(t) = g(t, x(t), u(t)) \tag{4.28}$$

şeklindeki uyumlu türevli optimal kontrol sistemi için genel durumdaki karşıtlık koşulu

$$\left[-H\left(t_f, x(t_f), u(t_f)\right) + \lambda(t_f)\, x_{t_0}^{(\alpha)}(t_f)\right]\Delta\tau^{\alpha} + \lambda(t_f)\,\eta(t_f) = 0 \tag{4.29}$$

şeklindedir. Burada $\eta \in C^{\alpha}\left(\left[t_0, t_f\right] \times \mathbb{R}^2\right)$ ve $\Delta\tau$ sırasıyla, $x(t)$ ve t zayıf değişimleri keyfi fonksiyonlardır.

İspat: J performans indeksini minimize eden $x^*(t)$ eğrisinin $\gamma(t)$ hedef eğrisiyle $t_f = t_f^*$ noktasında kesiştiğini varsayalım $\left(x^*(t_f^*) = \gamma(t_f^*)\right)$. $x^*(t)$, $x_{t_0}^{*(\alpha)}(t)$, $u^*(t)$ ve $\lambda^*(t)$ fonksiyonları ekstremum fonksiyonları olsunlar. $\eta(t)$, $\eta_{t_0}^{(\alpha)}(t)$, $\zeta(t)$ ve $\Lambda(t)$ keyfi fonksiyonlar ve $\left|\varepsilon^{\alpha}\right| \ll 1$ olmak üzere, $x(t)$, $x_{t_0}^{(\alpha)}(t)$, $u(t)$ ve $\lambda(t)$ fonksiyonları ve t_f zaman değişkeni için zayıf değişimler sırasıyla,

$$x(t) = x^*(t) + \varepsilon^{\alpha}\eta(t) \tag{4.30}$$

$$x_{t_0}^{(\alpha)}(t) = x_{t_0}^{*(\alpha)}(t) + \varepsilon^{\alpha}\eta_{t_0}^{(\alpha)}(t) \tag{4.31}$$

$$u(t) = u^*(t) + \varepsilon^{\alpha}\zeta(t) \tag{4.32}$$

$$\lambda(t) = \lambda^*(t) + \varepsilon^{\alpha}\Lambda(t) \tag{4.33}$$

$$t_f = t_f^* + \varepsilon\Delta\tau \tag{4.34}$$

şeklinde ifade edilsin. Özel olarak $\eta_{t_0}^{(\alpha)}(t)$, α-diferansiyellenebilir keyfi bir fonksiyondur, ayrıca $\eta(t_0) = 0$ ve t_f sabit olmayan nokta olduğundan $\eta(t_f) \neq 0$ olur.

Bu kısımda (4.27)–(4.28) eşitlikleri ile verilen problemin karşıtlık koşulu, Hamilton formulasyonu ve Lagrange çarpanı teknikleri kullanılarak değişim ile elde edilecektir. Lagrange çarpanı tekniğinde performans indeksin fonksiyoneli şu şekilde tanımlanır:

$$I(x,u,\lambda)=\int_{t_0}^{t_f} F(t,x(t),u(t))+\lambda(t)\left(x_{t_0}^{(\alpha)}(t)-g(t,x(t),u(t))\right)d_{t_0}^{\alpha}t. \quad (4.35)$$

(4.35) eşitliğindeki uyumlu integral parçalanırsa

$$I(x,u,\lambda)=\int_{t_0}^{t_f} F(t,x(t),u(t))\,d_{t_0}^{\alpha}t+\int_{t_0}^{t_f}\lambda(t)\left(x_{t_0}^{(\alpha)}(t)-g(t,x(t),u(t))\right)d_{t_0}^{\alpha}t \quad (4.36)$$

elde edilir. Hesaplamalarda kolaylık olması bakımından bu iki integralin değişimi ayrı ayrı incelenecektir. Yine İlk integral J ile, ikinci integrali ise Φ ile adlandırılacaktır. J nin değişimi ΔJ ve Φ nin değişimi $\Delta\Phi$ sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\Delta J=\int_{t_0}^{t_f}\left(F(t,x(t),u(t))-F(t,x^*(t),u^*(t))\right)d_{t_0}^{\alpha}t, \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned}\Delta\Phi=\int_{t_0}^{t_f}\Big(&\lambda(t)\left(x_{t_0}^{(\alpha)}(t)-g(t,x(t),u(t))\right)\\ &-\lambda^*(t)\left(x_{t_0}^{*(\alpha)}(t)-g(t,x^*(t),u^*(t))\right)\Big)d_{t_0}^{\alpha}t.\end{aligned} \quad (4.38)$$

Durum, kontrol ve yardımcı durum değişkeni fonksiyonları için ele alınan zayıf değişimler (4.37) ve (4.38) fonksiyonellerinde yazıldığında

$$\Delta J=\int_{t_0}^{t_f^*+\varepsilon\Delta\tau}\left(F(t,x^*(t)+\varepsilon^{\alpha}\eta(t),u^*(t)+\varepsilon^{\alpha}\zeta(t))-F(t,x^*(t),u^*(t))\right)d_{t_0}^{\alpha}t \quad (4.39)$$

$$
\begin{aligned}
\Delta\Phi = & \int_{t_0}^{t_f^*+\varepsilon\Delta\tau} \left(\lambda^*(t)+\varepsilon^\alpha\Lambda(t)\right)\left(x_{t_0}^{*(\alpha)}(t)+\varepsilon^\alpha\eta_{t_0}^{(\alpha)}(t)\right)d_{t_0}^\alpha t \\
& -\int_{t_0}^{t_f^*+\varepsilon\Delta\tau} \left(\lambda^*(t)+\varepsilon^\alpha\Lambda(t)\right)g\left(t,x^*(t)+\varepsilon^\alpha\eta(t),u^*(t)+\varepsilon^\alpha\zeta(t)\right)d_{t_0}^\alpha t \qquad (4.40)\\
& -\int_{t_0}^{t_f^*+\varepsilon\Delta\tau} \lambda^*(t)\left(x_{t_0}^{*(\alpha)}(t)-g\left(t,x^*(t),u^*(t)\right)\right)d_{t_0}^\alpha t
\end{aligned}
$$

elde edilir. Değişimlerdeki uyumlu integrallerin sınır değerleri zaman değişkenindeki değişime göre düzenlenirse aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$
\begin{aligned}
\Delta J = & \int_{t_f^*}^{t_f^*+\varepsilon\Delta\tau} F\left(t,x^*(t)+\varepsilon^\alpha\eta(t),u^*(t)+\varepsilon^\alpha\zeta(t)\right)d_{t_f^*}^\alpha t \\
& +\int_{t_0}^{t_f^*}\left(F\left(t,x^*(t)+\varepsilon^\alpha\eta(t),u^*(t)+\varepsilon^\alpha\zeta(t)\right)-F\left(t,x^*(t),u^*(t)\right)\right)d_{t_0}^\alpha t,
\end{aligned} \qquad (4.41)
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta\Phi = & \int_{t_f^*}^{t_f^*+\varepsilon\Delta\tau} \left(\lambda^*(t)+\varepsilon^\alpha\Lambda(t)\right)\left(x_{t_0}^{*(\alpha)}(t)+\varepsilon^\alpha\eta_{t_0}^{(\alpha)}(t)\right)d_{t_f^*}^\alpha t \\
& -\int_{t_f^*}^{t_f^*+\varepsilon\Delta\tau} \left(\lambda^*(t)+\varepsilon^\alpha\Lambda(t)\right)\left(g\left(t,x^*(t)+\varepsilon^\alpha\eta(t),u^*(t)+\varepsilon^\alpha\zeta(t)\right)\right)d_{t_f^*}^\alpha t \\
& +\int_{t_0}^{t_f^*}\left(\lambda^*(t)+\varepsilon^\alpha\Lambda(t)\right)\left(x_{t_0}^{*(\alpha)}(t)+\varepsilon^\alpha\eta_{t_0}^{(\alpha)}(t)\right)d_{t_0}^\alpha t \qquad (4.42)\\
& -\int_{t_0}^{t_f^*}\left(\lambda^*(t)+\varepsilon^\alpha\Lambda(t)\right)\left(g\left(t,x^*(t)+\varepsilon^\alpha\eta(t),u^*(t)+\varepsilon^\alpha\zeta(t)\right)\right)d_{t_0}^\alpha t \\
& -\int_{t_0}^{t_f^*}\lambda^*(t)\left(x_{t_0}^{*(\alpha)}(t)-g\left(t,x^*(t),u^*(t)\right)\right)d_{t_0}^\alpha t.
\end{aligned}
$$

(4.41) ve (4.42) eşitliklerindeki değişimleri bulmak için $F(t,x(t),u(t))$ ve $g(t,x(t),u(t))$ fonksiyonlarının $t\in[t_0,t_f]$ için (x^*,u^*) noktası civarında $(\varepsilon^\alpha\eta,\varepsilon^\alpha\zeta)$ değişkenlerine göre Taylor seri açılımından yapılırsa

$$\Delta J = \int_{t_f^*}^{t_f^*+\varepsilon\Delta\tau} \left(F\left(t, x^*(t), u^*(t)\right) + \frac{\partial F}{\partial x}\varepsilon^\alpha \eta(t) + \frac{\partial F}{\partial u}\varepsilon^\alpha \zeta(t) \right) d_{t_f^*}^\alpha t$$

$$+\int_{t_0}^{t_f^*} \left(F\left(t, x^*(t), u^*(t)\right) + \frac{\partial F}{\partial x}\varepsilon^\alpha \eta(t) + \frac{\partial F}{\partial u}\varepsilon^\alpha \zeta(t) - F\left(t, x^*(t), u^*(t)\right) \right) d_{t_0}^\alpha t \quad (4.43)$$

$$+O\left(\varepsilon^{2\alpha}\right)$$

$$\Delta\Phi = \int_{t_f^*}^{t_f^*+\varepsilon\Delta\tau} \left(\lambda^*(t) + \varepsilon^\alpha \Lambda(t)\right)\left(x_{t_0}^{*(\alpha)}(t) + \varepsilon^\alpha \eta_{t_0}^{(\alpha)}(t) \right) d_{t_f^*}^\alpha t$$

$$-\int_{t_f^*}^{t_f^*+\varepsilon\Delta\tau} \left(\lambda^*(t) + \varepsilon^\alpha \Lambda(t)\right)\left(g\left(t, x^*(t), u^*(t)\right) + \frac{\partial g}{\partial x}\varepsilon^\alpha \eta(t) + \frac{\partial g}{\partial u}\varepsilon^\alpha \zeta(t) \right) d_{t_f^*}^\alpha t$$

$$+\int_{t_0}^{t_f^*} \left(\lambda^*(t) + \varepsilon^\alpha \Lambda(t)\right)\left(x_{t_0}^{*(\alpha)}(t) + \varepsilon^\alpha \eta_{t_0}^{(\alpha)}(t) \right) d_{t_0}^\alpha t \quad (4.44)$$

$$-\int_{t_0}^{t_f^*} \left(\lambda^*(t) + \varepsilon^\alpha \Lambda(t)\right)\left(g\left(t, x^*(t), u^*(t)\right) + \frac{\partial g}{\partial x}\varepsilon^\alpha \eta(t) + \frac{\partial g}{\partial u}\varepsilon^\alpha \zeta(t) \right) d_{t_0}^\alpha t$$

$$-\int_{t_0}^{t_f^*} \lambda^*(t)\left(\left(x_{t_0}^{*(\alpha)}(t) - g\left(t, x^*(t), u^*(t)\right)\right)\right) d_{t_0}^\alpha t + O\left(\varepsilon^{2\alpha}\right)$$

bulunur. (4.43) ve (4.44) eşitliklerindeki ΔJ ve $\Delta\Phi$ değişimlerindeki ilk uyumlu integralleri hesaplamak için $d_{t_f^*}^\alpha t = \left(t - t_f^*\right)^{\alpha-1} dt$ ve $t = t_f = t_f^* + \varepsilon\Delta\tau$ olduğu göz önüne alınarak $d_{t_f^*}^\alpha t = \left(\varepsilon\Delta\tau\right)^{\alpha-1} dt$ yazılır. Böylece klasik hale indirgenen integrali yaklaşık olarak hesaplamak için dikdörtgen yöntemi kullanılırsa aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$\Delta J = F\left(t_f^*, x^*\left(t_f^*\right), u^*\left(t_f^*\right)\right)\varepsilon^\alpha \Delta\tau^\alpha + \int_{t_0}^{t_f^*} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\varepsilon^\alpha \eta(t) + \frac{\partial F}{\partial u}\varepsilon^\alpha \zeta(t) \right) d_{t_0}^\alpha t + O\left(\varepsilon^{2\alpha}\right) \quad (4.45)$$

$$\Delta\Phi = \lambda^*\left(t_f^*\right)\left(x_{t_0}^{*(\alpha)}\left(t_f^*\right) - g\left(t, x^*\left(t_f^*\right), u^*\left(t_f^*\right)\right)\right)\varepsilon^\alpha \Delta\tau^\alpha$$

$$+\int_{t_0}^{t_f^*} \lambda^*(t)\left(\varepsilon^\alpha \eta_{t_0}^{(\alpha)}(t) - \frac{\partial g}{\partial x}\varepsilon^\alpha \eta(t) - \frac{\partial g}{\partial u}\varepsilon^\alpha \zeta(t) \right) d_{t_0}^\alpha t \quad (4.46)$$

$$+\int_{t_0}^{t_f^*} \varepsilon^\alpha \Lambda(t)\left(x_{t_0}^{*(\alpha)}(t) - g\left(t, x^*(t), u^*(t)\right)\right) d_{t_0}^\alpha t + O\left(\varepsilon^{2\alpha}\right).$$

