T.C.

BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

FOURIER SERİLERİNİN FEJER TOPLAMLARININ YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GÖKHAN GÜNEŞ

BALIKESİR, HAZİRAN - 2019

T.C.

BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

FOURIER SERİLERİNİN FEJER TOPLAMLARININ YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GÖKHAN GÜNEŞ

Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Ali GÜVEN (Tez Danışmanı)

Prof. Dr. Ramazan AKGÜN

Doç. Dr. Burak ORDİN

BALIKESİR, HAZİRAN - 2019

KABUL VE ONAY SAYFASI

Gökhan GÜNEŞ tarafından hazırlanan "**FOURIER SERİLERİNİN FEJER TOPLAMLARININ YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 14.06.2019 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Prof. Dr. Ali GÜVEN	....
Üye Prof. Dr. Ramazan AKGÜN	....
Üye Doç. Dr. Burak ORDİN	....

Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Prof. Dr. Necati ÖZDEMİR ....

ÖZET

FOURIER SERİLERİNİN FEJER TOPLAMLARININ
YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
GÖKHAN GÜNEŞ
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI: PROF.DR. ALİ GÜVEN)

BALIKESİR, HAZİRAN - 2019

Bu çalışmada, Fourier serilerinin Fejér toplamlarının ağırlıklı Orlicz uzaylarında bazı yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

Çalışma beş ana bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm, giriş bölümüdür.

İkinci bölümde, çalışmada kullanılan fonksiyon uzaylarının tanımları ve özellikleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Fourier serilerinin tanımı ve başlıca özellikleri verilmiştir.

Dördüncü bölümde, Fourier serilerinin Fejér toplamlarının ağırlıklı Orlicz uzayında yaklaşım hızı ile ilgili bazı sonuçlara değinilmiştir.

Beşinci bölüm sonuç ve öneriler bölümüdür. Bu bölümde elde edilen sonuçlara ve önerilere yer verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Lebesgue uzayı, Orlicz uzayı, ağırlıklı Lebesgue uzayı, ağırlıklı Orlicz uzayı, Fourier serisi, Fejér toplamları, Cesaro ortalaması, Boyd indisleri, Muckenhoupt sınıfı, Lipschitz sınıfları.

ABSTRACT

APPROXIMATION PROPERTIES OF FEJER SUMS OF FOURIER SERIES
MSC THESIS
GÖKHAN GÜNEŞ
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS
(SUPERVISOR: PROF. DR. ALİ GÜVEN)

BALIKESİR, JUNE 2019

In this work, some approximation properties of Fejér sums of Fourier series were investigated in weighted Orlicz spaces.

The work consists of five main chapters.

The first chapter is the introduction.

In the second chapter, definitions and properties of function spaces, which are used in the work are given.

In the third chapter definition and main properties of Fourier series are given.

In the fourth chapter, some results on the rate of approximation of Fejér sums of Fourier series in the weighted Orlicz spaces, are investigated.

The fifth chapter is the conclusion chapter. In this chapter, obtained results and some recommendations are discussed.

KEYWORDS: Lebesgue spaces, Orlicz spaces, weighted Lebesgue spaces, weighted Orlicz spaces, Fourier series, Fejér sums, Cesaro ortalaması, Boyd indices, Muckenhoupt class, Lipschitz classes.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbb{T}$	:	Birim çember ($[0,2\pi]$ kapalı aralığı)
L^p	:	Lebesgue uzayı
L^M	:	Orlicz uzayı
L^p_ω	:	Ağırlıklı Lebesgue uzayı
L^M_ω	:	Ağırlıklı Orlicz uzayı
α_M	:	Alt Boyd indisi
β_M	:	Üst Boyd indisi
D_n	:	n mertebeli Dirichlet çekirdeği
K_n	:	n mertebeli Fejér çekirdeği
σ_n	:	Fourier serisinin n. dereceden Fejér (Cesaro) ortalaması
$\Omega^k_{M,\omega}(\delta\,, f)$	:	k mertebeden düzgünlük modülü
$\Omega_{M,\omega}$	:	Süreklilik modülü
$S_n(f)$	:	f fonksiyonunun Fourier serisinin kısmi toplamlar dizisi

ÖNSÖZ

Yüksek lisans çalışmam boyunca değerli zamanını bana ayırarak desteğini esirgemeyen çok değerli hocam ve tez danışmanım Prof. Dr. Ali Güven'e ve yüksek lisans derslerinde gösterdiği ilgi ve katkılarından dolayı değerli hocam Prof. Dr. Daniyal M. İsrafilzade'ye teşekkürlerimi sunarım.

Tez sürecinde yaşadığım en büyük sıkıntı, yazmış olduğum kitaplardan kaynaklanan zaman yetersizliği idi. Bu süreçte desteklerini esirgemeyen Ortaöğretim 12. sınıf matematik ders kitabı yazar arkadaşlarıma da teşekkür ederim.

