T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BULANIK THETA-ÖN-SÜREKLİ ÇOĞUL DEĞERLİ FONKSİYONLARIN KUVVETLİ FORMU ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

AKIN ÇAKIR

BALIKESİR, HAZİRAN - 2019

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BULANIK THETA-ÖN-SÜREKLİ ÇOĞUL DEĞERLİ FONKSİYONLARIN KUVVETLİ FORMU ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

AKIN ÇAKIR

Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Ahu AÇIKGÖZ (Tez Danışmanı)
Prof. Dr. Fırat ATEŞ
Doç. Dr. Gül KARADENİZ GÖZERİ

BALIKESİR, HAZİRAN - 2019

KABUL VE ONAY SAYFASI

Akın ÇAKIR tarafından hazırlanan **"BULANIK THETA-ÖN-SÜREKLİ ÇOĞUL DEĞERLİ FONKSİYONLARIN KUVVETLİ FORMU ÜZERİNE"** adlı tez çalışmasının savunma sınavı 12 Haziran 2019 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Prof. Dr. Ahu AÇIKGÖZ	....
Üye Prof. Dr. Fırat ATEŞ	....
Üye Doç. Dr. Gül KARADENİZ GÖZERİ	....

Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Prof. Dr. Necati ÖZDEMİR ....

ÖZET

BULANIK THETA-ÖN-SÜREKLİ ÇOĞUL DEĞERLİ FONKSİYONLARIN KUVVETLİ FORMU ÜZERİNE
YÜKSEK LİSANS TEZİ
AKIN ÇAKIR
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI: PROF.DR. AHU AÇIKGÖZ)
BALIKESİR, HAZİRAN – 2019

Çalışmamız altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, tezin giriş bölümü bulunmaktadır. Bu bölümde, tezde kullanılan kavramların kısaca literatür bilgileri verildi.

İkinci bölümde; bu çalışma için gerekli olan ideal topolojik uzaylar için temel kavramları ve kümenin lokal fonksiyonunu verdik.

Üçüncü ve dördünce bölümde ise tezin daha iyi anlaşılması için fuzzy topolojik uzaylar, fuzzy ideal topolojik uzaylar ve fuzzy çoğul değerli fonksiyonların konumuz ile ilgili olarak yapılmış bazı çalışmalardan alınan temel tanımlar ve teoremlerden bahsettik.

Beşinci bölümde; kuvvetli θ-pre-sürekli çoğul değerli fonksiyon kavramını fuzzy topolojiye genişlettik ve bu kavramın özelliklerinden bahsettik. Ayrıca ilgili yazarlar tarafından verilen fuzzy kuvvetli θ-sürekli çoğul değerli fonksiyon, fuzzy pre-sürekli çoğul değerli fonksiyon ve fuzzy sürekli çoğul değerli fonksiyon ile fuzzy kuvvetli θ-pre-sürekli çoğul değerli fonksiyon arasındaki bağlantıyı inceleyip bir diyagram elde ettik. Dahası bu fonksiyonun kısıtlanmış çoğul değerli fonksiyon, grafik çoğul değerli fonksiyon, bileşke çoğul değerli fonksiyon ile ilgili özelliklerini bazı fuzzy uzaylarda ve iç çarpım uzaylarında inceledik.

Altıncı bölümde; fuzzy faintly b-I-sürekli fonksiyon tanımını verip özellikleri üzerine çalıştık ve yeni teoremler elde ettik.

ANAHTAR KELİMELER: fuzzy ideal topolojik uzaylar, çoğul değerli fonksiyon, fuzzy kuvvetli θ-pre-sürekli çoğul değerli fonksiyon, fuzzy pre-sürekli çoğul değerli fonksiyon, grafik çoğul değerli fonksiyon, fuzzy faintly b-I-sürekli fonksiyon.

ABSTRACT

ON MIGHTY FORM OF A SORT OF FUZZY MULTIFUNCTIONS
MSC THESIS
AKIN ÇAKIR
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS
(SUPERVISOR: PROF.DR. AHU AÇIKGÖZ)
BALIKESİR, JUNE 2019

Our study consists of six chapters.

The first chapter includes the introduction part. In the chapter, literature knowledge of the notions used in the dissertation has been presented in brief.

In the second chapter, we hawe presented the basic concepts for the ideal topological spaces which are essential for this study and the local function of the set.

In the third and fourth chapter, we have mentioned the basic definitions and theorems received from certain studies which were performed about fuzzy topological spaces, fuzzy ideal topological spaces and fuzzy multifunctions to comprehend the dissertation better.

In the fifth chapter, we have extended the concept of strongly θ-pre-continuous multifunction to fuzzy topology and mentioned the properties of this concept. Moreover, we have examined the connection between fuzzy strongly θ-continuous multifunction, fuzzy pre-continuous multifunction, and fuzzy continuous multifunction given by the referred topologist and fuzzy strongly θ-pre-continuous multifunction; and have attained a diagram. In addition, we have examined the properties of this function about bounded multifunctions, graph multifunctions and composite multifunctions within certain fuzzy spaces and inner product spaces.

In the sixth chapter, we have presented the definition of fuzzy faintly b-I-continuous function, studied on its properties and attained new theorems.

KEYWORDS: fuzzy ideal topological spaces, multifunction, fuzzy strong θ-pre-continuous multifunction, fuzzy pre-continuous multifunction, graph multifunction, fuzzy faintly b-I-continuous function.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET .... **i**
ABSTRACT .... **ii**
İÇİNDEKİLER .... **iii**
ŞEKİL LİSTESİ .... **iv**
SEMBOL LİSTESİ .... **v**
ÖNSÖZ .... **vii**
1. GİRİŞ **1**
2. İDEAL TOPOLOJİK UZAYLARIN TEMEL KAVRAMLARI **3**
2.1 İdeal Topolojik Uzaylar 3
2.2 Kümenin Lokal Fonksiyonu 5
3. FUZZY TOPOLOJİK UZAYLAR İÇİN TEMEL KAVRAMLAR **9**
3.1 Fuzzy Kümeler 9
3.2 Fuzzy Kümelerde İşlemler 12
3.3 Fuzzy Topolojik Uzaylar 13
4. FUZZY İDEAL TOPOLOJİK UZAYLAR VE FUZZY ÇOĞUL DEĞERLİ FONKSİYONLAR **16**
4.1 Fuzzy İdeal Topolojik Uzaylar 16
4.2 Fuzzy Çoğul Değerli Fonksiyon 18
5. BULANIK THETA-ÖN-SÜREKLİ ÇOĞUL DEĞERLİ FONKSİYONLARIN KUVVETLİ FORMU ÜZERİNE **20**
5.1 Bulanık Theta-Ön-Sürekli Çoğul Değerli Fonksiyonlar 20
6. FUZZY FAİNTLY b-I-SÜREKLİ FONKSİYONLARIN ÖZELLİKLERİ **32**
6.1 Fuzzy Faintly b-I-Sürekli Fonksiyonlar 32
7. SONUÇ VE ÖNERİLER **41**
8. KAYNAKLAR **42**

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 5.1: Diyagram……………………………………………………………22

SEMBOL LİSTESİ

$\forall$	: Her
$\in$	: Ait
$\notin$	: Ait değil
$\emptyset$	: Boş küme
$\mathbf{P(X)}$	: Güç kümesi
$\neq$	: Eşit değil
$\Rightarrow$	: Gerektirir
$\Leftarrow$	: Yeterlidir
$\mathbf{A \cup B}$	: A birleşim B
$\mathbf{A \cap B}$	: A kesişim B
$\mathbf{A \subset B}$	: B kümesi, A kümesini kapsar
$\mathbf{A \not\subset B}$	: B kümesi, A kümesini kapsamaz
$(\mathbf{X}, \boldsymbol{\tau})$	: Topolojik uzay
$(\mathbf{X}, \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{x}})$	: Fuzzy topolojik uzay
$(\mathbf{X}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{I})$	: İdeal topolojik uzay
$\mathbf{A}^{c}$	: A kümesinin tümleyeni
$\mathbf{I}^{x}$	: X' in fuzzy kümeler ailesi
$\mathbf{Cl(A)}$	: A kümesinin kapanışı
$\mathbf{\dot{I}nt(A)}$	: A kümesinin içi
$\mathbf{pCl(A)}$	: A kümesinin pre kapanışı
$\mathbf{sCl(A)}$	: A kümesinin semi kapanışı
$\mathbf{F^{-}(\boldsymbol{\mu})}$	: μ kümesinin alt tersi
$\mathbf{F^{+}(\boldsymbol{\mu})}$	: μ kümesinin üst tersi
$\mathbf{G_F}$	: F çoğul değerli fonksiyon grafiği

$\mathbf{F}\|_{\mathbf{A}}$	: F çoğul değerli fonksiyonun A kümesine kısıtlanışı
$\vartheta_{(x)}$	: (X,τ) topolojik uzayında x noktasının komşuluklar ailesi
$\mu_A(x)$	: x in A ya ait olma derecesi
$\mathbf{1}_x$	: X kümesindeki en büyük sabit fuzzy küme
$\mathbf{0}_x$	: X kümesindeki en küçük sabit fuzzy küme
$\mathbf{A}\vee\mathbf{B}$	: A fuzzy kümesi birleşim B fuzzy kümesi
$\mathbf{A}\wedge\mathbf{B}$	: A fuzzy kümesi kesişim B fuzzy kümesi
$\mathbf{A}\leq\mathbf{B}$	: B fuzzy kümesi, A fuzzy kümesini kapsar
$\mathbf{1}_x-\mathbf{A}$	: A fuzzy kümesinin tümleyeni
$\mathbf{x}_\alpha$	: fuzzy nokta
$\mathbf{x}_\alpha\mathbf{q}\mathbf{A}$	: x_α fuzzy noktası ile A kümesi çakışığımsıdır
$\mathbf{N}_q(\mathbf{x}_\alpha)$	: (X,τ) fuzzy topolojik uzayındaki x_α fuzzy noktasının q komşuluklar ailesi

ÖNSÖZ

Yüksek lisans çalışmamın her aşamasında bana daima destek olan, zaman ayıran, yol gösteren değerli hocam ve tez danışmanım Prof. Dr. Ahu AÇIKGÖZ'e içtenlikle teşekkür ederim.

1. GİRİŞ

Fuzzy topolojinin temelleri 1965 yılında Zadeh'in ''Fuzzy Sets'' adlı çalışması ile ortaya çıktı [1]. Belirsizlik kavramı matematiksel olarak denenmeye başlandı ve robotik, denetim mühendisliği, görüntü işleme, bilgisayar mühendisliği gibi günlük hayatımıza kadar giren konularda yer aldı. 1968 yılında Chang [2] fuzzy topolojik uzay fikrini ortaya attı. Bundan sonra klasik topolojide önemli rol oynayan birçok topolojik kavram fuzzy topolojiye göre düzenlendi. İlk olarak 1981 yılında Azad [3], fuzzy topolojik uzaylarda sürekli fonksiyonlar üzerine çalıştı. Klasik topolojiden bildiğimiz çoğu süreklilik türü, birçok araştırmacı tarafından fuzzy topolojiye aktarıldı.

Kuratowski 1933 yılında bir topolojik uzayda ideal kavramını kullanarak kümenin lokal fonksiyonunu tanımladı ve bu fonksiyonun sağladığı özellikleri araştırdı. 1990 yılında Jankovic ve Hamlet lokal fonksiyon kavramı ile ilgili yapılan tüm çalışmaları detaylı bir şekilde incelediler ve bu kavramla ilgili yeni özellikler elde ettiler. İdeal topolojik uzay günümüze kadar önemli bir çalışma konusu halinde geldi ve böylece genel topolojideki pek çok topojik kavram ideal topolojik uzaya taşındı.