Sonuç olarak değişimlerin ilk değişimleri sırasıyla,

$$\delta J = F\left(t_f^*, x^*\left(t_f^*\right), u^*\left(t_f^*\right)\right)\Delta\tau^\alpha + \int_{t_0}^{t_f^*}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\eta(t) + \frac{\partial F}{\partial u}\zeta(t)\right)d_{t_0}^\alpha t = 0, \qquad (4.47)$$

$$\begin{aligned}\delta\Phi &= \lambda^*\left(t_f^*\right)\left(x_{t_0}^{*(\alpha)}\left(t_f^*\right) - g\left(t, x^*\left(t_f^*\right), u^*\left(t_f^*\right)\right)\right)\Delta\tau^\alpha \\ &+ \int_{t_0}^{t_f^*}\lambda^*(t)\left(\eta_{t_0}^{(\alpha)}(t) - \frac{\partial g}{\partial x}\eta(t) - \frac{\partial g}{\partial u}\zeta(t)\right)d_{t_0}^\alpha t \\ &+ \int_{t_0}^{t_f^*}\Lambda(t)\left(x_{t_0}^{*(\alpha)}(t) - g\left(t, x^*(t), u^*(t)\right)\right)d_{t_0}^\alpha t = 0\end{aligned} \qquad (4.48)$$

olarak bulunur. (4.46) eşitliğindeki $\int_{t_0}^{t_f^*}\lambda^*(t)\eta_{t_0}^{(\alpha)}(t)d_{t_0}^\alpha t$ terimi için uyumlu kısmi integrasyon formülü (2.68) kullanılırsa

$$\int_{t_0}^{t_f^*}\lambda^*(t)\eta_{t_0}^{(\alpha)}(t)d_{t_0}^\alpha t = \lambda(t)\eta(t)\Big|_{t_0}^{t_f^*} - \int_{t_0}^{t_f^*}\lambda_{t_0}^{*(\alpha)}(t)\eta(t)d_{t_0}^\alpha t \qquad (4.49)$$

bulunur. $\eta(t_0) = 0$ olduğundan (4.49) eşitliği

$$\int_{t_0}^{t_f^*}\lambda^*(t)\eta_{t_0}^{(\alpha)}(t)d_{t_0}^\alpha t = \lambda^*\left(t_f^*\right)\eta\left(t_f^*\right) - \int_{t_0}^{t_f^*}\lambda_{t_0}^{*(\alpha)}(t)\eta(t)d_{t_0}^\alpha t \qquad (4.50)$$

şeklinde elde edilir. (4.50) eşitliği, (4.48) eşitliğinde yerine yazılıp $\eta(t)$ ve $\zeta(t)$ keyfi fonksiyonuna göre düzenlenirse Φ nin ilk değişimi

$$\begin{aligned}\delta\Phi &= \lambda^*\left(t_f^*\right)\left(x_{t_0}^{*(\alpha)}\left(t_f^*\right) - g\left(t, x^*\left(t_f^*\right), u^*\left(t_f^*\right)\right)\right)\Delta\tau^\alpha \\ &+ \int_{t_0}^{t_f^*}\left(\eta(t)\left(-\lambda^*(t)\frac{\partial g}{\partial x} - \lambda_{t_0}^{*(\alpha)}(t)\right) - \zeta(t)\left(\lambda^*(t)\frac{\partial g}{\partial u}\right)\right)d_{t_0}^\alpha t \\ &+ \int_{t_0}^{t_f^*}\Lambda(t)\left(x_{t_0}^{*(\alpha)}(t) - g\left(t, x^*(t), u^*(t)\right)\right)d_{t_0}^\alpha t + \lambda^*\left(t_f^*\right)\eta\left(t_f^*\right) = 0\end{aligned} \qquad (4.51)$$

olarak elde edilir. Varsayım gereği (4.47) ve (4.51) eşitliklerindeki δJ ve $\delta\Phi$ değişimleri toplanıp Hamilton fonksiyonu formunda düzenlenirse aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}\delta\Phi+\delta J=&\left(-H\left(t_f^*,x^*\left(t_f^*\right),u^*\left(t_f^*\right)\right)+\lambda^*\left(t_f^*\right)x_{t_0}^{(\alpha)}\left(t_f^*\right)\right)\Delta\tau^\alpha\\&+\int_{t_0}^{t_f^*}\left(\eta(t)\left(-\frac{\partial H}{\partial x}-\lambda_{t_0}^{(\alpha)}(t)\right)\right)d_{t_0}^\alpha t\\&+\int_{t_0}^{t_f^*}\zeta(t)\left(-\frac{\partial H}{\partial u}\right)d_{t_0}^\alpha t\\&+\int_{t_0}^{t_f^*}\Lambda(t)\left(x_{t_0}^{*(\alpha)}(t)-g\left(t,x^*(t),u^*(t)\right)\right)d_{t_0}^\alpha t+\lambda^*\left(t_f^*\right)\eta\left(t_f^*\right)=0.\end{aligned}\tag{4.52}$$

(4.52) eşitliğinde uyumlu integral içerisindeki terimler optimallik için gerekli koşullar olduğundan her bir bileşen bağımsız olarak sıfıra eşittir. Bu yüzden (4.52) eşitliği

$$\left(-H\left(t_f^*,x^*\left(t_f^*\right),u^*\left(t_f^*\right)\right)+\lambda^*\left(t_f^*\right)x_{t_0}^{(\alpha)}\left(t_f^*\right)\right)\Delta\tau^\alpha+\lambda^*\left(t_f^*\right)\eta\left(t_f^*\right)=0\tag{4.53}$$

formuna dönüşür. (4.53) eşitliği uyumlu türevli optimal kontrol problemi için genel haldeki karşıtlık koşulu olur. □

4.1.1 Özel Durumlardaki Uyumlu Türevli Optimal Kontrol Problemleri İçin Karşıtlık Koşulları

Bu bölümde uyumlu türevli optimal kontrol problemi için elde edilen genel durumdaki karşıtlık koşulunun özel durumları incelenecektir. Genel durumdaki karşıtlık koşulu bitiş eğrisi üzerindedir ve özel durumları düşey bitiş doğrusu, yatay bitiş doğrusu şeklindedir.

Uyumlu türevli optimal kontrol problemi için genel durumdaki karşıtlık koşulu olarak adlandırılan (4.29) denklemindeki $\eta\left(t_f\right)$ ve $\Delta\tau^{\alpha}$ keyfi fonksiyonlarının değeri bilinmemektedir. $\eta\left(t_f\right)$ keyfi fonksiyonunun değeri uyumlu Taylor seri açılımı yardımıyla 3.1.1. bölümünde (3.44) eşitliğinde elde edilmiştir. (3.44) eşitliğindeki $\eta\left(t_f^*\right)$ keyfi fonksiyonu (4.53) eşitliğinde yerine yazılıp $\Delta\tau^{\alpha}$ keyfi fonksiyonu göre düzenlenirse

$$\begin{aligned}&\left(-H\left(t_f^*,x^*\left(t_f^*\right),u^*\left(t_f^*\right)\right)+\lambda^*\left(t_f^*\right)x_{t_0}^{(\alpha)}\left(t_f^*\right)\right.\\&\left.+\lambda^*\left(t_f^*\right)\left(\frac{\gamma_{t_f^*}^{(\alpha)}\left(t_f^*\right)-x_{t_f^*}^{*(\alpha)}\left(t_f^*\right)}{\alpha}\right)\right)\Delta\tau^{\alpha}=0\end{aligned} \tag{4.54}$$

olur. Burada $\Delta\tau^{\alpha}$ sıfırdan farklı keyfi bir fonksiyon olduğundan parantez içerisindeki ifade sıfıra eşittir ve uyumlu türevli optimal kontrol problemi için genel durumdaki karşıtlık koşulu

$$-H\left(t_f^*,x^*\left(t_f^*\right),u^*\left(t_f^*\right)\right)+\lambda^*\left(t_f^*\right)x_{t_0}^{(\alpha)}\left(t_f^*\right)+\lambda^*\left(t_f^*\right)\left(\frac{\gamma_{t_f^*}^{(\alpha)}\left(t_f^*\right)-x_{t_f^*}^{*(\alpha)}\left(t_f^*\right)}{\alpha}\right)=0 \tag{4.55}$$

şeklinde elde edilir.

4.1.1.1 Sonuç: (4.55) eşitliği ile verilen uyumlu optimal kontrol problemi için genel durumdaki karşıtlık koşulunun özel durumları aşağıdaki gibi incelenir.

i. **Bitiş Eğrisi Problemi:** Eğer $x\left(t_f\right)$ bitiş noktası diferansiyellenebilir bir $x=\gamma\left(t\right)$ eğrisi üzerinde ise karşıtlık koşulu

$$-H\left(t_f,x\left(t_f\right),u\left(t_f\right)\right)+\lambda\left(t_f\right)x_{t_0}^{(\alpha)}\left(t_f\right)+\lambda\left(t_f\right)\left(\frac{\gamma_{t_f}^{(\alpha)}\left(t_f\right)-x_{t_f}^{(\alpha)}\left(t_f\right)}{\alpha}\right)=0 \tag{4.56}$$

olarak elde edilir. (4.56) eşitliği uyumlu türevli optimal kontrol problemi için genel durumdaki karşıtlık koşuludur.

ii. **Yatay Bitiş Doğrusu (Sabit Bitiş Noktası) Problemi:** Eğer $x\left(t_f\right)$ sabit ve t_f sabit olmayan bir nokta ise c sabit bir sayı olmak üzere $x=\gamma\left(t_f\right)=c$ olur. Dolayısıyla $\gamma_{t_f}^{(\alpha)}\left(t_f\right)=0$ olduğundan karşıtlık koşulu

$$-H\left(t_f, x\left(t_f\right), u\left(t_f\right)\right)+\lambda\left(t_f\right)\left(x_{t_0}^{(\alpha)}\left(t_f\right)-\frac{x_{t_f}^{(\alpha)}\left(t_f\right)}{\alpha}\right)=0 \tag{4.57}$$

olarak elde edilir.

iii. **Düşey Bitiş Doğrusu (Sabit zaman) Problemi:** t_f sabit ve $x\left(t_f\right)$ sabit olmayan ise $\gamma_{t_f}^{(\alpha)}\left(t_f\right)$, x eksenine dik ve eğitimi sonsuz olan bir doğrudur. $\gamma_{t_f}^{(\alpha)}\left(t_f\right)\neq 0$ olduğundan (4.56) eşitliği $\gamma_{t_f}^{(\alpha)}\left(t_f\right)$ fonksiyonuna bölünür ve $\gamma_{t_f}^{(\alpha)}\left(t_f\right)$ fonksiyonu sonsuz olduğundan karşıtlık koşulu,

$$\frac{\lambda\left(t_f\right)}{\alpha}=0 \tag{4.58}$$

olarak elde edilir.

4.1.1.2 Örnek: t_f sabit olmayan bitiş noktası, $x\left(t_f\right)=1$ olsun. Performans indeksi

$$J(u)=\frac{1}{2}\int_0^{t_f}\left[x^2(t)+u^2(t)\right]d_0^{\alpha}t, \tag{4.59}$$

dinamik kısıtı

$$x_0^{(\alpha)}(t) = -x(t) + u(t), \tag{4.60}$$

ve sınır koşulları

$$x(0) = 10, \quad x(t_f) = 1 \tag{4.61}$$

olan optimal kontrol problemini minimize eden $u(t)$ kontrol fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm: Problemi çözmek için öncelikle Hamilton fonksiyonu yazılır

$$H(t,x,u,\lambda) = -\frac{1}{2}\left[x^2(t) + u^2(t)\right] + \lambda(t)\left(-x(t) + u(t)\right). \tag{4.62}$$

(4.26) eşitliğindeki Hamilton fonksiyonu yardımıyla elde edilen optimallik için gerekli koşullar

$$\left.\begin{aligned} x_0^{(\alpha)}(t) &= -x(t) + u(t) \\ \lambda_0^{(\alpha)}(t) &= x(t) + \lambda(t) \\ u(t) &= \lambda(t) \end{aligned}\right\} \tag{4.63}$$

şeklindedir. (4.63) eşitliğindeki uyumlu diferansiyel denklemleri analitik yöntemle [28] çözüldüğünde,

$$x(t) = c_1 e^{\sqrt{2}\frac{t^\alpha}{\alpha}} + c_2 e^{-\sqrt{2}\frac{t^\alpha}{\alpha}} \tag{4.64}$$

olarak elde edilir. Başlangıç koşulları kullanıldığında, $x(0) = 10$ için $c_1 + c_2 = 10$ olur, ayrıca $x(t_f) = 1$ için

$$x(t_f) = c_1 e^{\sqrt{2}\frac{t_f^\alpha}{\alpha}} + (10 - c_1) e^{-\sqrt{2}\frac{t_f^\alpha}{\alpha}} = 1 \tag{4.65}$$