Hayatımın her alanında olduğu gibi yüksek lisans çalışmamda da bana destek olan ve anlayış gösteren sevgili eşim Meltem'e çok teşekkür ederim.

1. GİRİŞ

Fourier serilerinin Fejér toplamlarının yaklaşımı ve yaklaşım özellikleri birçok matematikçi tarafından çalışılmıştır. Fejér ortalamalarının yaklaşım özellikleri ilgili bazı teoremler $C_{2\pi}$ uzayında Stechkin [1] ve L^P uzaylarında ise Ul'janov [2] tarafından ispatlanmıştır.

Güven ve İsrafilov [3], Fourier serilerinin Fejér ortalamalarının ağırlıklı Orlicz uzaylarında yaklaşım hızı ile ilgili direkt bir yaklaşım teoremi ispatlamıştır. Ayrıca, ağırlıklı Orlicz uzaylarında trigonometrik polinomlarla yaklaşım teorisinin bazı sonuçları Güven ve İsrafilov tarafından elde edilmiştir [4].

Fourier serilerinin Fejér toplamlarının ağırlıklı Orlicz uzaylarında yaklaşım hızı düzgünlük modülü yardımıyla Jafarov [5] tarafından değerlendirilmiştir.

Bu çalışmada trigonometrik Fourier serilerinin Fejér toplamlarının yaklaşım özellikleri ağırlıklı Orlicz uzaylarında incelenmiş ve bazı sonuçlar üzerinde durulmuştur.

2. FONKSİYON UZAYLARI

2.1 Lebesgue Uzayları

2.1.1. Tanım [6] : $\mathbb{T} = [0,2\pi]$ ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx < \infty$$

koşulunu sağlayan Lebesgue ölçülebilir $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarının hemen her yerde eşit olma bağıntısına göre denklik sınıflarının kümesi $L^p(\mathbb{T})$=L^p ile gösterilir.

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$
$$(\alpha f)(x) := \alpha(f)(x) \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

işlemleri altında L^p bir vektör uzayıdır ve

$$\|f\|_p := \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

fonksiyonu L^p üzerinde bir normdur ve L^p bu norma göre bir Banach uzayıdır.

2.1.2. Tanım : $\mathbb{T} = [0,2\pi]$ ve $\exists M > 0$ sayısı için

$$|f(x)| \leq M \quad h.h.$$

şartını sağlayan $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarının hemen her yerde eşit olma bağıntısına göre denklik sınıflarının kümesi $L^{\infty}(\mathbb{T}) = L^{\infty}$ ile gösterilir.

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x)$$

$$(\alpha f)(x) := \alpha(f)(x) \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

işlemleri altında L^{∞} bir vektör uzayıdır ve

$$\|f\|_{\infty} := inf \{ M > 0 : |f(x)| \leq M \quad h.h. \}$$

fonksiyonu L^{∞} üzerinde bir normdur ve L^{∞} bu norma göre bir Banach uzayıdır.

2.1.3. Tanım : $1 \leq p < \infty$ olmak üzere L^p Banach uzayına *Lebesgue uzayı* denir.

2.2 Orlicz Uzayları

2.2.1. Tanım : $A \subset \mathbb{R}$ bir aralık olsun. $M : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall x, y \in A$ ve $\forall \alpha \in [0,1]$ için

$$M(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha M(x) + (1 - \alpha)M(y)$$

oluyorsa M fonksiyonuna bir *konveks fonksiyon* denir.

2.2.2. Tanım : $M:\ [0,\infty)\rightarrow[0,\infty)$ konveks ve sürekli bir fonksiyon olsun. M fonksiyonu

$$\boldsymbol{i})\ M(x)=0\Leftrightarrow x=0$$

$$\boldsymbol{ii})\ \lim_{x\to 0}\frac{M(x)}{x}=0$$

$$\boldsymbol{iii})\ \lim_{x\to\infty}\frac{M(x)}{x}=\infty$$

koşullarını sağlıyorsa M fonksiyonuna bir *Young fonksiyonu* denir**.**

2.2.3. Örnekler :

$\boldsymbol{i})\ M(x)=\dfrac{x^p}{p}\quad,\ 1<p<\infty$

$\boldsymbol{ii})\ M(x)=e^x-x-1$

$\boldsymbol{iii})\ M(x)=e^{x^p}-1\quad,\ 1<p$

$\boldsymbol{iv})\ M(x)=\dfrac{x^p}{ln(x+e)}\quad,\ 2<p$

fonksiyonları birer Young fonksiyonudur.

2.2.3. Teorem [7]: M bir Young fonksiyonu olsun. Bu durumda

$$N(y)=max\{\,xy-M(x):\ x\geq 0\,\}$$

fonksiyonuda bir Young fonksiyonudur.