1997 yılında Sarkar [4] fuzzy topolojik uzayda fuzzy ideal kavramını vererek fuzzy lokal fonksiyonunu tanımladı ve özelliklerini inceledi. Dahası fuzzy lokal fonksiyondan yararlanarak yeni bir kapanış işlemi verdi ve bir topoloji oluşturdu. Bu konu ile ilgili günümüze kadar birçok araştırmacı tarafından çeşitli çalışmalar verildi.

20. yüzyılın başlarından itibaren çoğul değerli fonksiyonlarla ilgili çalışmalara başlanmış ve günümüze kadar bu tür fonksiyonların birçok özellikleri farklı araştırmacılar tarafından incelenmiştir. Çoğul değerli fonksiyon kavramı ilk olarak Berge tarafından sistematikleştirildi [5]. Çoğul değerli fonksiyonların olasılık,

matematik programlaması, istatistik ve ekonomi gibi pek çok alanda uygulamaları vardır.

İlk defa Papageorgio [6] tarafından ortaya atılan fuzzy çoğul değerli fonksiyon tanımı, çalışmalara yeni bir boyut kazandırmıştır. Daha sonra 1991 yılında Mukherjee ve Malakar [7] çakışığımsı kavramını kullanarak fuzzy çoğul değerli fonksiyonlarda yarı-süreklilik, hemen hemen süreklilik ve zayıf süreklilik kavramlarını incelemişlerdir.

Bu çalışmada; kuvvetli θ-pre sürekli çoğul değerli fonksiyon kavramı fuzzy topojiye genişletildi ve bu kavramın özelliklerinden bahsedildi. Fuzzy topolojik uzayda bu süreklilik ile ilgili çeşitli teoremler elde edildi ve bu türden fuzzy çoğul değerli fonksiyonlar ile arasındaki bağlantılar incelenerek terslerine ait örneklerle konuya açıklık getirildi. Son bölümünde ise fuzzy ideal topolojik uzaylarda fuzzy faintly b-I-sürekli fonksiyon tanımlandı ve özellikleri üzerine çalışıldı. Fuzzy faintly b-I-sürekli fonksiyon ile ilgili yeni teoremler elde edildi.

2. İDEAL TOPOLOJİK UZAYLARIN TEMEL KAVRAMLARI

2.1 İdeal Topolojik Uzaylar

Kümenin lokal fonksiyonu ve bu fonksiyonun sağladığı özellikler ilk olarak 1933 yılında Kuratowski [8] tarafından verilmiş ve daha sonra bu kavram üzerinde çalışmalar yapılmış ve araştırmalar için önemli bir çalışma konusu haline gelmiştir.

2.1.1 Tanım

Boş olmayan bir X kümesi ve $P(X)$ güç kümesi olmak üzere $\varnothing \neq I \subset P(X)$ ailesi verilsin. Eğer I ailesi,

(1) Her $A, B \in I$ kümeleri için $A \cup B \in I$ (sonlu toplamsallık)

(2) Her $A \in I$ kümesi ve $B \subset A$ alt kümesi için $B \in I$ (kalıtsallık)

özelliklerini sağlıyorsa bu takdirde I ailesine X kümesi üzerinde bir ideal denir [8].

2.1.2 Tanım

$P(X)$, X kümesinin güç kümesi olsun.

$\alpha : P(X) \to P(X)$ fonksiyonu,

I. $\alpha(\varnothing) = \varnothing$

II. $A \in P(X) \Rightarrow A \subset \alpha(A)$

III. $A, B \in P(X) \Rightarrow \alpha(A \cup B) = \alpha(A) \cup \alpha(B)$

IV. $A \in P(X) \Rightarrow \alpha(\alpha(A)) = \alpha(A)$

şartlarını sağladığı takdirde, α küme fonksiyonuna Kuratowski Kapanış İşlemi denir.

$$K=\{A\in P(X) \mid A=\alpha(A)\}$$

ailesine, X kümesi üzerindeki topolojiye göre kapalı kümeler ailesi denir [8].

2.1.3 Örnek

$P(X)$, X kümesinin güç kümesi olmak üzere, $d:P(X)\to P(X)$ fonksiyonu,

I. $d(\varnothing)=\varnothing$

I I. $d(A\cup B)=d(A)\cup d(B)$

III. $d(d(A))\subset d(A)$

şartlarını sağlasın. Bu takdirde; $\alpha(A)=A\cup d(A)$ şeklinde tanımlanan $\alpha:P(X)\to P(X)$ fonksiyonu $P(X)$ güç kümesi üzerinde bir Kuratowski kapanış işlemidir [9].

2.1.4 Tanım

X kümesi üzerinde $\sigma=\{\varnothing,X\}$ şeklinde tanımlanan σ topolojisine ayrık olmayan topoloji, (X,σ) ikilisine de ayrık olmayan uzay denir [10].

2.1.5 Tanım

X kümesi üzerinde tanımlanan $P(X)$ topolojisine ayrık topoloji, $(X,P(X))$ ikilisine de ayrık uzay denir [10].

2.1.6 Tanım

(X,τ) topolojik uzayı, $A\subset X$ alt kümesi ve $x\in X$ noktası verilsin. Her $V\in\vartheta_{(X)}$ komşuluğu için $A\cap V\neq\varnothing$ ise $x\in X$ noktasına A kümesinin bir kapanış noktası denir [8].

2.1.7 Tanım

(X,τ) topolojik uzayı, $A \subset X$ alt kümesi ve $x \in X$ noktası verilsin. Her $V \in \vartheta_{(x)}$ komşuluğu için $A \cap (V - \{x\}) \neq \varnothing$ ise $x \in X$ noktasına A kümesinin bir yığılma noktası denir [8].

2.1.8 Tanım

(X,τ) topolojik uzayı, $A \subset X$ alt kümesi ve $x \in X$ noktası verilsin. Her $V \in \vartheta_{(x)}$ komşuluğu için $A \cap V$ kümesinde sonsuz sayıda eleman varsa, $x \in X$ noktasına A kümesinin bir yoğunlaşma noktası denir [8].

2.2 Kümenin Lokal Fonksiyonu

2.2.1 Tanım

(X,τ) topolojik uzayı ve bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. I ailesi X kümesi üzerinde bir ideal olsun. Bu takdirde;

$$A^*(I,\tau) = \{x \in X \mid \forall V \in \vartheta_x, V \cap A \notin I\}$$

kümesine, A kümesinin I ideali ve τ topolojisine bağlı lokal fonksiyonu denir [9].

$A^*(I,\tau) = A^*(I)$ sembolü yerine A^* sembolünü kullanacağız.

$X \neq \varnothing$ bir küme olmak üzere $I = \{\varnothing\}$ ise minimal ideal ve $I = P(X)$ ise maksimal ideal olup, A^* kümesi bu ideallere göre aşağıdaki gibi elde edilmiştir [9].

$$\begin{aligned} A^*(\{\varnothing\},\tau) &= \{x \in X \mid \forall V \in \vartheta_x, (V \cap A) \notin \{\varnothing\}\} \\ &= \{x \in X \mid \forall V \in \vartheta_x, (V \cap A) \neq \varnothing\} \\ &= \overline{A} \end{aligned}$$

$$A^*(P(X),\tau) = \{x \in X \mid \forall V \in \vartheta_x, (V \cap A) \notin P(X)\} = \varnothing$$

2.2.2 Teorem

$A, B \subset X$ olmak üzere, X kümesi üzerinde I_1, I_2 idealleri ile birlikte verilen bir (X, τ) topolojik uzay olsun. Bu takdirde,

a) $A \subset B \Rightarrow A^* \subset B^*$

b) $I_1 \subset I_2 \Rightarrow A^*(I_2) \subset B^*(I_1)$

c) $A^* = \overline{A^*} \subset \overline{A}$ (A^* kümesi kapalı bir kümedir.)

d) $(A^*)^* \subset A^*$

e) $(A \cup B)^* = A^* \cup B^*$

f) $(A \cap B)^* \subset A^* \cap B^*$

g) $A^* - B^* = (A - B)^* - B^* \subset (A - B)^*$

h) $U \in \tau \Rightarrow U \cap A^* = U \cap (U \cap A)^* \subset (U \cap A)^*$

i) $C \in I \Rightarrow (A \cup C)^* = A^* = (A - C)^*$ [9].

2.2.3 Tanım

(X, τ) topolojik uzayı ile X kümesi üzerinde bir I ideali verilsin. Herhangi bir $A \subset X$ alt kümesi için, $Cl^*(A) = A \cup A^*$ şeklinde tanımlanan $Cl^* : P(X) \to P(X)$ fonksiyonu, Tanım 2.1.2. deki şartları sağlıyorsa bu fonksiyona Kuratowski Kapanışı denir [9].

$Cl^*(A)$ sembolü için $\overline{A}^*$ sembolünü kullanılacaktır.

2.2.4 Tanım

(X,τ) topolojik uzayı ile X kümesi üzerinde bir I ideali verilsin. Bu takdirde,

$$\tau^*(I)=\left\{U\subset X:\overline{(X-U)}^*=(X-U)\right\}$$

şeklinde tanımlanan $\tau^*(I)$ ailesi, X kümesi üzerinde bir topolojidir. Bu topoloji, τ topolojisinden daha ince yapılı bir topolojidir [8].

Daha önce; minimal ideali $(I=\{\varnothing\})$ ve maksimal ideali $(I=P(X))$ kullanarak $\tau^*(I)$ topolojisi elde edildi [9]. Sonra; diğer idealler, bu iki ideal arasında yer aldığından, onlara karşılık gelen $\tau^*(I)$ topolojileri için aşağıdaki sonuçlar verildi.

1. $I=\{\varnothing\}$ minimal ideaili için, $A^*(\{\varnothing\})=\overline{A}$ ve $\overline{A}^*=\overline{A}$ olduğundan;

   $\tau^*(I)=\tau$,

2. $I=P(X)$ maksimal ideali için $A^*(P(X))=\varnothing$ ve $\overline{A}^*=A$ olduğundan;

   $\tau^*(I)=P(X)$ elde edilir.

1 ve 2 ifadelerinden faydalanarak, şu sonuçlar verilebilir:

(X,τ) topolojik uzayı verilsin. X kümesi üzerinde her I ideali için, $\{\varnothing\}\subset I\subset P(X)$ olduğundan;

$$\tau=\tau^*(\{\varnothing\})\subset\tau^*(I)\subset\tau^*(P(X))=P(X) \text{ dır.}$$

Üstelik (X,τ) topolojik uzayı ile X kümesi üzerinde, $I\subset J$ olacak şekilde I ve J gibi iki ideal verildiğinde; $\tau^*(I)\subset\tau^*(J)$ bağıntısı vardır.

2.2.5 Tanım

(X,τ) topolojik uzayı ile X kümesi üzerinde bir I ideali verilsin. Bu takdirde;

$$\beta(I,\tau)=\{U-V:U\in\tau,\vartheta\in I\}$$

ailesi $\tau^*(I)$ topolojisi için, bir topoloji tabanıdır [9].

2.2.6 Tanım

(X,τ) topolojik uzayı ile X kümesi üzerinde bir I ideali verilsin. I ideali ile birlikte (X,τ) topolojik uzayına, ideal topolojik uzay denir ve (X,τ,I) şeklinde gösterilir [9].

2.2.7 Tanım

(X,τ) topolojik uzayı verilsin. Eğer $X = X^*$ ise, bu takdirde (X,τ,I) ideal topolojik uzayına Hayashi uzayı denir [9].

2.2.8 Tanım

(X,τ,I) ideal topolojik uzayında $\tau \cap I = \{\varnothing\}$ ise, bu takdirde (X,τ,I) ideal topolojik uzayına Samuels uzayı denir [9].

