

**T.C.  
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**



**GENİŞLEME PROBLEMİNİN BAZI MONOİD SUNUŞLARI  
ÜZERİNDE GEOMETRİK YÖNDEN İNCELENMESİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**KÜBRA SARI**

**BALIKESİR, HAZİRAN-2019**

**T.C.  
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**



**GENİŞLEME PROBLEMİNİN BAZI MONOİD SUNUŞLARI  
ÜZERİNDE GEOMETRİK YÖNDEN İNCELENMESİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**KÜBRA SARI**

**Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Fırat ATEŞ (Tez Danışmanı)**

**Prof. Dr. Sebahattin İKİKARDEŞ**

**Doç. Dr. Tahsin ÖNER**

**BALIKESİR, HAZİRAN-2019**

## KABUL VE ONAY SAYFASI

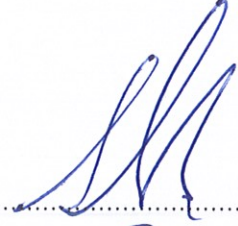
Kübra SARI tarafından hazırlanan “GENİŞLEME PROBLEMİNİN BAZI MONOİD SUNUŞLARI ÜZERİNDE GEOMETRİK YÖNDEN İNCELENMESİ” adlı tez çalışmasının savunma sınavı 14 Haziran 2019 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

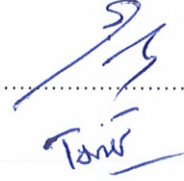
Danışman

**Prof. Dr. Fırat ATEŞ**



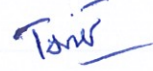
Üye

**Prof. Dr. Sebahattin İKİKARDEŞ**



Üye

**Doç. Dr. Tahsin ÖNER**



Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

**Prof. Dr. Necati ÖZDEMİR**

.....

## ÖZET

**GENİŞLEME PROBLEMİNİN BAZI MONOID SUNUŞLARI ÜZERİNDE  
GEOMETRİK YÖNDEN İNCELENMESİ  
YÜKSEK LİSANS TEZİ  
KÜBRA SARI  
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI  
(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. FIRAT ATEŞ)**

**BALIKESİR, HAZİRAN-2019**

Genişleme problemi (extension problem) grup, monoid ve yarı grup yapılarında önemli bir çalışma alanına sahiptir. Bu problemin çözümüne yönelik literatürde çok fazla çalışmalar mevcuttur. Bu tez çalışmasında genişleme problemi monoid cebirsel yapıları üzerinde incelenecektir. Bu inceleme tezimizde, Prof. Dr. Stephen J. Pride tarafından ortaya atılan monoid resimleri kullanılarak yapılacaktır.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde ileriki bölümlerinde kullanılacak olan bazı temel bilgilere yer verilmiştir.

İkinci bölümde, verilen bir monoid sunuşunun bağıntılarının geometrik olarak ortaya konulduğu atomik monoid resmi, küresel monoid resmi ve küresel olmayan monoid resmi gibi monoid resimleri tanıtılmıştır. Ayrıca tezin diğer bölümlerinde kullanılacak olan tanım, teorem ve örneklere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, genişleme probleminin çözümüne olanak sağlayan üreteç resimleri üzerine çalışmalar yapılmıştır. Özellikle devirli monoidlerin üreteç resimleri, direkt çarpım monoidin üreteç resimleri ve monoidlerin yarı direkt çarpımının üreteç resimleri üzerinde durulup literatürde var olan bir takım önemli teorem ve örneklere yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise, devirli monoidlerin peiffer çarpımının üreteç resimleri üzerinde durulmuş ve tarafımızdan yeni bir sonuç ortaya konmuştur.

**ANAHTAR KELİMELEER:** Genişleme Problemi, Monoid genişlemesi, Monoid resmi, Yarı-direkt çarpım, Peiffer çarpım.



## **ABSTRACT**

### **EXAMINING THE EXTENSION PROBLEM FROM A GEOMETRIC VIEWPOINT UNDER SOME MONOID PRESENTATIONS**

**MSC THESIS**

**KÜBRA SARI**

**BALIKESİR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE**

**MATHEMATICS**

**(SUPERVISOR: PROF. DR. FIRAT ATEŞ )**

**BALIKESİR, JUNE 2019**

The extension problem has an important place in group, monoid and semi-group theory. There are many studies in the literature to solve this problem. In this thesis, the extension problem will be examined on monoid algebraic structures. This examination will be done by using monoid pictures which is found Stephen J. Pride in this thesis.

This thesis consists of four chapters.

In the first chapter, some basic information which will be used in the following parts of the thesis is given.

In the second chapter, monoid pictures such as the atomic monoid picture, the spherical monoid picture and the non-spherical monoid picture, in which the relations of a given monoid presentation are geometrically presented, are introduced. In addition, definitions, theorems and examples to be used in other parts of the thesis are given.

In the third chapter, the studies on the generating pictures that allow the solution of the extension problem have been made. In particular, the generating pictures of monogenic monoids, direct products of monoids and semi-direct product of monoids have been emphasized. Also some important theorems and examples which are present in the literature are given.

In the fourth chapter, the generating pictures of the Peiffer product of the monogenic monoids were emphasized and a new result has been put forward by us.

**KEYWORDS:** Extension problem, Monoid extensions, Monoid Picture, Semi-direct products, Peiffer product.

# İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.....	i
ABSTRACT .....	ii
İÇİNDEKİLER .....	iii
ŞEKİL LİSTESİ.....	ivv
SEMBOL LİSTESİ .....	v
ÖNSÖZ.....	vi
1. GİRİŞ.....	1
1.1 Kelimeler .....	1
1.2 Monoid Sunuşları .....	4
2. MONOİD SUNUŞLARI ÜZERİNE RESİMLER.....	7
2.1 Giriş .....	7
2.2 Monoid Sunuşları Üzerine Resimler.....	7
3. BAZI MONOİD GENİŞLEMELERİNİN ÜRETEÇ RESİMLERİ.....	18
3.1 Devirli Monoidlerin Üreteç Resimleri.....	18
3.2 Direkt Çarpım Monoidin Üreteç resimleri.....	23
3.3 Monoidlerin Yarı Direkt Çarpımının Üreteç resimleri.....	26
4. DEVİRLİ MONOİDLERİN PEIFFER ÇARPIMININ ÜRETEÇ RESİMLERİ.....	33
4.1 Devirli Monoidlerin Peiffer Çarpımının Üreteç Resimleri.....	34
5. SONUÇ VE ÖNERİLER .....	40
6. KAYNAKLAR.....	41

## ŞEKİL LİSTESİ

### Sayfa

Şekil 2.1: Atomik monoid resim.....	8
Şekil 2.2: Pozitif disk örneği.....	8
Şekil 2.3: Negatif disk örneği.....	9
Şekil 2.4: Atomik monoid resim örneği.....	10
Şekil 2.5: Yol örneği.....	11
Şekil 2.6: Küresel monoid resim örneği.....	13
Şekil 2.7: Soldan hareket.....	14
Şekil 2.8: Sağdan hareket.....	15
Şekil 2.9: Monoid resimleri üzerine işlemler.....	16
Şekil 3.1: $D(\wp_{k,l})$ devirli monoidlerin üreteç resimleri.....	23
Şekil 3.2: $M$ Direkt çarpım monoidin üreteç resimleri.....	24
Şekil 3.3: Yarı direkt çarpım üreteç resimleri.....	30
Şekil 3.4: Yarı direkt çarpımın üreteç resimleri örneği.....	32
Şekil 4.1: $\wp_{A \triangleright \triangleleft K}$ Peiffer çarpımın üreteç resimleri.....	35
Şekil 4.2: $\wp_{A \triangleright \triangleleft K}$ Peiffer çarpımın üreteç resimleri.....	36
Şekil 4.3: $\wp_{A \triangleright \triangleleft K}$ Peiffer çarpımın üreteç resimleri.....	37
Şekil 4.4: $\wp_{A \triangleright \triangleleft K}$ Peiffer çarpımın üreteç resimleri.....	38

## SEMBOL LİSTESİ

<u>Simge</u>	<u>Adı</u>
$i(w)$	Başlangıç harfi
$\tau(w)$	Bitiş harfi
$I_w$	Boş kelime
$X^{-1}$	$X$ kümesinin elemanlarının tersi
$x^e x^{-e}$	Ters harf çifti
$\wp_M$	$M$ monoidinin sunuşu
$M(\wp)$	$\wp$ sunuşu ile tanımlanmış monoid
$\beta(U, S, \varepsilon, V)$	Atomik monoid resim
$\Gamma$	Squier graf
$D(\wp)$	Squier kompleksi
$K \times_{\theta} A$	Yarı direkt çarpım
$K \times A$	Direkt çarpım
$A \triangleright \triangleleft K$	$A$ ile $K$ 'nin peiffer çarpımı
$A * K$	$A$ ile $K$ 'nin serbest çarpımı
$Z$	Tam sayılar kümesi
$N$	Doğal sayılar kümesi

## ÖNSÖZ

Öncelikle tez konusu seçerken isteklerimi göz önünde bulunduran, tez çalışmamın planlanmasında, araştırılmasında, yürütülmesinde ve oluşumunda ilgi ve desteğini esirgemeyen, engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, yönlendirme ve bilgilendirmeleriyle çalışmamı bilimsel temeller ışığında şekillendiren sayın hocam Prof. Dr. Fırat ATEŞ'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Teşekkürlerin az kalacağı Balıkesir Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü hocalarımın da bana 4 yıllık üniversite hayatım boyunca kazandırdıkları her şey için ve beni gelecekte söz sahibi yapacak bilgilerle donattıkları için hepsine teker teker teşekkürlerimi sunuyorum. Aynı zamanda Balıkesir Üniversitesi Necatibey Eğitim Fakültesi Matematik Eğitimi hocalarıma da ayrıca teşekkür etmek isterim.

Son olarak, benden hiçbir zaman desteğini esirgemeyen bu hayattaki en büyük şansım olan AİLEME ne kadar teşekkür etsem azdır.

# 1. GİRİŞ

$M$  cebirsel yapısı bir grup (yarı grup, monoid) olsun. Ayrıca  $H$  ve  $K$  grup (yarı grup, monoid) yapıları verilsin. Bu durumda şöyle bir problem ortaya çıkar. Acaba,  $M | K \cong H$  olacak şekilde  $K$  yı içeren tüm grup (yarı grup, monoid) yapıları nedir? Bu problem genişleme problemi (extension problem) olarak bilinir. Genişleme problemi (extension problem) grup, monoid ve yarı grup teorisinde önemli bir yere sahiptir. İlk olarak bu problem Holder tarafından ortaya konmuştur. Daha sonraları ise literatürde bu problemin çözümüne yönelik çeşitli çalışmalar farklı grup (yarı grup, monoid) yapıları için yapılmıştır [1-3].

Bu tez çalışmasında genişleme problemi monoid cebirsel yapıları üzerinde incelenecektir. Bu inceleme tezimizde, Prof. Dr. Stephen J. Pride tarafından ortaya atılan, bağıntılara geometrik bakış açısından bakan bir metot olan monoid resimleri kullanılarak yapılacaktır. Bu konuyla ilgili daha detaylı bilgilere [4-23] kaynaklarından ulaşılabilir.

Şimdi tezimizin sonraki bölümlerinde kullanmak amacıyla literatürde [23-26] kaynaklarından kolaylıkla ulaşılacak olan tanımları verelim.

## 1.1 Kelimeler

$X \neq \emptyset$  bir küme olsun.  $X^{-1}$  kümesi  $X$  kümesine bire bir karşılık gelen ve ters harflerden oluşan küme olmak üzere,  $X^{\pm 1} = X \cup X^{-1}$  olarak tanımlayalım. Ayrıca  $x_i \in X$ ,  $\varepsilon_i = \pm 1$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $n \geq 0$  olmak üzere  $W = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n}$  ifadesine  $X$  kümesi üzerinde bir *kelime* denir.  $W$  kelimesinin başlangıç harfi  $i(W) = x_1^{\varepsilon_1}$  ve bitiş harfi  $\tau(W) = x_n^{\varepsilon_n}$  şeklindedir. Eğer  $n=0$  ise boş kelime elde edilir ve bu durum  $1_W$  veya sadece 1 ile gösterilir. Burada,  $\varepsilon_i = +1$  ( $1 \leq i \leq n$ ) için

$W$  kelimesi pozitif kelime şeklinde adlandırılır. Bir  $W$  kelimesinin tersi,  $W^{-1} = x_n^{-\varepsilon_n} \dots x_2^{-\varepsilon_2} x_1^{-\varepsilon_1}$  biçimindedir.

**1.1.1 Örnek:**  $W = \overset{2}{a} b$  ve  $W' = a b a$  kelimelerinin başlangıç harflerini ve bitiş harflerini bulalım. Burada,  $i(W) = a, \tau(W) = a$  ve  $i(W') = a, \tau(W') = b$  şeklindedir.

$X$  kümesi üzerinde  $W_1$  ve  $W_2$  iki kelime olsun.  $W_1$  ve  $W_2$  kelimelerinin çarpımı,  $W_1 W_2$  ile gösterilir. Bu çarpım altında kelimeler üzerinde aşağıdaki elementer işlemleri tanımlayabiliriz. Bu işlemler;  $W$  kelimesi,  $x^\varepsilon x^{-\varepsilon}$  ( $x \in X, \varepsilon = \pm 1$ ) gibi ters harf çiftleri içeriyorsa bu ters harf çiftleri  $W$  kelimesinden silinir. Yapılan bu silme işlemine indirgeme veya sadeleştirme işlemi adı verilir. Ayrıca benzer şekilde  $x^\varepsilon x^{-\varepsilon}$  ( $x \in X, \varepsilon = \pm 1$ ) gibi ters harf çiftleri  $W$  kelimesine eklenebilir. Yapılan bu ekleme işlemine kelime üzerinde ekleme işlemi adı verilir.

$x \in X$  ve  $\varepsilon = \pm 1$  olmak üzere,  $X$  kümesi üzerinde herhangi kelime,  $x^\varepsilon x^{-\varepsilon}$  şeklinde ters harf çiftlerini içermiyorsa bu kelimeye indirgenmiş kelime adı verilir. Örneğin  $W = a^2 b b^{-1} a$  kelimesinde yer alan  $b b^{-1}$  ters harf çiftini sileriz. Böylece  $W = a^2 a = a^3$  elde edilir. Benzer şekilde  $W' = a b c a$  kelimesine  $b b^{-1}$  ters harf çiftini ekleyebiliriz. Bu durumda  $W' = b b^{-1} a b c a$  kelimesini elde etmiş oluruz.

Ayrıca herhangi bir  $W = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n}$  ve kelimesi için  $x_1^{\varepsilon_1} \neq x_n^{-\varepsilon_n}$  ise  $W$  kelimesine devirsel indirgenmiş kelime denir.