N fonksiyonuna M fonksiyonunun tümleyen Young fonksiyonu denir.

2.2.4. Örnek : $1 < p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere

$$M(x) = \frac{x^p}{p}$$

ise

$$N(y) = \frac{y^q}{q}$$

olur.

2.2.5. Tanım [7] : $\mathbb{T} = [0,2\pi]$, M bir Young fonksiyonu ve

$$\rho_M(f) = \int_0^{2\pi} M(|f(x)|)\, dx$$

olmak üzere $\exists \alpha > 0$ için

$$\rho_M(\alpha f) < \infty$$

koşulunu sağlayan $f :\ \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ ölçülebilir fonksiyonlarının kümesi $L^M(\mathbb{T}) = L^M$ ile gösterilir.

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

$$(\alpha f)(x) := \alpha(f)(x) \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

işlemleri altında L^M bir vektör uzayıdır. L^M uzayı,

$$\|f\|_M := sup\left\{\left|\int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx\right| : g \in L^N \text{ , } \rho_N(g) \leq 1 \right\}$$

Orlicz normu ve

$$\|f\|_{(M)} := inf\left\{\lambda > 0 : \ \rho_M\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq 1 \right\}$$

Luxemburg normuyla birlikte bir Banach uzayıdır. L^M uzayına $\mathbb{T}$ üzerinde M ile üretilen *Orlicz uzayı* denir. Her $f \in L^M$ için $\|f\|_{(M)} \leq \|f\|_M \leq 2\|f\|_{(M)}$ eşitsizlikleri sağlanır. Yani Orlicz ve Luxemburg normları birbirine denktir.

Orlicz uzayları, Lebesgue uzaylarının geneleştirmesidir. Özel halde Young fonksiyonu olarak

$$M(x) = \frac{x^p}{p} \quad , \quad 1 < p < \infty$$

Young fonksiyonu için $L^M = L^P$ olur.

2.3 Ağırlıklı Uzaylar

2.3.1 Tanım : $\omega : \mathbb{T} \to [0,\infty]$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun.

$\omega^{-1}(\{0,\infty\})$ kümesinin Lebesgue ölçümü sıfır ise ω fonksiyonuna $\mathbb{T}$ üzerinde bir *ağırlık fonksiyonu* denir.

2.3.2 Tanım : ω bir ağırlık fonksiyonu olsun. $f\omega \in L^{\boldsymbol{p}}$ koşulunu sağlayan ölçülebilir $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ fonksiyonlarının kümesi L^p_ω ile gösterilir.

$$\|f\|_{p,\omega} := \|f\omega\|_p$$

fonksiyonu L^p_ω üzerinde bir normdur. L^p_ω normlu uzayına *Ağırlıklı Lebesgue uzayı* denir.

2.3.3 Tanım : ω bir ağırlık fonksiyonu olsun. $f\omega \in L^{\boldsymbol{M}}$ biçimindeki

ölçülebilir

$f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ fonksiyonlarının kümesi L^M_ω ile gösterilir.

$$\|f\|_{M,\omega} := \|f\omega\|_M$$

fonksiyonu L^M_ω üzerinde bir normdur. L^M_ω normlu uzayına *Ağırlıklı Orlicz uzayı* denir.

2.4 Muckenhoupt Ağırlıkları

2.4.1 Tanım : $\mathbf{1 < p < \infty}$ ve ω fonksiyonu $\mathbb{T}$ üzerinde bir ağırlık fonksiyonu olsun. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere

$$\sup_J \left(\frac{1}{|J|}\int_J \omega^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{|J|}\int_J \omega^{-q}(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

koşulu sağlanıyorsa ω fonksiyonu $A_p(\mathbb{T}) = A_p$ Muckenhoupt sınıfındandır denir.

Muckenhoupt sınıfına ait fonksiyonlara ise *Muckenhoupt ağırlıkları* denir.

Burada supremum bütün $J \subset \mathbb{T}$ aralıkları üzerinden alınmıştır ve $|J|$, J aralığının uzunluğunu göstermektedir.

2.4.2 Örnek : $\omega : \mathbb{T} \to [0,\infty]$, $\omega(x) = x^{\alpha}$ olmak üzere

$$\omega(x) = x^{\alpha} \in A_p \Leftrightarrow -\frac{1}{p} < \alpha < \frac{1}{q}$$

olur.

2.4.3 Tanım : M bir Young fonksiyonu olsun

$$h(t) := \lim_{x\to\infty} sup \frac{M^{-1}(x)}{M^{-1}(tx)} \quad , \qquad t > 0$$

olmak üzere

$$\alpha_M := \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{log\big(h(t)\big)}{logt}\right)$$

$$\beta_M := \lim_{t\to 0^+}\left(-\frac{log\big(h(t)\big)}{logt}\right)$$

sayılarına L^M Orlicz uzayının sırasıyla *alt ve üst Boyd indisleri* denir.