2.2.9 Önerme

(X,τ) topolojik uzayı ile X kümesi üzerinde bir I ideali verilsin. Bu takdirde;

aşağıdaki özellikler denktir [9]:

i. $X = X^*$
ii. $\tau \cap I = \{\varnothing\}$
iii. $U \in I \Rightarrow U^\circ = \varnothing$
iv. Her $\vartheta \in \tau$ kümesi için, $\vartheta \subset \vartheta^*$

3. FUZZY TOPOLOJİK UZAYLAR İÇİN TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, fuzzy küme tanımı ve fuzzy kümelerle ilgili cebirsel işlemler verildi. Sonrasında da fuzzy topolojik uzaylar için temel kavramlar ele alındı.

3.1 Fuzzy Kümeler

3.1.1 Tanım

X boş olmayan bir küme ve $I=[0,1]$ kapalı aralığı olsun. X den I ya tanımlanan bütün fonksiyonların kümesi I^x ile gösterilsin. Bu takdirde I^x kümesinin her elemanına X kümesinde bir fuzzy küme denir [1].

3.1.2 Tanım

X boş olmayan bir küme ve $I=[0,1]$ olmak üzere $\mu_A : X \to I$ üyelik fonksiyonu ile karakterize edilen;

$$A=\{(x,\mu_A(x)) : x \in X\} \subset X \times I$$

kümesine X kümesinin bir fuzzy alt kümesi denir. Her $x \in X$ için μ_A, A fuzzy kümesinin üyelik fonksiyonu ve $\mu_A(x) \in I$ değerine de x in A ya ait olma derecesi denir [1].

3.1.3 Tanım

X ve $\varnothing$ klasik kümeleri birer fuzzy kümesi olup

$$1_x = X = \{(x, 1_x(x)=1) : x \in X\} \subset X \times I$$

$$0_x = \varnothing = \{(x, 0_\varnothing(x)=0) : x \in X\} \subset X \times I$$

şeklinde ifade edilir.

Genelde kullanılan kapsama, birleşim ve kesişim sembolleri yerine, fuzzy kümeler için sırayla $\leq$, $\vee$, $\wedge$ sembolleri kullanılır. Bir A fuzzy kümesinin tümleyeni de $1_x - A = A^c$ ile gösterilir.

X kümesinin herhangi bir A fuzzy alt kümesi $A \leq X$ ile gösterilir. Fuzzy kümeleri α, β, γ vb. gibi harfler ile her $x \in X$ için $C_\lambda(X) = \lambda(0 \leq \lambda \leq 1)$ sabit fuzzy kümesi C_λ ile ve bir β fuzzy kümesinin $x \in X$ noktasında ki değeri $\beta(x)$ ile belirtilir.

3.1.4 Tanım

X de herhangi α ve β fuzzy kümeleri için aşağıdaki özellikler mevcuttur [1]:

1) $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \forall x \in X$ için $\alpha(x) \leq \beta(x)$
2) $\alpha = \beta \Leftrightarrow \forall x \in X$ için $\alpha(x) = \beta(x)$
3) $\mu = \alpha \vee \beta \Leftrightarrow \forall x \in X$ için $\mu(x) = \mathrm{Max}\{\alpha(x), \beta(x)\}$
4) $\gamma = \alpha \wedge \beta \Leftrightarrow \forall x \in X$ için $\gamma(x) = \mathrm{Min}\{\alpha(x), \beta(x)\}$
5) $\alpha = 1 - \beta \Leftrightarrow \forall x \in X$ için $\alpha(x) = 1 - \beta(x)$

3.1.5 Tanım

X de fuzzy kümelerin bir ailesi $\{\alpha_j\}_{j \in J}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır [2]:

$$\mu = \vee_{j \in J} \alpha_j \Leftrightarrow \forall x \in X \text{ için } \mu(x) = \sup_{j \in J}\{a_j(x)\}$$

$$\beta = \wedge_{j \in J} \alpha_j \Leftrightarrow \forall x \in X \text{ için } \beta(x) = \inf_{j \in J}\{\alpha_j(x)\}$$

3.1.6 Tanım

$x \in X$ ve $\lambda \in (0,1]$ olsun. X' de x_λ fuzzy noktasının

$$x_\lambda(y) = \begin{Bmatrix} \lambda, y = x \\ 0, y \neq x \end{Bmatrix}$$

olarak tanımlanan X içindeki fuzzy kümesidir. $x_\lambda(y)$ fuzzy kümesine X kümesinde bir fuzzy nokta denir. x_λ fuzzy noktasının sıfırdan farklı değer aldığı $x \in X$ noktasına x_λ fuzzy noktasının dayanağı ve $\lambda \in (0,1]$ sayısınıda x_λ fuzzy noktasının değeri denir [11].

3.1.7 Tanım

γ bir fuzzy küme ve x_λ bir fuzy nokta olmak üzere $\lambda \leq \gamma(x)$ ise $x_\lambda \in \gamma$ dır [11].

3.1.8 Teorem

$\mu, \beta \in I^X$ ve x_λ bir fuzzy nokta olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır [7]:

1) $x_\lambda \in \mu \wedge \beta \Rightarrow x_\lambda \in \mu$ ve $x_\lambda \in \beta$
2) $x_\lambda \in \mu \vee \beta \Rightarrow x_\lambda \in \mu$ veya $x_\lambda \in \beta$

3.1.9 Özellikler

Fuzzy kümelerde birleşim, kesişim ve tümleyen işlemleri için aşağıdaki özelikler sağlanır.

X boş kümeden farklı, herhangi $A \leq X$ olsun.

(i) $A \vee \emptyset = A$
(ii) $A \wedge \emptyset = A$
(iii) $A \vee X = X$
(iv) $A \wedge X = A$
(v) $(A^c)^c = A$
(vi) $A \leq A^c$ veya $A^c \leq A$ olmak zorunda değildir.

3.2 Fuzzy Kümelerde İşlemler

3.2.1 Tanım

$A, B \leq X$ fuzzy alt kümeleri verilsin. A ve B üyelik fonksiyonları sırasıyla μ_A ve μ_B olsun. Böylece A ile B nin çarpımı A.B ile gösterilir ve her $x \in X$ için, $\mu_{A.B} = \mu_A(x).\mu_B(x)$ üyelik fonksiyonu ile tanımlanır.

$$A.B \Leftrightarrow \forall x \in X \text{ için } \mu_{A.B} = \mu_A(x).\mu_B(x) \text{ dır [1].}$$

3.2.2 Teorem

$A, B \leq X$ için, $A.B \leq A \wedge B$ dir [1].

3.2.3 Tanım

Herhangi $A, B \leq X$ fuzzy alt kümeleri verilsin. A ve B nin üyelik fonksiyonları sırasıyla μ_A ve μ_B olsun.

$$A + B \Leftrightarrow \forall x \in X, \mu_{A+B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x).\mu_B(x)$$

şeklinde tanımlanan fuzzy alt kümeye, A ile B fuzzy kümelerinin toplamı denir [1].

3.2.4 Tanım

$A, B \leq X$ fuzzy alt kümeleri verilsin. A ve B nin üyelik fonksiyonları sırasıyla μ_A ve μ_B olsun.

$$A - B = A \wedge B^c \Leftrightarrow \forall x \in X, \mu_A(x) = \{\mu_A(x), 1 - \mu_B(x)\}$$

üyelik fonksiyonu ile tanımlanan fuzzy alt kümeye A ile B fuzzy kümelerinin farkı denir [1].

3.2.5 Tanım

$A, B \leq X$ ’ de fuzzy alt kümeleri olsun. $(A \circ B)(x, y) \Leftrightarrow \forall x \in X$ için,

$$\mu_{A\circ B}(x,y)=\sup\left\{\min\left\{\mu_A\left(x,z\right),\mu_B\left(z,y\right)\right\}:z\in X\right\}$$

şeklinde tanımlanan X'deki fuzzy kümelerine A ile B fuzzy kümelerin bileşkesi denir ve $\left(A\circ B\right)$ ile gösterilir.

$$A,B,C\leq X \text{ ve } \left(A\circ B\right)\circ C=A\circ\left(B\circ C\right) \text{ dir [1].}$$

3.3 Fuzzy Topolojik Uzaylar

3.3.1 Tanım

X kümesinin fuzzy alt kümelerinin bir ailesi τ_x olsun. Eğer τ ailesi,

(i) $0_x,1_x\in\tau_x$

(ii) $\alpha,\beta\in\tau_x\Rightarrow\alpha\wedge\beta\in\tau_x$

(iii) $\forall j\in J,\alpha_j\in\tau_x\Rightarrow\vee_{j\in J}\alpha_j\in\tau_x$

şartlarını sağlıyor ise τ_x ailesine, X kümesinde bir fuzzy topoloji, $\left(X,\tau_x\right)$ ikilisine de fuzzy topolojik uzay denir, τ_x ailesinin her elemanına fuzzy açık küme ve fuzzy açık kümenin tümleyenine ise fuzzy kapalı küme denir. Fuzzy açık kümeler ailesi, $FO\left(X,x\right)$ fuzzy kapalılar ailesi, $FC\left(X,x\right)$ ile gösterilir [2].

3.3.2 Tanım

$\left(X,\tau_x\right)$ fuzzy topolojik uzay, $\alpha\leq X$ ve x_λ fuzzy nokta olsun. Eğer $x_\lambda q\beta$ ve $\beta\leq\alpha$ olacak şekilde bir $\beta\in\tau_x$ fuzzy açık kümesi varsa; α fuzzy kümesine x_λ fuzzy noktasının bir q-komşuluğu denir ve x_λ fuzzy noktasının tüm q-komşuluklarının ailesi $Nq\left(x_\lambda\right)$ ile gösterilir [11].

3.3.3 Tanım

$\left(X,\tau_x\right)$ fuzzy topolojik uzay ve $\alpha\leq X$ olsun.

$$\alpha^\circ=\left\{\beta\middle|\beta\leq\alpha,\beta\in\tau_x\right\}$$

yukarıdaki şekilde tanımlanan α° fuzzy kümesine, α fuzzy kümesinin içi denir [2].

3.3.4 Tanım

(X, τ_x) fuzzy topolojik uzay ve $\alpha \leq X$ olsun. α fuzzy kümesinin açık küme olması için gerek ve yeter şart $\alpha = \alpha^{\circ}$ olmasıdır [2].

3.3.5 Tanım

(X, τ_x) fuzzy topolojik uzay ve $\alpha, \beta \leq X$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır [3]:

(1) $\alpha^{\circ} \leq \alpha$
(2) $\alpha^{\circ\circ} \leq \alpha^{\circ}$
(3) $(\alpha \wedge \beta)^{\circ} = \alpha^{\circ} \wedge \beta^{\circ}$
(4) $\vee_{j \in J} \alpha_j^{\circ} \leq \left(\vee_{j \in J} \alpha_j\right)^{\circ}$
(5) $\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha^{\circ} \leq \beta^{\circ}$
(6) $1_x^{\circ} = 1_x$ ve $0_x^{\circ} = 0_x$

3.3.6 Tanım

(X, τ_x) fuzzy topolojik uzay ve $\alpha \leq X$ olsun.

$$\alpha^{-} = \{\beta \mid \alpha \leq \beta, (1_x - \beta) \in \tau_x\}$$

yukarıdaki şekilde tanımlanan α^{-} fuzzy kümesine, α fuzzy kümesinin kapanışı denir [2].

3.3.7 Tanım

(X, τ_x) fuzzy topolojik uzay ve $\alpha, \beta \leq X$ olsun. α fuzzy kümesinin fuzzy kapalı olması küme olması için gerek ve yeter şart $\alpha = \alpha^{-}$ olmasıdır [2].