Şimdi verilen  $U = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n}$  ve  $V = y_1^{\delta_1} y_2^{\delta_2} \dots y_m^{\delta_m}$  ( $n, m \in \mathbf{N}$ ,  $x_i, y_j \in X$ ,  $\varepsilon_i, \delta_j = \pm 1$ ,  $1 \leq i \leq n$  ve  $1 \leq j \leq m$ ) kelimelerini düşünelim. Burada  $U$  ve  $V$  kelimelerinin çarpımı,

$$\begin{aligned}
U \cdot V &= (x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n}) \cdot (y_1^{\delta_1} y_2^{\delta_2} \dots y_m^{\delta_m}) \\
&= x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n} y_1^{\delta_1} y_2^{\delta_2} \dots y_m^{\delta_m}
\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir.

$W$  ve  $W'$  kelimeleri verilsin.  $W$  ve  $W'$  kelimelerinden biri diğerine indirgeme veya ekleme işlemlerinin sonlu sayıda uygulanmasıyla elde edilebiliyorsa, bu kelimelere serbest olarak denk kelimeler denir. Bu durum  $W \approx W'$  ile gösterilir.

Örneğin,  $W = a^2 b b^{-1} a$ ,  $W' = a^3 b a a^{-1} b^{-1}$  kelimelerini serbest olarak denk olduğunu

$$\begin{aligned}
W &= a^2 b b^{-1} a = v_0 \\
&\approx v_1 = a^2 a = a^3 && \text{(sadeleştirme)} \\
&\approx v_2 = a^3 b b^{-1} && \text{(ekleme)} \\
&\approx a^3 b a a^{-1} b^{-1} = W' && \text{(ekleme)}
\end{aligned}$$

şeklinde gösterebiliriz.

Yukarıda verilen  $\approx$  bağıntısı denklik bağıntısı olup,  $W$  kelimesinin denklik sınıfı  $[W]$  veya  $W$  ile gösterilir. Ayrıca  $X$  kümesi üzerinde tüm serbest denklik sınıfları  $F(X)$  şeklinde gösterilir.



## 1.2 Monoid Sunuşları

1. Giriş bölümünde genel anlamda kelime tanımı verilmiş ve üzerinde bir takım işlemler tanımlanmıştır. Tezimizin amacı bağıntıları kullanarak monoid sunuşları üzerinde resimler tanımlamak olduğundan, bu bölümde tezin ilerleyen kısımlarında karşılaşacağımız, pozitif kelimeler üzerinde inşa edilen, monoid sunuşları ile ilgili tanım ve örnekler vermektedir.

$M$  bir monoid ve  $X$  kümesi  $M$  monoidinin üreteç kümesi olsun. Ayrıca  $X$  kümesindeki elemanlarla oluşturulan pozitif kelimelerin kümesi  $X^+$  olsun. Monoidler üzerinde tanımlanan kelimeler  $X^* = X^+ \cup \{1\}$  kümesinden elemanlar alınarak oluşturulur.

Bir  $M$  monoidinin sunuşu  $X$  üreteç kümesi ve  $R \subseteq X^* \times X^*$  bağıntı kümesi olmak üzere,

$$\wp = [X : R]$$

şeklinde gösterilir. Ayrıca,  $X$  kümesi üzerinde birbirinden farklı pozitif sembolleri ifade eden  $r_+$  ve  $r_-$  sembolleri, her bir  $r \in R$  bağıntısı  $(r_+, r_-)$  biçiminde tanımlanır. Çoğunlukla  $r : r_+ = r_-$  şeklinde yazılır.

şimdi bir  $\wp$  sunuşu ile ilişkilendirilmiş monoidi tanımlayalım. Bunun için  $X$  kümesinden elde edilen pozitif kelimeler üzerinde aşağıdaki işlemi verebiliriz:

$W$  kelimesi  $X$  kümesi üzerinde bir pozitif kelime olsun. Eğer  $W$  kelimesi  $r_\varepsilon$  ( $\varepsilon = \pm 1$ ,  $r : r_+ = r_-$ ) şeklinde alt kelime içeriyorsa, bu alt kelimenin  $r_{-\varepsilon}$  ile yer değiştirmesi işlemidir.

$\wp$  sunuşuna bağlı olarak,  $W_1$  ve  $W_2$  kelimeleri  $X$  kümesinden elde edilen pozitif kelimeler olsun. Bu kelimelerden biri diğerinden yukarıda verilen yer değiştirme işlemi yardımıyla elde ediliyorsa  $W_1$  ve  $W_2$  denktir denir ve bu durum

$W_1 \approx_{\wp} W_2$  biçiminde gösterilir. Elde edilen  $\approx_{\wp}$  bağıntısı denklik bağıntısıdır. Ayrıca  $W$  nin denklik sınıfı  $[W]_{\wp}$  veya  $W$  ile gösterilir.

Burada çarpma işlemi

$$[W_1]_{\wp}[W_2]_{\wp} = [W_1W_2]_{\wp}$$

şeklinde olup, bu işlem altında tüm denklik sınıfları kümesi bir monoid oluşturur. Oluşan bu monoide  $\wp$  sunuşu ile tanımlanmış monoid denir.  $M(\wp)$  ile gösterilir ve birimi 1 dir.

**1.2.1 Örnek:** Mertebesi 6 olan ve  $x$  ile üretilen monogenic (devirli) monoid  $M_1$  olmak üzere,  $M_1$  monoidinin sunuşu,

$$\wp_{M_1} = [x : x^6 = x^2]$$

şeklindedir.

**1.2.2 Örnek:** Mertebesi 6 olan ve  $X = \{x, y\}$  ile üretilen direkt çarpım monoidi  $M_2$  olmak üzere

$$\wp_{M_2} = [x, y : x^2 = 1, y^3 = 1, xy = yx]$$

şeklindedir.

**1.2.3 Örnek:**  $X = \{x, y, z\}$  ile üretilen  $M_3 = F(X)$  serbest monoidinin sunuşu

$$\wp_{M_3} = [x, y, z; ]$$

şeklindedir.

**1.2.4 Örnek:** Mertebesi 7 olan ve  $\{x\}$  kümesi ile üretilen monoid ile mertebesi 3 olan  $\{y\}$  ile üretilen monoidin serbest çarpımı  $M_4$  olmak üzere,  $M_4$  monoidinin sunuşu

$$\mathcal{O}_{M_4} = [x, y; x^7 = 1, y^3 = 1]$$

şeklindedir.

## 2. MONOİD SUNUŞLARI ÜZERİNE RESİMLER

### 2.1 Giriş

Bu bölümde, monoid sunuşları üzerinde önemli sonuçlar elde etmemizi sağlayan monoid resimlerinin inşası üzerinde durulacaktır. Bu bölümde yer alan atomik monoid resmi, squier graflar ve üreteç resimleri gibi aşağıda alt bölümde verilmiş tanımlara [5], [10], [15], [17], [28] ve [29-34] gibi kaynaklarından ulaşılabilir.

### 2.2 Monoid Sunuşları Üzerine Resimler

$\wp = [X : R]$  bir monoid sunuşu olsun.  $F(X)$  kümesi  $X$  üzerinde tanımlanan serbest bir monoid olmak üzere,

$$W = US_{\varepsilon}V \quad (U, V \in F(X), S \in R, \varepsilon = \pm 1)$$

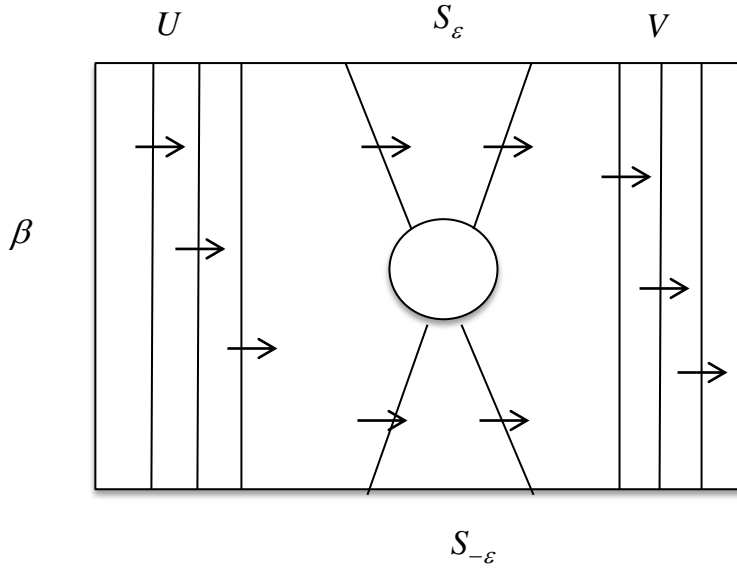
kelimesinde,  $S_{\varepsilon}$  nun  $S_{-\varepsilon}$  ile yer değiştirmesinden

$$W' = US_{-\varepsilon}V$$

kelimesi elde edilir. Bu durum Şekil 2.1 de gösterilmiştir. Bu gösterim

$$\beta = (U, S, \varepsilon, V)$$

şeklinde sıralı dörtlü ile ifade edilir. Özel olarak  $\beta = (U, S, \varepsilon, V)$  sıralı dörtlüsüne atomik monoid resmi denir.



Şekil 2.1: Atomik monoid resmi

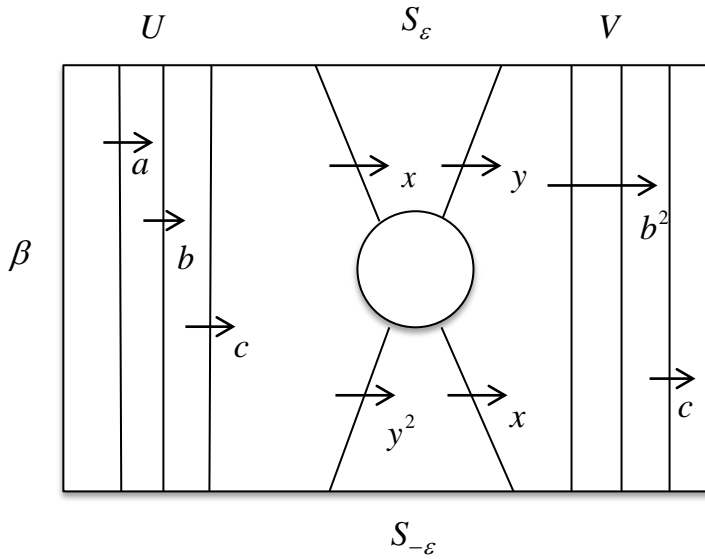
Bir  $\beta$  atomik monoid resmine ait,  $S$  ile etiketlenmiş olan bir disk

$\varepsilon = 1$  ise pozitif disk,

$\varepsilon = -1$  ise negatif disk

olarak adlandırılır.

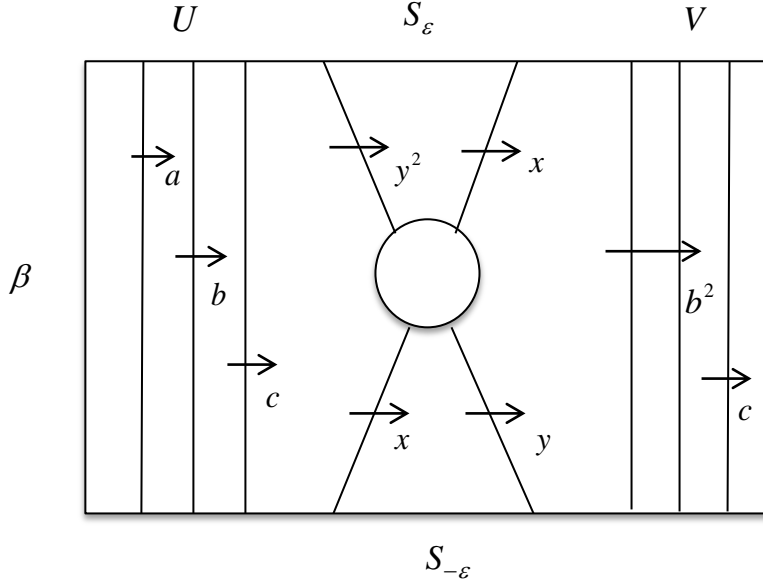
**2.2.1 Örnek:**  $\varepsilon = 1$  olduğunda pozitif disk  $\beta = (abc, xy = y^2x, +1, b^2c)$  atomik monoid resmi Şekil 2.2 de verildiği gibidir.



Şekil 2.2: Pozitif disk örneği

Şekil 2.2 yi düşünelim. Burada  $\varepsilon = -1$  olduğunda  $\beta = (abc, y^2x = xy, -1, b^2c)$  elde edilir.

O halde negatif disk şekli örneği Şekil 2.3 de verildiği gibi olur.

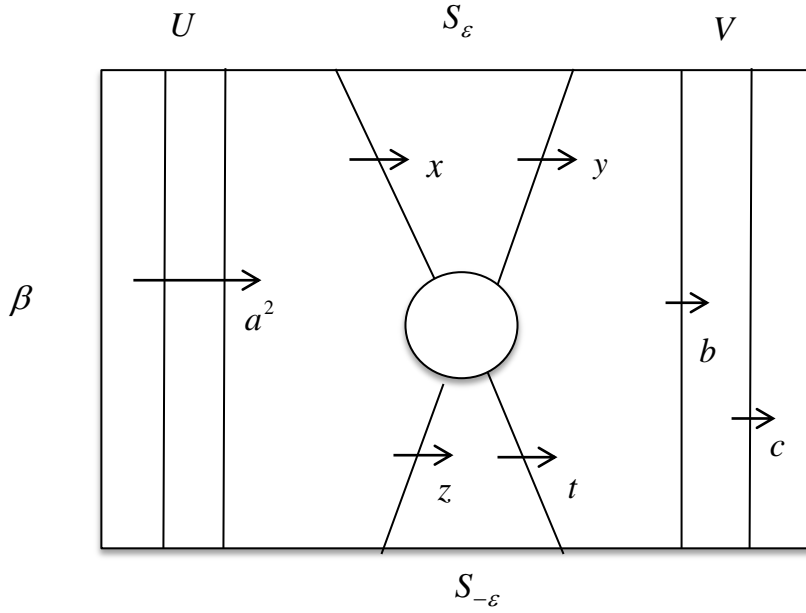


**Şekil 2.3:** Negatif disk örneği

Şimdi, monoid resimlerinin inşasında temel yapı taşı olan Squier grafları tanımlayalım.  $\wp = [X, R]$  monoid sunuşu verilsin. Bu sunuştan hareketle  $\Gamma$  Squier grafi aşağıda verildiği gibi tanımlanır.

- i)  $F(X)$  kümesi  $X$  üzerinde tanımlanan serbest monoid olmak üzere  $\Gamma$  nın köşe elemanları  $F(X)$  in elemanlarından oluşur.  $U, V \in F(X)$ ,  $\varepsilon = \pm 1$  ve  $S \in R$  olmak üzere  $\Gamma$  nın kenar elemanları  $\beta = (U, S, \varepsilon, V)$  sıralı dörtlülerinden oluşur. Ayrıca  $\beta$  kenarının giriş fonksiyonu  $\iota(\beta) = US_\varepsilon V$  ve çıkış fonksiyonu  $\tau(\beta) = US_{-\varepsilon} V$  şeklindedir.
- ii) Bir  $\beta$  kenarının ters fonksiyonu  $\beta^{-1} = (U, S, -\varepsilon, V)$  şeklindedir.

