T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

AĞIRLIKLI REARRANGEMENT INVARIANT UZAYLARDA YAKLAŞIM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YAKUP DOKUR

BALIKESİR, HAZİRAN - 2019

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

AĞIRLIKLI REARRANGEMENT INVARIANT UZAYLARDA YAKLAŞIM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YAKUP DOKUR

Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Ali GÜVEN (Tez Danışmanı)
Prof. Dr. Yunus Emre YILDIRIR
Doç. Dr. Hülya İNCEBOZ

BALIKESİR, HAZİRAN - 2019

KABUL VE ONAY SAYFASI

Yakup DOKUR tarafından hazırlanan "**AĞIRLIKLI REARRANGEMENT INVARIANT UZAYLARDA YAKLAŞIM**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 10.06.2019 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Prof. Dr. Ali GÜVEN	....
Üye Prof. Dr. Yunus Emre YILDIRIR	....
Üye Doç. Dr. Hülya İNCEBOZ	....

Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Prof. Dr. Necati ÖZDEMİR ....

ÖZET

AĞIRLIKLI REARRANGEMENT INVARIANT UZAYLARDA YAKLAŞIM
YÜKSEK LİSANS TEZİ
YAKUP DOKUR
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. ALİ GÜVEN)

BALIKESİR, HAZİRAN - 2019

Bu çalışmanın amacı ağırlıklı rearrangement inavariant uzaylarda yaklaşımla ilgili bazı problemleri incelemektir.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde yaklaşım teorisinin gelişimi ile ilgili çalışmalar verilmiştir.

İkinci bölümde rearrangement invariant uzaylar ve ağırlıklı Rearrangement inavariant uzaylar ile ilgili temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda Fourier serileri ile ilgili tanımlar, ikinci kısımda ise trigonometrik yaklaşım ile ilgili tanım ve teoremler verilmiştir.

Dördüncü bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda ağırlıklı Rearrangement inavariant uzaylarda daha önce elde edilen bazı yaklaşım sonuçları verilmiştir. İkinci kısımda ise ağırlıklı Rearrangement inavariant uzaylarda trigonometrik yaklaşım teorisinin bazı teoremleri ispatlanmıştır.

Son bölümde tezden elde edilen sonuçların özeti verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Fourier serisi, de la Vallée-Poussin toplamı, Muckenhoupt ağırlığı, ağırlıklı Rearrangement invariant uzay, düzgünlük modülü.

ABSTRACT

APPROXIMATION IN WEIGHTED REARRANGEMENT INVARIANT SPACES
MSC THESIS
YAKUP DOKUR
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS

(SUPERVISOR: PROF. DR. ALİ GÜVEN)

BALIKESİR, JUNE - 2019

The purpose of this work is to investigate some problems of approximation in weighted rearrangement invariant spaces.

This thesis consists of five chapters.

In the first chapter, progress of approximation theory are given.

In the second chapter, basic definition and theorems in weighted rearrangement invariant spaces and rearrangement invariant spaces are given.

In the third chapter consist of two sections. In first section, definition of Fourier series, in second section definition and theorems of trigonometric approximation are given.

In the fourth chapter consist of two sections. In first section, some approximation in weighted rearrangement invariant spaces are given. In second section, trigonometric approximation theory in weighted rearrangement invariant spaces are proved.

In the last chapter the results which are obtained are summarized according to chapters.

KEYWORDS: Fourier series, de la Vallée Poussin sums, Muckenhoupt weights, weighted Rearrangement invariant space, modulus of smoothness.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{T}$	: $\{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}$ birim çemberi veya $[-\pi, \pi]$ aralığı
$\boldsymbol{\alpha_X}, \boldsymbol{\beta_X}$	: Alt ve üst Boyd indisleri
$\boldsymbol{X}(\mathbb{T})$	: $\mathbb{T}$ üzerinde Rearrangement invariant uzay
$\boldsymbol{\omega}$	: Ağırlık fonksiyonu
$\boldsymbol{X}(\mathbb{T}, \boldsymbol{\omega})$	: $\mathbb{T}$ üzerinde ağırlıklı Rearrangement invariant uzay
$\boldsymbol{L_P}$	: Lebesgue uzayı
$\boldsymbol{\Omega^k_{X,\omega}}$	: k. düzgünlük modülü
$\boldsymbol{E_n(f)_{X,\omega}}$	: En iyi yaklaşım hatası
$\boldsymbol{A_p}$	: Muckenhoupt sınıfı
$\prod_n$	: Trigonometrik polinomlar sınıfı

ÖNSÖZ

Yüksek lisans çalışmam boyunca hiçbir zaman yardımını esirgemeyen, her türlü kolaylığı sağlayan, hakkını asla ödeyemeyeceğim değerli danışmanım sayın Prof. Dr. Ali GÜVEN'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Matematiği daha çok sevip ilgi duymamı sağlayan, bana her zaman rehber olan, lisans ve lisansüstü eğitimim boyunca üzerimde emeği olan saygı değer hocalarıma teşekkürü bir borç bilirim.

Tüm hayatım boyunca, maddi ve manevi desteklerini esirgemeyerek her zaman yanımda olan, bugünlere gelmemi sağlayan annem, babam ve ablama sonsuz teşekkürler…

1. GİRİŞ

Yaklaşım teorisinde genellikle belirli bir sınıftan olan fonksiyonlara daha iyi özellikli basit fonksiyonlarla yaklaşım problemleri araştırılmaktadır. Genellikle araştırılan temel fonksiyon uzayının belirli alt uzayları iyi özelliklere sahip olan basit fonksiyonlar olarak seçilir. Bu nedenle yaklaşım teorisinde sık kullanılan alt uzaylar olarak özellikleri iyi bilinen cebirsel polinomlar, rasyonel fonksiyonlar kümesi veya trigonometrik polinomlar kümesi (periyodik durumda) alınır.

Yaklaşım teorisindeki temel problemlerden biri, verilen fonksiyona alt uzaydan en iyi yaklaşan elemanın varlığının araştırılması problemidir. Özel halde, alt uzaylar olarak polinomlar kümesi alındığında Banach uzaylarında en iyi yaklaşım elemanının varlığı iyi bilinmektedir. Bu problemin pozitif çözümü bir sonraki problemin, verilen fonksiyonla buna en iyi yaklaşan eleman arasındaki hatanın, fonksiyonun belli karakteristikleri (örneğin, süreklilik modülü) yardımıyla değerlendirilmesi problemin çözümü için bir altyapı oluşturmaktadır. Yaklaşım teorisinin nitelik problemlerinin pozitif çözümü alt uzayın verilen uzayda yoğunluğu durumunda gerçekleşmiş olur. Nitelik problemlerinin pozitif çözümü nicelik problemlerinin çözümü için ön koşuldur. Nicelik problemleri iki kısımdan oluşur. Birinci kısımda yaklaşım teorisinin düz problemleri, ikinci kısımda yaklaşım teorisinin ters problemleri incelenir. En iyi yaklaşım hatasının üstten değerlendirildiği problemlere yaklaşım teorisinin düz problemleri, elde edilen teoremlere ise düz teoremler denir. Bunun tersi olan yani fonksiyonun yaklaşım özelliklerine göre bu fonksiyonun özelliklerinin araştırıldığı problemlere ise yaklaşım teorisinin ters problemleri denir.

Bu durumda, süreklilik modülü üstten en iyi yaklaşım sayısı ile değerlendirilir ve fonksiyonun yaklaşım özelliklerine göre hangi sınıfa ait olduğu hakkında bilgi edinme amacı güdülür. En ideal durum, belli bir sınıfta elde edilen düz ve ters teoremlerin gerek ve yeter koşul olarak ifade edilebilmesidir. Temel uzaylar olarak bakılan Rearrangement invariant uzaylar, Lebesgue uzaylarının doğal genelleştirilmeleridir.

$L_p([0,2\pi])$ Lebesgue uzaylarında trigonometrik polinomlarla yaklaşım birçok matematikçi tarafından araştırılmıştır. Bu uzayda norm

$$\|f(x)\|_{L_p([0,2\pi])} := \begin{cases} \left(\int_0^{2\pi} |f\ (x)|^p \mathrm{d}x \right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty \\ \operatorname*{ess\,sup}_{x \in [0,2\pi]} |f\ (x)|, & p = \infty \end{cases}$$

biçiminde tanımlıdır. Derecesi n'yi aşmayan trigonometrik polinomların kümesi $\prod_n$ olmak üzere $f \in L_p([0,2\pi])$ fonksiyonu için en iyi yaklaşım hatası

$$E_n(f)_p := \inf\left\{ \|f - T_n\|_{L_p([0,2\pi]))} : T_n \in \prod_n \right\}$$

ve alışılmış düzgünlük modülü

$$\Omega_p^k(\delta, f) := \sup_{|h| \le \delta} \left\| \sum_{v=0}^{r} (-1)^{r-v} \binom{r}{v} f(x + vh) \right\|_{L_p([0,2\pi])}$$

olarak tanımlanır.

$L_p([0,2\pi])$ Lebesgue uzaylarında düz teorem aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$f \in L_p([0,2\pi])$ olsun. Bu durumda

$$E_n(f)_p \le c\Omega_p^k\left(\frac{1}{n+1}, f\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

eşitsizliği n'den bağımsız bir $c > 0$ sabiti ile sağlanır.

Yukarıda ifade edilen düz teorem $r = 1$ ve $p = \infty$ için Jackson [1], $r = 2$ ve $1 \le p < \infty$ için Akhiezer [2], $r \ge 1$ ve $p = \infty$ için ise 1951 yılında Stechkin [3] tarafından ispatlanmıştır.