3.3.8 Teorem

(X, τ_x) fuzzy topolojik uzay ve $\alpha, \beta \leq X$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır [3]:

(1) $\alpha \leq \overline{\alpha}$
(2) $\overline{\overline{\alpha}} \leq \overline{\alpha}$
(3) $\overline{\alpha \vee \beta} = \overline{\alpha} \vee \overline{\beta}$
(4) $\overline{\wedge_{j \in J} \alpha_j} \leq \wedge_{j \in J} \overline{\alpha_j}$
(5) $\alpha \leq \beta \Rightarrow \overline{\alpha} \leq \overline{\beta}$
(6) $\overline{1_x} = 1_x$ ve $\overline{0_x} = 0_x$

3.3.9 Teorem

$X \times Y$ fuzzy çarpım uzayı olacak şekilde (X, τ_x) ve (Y, τ_y) fuzzy topolojik uzaylar olsun. Herhangi $A \leq X, B \leq Y$ fuzzy kümeleri verilsin. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır [3]:

(1) $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$
(2) $(A \times B)^{\circ} = A^{\circ} \times B^{\circ}$

4. FUZZY İDEAL TOPOLOJİK UZAYLAR VE FUZZY ÇOĞUL DEĞERLİ FONKSİYONLAR

Bu bölümde fuzzy ideal topolojik uzaylar ve fuzzy çoğul değerli fonksiyolar ile ilgili temel kavramlar verilecektir.

4.1 Fuzzy İdeal Topolojik Uzaylar

4.1.1 Tanım

Boş olmayan bir X kümesi verilsin. $P(X)$ kümesi X kümesindeki tüm fuzzy kümelerin ailesi olmak üzere; boş olmayan bir $I \subset P(X)$ ailesi,

i. $A, B \in I \Rightarrow (A \vee B) \in I$ (sonlu toplamsallık özelliği)

ii. $A \in I, B \leq A \Rightarrow B \in I$ (kalıtımsallık özelliği)

şartlarını sağlıyorsa; I ailesine, X kümesi üzerinde bir fuzzy ideal denir [4].

$I = \{0_x\}$ ve $I = P(X)$ aileleri X kümesindeki en basit fuzzy ideallerdir [4].

4.1.2 Tanım

(X, τ) fuzzy topolojik uzayı ve bir $A \leq X$ fuzzy alt kümesi verilsin. Ayrıca I ailesi, X kümesi üzerinde bir fuzzy ideal olsun. Bu takdirde, $A^*(I, \tau)$ kümesi $N \in N_q(x_\alpha)$ ve $E \in I$ iken bir $y \in X$ noktası vardır öyle ki $N(y) + A(y) - 1 \rangle E(y)$ olacak şekildeki x_α fuzzy noktalarının birleşimidir. $A^*(I, \tau)$ kümesine A kümesinin I ideali ve τ fuzzy topolojisine bağlı fuzzy lokal fonksiyon denir [4].

4.1.3 Uyarı

(X, τ) fuzzy topolojik uzayı, X kümesi üzerinde I_1 ve I_2 fuzzy idealleri ile $A, B \leq X$ fuzzy kümeleri verilsin. Bu takdirde; aşağıdaki özellikler vardır [4]:

i. $A \leq B \Rightarrow A^* \leq B^*$

ii. $I_1 \subset I_2 \Rightarrow A^*(I_2, \tau) \leq A^*(I_1, \tau)$

iii. $A^* = \overline{A}^* \leq \overline{A}$

iv. $\left(A^*\right)^* \leq A^*$

v. $(A \vee B)^* = A^* \vee B^*$

vi. $U \in I_1 \Rightarrow (U \vee A)^* = A^*$

4.1.4 Tanım

(X, τ) fuzzy topolojik uzayı, X kümesi üzerinde bir I fuzzy ideal ve $P(X)$, X kümesindeki tüm fuzzy kümelerin ailesi olsun. Herhangi bir $A \leq X$ fuzzy alt kümesi için, $\alpha : P(X) \to P(X)$ fonksiyonu,

i. $\alpha(0_x) = 0_x$

ii. $A \in P(X) \Rightarrow A \leq \alpha(A)$

iii. $A, B \in P(X) \Rightarrow \alpha(A \vee B) = \alpha(A) \vee \alpha(B)$

iv. $A \in P(X) \Rightarrow \alpha(\alpha(A)) = \alpha(A)$ şartlarını sağlasın.

Böylece, α fonksiyonuna fuzzy kapanış işlemi ve $K = \{A \in P(X) : A = \alpha(A)\}$ ailesi de X kümesi üzerinde oluşturulan fuzzy topolojiye göre fuzzy kapalılar ailesi denir [4].

4.1.5 Tanım

(X, τ) fuzzy topolojik uzayı, X kümesi üzerinde bir I fuzzy ideal ve $P(X)$, X kümesindeki tüm fuzzy kümelerin ailesi olsun. Herhangi bir $A \leq X$ fuzzy alt kümesi için, $d : P(X) \to P(X)$ fonksiyonu,

i. $d(0_x) = 0_x$

ii. $A, B \in P(X) \Rightarrow d(A \vee B) = d(A) \vee d(B)$

iii. $A \in P(X) \Rightarrow d(d(A)) \leq d(A)$

şartlarını sağlasın. Bu takdirde, $\alpha(A) = A \vee d(A)$ şeklinde tanımlanan $\alpha : P(X) \to P(X)$ fonksiyonu fuzzy kapanış işlemidir [4].

4.1.6 Tanım

(X,τ) fuzzy topolojik uzayı, X kümesi üzerinde bir I fuzzy ideal ve $P(X)$, X kümesindeki tüm fuzzy kümelerin ailesi olsun. Herhangi bir $A \leq X$ fuzzy alt kümesi için, $Cl^*(A) = A \vee A^*$ şeklinde tanımlanan $Cl^* : P(X) \to P(X)$ fonksiyonun Tanım 4.1.5. deki şartları sağlar. O halde Cl^* kümesine fuzzy kapanış işlemi denir [4].

4.1.7 Tanım

(X,τ) fuzzy topolojik uzayı ile X kümesi üzerinde bir I fuzzy ideali verilsin. Bu takdirde,

$$\tau^*(I) = \left\{ U \leq X : \overline{(1_x - U)}^* = 1_x - U \right\}$$

şeklinde tanımlanan $\tau^*(I)$ ailesi, X kümesi üzerinde bir fuzzy topoloji belirtir. Bu topoloji, τ fuzzy topolojisinden daha ince bir topolojidir [4].

4.1.8 Tanım

(X,τ) fuzzy topolojik uzayı ile X kümesi üzerinde bir I fuzzy ideali verilsin. I fuzzy ideali ile birlikte (X,τ) fuzzy topolojik uzayına, fuzzy ideal topolojik uzay denir ve (X,τ,I) şeklinde gösterilir [4].

4.2 Fuzzy Çoğul Değerli Fonksiyon

Bu bölümde, fuzzy topolojik uzayda sıkça rastlanan temel kavram ve özellikleri verdik.

4.2.1 Tanım

(X,τ) bir alışılmış topolojik uzay ve (Y,τ_y) bir fuzzy topolojik uzay olsun. Her $x \in X$ noktası için $F(X)$ bir fuzzy küme olacak şekilde bir $F:(X,\tau) \to (Y,\tau_y)$ fonksiyonuna fuzzy çoğul fonksiyon denir [6].

Bundan sonra X kümesi üzerinde alışılmış bir τ topolojisinin, Y kümesi üzerinde ise bir τ_y fuzzy topolojisinin var olduğunu kabul edeceğiz.

$F:(X,\tau)\to(Y,\tau_y)$ fuzzy çoğul fonksiyonunu kısaca $F:X\to Y$ olacak göstereceğiz.

4.2.2 Tanım

μ bir fuzzy küme olmak üzere, bir $F:X\to Y$ fuzzy çoğul fonksiyonu için alt ters (lower inverse) ve üst ters (upper inverse) görüntüler sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır [7].

$$F^{-}(\mu)=\left\{x\in X, F(x)_q\,\mu\right\}, F^{+}(\mu)=\left\{x\in X, F(x)\leq\mu\right\}$$

4.2.3 Tanım

$F:X\to Y$ fuzzy çoğul değerli fonksiyon ve $\beta\in I^{Y}$ fuzzy küme olsun. O halde,

$$F^{-}(1-\beta)=X-F^{+}(\beta)$$

olur [7].

5. BULANIK THETA-ÖN-SÜREKLİ ÇOĞUL DEĞERLİ FONKSİYONLARIN KUVVETLİ FORMU ÜZERİNE

5.1 Bulanık Theta-Ön-Sürekli Çoğul Değerli Fonksiyonlar

Bu bölümde fuzzy topojik uzayda fuzzy kuvvetli θ -pre-sürekli çoğul değerli fonksiyon kavramı tanımlandı ve bu kavramın sağladığı özellikler ayrıntılı incelendi. Fuzzy topolojik uzayda bu süreklilik ile ilgili çeşitli teoremler elde edildi ve bu türden olan fuzzy çoğul değerli fonksiyonlar ile fuzzy kuvvetli θ -pre-sürekli çoğul değerli fonksiyon arasındaki bağlantılar incelenerek terslerine ait örnekler elde edildi.

5.1.1 Tanım

(X,τ_x) fuzzy topolojik uzay, $\mu \in I^x$ olsun. Eğer $\mu \le f-\mathrm{int}(f-\mathrm{cl}(\mu))$ ise, μ 'e fuzzy pre açık küme denir. Bir fuzzy pre-açık kümenin tümleyenine fuzzy pre kapalı küme denir. Her fuzzy açık küme fuzzy pre açık kümedir [12].

5.1.2 Tanım

$F:(X,\tau)\to(Y,\vartheta)$ çoğul değerli bir fonksiyon olsun.

a) Her $x_p \in X$ noktası için $x_p \in F^+(V)$ ve Y' nin her V fuzzy açık kümesi için $U^- \le F^+(V)\big(U \le F^+(V)\big)$ olacak şekilde bir $U \in FO\big(X,x_p\big)$ kümesi varsa F çoğul değerli fonksiyonuna üstten fuzzy kuvvetli θ -sürekli denir [13]. Bu durumu kısaca ü.f.k. θ .s. olarak göstereceğiz.

b) Her $x_p \in X$ noktası için $x_p \in F^-(V)$ ve Y' nin her V fuzzy açık kümesi için $U^- \le F^-(V)\big(U \le F^-(V)\big)$ olacak şekilde bir $U \in FO\big(X,x_p\big)$ kümesi varsa F çoğul değerli fonksiyonuna alttan fuzzy kuvvetli θ -sürekli denir [13]. Bu durumu kısaca a.f.k. θ .s. olarak göstereceğiz.

c) F çoğul-değerli fonksiyonu hem üstten hem de alttan fuzzy kuvvetli θ -sürekli ise F fuzzy kuvvetli θ -sürekli denir [13]. Bu durumu kısaca f.k. θ .s. olarak göstereceğiz.

5.1.3 Tanım

$F:(X,\tau)\rightarrow(Y,\vartheta)$ çoğul değerli bir fonksiyon olsun.

a) Her $x_p \in X$ noktası için $x_p \in F^{+}(V)$ ve Y' nin her V fuzzy açık kümesi için $U \leq F^{+}(V)$ olacak şekilde bir $U \in FPO(X, x_p)$ kümesi varsa F çoğul değerli fonksiyonuna üstten fuzzy pre-sürekli denir [14]. Bu durumu ü.f.p.s. olarak göstereceğiz.

b) Her $x_p \in X$ noktası için $x_p \in F^{-}(V)$ ve Y' nin her V fuzzy açık kümesi için $U \leq F^{-}(V)$ olacak şekilde bir $U \in FPO(X, x_p)$ kümesi varsa F çoğul değerli fonksiyonuna alttan fuzzy pre-sürekli denir [14]. Bu durumu a.f.p.s. olarak göstereceğiz.

c) F çoğul değerli fonksiyonu hem üstten hem alttan fuzzy pre-sürekli ise F fuzzy pre-sürekli denir [14]. Bu durumu f.p.s. olarak göstereceğiz.