Örneğin,



Şekil 2.4: Atomik monoid resim örneği

Yukarıdaki şekilde verilen  $\beta$  kenarının, giriş fonksiyonu  $\iota(\beta) = a^2 xybc$ , çıkış fonksiyonu  $\tau(\beta) = a^2 ztbc$  ve ters fonksiyonu  $\beta^{-1} = (a^2, zt = xy, -1, bc)$  şeklindedir.

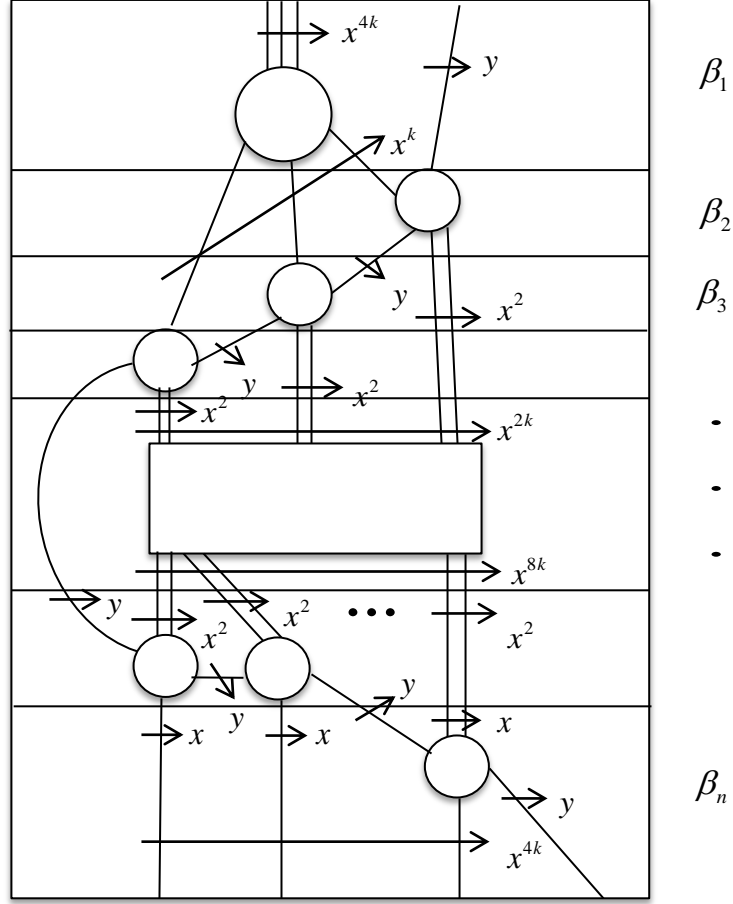
- iii)  $\tau(\beta_i) = \iota(\beta_{i+1})$  ,  $(1 \leq i \leq n)$  graf üzerinde bir  $IP$  yolu  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  şeklindeki atomik resimlerinin

$$IP = \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n \quad (2.1)$$

bir araya getirilmesiyle oluşur.

**2.2.2 Örnek:**  $X = \{x, y\}$  üreteç kümesi  $R$  bağıntı kümesi

$\{x^{4k} = x^k, xy = yx^2\}$  olmak üzere aşağıda verilen monoid resmini düşünelim.



Şekil 2.5: Yol örneği

Burada verilen  $\beta_1 = (1, x^{4k} = x^k, +1, y)$ ,  $\beta_2 = (x^{k-1}, xy = yx^2, +1, 1)$ ,  
 $\beta_3 = (x^{k-2}, xy = yx^2, +1, x^2), \dots, \beta_n = (x^{4k-1}, yx^2 = xy, -1, 1)$  şeklindedir.

Ayrıca  $IP = \beta_1\beta_2\beta_3\dots\beta_n$  şeklindedir.

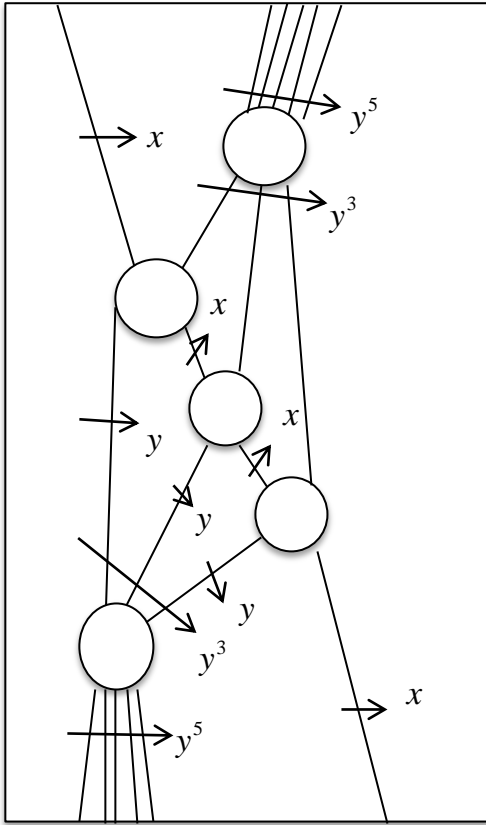
**2.2.3. Tanım:** i), ii) ve iii) maddeleriyle oluşturulan grafa **Squier graf** denir. Ayrıca bir Squier grafta, iii) maddesi ile tanımlanan her bir yola **monoid resmi** denir. Özel olarak, (1.1) deki gibi verilen bir  $IP$  resmi için,  $\iota(\beta_1) = \tau(\beta_n)$  oluyor ise bu  $IP$  resmine **küresel monoid resmi** denir. Eğer  $\iota(\beta_1) \neq \tau(\beta_n)$  ise elde edilen resme **küresel olmayan monoid resmi** adı verilir.



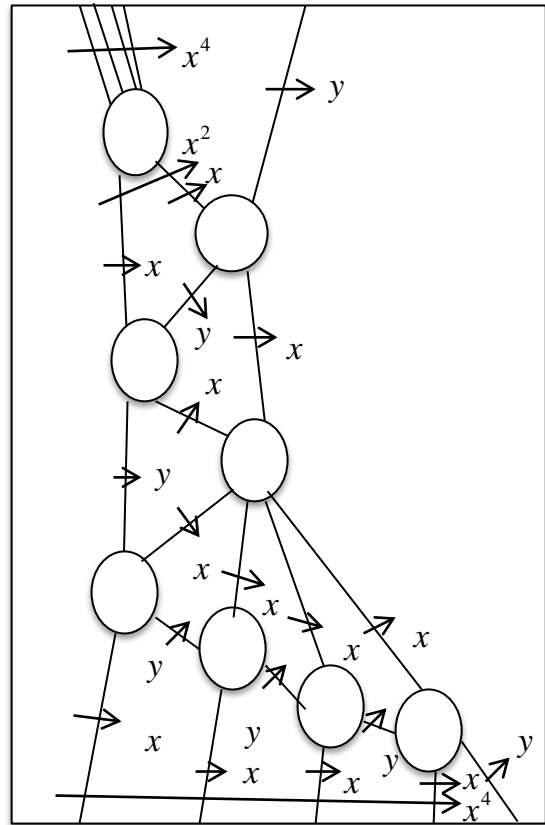
**2.2.4 Örnek:** Mertebesi 4 olan ve  $x$  ile üretilen  $M_1$  monoidi ile mertebesi 5 olan ve  $y$  ile üretilen  $M_2$  monoidinin direkt çarpım monoidi olan  $M_1 \times M_2$  nin sunuşu

$$\mathcal{S}_{M_1 \times M_2} = [x, y; x^4 = x^2, y^5 = y^3, xy = yx]$$

şeklindedir. Bu sunuşa ait küresel olan ve küresel olmayan monoid resimleri aşağıdaki gibi verilebilir.

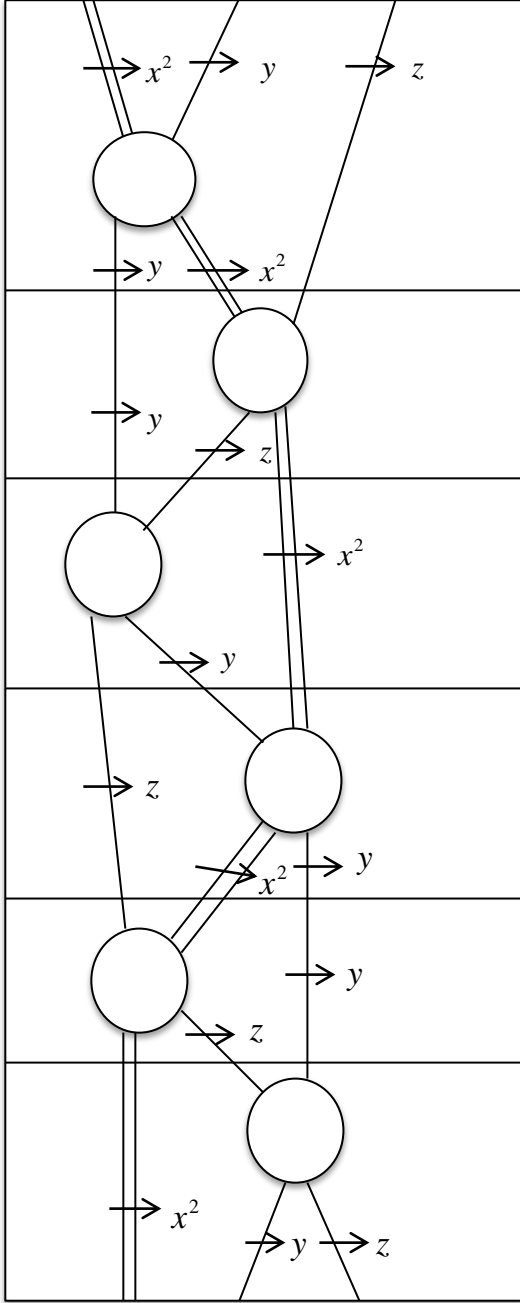


Küresel olmayan resim

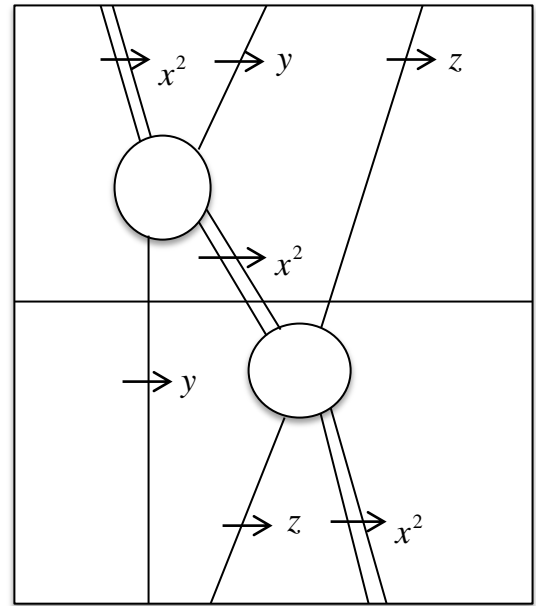


Küresel resim

**2.2.5 Örnek:** Şekil 2.6-(a) ile verilen resim küresel monoid resmidir. Şekil 2.6-(b) ile verilen resim küresel olmayan monoid resmidir.



(a)



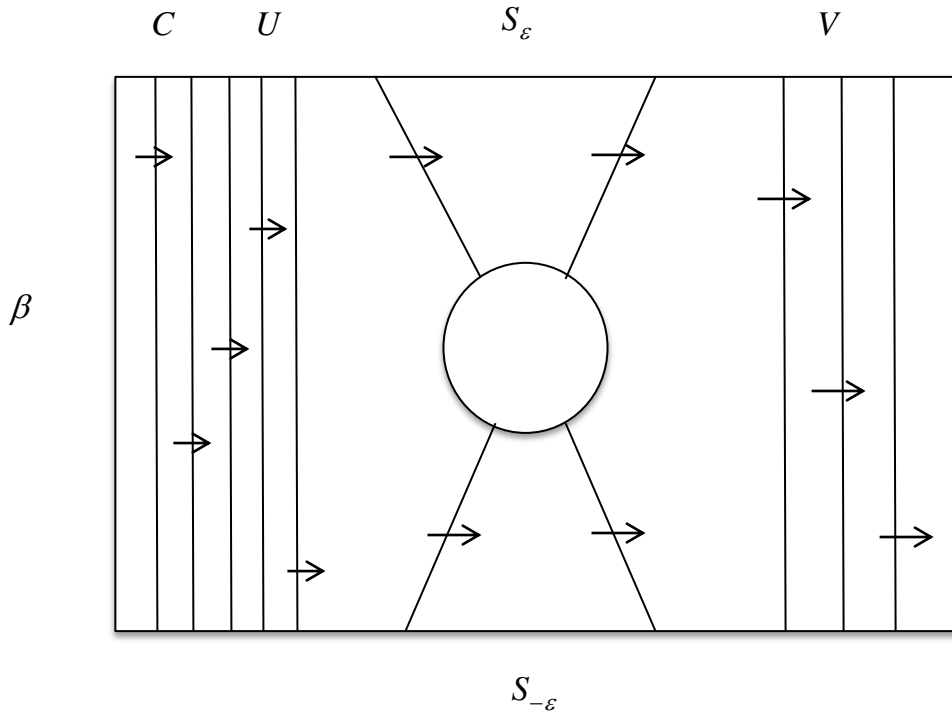
(b)

**Şekil 2.6:** Küresel ve küresel olmayan monoid resim örneği

Bir monoid resminin alt yolları da (alt resimleri) vardır. Örneğin Şekil 2.6-(b) ile verilen resim, Şekil 2.6-(a) ile verilen resmin bir alt yoludur.

$\wp = [X, R]$  monoid sunuşu ve bu sunuştan elde edilen  $\Gamma = \Gamma(\wp)$  Squier grafını düşünelim.  $U$  kelimesi  $\Gamma$  grafının bir köşe elemanı olmak üzere,  $C \in F(X)$  için  $C \cdot U$  hareketi **soldan hareket** olarak tanımlanır.

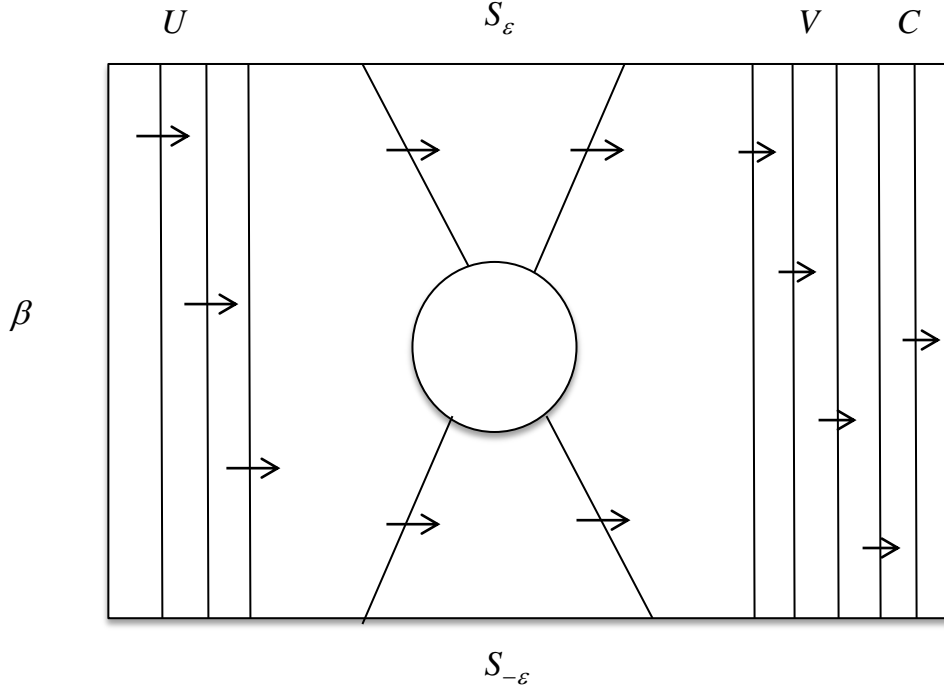
Aşağıdaki şekilde gösterilir.