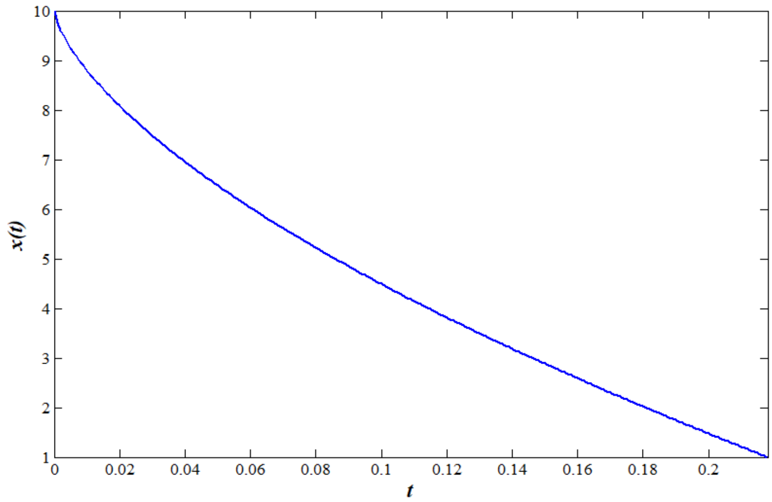
bulunur. (4.63) eşitliğinden $u(t)$ kontrol fonksiyonu, $x(t)$ durum fonksiyonuna bağlı olduğundan

$$u(t)=\left(1+\sqrt{2}\right)\left(10-c_1\right)e^{\sqrt{2}\frac{t^{\alpha}}{\alpha}}+\left(1-\sqrt{2}\right)c_1e^{-\sqrt{2}\frac{t^{\alpha}}{\alpha}} \tag{4.66}$$

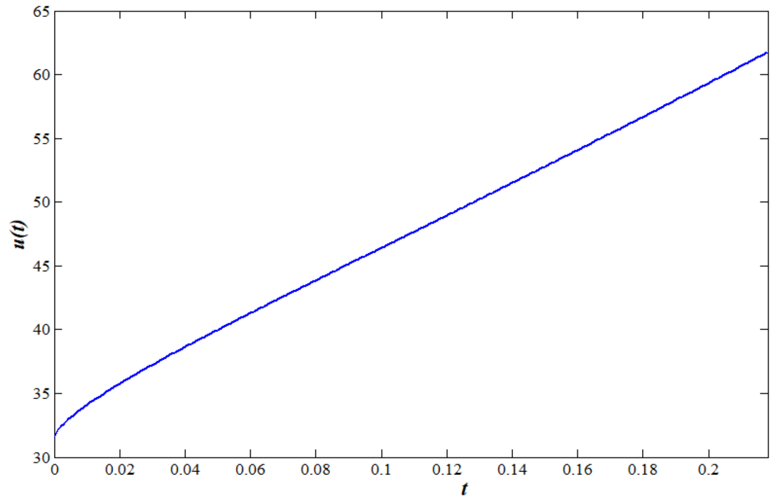
olarak elde edilir. Ancak bu katsayılar t_f değeri bilinmediğinden dolayı çözülememektedir. Bu yüzden optimallik için gerekli koşullara ek olarak karşıtlık koşuluna ihtiyaç duyulmaktadır. (4.57) eşitliğindeki uyumlu türevli optimal kontrol için karşıtlık koşulu kullanılırsa,

$$x^2\left(t_f\right)+u^2\left(t_f\right)-2u\left(t_f\right)\frac{x_{t_f}^{(\alpha)}\left(t_f\right)}{\alpha}=0 \tag{4.67}$$

eşitliği elde edilir. (4.65) ve (4.67) eşitlikleri, $\alpha=0.7$ için MATLAB programında sembolik araç kutusu kullanılarak çözülmüş ve çözümler $t_f=0.2181$, $c_1=-2.6457$, $c_2=12.6457$ olarak elde edilmiştir. Durum ve kontrol fonksiyonları MATLAB programı yardımıyla şekil 4.2 ve şekil 4.3'te çizdirilmiştir.



Şekil 4.2: Yatay bitiş doğrusu probleminde $x(t)$ optimal durum fonksiyonu.



Şekil 4.3: Yatay bitiş doğrusu probleminde $u(t)$ optimal kontrol fonksiyonu.

Biswas ve Sen [93] tarafından Riemann–Liouville anlamında ele alınan optimal kontrol problemi uyumlu türev ile değerlendirildiğinde durum fonksiyonunun istenen değere daha hızlı bir şekilde ulaştığı görülmektedir.

4.2 Genelleştirilmiş Uyumlu Türevli Optimal Kontrol Problemi için Karşıtlık Koşulu

Bu kısımda performans indeksi klasik integral ile tanımlanmış, integralinde uyumlu türevli terim içeren genelleştirilmiş uyumlu türevli optimal kontrol problemleri için karşıtlık koşulları elde edilecektir.

Genelleştirilmiş karşıtlık koşulunu elde etmek için gerekli optimallik koşullarının bilinmesi gerekir. Bu koşullar incelendiğinde uyumlu integral ile tanımlanan optimal kontrol probleminin gerekli optimallik koşulları ile aynı olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Bu yüzden ispatına burada değinilmeyecektir.

4.2.1 Teorem (Uyumlu türevli optimal kontrol için genelleştirilmiş karşıtlık koşulu): J minimize edilecek performans indeks, $g\left(t,x(t),u(t)\right)$ uyumlu türevli dinamik sistem, t_0 ve $x(t_0)=x_{t_0}$ sabit noktalar t_f ve $x\left(t_f\right)=x_{t_f}$ sabit olmayan noktalar olsun.

$$J(x,u)=\int_{t_0}^{t_f} F\left(t,x(t),u(t)\right)dt \tag{4.68}$$

$$x_{t_0}^{(\alpha)}(t)=g\left(t,x(t),u(t)\right) \tag{4.69}$$

şeklindeki genelleştirilmiş uyumlu türevli optimal kontrol sistemin için genel durumdaki karşıtlık koşulu

$$\left[-H\left(t_f,x\left(t_f\right),u\left(t_f\right)\right)+\lambda\left(t_f\right)x_{t_0}^{(\alpha)}\left(t_f\right)\right]\Delta\tau+\left(t_f-t_0\right)^{1-\alpha}\lambda\left(t_f\right)\eta\left(t_f\right)=0 \tag{4.70}$$

şeklindedir. Burada $\eta\in C^{\alpha}\left(\left[t_0,t_f\right]\times\mathbb{R}^2\right)$ ve $\Delta\tau$ sırasıyla, $x(t)$ ve t zayıf değişimleri için keyfi fonksiyonlardır.

İspat: J performans indeksini minimize eden $x^*(t)$ eğrisinin $\gamma(t)$ hedef eğrisiyle $t_f=t_f^*$ noktasında kesiştiğini varsayalım $\left(x^*\left(t_f^*\right)=\gamma\left(t_f^*\right)\right)$. $x^*(t)$, $x_{t_0}^{*(\alpha)}(t)$, $u^*(t)$ ve $\lambda^*(t)$ fonksiyonları ekstremum fonksiyonları olsunlar. $\eta(t)$, $\eta_{t_0}^{(\alpha)}(t)$, $\zeta(t)$ ve $\Lambda(t)$ keyfi fonksiyonlar ve $|\varepsilon|\ll 1$ olmak üzere, $x(t)$, $x_{t_0}^{(\alpha)}(t)$, $u(t)$ ve $\lambda(t)$ fonksiyonları ve t_f zaman değişkeni için zayıf değişimler sırasıyla,

$$x(t)=x^*(t)+\varepsilon\eta(t) \tag{4.71}$$

$$x_{t_0}^{(\alpha)}(t)=x_{t_0}^{*(\alpha)}(t)+\varepsilon\eta_{t_0}^{(\alpha)}(t) \tag{4.72}$$

$$u(t) = u^*(t) + \varepsilon\zeta(t) \tag{4.73}$$

$$\lambda(t) = \lambda^*(t) + \varepsilon\Lambda(t) \tag{4.74}$$

$$t_f = t_f^* + \varepsilon\Delta\tau \tag{4.75}$$

şeklinde ifade edilsin. Özel olarak $\eta_{t_0}^{(\alpha)}(t)$, $\alpha-$diferansiyellenebilir keyfi bir fonksiyondur, ayrıca $\eta(t_0) = 0$ ve t_f sabit olmayan nokta olduğundan $\eta(t_f) \neq 0$ olur.

Bu kısımda (4.68)–(4.69) eşitlikleri ile verilen problemin genelleştirilmiş karşıtlık koşulu, Hamilton formulasyonu ve Lagrange çarpanı teknikleri kullanılarak değişim ile elde edilecektir. Lagrange çarpanı tekniğinde performans indeksin fonksiyoneli şu şekilde tanımlanır:

$$I(x,u,\lambda) = \int_{t_0}^{t_f} F\left(t, x(t), u(t)\right) + \lambda(t)\left(x_{t_0}^{(\alpha)}(t) - g\left(t, x(t), u(t)\right)\right) dt \tag{4.76}$$

(4.76) eşitliğindeki integral parçalanırsa

$$I(x,u,\lambda) = \int_{t_0}^{t_f} F\left(t, x(t), u(t)\right) dt + \int_{t_0}^{t_f} \lambda(t)\left(x_{t_0}^{(\alpha)}(t) - g\left(t, x(t), u(t)\right)\right) dt \tag{4.77}$$

elde edilir. (4.77) eşitliğini minimize eden durum ve kontrol fonksiyonlarını bulmak için performans indekslerin değişimleri incelenmelidir. Hesaplamalarda kolaylık olması bakımından bu iki integralin değişimi ayrı ayrı incelenecektir. Yine İlk integral J ile, ikinci integrali ise Φ ile adlandırılacaktır. J nin değişimi ΔJ ve Φ nin değişimi $\Delta\Phi$ sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left(F\left(t, x(t), u(t)\right) - F\left(t, x^*(t), u^*(t)\right)\right) dt, \tag{4.78}$$

$$\Delta \Phi = \int_{t_0}^{t_f} \left(\lambda(t)\left(x_{t_0}^{(\alpha)}(t) - g\left(t, x(t), u(t)\right)\right) - \lambda^*(t)\left(x_{t_0}^{*(\alpha)}(t) - g\left(t, x^*(t), u^*(t)\right)\right)\right) dt. \tag{4.79}$$

Durum, kontrol ve yardımcı durum değişkeni fonksiyonları için ele alınan zayıf değişimler (4.78) ve (4.79) fonksiyonellerinde yazıldığında

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_f^* + \varepsilon \Delta \tau} F\left(t, x^*(t) + \varepsilon \eta(t), u^*(t) + \varepsilon \zeta(t) - F\left(t, x^*(t), u^*(t)\right)\right) dt \tag{4.80}$$

$$\begin{aligned} \Delta \Phi = & \int_{t_0}^{t_f^* + \varepsilon \Delta \tau} \left(\lambda^*(t) + \varepsilon \Lambda(t)\right)\left(x_{t_0}^{*(\alpha)}(t) + \varepsilon \eta_{t_0}^{(\alpha)}(t)\right) dt \\ & - \int_{t_0}^{t_f^* + \varepsilon \Delta \tau} \left(\lambda^*(t) + \varepsilon \Lambda(t)\right) g\left(t, x^*(t) + \varepsilon \eta(t), u^*(t) + \varepsilon \zeta(t)\right) dt \\ & - \int_{t_0}^{t_f^* + \varepsilon \Delta \tau} \lambda^*(t)\left(x_{t_0}^{*(\alpha)}(t) - g\left(t, x^*(t), u^*(t)\right)\right) dt \end{aligned} \tag{4.81}$$

elde edilir. (4.80) ve (4.81) eşitliğindeki değişimlerde integrallerin sınır değerleri zaman değişkenindeki değişime göre düzenlenirse aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\begin{aligned} \Delta J = & \int_{t_f^*}^{t_f^* + \varepsilon \Delta \tau} F\left(t, x^*(t) + \varepsilon \eta(t), u^*(t) + \varepsilon \zeta(t)\right) dt \\ & + \int_{t_0}^{t_f^*} \left(F\left(t, x^*(t) + \varepsilon \eta(t), u^*(t) + \varepsilon \zeta(t)\right) - F\left(t, x^*(t), u^*(t)\right)\right) dt, \end{aligned} \tag{4.82}$$

$$
\begin{aligned}
\Delta\Phi = &\int_{t_f^*}^{t_f^*+\varepsilon\Delta\tau} \left(\lambda^*(t)+\varepsilon\Lambda(t)\right)\left(x_{t_0}^{*(\alpha)}(t)+\varepsilon\eta_{t_0}^{(\alpha)}(t)\right)dt \\
&-\int_{t_f^*}^{t_f^*+\varepsilon\Delta\tau} \left(\lambda^*(t)+\varepsilon\Lambda(t)\right)\left(g\left(t,x^*(t)+\varepsilon\eta(t),u^*(t)+\varepsilon\zeta(t)\right)\right)dt \\
&+\int_{t_0}^{t_f^*}\left(\lambda^*(t)+\varepsilon\Lambda(t)\right)\left(x_{t_0}^{*(\alpha)}(t)+\varepsilon\eta_{t_0}^{(\alpha)}(t)\right)dt \\
&-\int_{t_0}^{t_f^*}\left(\lambda^*(t)+\varepsilon\Lambda(t)\right)\left(g\left(t,x^*(t)+\varepsilon\eta(t),u^*(t)+\varepsilon^{\alpha}\zeta(t)\right)\right)dt \\
&-\int_{t_0}^{t_f^*}\lambda^*(t)\left(x_{t_0}^{*(\alpha)}(t)-g\left(t,x^*(t),u^*(t)\right)\right)dt.
\end{aligned} \tag{4.83}
$$