$L_p([0,2\pi])$ Lebesgue uzaylarında yaklaşım teorisinin ters teoremi $r \ge 1$ ve $1 \le p < \infty$ için 1950 yılında A. F. Timan ve M. F. Timan [4] tarafından; $r \ge 1$ ve $p = \infty$ için 1951 yılında Stechkin [3] tarafından ispatlanmıştır.

$L_p([0,2\pi])$ Lebesgue uzaylarında yaklaşım teorisinin ters teoremi aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$f \in L_p([0,2\pi])$ olsun. Bu durumda

$$\Omega_{\mathrm{p}}^{k}\left(\frac{1}{n}, f\right) \leq \frac{c}{n^r} \sum_{v=1}^{n} v^{r-1} E_{v-1}(f)_p$$

eşitsizliği n'den bağımsız bir $c > 0$ sabiti ile sağlanır.

T_n, belirli bir mertebeye kadar türevlenebilen 2π periyotlu bir f fonksiyonuna en iyi yaklaşan n dereceli trigonometrik polinom olduğunda, $f^{(k)}$, $k = 1,2,3, \ldots$ türevine T_n polinomunun aynı mertebeden türevi alınarak oluşturulan trigonometrik $T_n^{(k)}$ polinomu ile yaklaşım hızının araştırıldığı teoremlere yaklaşım teorisinin eş zamanlı yaklaşım teoremleri denir.

Konveks ve soldan sürekli bir $N: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonu

$$\lim_{t \to 0^+} N(t) = 0 \;\; ve \lim_{t \to \infty} N(t) = \infty$$

koşullarını sağlıyorsa bu fonksiyona Young fonksiyonu denir. Şimdi $x \in E$ için $\Phi(x, .)$ bir Young fonksiyonu olacak biçimde $\Phi: \mathrm{E} \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonunu ele alalım.

En az bir $\lambda > 0$ reel sayısı için

$$\rho_\Phi(f) = \int_E \Phi\left(x, \frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dx < \infty$$

şartını sağlayan fonksiyonlar sınıfına Musielak-Orlicz uzayı denir ve $L^\Phi(E)$ ile gösterilir.$L^\Phi(E)$ uzayı $\|f\|_{L^{\Phi(.,.)}(E)} \coloneqq \inf\{\lambda > 0, \rho_\Phi(f) \leq 1\}$ biçiminde tanımlanan norm ile bir Banach fonksiyon uzayıdır. Özel durumda $1 \leq p < \infty$ için $\Phi(x,t) = t^p$ seçilirse $L^{\mathrm{p}}(E)$ klasik Lebesgue uzayı $\Phi(x,t) = \Phi(t)$ seçilirse Orlicz uzayı elde edilir. Orlicz uzayında yaklaşımla ilgili bazı teoremler $[5-9]$ kaynaklarında ispatlanmıştır.

Ağırlıksız ve ağırlıklı Lebesgue uzaylarında trigonometrik polinomlarla yaklaşımın bazı düz ve ters teoremleri ile ilgili birçok problem araştırılmıştır.

Ağırlıksız Lebesgue uzayları ile ilgili bazı sonuçlar $[10-11]$ kaynaklarında mevcuttur. Ağırlıklı uzaylarda trigonometrik polinomlarla en iyi yaklaşım $A_p(\mathbb{T})$-koşulu sağlanarak araştırılmıştır $[12-14]$. Özellikle ağırlıklı Lebesgue uzaylarında k. düzgünlük modülü ile düz ve ters teoremler elde edilmiştir $[12,14]$. Ağırlıklı Rearrangement invariant uzaylarda trigonometrik polinomlarla yaklaşım problemleri $[15-16]$ kaynaklarında çalışılmıştır.

Bu tez çalışmasında ağırlıklı Rearrangement invariant uzaylarda trigonometrik polinomlarla yaklaşım ve de la Vallée-Poussin toplamı ile yaklaşımın bazı problemleri ispatlanmıştır.

2. FONKSİYON UZAYLARI

2.1 Rearrangement Invariant Uzaylar

Bu bölüm boyunca $(\mathcal{R}, \mu)$ atomik olmayan σ-sonlu bir ölçüm uzayı olacaktır.

$\mathcal{M}(\mathcal{R})$ ile $\mathcal{R}$ üzerinde μ-ölçülebilir bütün fonksiyonların kümesini , $\mathcal{M}^+(\mathcal{R})$ ile $\mathcal{M}(\mathcal{R})$ kümesinin $[0, \infty]$ aralığında değer alan elemanlarının kümesini gösterelim.

μ-ölçülebilir $E \subset \mathcal{R}$ kümesinin karakteristik fonksiyonu χ_E ile gösterilir.

2.1.1 Tanım: $\rho: \mathcal{M}^+(\mathcal{R}) \to [0, \infty]$ bir dönüşüm olsun. Her $f, g, f_n \in \mathcal{M}^+(\mathcal{R})$ $(n \in \mathbb{N})$ fonksiyonları, her $a \geq 0$ sabiti ve ölçülebilir $E \subset \mathcal{R}$ kümesi için aşağıdakiler sağlanıyorsa ρ dönüşümüne bir ***fonksiyon normu*** adı verilir:

(1) $\rho(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0\ \mu - h.h.h.\ (hemen\ hemen\ her\ yerde)$
$\rho(af) = a\rho(f),$
$\rho(f + g) \leq \rho(f) + \rho(g)$

(2) $0 \leq g \leq f\ \mu - h.h.h. \Rightarrow \rho(g) \leq \rho(f)$ ($Lattice$ özelliği)

(3) $0 \leq f_n \uparrow f\ \mu - h.h.h. \Rightarrow \rho(f_n) \uparrow \rho(f)$ ($Fatou$ özelliği)

(4) $\mu(E) < \infty \Rightarrow \rho(\chi_E) < \infty,$

(5) $\mu(E) < \infty \Rightarrow \int_E f\, d\mu \leq C_E \rho(f),$

burada C_E, $E\ ve\ \rho$'ya bağlı fakat f'den bağımsız bir sabittir.

2.1.2 Tanım: ρ bir fonksiyon normu ise $g \in \mathcal{M}^+(\mathcal{R})$ için

$$\rho'(g) := \sup\left\{\int_{\mathcal{R}} fgd\mu : f \in \mathcal{M}^+(\mathcal{R}), \qquad \rho(f) \leq 1\right\}$$

dönüşümü de bir fonksiyon normu olur. Buna ρ fonksiyon normunun ***eşlenik normu*** denir.

2.1.3 Tanım: ρ bir fonksiyon normu olsun. $\rho(|f|) < \infty$ biçimindeki bütün $f \in \mathcal{M}(\mathcal{R})$ fonksiyonlarının kümesini $X(\mathcal{R})$ ile gösterelim. $X(\mathcal{R})$ bir lineer uzaydır. $X(\mathcal{R})$ uzayı ***Banach fonksiyon uzayı*** olarak adlandırılır. $f \in X(\mathcal{R})$ fonksiyonunun normu

$$\|f\|_X := \rho(|f|)$$

olarak tanımlanır ve $X(\mathcal{R})$ bu norma göre bir Banach uzayıdır.

$(\mathcal{R}, \mu)$ ölçüm uzayı sonlu, yani $\mu(\mathcal{R}) < \infty$ ise $X \subset L_1(\mathcal{R})$ olur.

2.1.4 Tanım: ρ bir fonksiyon normu ve ρ', ρ'nun eşlenik normu olsun. ρ' ile üretilen Banach fonksiyon uzayına $X(\mathcal{R})$ uzayının ***eşlenik uzayı*** denir ve $X'(\mathcal{R})$ ile gösterilir.

2.1.5 Teorem (Lorentz-Luxemburg Teoremi): Her $X(\mathcal{R})$ Banach fonksiyon uzayı ikinci eşlenik uzayı ile çakışıktır. Yani,

$$f \in X(\mathcal{R}) \Leftrightarrow f \in X''(\mathcal{R})$$
$$\|f\|_X = \|f\|_{X''}$$

olur.

Ayrıca,

$$\|f\|_X := \sup\left\{\int_{\mathcal{R}} |fg|d\mu : g \in X'(\mathcal{R}), \|g\|_{X'} \leq 1\right\}$$

$$\|g\|_{X'} := \sup\left\{\int_{\mathcal{R}} |fg|d\mu : f \in X(\mathcal{R}), \|f\|_X \leq 1\right\}$$

elde edilir.

2.1.6 Teorem (Hölder Eşitsizliği): $X(\mathcal{R})$ bir Banach fonksiyon uzayı ve $X'(\mathcal{R})$ bu uzayın eşlenik Banach fonksiyon uzayı olsun. Her $f \in X(\mathcal{R})$ ve her $g \in X'(\mathcal{R})$ için

$$\int_{\mathcal{R}} |fg| d\mu \leq \|f\|_X . \|g\|_{X'}$$

sağlanır.

2.1.7 Tanım: $\mathcal{M}_0(\mathcal{R})$ ve $\mathcal{M}_0^+(\mathcal{R})$ sırasıyla $\mathcal{M}(\mathcal{R})$ ve $\mathcal{M}^+(\mathcal{R})$ sınıflarının μ −hemen hemen her yerde sonlu elemanlarının sınıfları olsun. Bir $f \in \mathcal{M}_0(\mathcal{R})$ fonksiyonunun ***dağılım (distribution) fonksiyonu***

$$\mu_f(\lambda) := \mu(\{x \in \mathcal{R}: |f(x)| > \lambda\}), \qquad \lambda \geq 0$$

olarak tanımlanır. f fonksiyonunun dağılım fonksiyonu μ_f sadece $|f|$'e bağlıdır ve ∞ değerini alabilir.

2.1.8 Tanım: $f, g \in \mathcal{M}_0(\mathcal{R})$ olsun. Her $\lambda \geq 0$ için

$$\mu_f(\lambda) = \mu_g(\lambda),$$

oluyorsa f ve g fonksiyonlarına ***eş-ölçülebilir (equimeasurable) fonksiyonlar*** denir ve $f \sim g$ ile gösterilir.