Şekil 2.7: Soldan hareket

Benzer şekilde,  $\Gamma$  Squier grafında,  $V$  kelimesi  $\Gamma$  grafının bir köşe elemanı olmak üzere,  $C \in F(X)$  için  $V \cdot C$  hareketi **sağdan hareket** olarak tanımlanır.

Aşağıdaki şekilde gösterilir.

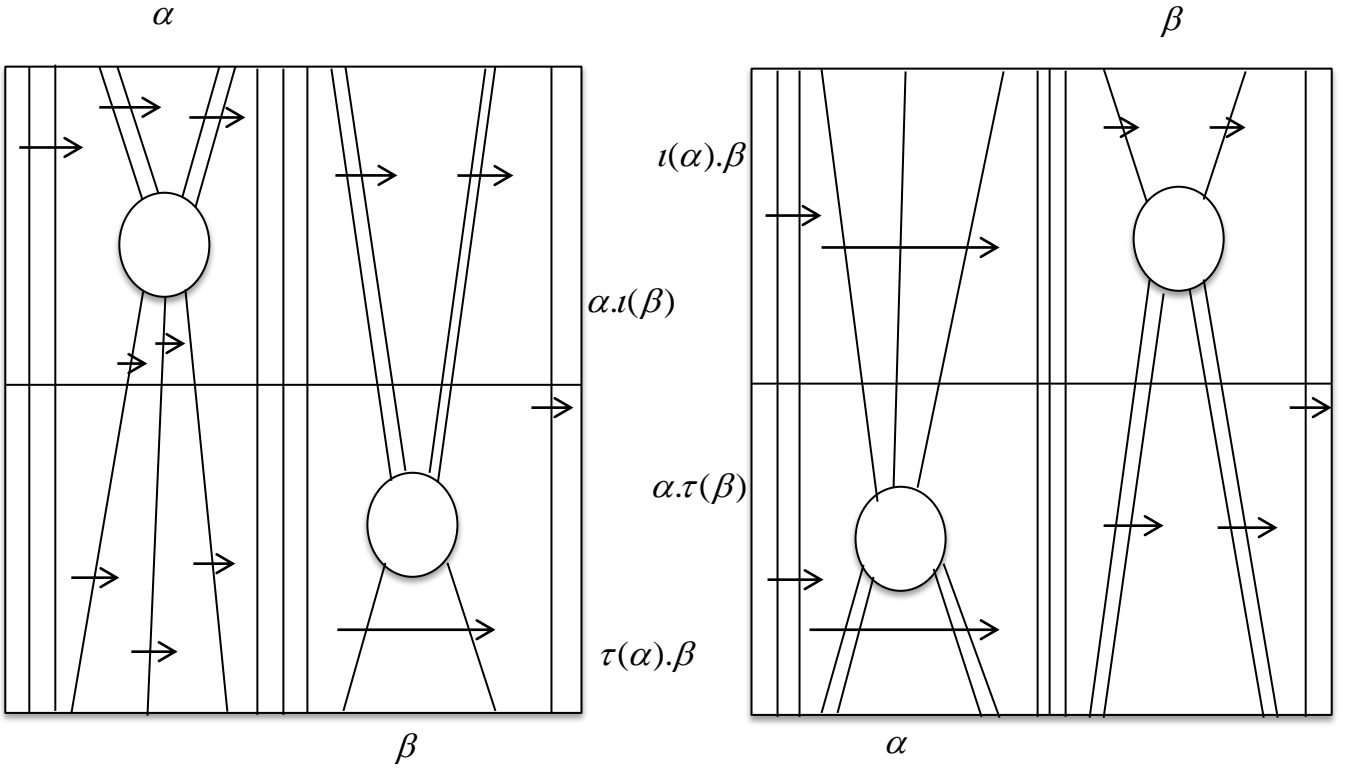


Şekil 2.8: Sağdan hareket

$\alpha$  ve  $\beta$  iki atomik monoid resmi olsun. Bu resimler üzerinde aşağıda verilen işlemler uygulanabilir. Bu işlemler

- i.  $\alpha\alpha^{-1}$  tersinir çifti silinebilir.
- ii.  $\alpha\alpha^{-1}$  tersinir çifti eklenebilir.
- iii.  $(\alpha.\iota(\beta))(\tau(\alpha).\beta)$  alt resminin  $(\iota(\alpha).\beta)(\alpha.\tau(\beta))$  alt resmi ile yer değiştirebilir.

Bu durum Şekil 2.9 ile gösterilebilir.



Şekil 2.9: Monoid resimleri üzerinde işlemler

**2.2.5 Tanım :**  $\alpha$  ve  $\beta$  iki küresel monoid resim olsun. Bu iki küresel monoid resimden biri diğerinden, sonlu sayıda i), ii) ve iii) işlemlerinin uygulanmasıyla elde edilsin. Elde edilen bu iki küresel resme **denk küresel resimler** denir.

Yollar üzerinde, yukarıda tanımlanan denklik bağıntısıyla birlikte,  $\Gamma$  grafına  $\wp$  sunuşunun **Squier Kompleksi** denir.  $\wp$  sunuşunun Squier Kompleksi  $D(\wp)$  ile gösterilir.

A küresel monoid resimlerinin kümesi olsun. Yukarıda tanımlanan i), ii) ve iii) işlemlerine ek olarak aşağıdaki şekilde iki yeni işlem daha tanımlanabilir:

- iv)  $VP^{\pm 1}W$  ( $P \in A, V, W \in F(X)$ ) formunda ki alt resimler silinebilir.
- v)  $VP^{\pm 1}W$  ( $P \in A, V, W \in F(X)$ ) formunda ki alt resimler eklenebilir.

**2.2.6 Tanım :**  $\alpha$  ve  $\beta$  iki küresel monoid resim olsun. Bu iki küresel monoid resimden biri diğerinden sonlu sayıda i), ii), iii), iv) ve v) işlemlerinin uygulanmasıyla elde edilsin. Böylece elde edilen bu iki küresel resme göre ***denk küresel resimler*** denir.

Buradan hareketle aşağıdaki Pride [30] tarafından ispatlanan ve sunuşu verilen bir monoidin üreteç resimlerini bulmamıza olanak sağlayan aşağıdaki teoremi verebiliriz.

**2.2.7 Teorem [30] :**  $A$  kümesi üzerinde tanımlanan bağıntı altında, her bir küresel monoid resmi boş resme denk ise  $A$  kümesi  $D(\emptyset)$  nin üreteç resimlerinin (trivialiser) kümesidir.

### 3. BAZI MONOİD GENİŞLEMELERİNİN ÜRETEÇ RESİMLERİ

Verilen bir monoid sunuşunun üreteç resimlerini belirlemek son derece önemlidir. Belirlediğiniz üreteç resimler yardımıyla verilen monoid sunuşunun bir genişleme oluşturup oluşturmadığını görebilir veya oluşturma koşullarını ortaya koyabilirsiniz. Böylelikle genişleme problemine üreteç resimlerini bildiğiniz monoid yapıları için çözüm getirebilirsiniz. Bu bölümde devirli monoidlerin, direkt çarpım monoidlerinin ve yarı direkt çarpım monoidlerinin üreteç resimleri üzerinde durulacaktır. Bu bölümde yer alan çalışmalara [5], [15], [16], [18] ve [34] kaynaklarından ulaşılabilir.

#### 3.1 Devirli Monoidlerin Üreteç Resimleri

$M$  bir monoid ve  $Y$  bir küme olmak üzere,

$$\begin{aligned}\psi^* : Y &\rightarrow M \\ y &\rightarrow M_y\end{aligned}$$

fonksiyonunu ele alalım.  $Y$  kümesi üzerinde,  $W$  boştan farklı bir

$$W = y_1 y_2 \dots y_s \quad (y_1, y_2, \dots, y_s \in Y)$$

kelimesi için,

$$(W)\psi_* = m_{y_1} m_{y_2} \dots m_{y_s} \quad (3.1)$$

ile tanımlanmış olan  $\psi_* : F(Y) \rightarrow M$  homomorfizmasının var olduğunu biliyoruz.

Ayrıca  $W$  boş bir kelime ise,

$$(W)\psi_* = 1_M$$

dir. (3.1) de tanımlanmış olan  $\psi_*$  homomorfizması ile bir  $M$  monoidinin sunuşunun oluşturulmasında kullanılan aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

**3.1.1 Önerme [15]** :  $\wp = [Y : S]$  bir monoid sunuşu olsun. (3.1) de verilen homomorfizmasının

$$\begin{aligned}\psi_* : M(\wp) &\rightarrow M \\ [y]_{\wp} &\mapsto m_y\end{aligned}$$

şeklinde genişletilebilmesi için gerek ve yeter şart  $s \in S$  için,

$$(S_+)\psi = (S_-)\psi$$

olmasıdır.

**3.1.2 Örnek** :  $Mat_2(\mathbf{Z}^+)$  kümesi, her bir bileşeni negatif olmayan tam sayılardan oluşan  $2 \times 2$  tipindeki matrislerin kümesi ve  $\wp = [a, b : a^3 b^2 = ba]$  bir monoid sunuşu olmak üzere,

$$m_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad m_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olsun.

$$\begin{aligned}\psi^* : \{a, b\} &\rightarrow Mat_n(\mathbf{Z}^+) \\ a &\rightarrow m_1, \quad b \rightarrow m_2\end{aligned}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım.  $(a^3 b^2)\psi^* = (ba)\psi^*$  olduğundan, 3.1.1

Önermeden,  $\psi^*$  dönüşümü

$$\psi_* : M(\wp) \rightarrow Mat_n(\mathbf{Z}^+) \quad \text{öyle ki} \quad [a]_{\wp} \mapsto m_1, [b]_{\wp} \mapsto m_2$$

homomorfizmasına genişletilebilir.



**3.1.3 Örnek:**  $Mat_3(\mathbf{Z}^+)$  kümesi, her bir bileşeni negatif olmayan tam sayılardan oluşan 3x3 tipindeki matrislerin kümesi ve  $\wp = [a, b; a b = \overset{2}{b} a]$  bir monoid sunuşu olmak üzere,

$$m_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad m_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olsun.

$$\psi^* : \{a, b\} \rightarrow Mat_n(\mathbf{Z}^+)$$

$$a \rightarrow m_1, \quad b \rightarrow m_2$$

fonksiyonunu göz önüne alalım.  $(ab)\psi^* = (b a^2)\psi^*$  olduğundan 3.1.1  $\psi^*$

Önermeden, dönüşümü

$$\psi_* : M(\wp) \rightarrow Mat_n(\mathbf{Z}^+) ; [a]_{\wp} \mapsto m_1, [b]_{\wp} \mapsto m_2$$

homomorfizmasına genişletilebilir.

**3.1.4 Tanım:**  $M$  bir monoid,  $\{m_y : y \in Y\}$  kümesi  $M$  için bir üreteç kümesi ve  $\wp = [Y : S]$  olmak üzere, eğer

$$\psi^* : Y \rightarrow M, \quad y \rightarrow m_y$$

dönüşümü,

$$\psi_* : M(\wp) \rightarrow M, \quad [y]_{\wp} \rightarrow m_y$$

homomorfizmasına genişletilebiliyorsa, bu  $\wp$  sunuşuna  **$M$  monoidinin sunuşu** denir.

**3.1.5 Teorem [15]:**  $M$  mertebesi  $k$  olan ve  $y$  ile üretilen sonlu devirli monoid olmak üzere,  $M$  nin sunuşu

$$\wp_{k,l} = [y : y^k = y^l] \quad (3.2)$$

şeklindedir.

**İspat:** (3.1) de verilen  $\psi^*$  dönüşümünü göz önüne alalım. Dolayısıyla olduğundan, 3.1.1 Önermeden  $(y^k)\psi = (y^l)\psi$  olduğundan

$$\psi_* : M(\wp_{k,l}) \rightarrow M$$

$$[y]_{\wp_{k,l}} \mapsto m$$

genişletilmiş homomorfizma elde edilir. Buradaki  $m \in \text{Gör}(\psi_*)$  olduğundan,  $\psi^*$  örtendir.  $\wp_{k,l}$  sunuşunda elde edilecek olan birbirinden farklı elemanlar

$$1, y, y^2, \dots, y^{k-l}$$

şeklinde olur. 3.1.4 Tanım ile,  $0 \leq i < l$  nin farklı elemanları

$$[1], [y], [y^2], \dots, [y^{k-l}]$$

olur. Buradan  $|M(\wp_{k,l})| = k$  elde edilip, özel olarak;  $\psi^*$  nin birebir olmamasından dolayı

$$|\text{im}(\psi_*)| < |M(\wp_{k,l})| = k$$

eşitliğini verir. Dolayısıyla  $\psi^*$  birebir olmalıdır. Bu ise ispatı tamamlar.

