

**Article Type:**

Research Paper

**Original Title of Article:**

The investigation of process of teaching function concept in an Adidactic learning environment

**Turkish Title of Article:**

Fonksiyon kavramı öğretim sürecinin Adidaktik bir öğrenme ortamında incelenmesi

**Author(s):**

Filiz Tuba DİKKARTIN ÖVEZ, Nazlı AKAR

**For Cite in:**

Dikkartin Övez, F. T. & Akar, N. (2018). The investigation of process of teaching function concept in an Adidactic learning environment. *Pegem Eğitim ve Öğretim Dergisi*, 8(3), 469-502, <http://dx.doi.org/10.14527/pegegog.2018.019>

**Makale Türü:**

Özgün Makale

**Orijinal Makale Başlığı:**

The investigation of process of teaching function concept in an Adidactic learning environment

**Makalenin Türkçe Başlığı:**

Fonksiyon kavramı öğretim sürecinin Adidaktik bir öğrenme ortamında incelenmesi

**Yazar(lar):**

Filiz Tuba DİKKARTIN ÖVEZ, Nazlı AKAR

**Kaynak Gösterimi İçin:**

Dikkartin Övez, F. T. & Akar, N. (2018). The investigation of process of teaching function concept in an Adidactic learning environment. *Pegem Eğitim ve Öğretim Dergisi*, 8(3), 469-502, <http://dx.doi.org/10.14527/pegegog.2018.019>

## The Investigation of Process of Teaching Function Concept in an Adidactic Learning Environment

Filiz Tuba DİKKARTIN ÖVEZ <sup>\*a</sup>, Nazlı AKAR <sup>\*\*a</sup>

<sup>a</sup> Balıkesir University, Necatibey Education Faculty, Balıkesir/Turkey



### Article Info

DOI: 10.14527/pegegog.2018.019

#### Article History:

Received 07 June 2017  
Revised 02 February 2018  
Accepted 09 February 2018  
Online 27 April 2018

#### Keywords:

Adidactic learning environments,  
The concept of functions,  
Mathematics education,  
Interaction with the milieu.

#### Article Type:

Research paper

### Abstract

This study investigates the learning of the concept of functions in an adidactic learning environment, explains the five phases of the adidactic learning environments defined in the Didactic Situation Theory and their interactions with the milieu generated within the given problem state of the students. It was carried out with 33 ninth grade students from an Anatolian high school in Balıkesir. This qualitative study was designed as a case study. Descriptive analysis was used to analyze the data from students' worksheets, and the transcriptions of video records in order to investigate the outcomes of an adidactic learning environment in detail. Students' performances in the teaching process were evaluated with a checklist for problem-solving, construction of function knowledge and interaction with the milieu. The results showed that the basic conditions of an adidactic learning environment were provided, the students with a high interaction with the milieu constructed function knowledge by completing each stage. The students' display rates for the indicators on the checklist were 70.90 % for problem-solving, 77.77% for construction of function knowledge, and 80.00% for interaction with the milieu.

## Fonksiyon Kavramı Öğretim Sürecinin Adidaktik Bir Öğrenme Ortamında İncelenmesi

### Makale Bilgisi

DOI: 10.14527/pegegog.2018.019

#### Makale Geçmişi:

Geliş 07 Haziran 2017  
Düzeltilme 02 Şubat 2017  
Kabul 09 Şubat 2018  
Çevrimiçi 27 Nisan 2018

#### Anahtar Kelimeler:

Adidaktik öğrenme ortamı,  
Fonksiyon kavramı,  
Matematik eğitimi,  
Milieu ile etkileşim.