2.4.4 Teorem : M bir Young fonksiyonu ve M nin tümleyen Young fonksiyonu N olmak üzere L^M ve L^N uzaylarının Boyd indislerinin aşağıdaki özellikleri vardır.

$\boldsymbol{i})$ $0 \leq \alpha_M \leq \beta_M \leq 1$

$\boldsymbol{ii})$ $\alpha_M + \beta_N = 1 \quad ve \quad \alpha_N + \beta_M = 1$

2.4.5 Tanım : $0 < \alpha_M \leq \beta_M < 1$ ise Boyd indisleri nontrivialdir denir.

3. FOURIER SERİLERİ

3.1 Fourier Serileri

3.1.1 Tanım : $\boldsymbol{a_k}$, $\boldsymbol{b_k}$ (k = 0, 1, 2, ...) sabit sayılar ve $|\boldsymbol{a_k}| + |\boldsymbol{b_k}| \neq 0$ olmak üzere

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k coskx + b_k sinkx) \qquad (3.1)$$

serisine bir trigonometrik seri denir.

((3.1) serisi her $x \in R$ için yakınsak ise 2π periyotlu bir $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu tanımlar.)

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k sin\, kx - b_k coskx) \qquad (3.2)$$

serisine de (3.1) serisinin eşlenik serisi denir.

(3.1) ve (3.2) serilerinin x noktasında yakınsak olduğunu varsayalım.

$$a := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k cos\, kx + b_k sinkx)$$

$$b := \sum_{k=1}^{\infty} (a_k sin\, kx - b_k coskx)$$

$$a + ib = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - ib_k)(\cos kx + \mathrm{i} sinkx)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - ib_k) e^{ikx}$$

$$c_0 := \frac{a_0}{2}$$

$$c_k := a_k - ib_k$$

$$z := e^{ix}$$

$$a + ib = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

(3.1) serisi

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

kuvvet serisinin reel kısmı ve (3.2) serisi bu kuvvet serisinin sanal kısmıdır.

$$c_0 := \frac{a_0}{2}$$

$$c_k := \frac{1}{2}(a_k - ib_k) \qquad k = 1, 2, \ldots$$

$$c_k := \frac{1}{2}(a_{-k} - ib_{-k}) \qquad k = -1, -2, \ldots$$

alınırsa (3.1) serisi

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

biçiminde yazılabilir.

3.1.2 Tanım : $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ (k = 0, 1, 2, ... , n) ve

$$|a_k| + |b_k| \neq 0$$

olmak üzere

$$t_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k coskx + b_k sinkx) \qquad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

ifadesine n. dereceden bir trigonometrik polinom denir.

3.1.3 Tanım : $\mathbb{T} = [0,2\pi]$ olmak üzere $f \in L^{\mathbf{1}}(\mathbb{T})$ olsun.

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) cosktdt \quad , \qquad k = 0,1,2, \ldots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) sinktdt \quad , \qquad k = 1,2, \ldots$$

olmak üzere

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k coskx + b_k sinkx)$$

trigonometrik serisine f fonksiyonunun Fourier serisi denir ve

$$f(\mathrm{x}) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k coskx + b_k sinkx)$$

olarak yazılır.

3.1.4 Tanım :

$$A_0(f)(x) := \frac{a_0}{2} \ ,$$

$$A_k(f)(x) := \ a_k coskx + b_k sinkx \quad , \qquad k = 1,2, \dots$$

olmak üzere

$$S_n(f)(x) := \sum_{k=0}^{n} A_k(f)(x) \qquad , \qquad n = 0,1,2, \dots$$

biçiminde tanımlı $(S_n(f))$ dizisine *f* fonksiyonunun Fourier serisinin kısmi toplamlar dizisi denir.

$f \in L^1(\mathbb{T})$ fonksiyonunun Fourier serisinin kompleks biçimi ise

$$c_k := c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

olmak üzere

$$f(x) \ \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

olur.

3.1.5 Tanım :

$$D_n(t) := \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} \qquad , \; n \in \mathbb{N} \;, t \in \mathbb{R}$$

ve

$$D_0(t) = 1$$

biçiminde tanımlı D_n fonksiyonuna, n mertebeli *Dirichlet çekirdeği* denir.

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} \qquad , \; n = 1,2,\dots$$

$$= \sum_{k=-n}^{1} e^{ikt} + 1 + \sum_{k=1}^{n} e^{ikt}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} (e^{ikt} + e^{-ikt})$$

$$= 1 + 2\sum_{k=1}^{n} coskt \qquad , \; n = 1,2,\dots$$

olur. Her $n = 0$,1 , 2 , ... için D_n reel değerli , sürekli , 2π periyotlu ve çift bir fonksiyondur.

$n = 1$, 2 , ... için D_n hem pozitif hem de negatif değerler alabilir.