Tezin bundan sonraki kısımlarında  $M(\wp_{k,l})$  yi kısaca  $M_{k,l}$  şeklinde göstereceğiz. Şimdi  $M_{k,l}$  nin elemanlarını inceleyecek olursak; bu elemanlar,  $0 \leq i < k$  olmak üzere,  $[y^i]$  şeklindeki denklik sınıflarıdır. Burada  $0 \leq i < l$  için,  $[y^i]$  denklik sınıfı  $y^i$  elemanından oluşur. Diğer taraftan,  $i \geq l$

olduğunda ise  $[y^i]$  denklik sınıfı aşağıdaki şekilde sonsuz sayıda elemanlardan oluşur:

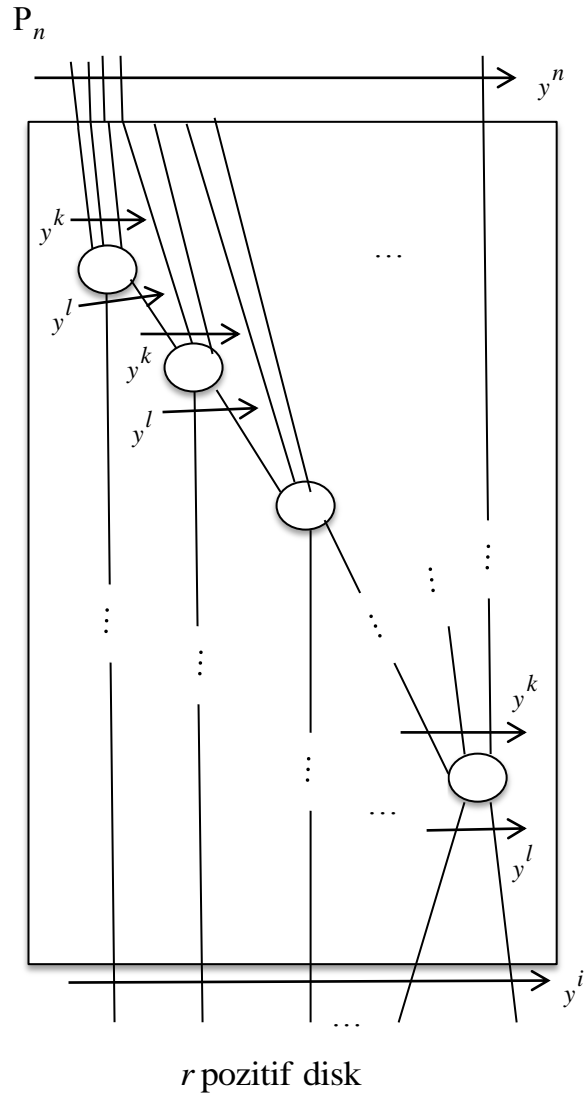
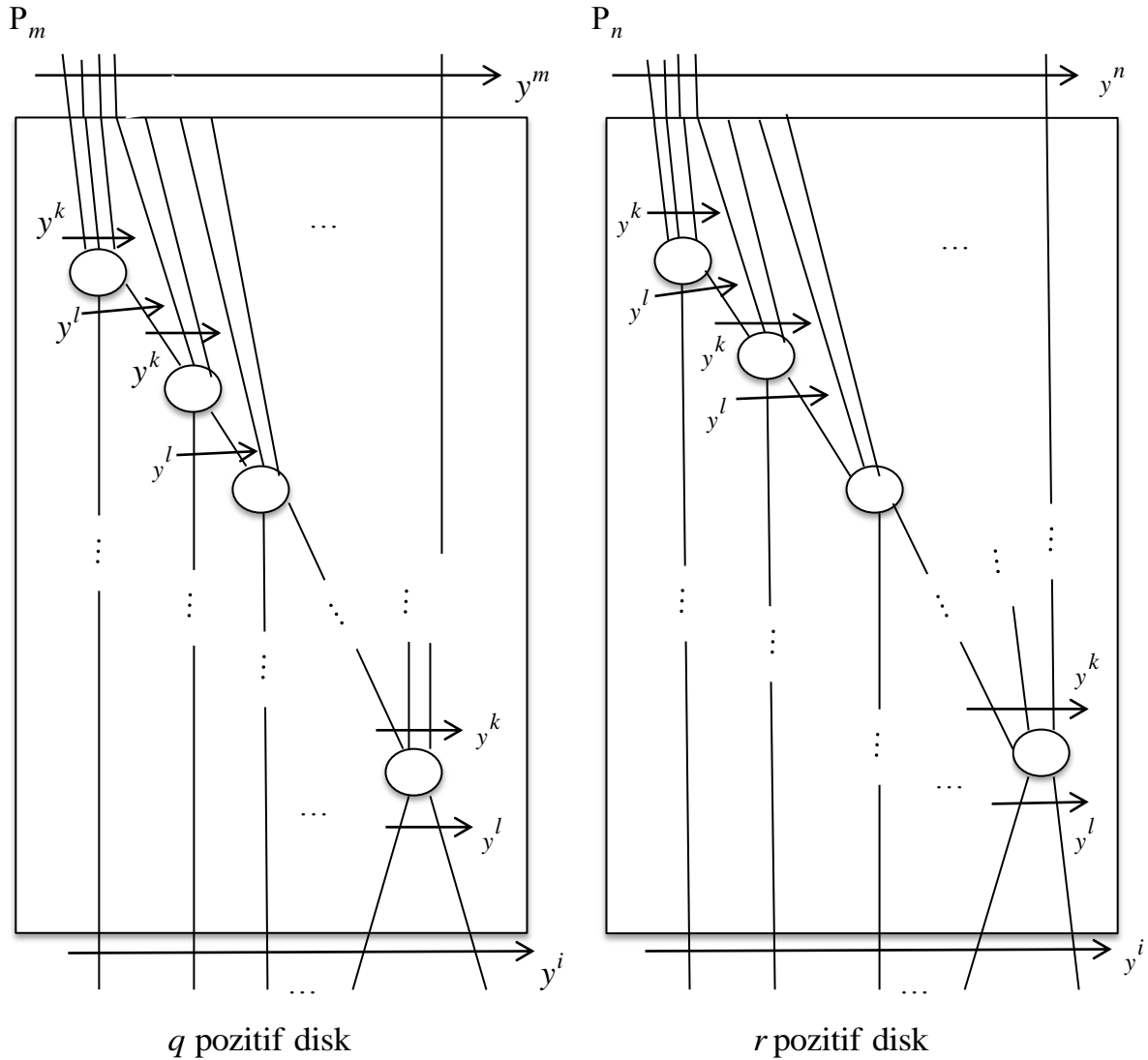
$$[y^i] = \{y^{i+q(k-l)} : q = 0, 1, 2, \dots\}$$

**3.1.6 Örnek:**  $M_{5,2}$  monoidini ele alalım. Dolayısıyla denklik sınıfları

$$[y^0] = \{1\}, [y^1] = \{y\}, [y^2] = \{y^2, y^5, y^8, \dots\}, [y^3] = \{y^3, y^6, y^9, \dots\}$$

ve  $[y^4] = \{y^4, y^7, y^{10}, \dots\}$  şeklindedir.

Ayrıca  $M_{k,l}$  monoidine ait üreteç resimleri [15] de belirtildiği gibi  $[y^i]$  sınıfları için,  $m = i + q(k-l)$  ve  $n = i + s(k-l)$  ( $q, s = 0, 1, 2, \dots$ ) olmak üzere,

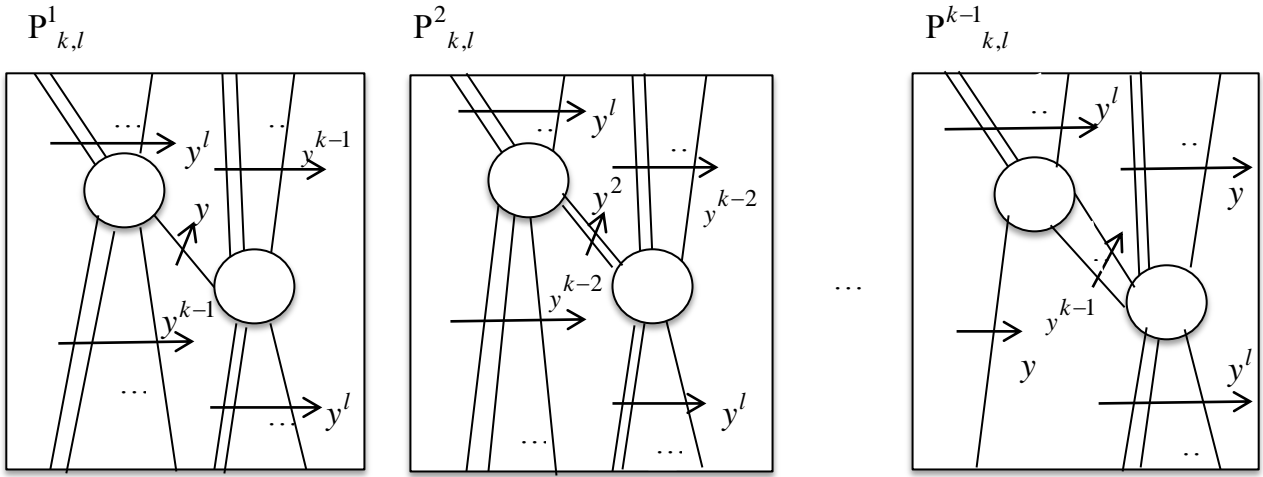


şeklindedir. Şimdi,  $M_{k,l}$  devirli monoidinin Squier kompleksinin üreteç kümesini tanımlamak için aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

**3.1.7 Önerme [15]:**  $M$  monoidinin sunuşu 3.1.4 Önerme de verilen (3.2) deki gibi olsun. Dolayısıyla  $D(\wp_{k,l})$  Squier kompleksinin üreteç kümesi, Şekil 3.1 de gösterildiği şekilde,

$$P_{k,l}^i \quad (1 \leq i \leq k-l)$$

resimlerden oluşur.



**Şekil 3.1:**  $D(\wp_{k,l})$  devirli monoidlerin üreteç resimleri

### 3.2. Direkt Çarpım Monoidin Üreteç Resimleri

$A$  ve  $K$  monoidlerinin sunuşları sırasıyla  $\wp_A = [X : R]$  ve  $\wp_K = [Y : S]$  olarak verilsin.  $A \times K$  direkt çarpım monoidi

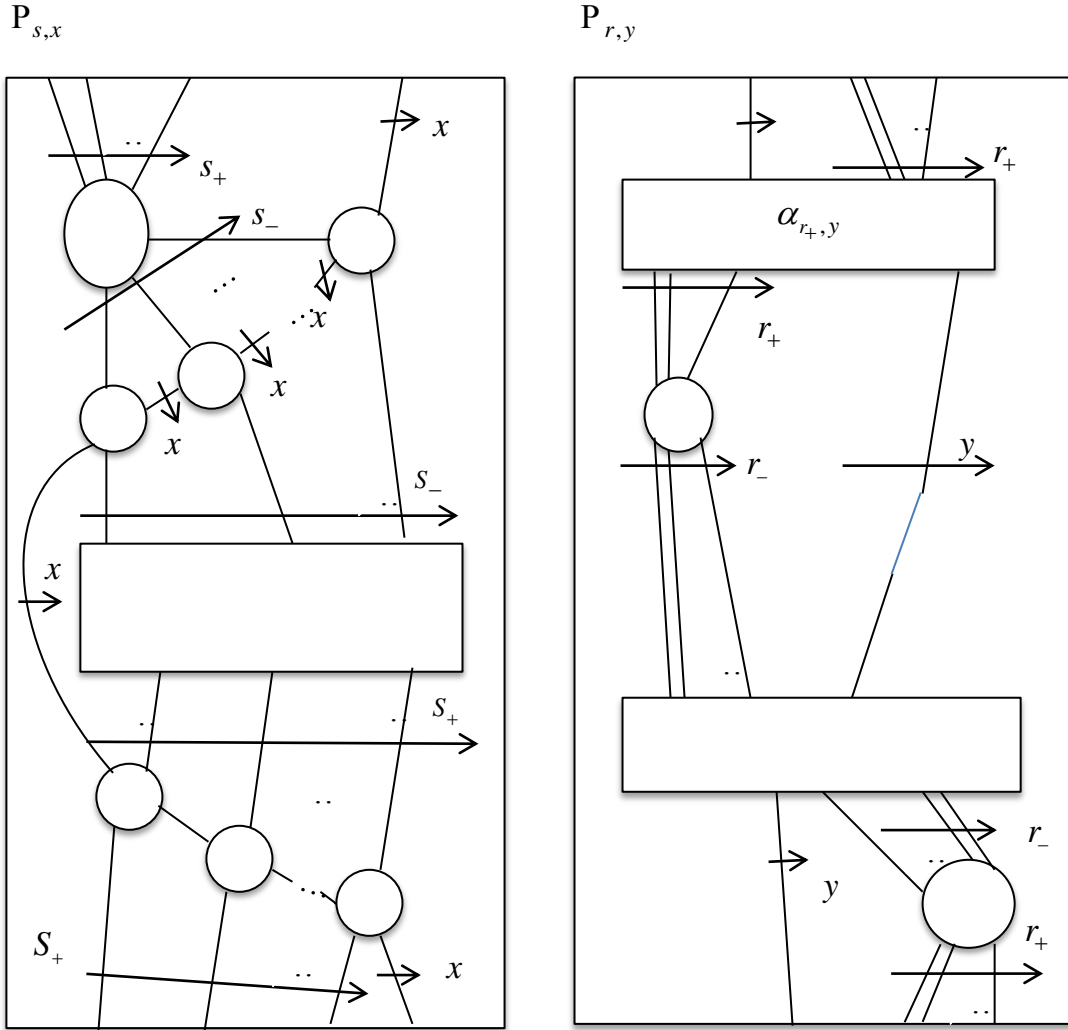
$$(x, y)(x', y') = (xx', yy')$$

işlemi ile tanımlanır. Ayrıca bu işlem altında  $A \times K$  monoidinin sunuşu,  $x \in X, y \in Y$  için,

$$\mathcal{P}_{A \times K} = [X, Y : R, S, yx = xy]$$

olarak tanımlanır [24-27].

Burada  $A \times K$  monoidinin üreteç resimlerini [15] den hareketle aşağıda verildiği gibidir.



Şekil 3.2: Direkt çarpımın üreteç resimleri

**3.2.1 Örnek:**  $A$  monoidinin sunuşu  $\wp_A = [x : x^{3t} = x^t]$  ve  $K$  monoidinin sunuşu  $\wp_K = [y : y^{4t} = y^t]$  olsun. Bu durumda  $M = K \times A$  direkt çarpımının sunuşu

$$\wp_M = [y, x : y^{4t} = y^t, x^{3t} = x^t, yx = xy]$$

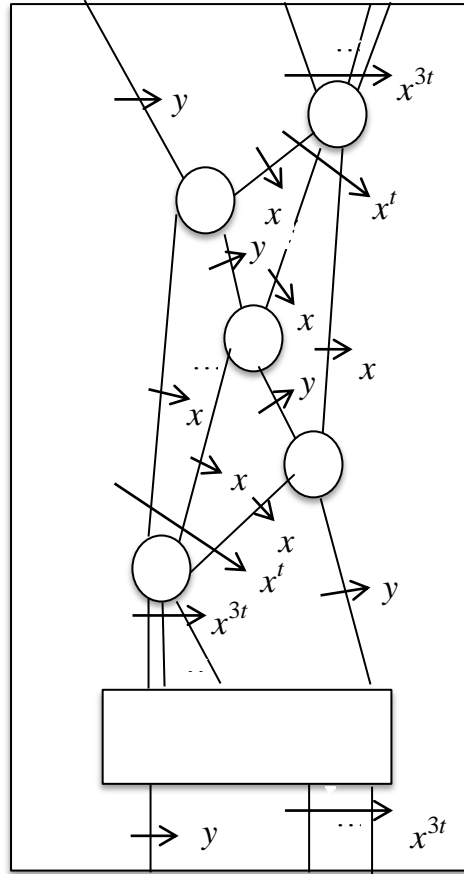
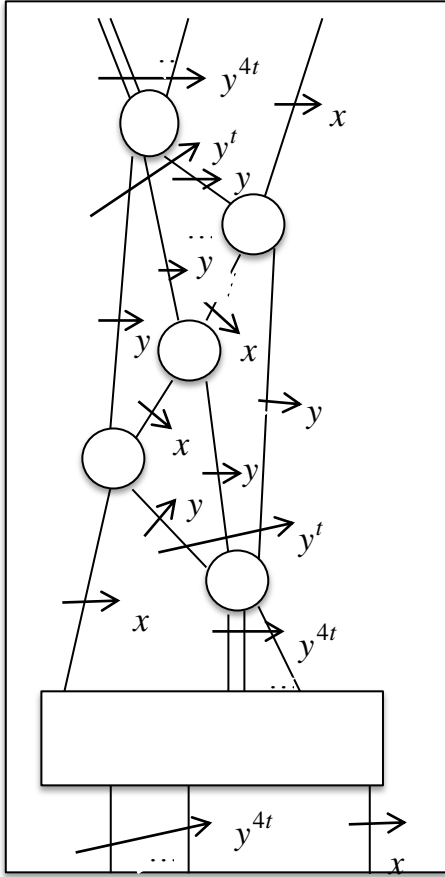
şeklindedir.