2.1.9 Tanım : $X(\mathcal{R})$, ρ ile üretilen bir Banach fonksiyon uzayı olsun. Eğer her $f, g \in \mathcal{M}_0^+(\mathcal{R})$ eş-ölçülebilir fonksiyon çifti için $\rho(f) = \rho(g)$ oluyorsa ρ fonksiyon normuna ***rearrangement invariant fonksiyon normu***, $X(\mathcal{R})$ uzayına da ***rearrangement invariant uzay*** denir.

2.1.10 Tanım: $f \in \mathcal{M}_0(\mathcal{R})$ ve $f^*: [0, \infty) \to [0, \infty)$ olmak üzere

$$f^*(t) := \inf\{\lambda: \mu_f(\lambda) \leq t\}, \qquad t \geq 0$$

biçiminde tanımlanan f^* fonksiyonuna f fonksiyonunun ***artmayan rearrangementi*** denir.

$f \in \mathcal{M}_0(\mathcal{R})$ olsun. f ve f^* fonksiyonları eş-ölçülebilirdir.

2.1.11 Teorem (Luxemburg Gösterim Teoremi): $X(\mathcal{R})$ bir rearrangement invariant uzay olsun. $\mathbb{R}^+ = [0,\infty)$ üzerinde her $f \in \mathcal{M}_0^+(\mathcal{R})$ için

$$\rho(f) = \overline{\rho}(f^*)$$

olacak biçimde bir $\overline{\rho}$ rearrangement invariant fonksiyon normu vardır.

$\mathbb{R}^+$ üzerinde $\overline{\rho}$ ile üretilen rearrangement invariant uzayı $\overline{X}$ ile gösterelim.

2.1.12 Tanım: $\mathcal{M}_0(\mathbb{R}^+)$ üzerinde, $x > 0$ için

$$E_X(f)(t) := \begin{cases} f(xt), & xt \in [0,\mu(\mathcal{R})] \\ 0 \quad , & xt \notin [0,\mu(\mathcal{R})] \end{cases}, \qquad t > 0$$

biçiminde tanımlanan E_X operatörünü göz önüne alalım. $B(\overline{X})$ ile $\overline{X}$ üzerindeki sınırlı lineer operatörlerin Banach cebirini gösterelim. Her $x > 0$ için $E_{1/x} \in B(\overline{X})$ olur. $h_X(x)$ ile $E_{1/x}$ operatörünün normunu gösterelim. Yani

$$h_X(x) := \left\| E_{1/x} \right\|_{B(\overline{X})}$$

olsun.

$$\alpha_X := \sup_{0<x<1} \frac{\log h_X(x)}{\log x}$$

$$\beta_X := \inf_{1<x<\infty} \frac{\log h_X(x)}{\log x}$$

sayılarına $X(\mathcal{R})$ rearrangement invariant uzayının sırasıyla ***alt ve üst Boyd indisleri*** denir.

Boyd indisleri için

$$0 \le \alpha_X \le \beta_X \le 1$$

eşitsizlikleri sağlanır. Eğer

$$0 < \alpha_X \le \beta_X < 1$$

ise Boyd indisleri ***nontrivial***dir denir.

2.2 Ağırlıklı Rearrangement Invariant Uzaylar

2.2.1 Tanım: $\omega: \mathcal{R} \to [0, \infty]$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun. $\mu\left(\omega^{-1}(\{0, \infty\})\right) = 0$ ise ω fonksiyonuna bir ***ağırlık fonksiyonu*** denir.

2.2.2 Tanım: $X(\mathcal{R})$, $\mathcal{R}$ üzerinde bir rearrangement invariant uzay ve ω bir ağırlık fonksiyonu olsun. $f\omega \in X(\mathcal{R})$ koşulunu sağlayan bütün ölçülebilir f fonksiyonlarının kümesi $X(\mathcal{R}, \omega)$ ile gösterilir. $X(\mathcal{R}, \omega)$,

$$\|f\|_{X(\mathcal{R},\omega)} \coloneqq \|f\omega\|_{X(\mathcal{R})}$$

normu ile bir Banach fonksiyon uzayı olur. $X(\mathcal{R}, \omega)$ uzayına ***ağırlıklı rearrangement invariant uzay*** denir.

$(\mathcal{R}, \mu)$ ölçüm uzayı sonlu ve $\omega \in X(\mathcal{R})$ ve $1/\omega \in X'(\mathcal{R})$ ise Hölder eşitsizliğinden

$$L_\infty(\mathcal{R}) \subset X(\mathcal{R}, \omega) \subset L_1(\mathcal{R})$$

olur.

3. FOURIER SERİLERİ VE YAKLAŞIM

3.1 Fourier Serileri

$\mathbb{T}$, $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ birim çemberi veya $[-\pi, \pi]$ aralığı olsun.

3.1.1 Tanım: $f \in L_1(\mathbb{T})$ olsun.

$$a_k(f) := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \qquad k = 0,1,2, \ldots$$

ve

$$b_k(f) := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \qquad k = 1,2,3, \ldots$$

olmak üzere

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx)$$

serisine f fonksiyonunun ***Fourier serisi*** denir ve

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx)$$

yazılır.

3.1.2 Tanım: $f \in L_1(\mathbb{T})$ olsun.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ -\frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2 \tan \frac{t}{2}} dt \right\}$$

limiti hemen hemen her $x \in \mathbb{T}$ için vardır.

$$\tilde{f}(x) := \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ -\frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2 \tan \frac{t}{2}} dt \right\} = -\frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2 \tan \frac{t}{2}} dt$$

fonksiyonuna f fonksiyonunun ***eşlenik fonksiyonu*** denir.

$$f \in L_1(\mathbb{T}) \text{ ve } f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx) \text{ olsun.}$$

Eğer $\tilde{f} \in L_1(\mathbb{T})$ ise

$$\tilde{f}(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) \sin kx - b_k(f) \cos kx)$$

olur. [17]

3.1.3 Tanım: $f \in L_1(\mathbb{T})$ olmak üzere

$$S_n(x, f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx)$$

ifadesine f fonksiyonunun ***Fourier serisinin n. kısmi toplamı***,

$$V_{n,m}(x, f) = \frac{1}{m+1} \sum_{v=n-m}^{n} S_v(x, f) \qquad (0 \leq m \leq n, \ \ m, n \in \mathbb{Z}^+)$$

ifadesine de f fonksiyonunun ***Fourier serisinin de la Vallée-Poussin toplamı*** denir.

3.1.4 Tanım: $f \in L_1(\mathbb{T})$ olmak üzere

$$K_n(x,f) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(x,f)$$

ifadesine f fonksiyonunun ***Fourier serisinin Fejér toplamı*** denir.

3.2 Trigonometrik Yaklaşım

3.2.1 Tanım: $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$ ve ω, $\mathbb{T}$ üzerinde bir ağırlık fonksiyonu olsun. $|J|$ ile $J \subset \mathbb{T}$ aralığının uzunluğunu gösterelim. Eğer

$$\sup_{J\subset\mathbb{T}} \left(\frac{1}{|J|}\int_J \omega^P(t)dt\right)^{1/p} \left(\frac{1}{|J|}\int_J \omega^{-q}(t)dt\right)^{1/q} < \infty$$

ise ω fonksiyonuna ***Muckenhoupt A_p koşulunu sağlar*** denir.

Muckenhoupt A_p $(1 < p < \infty)$ koşulunu sağlayan $\omega: \mathbb{T} \to [0,\infty]$ ağırlık fonksiyonlarının kümesi $A_p(\mathbb{T})$ ile gösterilir.

3.2.2 Teorem : $X(\mathbb{T})$, nontrivial Boyd indislerine sahip bir rearrangement invariant uzay ve $\omega \in A_{\frac{1}{\alpha_X}}(\mathbb{T}) \cap A_{\frac{1}{\beta_X}}(\mathbb{T})$ olsun.

(a) Her $f \in X(\mathbb{T},\omega)$ için

$$\|\tilde{f}\|_{X(\mathbb{T},\omega)} \leq c\|f\|_{X(\mathbb{T},\omega)}$$

olacak biçimde bir $c > 0$ sayısı vardır.

(b) Her $f \in X(\mathbb{T},\omega)$ için

$$\|S_n(f)\|_{X(\mathbb{T},\omega)} \leq c\|f\|_{X(\mathbb{T},\omega)}, \quad n = 1,2,\ldots$$

olacak biçimde bir $c > 0$ sayısı vardır.[15]

3.2.3 Tanım: $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\sum_{k=0}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

ifadesine ***n. dereceden bir trigonometrik polinom*** denir.

Derecesi n'yi aşmayan trigonometrik polinomların kümesi $\prod_n$ ile gösterilir

3.2.4 Tanım:. $f \in X(\mathbb{T},\omega)$ fonksiyonu için $n = 0,1,2,\ldots$ olmak üzere

$$E_n(f)_{X,\omega} := \inf\{\|f - T_n\|_{X(\mathbb{T},\omega)} : T_n \in \prod_n \}$$

sayısına f fonksiyonunun $\prod_{\boldsymbol{n}}$ ***sınıfında en iyi yaklaşım sayısı*** denir.