(4.82) ve (4.83) eşitliklerindeki değişimleri bulmak için $F\left(t,x(t),u(t)\right)$ ve $g\left(t,x(t),u(t)\right)$ fonksiyonlarının $t\in\left[t_0,\mathrm{t}_f\right]$ için $\left(x^*,u^*\right)$ noktası civarındaki $\left(\varepsilon\eta,\varepsilon\zeta\right)$ değişkenlerine göre Taylor seri açılımı yapılırsa,

$$
\begin{aligned}
\Delta J = &\int_{t_f^*}^{t_f^*+\varepsilon\Delta\tau}\left(F\left(t,x^*(t),u^*(t)\right)+\frac{\partial F}{\partial x}\varepsilon\eta(t)+\frac{\partial F}{\partial u}\varepsilon\zeta(t)\right)dt \\
&+\int_{t_0}^{t_f^*}\left(F\left(t,x^*(t),u^*(t)\right)+\frac{\partial F}{\partial x}\varepsilon\eta(t)+\frac{\partial F}{\partial u}\varepsilon\zeta(t)-F\left(t,x^*(t),u^*(t)\right)\right)dt \\
&+O\left(\varepsilon^2\right)
\end{aligned} \tag{4.84}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta\Phi = &\int_{t_f^*}^{t_f^*+\varepsilon\Delta\tau}\left(\lambda^*(t)+\varepsilon\Lambda(t)\right)\left(x_{t_0}^{*(\alpha)}(t)+\varepsilon\eta_{t_0}^{(\alpha)}(t)\right)dt \\
&-\int_{t_f^*}^{t_f^*+\varepsilon\Delta\tau}\left(\lambda^*(t)+\varepsilon\Lambda(t)\right)\left(g\left(t,x^*(t),u^*(t)\right)+\frac{\partial g}{\partial x}\varepsilon\eta(t)+\frac{\partial g}{\partial u}\varepsilon\zeta(t)\right)dt \\
&+\int_{t_0}^{t_f^*}\left(\lambda^*(t)+\varepsilon\Lambda(t)\right)\left(x_{t_0}^{*(\alpha)}(t)+\varepsilon\eta_{t_0}^{(\alpha)}(t)\right)dt \\
&-\int_{t_0}^{t_f^*}\left(\lambda^*(t)+\varepsilon\Lambda(t)\right)\left(g\left(t,x^*(t),u^*(t)\right)+\frac{\partial g}{\partial x}\varepsilon\eta(t)+\frac{\partial g}{\partial u}\varepsilon\zeta(t)\right)dt \\
&-\int_{t_0}^{t_f^*}\lambda^*(t)\left(\left(x_{t_0}^{*(\alpha)}(t)-g\left(t,x^*(t),u^*(t)\right)\right)\right)dt+O\left(\varepsilon^2\right)
\end{aligned} \tag{4.85}
$$

bulunur. (4.84) ve (4.85) integrallerindeki ilk integralleri yaklaşık olarak hesaplamak için dikdörtgen yöntemi kullanılırsa aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$\Delta J = F\left(t_f^*, x^*\left(t_f^*\right), u^*\left(t_f^*\right)\right)\varepsilon\Delta\tau + \int_{t_0}^{t_f^*}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\varepsilon\eta(t) + \frac{\partial F}{\partial u}\varepsilon\zeta(t)\right)dt + O\left(\varepsilon^2\right), \quad (4.86)$$

$$\begin{aligned}\Delta\Phi = {} & \lambda^*\left(t_f^*\right)\left(x_{t_0}^{*(\alpha)}\left(t_f^*\right) - g\left(t_f^*, x^*\left(t_f^*\right), u^*\left(t_f^*\right)\right)\right)\varepsilon\Delta\tau \\ & + \int_{t_0}^{t_f^*}\lambda^*(t)\left(\varepsilon\eta_{t_0}^{(\alpha)}(t) - \frac{\partial g}{\partial x}\varepsilon\eta(t) - \frac{\partial g}{\partial u}\varepsilon\zeta(t)\right)dt \\ & + \int_{t_0}^{t_f^*}\varepsilon\Lambda(t)\left(x_{t_0}^{*(\alpha)}(t) - g\left(t, x^*(t), u^*(t)\right)\right)dt + O\left(\varepsilon^2\right).\end{aligned} \quad (4.87)$$

Sonuç olarak (4.86) ve (4.87) eşitliklerindeki ilk değişimler sırasıyla

$$\delta J = F\left(t_f^*, x^*\left(t_f^*\right), u^*\left(t_f^*\right)\right)\Delta\tau + \int_{t_0}^{t_f^*}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\eta(t) + \frac{\partial F}{\partial u}\zeta(t)\right)dt = 0, \quad (4.88)$$

$$\begin{aligned}\delta\Phi = {} & \lambda^*\left(t_f^*\right)\left(x_{t_0}^{*(\alpha)}\left(t_f^*\right) - g\left(t, x^*\left(t_f^*\right), u^*\left(t_f^*\right)\right)\right)\Delta\tau \\ & + \int_{t_0}^{t_f^*}\lambda^*(t)\left(\eta_{t_0}^{(\alpha)}(t) - \frac{\partial g}{\partial x}\eta(t) - \frac{\partial g}{\partial u}\zeta(t)\right)dt \\ & + \int_{t_0}^{t_f^*}\Lambda(t)\left(x_{t_0}^{*(\alpha)}(t) - g\left(t, x^*(t), u^*(t)\right)\right)dt = 0\end{aligned} \quad (4.89)$$

olarak bulunur. (4.89) eşitliğindeki uyumlu türevli terim içeren $\int_{t_0}^{t_f^*}\lambda^*(t)\eta_{t_0}^{(\alpha)}(t)dt$ integralini hesaplamak için uyumlu kısmi integrasyon formülünün kullanılması gerektiği açıktır. Bunun için

$$\tilde{\lambda}^*(t) = \left(t - t_0\right)^{1-\alpha}\lambda^*(t) \quad (4.90)$$

dönüşümü uygulanıp uyumlu kısmi integrasyon formülü (2.68) kullanılırsa,

$$\int_{t_0}^{t_f^*} \lambda^*(t)\eta_{t_0}^{(\alpha)}(t)\,dt = \int_{t_0}^{t_f^*} \tilde{\lambda}^*(t)\eta_{t_0}^{(\alpha)}(t)\,d_{t_0}^{\alpha}t = \tilde{\lambda}^*(t)\eta(t)\Big|_{t_0}^{t_f^*} - \int_{t_0}^{t_f^*} \tilde{\lambda}_{t_0}^{*(\alpha)}(t)\eta(t)\,d_{t_0}^{\alpha}t \quad (4.91)$$

elde edilir. $\eta(t_0)=0$ olduğundan

$$\int_{t_0}^{t_f^*} \lambda^*(t)\eta_{t_0}^{(\alpha)}(t)\,dt = \tilde{\lambda}^*(t_f^*)\eta(t_f^*) - \int_{t_0}^{t_f^*} \tilde{\lambda}_{t_0}^{*(\alpha)}(t)\eta(t)\,d_{t_0}^{\alpha}t \qquad (4.92)$$

olarak bulunur. (4.92) eşitliği (4.89) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\delta\Phi &= \lambda^*(t_f^*)\left(x_{t_0}^{*(\alpha)}(t_f^*) - g\left(t, x^*(t_f^*), u^*(t_f^*)\right)\right)\Delta\tau \\
&+ \int_{t_0}^{t_f^*} \left(\eta(t)\left(-\tilde{\lambda}^*(t)\frac{\partial g}{\partial x} - \tilde{\lambda}_{t_0}^{*(\alpha)}(t)\right) - \zeta(t)\left(\tilde{\lambda}^*(t)\frac{\partial g}{\partial u}\right)\right) d_{t_0}^{\alpha}t \qquad (4.93) \\
&+ \int_{t_0}^{t_f^*} \Lambda(t)\left(x_{t_0}^{*(\alpha)}(t) - g\left(t, x^*(t), u^*(t)\right)\right)(t-t_0)^{1-\alpha}\, d_{t_0}^{\alpha}t + \tilde{\lambda}^*(t_f^*)\eta(t_f^*) = 0
\end{aligned}$$

olur. Varsayım gereği δJ ve $\delta\Phi$ toplam şeklinde olduğundan (4.88) eşitliğindeki integral de uyumlu integrale dönüştürülür,

$$\delta J = F\left(t_f^*, x^*(t_f^*), u^*(t_f^*)\right)\Delta\tau + \int_{t_0}^{t_f^*} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\eta(t) + \frac{\partial F}{\partial u}\zeta(t)\right)(t-t_0)^{1-\alpha}\, d_{t_0}^{\alpha}t = 0. \quad (4.94)$$

(4.93) ve (4.94) eşitlikleri toplanıp $\eta(t)$, $\zeta(t)$ ve $\Lambda(t)$ keyfi fonksiyonlarına göre düzenlenirse ilk değişimler

$$\begin{aligned}\delta J+\delta\Phi=&\left[-H\left(t_f^*,x^*\left(t_f^*\right),u^*\left(t_f^*\right)\right)+\lambda^*\left(t_f^*\right)x_{t_0}^{(\alpha)}\left(t_f^*\right)\right]\Delta\tau\\&+\int_{t_0}^{t_f^*}\left(\eta(t)\left(-(t-t_0)^{1-\alpha}\frac{\partial H}{\partial x}-\tilde{\lambda}_{t_0}^{*(\alpha)}(t)\right)\right)d_{t_0}^{\alpha}t\\&+\int_{t_0}^{t_f^*}\zeta(t)\left(-(t-t_0)^{1-\alpha}\frac{\partial H}{\partial u}\right)d_{t_0}^{\alpha}t\\&+\int_{t_0}^{t_f^*}\Lambda(t)\left(x_{t_0}^{*(\alpha)}(t)-g\left(t,x^*(t),u^*(t)\right)\right)(t-t_0)^{1-\alpha}\,d_{t_0}^{\alpha}t+\tilde{\lambda}^*\left(t_f^*\right)\eta\left(t_f^*\right)\\&=0\end{aligned}\tag{4.95}$$

olarak bulunur. (4.95) eşitliğinde uyumlu integral içerisindeki $(t-t_0)^{1-\alpha}$ terimleri sıfırdan farklı ve integral içerisindeki terimler optimallik için gerekli koşullar olduğundan her bir bileşenin bağımsız olarak sıfıra eşit olması gerekmektedir. Bu yüzden (4.95) eşitliği

$$\left(-H\left(t_f^*,x^*\left(t_f^*\right),u^*\left(t_f^*\right)\right)+\lambda^*\left(t_f^*\right)x_{t_0}^{(\alpha)}\left(t_f^*\right)\right)\Delta\tau+\tilde{\lambda}^*\left(t_f^*\right)\eta\left(t_f^*\right)=0\tag{4.96}$$

formuna dönüşür. (4.90) eşitliği (4.96) eşitliğinde yerine yazılırsa genelleştirilmiş uyumlu türevli optimal kontrol problemi için genel durumdaki karşıtlık koşulu

$$\left(-H\left(t_f^*,x^*\left(t_f^*\right),u^*\left(t_f^*\right)\right)+\lambda^*\left(t_f^*\right)x_{t_0}^{(\alpha)}\left(t_f^*\right)\right)\Delta\tau+\left(t_f^*-t_0\right)^{1-\alpha}\lambda^*\left(t_f^*\right)\eta\left(t_f^*\right)=0\tag{4.97}$$

elde edilir. □

4.2.1 Özel Durumlardaki Genelleştirilmiş Uyumlu Türevli Optimal Kontrol Problemleri İçin Karşıtlık Koşulları

Bu bölümde (4.97) eşitliği ile verilen genelleştirilmiş uyumlu türevli optimal kontrol problemi için genel durumdaki karşıtlık koşulunun özel durumları 4.1.1 Bölümündekine benzer şekilde yapılacaktır. Genel durumdaki genelleştirilmiş karşıtlık koşulu bitiş eğrisi üzerindedir ve özel durumları düşey bitiş doğrusu, yatay bitiş doğrusu şeklindedir.

Uyumlu türeve bağlı terim içeren klasik integral ile tanımlanan optimal kontrol problemi için elde edilen (4.97) eşitliğindeki genelleştirilmiş karşıtlık koşulunda $\eta\left(t_f\right)$ keyfi fonksiyonu ve $\Delta\tau$ artışının değeri bilinmemektedir. Bu keyfi fonksiyonun değeri daha önce Taylor seri açılımı yardımıyla 3.2.1. Bölümünde (3.98) eşitliğinde elde edilmiştir. (3.98) eşitliğindeki $\eta\left(t_f^*\right)$ keyfi fonksiyonu (4.97) eşitliğinde yerine yazılıp $\Delta\tau$ keyfi fonksiyona göre düzenlenirse

$$\begin{aligned}&\Big(-H\left(t_f^*,x^*\left(t_f^*\right),u^*\left(t_f^*\right)\right)+\lambda^*\left(t_f^*\right)x_{t_0}^{(\alpha)}\left(t_f^*\right)\\&+\left(t_f^*-t_0\right)^{1-\alpha}\lambda^*\left(t_f^*\right)\left(\dot{\gamma}\left(t_f^*\right)-\dot{x}^*\left(t_f^*\right)\right)\Big)\Delta\tau=0\end{aligned} \tag{4.98}$$

olur. Burada $\Delta\tau$ sıfırdan farklı bir artış olduğundan parantez içerisindeki ifade sıfıra eşittir. O halde genelleştirilmiş uyumlu türevli optimal kontrol problemi için genel durumdaki karşıtlık koşulu

$$\begin{aligned}&-H\left(t_f^*,x^*\left(t_f^*\right),u^*\left(t_f^*\right)\right)+\lambda^*\left(t_f^*\right)x_{t_0}^{(\alpha)}\left(t_f^*\right)\\&+\left(t_f^*-t_0\right)^{1-\alpha}\lambda^*\left(t_f^*\right)\left(\dot{\gamma}\left(t_f^*\right)-\dot{x}^*\left(t_f^*\right)\right)=0\end{aligned} \tag{4.99}$$

şeklinde elde edilir.