Şimdi  $M$  nin üreteç resimlerini belirleyelim. Bunun için,

$$y^{4t} = y^t, x^{3t} = x^t, yx = xy$$

elemanlarının oluşturduğu resimleri bulmamız gerekir.

Bu resimler aşağıda verildiği gibidir.



### 3.3 Monoidlerin Yarı Direkt Çarpımının Üreteç Resimleri

**3.3.1 Tanım:**  $A$  ve  $K$  iki monoid olsun. Her  $a \in A$  ve  $k \in K$  için,

$$\begin{aligned}\theta: A &\rightarrow \text{End}(K) \\ a &\rightarrow \theta_a (a \in A)\end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan  $\theta$  homomorfizması için

$$(k)\theta_{a_1 a_2} = ((k)\theta_{a_1})\theta_{a_2}$$

olmak üzere  $K$  nın  $A$  ile olan yarı direkt çarpımı,

$$(a, k)(a', k') = (aa', (k)\theta_a k') \quad (3.4)$$

şeklinde tanımlanır.

**3.3.2 Teorem [25]:**  $M$  kümesi (3.4) ile verilen işlem altında bir monoid oluşturur.

**İspat:** (1,1) sıralı ikilisi birim elemanıdır. Şimdi  $M$  nin birleşme özelliğinin var olduğunu ispatlayalım. Her  $(a_1, k_1)$ ,  $(a_2, k_2)$  ve  $(a_3, k_3) \in A \times K$  için,

$$\begin{aligned}[(a_1, k_1)(a_2, k_2)](a_3, k_3) &= (a_1 a_2, (k_1)\theta_{a_2} k_2)(a_3, k_3) \\ &= (a_1 a_2 a_3, ((k_1)\theta_{a_2} k_2)\theta_{a_3} k_3) \\ &= (a_1 a_2 a_3, ((k_1)\theta_{a_2 a_3})(k_2)\theta_{a_3} k_3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a_1, k_1)[(a_2, k_2)(a_3, k_3)] &= (a_1, k_1)(a_2 a_3, (k_2)\theta_{a_3} k_3) \\ &= (a_1 a_2 a_3, (k_1)\theta_{a_2 a_3} (k_2)\theta_{a_3} k_3)\end{aligned}$$

şeklindedir.

Her  $(a, k) \in A \times K$  birimi için,

$$(a, k)(1_A, 1_K) = (a1_A, k1_K) = (a, k)$$

$$(1_A, 1_K)(a, k) = (1_A a, 1_K k) = (a, k)$$

şeklindedir.

**3.3.3 Tanım:** (3.4) de verilen işlem ile tanımlanan  $M$  monoidine  $K$  nın  $A$  ile olan *yarı direkt çarpımı* denir ve  $M = Kx_{\theta}A$  ile gösterilir.

**3.3.4 Teorem [24]:**  $A$  monoidinin sunuşu  $\wp_A = [X : R]$  ve  $K$  monoidinin sunuşu  $\wp_K = [Y : S]$  olsun. Özel olarak  $t$  kümesi

$$yx = x((y)\theta_x) \quad (x \in X, y \in Y)$$

formundaki bütün bağlantıların kümesi olmak üzere,  $M$  yarı direkt çarpım monoidinin sunuşu

$$\wp_M = [X, Y : R, S, t] \quad (3.5)$$

şeklindedir.

Şimdi  $M = Kx_{\theta}A$  yarı direkt çarpım monoidinin üreteç resimlerini belirleyelim.

$W = y_1 y_2 \dots y_m$  kelimesi  $Y$  üzerinde tanımlanan pozitif bir kelime olmak üzere, her  $x \in X$  için,

$$(W)\theta_x = (y_1)\theta_x (y_2)\theta_x \dots (y_m)\theta_x$$

eşitliği vardır.

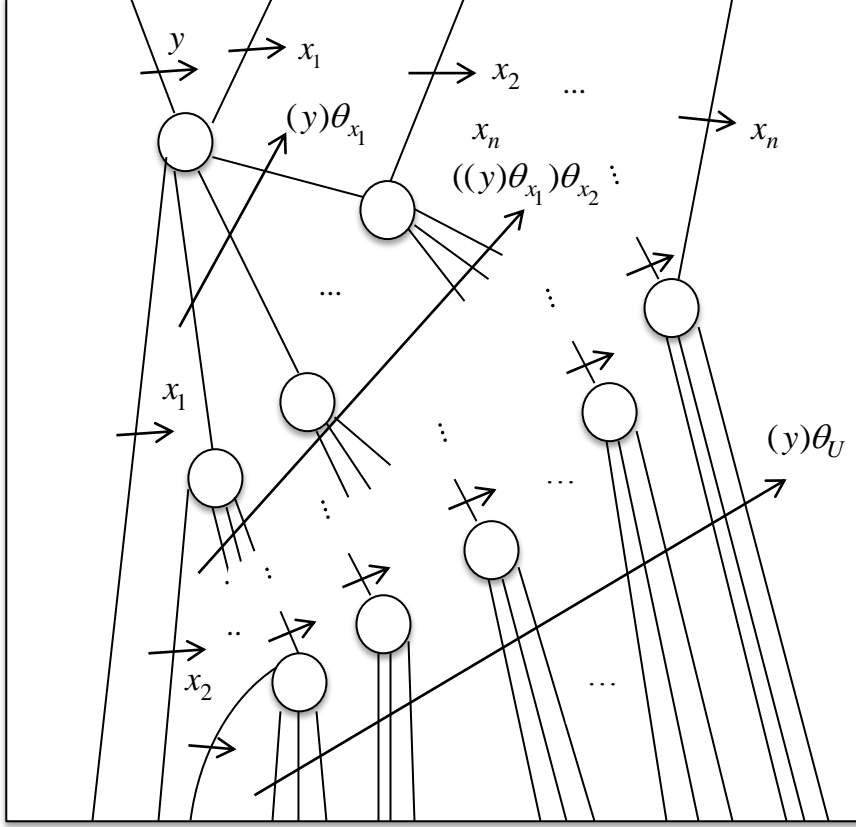
Benzer şekilde  $U = x_1 x_2 \dots x_n$  kelimesi  $X$  üzerinde tanımlanan pozitif bir kelime olsun.

$$(y)\theta_U = (\dots((y)\theta_{x_1})\theta_{x_2})\theta_{x_3} \dots \theta_{x_n})$$

olarak tanımlanır. Bu resme  $\beta_{U,y}$  dersek, bu resim aşağıda verildiği gibidir.



$\beta_{U,y}$



Şimdi  $s \in S$  ve  $x \in X$  sunuşunu göz önüne alalım.

Ayrıca  $\wp_M = [X, Y : R, S, t]$  olmak üzere,

$$[(s_+) \theta_x]_{\wp_K} = [(s_-) \theta_x]_{\wp_K}$$

dır. Böylece  $\wp_K$  sunuşu üzerinde,  $\mathcal{Q}_{s,x}$  küresel olmayan bir resim oluşur. Bu küresel resmin başlangıcı

$$\iota(\mathcal{Q}_{s,x}) = (s_+) \theta_x$$

ve bitişi de

$$\tau(\mathcal{Q}_{s,x}) = (s_-) \theta_x$$

şeklindedir.

Benzer şekilde,  $r \in R$  ve  $y \in Y$  olmak üzere,  $\alpha_{r_+,y}$  ve  $\alpha_{r_-,y}$  küresel olmayan resimler elde edilip, bu resimler sadece  $t$  bağıntısını içeren disklerden oluşmaktadır. Ayrıca,

$$[(y)\theta_{r_+}]_{\wp_K} = [(y)\theta_{r_-}]_{\wp_K}$$

olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla  $\wp_K$  sunuşu üzerinde, küresel olmayan bir  $\mathbf{C}_{y,\theta_r}$  resmi oluşur. Bu küresel olmayan resmin başlangıcı

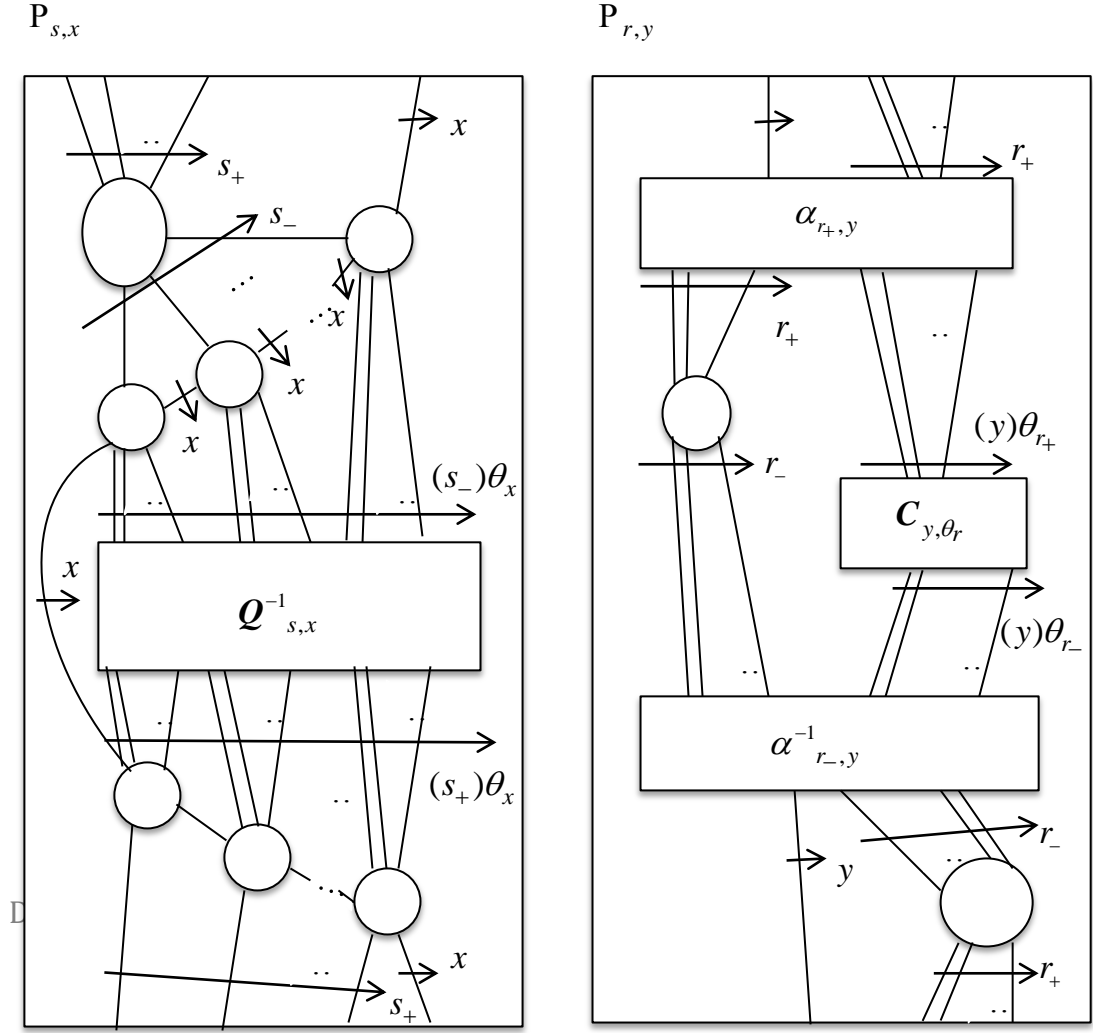
$$\iota(\mathbf{C}_{y,\theta_r}) = (y)\theta_{r_+}$$

ve bitişi de

$$\tau(\mathbf{C}_{y,\theta_r}) = (y)\theta_{r_+}$$

şeklindedir.

Küresel olmayan resimler kullanılarak, Şekil 3.3 de çizilen, küresel olan  $P_{s,x}$  ve  $P_{r,y}$  resimleri elde edilmiştir. Bu resimlerin yarı direkt çarpımının üreteç resimleridir.



Şekil 3.3: Yarı direkt çarpımın üreteç resimleri

**3.3.5 Teorem [15]:**  $M = Kx_{\theta}A$  sunuşu (3.5) de de belirtildiği gibi  $\wp_M$  ile gösterilmiş olan bir yarı direkt çarpım olmak üzere  $X_A$  ve  $X_K$ , sırasıyla  $D(\wp_A)$  ve  $D(\wp_K)$  Squier kompleksinin üreteç kümeleri olsun. O zaman

$$C_1 = \{P_{s,x} : s \in S, x \in X\} \text{ ve } C_2 = \{P_{r,y} : r \in R, y \in Y\}$$

olmak üzere  $D(\wp_M)$  nin üreteç kümesi

$$X_M = X_A \cup X_K \cup C_1 \cup C_2$$

şeklindedir.

3.3.5 Teorem yardımıyla verilen bir yarı direkt çarpımın üreteç resimlerini belirlediğimiz zaman bu monoidlerde genişleme probleme çözmüş olursunuz. Çünkü üreteç resimleri küresel resim yapmak için ortaya konan koşullar aynı zamanda o monoidin genişleme probleminin çözümüne olanak sağlayan koşullardır.

Dikkat edilirse direkt çarpımlar yarı direkt çarpımın özel bir halidir. Yarı direkt çarpımda özel olarak homomorfizmayı birim homomorfizması seçerseniz direkt çarpımlara ulaşmış olursunuz.

Şimdi yarı direkt çarpımın üreteç resimleri için aşağıdaki örneği verebiliriz.

**3.3.6 Örnek:**  $A$  monoidinin sunuşu  $\wp_A = [x : x^{3t} = x^t]$  ve  $K$  monoidinin sunuşu  $\wp_K = [y : y^{4t} = y^t]$  olsun. Ayrıca

$$\begin{aligned} \theta : A &\rightarrow \text{End}K \\ x &\mapsto \theta_x(y) = y^2 \end{aligned}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda  $M = Kx_{\theta}A$  yarı direkt çarpımının sunuşu

$$\wp_M = [y, x : y^{4t} = y^t, x^{3t} = x^t, yx = xy^2]$$

şeklindedir.