3.2.5 Tanım: $X(\mathbb{T})$, α_X ve β_X nontrivial Boyd indislerine sahip yansımalı bir rearrangement invariant uzay ve $\omega \in A_{\frac{1}{\alpha_X}}(\mathbb{T}) \cap A_{\frac{1}{\beta_X}}(\mathbb{T})$ olsun. $f \in X(\mathbb{T},\omega)$ için

$$(\sigma_h f)(x) := \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} f(x+t)dt\,, \qquad 0 < h < \pi\,, \qquad x \in \mathbb{T}$$

biçiminde tanımlanan σ_h fonksiyonuna $X(\mathbb{T},\omega)$ üzerinde ***öteleme (shift) operatörü*** denir. σ_h sınırlı lineer operatördür. Yani, her $f \in X(\mathbb{T},\omega)$ için

$$\|\sigma_h(f)\|_{X(\mathbb{T},\omega)} \le c\|f\|_{X(\mathbb{T},\omega)}$$

olacak biçimde bir $c > 0$ sayısı vardır. [15]

Sonuç olarak $f \in X(\mathbb{T},\omega)$ için $\sigma_h(f) \in X(\mathbb{T},\omega)$ bulunur.

3.2.6 Tanım: $X(\mathbb{T})$, α_X ve β_X nontrivial Boyd indislerine sahip yansımalı bir rearrangement invariant uzay, $\omega \in A_{\frac{1}{\alpha_X}}(\mathbb{T}) \cap A_{\frac{1}{\beta_X}}(\mathbb{T})$ ve $f \in X(\mathbb{T},\omega)$ olsun.

$$\Omega_{X,\omega}^{k}(\delta,f) := \sup_{\substack{0<h_i<\delta \\ 1\le i\le k}} \left\| \prod_{i=1}^{k}\left(I - \sigma_{h_i}\right) f \right\|_{X(\mathbb{T},\omega)}, \qquad \delta > 0$$

fonksiyonuna f fonksiyonunun ***k. düzgünlük modülü*** denir. Burada I ***özdeşlik operatörü***dür.

Her $f \in X(\mathbb{T},\omega)$ için

$$\Omega_{X,\omega}^{k}(\delta,f) \leq c\|f\|_{X(\mathbb{T},\omega)}$$

olacak biçimde bir $c > 0$ sayısı vardır.

$\Omega_{X,\omega}^{k}(.,f)$ sürekli, negatif olmayan, azalmayan ve $f,g \in X(\mathbb{T},\omega)$ için

$$\lim_{\delta\to 0} \Omega_{X,\omega}^{k}(\delta,f) = 0$$

$$\Omega_{X,\omega}^{k}(\delta,f+g) \leq \Omega_{X,\omega}^{k}(\delta,f) + \Omega_{X,\omega}^{k}(\delta,g)$$

koşullarını sağlayan bir fonksiyondur.

$$k = 0 \; için \; \Omega_{X,\omega}^{0}(\delta,f) := \|f\|_{X(\mathbb{T},\omega)}$$

$$k = 1 \; için \; \Omega_{X,\omega}(\delta,f) := \Omega_{X,\omega}^{1}(\delta,f)$$

yazılır.

3.2.7 Tanım: $X(\mathbb{T})$, nontrivial Boyd indislerine sahip yansımalı bir rearrangement invariant uzay ve $\omega \in A_{\frac{1}{\alpha_X}}(\mathbb{T}) \cap A_{\frac{1}{\beta_X}}(\mathbb{T})$ olsun. $r \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $f, f', \dots, f^{(r-1)}$ mutlak sürekli ve $f^{(r)} \in X(\mathbb{T},\omega)$ koşulunu sağlayan fonksiyonların kümesi $W_X^r(\mathbb{T},\omega)$ ile gösterilir. $W_X^r(\mathbb{T},\omega)$,

$$\|f\|_{W_X^r(\mathbb{T},\omega)} := \|f\|_{X(\mathbb{T},\omega)} + \left\|f^{(r)}\right\|_{X(\mathbb{T},\omega)}$$

normu ile bir Banach uzayı olur.

4. AĞIRLIKLI REARRANGEMENT INVARIANT UZAYLARDA YAKLAŞIM

4.1 Yardımcı Sonuçlar

4.1.1 Lemma : $X(\mathbb{T})$, α_X ve β_X nontrivial Boyd indislerine sahip yansımalı bir rearrangement invariant uzay ve $\omega \in A_{\frac{1}{\alpha_X}}(\mathbb{T}) \cap A_{\frac{1}{\beta_X}}(\mathbb{T})$ olsun. Trigonometrik polinomların sınıfı $X(\mathbb{T},\omega)$ uzayında yoğundur. [15]

4.1.2 Teorem : $X(\mathbb{T},\omega)$, $0 < \alpha_X \leq \beta_X < 1$ ve $\omega \in A_{\frac{1}{\alpha_X}}(\mathbb{T}) \cap A_{\frac{1}{\beta_X}}(\mathbb{T})$ biçimindeki yansımalı bir ağırlıklı rearrangement invariant uzay olsun. $\forall f \in W_X^r(\mathbb{T},\omega)$ için $(r = 0,1,2,\dots)$

$$E_n(f)_{X,\omega} \leq \frac{c}{(n+1)^r} E_n(f^{(r)})_{X,\omega}$$

olacak biçimde n'den bağımsız bir $c > 0$ sabiti vardır. [15]

4.1.3 Teorem: $X(\mathbb{T},\omega)$, $0 < \alpha_X \leq \beta_X < 1$ ve $\omega \in A_{\frac{1}{\alpha_X}}(\mathbb{T}) \cap A_{\frac{1}{\beta_X}}(\mathbb{T})$ biçimindeki bir ağırlıklı rearrangement invariant uzay olsun. $\forall f \in X(\mathbb{T},\omega)$ için

$$E_n(f)_{X,\omega} \leq c.\Omega_{X,\omega}^{l}\left(\frac{1}{n+1}, f\right)$$

olacak biçimde n'den bağımsız bir $c > 0$ sabiti vardır. [15]

4.1.4 Önerme (Bernstein Eşitsizliği): $T_n \in \prod_n$ $n = 1,2,3, \dots$ $X(\mathbb{T}, \omega)$, $0 < \alpha_X \le \beta_X < 1$ ve $\omega \in A_{\frac{1}{\alpha_X}}(\mathbb{T}) \cap A_{\frac{1}{\beta_X}}(\mathbb{T})$ biçimindeki bir ağırlıklı rearrangement invariant uzay olsun. $r \in \mathbb{N}$ için

$$\left\| T_n^{(r)} \right\|_{X(\mathbb{T},\omega)} \le c n^r \|T_n\|_{X(\mathbb{T},\omega)}$$

olacak biçimde n'den bağımsız bir $c > 0$ sabiti vardır.

4.1.5 Lemma : $X(\mathbb{T}, \omega)$, $0 < \alpha_X \le \beta_X < 1$ ve $\omega \in A_{\frac{1}{\alpha_X}}(\mathbb{T}) \cap A_{\frac{1}{\beta_X}}(\mathbb{T})$ biçimindeki bir ağırlıklı rearrangement invariant uzay olsun.

1. $r \in \mathbb{N}$ *için* $f^{(r)} \in X(\mathbb{T}, \omega)$

$$\left\| f^{(r)} \right\|_{X(\mathbb{T},\omega)} \le c_1 \left\{ n^r \|f\|_{X(\mathbb{T},\omega)} + E_n\left(f^{(r)}\right)_{X,\omega} \right\} \tag{4.1}$$

   n'den bağımsız bir $c_1 > 0$ sabiti vardır.

2. $\tilde{f}^{(r)} \in X(\mathbb{T}, \omega)$

$$\left\| \tilde{f}^{(r)} \right\|_{X(\mathbb{T},\omega)} \le c_2 \left\{ n^r \|f\|_{X(\mathbb{T},\omega)} + E_n\left(\tilde{f}^{(r)}\right)_{X,\omega} \right\} \tag{4.2}$$

   n'den bağımsız bir $c_2 > 0$ sabiti vardır.

İspat :

$$V_{2n,n}(x, f) = \frac{1}{n+1} \sum_{v=n}^{2n} S_v(x, f) \qquad\qquad n \in \mathbb{Z}^+$$

olarak tanımlamıştık.

$$V_{2n,n}\left(\cdot, f^{(r)}\right) = V_{2n,n}^{(r)}(\cdot, f)$$

olur.

$f^{(r)}$ fonksiyonu için aşağıdakiler yazılabilir.

$$f^{(r)}(x) = \left(f^{(r)}(x) - V_{2n,n}\left(x, f^{(r)}\right) \right) + V_{2n,n}\left(x, f^{(r)}\right) \tag{4.3}$$

(4.3)'ten

$$\left\|f^{(r)}\right\|_{X(\mathbb{T},\omega)} \leq \left\|f^{(r)} - V_{2n,n}\left(.,f^{(r)}\right)\right\|_{X(\mathbb{T},\omega)} + \left\|V_{2n,n}\left(.,f^{(r)}\right)\right\|_{X(\mathbb{T},\omega)} \qquad (4.4)$$

elde edilir.

[15]'ten

$$\|f - S_n(.,f)\|_{X(\mathbb{T},\omega)} \leq c_3 E_n(f)_{X,\omega} \qquad (4.5)$$

$$\left\|f^{(r)} - V_{2n,n}\left(.,f^{(r)}\right)\right\|_{X(\mathbb{T},\omega)} =$$

$$\left\|f^{(r)} - T_n\left(.,f^{(r)}\right) + T_n(.,f^{(r)}) - V_{2n,n}\left(.,f^{(r)}\right)\right\|_{X(\mathbb{T},\omega)}$$

$$\leq \left\|f^{(r)} - T_n\left(.,f^{(r)}\right)\right\|_{X(\mathbb{T},\omega)} + \left\|T_n(.,f^{(r)}) - V_{2n,n}\left(.,f^{(r)}\right)\right\|_{X(\mathbb{T},\omega)}$$

$$\leq cE_n\left(f^{(r)}\right)_{X,\omega} + \left\|V_{2n,n}\left(.,T_n\left(.,f^{(r)}\right) - f^{(r)}\right)\right\|_{X(\mathbb{T},\omega)}$$

$$\leq cE_n\left(f^{(r)}\right)_{X,\omega}$$

elde edilir.