5.1.4 Tanım

$F:(X,\tau)\rightarrow(Y,\vartheta)$ çoğul değerli bir fonksiyon olsun.

a) Her $x_p \in X$ noktası için $x_p \in F^{+}(V)$ ve Y'nin her V fuzzy açık kümesi için $U_p^{-} \leq F^{+}(V)$ olacak şekilde bir $U \in FPO(X, x_p)$ kümesi varsa F çoğul değerli fonksiyonuna üstten fuzzy kuvvetli θ -pre-sürekli denir. Bu durumu ü.f.k. θ .p.s. olarak göstereceğiz.

b) Her $x_p \in X$ noktası için $x_p \in F^{-}(V)$ ve Y'nin her V fuzzy açık kümesi için $U_p^{-} \leq F^{-}(V)$ olacak şekilde bir $U \in FPO(X, x_p)$ kümesi varsa F çoğul değerli fonksiyonuna alttan fuzzy kuvvetli θ -pre-sürekli denir. Bu durumu a.f.k. θ .p.s olarak göstereceğiz.

c) F çoğul-değerli fonksiyonu hem üstten hem alttan fuzzy kuvvetli θ-pre-sürekli ise F fuzzy kuvvetli θ-pre-sürekli denir. Bu durumu f.k.θ.p.s. olarak göstereceğiz.

5.1.5 Uyarı

Yukarıdaki tanımlara göre aşağıdaki diyagram elde edilir.

$$
\begin{tikzcd}
\text{ü.f.k.}\theta\text{.s.(a.f.k.}\theta\text{.s.)} \arrow[r] \arrow[dr] & \text{ü.f.k.}\theta\text{.p.s.(a.f.k.}\theta\text{.p.s.)} \arrow[r] & \text{ü.f.p.s.(a.f.p.s.)} \\
 & \text{ü.f.s.(a.f.s.)} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

Şekil 5.1: Diyagram

Aşağıdaki örneklerde görüldüğü gibi geçişlerin tersleri her zaman doğru olmayabilir.

5.1.6 Örnek

$X=\{a,b,c\}$ ve $Y=\{x,y,z\}$ olsun.

$$A=\{(a,0.3),(b,0.3),(c,0.3)\}$$
$$B=\{(x,0.3),(y,0.3),(z,0.3)\}$$

fuzzy kümelerini alalım. Bu durumda $\tau=\{0_x,A,1_x\}$ ve $\sigma=\{0_y,B,1_y\}$ (X,τ) ve (Y,ϑ) 'de fuzzy topolojik uzaylardır. F çoğul değerli fonksiyon aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$F(Y_p)=\begin{cases}\{(x,0.8),(y,0.8),(z,0.8)\}, p>0.2\\ \{(x,0.2),(y,0.2),(z.0,2)\}, p\le 0.2\end{cases}$$

Bu durumda $F:X\to Y$ çoğul değerli fonksiyon fuzzy üstten kuvvetli θ-pre-sürekli fakat fuzzy üstten sürekli değildir.

5.1.7 Örnek

Örnek 5.1.6'a göre çoğul değerli fonksiyon fuzzy üstten kuvvetli θ -pre-sürekli fakat fuzzy üstten kuvvetli θ -sürekli değildir.

5.1.8 Örnek

$X=\{a,b,c\}$ ve $Y=\{x,y,z\}$ olsun.

$$A=\{(a,0.2),(b,0.2),(c,0.2)\}$$
$$B=\{(a,0.3),(b,0.3),(c,0.3)\}$$
$$C=\{(x,0.3),(y,0.3),(z,0.3)\}$$

fuzzy kümelerini alalım. Bu durumda

$\tau=\{0_x,A,B,1_x\}$ ve $\sigma=\{0_y,C,1_y\}$ (X,τ) ve (Y,ϑ)'de fuzzy topolojik uzaylardır. F çoğul değerli fonksiyon aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$F(Y_p)=\begin{cases}\{(x,0.8),(y,0.8),(z,0.8)\},p>0.3\\ \{(x,0.2),(y,0.2),(z.0,2)\},p\leq 0.3\end{cases}$$

Bu durumda $F:X\to Y$ çoğul değerli fonksiyon fuzzy üstten sürekli fakat fuzzy üstten kuvvetli θ -pre-sürekli değildir.

5.1.9 Örnek

Örnek 5.1.8'e göre çoğul değerli fonksiyon fuzzy üstten pre-sürekli fakat fuzzy üstten kuvvetli θ -pre-sürekli değildir.

5.1.10 Tanım

Her F fuzzy kapalı kümesi ve $x_p\in F^c$ fuzzy noktası için $U\leq V^c$, $F\leq U$ ve $x_p\in V$ olacak şekilde U ve V fuzzy pre açık kümeleri varsa (X,τ) fuzzy topolojik uzayına fuzzy p-regüler denir [15].

5.1.11 Önerme

Y uzayındaki her V fuzzy açık kümesi için $F^+(V)(F^-(V))$ kümesinin X'de fuzzy pre- θ -açık olması için gerek ve yeter şart $F:X\to Y$ fuzzy çoğul değerli fonksiyonunun ü.f.k. θ .p.s. (a.f.k. θ .p.s) olmasıdır.

5.1.12 Teorem

X uzayının fuzzy p-regüler olması için gerek ve yeter şart $F: X \to Y$ üstten fuzzy sürekli fonksiyonunun ü.f.k. θ .p.s. olmasıdır.

İspat

$\Rightarrow$: $x_p \in F^+(V)$ olacak şekilde V kümesi $F(x)$'i ihtiva eden Y'de fuzzy açık bir küme olsun. F fonksiyonu ü.f.k. θ .p.s olduğu için $F^+(V)$, fuzzy pre-θ-açık dır. $G_p^- \leq F^+(V)$ olacak şekilde $F^+(V)$ fuzzy pre-θ-açık olduğundan $G \in FPO(X, x_p)$ kümesi vardır. Bu gösterir ki X fuzzy p-regüler dir.

$\Leftarrow$: F fonksiyonu ü.f.s. olduğundan herhangi $x_p \in X$ noktası ve Y'de herhangi V fuzzy açık küme için $F^+(V)$, x_p fuzzy noktası ihtiva eden X kümesinde fuzzy açık kümedir. X fuzzy p-regüler olduğundan $x_p \in G < G_p^- \leq F^+(V)$ olacak şekilde $G \in FPO(X, x_p)$ kümesi vardır. Buradan $G_p^- \leq F^+(V)$ elde edilir. Bu gösterir ki F fonksiyonu ü.f.k. θ .p.s. dır.
a.f.k. θ .p.s. için ispat benzerdir.

5.1.13 Tanım

Her F fuzzy pre-kapalı kümesi ve $x_p \in F^c$ fuzzy noktası için $F \leq U$, $x_p \in V$ ve $U \leq V^c$ olacak şekilde U ve V fuzzy pre-açık kümeleri varsa (X, τ) fuzzy topolojik uzayına fuzzy pre-regüler denir [15].

5.1.14 Teorem

X fuzzy pre-regüler uzay olsun. O halde F' in ü.f.p.s. (a.f.p.s.) olması için gerek ve yeter şart $F: X \to Y$ çoğul değerli fonksiyonunun ü.f.k. θ .p.s. (a.f.k. θ .p.s.) olmasıdır.

İspat

$\Rightarrow$: Açıktır.

$\Leftarrow$: $x_p \in F^+(V)$ olacak şekilde V kümesi, $F(x)$'i ihtiva eden Y kümesinde fuzzy açık küme olsun. F fonksiyonu ü.f.p.s. olduğundan $F^+(V)$ kümesi fuzzy pre-açık dır. X uzayı fuzzy pre-regüler olduğundan $x \in U \leq U_p^- \leq F^+(V)$ olacak şekilde $U \in FPO(X, x_p)$ kümesi vardır. Böylece F fonksiyonu ü.f.k. θ .p.s. dır.

a.f.k. θ .p.s. için ispat benzerdir.

5.1.15 Tanım

(X, τ) fuzzy topolojik uzayda her λ fuzzy kümesi için $cl(\lambda) = 1$ olacak şekilde $\lambda \in \tau$ varsa (X, τ) fuzzy topolojik uzayı, fuzzy submaximal uzaydır [16].

5.1.16 Tanım

Eğer X uzayının her yoğun fuzzy alt kümesi X'de fuzzy açık küme oluyorsa X topolojik uzayına fuzzy submaximal uzay denir. Bu şöylede gösterilir;
X'in fuzzy submaximal olması için gerek ve yeter şart X'in her fuzzy pre-açık kümesinin, açık olmasıdır.

5.1.17 Teorem

X bir fuzzy submaximal uzay olsun. O halde $F: X \to Y$ in ü.f.k. θ .p.s olması için gerek ve yeter şart F'in ü.f.k. θ .s. olmasıdır.

İspat

$\Rightarrow$: $x_p \in F^+(V)$ olacak şekilde V kümesi, $F(x)$'i ihtiva eden Y kümesinde fuzzy açık küme olsun. F fonksiyonu ü.f.k. θ .p.s. olduğundan $U_p^- \leq F^+(V)$ olacak şekilde x_p fuzzy noktasını ihtiva eden bir fuzzy pre-açık kümesi vardır. X uzayı, fuzzy submaximal uzay olduğundan U bir fuzzy açık küme ve $U_p^- = U^-$ dır. Böylece F ü.f.k. θ .s. dır.

$\Leftarrow$: Açıktır.

a.f.k. θ .p.s. için ispat benzerdir.

5.1.18 Önerme

X' in bir U fuzzy alt kümesinin X' de fuzzy pre-θ-açık küme olması için gerek ve yeter şart her $x_p \in U$ için $W_p^- \leq U$ olacak şekilde $x_p \in W$ fuzzy pre-açık kümesi vardır.

5.1.19 Teorem

Bir $F: X \to Y$ fuzzy çoğul değerli fonksiyonun ü.f.k. θ .p.s. (a.f.k. θ .p.s.) olması için gerek ve yeter şart her $x_p \in X$ noktası ve $F(x)$ 'i ihtiva eden her V fuzzy açık kümesi için $U \le F^+(V)\left(U \le F^-(V)\right)$ vardır.

İspat

$\Rightarrow$: $x_p \in F^+(V)$ olacak şekilde V kümesi $F(x)$ 'i ihtiva eden bir fuzzy açık küme olsun. F fonksiyonu ü.f.k. θ .p.s. olduğundan dolayı $F^+(V)$ kümesi fuzzy pre-θ -açık dır. $U = F^+(V)$ olsun. O halde $U \le F^+(V)$ olur.

$\Leftarrow$: $x_p \in X$ ve V kümesi $F(x)$ 'i ihtiva eden Y kümesinde fuzzy açık küme olsun. Hipotezden dolayı $W \le F^+(V)$ olacak şekilde x_p fuzzy noktası ihtiva eden W fuzzy pre- θ -açık kümesi vardır. Önerme 5.1.18 gereğince $U_p^- \le W$ olacak şekilde x noktasını içeren bir fuzzy pre-açık U kümesi vardır. Böylece $U_p^- \le F^+(V)$ ve F, ü.f.k. θ .p.s. dır.

a.f.k. θ .p.s. için ispat benzerdir.

5.1.20 Tanım

$F: X \to Y$ fuzzy çoğul değerli fonksiyon için $G_F: X \to X \times Y$ grafik fuzzy çoğul değerli fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır [7].