Şimdi  $M$  nin üreteç resimlerini belirleyelim. Elimizde,

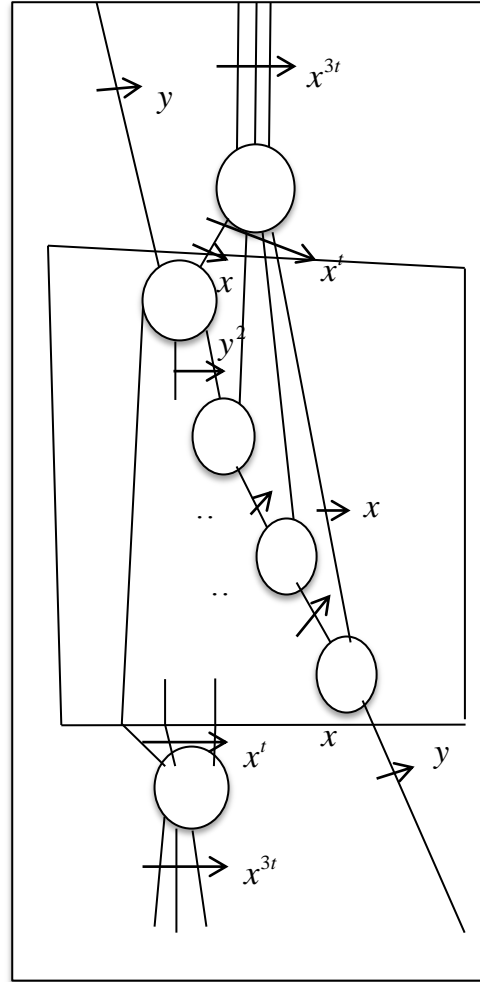
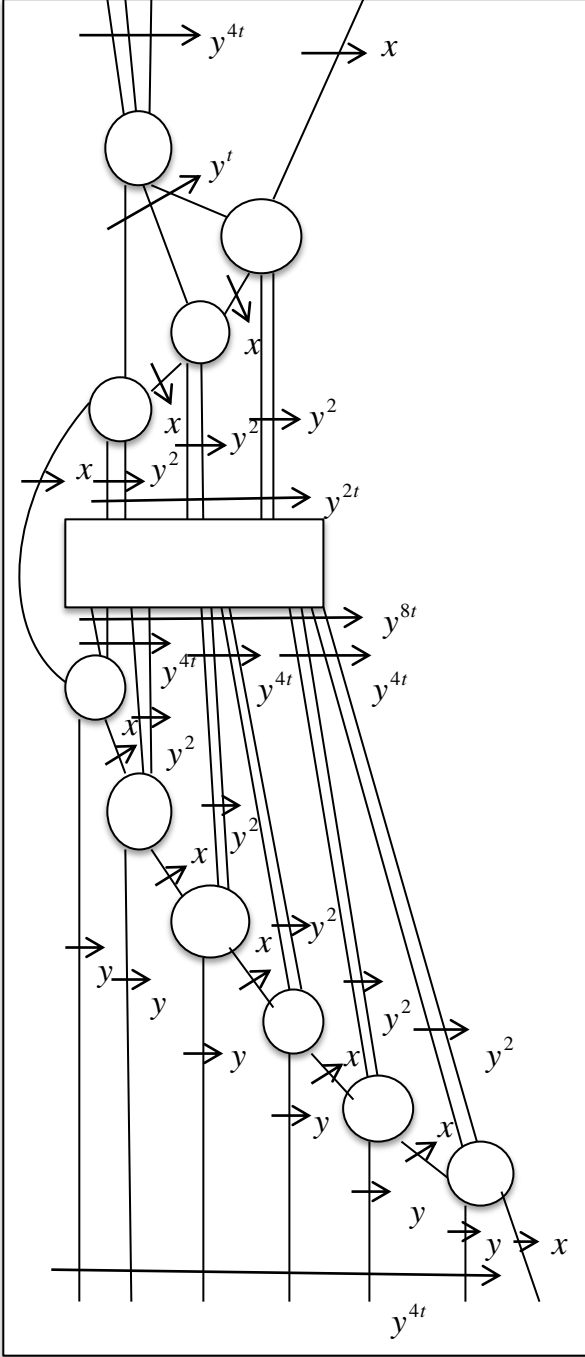
$$y^{4t} = y^t, x^{3t} = x^t, yx = xy^2$$

elemanlarının oluşturduğu resimleri bulmamız gerekir. Burada

$$y^{4t} = y^t, x^{3t} = x^t$$

elemanlarının resimleri Şekil 3.1 den kolaylıkla görülebilir. Şimdi  $y^{4t} = y^t, x^{3t} = x^t, yx = xy^2$  ile oluşturulmuş üreteç resimlerine bakalım.

Bu resimler aşağıda verildiği gibidir.



Şekil 3.4: Yarı direkt çarpımın üreteç resimleri örneği

## 4. DEVİRLİ MONOİDLERİN PEİFFER ÇARPIMININ ÜRETEÇ RESİMLERİ

Bu bölümde, bağıntılarının zor tanımlanabilmesi açısından bilimsel anlamda üzerinde zor sonuçlar türetilen bir konu olan monoidlerin Peiffer çarpımı üzerinde duracağız. Bu bölümde elde edilen sonuçlar tarafımızdan ortaya konmuş yeni sonuçlardır.

$A$  ve  $K$  herhangi iki monoid olsun. Ayrıca her  $a \in A$  ve  $k \in K$  için  $A \times K$  üzerinde  $(a, k) \mapsto a^k \in A$  ve  $(a, k) \mapsto k^a \in K$  hareketleri tanımlanmış olsun. Burada  $(a^k)^{k'} = a^{kk'}$  ( $k' \in K$ ) ve  $(k^a)^{a'} = k^{aa'}$  ( $a' \in A$ ) şeklindedir. Ayrıca  $N$  kümesi  $A$  ile  $K$  nin serbest çarpımı olan  $A * K$  kümesinin

$$ka = ak^a \text{ ve } ak = ka^k$$

bağıntılarına göre oluşturulmuş bir normal kapanış kümesi olsun. Bu durumda  $A$  ile  $K$  nin peiffer çarpımı

$$A \triangleright \triangleleft K = A * K \mid N$$

kümesidir. Ayrıca  $A$  monoidinin sunuşu  $\wp_A = [Y : S]$  olsun. Buna göre  $A \triangleright \triangleleft K$  nin temsili

$$\wp_{A \triangleright \triangleleft K} = [X, Y; R, S, xy = yx^y, yx = xy^x] \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlanır [11].

Burada verilen  $x^y$  ve  $y^x$  hareketlerini monoid genişlemesi olacak şekilde belirlemek çok zordur. Bu belirlemeyi yaptığımız zaman bu monoid için genişleme problemini çözmüş olursunuz. Gruplar üzerinde cebirsel yönden [2] de Peiffer

çarpımın  $x^y$  ve  $y^x$  hareketlerini çözümlenmeye dair çalışmalar yapmışlardır. Biz bu kısımda devirli monoidler üzerinde monoid resimlerini kullanarak bu hareketlerin bazı özel koşullar altında çözümüne yönelik çalışmalar yapacağız.

#### 4.1. Devirli Monoidlerin Peiffer Çarpımının Üreteç Resimleri

$A$ ,  $x$  ile üretilen ve sunuşu  $\wp_A = [X; x^m = x^k]$  olan ve  $K$ ,  $y$  ile üretilen ve sunuşu  $\wp_K = [Y; y^n = y^s]$  olan devirli monoidler olsunlar.

Ayrıca  $x^y = x^a$  ve  $y^x = y^b$  ( $a, b \in \mathbf{Z}^+$ ) olarak alalım. Bu durumda (4.1) den hareketle

$$\wp_{A \triangleright \triangleleft K} = [x, y; x^m = x^k, y^n = y^s, xy = yx^a, yx = xy^b] \quad (4.2)$$

sunuşu elde edilir. Elde edilen bu sunuş  $a$  ve  $b$  nin hangi durumlarında acaba monoid genişlemesi elde edebiliriz? Şimdi bu sorunun çözümüne olanak sağlayan aşağıdaki teoremi verebiliriz.

**4.1.1 Teorem:** (4.2) de verilen  $\wp_{A \triangleright \triangleleft K}$  sunuşunu düşünelim. Bu sunuşun Peiffer çarpım oluşturabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$b^m \equiv b^k \pmod{n-s} \text{ ve } a^n \equiv a^s \pmod{m-k}$$

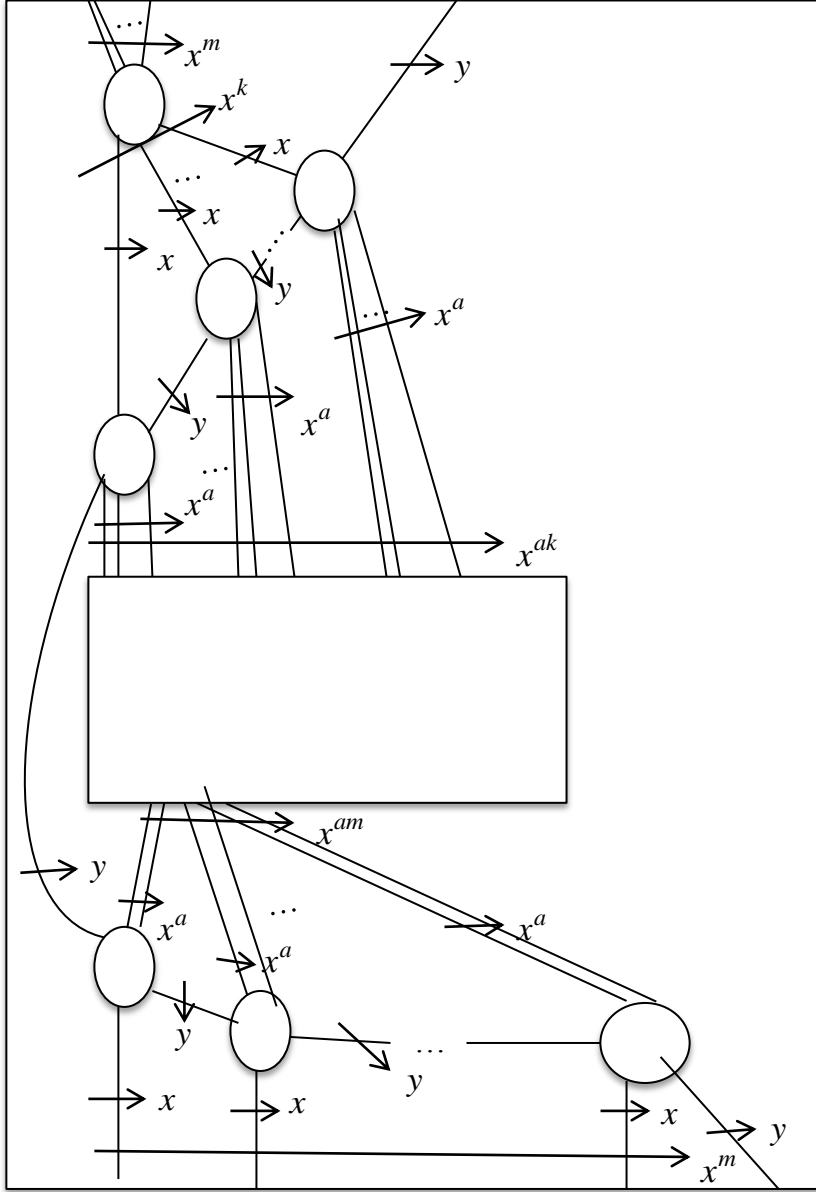
şeklindedir.

**İspat:** (4.2) de verilen

$$\wp_{A \triangleright \triangleleft K} = [x, y; x^m = x^k, y^n = y^s, xy = yx^a, yx = xy^b]$$

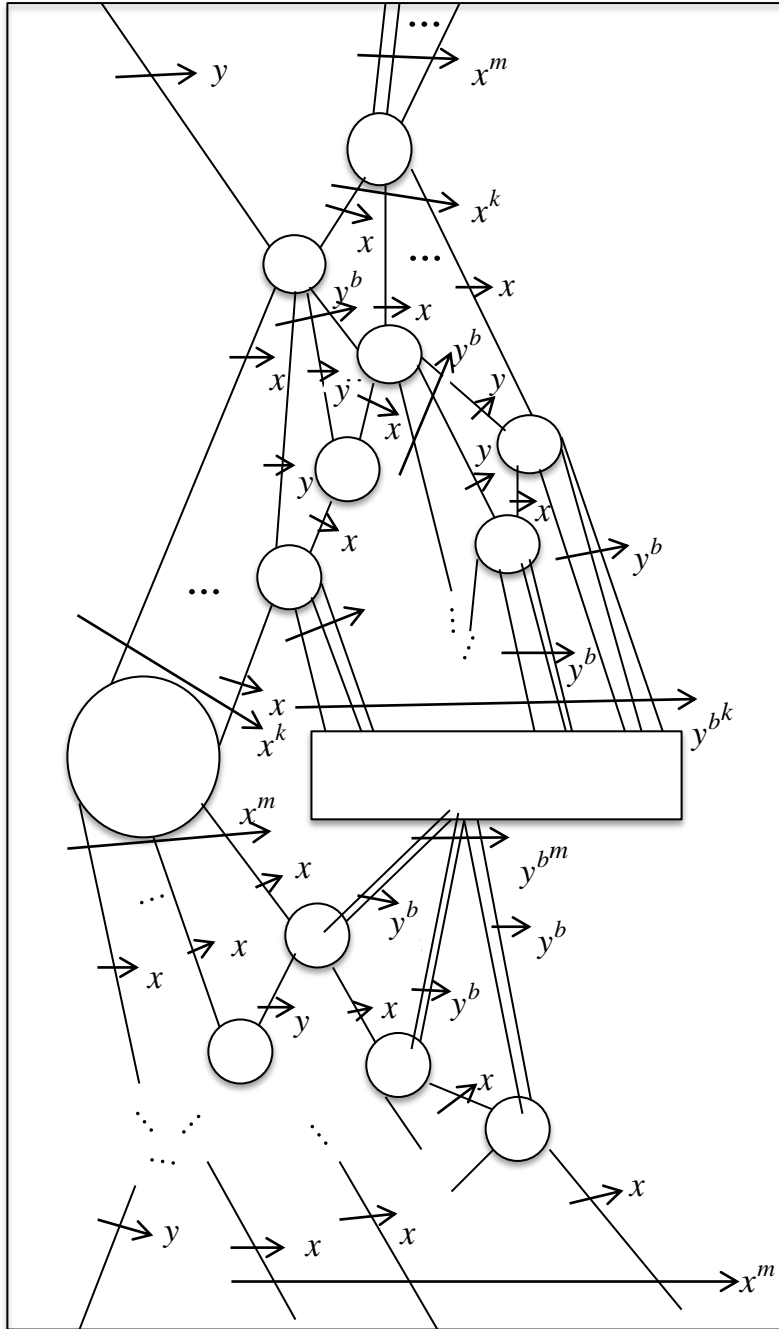
sunuşunu düşünelim. Kabul edelim ki bu sunuşumuz Peiffer çarpım oluştursun. Ayrıca bu sunuşta yer alan  $x^m = x^k$ ,  $y^n = y^s$ ,  $xy = yx^a$ ,  $yx = xy^b$  bağıntılarını düşünelim. Bu bağıntılardan hareketle  $x^m y$ ,  $yx^m$ ,  $y^n x$  ve  $xy^n$  çakışmalarını elde

ederiz. Bu akışmalardan sırasıyla Şekil 4.1, Şekil 4.2, Şekil 4.3 ve Şekil 4.4 de verilen üreteç resimlerini elde ederiz.