3.1.6 Dirichlet Çekirdeğinin Özellikleri :

$$\boldsymbol{i})\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = 1 \qquad , \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\boldsymbol{ii})\ |D_n(t)| \leq 2n + 1 \qquad , \ n = 0, 1, 2, \dots \quad , t \in R$$

$$\boldsymbol{iii})\ D_n(t) = \frac{sin((2n+1)\frac{t}{2})}{sin\frac{t}{2}} \qquad , \qquad t \neq 2k\pi \ ve \ \ k \in \mathbb{Z}$$

$\boldsymbol{iv})$ $0 < |t| < \pi$ için

$$|D_n(t)| \leq \frac{\pi}{|t|} \qquad , \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

özellikleri vardır.

3.1.7 Tanım : $f \in L^{1}(\mathbb{T})$ ve

$$\mathrm{f(x)} \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k coskx + b_k sinkx)$$

olsun. Bu serinin kısmi toplamlar dizisini $(S_n(f))$ ile gösterelim.

$$S_n(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k coskx + b_k sinkx) \quad , \quad \mathrm{n} = 1,2, \ldots$$

$$S_0(f)(x) = \frac{a_0}{2}$$

ve buradan

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt \qquad n = 1\,,2\,,\ldots$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_n(t) dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} f(x+t) D_n(t) dt$$

elde edilir.

3.2 Fejér Toplamları

3.2.1 Tanım :

$$K_n(t) := \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(t) \qquad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

biçiminde tanımlı K_n fonksiyonuna n mertebeli *Fejér çekirdeği* denir.

$$K_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{m=-k}^{k} e^{imt}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1}\left[\sum_{m=0}^{0} e^{imt} + \sum_{m=-1}^{1} e^{imt} + \cdots + \sum_{m=-n}^{n} e^{imt}\right]$$

$$= \frac{1}{n+1}\big[\, 1 + \left(e^{-it} + 1 + e^{it}\right) + \left(e^{-2it} + e^{-it} + 1 + e^{it} + e^{2it}\right) + \cdots$$
$$+ \left(e^{-int} + e^{-i(n-1)t} + \cdots + e^{-it} + 1 + e^{it} + \cdots e^{i(n-1)t} + e^{int}\right)\big]$$

$$= \frac{1}{n+1}\big[\,(n+1) + n\left(e^{-it} + e^{it}\right) + (n-1)\left(e^{-2it} + e^{2it}\right) + \cdots$$
$$+ 2\left(e^{-i(n-1)t} + e^{i(n-1)t}\right) + \left(e^{-int} + e^{int}\right)\big]$$

$$= \frac{1}{n+1}\left[n + 1 + \sum_{k=1}^{n}(n-k+1)e^{ikt} + \sum_{k=1}^{n}(n-k+1)e^{-ikt}\right]$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n-k+1}{n+1}\right)e^{ikt} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n-k+1}{n+1}\right)e^{-ikt}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{n-k+1}{n+1}\right) e^{ikt} \ + \sum_{k=-n}^{-1} \left(\frac{n+k+1}{n+1}\right) e^{ikt}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) e^{ikt} \ + \sum_{k=-n}^{-1} \left(1 + \frac{k}{n+1}\right) e^{ikt}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) e^{ikt} \ + \sum_{k=-n}^{-1} \left(1 + \frac{k}{n+1}\right) e^{ikt}$$

$$= \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) e^{ikt}$$

$t \neq 2k\pi$ ve $k \in Z$ olmak üzere

$$K_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \ D_k(t) \qquad \left(D_n(t) = \frac{sin((2n+1)\frac{t}{2})}{sin\frac{t}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \ \frac{sin((2k+1)\frac{t}{2})}{sin\frac{t}{2}}$$

$$= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{sin\frac{t}{2}} \sum_{k=0}^{n} \ sin\left(k + \frac{1}{2}\right) t$$

$$= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{sin\frac{t}{2}} \cdot \frac{sin\frac{t}{2}}{sin\frac{t}{2}} \sum_{k=0}^{n} \ sin\left(k + \frac{1}{2}\right) t$$

$$= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{sin^2\frac{t}{2}} \sum_{k=0}^{n} \ sin\left(k + \frac{1}{2}\right) t \cdot sin\frac{t}{2}$$

$$= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{sin^2 \frac{t}{2}} \sum_{k=0}^{n} \; -\frac{1}{2}\left[cos\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)t+\frac{t}{2}\right) - cos\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)t-\frac{t}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{sin^2 \frac{t}{2}} \sum_{k=0}^{n} \; -\left[cos\big((k+1)t\big) - coskt\right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{sin^2 \frac{t}{2}} \sum_{k=0}^{n} \; \left[coskt - cos\big((k+1)t\big)\right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{sin^2 \frac{t}{2}} \; [1 - cos(n+1)t]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{sin^2 \frac{t}{2}} \left[1 - \left(1 - 2sin^2\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{sin^2 \frac{t}{2}} \; \cdot 2sin^2\left((n+1)\frac{t}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1}\left[\frac{sin\left((n+1)\frac{t}{2}\right)}{sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right]^2 \quad , \qquad t \neq 2k\pi \; ve \;\; k \in \mathbb{Z}$$