Her $x_p \in X$ için;

$$G_F(x) = \{x_p\} \times F(x)$$

5.1.21 Önerme

$F: X \to Y$ fuzzy çoğul değerli fonksiyonu için aşağıdaki özelikler sağlanır [7].

a) $G_F^+(A \times B) = A \wedge F^+(B)$
b) Herhangi $A \le X$ ve $B \le Y$ fuzzy alt kümeleri için;
$$G_F^-(A \times B) = A \wedge F^-(B)$$

5.1.22 Teorem

$F:X\rightarrow Y$ fuzzy çoğul değerli fonksiyonu ve $G_F:X\rightarrow X\times Y$ fonksiyonu F' in grafik çoğul değerli fonksiyonu olsun. G_F fonksiyonu ü.f.k.θ.p.s. (a.f.k.θ.p.s.) ise o halde F fonksiyonu, ü.f.k.θ.p.s. (a.f.k.θ.p.s.) ve X fuzzy p-regüler dir.

İspat

$x_p\in F^+(V)$ olacak şekilde $F(x)$'i ihtiva eden fuzzy açık V kümesi ve G_F ü.f.k.θ.p.s. çoğul değerli fonksiyon olsun. İlk önce F fonksiyonunun ü.f.k.θ.p.s. olduğunu sonra $X\times V$'nin $X\times Y$ kümesinde $G_F(x)$'i ihtiva eden fuzzy açık olduğunu gösterelim. G_F ü.f.k.θ.p.s. olduğundan $U_p^-\le G_F^+(X\times V)$ olacak şekilde x_p fuzzy noktası ihtiva eden X'de bir fuzzy pre-açık U kümesi vardır. Bu nedenle $U_p^-\le F^+(V)$ elde edilir. Şimdi X'in fuzzy p-regüler olduğunu gösterelim. x_p fuzzy noktasını ihtiva eden X'de U kümesi herhangi fuzzy açık küme olsun. $G_F(x)\in U\times Y$ ve $X\times Y$' de $U\times Y$ fuzzy açık kümesi olduğundan $S_p^-\le G_F^+(U\times Y)$ olacak şekilde X'de fuzzy pre-açık S kümesi vardır. Bu nedenle $x_p\in S\le S_p^-\le U$ elde edilir. Burada X fuzzy p-regüler olduğu elde edilir.
a.f.k.θ.p.s. için ispat benzerdir.

5.1.23 Teorem

$F:X\rightarrow Y$ fuzzy çoğul değerli fonksiyon ve X fuzzy p-regüler olsun. O halde F'in a.f.k.θ.p.s. olması için gerek ve yeter şart G_F'in a.f.k.θ.p.s. olmasıdır.

İspat

$\Rightarrow$: $G_F^-(x_p)$ olacak şekilde $X\times Y$'de herhangi fuzzy açık W kümesi ve $x_p\in X$ noktası olsun. $W\wedge(\{x\}\times F(x))\neq\varnothing$ olduğundan $(x_p,y_p)\in W$ olacak şekilde $y\in F(x)$ vardır ve bundan dolayı $U\le X$ ve $V\le Y$ herhangi açık kümeler için $(x_p,y_p)\in U\times V<W$ dır. X fuzzy p-regüler olduğudan $x_p\in A\le A_p^-\le U$ olacak şekilde $A\in FPO(X,x_p)$ vardır. F, a.f.k.θ.p.s. olduğundan $S_p^-\le F^-(V)$ olacak şekilde $S\in FPO(X,x_p)$ vardır. Önerme 5.1.21 den dolayı

$$A_p^- \wedge S_p^- \leq U \wedge F^-(V) = G_F^-(U \times V) \leq G_F^-(W)$$

elde edilir. Dahası $A \wedge S \in FPO(X, x_p)$ elde edilir ve bundan dolayı G_F a.f.k.θ.p.s. dır.

$\Leftarrow$: $x_p \in F^-(V)$ olacak şekilde $x_p \in X$ ve V, Y'nin bir açık kümesi olsun. O halde $X \times Y$, $X \times Y$ 'de fuzzy açıktır. Önerme 5.1.21 gereği ve G_F a.f.k.θ.p.s olduğundan X'de $G_F^-(X \times V) = X \wedge F^-(V) = F^-(V)$ pre-θ-açık kümedir.

5.1.24 Teorem

Her $x_p \in X$ için $F(x)$ fuzzy kompakt ve X bir fuzzy p-regüler uzay olmak üzere $F : X \to Y$ fuzzy çoğul değerli fonksiyon verilsin. Eğer F ü.f.k.θ.p.s. ise o halde G_F ü.f.k.θ.p.s. olur.

İspat

$x_p \in X$ ve W kümesi $G_F(x)$ 'i ihtiva eden $X \times Y$ 'de herhangi fuzzy açık küme olsun. Her $y_p \in F(x)$ için

$$(x_p, y_p) \in U(y) \times V(y) \leq W$$

olacak şekilde $U(y_p) \leq X$ ve $V(y_p) \leq Y$ fuzzy açık kümeleri vardır.

$\{V(y_p) : y_p \in F(x)\}$ ailesi $F(x)$ 'in fuzzy açık örtüsüdür. $F(x)$ kompakt olduğundan $F(x) \leq \vee\{V(y_i) : i = 1, \ldots, n\}$ olacak şekilde $F(x)$ 'de sonlu sayıda $y_1, y_2, \ldots, y_n$ noktaları vardır. $U = \wedge\{U(y_i) : 1, \ldots, n\}$ ve $V = \vee\{(y_i) : i = 1, \ldots, n\}$ alalım. O halde U ve V sırasıyla X ve Y'de fuzzy açık kümelerdir ve $\{x_p\} \times F(x) \leq U \times V \leq W$ dır. F ü.f.k.θ.p.s. olduğundan $S_p^- \leq F^+(V)$ olacak şekilde $S \in FPO(X, x_p)$ kümesi vardır. X fuzzy p-regüler olduğundan $x_p \in G \leq G_p^- \leq U$ olacak şekilde $G \in FPO(X, x_p)$ kümesi vardır. Böylece

$$\{x\} \times F(x) \leq G_p^- \times V \leq U \times V \leq W$$

elde edilir. Sonrasında

$$(S \wedge G)_p^- \leq S_p^- \wedge G_p^- \leq F^+(V) \wedge G_p^- = G_F^+(G_p^- \times V) \leq G_F^+(W)$$

bulunur. Buradan

$$S \wedge G \in FPO(X, x_p)$$

olup ve böylece G_F ü.f.k. θ .p.s. olur.

5.1.25 Önerme

A ve X_0 , X uzayının fuzzy alt kümeleri olsun [3].

a) X' de $A \in FPO(X)$ ve X_0 fuzzy semi-açık ise o halde $A \wedge X_0 \in FPO(X_0)$ 'dır.

b) $A \in FPO(X_0)$ ve $X_0 \in FPO(X)$ ise o halde $A \in FPO(X)$ ' dır.

5.1.26 Önerme

$A \le X_0 \le X$ olacak şekilde A ve X_0 , X' in fuzzy alt kümeleri olsun [17].

a) X_0 , X' de fuzzy semi açık ise $(A_p^-)_{X_0} \le A_p^-$ dır.

b) $A \in FPO(X_0)$ ve $X_0 \in FPO(X)$ ise $A_p^- \le (A_p^-)_{X_0}$ dır.

5.1.27 Teorem

Her $x_p \in X$ için $F|_{X_0} : X_0 \to Y$ ü.f.k. θ .p.s. (a.f.k. θ .p.s.) olacak şekilde x_p fuzzy noktasını ihtiva eden X_0 fuzzy pre-açık varsa $F : X \to Y$ fuzzy çoğul değerli fonksiyonu ü.f.k. θ .p.s. (a.f.k. θ .p.s.)' dır.

İspat

$x_p \in F^+(V)$ olacak şekilde $x_p \in X$ ve V kümesi $F(x)$ fonksiyonunu ihtiva eden Y'de bir fuzzy açık küme olsun. $F|_{X_0} : X_0 \to Y$ ü.f.k. θ .p.s. olacak şekilde $X_0 \in FPO(X, x_p)$ vardır. Bu nedenle $(U_p^-)_{X_0} \le (F|_{X_0})^+(V)$ olacak şekilde $U \in FPO(X_0, x_p)$ vardır. **(** Önerme 5.1.25 ve önerme 5.1.26 **)**'dan dolayı $U \in FPO(X, x_p)$ ve $U_p^- \le (U_p^-)_{X_0}$ dır. Bundan dolayı

$$F(U_p^-) = (F|_{X_0})(U_p^-) \le (F|_{X_0})((U_p^-)_{X_0}) \le V$$

elde edilir. Bu gösterir ki, F ü.f.k. θ .p.s. dır.

5.1.28 Tanım

(X, τ_x) fuzzy topolojik uzay, $\mu \in I^X$ olsun. Eğer $\mu \leq f - \mathrm{int}(f - \mathrm{cl}(f - \mathrm{int}(\mu)))$ ise, μ 'e fuzzy $\alpha -$açık küme denir [2].

5.1.29 Teorem

$\{U_\lambda : \lambda \in \varphi\}$ X uzayının $\alpha -$açık örtüsü ve $F : X \to Y$ bir çoğul değerli fonksiyon olsun. O halde her $\lambda \in \varphi$ için

F ü.f.k. θ .p.s. (a.f.k. θ .p.s.)

$\Updownarrow$

$F\big|_{U_\lambda} : U_\lambda \to Y$ ü.f.k. θ .p.s. (a.f.k. θ .p.s.)

5.1.30 Tanım

Eğer $\forall x_p \in X$ noktası ve $\forall V \in FPO(Y, F(x))$ kümesi için $U \leq F^+(V)(U \leq F^-(V))$ iken $U \in FPO(X, x)$ varsa bir $F : X \to Y$ fuzzy çoğul değerli fonksiyona üstten (alttan) fuzzy preirresolute denir [18].

5.1.31 Önerme

Eğer $F : X \to Y$ bir alttan fuzzy preirresolute ve V kümesi, Y'de bir fuzzy pre- θ -açık küme ise o halde $F^-(V)$, X'de fuzzy pre- θ -açık dır [18].

5.1.32 Teorem

$F : X \to Y$ ve $G : Y \to Z$ fuzzy çoğul değerli fonksiyonlar olsun. Eğer F bir alttan fuzzy preirresolute ve G bir a.f.k. θ .p.s. ise o halde $G \circ F$ a.f.k. θ .p.s. dir.

İspat

W kümesi, Z'de bir fuzzy açık kümesi olsun. G fuzzy çoğul değerli fonksiyon a.f.k. θ .p.s. olduğundan $G^-(W)$ kümesi, Y'de fuzzy pre- θ -açık dır. Önerme 5.1.31'den dolayı F fonksiyonu alttan fuzzy preirresolute olduğundan $F^-(G^-(W))$ kümesi, X'de fuzzy pre- θ -açık dır. Bu nedenle X'de $(G \circ F)^-(W)$ kümesi fuzzy pre- θ -açık $G \circ F$ fonksiyonunun a.f.k. θ .p.s olduğunu elde ederiz.

5.1.33 Uyarı

Bir $F: X \to Y$ fuzzy çoğul değerli fonksiyon

$$\text{ü.f.k.}\,\theta\text{.p.s. (a.f.k.}\,\theta\text{.p.s.)}$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{üstten fuzzy preirresolute (alttan fuzzy preirresolute)}$$

5.1.34 Teorem

$F: X \to Y$ bir fuzzy çoğul değerli fonksiyon ve Y bir fuzzy submaximal uzay olsun. Eğer F fonksiyonu ü.f.k. θ.p.s. (a.f.k. θ.p.s.) ise o halde F bir üstten fuzzy preirresolute (alttan fuzzy preirresolute) dır.