#### Makale Türü:

Özgün makale

### Öz

Adidaktik bir öğrenme ortamında gerçekleştirilen fonksiyon kavramının öğretimine yönelik sürecin incelendiği bu çalışmada; Didaktik Durumlar Teorisinde tanımlanan adidaktik öğrenme ortamlarının beş evresi açıklanmış ve öğrencilerin verilen problem durumu çerçevesinde oluşturulan milieu ile etkileşimleri incelenmiştir. Çalışma Balıkesir ilinde yer alan bir Anadolu lisesinde öğrenim gören 33 dokuzuncu sınıf öğrencisi ile gerçekleştirilmiştir. Araştırmada nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması modeli benimsenmiştir. Adidaktik bir öğrenme ortamında ortaya çıkan durumların ayrıntılı olarak incelenmesi amacıyla öğrenci çalışma kâğıtları ve video kayıtları ile elde edilen veriler betimsel olarak analiz edilmiştir. Öğrencilerin öğretim sürecinde sergiledikleri performanslar "problem çözme", "fonksiyon bilgisini oluşturma" ve "milieu ile etkileşimleri" açısından hazırlanan kontrol listesiyle değerlendirilmiştir. Çalışmanın sonucunda adidaktik ortamın temel şartlarının sağlandığı, milieu ile etkileşimleri yüksek olan öğrencilerin evreleri tamamlayarak fonksiyon bilgisini oluşturdıkları görülmüştür. Ayrıca öğretim sürecinin değerlendirilmesine ilişkin kontrol listesinde yer alan göstergelere yönelik öğrencilerin bu göstergelerdeki davranışları sergileme oranlarının problem çözme % 70.90, fonksiyon bilgisini oluşturma % 77.77, milieu ile etkileşim kategorileri için %80.00 olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

\* Author: tdikkartin@balikesir.edu.tr

\*\* Author: nazliakar1@hotmail.com

Orcid ID: <https://orcid.org/0000-0003-2646-5327>

Orcid ID: <https://orcid.org/0000-0002-1356-2681>

## Introduction

Studies focusing on how the knowledge is constructed in the human mind and how the learning environment should be shaped accordingly have led to the emergence of several teaching methods, approaches and theories. One of these theories is the theory of didactical situations (TDS), also known as the theory of mathematics learning environments, developed by Guy Brousseau in 1998. This pedagogical theory considers effective teaching methods and how teaching should be designed according to individuals, environments and conditions. It models the roles and function of elements such as teachers, students, mathematical knowledge and learning environments. According to this theory, teachers' didactic intention is specific to the information production process of the class, and also connects the cultural knowledge with the produced knowledge. TDS aims to understand, interpret and improve mathematics education activities. It postulates various explanations about what happens in the learning process. This theory, from a constructivist approach, deals with how learning environments play a role in learning in mathematics classrooms (Erdoğan & Özdemir Erdoğan, 2013). According to TDS, a learning environment is the collection of the activities in which students construct new knowledge by using their previous knowledge to achieve objectives. Brousseau (2002) identified three different learning environments that are didactic, non-didactic and adidactic.

Didactic environments are learning environments in which teachers express intentions, prepare and implement students' knowledge to add to it, and students are aware of the teachers' intentions. In such environments, the teacher plays an active role and students are encouraged to learn by carrying out all their learning activities in classrooms (Altundağ, 2010; Bessot, 1994). In such environments, teachers tend to intervene in lesson content and students' behavior.

Nondidactic environments are defined as natural environments in which there are no education activities, but still learning occurs as a result of experiences in an environment that is not designed for education.