$\prod_n$ trigonometrik polinomlar ailesi $X(\mathbb{T},\omega)$ üzerinde yoğun olduğundan

$$\|S_n(.,f)\|_{X(\mathbb{T},\omega)} \to \|f\|_{X(\mathbb{T},\omega)}$$

olur. Böylece $E_n(f)_{X,\omega} \to 0$ elde edilir.

(4.5) eşitsizliğinden

$$\left\|f^{(r)} - V_{2n,n}\left(.,f^{(r)}\right)\right\|_{X(\mathbb{T},\omega)} \leq E_n\left(f^{(r)}\right)_{X,\omega}$$

sonucu elde edilir.

$$\left\|V_{2n,n}\left(.,f^{(r)}\right)\right\|_{X(\mathbb{T},\omega)} = \left\|\frac{d^r}{dx^r} V_{2n,n}(x,f)\right\|_{X(\mathbb{T},\omega)}$$

$$\leq c_4(2n)^r \left\|V_{2n,n}(.,f)\right\|_{X(\mathbb{T},\omega)} \leq c_5(n)^r \|f\|_{X(\mathbb{T},\omega)}$$

(4.4), (4.5) ve son ilişkiden

$$\left\|f^{(r)}\right\|_{X(\mathbb{T},\omega)} \leq c_1\left\{n^r\|f\|_{X(\mathbb{T},\omega)} + E_n(f^{(r)})_{X,\omega}\right\}$$

eşitsizliği elde edilir.□

(4.2) de benzer şekilde yapılır.

4.2 Ana Sonuçlar

4.2.1 Teorem : $X(\mathbb{T},\omega)$, $0 < \alpha_X \leq \beta_X < 1$ ve $\omega \in A_{\frac{1}{\alpha_X}}(\mathbb{T}) \cap A_{\frac{1}{\beta_X}}(\mathbb{T})$ biçimindeki bir ağırlıklı rearrangement invariant uzay $f \in X(\mathbb{T},\omega)$ olsun. $r \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1} E_n(f)_{X,\omega} < \infty$$

olsun. Böylece $\tilde{f}^{(r)} \in X(\mathbb{T},\omega)$ ve

$$E_n(\tilde{f}^{(r)})_{X,\omega} \leq c\left\{(n+1)^r E_n(f)_{X,\omega} + \left(\sum_{\mu=n+1}^{\infty} \mu^{r-1} E_\mu(f)_{X,\omega}\right)\right\}$$

n'den bağımsız bir $c > 0$ sayısı vardır.

İspat :

$$\left\|f^{(r)} - S_n(f^{(r)})\right\|_{X(\mathbb{T},\omega)} = \left\|\sum_{k=1}^{\infty} S_{2^{k+1}}(f^{(r)}) - S_{2^k}(f^{(r)}) - S_n(f^{(r)})\right\|_{X(\mathbb{T},\omega)}$$

$$= \left\|\sum_{k=1}^{m+1} S_{2^{k+1}}(f^{(r)}) - S_{2^k}(f^{(r)}) - S_n(f^{(r)}) + \sum_{k=m+2}^{\infty} S_{2^{k+1}}(f^{(r)}) - S_{2^k}(f^{(r)})\right\|_{X(\mathbb{T},\omega)}$$

$$\leq \left\|\sum_{k=1}^{m+1} S_{2^{k+1}}(f^{(r)}) - S_{2^k}(f^{(r)}) - S_n(f^{(r)})\right\|_{X(\mathbb{T},\omega)} + \left\|\sum_{k=m+2}^{\infty} S_{2^{k+1}}(f^{(r)}) - S_{2^k}(f^{(r)})\right\|_{X(\mathbb{T},\omega)}$$

$$\leq \left\|S_{2^{m+2}}\left(f^{(r)}\right)-S_n\left(f^{(r)}\right)\right\|_{X(\mathbb{T},\omega)}+\sum_{k=m+2}^{\infty}\left\|S_{2^{k+1}}\left(f^{(r)}\right)-S_{2^k}\left(f^{(r)}\right)\right\|_{X(\mathbb{T},\omega)}$$

olur.

$2^m \leq n < 2^{m+1}$ için

$$\left\|S_{2^{m+2}}\left(f^{(r)}\right)-S_n\left(f^{(r)}\right)\right\|_{X(\mathbb{T},\omega)} \leq c2^{(m+2)\alpha}E_n(f)_{X,\omega}$$

bulunur. Diğer taraftan;

$$\sum_{k=m+2}^{\infty}\left\|S_{2^{k+1}}\left(f^{(r)}\right)-S_{2^k}\left(f^{(r)}\right)\right\|_{X(\mathbb{T},\omega)}=\left\|S_{2^{m+3}}\left(f^{(r)}\right)-S_{2^{m+2}}\left(f^{(r)}\right)\right\|_{X(\mathbb{T},\omega)}+\cdots$$

$$+\left\|S_{2^{m+a+2}}\left(f^{(r)}\right)-S_{2^{m+a}}\left(f^{(r)}\right)\right\|_{X(\mathbb{T},\omega)}+\cdots$$

$$\leq c\left(2^{m+3}\right)^r E_{2^{m+2}}(f)_{X,\omega}+\cdots+c\left(2^{m+a+2}\right)^r E_{2^{m+a}}(f)_{X,\omega}+\cdots$$

$$=c_1\sum_{k=m+2}^{\infty}(2^{k+1})^r E_{2^k}(f)_{X,\omega}$$

$$\leq C\sum_{k=m+2}^{\infty}\sum_{v=2^{k-1}+1}^{2^k} v^{r-1}E_v(f)_{X,\omega}$$

$$=c\sum_{\mu=2^{m+1}}^{\infty}\mu^{r-1}E_\mu(f)_{X,\omega}$$

$$\leq c\sum_{\mu=n+1}^{\infty}\mu^{r-1}E_\mu(f)_{X,\omega}$$

olur. Bulunlar bir araya getirilirse

$$\begin{aligned}\left\|f^{(r)}-S_n\left(f^{(r)}\right)\right\|_{X(\mathbb{T},\omega)} &\\ &\leq \left\|S_{2^{m+2}}\left(f^{(r)}\right)-S_n\left(f^{(r)}\right)\right\|_{X(\mathbb{T},\omega)}\\ &+\sum_{k=m+2}^{\infty}\left\|S_{2^{k+1}}\left(f^{(r)}\right)-S_{2^k}\left(f^{(r)}\right)\right\|_{X(\mathbb{T},\omega)}\end{aligned}$$

$$\leq c\left\{(n+1)^r E_n(f)_{X,\omega}+\left(\sum_{\mu=n+1}^{\infty}\mu^{r-1}E_\mu(f)_{X,\omega}\right)\right\}$$

$$E_n(f^{(r)})_{X,\omega}\leq c\left\{(n+1)^r E_n(f)_{X,\omega}+\left(\sum_{\mu=n+1}^{\infty}\mu^{r-1}E_\mu(f)_{X,\omega}\right)\right\}$$

$$E_n(\tilde{f})_{X,\omega} \leq cE_n(f)_{X,\omega}$$

olduğundan

$$E_n(\tilde{f}^{(r)})_{X,\omega} \leq c\left\{(n+1)^r E_n(f)_{X,\omega} + \left(\sum_{\mu=n+1}^{\infty} \mu^{r-1} E_\mu(f)_{X,\omega}\right)\right\}$$

Böylece ispat tamamlanır.□

4.2.2 Teorem : $X(\mathbb{T},\omega)$, $0 < \alpha_X \leq \beta_X < 1$ ve $\omega \in A_{\frac{1}{\alpha_X}}(\mathbb{T}) \cap A_{\frac{1}{\beta_X}}(\mathbb{T})$ biçimindeki bir ağırlıklı rearrangement invariant uzay $f \in X(\mathbb{T},\omega)$ olsun.

$$\left\|\tilde{f}(x) - K_{n-1}(\tilde{f})\right\|_{X(\mathbb{T},\omega)} \leq c\left(\Omega_{X,\omega}\left(\frac{1}{n+1}, f\right) + E_{n+1}(\tilde{f})_{X,\omega}\right), \quad n = 1,2,\ldots$$

n'den bağımsız bir $c > 0$ sabiti vardır.

İspat: $f \in L_1(\mathbb{T})$ fonksiyonunun n. kısmi toplamı $S_k(x,f)$ olmak üzere

$$T_{2n}(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n} S_k(x,f)$$

[15]'ten

$$\|f(x) - T_{2n}(x)\|_{X(\mathbb{T},\omega)} \leq c_7 E_{n+1}(f)_{X,\omega} \qquad (4.6)$$

olur.