4.2.1.1 Sonuç: (4.99) eşitliği ile verilen uyumlu optimal kontrol problemi için genel durumdaki genelleştirilmiş karşıtlık koşulunun özel durumları aşağıdaki gibi incelenir.

***i.* Bitiş Eğrisi Problemi:** Eğer $x\left(t_f\right)$ bitiş noktası diferansiyellenebilir bir $x=\gamma\left(t\right)$ eğrisi üzerinde ise genelleştirilmiş karşıtlık koşulu

$$-H\left(t_f,x\left(t_f\right),u\left(t_f\right)\right)+\lambda\left(t_f\right)x_{t_0}^{(\alpha)}\left(t_f\right)+\left(t_f-t_0\right)^{1-\alpha}\lambda\left(t_f\right)\left(\dot{\gamma}\left(t_f\right)-\dot{x}\left(t_f\right)\right)=0 \tag{4.100}$$

olur. (4.100) eşitliği genelleştirilmiş uyumlu türevli optimal kontrol problemi için genel durumdaki karşıtlık koşuludur.

ii. **Yatay Bitiş Doğrusu (Sabit Bitiş Noktası) Problemi:** Eğer $x(t_f)$ sabit ve t_f sabit olmayan bir nokta ise c sabit bir sayı olmak üzere $x = \gamma(t_f) = c$ olur. Dolayısıyla $\dot{\gamma}(t_f) = 0$ olduğundan karşıtlık koşulu

$$-H\left(t_f, x(t_f), u(t_f)\right) + \lambda(t_f)\left(x_{t_0}^{(\alpha)}(t_f) - (t_f - t_0)^{1-\alpha}\,\dot{x}(t_f)\right) = 0 \qquad (4.101)$$

bulunur.

iii. **Düşey Bitiş Doğrusu (Sabit Zaman) Problemi:** t_f sabit ve $x(t_f)$ sabit olmayan ise $\dot{\gamma}(t_f)$, x eksenine dik ve eğimi sonsuz olan bir doğrudur. $\dot{\gamma}(t_f) \neq 0$ olduğundan (4.100) eşitliği $\dot{\gamma}(t_f)$ fonksiyonuna bölünür ve $\dot{\gamma}(t_f)$ fonksiyonu sonsuz olduğundan karşıtlık koşulu,

$$(t_f - t_0)^{1-\alpha}\,\lambda(t_f) = 0 \qquad (4.102)$$

olur. (4.102) eşitliği genelleştirilmiş uyumlu türevli optimal kontrol problemi için doğal sınır koşulu olarak adlandırılır.

4.2.1.2 Örnek: t_f sabit olmayan bitiş noktası, $x(t_f) = 1$ olsun. Performans indeksi

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^{t_f}\left[x^2(t) + u^2(t)\right]dt, \qquad (4.103)$$

dinamik kısıtı

$$x_0^{(\alpha)}(t) = -x(t) + u(t), \tag{4.104}$$

ve sınır koşulları

$$x(0) = 10, \quad x(t_f) = 1 \tag{4.105}$$

olan optimal kontrol problemini minimize eden $u(t)$ kontrol fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm: Problemi çözmek için öncelikle Hamilton fonksiyonunu yazılır

$$H(t,x,u,\lambda) = -\frac{1}{2}\left[x^2(t) + u^2(t)\right] + \lambda(t)\left(-x(t) + u(t)\right). \tag{4.106}$$

(4.26) eşitliğindeki Hamilton fonksiyonu yardımıyla elde edilen optimallik için gerekli koşul kullanıldığında

$$\left.\begin{aligned} x_0^{(\alpha)}(t) &= -x(t) + u(t) \\ \lambda_0^{(\alpha)}(t) &= x(t) + \lambda(t) \\ u(t) &= \lambda(t) \end{aligned}\right\} \tag{4.107}$$

elde edilir. (4.107) eşitliğindeki uyumlu diferansiyel denklemler analitik yöntemle çözüldüğünde [28],

$$x(t) = c_1 e^{\sqrt{2}\frac{t^\alpha}{\alpha}} + c_2 e^{-\sqrt{2}\frac{t^\alpha}{\alpha}} \tag{4.108}$$

olarak elde edilir Başlangıç koşulları kullanıldığında, $x(0) = 10$ için $c_1 + c_2 = 10$ olur, ayrıca $x(t_f) = 1$ için

$$x(t_f) = c_1 e^{\sqrt{2}\frac{t_f^\alpha}{\alpha}} + (10 - c_1) e^{-\sqrt{2}\frac{t_f^\alpha}{\alpha}} = 1 \tag{4.109}$$

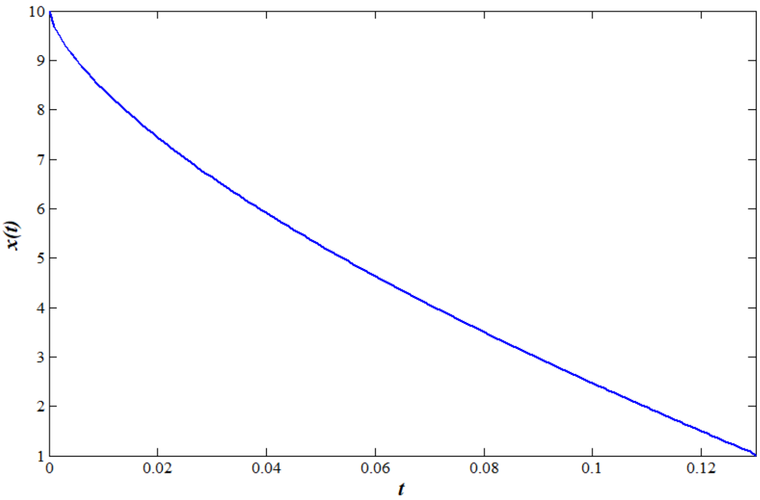
bulunur. (4.107) eşitliğinden $u(t)$ kontrol fonksiyonu, $x(t)$ durum fonksiyonuna bağlı olduğundan

$$u(t)=\left(1+\sqrt{2}\right)\left(10-c_1\right)e^{\sqrt{2}\frac{t^{\alpha}}{\alpha}}+\left(1-\sqrt{2}\right)c_1 e^{-\sqrt{2}\frac{t^{\alpha}}{\alpha}} \tag{4.110}$$

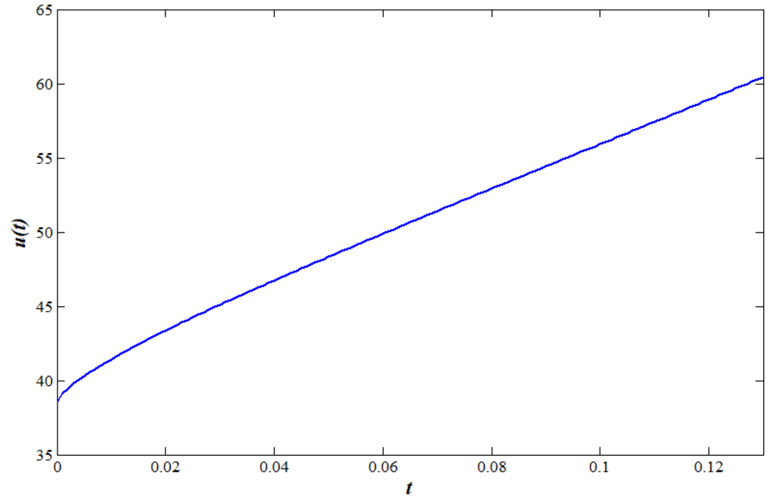
olarak elde edilir. Ancak bu katsayılar t_f değeri bilinmediğinden dolayı çözülememektedir. Bu yüzden optimallik için gerekli koşullara ek olarak karşıtlık koşuluna ihtiyaç duyulmaktadır. (4.101) eşitliğindeki genelleştirilmiş uyumlu türevli optimal kontrol probleminin karşıtlık koşulu kullanılırsa,

$$x^2\left(t_f\right)+u^2\left(t_f\right)-2u\left(t_f\right)t_f^{1-\alpha}\dot{x}\left(t_f\right)=0 \tag{4.111}$$

eşitliği elde edilir. Bu (4.109) ve (4.111) eşitlikleri, $\alpha=0.7$ için MATLAB programında sembolik araç kutusu kullanılarak çözülmüş ve çözümler $t_f=0.1307$, $c_1=-5.0903$, $c_2=15.0903$ olarak elde edilmiştir. Durum ve kontrol fonksiyonları MATLAB programı yardımıyla şekil 4.4 ve şekil 4.5'te çizdirilmiştir.



Şekil 4.4: Yatay bitiş doğrusu probleminde $x(t)$ optimal kontrol fonksiyonu.



Şekil 4.5: Yatay bitiş doğrusu probleminde $u(t)$ optimal kontrol fonksiyonu.

5. UYUMLU TÜREVLİ YAYILIM DENKLEMİNİN OPTİMAL KONTROLÜ

Bu bölümde, karşıtlık koşulunun bir uygulaması olarak, zamana göre uyumlu türev içeren yayılım sisteminin optimal kontrolü ele alınacaktır. Benzer problem Özdemir ve diğ. [43] tarafından Riemann–Liouville kesirli türevi ile için incelenmiş ve optimal kontrolü nümerik olarak elde edilmiştir. Burada ise uyumlu türev operatörünün avantajından dolayı optimal kontrol analitik olarak elde edilmektedir.

Dinamik kısıtları

$$x_0^{(\alpha)}(\zeta,\rho,t)=\left(\frac{\partial^2 x(\zeta,\rho,t)}{\partial\zeta^2}+\frac{\partial^2 u(\zeta,\rho,t)}{\partial\rho^2}\right)+u(\zeta,\rho,t) \tag{5.1}$$

başlangıç koşulu

$$x(\zeta,\rho,0)=1+\zeta+\rho \tag{5.2}$$

ve sınır koşulları

$$\frac{\partial x(0,\rho,t)}{\partial\zeta}=\frac{\partial x(L,\rho,t)}{\partial\zeta}=\frac{\partial x(\zeta,0,t)}{\partial\rho}=\frac{\partial x(\zeta,L,t)}{\partial\rho}=0 \tag{5.3}$$

şeklinde tanımlanan yayılım sürecinin

$$J(u)=\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^L\int_0^L\left[x^2(\zeta,\rho,t)+u^2(\zeta,\rho,t)\right]d\zeta\, d\rho\, d_0^{\alpha}t \tag{5.4}$$

performans indeksini minimize eden optimal kontrol problemi tanımlansın. Burada $x(\zeta,\rho,t)$ durum ve $u(\zeta,\rho,t)$ kontrol fonksiyonları t zaman değişkeni ve

$(\zeta,\rho)\in[0,\mathrm{L}]\times[0,\mathrm{L}]$ uzay parametrelerine bağlıdır. Ayrıca $0<\alpha\leq 1$ için $x_0^{(\alpha)}(\zeta,\rho,t)$ fonksiyonu, $x(\zeta,\rho,t)$ durum fonksiyonunun t zaman değişkenine göre uyumlu türevini ifade etmektedir.

Optimal kontrol fonksiyonunu belirlemek için öncelikle (5.1)–(5.3) eşitlikleriyle verilen sınır değer probleminin çözümü belirlenmelidir. Bunun için değişkenlerine ayırma yöntemi uygulanabilir. Bu yöntemde $x(t)$ durum fonksiyonu aşağıdaki şekilde değişkenlere ayrılır.