3.2.2 Teorem [8, Sayfa 88] :

a) $K_n \ (n = 0, 1, 2, \dots), 2\pi$ periyotlu ve negatif olmayan bir fonksiyondur.

$$\boldsymbol{b}) \ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) dt = 1 \quad , \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

3.2.3 Teorem : $(\boldsymbol{x_n})$ reel değerli veya kompleks sayıların yakınsak bir dizisi olsun. Eğer $x_n \to x$ ise,

$$\sigma_n := \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \qquad , \qquad n = 1, 2, \dots$$

dizisi içinde $\sigma_n \to x$ olur.

3.2.4 Tanım : $f \in L^{\mathbf{1}}(\mathbb{T})$ ve

$$\mathrm{f(x)} \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k coskx + b_k sinkx)$$

olsun. $(S_n(f))$, f fonksiyonunun Fourier serisinin kısmi toplamlar dizisi olmak üzere

$$\sigma_n(f)(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k(f)(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) A_k(f)(x) \quad , \quad n = 1,2, \dots$$

ifadesine, f fonksiyonunun Fourier serisinin n. dereceden Fejér (Cesaro) ortalaması denir.

3.2.3. Teorem göz önüne alınırsa

$$S_n(f)(x) \rightarrow f(x) \Rightarrow \sigma_n(f)(x) \rightarrow f(x)$$

olur.

$S_n(f)$ dizisinin integral gösterimi kullanılarak

$$\sigma_n(f)(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(f)(x)$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_k(x-t)dt\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} (D_k(x-t)dt)\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)K_n(x-t)dt$$

elde edilir.

4. AĞIRLIKLI ORLICZ UZAYINDA FEJER TOPLAMLARI İLE YAKLAŞIM

4.1 Düzgünlük Modülü ve En İyi Yaklaşım

$L^M(\mathbb{T}, \omega)$ ağırlıklı Orlicz uzayının Boyd indisleri

$0 < \alpha_M \leq \beta_M < 1$ ve $\omega \in A_{\frac{1}{\alpha_M}}(\mathbb{T}) \cap A_{\frac{1}{\beta_M}}(\mathbb{T})$ olsun.

Bir $f \in L^M(\mathbb{T}, \omega)$ için

$$U_h(f)(x) := \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} f(x+t)\, dt \quad , \quad 0 < h < \pi \ , \ x \in \mathbb{T}$$

olarak tanımlanır ve [4, Lemma 1] e göre

$$\|U_h(f)\|_{L^M(\mathbb{T},\omega)} \leq c\|f\|_{L^M(\mathbb{T},\omega)}$$

olur.

4.1.1 Tanım: $f \in L^M(\mathbb{T}, \omega)$ fonksiyonunun k mertebeden düzgünlük modülü

$$\Omega_{M,\omega}^k(\delta, f) := \sup_{\substack{0<h_i<\delta \\ 0\leq i\leq k}} \left\| \prod_{i=1}^{k} \left(I - U_{h_i}\right) f \right\|_{L^M(\mathbb{T},\omega)} \quad , \ \delta > 0$$

biçiminde tanımlanır.

4.1.2 Düzgünlük modülünün özellikleri:

$\boldsymbol{i}$) $k = 1$ olması durumunda düzgünlük modülüne *süreklilik modülü* denir ve $\Omega_{M,\omega}$ ile gösterilir.

$\boldsymbol{ii}$) $\lim\limits_{\delta \to 0} \Omega^k_{M,\omega}(\delta\,, f) = 0$

$\boldsymbol{iii}$) $f, g \in L^M(\mathbb{T}\,, \omega)$ için

$$\Omega^k_{M,\omega}(\delta\,, f + g) \leq \Omega^k_{M,\omega}(\delta\,, f) + \Omega^k_{M,\omega}(\delta\,, g).$$

4.1.3 Tanım: $f \in L^{\boldsymbol{M}}(\mathbb{T}\,, \omega)$ için $\prod_{\boldsymbol{n}}$ trigonometrik polinom sınıfında en iyi yaklaşım sayısı

$$E_n(f)_{M,\omega} := inf\left\{\|f - T_n\|_{L^M(\mathbb{T}\,,\omega)} \,:\, T_n \in \prod\nolimits_n \right\}$$

biçiminde tanımlanır.

Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$E_n(f)_{M,\omega} = \|f - T_n^*\|_{L^M(\mathbb{T}\,,\omega)}$$

olacak şekilde bir $T_n^* \in \prod_n$ vardır.