Adidactic environments are learning environments in which teachers assign the full responsibility of learning to the students by hiding their didactic intentions. The students are aware of the teaching, but not informed about the target objective. In adidactic learning environments, teachers guide the learning process by designing the learning environment rather than transferring knowledge. It is intended for students to attain the target objective by designing a milieu in accordance with the characteristics of an adidactic learning environment. Milieu is defined as medium in terms of meaning. All components (teacher, student, problem, resource, etc.) in the learning environment and all the situations arising from the interaction of these components are in milieu. Brousseau (2002) defines the milieu more generally as "everything that affects students and everything that students affect during the learning process." In order to construct it. It is suggested to benefit from problems or games (Samaniego & Barrera, 1999) since students enjoy games and sports activities in accordance with their physical development, they enjoy thinking about problems in accordance with their mental development (Skemp, 1993) and they interact with a milieu to solve the problem or find the winning strategy and obtain knowledge from the environment by feedback (Brousseau, 2002). In learning environments where students' knowledge creation activities occur independently of mediation by the teacher, learning is perceived as a cognitive process in line with the interactions between students and the environment rather than the student and schooling. For example, in the training process of the division algorithm, if the teacher directly transfers the knowledge to the students, the teaching takes place in a didactic learning environment. At the end of the grocery shopping where there is no learning purpose, 20.00 liras remained. While the remaining 20.00 liras are equally distributed among the three friends with money, it can be noticed that 20.00 liras are not divided into 3 with remaining 2.00 liras. Such situations that can be encountered in everyday life show that learning takes place in non-didactic learning environments. In the adidactic environment, the game "Race to 20" is designed for the division (Brousseau, 2002). 1 or 2 is added to the game starting with 1 or 2. In this environment, the strategy which will win the game to reach 20 is 2 more of any multiplier of 3. It is discovered by the students without the informative and guiding intervention of the teacher.

According to Brousseau (2002), five stages are necessary to construct knowledge in an adidactic learning environment. In the devolution stage, which starts with informing students about their tasks and assigning the responsibility to the students, the problem is presented, and the students are motivated to solve it. The students with the responsibility of learning achieve the action stage by interacting with the environment in order to solve the problem or develop and implement strategies to win the game. However, the students are not fully aware of the knowledge that they obtain at this stage and do not share the knowledge with others in the environment. The hidden knowledge that students obtain through trial-and-error or other methods is shared with other members of the environment in verbal or written form in the formulation stage. The correctness of the students' new knowledge acquired by getting their previous knowledge is tested in the validation stage. In this stage, if knowledge is thought to be incorrect, it is corrected or changed according to feedback from the environment. If knowledge is thought to be correct, it is accepted. At the end of this stage, the consensus among group members leads to the construction of informal knowledge. In the institutionalization stage, informal knowledge that is ascertained to be correct is given a theoretical status by being expressed in mathematical language by the teacher. Adidactic learning environments differ from other learning environments in terms of this stage (Brousseau, 2002; Samaniego & Barrera, 1999). Considering the characteristics of the stages, teachers ensure the active participation of the students by taking roles only in the first and last stages.

Studies of teaching concepts in adidactic environments show that students who study individually are more successful than the students who study in groups (Altundağ, 2010; Arslan, Baran & Okumuş, 2011; Arslan, Taşkın & Kirman Bilgin, 2015; Erdoğan, Gök & Bozkır 2014; Manno, 2006; Semerádová, 2015; Sadovsky & Sessa, 2005; Spagnolo & Di Paola, 2009). Studies of mathematical process skills (Çelik, Güler, Bülbül & Özmen, 2015; Erdoğan & Özdemir Erdoğan, 2013; Erümit, Arslan & Erümit, 2012) show that adidactic learning environments contribute to the development of problem-solving skills. In a study (Måsøval, 2009) with three teacher candidates in a teacher-generated adidactic learning environment, they did not understand the difference between the formulas which confirm some values of those candidates and the general terms which are created by using structural relations in geometric models. Måsøval (2009) stated that candidates' lack of prior knowledge about triangular numbers prevented them from coping with adidactic conditions. However, with the integration of technology into learning environments, this problem has been eliminated (Mackrell, Maschietto & Soury-Lavergne, 2013; Sollervall & de La Iglesia, 2015).