$$x(\zeta,\rho,t)=\mathrm{Z}(\zeta)\mathrm{N}(\rho)\mathrm{T}(t) \tag{5.5}$$

(5.5) eşitliği (5.1) diferansiyel denkleminin homojen kısmında yerine yazılırsa,

$$\frac{T_0^{(\alpha)}(t)}{T(t)}=\frac{Z''(\zeta)}{Z(\zeta)}+\frac{N''(\rho)}{N(\rho)} \tag{5.6}$$

elde edilir. k ayırma sabiti olmak üzere (5.6) eşitliği

$$\frac{T_0^{(\alpha)}(t)}{T(t)}=\frac{Z''(\zeta)}{Z(\zeta)}+\frac{N''(\rho)}{N(\rho)}=-\mu^2 \tag{5.7}$$

olarak yazılır. Öncelikle (5.7) eşitliğinin

$$\frac{Z''}{Z}+\frac{N''}{N}=-\mu^2 \tag{5.8}$$

kısmının çözümünü belirlemek için

$$\frac{Z''}{Z}=-\frac{N''}{N}-\mu^2=-\nu^2 \tag{5.9}$$

düzenlemesi yapılsın. (5.9) diferansiyel denklemi Z fonksiyonu için değerlendirildiğinde

$$Z(\zeta) = b_1 \cos(\nu\zeta) + b_2 \sin(\nu\zeta) \tag{5.10}$$

çözümü bulunur. (5.10) eşitliğindeki $Z(\zeta)$ fonksiyonunun (5.3) sınır koşullarını sağlaması için

$$Z'(0) = b_2 = 0 \quad \text{ve} \quad Z'(L) = b_1 \sin(\nu L) = 0 \tag{5.11}$$

bulunur. Buradan öz değerlerin $\nu_m = \dfrac{m\pi}{L}$ $(m = 0,1,2,...)$ ve bunlara karşılık gelen öz fonksiyonların

$$Z_m(\zeta) = b_m \cos\left(\frac{m\pi\zeta}{L}\right) \tag{5.12}$$

olması gerekir. Benzer şekilde $\kappa^2 = \mu^2 - \nu^2$ olmak üzere (5.9) diferansiyel denklemi N fonksiyonu için değerlendirildiğinde

$$N(\rho) = c_1 \cos(\kappa\rho) + c_2 \sin(\kappa\rho) \tag{5.13}$$

çözümü bulunur. (5.13) eşitliğindeki $N(\rho)$ fonksiyonunun (5.3) sınır koşullarını sağlaması için

$$N'(0) = c_2 = 0 \quad \text{ve} \quad N'(L) = c_1 \sin(\kappa L) = 0 \tag{5.14}$$

bulunur. Buradan öz değerlerin $\kappa_n = \dfrac{n\pi}{L}$ $(n = 0,1,2,...)$ ve bunlara karşılık gelen öz fonksiyonların

$$N_n(\rho) = c_n \cos\left(\frac{n\pi\rho}{L}\right) \tag{5.15}$$

olması gerekir. Şimdi (5.7) eşitliğindeki uyumlu türeve bağlı

$$T_0^{(\alpha)}(t)+\mu^2 T(t)=0 \tag{5.16}$$

diferansiyel denklemi çözülecektir. (5.16) uyumlu lineer adi diferansiyel denkleminin karakteristik denklem yardımıyla çözümü

$$T(t)=ae^{-\mu^2\frac{t^\alpha}{\alpha}}=0 \tag{5.17}$$

şeklindedir [28]. $\kappa^2=\mu^2-\nu^2$ kabulünden

$$\mu^2=\frac{m^2\pi^2}{L^2}+\frac{n^2\pi^2}{L^2} \tag{5.18}$$

olduğu görülür. Böylece T fonksiyonu $m,n=0,1,2,...$

$$T_{mn}(t)=a_{mn}e^{-\left(\frac{m^2\pi^2}{L^2}+\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)\frac{t^\alpha}{\alpha}} \tag{5.19}$$

olarak elde edilir. Sonuç olarak (5.12), (5.15) ve (5.19) eşitlikleri (5.5) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$x_{mn}(\zeta,\rho,t)=a_{mn}b_m c_n\cos\left(\frac{m\pi\zeta}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi\rho}{L}\right)e^{-\left(\frac{m^2\pi^2}{L^2}+\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)\frac{t^\alpha}{\alpha}} \tag{5.20}$$

bulunur. (5.20) eşitliğinde $d_{mn}=a_{mn}b_m c_n$, $\phi_{mn}(\zeta,\rho)=\cos\left(\frac{m\pi\zeta}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi\rho}{L}\right)$ ve $x_{mn}(t)=d_{mn}e^{-\left(\frac{m^2\pi^2}{L^2}+\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)\frac{t^\alpha}{\alpha}}$ olarak işaretlenirse çözüm

$$x(\zeta,\rho,t)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}x_{mn}(t)\phi_{mn}(\zeta,\rho) \tag{5.21}$$

olarak belirlenir. Buradan hareketle kontrol fonksiyonu

$$u(\zeta,\rho,t)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}u_{mn}(t)\phi_{mn}(\zeta,\rho) \tag{5.22}$$

formunda kabul edilir. (5.21) ve (5.22) eşitliklerindeki $x_{mn}(t)$ ve $u_{mn}(t)$ ifadeleri sırasıyla durum ve kontrol öz koordinatları olarak adlandırılır. $u(\zeta,\rho,t)$ optimal kontrol fonksiyonunu belirlemek için (5.21) ve (5.22) eşitlikleri (5.4) performans indeksinde yerine yazılır. Kolaylık olması açısından m ve n indislerinin üst sınırı k olarak alınırsa

$$\begin{aligned}J=-\frac{L^2}{2}\int_0^1\Bigg(& x_{00}^2+\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{2}x_{m0}^2+\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{2}x_{0n}^2+\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{4}x_{mn}^2+u_{00}^2\\&+\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{2}u_{m0}^2+\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{2}u_{0n}^2+\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{4}u_{mn}^2\Bigg)d_0^{\alpha}t\end{aligned} \tag{5.23}$$

elde edilir. (5.21) eşitliği (5.2) başlangıç koşulunda yerine yazılır $\cos\left(\frac{m\pi\zeta}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi\rho}{L}\right)$ ile çarpılır ve ζ,ρ değişkenleri için 0 dan L ye integrali alınırsa,

$$x_{mn}(0)=\frac{1}{L^2}\begin{cases}L^2+L^3 & m=0,n=0\\ \dfrac{2L^3}{n^2\pi^2}\left(\cos(n\pi)-1\right) & m=0,n>0\\ \dfrac{2L^3}{m^2\pi^2}\left(\cos(m\pi)-1\right) & m>0,n=0\\ 0 & m>0,n>0\end{cases} \tag{5.24}$$

olarak bulunur. Ayrıca bulunan performans indeks ve dinamik sistem yardımıyla Hamilton fonksiyonu

$$H=-\frac{L^2}{2}\left(x_{00}^2+\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{2}x_{m0}^2+\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{2}x_{0n}^2+\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{4}x_{mn}^2+u_{00}^2+\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{2}u_{m0}^2+\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{2}u_{0n}^2\right.$$
$$\left.+\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{4}u_{mn}^2\right)+\lambda_{00}u_{00}+\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=1}^{k}\lambda_{mn}\left(-\left\{\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right\}x_{mn}(t)+u_{mn}(t)\right) \quad (5.25)$$

olarak elde edilir. Lazo ve Torres tarafından [36]' da verilen optimallik için gerekli koşullar yardımıyla durum, yardımcı durum değişkeni ve kontrol fonksiyonları

$$x_{mn}^{(\alpha)}(t)+\left\{\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right\}x_{mn}(t)-u_{mn}(t)=0 \quad (5.26)$$

$$\frac{L^2}{4}x_{mn}(t)+\left\{\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right\}\lambda_{mn}(t)-\lambda_{mn}^{(\alpha)}(t)=0 \quad (5.27)$$

$$\lambda_{mn}(t)-\frac{L^2}{4}u_{mn}(t)=0 \quad (5.28)$$

şeklinde bulunur. α mertebeden uyumlu lineer diferansiyel denklem sistemi belirten (5.26), (5.27) ve (5.28) eşitlikleri ortak çözülürse $m,n=0,1,2,...,\mathrm{k}$ için durum ve kontrol öz koordinatları

$$x_{mn}(t)=\left(\left\{\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right\}-r\right)\sigma_1^{mn}e^{-r\frac{t^\alpha}{\alpha}}+\left(\left\{\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right\}+r\right)\sigma_2^{mn}e^{r\frac{t^\alpha}{\alpha}} \quad (5.29)$$

$$u_{mn}(t)=\sigma_1^{mn}e^{-r\frac{t^\alpha}{\alpha}}+\sigma_2^{mn}e^{r\frac{t^\alpha}{\alpha}} \quad (5.30)$$

olarak elde edilir. Burada $\pm r$ karakteristik denkleminin kökleridir:

$$r=\sqrt{\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2+1}. \quad (5.31)$$

(5.29) ve (5.30) eşitliklerinden kontrol (5.21) ve durum (5.22) fonksiyonlarını elde etmek için öncelikle σ_1^{mn} ve σ_2^{mn} katsayılarının belirlenmesi gerekir. Bunun için başlangıç koşulu (5.2) ve $t_f = 1$ sabit ve $x(t_f)$ sabit olmadığı durumdaki karşıtlık koşulu (4.58) kullanılır. Böylece $\lambda(1) = 0$ ve (5.28) eşitliğinden $u(1) = 0$ olarak bulunur.

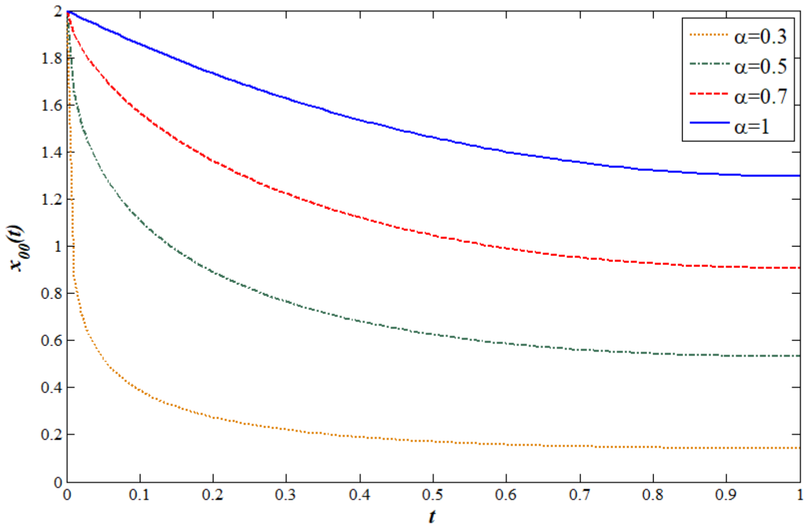
σ_1^{mn} ve σ_2^{mn} katsayılarının hesaplanma sürecini göstermek amacıyla örnek olarak $m,n = 0$ terimleri, $\alpha = 0.5$ ve $L = 1$ değerleri kabul edilmiştir. Böylece $r = 1$ olarak bulunur ve durum ile kontrol öz koordinatları

$$x_{00}(0) = -\sigma_1^{00} + \sigma_2^{00} = 2 \tag{5.32}$$

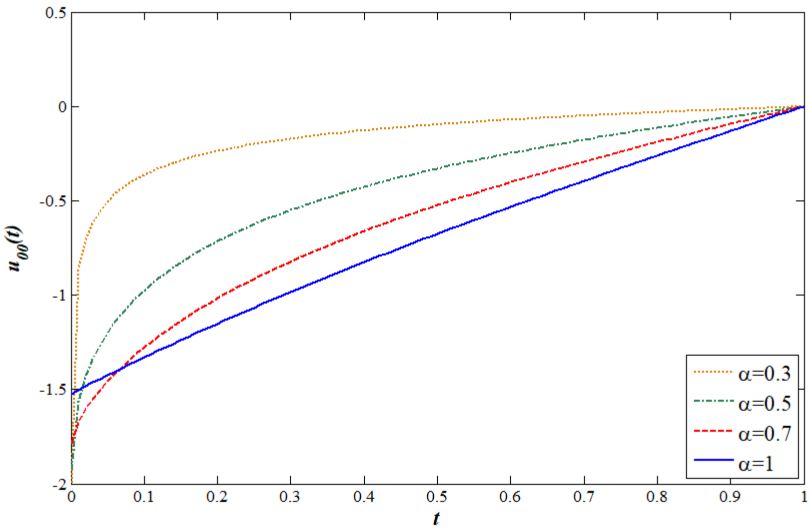
$$u_{00}(1) = \sigma_1^{00} e^{-2} + \sigma_2^{00} e^{2} = 0 \tag{5.33}$$

şeklinde elde edilir. (5.32) ve (5.33) eşitlikleri MATLAB programı yardımıyla çözüldüğünde, $\sigma_1^{00} = 1.9640$ ve $\sigma_2^{00} = 0.0360$ olarak bulunur. Bunun haricinde α nın farklı değerleri için katsayılar hesaplanarak tüm durumlar için kontrol ve durum öz koordinatları MATLAB programı yardımıyla ve de çizdirilmiştir.

Şekil 5.1 de görüldüğü üzere, α değerleri 1 den 0 a doğru azaltıldığında kontrol öz fonksiyonlarının katkısının azaldığı görülmektedir. $\alpha = 1$ yayılım ve $\alpha < 1$ değerleri ise alt yayılım süreçlerine karşılık gelmektedir. Kontrol öz koordinatlarının ise durum öz koordinatlarına paralel olarak katkısının arttığı gözlemlenmektedir.



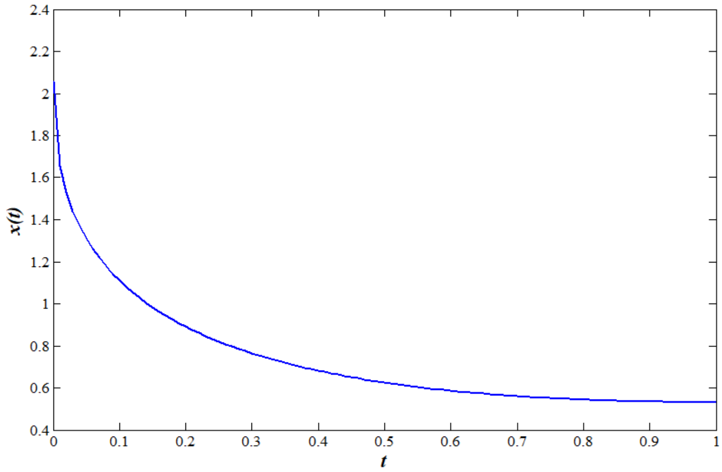
Şekil 5.1: Farklı α değerleri için $x_{00}(t)$ durum öz koordinatı.