[19] dan $f \in X(\mathbb{T},\omega)$ ve $g \in X(\mathbb{T},\omega)$ için

$$\left\|\tilde{f}\right\|_{X(\mathbb{T},\omega)} \leq c_8\|f\|_{X(\mathbb{T},\omega)}, \qquad \|K_{n-1}(g)\|_{X(\mathbb{T},\omega)} \leq c_9\|g\|_{X(\mathbb{T},\omega)} \qquad (4.7)$$

olur.

$$\begin{aligned}
\|g - K_{n-1}(g)\|_{X(\mathbb{T},\omega)} &= \|g - T_{2n}(g) + T_{2n}(g) - K_{n-1}(g)\|_{X(\mathbb{T},\omega)} \\
&\leq \|g - T_{2n}(g)\|_{X(\mathbb{T},\omega)} + \|T_{2n}(g) - K_{n-1}(g)\|_{X(\mathbb{T},\omega)} \\
&= \|g - T_{2n}(g)\|_{X(\mathbb{T},\omega)} + \|K_{n-1}(T_{2n}(g) - g)\|_{X(\mathbb{T},\omega)} \\
&\leq \|g - T_{2n}(g)\|_{X(\mathbb{T},\omega)} + c_{10}\|g - T_{2n}(g)\|_{X(\mathbb{T},\omega)} \\
&\leq (1 + c_{11})\|g - T_{2n}(g)\|_{X(\mathbb{T},\omega)} \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

(4.6) ve (4.8) e göre

$$\|g - K_{n-1}(g)\|_{X(\mathbb{T},\omega)} \leq c_{12}E_{n+1}(g)_{X,\omega}$$

Bu eşitsizlikte $g = \tilde{f}$ alınırsa

$$\left\|\tilde{f} - K_{n-1}(\tilde{f})\right\|_{X(\mathbb{T},\omega)} \leq c_{12}E_{n+1}(\tilde{f})_{X,\omega} \qquad (4.9)$$

[15] ten biliniyor ki

$$E_n(f)_{X,\omega} \le c_{13}\Omega^k_{X,\omega}\left(\frac{1}{n+1}, f\right) \tag{4.10}$$

(4.9) ve (4.10) dan

$$\left\|\tilde{f}(x) - K_{n-1}(\tilde{f})\right\|_{X(\mathbb{T},\omega)} \le c\left(\Omega_{X,\omega}\left(\frac{1}{n+1}, f\right) + E_{n+1}(\tilde{f})_{X,\omega}\right)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.□

4.2.3 Teorem : $X(\mathbb{T},\omega)$, $0 < \alpha_X \le \beta_X < 1$ ve $\omega \in A_{\frac{1}{\alpha_X}}(\mathbb{T}) \cap A_{\frac{1}{\beta_X}}(\mathbb{T})$ biçimindeki bir ağırlıklı rearrangement invariant uzay $f \in X(\mathbb{T},\omega)$ olsun. $X(\mathbb{T},\omega)$ uzayında f fonksiyonunun trigonometrik polinomlarla en iyi yaklaşımı T_n olmak üzere $r \in \mathbb{N}$ ve $\tilde{f}^{(r)} \in X(\mathbb{T},\omega)$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1} E_n(f)_{X,\omega} < \infty, \tag{4.11}$$

ise

$$\left\|\tilde{f}^{(r)} - T_n^{(r)}\right\|_{X(\mathbb{T},\omega)} \le c\left\{(n)^r E_n(f)_{X,\omega} + \left(\sum_{\mu=n+1}^{\infty} \mu^{r-1} E_\mu(f)_{X,\omega}\right)\right\}$$

olur.

İspat:

$$f(x) = T_n(x) + \sum_{i=0}^{\infty}\left(T_{2^{i+1}n}(x) - T_{2^i n}(x)\right) \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned}\left\|T_{2^{i+1}n}(x) - T_{2^i n}(x)\right\|_{X(\mathbb{T},\omega)} &\\ \le \left\|T_{2^{i+1}n}(x) - f(x)\right\|_{X(\mathbb{T},\omega)} &+ \left\|f(x) - T_{2^i n}(x)\right\|_{X(\mathbb{T},\omega)} \\ \le E_{2^{i+1}n}(f)_{X,\omega} + E_{2^i n}(f)_{X,\omega} &\le 2E_{2^i n}(f)_{X,\omega}\end{aligned}$$

$$T_{2^{i+1}n}(x) - T_{2^i n}(x)$$

$$\begin{aligned}\left\|\tilde{T}^{(r)}_{2^{i+1}n}(x) - \tilde{T}^{(r)}_{2^i n}(x)\right\|_{X(\mathbb{T},\omega)} &\le \left(2^{i+1}n\right)^r \left\|\tilde{T}_{2^{i+1}n}(x) - \tilde{T}_{2^i n}(x)\right\|_{X(\mathbb{T},\omega)} \\ &\le \left(2^{i+1}n\right)^r \left(\left\|\tilde{f} - \tilde{T}_{2^{i+1}n}\right\|_{X(\mathbb{T},\omega)} + \left\|\tilde{f} - \tilde{T}_{2^i n}(x)\right\|_{X(\mathbb{T},\omega)}\right)\end{aligned}$$

$$\leq \left(2^{i+1}n\right)^r \left(E_{2^{i+1}n}\left(\tilde{f}\right)_{X,\omega} + E_{2^i n}\left(\tilde{f}\right)_{X,\omega}\right)$$

$$\leq \left(2^{i+1}n\right)^r 2E_{2^i n}(f)_{X,\omega}$$

$$\leq 2^{r+1}\left(2^i n\right)^r E_{2^i n}(f)_{X,\omega} \tag{4.13}$$

$$\tilde{T}_n(x) + \sum_{i=0}^{\infty}\left(\tilde{T}_{2^{i+1}n}(x) - \tilde{T}_{2^i n}(x)\right)$$

serisi (4.12) serisinin eşlenik serisi olsun.

(4.13) ten

$$\left\|\tilde{T}_n^{(r)}(x) + \sum_{i=0}^{\infty}\left(\tilde{T}_{2^{i+1}n}^{(r)}(x) - \tilde{T}_{2^i n}^{(r)}(x)\right)\right\|_{X(\mathbb{T},\omega)} \leq c_1 2^{r+1}\sum_{i=0}^{\infty}\left(2^i n\right)^r E_{2^i n}(f)_{X,\omega} \tag{4.14}$$

elde edilir.

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} m^{r-1} E_m(f)_{X,\omega} = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{m=2^i n+1}^{2^{i+1}n} m^{r-1}E_m(f)_{X,\omega}$$

$$\geq \sum_{i=0}^{\infty}\left(2^i n\right)^{r-1} E_{2^{i+1}n}(f)_{X,\omega}\, 2^i n = \sum_{i=0}^{\infty}\left(2^i n\right)^r E_{2^{i+1}n}(f)_{X,\omega}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left(2^i n\right)^r E_{2^i n}(f)_{X,\omega} = n^r E_n(f)_{X,\omega} + \sum_{i=0}^{\infty}\left(2^{i+1}n\right)^r E_{2^{i+1}n}(f)_{X,\omega}$$

$$n^r E_n(f)_{X,\omega} + 2^r \sum_{m=n+1}^{\infty} m^{r-1} E_n(f)_{X,\omega}$$

$$2^{r+1}\sum_{i=0}^{\infty}\left(2^i n\right)^r E_{2^i n}(f)_{X,\omega} \leq c_{14}\left\{n^r E_n(f)_{X,\omega} + \sum_{m=n+1}^{\infty} m^{r-1} E_m(f)_{X,\omega}\right\} \tag{4.15}$$

(4.14) ve (4.15) serilerine göre

$$\tilde{T}_n^{(r)}(x) + \sum_{i=0}^{\infty}\left(\tilde{T}_{2^{i+1}n}^{(r)}(x) - \tilde{T}_{2^i n}^{(r)}(x)\right) \tag{4.16}$$

$$\tilde{f}^{(r)}(x) = \tilde{T}_n^{(r)}(x) + \sum_{i=0}^{\infty}\left(\tilde{T}_{2^{i+1}n}^{(r)}(x) - \tilde{T}_{2^i n}^{(r)}(x)\right)$$

(4.15) ve (4.16) kullanılırsa

$$\left\|\tilde{f}^{(r)}(x) - \tilde{T}_n^{(r)}(x)\right\|_{X(\mathbb{T},\omega)} \leq 2^{r+1}\sum_{i=0}^{\infty}\left(2^i n\right)^r E_{2^i n}(f)_{X,\omega}$$

$$\leq c\left\{n^r E_n(f)_{X,\omega} + \sum_{m=n+1}^{\infty} m^{r-1} E_m(f)_{X,\omega}\right\}$$

Böylece ispat tamamlanır.□

4.2.4 Teorem : $X(\mathbb{T},\omega)$, $0 < \alpha_X \leq \beta_X < 1$ ve $\omega \in A_{\frac{1}{\alpha_X}}(\mathbb{T}) \cap A_{\frac{1}{\beta_X}}(\mathbb{T})$ biçimindeki bir ağırlıklı rearrangement invariant uzay olsun. $f \in X(\mathbb{T},\omega)$ ve $r \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1} E_n(f)_{X,\omega} < \infty$$

ise

$$\Omega_{X,\omega}^k\left(\frac{1}{n},\tilde{f}^{(r)}\right) \leq c\left\{\frac{1}{n^{2k}}E_0(f)_{X,\omega} + \frac{1}{n^{2k}}\sum_{q=1}^{n} q^{2k+r-1}E_q(f)_{X,\omega}\right.$$

$$\left. + \sum_{q=n+1}^{\infty} q^{r-1}E_q(f)_{X,\omega}\right\} \quad k = 1,2,\ldots$$

olacak şekilde bir c sayısı vardır.