İspat

F fonksiyonu ü.f.k. θ.p.s. çoğul değerli fonksiyon ve Y fuzzy submaximal uzay olsun. O halde Y uzayında her V fuzzy açık kümesi için $U_p^- \le F^+(V)$ olacak şekilde X'de bir U fuzzy pre açık kümesi vardır. Y fuzzy submaximal olduğundan V kümesi Y'de fuzzy pre açık dır. Her zaman $U \le U_p^-$ sağlandığından $U_p^- \le F^+(V)$ ifadesini elde ederiz ve bu nedenle F fonksiyonu üstten fuzzy preirresolute çoğul değerli fonksiyondur.

a.f.k. θ.p.s. için ispat benzer şekilde yapılır.

6. FUZZY FAİNTLY b-I-SÜREKLİ FONKSİYONLARIN ÖZELLİKLERİ

6.1 Fuzzy Faintly b-I-Sürekli Fonksiyonlar

Bu bölümde, fuzzy ideal topolojik uzayda fuzzy faintly b-I-sürekli fonksiyon tanımı verildi ve özellikleri üzerine çalışıldı. Ayrıca bu bölümde fuzzy ideal topolojik uzayda yeni tanımlar verilip fuzzy faintly b-I-sürekli fonksiyon ile ilgili teoremler elde edildi.

6.1.1 Tanım

$A \leq \overline{A^{\circ}}^{*} \vee \overline{A}^{*^{\circ}}$ olacak şekilde (X, τ, I) fuzzy ideal topolojik uzayının, A fuzzy alt kümesine fuzzy b-I-açık küme denir [19].

6.1.2 Tanım

Eğer Y'deki her fuzzy açık kümenin ters görüntüsü (X, τ, I)'da fuzzy b-I-açık küme oluyorsa $f:(X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonuna fuzzy b-I-sürekli denir [19].

6.1.3 Teorem

(X, τ_x) fuzzy topolojik uzay, x_α bir fuzzy nokta ve $\beta \in I^x$ olsun. $x_\alpha qU \leq \beta$ olacak biçimde bir U fuzzy açık kümesi var ise, β'ye x_α'nın q-komşuluğunun β ile çakışığımsı olmasıdır [11].

6.1.4 Tanım

x_α'nın her bir μ fuzzy açık q-komşuluğu için $cl(\mu)$ kümesi β fuzzy kümesi ile çakığımsı ise x_α fuzzy noktası β fuzzy kümesinin fuzzy θ-kapanış noktasıdır denir. β'nın bütün fuzzy θ-kapanış noktalarının birleşimi β'nın fuzzy θ-kapanışı olarak isimlendirilir. $\beta = \theta - cl(\beta)$ ise β kümesine fuzzy θ-kapalı küme denir. Fuzzy θ-kapalı kümenin tümleyeni fuzzy θ-açık küme olarak tanımlanır [20].

6.1.5 Tanım

Eğer X'in her x_ε noktası ve $f(x_\varepsilon)$'ı ihtiva eden Y'de her β fuzzy θ-açık kümesi için $f(\mu)\le\beta$ olacak şekilde x_ε ihtiva eden X'de μ fuzzy b-I-açık kümesi varsa, $f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma)$ fonksiyonuna fuzzy faintly b-I-sürekli denir.

6.1.6 Teorem

$f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma)$ fonksiyonu için aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir:

(1) f fonksiyonu fuzzy faintly b-I-sürekli,
(2) Her $\beta\in Y$ fuzzy θ-açık kümesi için $f^{-1}(\beta)$ fuzzy b-I-açık
(3) Her $\beta\in Y$ ve fuzzy θ-kapalı kümesi için $f^{-1}(\beta)$ fuzzy b-I-kapalı

İspat

$(1)\Rightarrow(2)$: β, Y'de fuzzy θ-açık küme ve $x_\varepsilon\in f^{-1}(\beta)$ olsun. $f(x_\varepsilon)\in\beta$ olduğundan, (1)' den dolayı $\mu_{x_\varepsilon}\le f^{-1}(\beta)$ olacak şekilde x_ε ihtiva eden X'de bir μ_{x_ε} fuzzy b-I-açık kümesi vardır. Buradan

$$f^{-1}(\beta)=\bigvee_{x_\varepsilon\in f^{-1}(\beta)}\mu_{x_\varepsilon}$$

elde edilir. Böylece $f^{-1}(\beta)$ fuzzy b-I-açık dır.

$(2)\Rightarrow(3)$: β, Y'de fuzzy θ-açık küme olsun. O halde $Y\setminus\beta$ fuzzy θ-açık dır. (2)'den $f^{-1}(Y\setminus\beta)=X\setminus f^{-1}(\beta)$ fuzzy b-I-açık dır. Böylece $f^{-1}(\beta)$ fuzzy b-I-kapalı dır.

$(3)\Rightarrow(1)$: Açıktır.

6.1.7 Teorem

$f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma)$ fuzzy fonksiyonu ve X'in her x_ε fuzzy noktası için $g(x_\varepsilon)=(x_\varepsilon,f(x_\varepsilon))$ ile tanımlı f fonksiyonunun $g:X\times X\to Y$ fuzzy grafik fonksiyonu olsun. Eğer g fonksiyonu fuzzy faintly b-I-sürekli ise bu takdirde f fonksiyonu fuzzy b-I-sürekli dir.

İspat

β, Y'de fuzzy θ-açık küme olsun. Bu takdirde $X\times\beta$, $X\times Y$'de fuzzy θ-açık kümedir. g fonksiyonu fuzzy faintly b-I-sürekli olduğundan $f^{-1}(\beta)=g^{-1}(X\times\beta)$ X'de fuzzy b-I-açık dır. Böylece f fonksiyonu, fuzzy faintly b-I-sürekli dir.

6.1.8 Tanım

Eğer x_ε fuzzy noktasını ihtiva eden X'deki herhangi β fuzzy b-I-açık kümesi için $\mu\leq\beta$ olacak şekilde bir $\mu\in\varphi$ fuzzy kümesi varsa, φ fuzzy süzgeç tabanı x_ε fuzzy noktasına fuzzy b-I-yakınsaktır denir.

6.1.9 Tanım

Eğer x_ε fuzzy noktasını ihtiva eden X'deki herhangi β fuzzy θ-açık kümesi için $\mu\leq\beta$ olacak şekilde bir $\mu\in\varphi$ fuzzy kümesi varsa, φ fuzzy süzgeç tabanı x_ε fuzzy noktasına fuzzy θ-yakınsaktır denir.

6.1.10 Teorem

Eğer $f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma)$ fuzzy fonksiyonu fuzzy faintly b-I-sürekli ise bu takdirde her $x_\varepsilon\in X$ fuzzy noktası ve x_ε fuzzy noktasına b-I-yakınsayan X'deki her φ fuzzy süzgeç tabanı için $f(x_\varepsilon)$ fuzzy noktasına $f(\varphi)$ fuzzy süzgeç tabanı fuzzy θ-yakınsaktır.

İspat

$x_\varepsilon\in X$ verilsin. φ, x_ε fuzzy noktasına b-I-yakınsayan X'de herhangi bir fuzzy süzgeç tabanı olsun. f fonksiyonu, fuzzy faintly b-I-sürekli olduğundan $f(x_\varepsilon)$ fuzzy noktasını ihtiva eden Y'de herhangi bir λ fuzzy θ-açık kümesi için $f(\mu)\leq\lambda$ olacak şekilde x_ε fuzzy noktasını ihtiva eden X'de bir μ fuzzy b-I-açık kümesi vardır. λ, x_ε fuzzy noktasına b-I-yakınsayan olduğundan $\beta\leq\mu$ olacak şekilde bir $\beta\in\varphi$ vardır. Buradan $f(\beta)\leq\lambda$ ve böylece $f(\varphi)$ fuzzy süzgeç tabanı $f(x_\varepsilon)$ fuzzy noktasına fuzzy θ-yakınsak olur.

Açıktır ki, fuzzy b-I-süreklilik fuzzy faintly b-I-süreklilik gerektirir. Aşağıda ki örnek bu gerektirmenin tersinin doğru olmadığını gösterir.

6.1.11 Örnek

$X=\{a,b\}$, $Y=\{x,y\}$ olsun. λ ve μ fuzzy kümeler aşağıdaki gibi tanımlansın.

$\lambda(a)=0.3$, $\lambda(b)=0.4$ ve $\mu(x)=0.7$, $\mu(y)=0.5$ olsun.

$\tau=\{X,\varnothing,\lambda\}$, $\sigma=\{Y,\varnothing,\mu\}$ ve $I=\{\varnothing\}$ olacak şekilde $f(a)=x$, $f(b)=y$ ile tanımlanan $f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma)$ fuzzy fonksiyonu, fuzzy faintly b-I-sürekli fakat fuzzy b-I-sürekli değildir.

6.1.12 Teorem

Y uzayı, fuzzy θ -açık kümelerden oluşan bir tabana sahip olsun. Eğer $f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma)$ fonksiyonu fuzzy faintly b-I-sürekli ise bu takdirde f fonksiyonu fuzzy b-I-süreklidir.

İspat

$x_\varepsilon \in X$ ve ρ , $f(x_\varepsilon)$ fuzzy noktasını ihtiva eden Y'de bir fuzzy açık küme olsun. Y uzayı, fuzzy θ -açık kümelerden oluşan bir tabana sahip olduğundan $\beta\le\rho$ olacak şekilde $f(x_\varepsilon)$ fuzzy noktasını ihtiva eden bir β fuzzy açık kümesi vardır. f fonksiyonu, fuzzy faintly b-I-sürekli olduğundan $f(\mu)\le\beta\le\rho$ olacak şekilde x_ε fuzzy noktasını ihtiva eden X'de bir μ fuzzy b-I-açık kümesi vardır. Böylece f fonksiyonu fuzzy b-I-süreklidir.

Şimdi, fuzzy faintly b-I-sürekli fonksiyonlar ile ayırma aksiyomları arasındaki bağlantıyı inceleyeceğiz. Üstelik fuzzy b-I-kapalı grafiklik kavramını tanıtıp fuzzy faintly b-I-süreklilik ile fuzzy b-I-kapalı grafikler arasındaki durumu araştıracağız.

6.1.13 Tanım

Eğer X'deki her ayrık fuzzy nokta çifti için birinin diğerini ihtiva etmeyen X'in fuzzy b-I-açık kümesi varsa bu takdirde (X,τ,I) fuzzy ideal topolojik uzayına fuzzy $b-I-T_0$ uzayı denir.

6.1.14 Tanım

Eğer X'deki her x_ε ve y_υ ayrık fuzzy nokta çifti için $x_\varepsilon \notin \mu$ ve $y_\upsilon \notin \beta$ olacak şekilde sırasıyla x_ε ve y_υ fuzzy noktalarını ihtiva eden μ ve β fuzzy b-I-açık kümeleri varsa bu takdirde (X,τ,I) fuzzy ideal topolojik uzayına fuzzy $b-I-T_1$ uzayı denir.

6.1.15 Tanım

Eğer X'deki her ayrık fuzzy nokta çifti için birinin diğerini ihtiva etmeyen X'in fuzzy θ-açık kümeleri varsa bu takdirde (X,τ) fuzzy uzayına fuzzy $\theta-T_0$ uzayı denir.

6.1.16 Tanım

Eğer X'deki her x_ε ve y_υ ayrık fuzzy nokta çifti için $x_\varepsilon \notin \mu$ ve $y_\upsilon \notin \beta$ olacak şekilde sırasıyla x_ε ve y_υ fuzzy noktalarını ihtiva eden μ ve β fuzzy θ-açık kümeleri varsa bu takdirde (X,τ) fuzzy uzayına fuzzy $\theta-T_1$ uzayı denir.