Students need to receive feedback about their achievement and development especially when learning new and difficult topics (Zuljan, Peklaj, Pečjak, Puklek & Kalin, 2012). The studies of adidactic learning environments report that this need is met with feedback from the milieu, and that interaction with the milieu positively affects learning by increasing interest and motivation (Altundağ, 2010; Brousseau, 2002; Hersant & Perrin-Glorian, 2005; Sensevy, Schubauer-Leoni, Mercier, Ligozat & Perrot, 2005; Vankúš, 2005). In the adidactic learning environments, learner motivates himself/herself to learn without intervention. Thus, it adds flexibility to the learning process by eliminating systematic constraints such as didactic engineering (Artigue, 2009; González-Martín, Bloch, Durand-Guerrier & Maschietto, 2014) and didactic contract (Laborde & Perrin-Glorian, 2005; Putra, 2016; Sarrazy, 2002; Yavuz & Kepceoglu, 2016). It is expected that in such an environment where the student has responsibility of learning, the student should control their own learning activities. In this respect, it is known that meaningful learning takes place with self-regulation skills (Alcı & Altun, 2007; Arsal, 2009; Çiltas 2011; Haşlaman & Aşkar, 2007; Leung & Chan, 1998; Malpass, O'Neil & Hocevar, 1999; Üredi & Üredi, 2007; Zimmerman, 2002). Therefore, in an adidactic learning environment; conceptual information about the concept of function which has a low level of learning due to the abstract thought it contains can be established (Dikici & İşleyen, 2004; Dikkartin Övez, 2012; Narlı & Başer, 2008; Tatar & Dikici, 2008; Ural, 2006). The construction of the concept of functions, one of the basic concepts of mathematics, makes it easier to construct other concepts for which functions are a prerequisite (Altun, 2016), and it facilitates understanding other related mathematical concepts. For this reason, it is considered that teaching activities related to function concept in adidactic environments will contribute

to students' attitudes towards mathematics and mathematics success. Therefore, this study focused on adidactic learning environment which is compatible with the approach of the instructional program (Gömleksiz, 2005). It is considered important in terms of investigating what happened in the mathematical learning environment and to resolve the limitations of the didactic environments. In this study, classroom activities have been worked in effective problem solving process (Karataş & Güven, 2004; Olkun & Toluk Uçar, 2006; Polya, 1981; Schoenfeld, 1985; Soylu & Soylu, 2006), and the interaction of students with milieu has been examined in detail. In addition, examples of collaborative and individual learning were also presented by including both individual and group work in the study. This study investigates the learning of the concept of functions in an adidactic learning environment. Its research question was: How do students learn the concept of functions in an adidactic learning environment?

## Method

### Research Design

The qualitative study was designed as a case study. A case study is defined as the in-depth investigation of one or more cases and is used to define the details that form the case and to evaluate the case by explaining it (Büyüköztürk, Kılıç Çakmak, Akgün, Karadeniz & Demirel, 2008). Case study was used because this study was intended to examine the classroom environment in depth. Since it was carried out in only one of the classrooms of a school, it was designed as a holistic single case study. Holistic single case studies analyze a single unit such as an individual, institution, curriculum, or school (Yıldırım & Şimşek, 2013).

### Study Group

The participants were selected by appropriate sampling and consisted of a total of 33 ninth grade students (18 female and 15 male) from an Anatolian high school in Balıkesir. These students were in the same class. They and their math teacher were volunteers to participate in the research. The reason for choosing the appropriate sampling method in the research is to have an easily accessible group without any time or labor limitations. As the aim was to create adidactic learning environment by conducting group work in the study, it was important to have volunteering teachers and students. For this reason, the study was conducted with 33 volunteer students studying at the relevant school. These students who voluntarily participated in the study worked in groups in the action, formulation and validation stages of the adidactic environment. While groups were being formed, it was ensured that at least one student was found in each group from the students whose average grade of mathematics course of the first semester was 85-100. In addition, group achievement averages determined by the grade averages of the students in the group were taken into consideration. The achievement averages of the groups formed are given in Table 1.

**Table 1.**  
*Groups and The Average Grade of First Semester Mathematics Course.*

Groups	Number of Students	Group Achievement Average
Group 1	6	84.36
Group 2	6	88.33
Group 3	7	83.20
Group 4	7	81.33
Group 5	7	76.66

In this direction, 5 groups were formed with 6 students in 2 groups and 7 students in 3 groups. When the achievement averages of the groups according to Table 1 were examined, the average of Group 1 was 83.36; 88.33 for Group 2; 83.20 for Group 3; 81.33 for Group 4 and 76.66 for Group 5.