İspat: Teorem 4.2.3 ten $\tilde{f}^{(r)} \in X(\mathbb{T},\omega)$

$$E_n(\tilde{f}^{(r)})_{X,\omega} \leq c_{16}\left\{n^r E_n(f)_{X,\omega} + \left(\sum_{\mu=n+1}^{\infty}\mu^{r-1}E_\mu(f)_{X,\omega}\right)\right\} \tag{4.17}$$

$$\Omega_{X,\omega}^k\left(\frac{1}{n},f\right) \leq \frac{c_{17}}{n^{2k}}\left\{E_0(f)_{X,\omega} + \sum_{m=1}^{n} m^{2k-1}E_m(f)_{X,\omega}\right\} \tag{4.18}$$

$$\Omega_{X,\omega}^k\left(\frac{1}{n},\tilde{f}^{(r)}\right) \leq \frac{c_{18}}{n^{2k}}\left\{E_0\left(\tilde{f}^{(r)}\right)_{X,\omega} + \sum_{m=1}^{n} m^{2k-1}E_m\left(\tilde{f}^{(r)}\right)_{X,\omega}\right\} \tag{4.19}$$

(4.17) ve (4.19) kullanılırsa

$$\Omega^{k}_{X,\omega}\left(\frac{1}{n},\tilde{f}^{(r)}\right) \le \frac{c_1}{n^{2k}}\left\{E_0\left(\tilde{f}^{(r)}\right)_{X,\omega} + \sum_{m=1}^{n} m^{2k-1}\, E_m\left(\tilde{f}^{(r)}\right)_{X,\omega}\right\}$$

$$\le \frac{c_2}{n^{2k}}\left\{E_0(f)_{X,\omega} + \sum_{m=1}^{n} m^{2k-1}\, E_m(f)_{X,\omega}\right.$$

$$\left. + \sum_{m=1}^{n} m^{2k-1}\left[m^{r} E_m(f)_{X,\omega} + \sum_{p=m+1}^{\infty} p^{r-1}\, E_p(f)_{X,\omega}\right]\right\}$$

$$\le \frac{c_3}{n^{2k}}\left\{E_0(f)_{X,\omega} + \sum_{m=1}^{n} m^{2k+r-1}\, E_m(f)_{X,\omega} + \sum_{m=1}^{n} m^{2k-1} \sum_{p=m}^{\infty} m^{r-1}\, E_p(f)_{X,\omega}\right\}$$

$$\le \frac{c_4}{n^{2k}}\left\{E_0(f)_{X,\omega} + \sum_{m=1}^{n} m^{2k+r-1}\, E_m(f)_{X,\omega}\right.$$

$$\left. + \sum_{m=1}^{n} m^{2k-1}\left[\sum_{p=m}^{n} p^{r-1}\, E_p(f)_{X,\omega} - \sum_{p=n+1}^{\infty} p^{r-1}\, E_p(f)_{X,\omega}\right]\right\}$$

$$\le c_5\left\{\frac{1}{n^{2k}} E_0(f)_{X,\omega} + \frac{1}{n^{k}} \sum_{m=1}^{n} m^{2k+r-1}\, E_m(f)_{X,\omega}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{n^{2k}} \sum_{p=1}^{n} p^{n-1} E_p(f)_{X,\omega} \sum_{m=1}^{p} m^{2k-1} + \sum_{p=n+1}^{\infty} p^{r-1}\, E_p(f)_{X,\omega}\right\}$$

$$\le c_6\left\{\frac{1}{n^{2k}} E_0(f)_{X,\omega} + \frac{1}{n^{2k}} \sum_{m=1}^{n} m^{2k+r-1}\, E_m(f)_{X,\omega} + \frac{1}{n^{2k}} \sum_{p=1}^{n} p^{2k+r-1} E_p(f)_{X,\omega}\right\}$$

$$\le c_7\left\{\frac{1}{n^{2k}} E_0(f)_{X,\omega} + \frac{1}{n^{2k}} \sum_{q=1}^{n} q^{2k+r-1}\, E_q(f)_{X,\omega} + \sum_{q=n+1}^{\infty} q^{r-1}\, E_q(f)_{X,\omega}\right\}$$

Böylece ispat tamamlanır.□

4.2.5 Teorem : $X(\mathbb{T})$ yansımalı rearrangement invariant uzay ve $\omega \in A_{\frac{1}{\alpha_X}}(\mathbb{T}) \cap A_{\frac{1}{\beta_X}}(\mathbb{T})$ olsun. $\forall f \in X(\mathbb{T},\omega)$, $0 \le m \le n$, $m,n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\left\|f - V_{n,m}(.,f)\right\|_{X(\mathbb{T},\omega)} \le \frac{c}{m+1}\sum_{k=n-m}^{n} E_k(f)_{X,\omega}$$

eşitsizliği n'den bağımsız bir $c > 0$ sabiti için sağlanır.

İspat: Öyle bir j tamsayısı alalım ki

$$2^j \le m+1 < 2^{j+1}$$

eşitsizliğini sağlasın.

$$V_{n,m}(x,f) = \frac{1}{m+1}\sum_{v=n-m}^{n} S_v(x,f) \qquad (0 \le m \le n,\ \ m,n \in \mathbb{Z}^+)$$

ifadesini $f \in X(\mathbb{T})$ fonksiyonunun Fourier serisinin de la Vallée-Poussin toplamı olarak tanımlamıştık.

$$f(x) - V_{n,m}(x,f) = \frac{1}{m+1}\left[f(x) - \sum_{v=n-m}^{n} S_v(x,f)\right]$$

$$f - V_{n,m}(.,f) = \frac{1}{m+1}[f(x) - S_{n-m}(x,f)]$$

$$+\frac{1}{m+1}\left\{\sum_{k=1}^{j}\sum_{i=n-m+2^{k-1}}^{n-m+2^k-1}[f(x) - S_i(x,f)]\right\}$$

$$+\frac{1}{m+1}\left\{\sum_{i=n-m+2^j}^{n}[f(x) - S_k(x,f)]\right\} \qquad (4.20)$$

(4.20) göz önüne alınırsa

$$\left\|f-V_{n,m}(.,f)\right\|_{X(\mathbb{T},\omega)} \leq \frac{1}{m+1}\|f(x)-S_{n-m}(.,f)\|_{X(\mathbb{T},\omega)}$$

$$+\frac{1}{m+1}\left\{\sum_{k=1}^{j}\sum_{i=n-m+2^{k-1}}^{n-m+2^{k}-1}\|f(x)-S_{i}(.,f)\|_{X(\mathbb{T},\omega)}\right\}$$

$$+\frac{1}{m+1}\left\{\sum_{i=n-m+2^{j}}^{n}\|f(x)-S_{k}(.,f)\|_{X(\mathbb{T},\omega)}\right\} \qquad (4.21)$$

elde edilir.

(4.5) ve (4.20) den

$$\frac{1}{m+1}\|f(x)-S_{n-m}(.,f)\|_{X(\mathbb{T},\omega)} \leq c_1\frac{1}{m+1}E_{n-m}(f)_{X,\omega}$$

$$\frac{1}{m+1}\left\{\sum_{k=1}^{j}\sum_{i=n-m+2^{k-1}}^{n-m+2^{k}-1}\|f(x)-S_{i}(.,f)\|_{X(\mathbb{T},\omega)}\right\}$$

ifadesindeki terim sayısı $n-m+2^{k}-1-(n-m+2^{k-1})+1=2^{k}-2^{k-1}$
$=2^{k-1}$

olur.

$$\frac{1}{m+1}\left\{\sum_{k=1}^{j}\sum_{i=n-m+2^{k-1}}^{n-m+2^{k}-1}\|f(x)-S_{i}(.,f)\|_{X(\mathbb{T},\omega)}\right\}$$

$$\leq c_1\frac{1}{m+1}\sum_{k=1}^{j}2^{k-1}E_{n-m+2^{k-1}}(f)_{X,\omega}$$

$$\frac{1}{m+1}\left\{\sum_{i=n-m+2^{j}}^{n}\|f(x)-S_{k}(.,f)\|_{X(\mathbb{T},\omega)}\right\}$$

ifadesindeki terim sayısı $n-\left(n-m+2^{j}\right)+1=m-2^{j}+1$

olur.

$$\frac{1}{m+1}\left\{\sum_{i=n-m+2^j}^{n}\|f(x)-S_k(.,f)\|_{X(\mathbb{T},\omega)}\right\}$$

$$\leq c_1\frac{1}{m+1}\left(m-2^j+1\right)E_{n-m+2^j}(f)_{X,\omega}$$

olur. Buradan

$$\left\|f-V_{n,m}(.,f)\right\|_{X(\mathbb{T},\omega)}\leq c_1\frac{1}{m+1}\left\{E_{n-m}(f)_{X,\omega}+\sum_{k=1}^{j}2^{k-1}E_{n-m+2^{k-1}}(f)_{X,\omega}\right\}$$

$$+c_1\frac{1}{m+1}\left(m-2^j+1\right)E_{n-m+2^{k-1}}(f)_{X,\omega}$$

elde edilir.

$$\sum_{k=1}^{j}2^{k-1}E_{n-m+2^{k-1}}(f)_{X,\omega}\leq E_{n-m+1}(f)_{X,\omega}$$

$$+2\sum_{k=2}^{j}\sum_{i=n-m+2^{k-2}}^{n-m+2^{k-1}-1}E_i(f)_{X,\omega}\leq c_2\sum_{k=n-m}^{n-m+2^{j-1}}E_k(f)_{X,\omega}$$

$2^j\leq m+1<2^{j+1}$ eşitsizliğinde her taraftan 2^j çıkarılırsa $m-2^j+1<2^j$ elde edilir.

$$\left(m-2^j+1\right)E_{n-m+2^j}(f)_{X,\omega}\leq\sum_{k=n-m}^{n-m+2^j-1}E_k(f)_{X,\omega}\qquad(4.22)$$

(4.20),(4.21) ve (4.22)'den

$$\left\|f-V_{n,m}(.,f)\right\|_{X(\mathbb{T},\omega)}$$

$$\leq\frac{c_{17}}{m+1}\left\{E_{n-m}(f)_{X,\omega}+\sum_{k=n-m}^{n-m+2^{j-1}}E_k(f)_{X,\omega}+\sum_{k=n-m}^{n-m+2^j-1}E_k(f)_{X,\omega}\right\}$$

$$\leq\frac{c_3}{m+1}\sum_{k=n-m}^{n}E_k(f)_{X,\omega}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.□

4.2.6 Sonuç : $X(\mathbb{T},\omega)$, $0<\alpha_X\leq\beta_X<1$ ve $\omega\in A_{\frac{1}{\alpha_X}}(\mathbb{T})\cap A_{\frac{1}{\beta_X}}(\mathbb{T})$ $m,n\in\mathbb{Z}^+$, $0\leq m\leq n$ biçimindeki bir ağırlıklı rearrangement invariant uzay olsun. $\forall f\ \in X(\mathbb{T},\omega)$ için

$$\left\|f-V_{n,m}(.,f)\right\|_{X(\mathbb{T},\omega)}\leq\frac{c}{m+1}\sum_{k=n-m}^{n}\Omega_{X,\omega}^{l}\left(\frac{1}{k+1},f\right)$$

n'den bağımsız bir $c>0$ sabiti için sağlanır.