4.1.4 Teorem [4] : $L^{\boldsymbol{M}}(\mathbb{T}\,,\omega)$ Orlicz uzayının Boyd indisleri

$$0 < \alpha_{\boldsymbol{M}} \;\leq\; \beta_{\boldsymbol{M}} < 1 \quad \text{ve} \quad \omega \in A_{\frac{1}{\alpha_{\boldsymbol{M}}}}(\mathbb{T}) \cap A_{\frac{1}{\beta_{\boldsymbol{M}}}}(\mathbb{T}) \;\; \text{olsun.}$$

$\forall f \in L^{M}(\mathbb{T}\,,\omega)$ için

$$E_n(f)_{M,\omega} \leq c\, \Omega_{M,\omega}^{k}\left(\frac{1}{n+1}\,, f\right) \quad , \quad k = 1, 2, \ldots \qquad (4.1)$$

olacak şekilde n den bağımsız bir c sabit sayısı vardır.

4.2 Ana Sonuçlar

4.2.1 Teorem [5] : $L^{\boldsymbol{M}}(\mathbb{T}\,,\omega)$ Orlicz uzayının Boyd indisleri

$0 < \alpha_M \;\leq\; \beta_M < 1$ ve $\omega \in A_{\frac{1}{\alpha_M}}(\mathbb{T}) \cap A_{\frac{1}{\beta_M}}(\mathbb{T})$ olsun.

$\forall f \in L^{M}(\mathbb{T}\,,\omega)$ için

$$\|f - \sigma_{n-1}(\cdot\,, f)\|_{L^M(\mathbb{T}\,,\omega)} \leq \frac{c_1}{n} \sum_{m=1}^{n} E_M(f)_{M,\omega} \quad , \quad n = 1, 2, \ldots$$

olacak şekilde n den bağımsız bir c_1 sabit sayısı vardır.

İspat:

Aşağıdaki eşitlik geçerlidir ([5]):

$$\sigma_{n-1}(f) = \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} S_M(f) = \frac{1}{n}\left\{s_0(f) + \sum_{i=1}^{j-1}\sum_{m=2^{i-1}}^{2^i-1} S_m(f) + \sum_{m=2^{j-1}}^{n-1} S_m(f)\right\} \tag{4.2}$$

(4.2) kullanılarak

$$f - \sigma_{n-1}(f) = \frac{1}{n}\left\{\big(f - s_0(f)\big) + \sum_{i=1}^{j-1}\sum_{m=2^{i-1}}^{2^i-1}\big(f - S_m(f)\big) + \sum_{m=2^{j-1}}^{n-1}\big(f - S_m(f)\big)\right\} \tag{4.3}$$

elde edilir. (4.1) , (4.3) ve

$$\|f - S_n(\cdot\,, f)\|_{L^M(\mathbb{T},\omega)} \le c_2 E_n(f)_{M,\omega}$$

eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
\|f - \sigma_{n-1}(f)\|_{L^M(\mathbb{T},\omega)} &\le \frac{c_3}{n}\Bigg[E_1(f)_{M,\omega} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{j-1}\big(2^i + 2^{i-1} - 1\big)E_{2^{i-1}}(f)_{M,\omega} + \big(2n - 2^{j-1} - 1\big)E_{n-2^{j-1}}(f)_{M,\omega}\Bigg] \\
&\le \frac{c_4}{n}\Bigg[E_1(f)_{M,\omega} + E_1(f)_{M,\omega} \\
&\quad + \sum_{i=2}^{j-1} 2^{i-1}E_{2^{i-1}}(f)_{M,\omega} + \big(2n - 2^{j-1}\big)E_{n-2^{j-1}}(f)_{M,\omega}\Bigg]
\end{aligned} \tag{4.4}$$

elde edilir.

(4.1) den

$$2^{i-1}E_{2^{i-1}}(f)_{M,\omega} \leq\ 2\sum_{m=2^{i-2}+1}^{2^{i-1}} E_m(f)_{M,\omega} \tag{4.5}$$

eşitsizliği elde edilir.

j nin $2^j \leq n < 2^{j+1}$ seçilmesi durumunda (4.5) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}(2n-2^{j-1})E_{n-2^{j-1}}(f)_{M,\omega} &\leq \frac{2n-2^{j-1}}{n-2^{j-1}-2^{j-2}}\sum_{m=2^{i-2}+1}^{n-2^{j-1}} E_m(f)_{M,\omega}\\ &= \left(2+\frac{2^j}{n-2^{j-1}-2^{j-2}}\right)\sum_{m=2^{i-2}+1}^{n-2^{j-1}} E_m(f)_{M,\omega}\\ &\leq c_5\sum_{m=2^{j-2}+1}^{n} E_m(f)_{M,\omega} \qquad (4.6)\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

(4.4) , (4.5) ve (4.6) eşitsizlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}&\|f-\sigma_{n-1}(f)\|_{L^M(\mathbb{T},\omega)}\\ &\leq \frac{c_6}{n}\left\{E_1(f)_{M,\omega}+\sum_{i=2}^{j-1}\sum_{m=2^{i-2}+1}^{2^i-1} E_m(f)_{M,\omega}+\sum_{m=2^{i-2}+1}^{n} E_m(f)_{M,\omega}\right\}\\ &\leq \frac{c_7}{n}\sum_{m=1}^{n} E_m(f)_{M,\omega}\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece teorem 4.2.1 ispatlanmış olur.