6.1.17 Teorem

Eğer $f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma)$ fonksiyonu fuzzy faintly b-I-sürekli, içine fonksiyon ve Y uzayı fuzzy $\theta-T_1$ uzayı ise X uzayı fuzzy $b-I-T_1$ dir.

İspat

Varsayalım ki Y uzayı fuzzy $\theta-T_1$ olsun. X'de herhangi x_ε ve y_υ ayrık fuzzy noktaları için $f(x_\varepsilon)\in\mu$, $f(y_\upsilon)\notin\mu$, $f(x_\varepsilon)\notin\rho$ ve $f(y_\upsilon)\in\rho$ olacak şekilde Y'de μ ve ρ fuzzy θ-açık kümeleri vardır. f fonksiyonu, fuzzy faintly b-I-sürekli olduğundan $x_\varepsilon \in f^{-1}(\mu)$, $y_\upsilon \notin f^{-1}(\mu)$, $x_\varepsilon \notin f^{-1}(\rho)$ ve $y_\upsilon \in(\rho)$ olacak şekilde

$f^{-1}(\mu)$ ve $f^{-1}(\rho)$ kümeleri X'de fuzzy b-I-açık kümelerdir. Bu da gösterir ki X, fuzzy $b-I-T_1$ dir.

6.1.18 Tanım

Eğer X'deki her x_ε ve y_υ ayrık fuzzy nokta çifti için $x_\varepsilon \in \mu$ ve $y_\upsilon \in \beta$ olacak şekilde X'de β ve μ ayrık fuzzy b-I-açık kümeleri varsa (X,τ,I) fuzzy ideal topolojik uzayına fuzzy $b-I-T_2\,(b-I-\text{Hausdorff})$ uzayı denir.

6.1.19 Tanım

Eğer X'deki her x_ε ve y_υ ayrık fuzzy nokta çifti için $x_\varepsilon \in \beta$ ve $y_\upsilon \in \mu$ olacak şekilde X'de β ve μ ayrık fuzzy θ-açık kümeleri varsa (X,τ) fuzzy uzayına fuzzy $\theta-T_2$ uzayı denir.

6.1.20 Teorem

Eğer $f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma)$ fonksiyonu fuzzy faintly b-I-sürekli içine fonksiyon ve Y uzayı, fuzzy $\theta-T_2$ ise bu takdirde X uzayı fuzzy $b-I-T_2$ dir.

İspat

X'de herhangi x_ε ve y_υ ayrık fuzzy nokta çifti için $f(x_\varepsilon)\in\beta$ ve $f(y_\upsilon)\in\mu$ olacak şekilde Y'de β ve μ ayrık fuzzy θ-açık kümeleri vardır. f fonksiyonu, fuzzy faintly b-I-sürekli olduğundan $f^{-1}(\beta)$ ve $f^{-1}(\mu)$ kümeleri sırasıyla x_ε ve y_υ fuzzy noktalarını ihtiva eden X'de fuzzy b-I-açık dır. $f^{-1}(\beta)\wedge f^{-1}(\mu)=\varnothing$ olduğunu biliyoruz. Bu da gösterir ki X, fuzzy $b-I-T_2$ dir.

Hatırlatalım ki, $f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma)$ fuzzy fonksiyonu için

$$\{(x_\varepsilon, f(x_\varepsilon)) : x_\varepsilon \in X\} \leq X\times Y$$

alt kümesi f fonksiyonun grafiği olarak adlandırılır ve $G(f)$ şeklinde belirtilir.

Şimdi, fuzzy faintly b-I-sürekli fonksiyonlar ile fuzzy kompaktlık ve fuzzy bağlantılık arasındaki durumu inceleyelim.

6.1.21 Tanım

(X, τ, I) fuzzy ideal topolojik uzay olsun.

(1) Eğer X uzayının her fuzzy b-I-açık örtüsünün sonlu alt örtüsü varsa X uzayına fuzzy b-I-kompakt denir.

(2) Eğer X uzayının her fuzzy b-I-açık sayılabilir örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa X uzayına fuzzy sayılabilir b-I-kompakt denir.

(3) Eğer X' in fuzzy b-I-açık kümelerinin her örtüsünün sayılabilir alt örtüsü varsa X uzayına fuzzy b-I-lindelöf uzay denir.

6.1.22 Tanım

(X, τ) fuzzy topolojik uzay olsun.

(1) Eğer X uzayının her fuzzy θ-açık örtüsünün sonlu alt örtüsü varsa X uzayına fuzzy θ-kompakt denir.

(2) Eğer X uzayının her fuzzy θ-açık sayılabilir örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa X uzayına fuzzy sayılabilir θ-kompakt denir.

(3) Eğer X'in fuzzy θ-açık kümelerinin her örtüsünün sayılabilir alt örtüsü varsa X uzayına fuzzy θ-lindelöf denir.

6.1.23 Teorem

$f : (X, \tau, I) \to (Y, \sigma)$ fuzzy faintly b-I-sürekli örten fonksiyon olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler sağlanır;

(1) Eğer X uzayı fuzzy b-I-kompakt ise bu takdirde Y uzayı, fuzzy θ-kompakt tır.

(2) Eğer X uzayı fuzzy b-I-lindelöf uzayı ise bu takdirde Y uzayı, fuzzy θ-lindelöftür.

(3) Eğer X uzayı fuzzy sayılabilir b-I-kompakt ise bu takdirde Y uzayı, fuzzy sayılabilir θ-kompakttır.

İspat

$\{\mu_\alpha : \alpha \in I\}$ örtüsü Y'de herhangi bir fuzzy θ-açık örtü olsun. f fonksiyonu fuzzy faintly b-I-sürekli olduğundan $\{f^{-1}(\mu_\alpha) : \alpha \in I\}$ ailesi X'in bir fuzzy b-I-açık örtüsü olur. X uzayı, fuzzy b-I-kompakt olduğundan

$$X = \vee f^{-1}(\mu_\alpha) : \alpha \in I_0$$

olacak şekilde I'nın bir I_0 sonlu alt kümesi vardır. Buradan

$$Y = \vee \{(\mu_\alpha) : \alpha \in I_0\}$$

bulunur. Böylece Y uzayı, fuzzy θ-kompakt olur. Diğer ispatlar benzerdir.

6.1.24 Tanım

Eğer (X, τ, I) fuzzy ideal topolojik uzayı boş olmayan birbirinden ayrık iki fuzzy b-I-açık kümelerin birleşimi olarak ifade edilemiyorsa, X uzayına fuzzy b-I-bağlantılı denir.

6.1.25 Tanım

Eğer (X, τ) fuzzy uzayı boş olmayan birbirinden ayrık iki θ-açık kümelerin birleşimi olarak ifade edilemiyorsa, (X, τ) fuzzy uzayına fuzzy θ-bağlantılı denir.

6.1.26 Teorem

Eğer $f : (X, \tau, I) \to (Y, \sigma)$ fonksiyonu fuzzy faintly b-I-sürekli örten fonksiyon ve X fuzzy b-bağlantılı uzay ise bu takdirde Y uzayı, fuzzy θ-bağlantılıdır.

İspat

Varsayalım ki, Y bir fuzzy bağlantılı uzay olmasın. O halde $Y = \beta \vee \mu$ olacak şekilde boş olmayan ayrık β ve μ fuzzy açık kümeleri vardır. Her fuzzy açık, fuzzy θ-açık olduğundan β ve μ Y'de fuzzy θ-açık kümeler olur. f fonksiyonu, fuzzy faintly b-I-sürekli olduğundan $f^{-1}(\beta)$ ve $f^{-1}(\mu)$ kümeler X'de fuzzy b-I-kapalı ve fuzzy b-I-açıktır. Dahası $X = f^{-1}(\beta) \vee f^{-1}(\mu)$ olur. $f^{-1}(\beta)$ ve $f^{-1}(\mu)$ boş olmayan kümelerdir. Bu gösterir ki X, fuzzy b-I-bağlantılı değildir. Bu bir çelişkidir. Bu çelişkiden dolayı, Y fuzzy θ-bağlantılı uzaydır.

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada; kuvvetli θ-pre sürekli çoğul değerli fonksiyon kavramı fuzzy topojiye genişletildi ve bu kavramın özelliklerinden bahsedildi. Dahası fuzzy faintly b-I-sürekli fonksiyon tanımı verilip özellikleri üzerine çalışıldı ve yeni teoremler elde edildi.

Tarafımızca verilmiş olan kavramlar, bundan sonra yapılacak olan çalışmalar için farklı topolojik uzaylara genişletilebilir ve uygulamaları incelenebilir.

8. KAYNAKLAR

[1] Zadeh, L.A., Fuzzy Set, *İnform and Control,* 8, 338-353, (1965).

[2] Chang, C.L., Fuzzy Topological Spaces, *J.Math. Anal. Appl.*, 24,1882-190, (1968).

[3] AZAD, K.K., On Fuzzy Semicontinuity, Fuzzy Almost Continuity and Fuzzy Weakly Continuity, *Journal of mathematical analysis and aplication*, 82,14-32, (1981).

[4] Sarkar, D., "Fuzzy ideal theory fuzzy local function and generated fuzzy topology", *Fuzzy Set and Systems,* 87, 117-123, (1997).

[5] Berge, C., Topological Spaces, Macmillan, Newyork, (1863). *English translation by E.M. Patterson of Espaces Topologues, Fontions Multivoques, Dunod,* Paris, (1959).

[6] Papageourgiou, N.S., Fuzzy topology and fuzzy multifunctions, *J.Math.Anal.Apply.,* 109, 397-425, (1985).

[7] Mukherhee, M. N. and S. Malakar, On almost continuous and weakly continuous fuzzy multifunctions, *Fuzzy Sets and Systems*, 113—125, 41, (1991).

[8] Kuratowski, K., *"Topologie I"*, Warszawa, (1933).

[9] Jankovic, D., Hamlett T.R., New topologies from old via ideals, *Amer Math Monthly.*, 97, 295-310, (1990).

[10] Bourbaki, N., *General Topology*, Addison-Wesley, Mass, (1966).

[11] Pao-Ming, P., Ying-Ming L., Fuzzy Topology I. Neighbourhood structure of a fuzzy point and Moore-Smith convergence, *J. Math. Anal. Appl.,* 76, 571-599, (1980).

[12] Bin Shanna, A.S., On fuzzy strong semi continuity and fuzzy pre-continuity, *Fuzzy Sets and Systems,* 44,303-308, (1991).

[13] Özbakır, O., On the Fuzzy Continuty of Multifunctions, Doktora Tezi, *Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı,* İzmir, (1994).

[14] Khaled, M. A., Al-Hamadi and S. B. Nimse, ‘‘On fuzzy α-continous multifunctions’’, *Miskolc Mathematical Notes* 11, 2, 105-112, (2010).

[15] Ganster, M., Georgiou D. N., Jafari S. and Moshokoa S. P., On some applications of fuzzy points *‘‘Universidad Polit´ecnica de Valencia’’,* 6, 2, 119-133, (2005).

[16] Balasubramanian G., Maximal fuzzy topologies, *Kybernetika,* 31, 5,459-464, (1995).

[17] Nanda, S., Strongly compact fuzzy topological spaces, *Fuzzy sets and systems*, 42, 259-262, (1991).

[18] Park, J.H. and Park, B.H., Fuzzy pre-irresolute mappings, *Pusan Kyongnam Math. J.,* 10, 303-313, (1995).

[19] Yüksel, Ş., Kara, Ş. and Açıkgöz, A., On fuzzy b-I-continuous functions, *Sdu Journal of Sience (E-Journal),* 4(1), 87-98, (2009).

[20] Mukherhee, M. N. And Sinha, SP., On Some near fuzzy continuous functions between fuzzy topological spaces, *Fuzzy Sets and Systems*, 34, 245-254, (1990).