4.2.7 Teorem :$X(\mathbb{T},\omega)$, $0<\alpha_X\leq\beta_X<1$ ve $\omega\in A_{\frac{1}{\alpha_X}}(\mathbb{T})\cap A_{\frac{1}{\beta_X}}(\mathbb{T})$ $m,n\in\mathbb{Z}^+$,$0\leq m\leq n$ biçimindeki bir ağırlıklı rearrangement invariant uzay olsun.

$f\ \in X(\mathbb{T},\omega)$ için

$$\sum_{v=1}^{\infty}\frac{E_v(f)_{X,\omega}}{v}<\infty$$

olsun. Bu durumda

$$\left\|\tilde{f}-V_{n,m}(.,\tilde{f})\right\|_{X(\mathbb{T},\omega)}\leq c\left\{\frac{1}{m+1}\sum_{v=0}^{n}E_{n-m+v}(f)_{X,\omega}+\sum_{v=n+1}^{\infty}\frac{E_v(f)_{X,\omega}}{v}\right\}$$

olacak şekilde bir $c>0$ sayısı vardır.

İspat: İspatı iki durumda yapacağız:

1. Durum:

$0\leq 2m\leq n$ alalım. Varsayalım ki $f(x)-V_{n,m}(x,f)$ fonksiyonun ters türevi $R(x)$ ve

$f(x)-a_0/2$ fonksiyonunun ters türevi $U(x)$ olsun. Böylece teorem 4.1.2'den

$$E_v(U)_{X,\omega}\leq\frac{c_0}{v+1}E_v(f)_{X,\omega},\quad v\in\mathbb{Z}^+ \tag{4.23}$$

$$\sum_{v=1}^{\infty}\frac{E_v(f)_{X,\omega}}{v}<\infty$$

$$\sum_{v=1}^{\infty}E_v(U)_{X,\omega}<\infty$$

elde edilir. Lemma 4.1.5'ten

$$\left\|\widetilde{R'}\right\|_{X(\mathbb{T},\omega)} \leq c_1\{n\|R\|_{X(\mathbb{T},\omega)} + E_n(\widetilde{R'})_{X,\omega}\}$$

olur.

c_2 bir sabit olmak üzere

$R = U - V_{n,m}(.,U) + c_2$ Teorem 4.2.1 göz önüne alınırsa

$$E_n(\widetilde{R'})_{X,\omega} \leq c_1\left\{(n+1)\,E_n(U)_{X,\omega} + \sum_{v=n+1}^{\infty} E_v(U)_{X,\omega}\right\}$$

sonucu elde edilir.

$$\left\|\tilde{f} - V_{n,m}\left(.,\tilde{f}\right)\right\|_{X(\mathbb{T},\omega)} \leq c_{\,3}\left\{(n+1)\left\|f - V_{n,m}(.,U)\right\|_{X(T,\omega)} + \sum_{v=n+1}^{\infty} E_v(U)_{X,\omega}\right\}$$

Teorem 4.2.5'ten

$$\left\|f - V_{n,m}(.,U)\right\|_{X(\mathbb{T},\omega)} \leq \frac{c_4}{m+1}\sum_{v=n-m}^{n} E_v(U)_{X,\omega}$$

$$\leq \frac{c_5}{m+1}\sum_{v=n-m}^{n}\frac{E_v(f)_{X,\omega}}{v+1} = \frac{c_5}{m+1}\sum_{v=0}^{n}\frac{E_{n-m+v}(f)_{X,\omega}}{n-m+v+1}$$

elde edilir.

$0 \leq 2m \leq n$ ve $(n+1)/(n-m+1) \leq 3$ olsun. Böylece son eşitsizlik de kullanılarak

$$\left\|\tilde{f} - V_{n,m}\left(.,\tilde{f}\right)\right\|_{X(\mathbb{T},\omega)} \leq c_6\left\{\frac{1}{m+1}\sum_{v=0}^{n}\frac{E_{n-m+v}(f)_{X,\omega}}{n-m+v+1}(n+1) + \sum_{v=n+1}^{\infty} E_v(U)_{X,\omega}\right\}$$

$$\leq c_7\left\{\frac{1}{m+1}\sum_{v=0}^{n} E_{n-m+v}(f)_{X,\omega} + \sum_{v=n+1}^{\infty} E_v(f)_{X,\omega}\right\}$$

elde edilir.

2. Durum: Varsayalım ki $0 \leq 2m \leq 2n$ eşitsizliği sağlansın. Teorem 4.2.1'ten

$$E_n(\tilde{f})_{X,\omega} \leq c_8 \left\{ E_v(f)_{X,\omega} + \sum_{\mu=n+1}^{\infty} \frac{E_\mu(f)_{X,\omega}}{\mu} \right\}$$

elde edilir.

Son eşitsizlik kullanılarak ve teorem 4.2.5'ten

$$\|\tilde{f} - V_{n,m}(.,\tilde{f})\|_{X(\mathbb{T},\omega)} \leq \frac{c_9}{m+1} \sum_{v=n-m}^{n} E_v(\tilde{f})_{X,\omega}$$

$$\leq \frac{c_{10}}{m+1} \sum_{v=n-m}^{n} \left\{ E_v(f)_{X,\omega} + \sum_{\mu=v+1}^{\infty} \frac{E_\mu(f)_{X,\omega}}{\mu} \right\}$$

$$\leq c_{11} \left\{ \frac{1}{m+1} \sum_{v=n-m}^{n} E_v(f)_{X,\omega} + \sum_{v=n+1}^{\infty} \frac{E_v(f)_{X,\omega}}{v} \right\}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.□

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında yeni bulgular dördüncü bölümde yer almaktadır. Daha önce [5] numaralı kaynakta çalışılan ağırlıklı Orlicz uzaylarında de la Vallée Poussin toplamlarıyla yaklaşım ile ilgili bazı teoremler ağırlıklı rearrangement invariant uzaylarda ispatlanmıştır.

[6] numaralı kaynakta yer alan ağırlıklı Orlicz uzaylarında eşlenik fonksiyonların trigonometrik polinomlarla yaklaşımı ile ilgili teoremlerin ağırlıklı rearrangement invariant uzaylarda ispatları verilmiştir.

6. KAYNAKLAR

[1] Jackson, D., The Theory of Approximation, New york: Amer. Math. Soc., Coll. Publ., 13-32, (1930).

[2] Akhiezer, N. I., Theory of Approximation, New york: Frederick Ungar Publishing, 1-307, (1956).

[3] Stechkin, S. B., ‘‘On the order of approximation of continuous function’’, *Izv. Math.*, 15, 219-242, (1951).

[4] Timan, A. F. and Timan, M. F., ‘‘The generalized modulus of continuity and best mean approximation’’, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 71, 1, 17-20, (1950).

[5] Jafarov, S. Z., “Approximation of functions by de la Vallée-Poussin sums in weighted Orlicz spaces”, *Arab. J. Math.*, 5, 125–137, (2016).

[6] Jafarov, S. Z., “Approximation of conjugate functions by trigonometric polynomials in weighted Orlicz spaces”, *J. Math. In.*, 7 (2) , 271–281, (2013).

[7] Israfilov, D. M. and Güven, A., “Approximation by trigonometric polynomials in weighted Orlicz spaces”, *Stud. Math.* 174 (2),147–168, (2006).

[8] Güven, A., Israfılov, D. M., “Approximation by Means of Fourier trigonometric series in weighted Orlicz spaces”, *Adv. Stud. Contemp. Math.*, 19 (2), 283–295, (2009).

[9] Israfilov, D. M. and Akgün, R., “Approximation in weighted Smirnov–Orlicz classes”, *J. Math. Kyoto Univ.* 46 (4), 755–770, (2006).

[10] DeVore, R. A. and Lorentz G. G., *Constructive Approximation*, Springer, (1993).

[11] Timan, A. F., *Theory of Approximation of Functions of a Real Variable*, Pergamon Press and MacMillan, 1963; Russian original published by Fizmatgiz, Moscow, (1960).

[12] E. A. Haciyeva, *Investigation the Properties of Functions withQuasimonotone Fourier Coefficients in Generalized Nikolskii-Besov Spaces* (Russian), Authors Dissertation, Tbilisi, (1986).

[13] N. X. Ky, "On approximation by trigonometric polynomials in L^p−spaces", *Studia Sci. Math.* Hungar. 28,183-188, (1993)

[14] N. X. Ky, "Moduli of Mean Smoothness and Approximation with Ap−weights", *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math*. 40, 37-48, (1997).

[15] Güven, A. and Israfilov, D. M. "Approximation by trigonometric polynomials in weighted rearrangement invariant spaces", *Glasnik Matematıcki*, 44 (64), 423-446, (2009).

[16] Israfilov, D. M. and Akgün, R., "Approximation by polynomials and rational functions in weighted rearrangement invariant spaces", *J. Math. Anal. Appl.* 346, 489–500, (2008).

[17] Zhizhiashvili, L. V., *Trigonometric Fourier series and their conjugates*, Tbilis. Gos.Univ., Tbilisi, 1993 (in Russian); English transl.: Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, (1996).

[18] Zygmund, A., *Trigonometric Series Volume I*, Cambridge: Cambridge University Press, 36-88, (2002).

[19] Golinskii, B. L., “Local approximation of two conjugate functions by trigonometric polynomials”, *Mat. Sb*., 51 (4), 401–426 (in Russian), (1960).