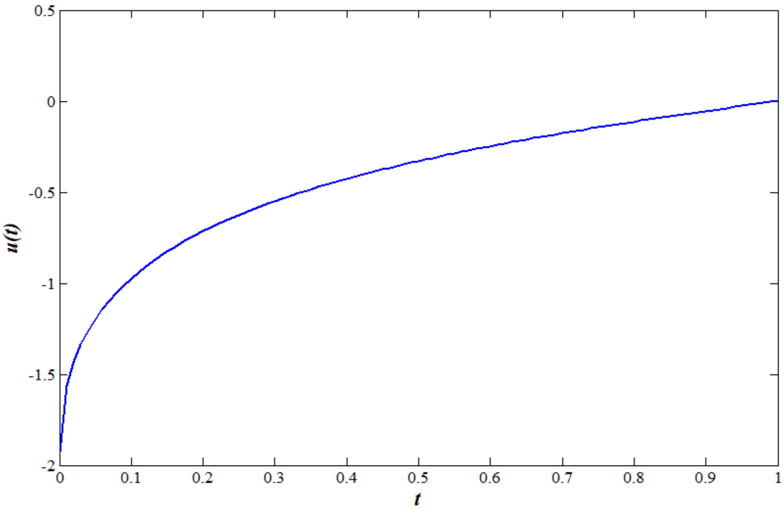
Şekil 5.2: Farklı α değerleri için $u_{00}(t)$ kontrol öz koordinatı.

Diğer durum ve kontrol öz koordinatları $(m,n=1,2,...,k)$ da benzer şekilde elde edilerek yerine yazıldığında optimal durum ve kontrol fonksiyonları elde edilmiş olur. Teorikte durum ve kontrol öz koordinatlarının sonsuz toplamları olarak ifade edilen durum ve kontrol fonksiyonlarını pratikte elde etmek için sonlu sayıda hesaplanması gerekir. Belli bir k değerinden sonraki katsayıların durum ve kontrol fonksiyonlarına katkısının anlamlı bir fark oluşturmamaktadır, dolayısıyla $k=5$

seçilmiştir. Böylece, $\alpha = 0.5$, $L = 1$, $\xi = 0.5$ ve $\rho = 0.3$ değerleri için optimal durum ve kontrol fonksiyonlarının grafikleri MATLAB programı yardımıyla aşağıdaki gibi elde edilmiştir. [43]'te ele alınan problem ile karşılaştırıldığında uyumlu türevli yayılım sürecinin Riemann–Liouville kesirli türevli yayılım sürecine benzer davranış gösterdiği görülmektedir. Buradaki avantaj sürecin analitik olarak çözülebilmesidir.



Şekil 5.3: $\alpha = 0.5$ için $x(t)$ durum fonksiyonu.



Şekil 5.4: $\alpha = 0.5$ için $u(t)$ kontrol fonksiyonu.

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Uyumlu türev, iyi bilinen pek çok kesirli türevin aksine klasik türevin bazı temel özelliklerini sağladığı için uyumlu diferansiyel denklemler analitik yöntemlerle kolayca çözülebilmektedir. Bu durum, bilim adamlarının ilgisini uyumlu türev ve uygulamalarına çekmiştir, dolayısıyla uyumlu türevli sistemler için kontrol tasarımlarının çalışılması bir gereklilik haline gelmiştir. Uyumlu değişim analizi ve optimal kontrol problemleri uyumlu sistemlerin kontrolu anlamında yapılan ilk çalışmalardır. Bu tezde, özgün olarak uyumlu türevli değişim analizi ve uyumlu türevli optimal kontrol problemleri için karşıtlık koşulları elde edilmiştir. Uyumlu türev terimi içeren her iki problem de performans indeksinin durumuna göre ikiye ayrılırak koşullar ayrı ayrı elde edilmiştir. Performans indeksin uyumlu integral içerdiği problemler için elde edilen koşullar karşıtlık koşulları, performans indeksin klasik integral içerdiği problemler için elde edilen koşullar ise genelleştirilmiş karşıtlık koşulları olarak anılmıştır. Buna göre tezde elde edilen sonuçlar sırasıyla aşağıda verilmektedir.

- Uyumlu Rolle teoremi ve ortalama değer teoreminin birbirine denk olduğu gösterilmiştir.
- [52]'de verilen özelliklerin özel bir hali olarak uyumlu integralin özellikleri verilmiştir.
- Uyumlu türevli değişim analizi problemi için uyumlu Euler–Lagrange denklemi değişim yöntemiyle elde edilmiştir.
- Uyumlu türevli değişim problemleri için sabit olmayan bitiş noktası probleminin genel durumdaki karşıtlık koşulu elde edilmiştir. Daha sonra özel haldeki yatay bitiş doğrusu, düşey bitiş doğrusu ve bitiş eğrisi problemleri için karşıtlık koşulları elde edilmiştir.
- Uyumlu türevli değişim problemlerinin her üç tipi için uygulama problemleri ele alınarak çözülmüştür. Bu problemlerdeki durum fonksiyonlarının grafikleri $\alpha = 0.7$ değeri için MATLAB programı yardımıyla ayrı ayrı çizdirilmiştir.
- Uyumlu türevli değişim analizi problemleri için genelleştirilmiş uyumlu Euler–Lagrange denklemi değişim yöntemiyle elde edilmiştir.

- Uyumlu türevli değişim analizi problemleri için genel ve özel durumlardaki genelleştirilmiş karşıtlık koşulları elde edilmiştir.
- Her üç tipteki genelleştirilmiş karşıtlık koşullarının uygulama problemleri ele alınarak çözülmüştür. Bu problemlerdeki durum fonksiyonlarının grafikleri $\alpha = 0.7$ değeri için MATLAB programı yardımıyla ayrı ayrı çizdirilmiştir.
- Uyumlu türevli optimal kontrol problemlerinin optimallik için gerekli koşul olan uyumlu Euler–Lagrange denklemleri Lagrange çarpanı tekniği ve Hamilton formülasyonu kullanılarak değişim yöntemiyle elde edilmiştir.
- Uyumlu türevli optimal kontrol problemleri için sabit olmayan bitiş noktası probleminin genel durumdaki karşıtlık koşulu elde edilmiştir. Daha sonra özel haldeki yatay bitiş doğrusu, düşey bitiş doğrusu ve bitiş eğrisi problemleri için karşıtlık koşulları elde edilmiştir.
- Uygulama olarak uyumlu türevli optimal kontrol problemi için yatay bitiş doğuruşu problemi ele alınmış ve çözülmüştür. Bu problemdeki durum ve kontrol fonksiyonlarının grafikleri $\alpha = 0.7$ değeri için MATLAB programı yardımıyla ayrı ayrı çizdirilmiştir. Riemann–Liouville anlamında daha önce [93]'de ele alınan optimal kontrol problemi uyumlu türev ile değerlendirildiğinde durum fonksiyonunun istenen değere daha hızlı bir şekilde ulaştığı görülmüştür.
- Uyumlu türevli optimal kontrol problemleri için genel ve özel durumlardaki genelleştirilmiş karşıtlık koşulları elde edilmiştir.
- Uyumlu türevli optimal kontrol problemi için yatay bitiş doğuruşu problemi ele alınmış ve çözülmüştür. Bu problemdeki durum ve kontrol fonksiyonlarının grafikleri $\alpha = 0.7$ değeri için MATLAB programı yardımıyla ayrı ayrı çizdirilmiştir.
- Son olarak uyumlu türevli yayılım probleminin düşey bitiş doğrusundaki optimal kontrolü Hamilton formülasyonu ve Lagrange çarpanı tekniği kullanılarak elde edilmiştir. Problemin çözümünde öz fonksiyonlar kullanılmış, durum ve kontrol öz koordinatlarının grafikleri $\alpha = 0.3$, $\alpha = 0.5$, $\alpha = 0.7$ ve $\alpha = 1$ değerleri için MATLAB programı yardımıyla ayrı ayrı çizdirilmiştir. α mertebesi 1 den 0 a doğru azaltılırken durum öz koordinatlarının sürece katkısının azaldığı görülmektedir. Bu, durum öz koordinatlarının davranışlarının normal yayılımdan alt yayılıma değişmesi şeklinde yorumlanır. Aynı zamanda, kontrol öz

koordinatlarının etkileri beklendiği gibi durum öz koordinatlarına paralel olarak artmaktadır. Son olarak durum ve kontrol fonksiyonlarının grafikleri $\alpha = 0.5$, $L = 1$, $\xi = 0.5$ ve $\rho = 0.3$ değerleri için MATLAB programı yardımıyla çizdirilmiştir. Durum ve kontrol değişkenlerinin öz fonksiyon açılımları kullanılarak [43]'te Riemann–Liouville operatörü ile ele alınan optimal kontrol kuralı nümerik olarak elde edilirken burada analitik olarak elde edilmiştir.

Tezde genel olarak uyumlu karşıtlık koşullarının elde edilmesi için bir takım sınırlandırmalar yapılmıştır. Öneri olarak aşağıdaki durumlardan bu tezde elde edilen sonuçlar ışığında elde edilebilir:

- Uyumlu türevli değişim analizi ve optimal kontrol için başlangıç noktasının sabit bitiş noktasının sabit olmadığı kabul edilen problemlerde, hem başlangıç hem de bitiş noktasının sabit olmadığı durumlar incelenebilir.
- Burada bitiş eğrisi probleminin özel durumları olarak düşey bitiş doğrusu ve yatay bitiş doğrusu problemleri ele alınmıştır. Bunların haricinde [54]'te klasik değişim analizi ve optimal kontrol için incelenenen kesilmiş düşey bitiş doğrusu ile kesilmiş yatay bitiş doğrusu problemleri uyumlu türevli değişim analizi ve optimal kontrol için incelenebilir.
- Bu çalışmada ele alınan uyumlu türevli optimal kontrol problemi Lagrange problemi tipindedir. Bolza problemi, bu problemin genel halidir ve incelenmeye açık bir problemdir.
- [36]'da incelendiği gibi performans indeksi uyumlu türev ile birlikte klasik türev terimi içeren fonksiyoneller için de karşıtlık koşulları elde edilebilir.

7. KAYNAKLAR

[1] Podlubny, I., *Fractional Differential Equations*, San Diego: Academic Press,(1999).

[2] Samko, S.G., Kilbas, A.A. and Marichev, O.I., *Fractional Integrals and Derivatives – Theory and Applications*, Longhorne Pennsylvania: Gordon and Breach, (1993).

[3] Miller, K.S. and Ross, B., *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, New York: Wiley, (1993).

[4] Oldham, K.B. and Spanier, J., *The Fractional Calculus*, New York: Academic Pres, (1974).

[5] Hilfer, R. (Ed.), *Applications of Fractional Calculus in Physics*, New Jersey, London, Hong Kong: Word Scientific Publishing Co., (2000).

[6] Magin, R.L., *Fractional calculus in bioengineering*, Connecticut: Begell House Publishers, (2004).

[7] Kilbas, A.A., Srivastava, H.M. and Trujillo, J.J., *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, The Netherlands: Elsevier, (2006).

[8] Lakshmikantham, V., Leela, S. and Devi, J.V., *Theory of Fractional Dynamic* System, Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, (2009).

[9] Tarasov, V.E., *Fractional Dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media*, Springer, (2010).

[10] Baleanu, D., Diethelm, K., Scalas, E. and Trujillo, J.J., *Fractional Calculus: Models and Numerical Methods, Series on Complexity, Nonlinearity and Chaos*, Vol. 3, World Scientific Publishing Singapore, (2012).

[11] Başkonuş, H.M. and Bulut, H., “On the numerical solutions of some fractional ordinary differential equations by fractional Adams–Bashforth–Moulton method”, *Open Mathematics*, 13, 547–556, (2015).

[12] Akgül, A., Inc, M. and Baleanu, D., "On solutions of variable–order fractional differential equations", *International Journal of optimization and Control: Theories and Applications*, 7, 112–116, (2017).

[13] Evirgen, F. and Ozdemir, N., "Multistage adomian decomposition method for solving NLP problems over a nonlinear fractional dynamical system" *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 6 (2), 021003(6 pages), (2011).

[14] Yavuz, M. and Ozdemir, N., "Numerical Inverse Laplace Homotopy Technique for Fractional Heat Equations" *Thermal Science*, 22, 185–194, (2018).

[15] Kolwanka, K.M. and Gangal, A.D., "Fractional differentiability of nowhere differentiable functions and dimensions", *Chaos*, 6, 505–513, (1996).

[16] Babakhani, A. and Daftardar–Gejji V., "On calculus of local fractional derivatives", *Journal of Mathematical Analysis and applications*, 270, 66–79, (2002).

[17] Chen, Y., Yan, Y. and Zhang, K., "On the local fractional derivative", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 362, 17–33, (2010).

[18] Khalil, R., Horani, M.A. and Yousef, A., "A new definition of fractional derivative", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 264, 65–70, (2014).

[19] Katumgapola, U.N., "A new fractional derivative with classical properties", *arXiv:1410.6535v2* (2014)

[20] Abdeljawad, T., "On conformable fractional calculus", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 279, 57–66, (2015).

[21] Iyiola, O.S. and Nwaeze, E.R., "Some new results on the new conformable fractional calculus with application using D'Alambert approach" Progress in Fractional Differentiation and Applications: An International Journal, 2 (2),1–7, (2016).

[22] Abu Hammad, I. and Khalil, R., "Fractional fourier series with applications", *American Journal of Computational and Applied Mathematics,* 4 (6), 187–191, (2014).

[23] Atangana, A., Baleanu, D. and Alsaedi, A., "New properties of conformable derivative", *Open Mathematics*, 13, 889–898, (2015).

[24] Zhao, D. and Luo, M., "General conformable fractional derivative and its physical interpretation", *Calcolo*, 54 (3), 903–917, (2017).

[25] Ünal, E., Gökdoğan, A. and Çelik, E., "General solution to sequential linear conformable fractional differential equations with constant coefficients", arXiv:1602.01452v1, (2016).

[26] Hammad, M.A. and Khalil, R., "Abel's formula and wronskian for conformable fractional differantial equations", *International Journal of Differential Equations and Applications*, 13 (3), 177–183, (2014).