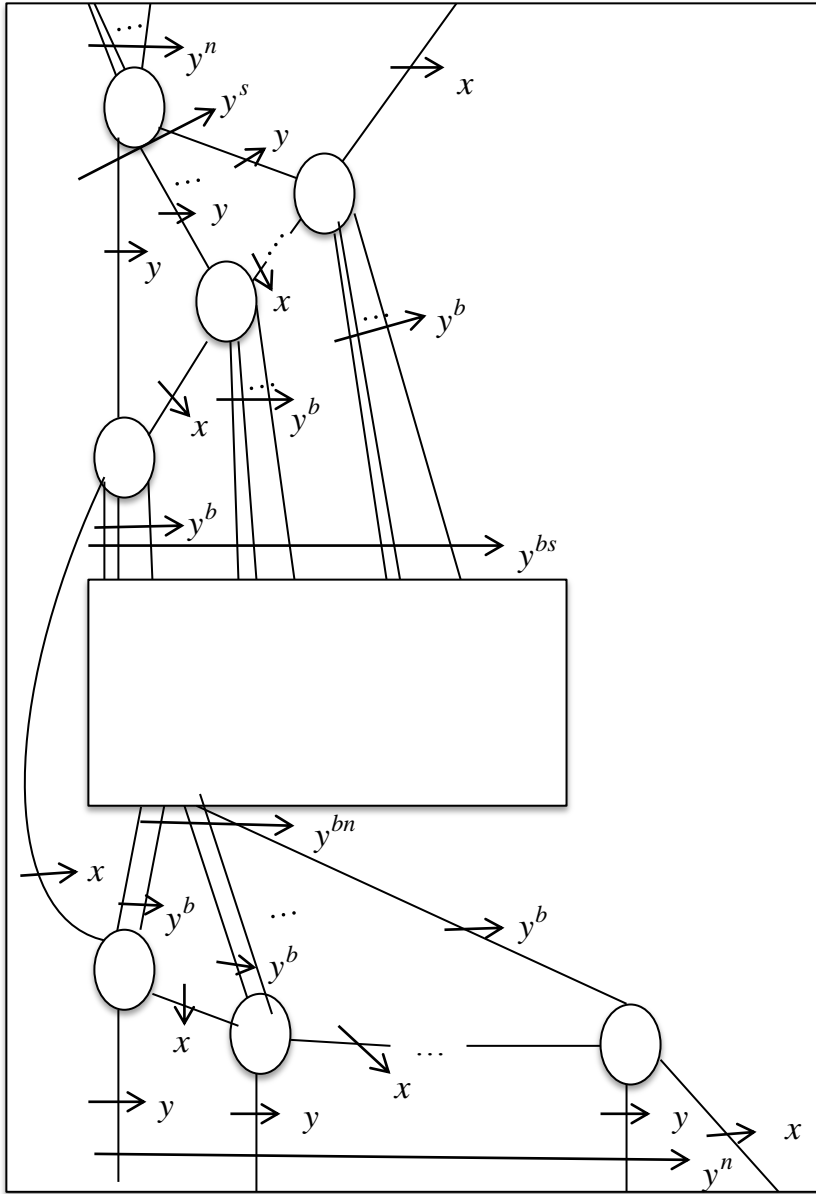


Şekil 4.1: Peiffer arpımın üreteç resimleri

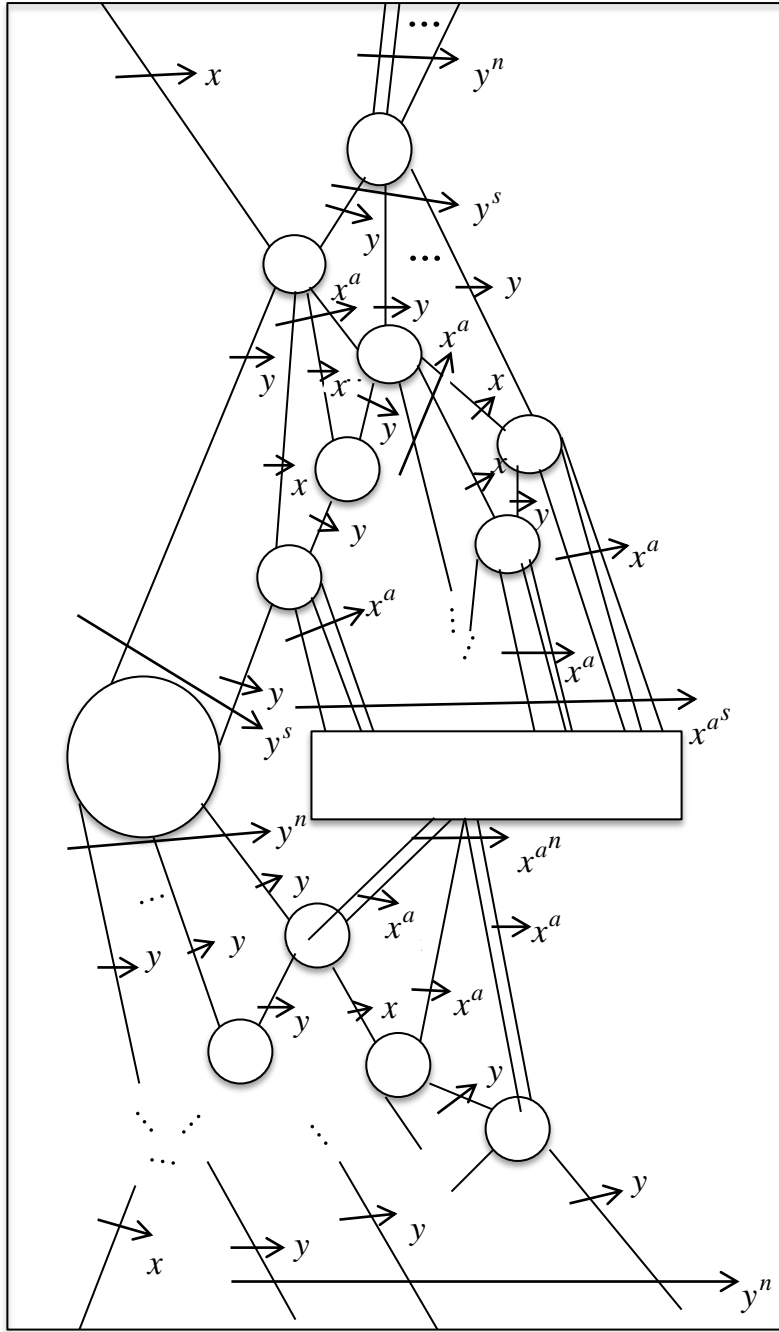




Şekil 4.2: Peiffer çarpımın üreteç resimleri



**Şekil 4.3:** Peiffer çarpımının üreteç resimleri



Şekil 4.4: Peiffer çarpımın üreteç resimleri

Şimdi Şekil 4.1 de verilen üreteç resmini düşünelim. Bu resim  $x^m = x^k$  bağıntısından hareketle  $x^{am} = x^{ak}$  elde edileceğinden dolayı küresel bir resimdir. Şekil 4.2 de ise elde edilen resmin küresel olması için  $y^{b^k} = y^{b^m}$  eşitliğinin sağlanması gerekir. Elimizde  $y^n = y^s$  bağıntısı var olduğundan  $y^{b^k} = y^{b^m}$  eşitliğinin sağlanması için  $b^m \equiv b^k \pmod{n-s}$  denkliği gerekmektedir. Şekil 4.3 de verilen resim  $y^n = y^s$  ve buradan da  $y^{bs} = y^{bn}$  sağlanacağından küresel bir resimdir. Son olarak Şekil 4.1 de verilen resmi düşünelim. Bu resmin küresel olması için  $x^{a^s} = x^{a^n}$  eşitliğinin sağlanması gerekir. Sunuşumuzda  $x^m = x^k$  bağıntısı var olduğundan  $x^{a^s} = x^{a^n}$  eşitliğinin sağlanması için  $a^s \equiv a^n \pmod{m-k}$  denkliği gerekmektedir. Buda bizi aradığımız sonuçlara ulaştırır.

Şimdi kabul edelim ki elimizde  $b^m \equiv b^k \pmod{n-s}$  ve  $a^n \equiv a^s \pmod{m-k}$  bağıntıları olsun. Bu durumda Şekil 4.1, Şekil 4.2, Şekil 4.3 ve Şekil 4.4 de verilen bütün resimler küreseldir. Buda bize (4.2) de verilen

$$\mathcal{O}_{A \triangleright \triangleleft K} = [x, y; x^m = x^k, y^n = y^s, xy = yx^a, yx = xy^b]$$

sunuşunun Peiffer çarpım tanımladığını söyler. Böylece ispat tamamlanmış olur.

## 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Tezimizde grup, monoid ve yarı grup teorisinde önemli bir yere sahip olan genişleme problemi (extension problem) üzerinde durulmuştur. Bu problemin çözümüne yönelik sonuçlar, bağıntılara geometrik bakış açısından bakan bir metod olan monoid resimleri kullanılarak yapılmıştır. Geometrik metodun temelini oluşturan üreteç resimleri kavramı üzerinde durulmuş ve bazı önemli monoidlerin üreteç resimleri üzerinde çalışmalar yapılmıştır. Özellikle devirli monoidlerin üreteç resimleri, direkt çarpım monoidin üreteç resimleri ve monoidlerin yarı direkt çarpımının üreteç resimleri üzerinde durulup literatürde var olan bir takım önemli teorem ve örneklere tezimizin 2. ve 3. bölümlerinde yer verilmiştir. Tezimizin son bölümünde ise devirli monoidlerin Peiffer çarpımının üreteç resimleri üzerinde durulmuş ve tarafımızdan yeni bir sonuç ortaya konmuştur.

## 6. KAYNAKLAR

[1] Agore, A.I., Militaru, G., “Crossed product of cyclic groups”, *Czechoslovak Mathematical Journal*, 60 , 889-901, (2010).

[2] Bogley, W.A., Gilbert, N.D., “The homology of Peiffer products of groups”, *New York Journal of Mathematics*, 6, 55-71, (2000).

[3] Holder, O., “Bildung zusammengesetzter Gruppen”, *Math. Ann.*, 46, 321-422, (1895).

[4] Ateş, F. and Çevik, A. S., “The  $p$ -Cockcroft property of central extensions of groups II”, *Monatshefte Für Mathematik*, 150, 181, (2007).

[5] Ateş, F. and Çevik, A. S., “Minimal but inefficient presentations for semi-direct products of finite cyclic monoids”, *Groups St. Andrews 2005 in St. Andrews*, Cambridge University Press, *L.M.S. Lecture Note Series*, 339, 170, (2006).

[6] Baik, Y.G., Generators of second homotopy module of group Presentations with applications, Ph.D Thesis, *University of Glasgow*, (1992).

[7] Baik, Y.G. and Pride, S.J., “On the efficiency of coxeter groups”, *Bulletin of the London Mathematical Society*, 29, (1997).

[8] Baik, Y.G., Harlender, J. And Pride, S.J., “The geometry of group extensions”, *Journal of Group Theory*,” 1, (1998).

[9] Baumslag, G., *Topics in combinatorial group theory*, Lectures in Mathematics, Brikhauser Verlag, (1993).

[10] Bogley, W.A. and Pride, S.J., “Calculating generators of  $\pi_2$ ”, *Two*

*Dimensional Homotopy and Combinatorial Group Theory* (Eds: C. Hog- Angeloni, W. Metzler, A. Sieradski), Cambridge University Press, L.M.S. Lecture Note Series, 157, (1993).

[11] Bogley, W.A. and Pride, S.J., “Aspherical relative presentations”, *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 35, (1992).

[12] Brown, R. And Huebschmann, J., “Identities among relations”, in *Low Dimensional Topology*, Cambridge University Press, L.M.S. Lecture Note Series, 48, (1982).

[13] Chiswell, I.M., Collins, D.J. and Huebschmann, J., “Aspherical group presentations”, *Mathematische Zeitschrift*, 178, (1981).

[14] Cho, J.R. and Pride, S.J., “Embedding semigroups into groups an asphericity of semigroups”, *International Journal of Algebra and Computation*, 3, (1993).

[15] Çevik, A.S., “The  $p$ -Cockroft property of the semi-direct product of some monoids”, *International Journal of Algebra and Computation*, 13, (2003).

[16] Çevik, A.S., “The efficiency of standart wreath product”, *Proceeding of the Edinburgh Mathematical Society*, 43, (2000).

[17] Çevik, A.S., “Minimal but inefficient presentations of the semidirect product of some monoids”, *Semigroup Forum*, 66, (2003).

[18] Çevik, A.S., “The  $p$ -Cockroft property of central extensions of groups”, *Communication in Algebra*, 29, (2001).

[19] Dyer, M.N., “*Cockroft 2-complexes*”, preprint, Universty of Oregon, (1992).

[20] Epstein, D.B.A., “Finite presentations of groups and 3-manifolds”, *Quart*

*Journal of Mathematic Oxford Ser(2)*, 12, (1961).

[21] Gilbert, N.D. and Howie, J., “Theshold subgroups for Cockcroft 2-complexes”, *Communications in Algebra*, 23, (1995).

[22] Gilbert, N.D. and Howie, J., “Cockcroft properties of graphs of 2-complexes”, *Proceeding Royal Society of Edinburgh Section A-Mathematics*, 124, (1994).

[23] Lyndon, R.C. and Schupp P.E., “*Combinatorial group theory, Classic in Mathematics*”, Reprint of the 1997 Edition, Springer-Verlag, (1977).

[24] Beyl, F.R. and Tappe, J., “Group extensions, representations and the schur multiplier”, *Lecture Notes in Mathematics* 958, Springer-Verlag, (1982).

[25] Johnson, D.L., “*Presentation of groups*”, London Mathematic Society Student Series 15, Cambridge University Press, (1990).

[26] Wiegold, J., “The Schur multiplier: an elemantary approach”, Groups St. Andrews 1981, Cambridge University Press, L.M.S. Lecture Note Series, 71, (1982), 137.

[27] Magnus, W., Karrass, A. and Solitar, “*D., Combinatorial group theory*”, Dover Publications, Inc., (1976).

[28] Kilgour, C.W. and Pride, S.J., “Cockcroft presentations”, *Journal of Pure and Applied Algebra*, 106, (1996).

[29] Pride, S.J., “Identities among the relations of group presentations”, in *Group Theory from a Geometrical Viewpoint*, Trieste 1990, World Scientific Publishing (1991).

[30] Pride, S.J., “Geometric methods in combinatorial semigroup theory”, *Semigroups, Formal Languages and Groups*, Kluwer Academic



Publishers, (1995).

[31] Pride, S.J., “Low-dimensional homotopy theory for monoids”, *International Journal of Algebra and Computation*, 5, (1995).

[32] Pride, S.J. and Wang, J., “Relatively aspherical monoids”, preprint, *University of Glasgow*, (1996).

[33] Squier, C.C., “Word problems and a homological finiteness condition for monoids”, *Journal of Pure and Applied Algebra*, 49, (1987).

[34] Wang, J., “Finite derivation type for semi-direct products of monoids”, *Theoretical Computer Science*, 191, (1998).