Teorem 4.1.4 kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

4.2.2 Sonuç: $L^{\boldsymbol{M}}(\mathbb{T}, \omega)$ Orlicz uzayının Boyd indisleri $0 < \alpha_{\boldsymbol{M}} \leq \beta_{\boldsymbol{M}} < 1$

ve $\omega \in A_{\frac{1}{\alpha_M}}(\mathbb{T}) \cap A_{\frac{1}{\beta_M}}(\mathbb{T})$ olsun.

$\forall f \in L^M(\mathbb{T}, \omega)$ için

$$\|f - \sigma_{n-1}(\cdot, f)\|_{L^M(\mathbb{T}, \omega)} \leq \frac{c_8}{n} \sum_{m=1}^{n} \Omega_{M,\omega}^{k}\left(\frac{1}{m+1}, f\right)$$

olacak şekilde n den bağımsız bir pozitif c_8 sabit sayısı vardır.

Teorem 4.2.1. in $C_{2\pi}$ (2π periyodik sürekli fonksiyonların uzayı) uzayında benzeri Stechkin ([6]) ve L^P uzayındaki benzeri ise Ul'janov tarafından ispatlanmıştır.

4.2.3 Tanım: $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere Lipschitz sınıfı

$$Lip_{\alpha}(M, \omega) := \{ f \in L^M(\mathbb{T}, \omega) : \Omega(f, \delta) \leq c\delta^{\alpha} \}$$

biçiminde tanımlanır.

4.2.4 Sonuç: $f \in Lip_{\boldsymbol{\alpha}}(M,\omega)$ ise

$$\|f-\sigma_{n-1}(f)\|_{L^M(\mathbb{T},\omega)} \leq c \cdot \begin{cases} \frac{1}{n^{\alpha}} & , \quad 0 < \alpha < 1 \quad \text{ise} \\ \frac{\ln n}{n} & , \quad \alpha = 1 \quad \text{ise} \end{cases}$$

olur.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Fourier serilerinin Fejér toplamlarının Muckhenhoupt ağırlığına sahip ağırlıklı Orlicz uzayında yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

Sürekli $2\pi -$ periyotlu fonksiyonlar ve L^p $(1 \leq p < \infty)$ uzayına ait fonksiyonların Fourier serilerinin Fejér toplamlarının yaklaşım özelliklerine benzer özelliklerin, ağırlıklı Orlicz uzaylarına ait fonksiyonlar için de geçerli olduğu görülmüştür.

Daha genel olan ağırlıklı Rearangement invariant uzaylarda da benzer sonuçlar elde edilebilir.

6. KAYNAKLAR

[1] Stechkin, P. K., "The Approximation of Periodic Functions by Fejér sums" (in Russian) Trudy *Math Inst.Steklov*, 62, 48-60, (1961).

[2] Ul'janov, P.L., "On the approximation of functions", *Sibirsk. Mat. Z.* 5 418-437, (1964).

[3] Guven, A. and Israfilov, D.M., "Approximation by Means of Fourier trigonometric series in Weighted Orlicz Spaces", Adv. Stud. Contemp. Math. 19(2), 283-295, (2009).

[4] Israfilov, D.M. and Guven, A., "Approximation by trigonometric polynominals in weighted Orlicz spaces", *Studia Mathematica* 174 (2), 147, (2006).

[5] Jafarov, S. Z., A., "Approximation by Fejér sums of Fourier trigonometric series in weighted Orlicz spaces", *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, volume 42 (3), 259-268, (2013).

[6] Pick, L., Kufner, A ., John, O. and Fučík, S., *Function Spaces*, vol 1, Berlin: Walter de Gruyter, (2013).

[7] Krasnosel'skiî, M. A. and Rutickiî Ya. B., Convex functions and Orlicz spaces, Noordhoff Ltd., Groningen, (1961).

[8] Zygmund, A., Trigonometric Series, Cambridge University, (1959).

[9] Gadjieva, E. A., "Investigation the Properties of Functions with Quasimonotone Fourier Coefficients in Generalized Nikolskii-Besov Spaces, Authors Summary of Candditates Dissertation, Tbilisi, (in Russian), (1986).

[10] Ramazanov, A.-R. K., "On Approximation by Polynominals and Rational Functions in Weighted Orlicz spaces", *Analysis Mathematica*, 10, 117-132, (1984).