[27] Al–Tarawneh, S.A., "Solving fractional differential equations by using conformable fractional derivatives definition", *MSc Thesis, Zarqa University*, Jordan, (2016).

[28] Anderson, D.R. and Ulness, D.J., "Results for conformable differential equations" *Preprint,* (2016).

[29] Acan, O., Al Qurashi M.M. and Baleanu, D., "New exact solution of generalized biological population model", *Journal of Nonlinear Science Applications,* 10 (7), 3916–3929, (2017).

[30] Chung, W.S., "Fractional Newton mechanics with conformable fractional derivative" *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 290, 150–158, (2015).

[31] Karayer H., Demirhan D. And Büyükkılıç F., "Conformable fractional Nikiforov–Uvarov method" *Communications in Theoretical Physics*, 66, 12–18, (2016).

[32] Ekici, M., Mirzazadeh, M., Eslami, M., Zhou, Q., Moshokoa, S.P., Biswas, A. and Milivoj, B., "Optical soliton perturbation with fractional–temporal evolution by first integral method with conformable fractional derivatives" *Optik*, 127, 10659–10669, (2016).

[33] Çenesiz, Y., Kurt, A. and Tasbozan, O., "On the solution of burgers equation with the new fractional derivative" *Open Physics*. 13 (1), 355–360, (2015)

[34] Çenesiz, Y. and Kurt, A., "The new solution of time fractional wave equation with conformable fractional derivative definition" *Journal of New Theory* 7 , 79–85, (2015).

[35] Ghanbari, K. and Gholami, Y., "Lyapunov type inequalities for fractional Sturm–Liouville problems and fractional Hamiltonian systems and applications" *Journal of Fractional Calculus and Applications*, 7 (1), 176–188, (2016).

[36] Lazo, J.M. and Torres D.F.M., "Variational calculus with conformable fractional derivatives" *Journal of Automatica Sinica*, 4, 340–352, (2017).

[37] Eroğlu İskender, B.B. Avcı, D. and Özdemir, N., "Optimal control problem for a conformable fractional heat conduction equation" *ACTA Physica Polonica A*, 132 (3), 658–662, (2017).

[38] Ziaei, E., Farahi, M.H. and Safaie, E., "The approximate solution of nonlinear fractional optimal control problems by measure theory approach"*Progress in Fractional Differentiation and Applications*, 4, (2018).

[39] Ziaei, E. and Farahi, M.H., "The approximate solution of non–linear time–delay fractional optimal control problems by embedding process"*IMA Journal of Mathematical Control and Information*, (2018).

[40] Agrawal, O.P., "A Formulation and Numerical Scheme for Fractional Optimal Control Problems", *Journal of Vibration and Control*, 14, 1291–1299, (2008).

[41] Agrawal, O.P., "A Quadratic Numerical Scheme For Fractional Optimal Control Problems", *Journal of dynamic systems, measurement and control*, 130 (1), 011010 (6 pp), (2008).

[42] Agrawal, O.P. and Baleanu, D., "A Hamiltonian Formulation and A Direct Numerical Scheme For Fractional Optimal Control Problems", *Journal of Vibration and Control*, 13, 1269–1281, (2007).

[43] Özdemir, N., Agrawal, O.P., İskender, B.B. and Karadeniz, D., "Fractional Optimal Control of A 2–Dimensional Distributed System Using Eigenfunctions", *Nonlinear Dynamics,* 55 (3), 251–260, (2009).

[44] Özdemir, N., Karadeniz, D. and İskender, B.B., "Fractional Optimal Control Problem of A Distributed System in Cylindrical Coordinates". *Physics Letters A*, 373, 221–226, (2009).

[45] Çenesiz, Y. and Kurt, A., "The solution of time fractional heat equation with new fractional derivative definition" *In: 8th International Conference on Applied Mathematics, Simulation, Modelling (ASM 2014),* 195–198, WSEAS Press, Florance, (2014).

[46] Avcı, D., Eroğlu İskender, B.B. and Özdemir, N., "The Dirichlet problem of a conformable advection–diffusion equation" *Thermal Science,* 21 (1), 9–18, (2017).

[47] Avcı, D., İskender Eroglu, B.B. and Ozdemir, N., "Conformable heat equation on a radial symmetric plate", *Thermal Science*, 21 (2), 819–826, (2017).

[48] İskender Eroğlu B.B. and Yapişkan D., "Local generalization of transversality conditions for optimal control problem" *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, 14 (3),310(19 pages),(2019).

[49] Caputo, M., *Elasticità e Dissipazione*, Zanichelli Blogna, (1969).

[50] Weierstrass, K., "Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen" Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 2, 633–639, (1885).

[51] Qazi, M.A., "The mean value theorem and analytic functions of a complex variable"*Journal of mathematical analysis and applications*, 324 (1), 30–38, (2006).

[52] Benkhettou, N., Hassani, S. and Torres, D.F.M., "A conformable fractional calculus on arbitrary time scales" *Journal of King Saud University – Science* 28, 93–98, (2016).

[53] Naidu, D.S., *Optimal control systems*. CRC press, 11–13, (2003).

[54] Chiang, A.C., *Elements of dynamic optimization*, McGraw–Hill, (1992).

[55] Pinch, E.R., *Optimal control and the calculus of variations*. Oxford University Press, (1995).

[56] van Brunt, B., *The Calculus of Variations*. New York: Springer–Verlag Inc., (2004).

[57] Liberzon, D., *Calculus of variations and optimal control theory: a concise introduction*. Princeton University Press, (2011).

[58] Kirk, D.E., *Optimal control theory: an introduction*. Courier Corporation, (2012).

[59] Riewe, F., "Nonconservative Lagrangian and Hamiltonian mechanics" *Physical Review E*, 53 (2), 1890, (1996).

[60] Riewe, F., "Mechanics with fractional derivatives"*Physical Review E*, 55 (3), 3581–3592, (1997).

[61] Agrawal, O.P., "Formulation of Euler–Lagrange equations for fractional variational problems" *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 272 (1), 368–379, (2002).

[62] Agrawal O.P., "Fractional variational calculus and the transversality conditions" *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 39 (33), 10375–10384, (2006).

[63] Agrawal, O.P., "Generalized Euler–Lagrange equations and transversality conditions for FVPs in terms of the Caputo derivative" *Journal of Vibration and Control*, 13 (9–10), 1217–1237, (2007).

[64] Agrawal, O.P., "Fractional variational calculus in terms of Riesz fractional derivatives" *Journal of Physics a: Mathematical and Theoretical*, 40 6287–303, (2007).

[65] Frederico, G.S.F. and Torres, D.F.M., "A formulation of Noether's theorem for fractional problems of the calculus of variations" *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 334 (2), 834–46, (2007).

[66] Atanacković, T.M., Konjik S. and Pilipović S., "Variational problems with fractional derivatives: Euler–Lagrange equations" *Journal of Physics a: Mathematical and Theoretical*, 41 (9), 095201–12, (2008).

[67] Almeida, R. and Torres D.F.M., "Calculus of variations with fractional derivatives and fractional integrals" *Applied Mathematics Letters*, 22, 1816–1820, (2009).

[68] Almeida, R., Malinowska, A.B. and Torres, D.F.M., "A fractional calculus of variations for multiple integrals with application to vibrating string" *Journal of Mathematical Physics,* 51 (3),033503, (2010).

[69] Odzijewicz, T., Malinowska, A.B. and Torres, D.F.M., "Fractional variational calculus with classical and combined Caputo derivatives" *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications,* 75 (3), 1507–1515, (2012).

[70] Odzijewicz, T., Malinowska, A.B. and Torres D.F.M., "Fractional calculus of variations in terms of a generalized fractional integral with applications to physics" *Abstract and Applied Analysis*, 2012, Hindawi, (2012).

[71] Almeida, R., Pooseh, S. and Torres, D.F.M., *Computational Methods in the Fractional Calculus of Variations.* World Scientific Publishing Company, (2015).

[72] Malinowska, A.B., Odzijewicz, T. and Torres, D.F.M., "Advanced Methods in the Fractional Calculus of Variations" New York: Springer International Publishing, (2015).

[73] Baleanu, D. and Avkar, T., "Lagrangians With Linear Velocities Within Riemann–Liouville Fractional Derivatives," Nuovo Cimento Soc. Ital. Fis., 119, 73–79, (2004).

[74] El–Nabulsi, R.A., "A fractional action–like variational approach of some classical, quantum and geometrical dynamics" *International Journal of Applied Mathematics*, 17(3), 299–317, (2005).

[75] Baleanu, D. And Muslih, S.I., "About Lagrangian Formulation of Classical Fields Within Riemann–Liouville Fractional Derivatives" In *ASME 2005*

International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, American Society of Mechanical Engineers, 1457–1464, (2005).

[76] El-Nabulsi, R.A. and Torres, D.F.M., "Necessary optimality conditions for fractional action-like integrals of variational calculus with Riemann–Liouville derivatives of order (α, β)"Mathematical Methods in the Applied Sciences, 30 (15), 1931–1939, (2007).

[77] Baleanu, D. and Muslih, S.I., "Nonconservative systems within fractional generalized derivatives", *Journal of Vibration and Control*,14 (9–10), 1301–1311,(2008).

[78] Baleanu, D., Muslih, S.I. and Rabei, E.M., "On fractional Euler–Lagrange and Hamilton equations and the fractional generalization of total time derivative", *Nonlinear Dynamics*, 53 (1–2) ,67–74,(2008).

[79] Baleanu, D., "New applications of fractional variational principles", *Reports on Mathematical Physics*, 61 (2),199–206,(2008).

[80] Almeida, R., Tavares, D. and Torres, D.F., *The variable–order fractional calculus of variations*. Springer, 27–29, (2019).

[81] Sabatier, J., Agrawal, O.P. and Tenreiro, M.J.A., *Advances in fractional calculus: theoretical developments and applications in physics and engineering*. Springer, (2007).

[82] Agrawal, O.P., "A general finite element formulation for fractional variational problems", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 337,(1), 1–12, (2008).

[83] Malinowska, A.B. and Torres, D.F.M. "Generalized natural boundary conditions for fractional variational problems in terms of the Caputo derivative" *Computers & Mathematics with Applications*, 59, 3110–3116, (2010).

[84] Almeida, R. and Torres, D.F.M., "Necessary and sufficient conditions for the fractional calculus of variations with Caputo derivatives," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 16 (3), 1490–1500, (2011).

[85] Bastos, N.R.O., Ferreira, R.A. and Torres, D.F.M., "Discrete–time fractional variational problems" *Signal Processing*, 91 (3), 513–524, (2011).

[86] Almeida, R. and Malinowska, A.B., "Generalized transversality conditions in fractional calculus of variations" *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 18 (3), 443–452, (2012).

[87] Agrawal, O.P., "A General Formulation and Solution Scheme For Fractional Optimal Control Problems", *Nonlinear Dynamics*, 38, 323–337, (2004).

[88] Baleanu, D., Defterli, O. and Agrawal, O. P., "A central difference numerical scheme for fractional optimal control problems*"Journal of Vibration and Control*, 15 (4), 583–597, (2009).

[89] Özdemir, N., Agrawal, O.P., Karadeniz, D. and Iskender, B. B., "Fractional optimal control problem of an axis–symmetric diffusion–wave propagation" *Physica Scripta*, (T136), 014024, (2009).

[90] Ozdemir, N., Avcı, D. and Iskender, B.B. "The numerical solutions of a two–dimensional space–time Riesz–Caputo fractional diffusion equation" *An International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications (IJOCTA)*, 1(1), 17–26, (2011).

[91] Tricaud, C. and Chen, Y., An approximate method for numerically solving fractional order optimal control problems of general form. *Computers & Mathematics with Applications*, 59 (5), 1644–1655, (2010).

[92] Biswas, R. K. and Sen, S., "Fractional optimal control problems with specified final time" *Journal of computational and nonlinear dynamics*, 6 (2), 021009, (2011).

[93] Biswas, R.K. and Sen, S., "Free final time fractional optimal control problems" *Journal of the Franklin Institute*, 351 (2), 941–951. (2014).

[94] Dzieliński, A. And Czyronis, P..M. (n.d.). "Fixed final time and free final state optimal control problem for fractional dynamic systems–linear quadratic discrete–time case", *Bulletin of the Polish Academy of Sciences Technical Sciences,* 61 (3), 681–690, (2013).

[95] Almeida, R. and Torres, D.F., "A discrete method to solve fractional optimal control problems" *Nonlinear Dynamics*, 80 (4), 1811–1816, (2015).

[96] Pooseh S., Almeida, R. and Torres, D.F., "Fractional order optimal control problems with free terminal time", *arXiv preprint*, arXiv:1302.1717, (2013).

[97] Alizadeh, A. and Effati, S., "An iterative approach for solving fractional optimal control problems" *Journal of Vibration and Control*, 24 (1), 18–36, (2018).

[98] Ding, Y., Wang, Z. and Ye, H., "Optimal Control of a Fractional–Order HIVImmune System With Memory", *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 20 (3), 763–769, (2012).

[99] Diethelm, K. "A fractional calculus based model for the simulation of an outbreak of dengue fever" *Nonlinear Dynamics*, 71 (4), 613–619, (2013).

[100] Guo, T.L., "The necessary conditions of fractional optimal control in the sense of Caputo" *Journal of Optimization Theory and Applications*, 156 (1), 115–126, (2013).

[101] Luo, D., Wang, J.R. and Fečkan, M., "Applying Fractional Calculus to Analyze Economic Growth Modelling" Journal of Applied Mathematics, Statistics and Informatics,14 (1), 25–36, (2018).