### Process

In line with the objective of having students be able to explain the concept of functions in the ninth grade mathematics curriculum, a milieu was developed in accordance with the five stages of TDS proposed by Brousseau and the characteristics of an adidactic learning environment. The aim of the developed milieu is to discover students' knowledge without teacher intervention. A problem situation and contest activities were designed in order for students to construct the new knowledge using their own experiences. A non-routine real life problem called the car rental problem was presented to them.

The Car Rental Problem is: "Ahmet has decided to go on a trip to Midilli Island. He wants to rent a car to see the coves on the island. When he goes to the Milas Company, he learns that they charge .40 \$ per kilometer in addition to 20.00 \$ per day. Then, he goes to the Helen Company next door. They charge .80 \$ per kilometer. Ahmet cannot decide which company is cheaper. How can you help him?"

**The Adidactic Learning Environment:** Since the milieu was designed as a problem situation, it required a learning environment that stimulates students' to do problem-solving in each stage. Here are its characteristics by stage:

1. Devolution stage: In order to assign responsibility to the students, the car rental problem was presented at the beginning of the teaching process. The class was divided into five homogeneous groups of 6-7 students. Later, a contest was organized, which is a vital part of the milieu, to encourage the development of different solution strategies. The rules of the contest were set up to require producing the maximum number of different solutions, convincing group members for the validity of solutions, defending solutions, evaluating other groups' solutions and detecting mistakes in solutions.
2. Action stage: The students who encountered the problem at this stage determined various strategies by exchanging ideas within their groups and carrying out operations and algorithms. Feedback from their peers enabled the group members to review their strategies and solutions.
3. Formulation stage: In this stage, the students interacting with the milieu expressed their methods, strategy, and solutions in mathematical language and shared them with their classmates.
4. Validation stage: In the previous stage, each groups' solutions were evaluated by the entire class. The solutions thought to be incorrect were discussed by other groups. During these discussions, the group that presented the original solution defended their solution. In this process, the teacher guided the discussion and did not express any idea about the solutions. The teacher took the task of controlling the students' way of obtaining knowledge through peer communication and the cognitive conflict that they established in the midst. The aim of this was to provide students with the opportunity to use mathematical language for different concepts and developing solutions. In this stage, all individuals in the classroom interacted with the milieu by freely expressing their thoughts. The students tried to prove their solutions with various mathematical evidence.
5. Institutionalization stage: The informal knowledge defined by the students as a result of interaction with the milieu was given a theoretical status by being expressed in mathematical language by the teacher. The teacher asked the students to define the relationship between the variables of price and kilometer and the variable sets considering them as inputs and outputs. The students were asked to invent a machine that computes the results of the car rental problem and determine its rules. Afterward, it was stated that input and output sets and the machine rules correspond to a concept called functions in mathematical language, and the input and output sets are called domains and co-domains.

### **Data Collection**

This study used the observation method because it investigates the learning of the concept of functions in an didactic learning environment. Conversations within the groups and interactions with the milieu were observed. Each step of the process was recorded with video cameras by two observers other than the researcher, in order to prevent the subjective judgments of the researchers about the activities of the students, not to overlook any specific instant during group work and to avoid data loss. The data obtained from observations were also supported with the worksheets of the groups to ensure the consistency of the data and the reliability of the research.

### **Data Analysis**

Descriptive analysis was used to analyze the data obtained from video recordings and the students' worksheets. Descriptive analysis aims to present the readers interpreted and orderly data by describing it clearly and systematically (Yıldırım & Şimşek, 2013). The students' learning of the concept of functions was described considering the five stages of an didactic learning environment. Direct quotations were included in the results. The students' performances were evaluated with a checklist for problem-solving, construction of function knowledge, and interaction with the milieu. The problem-solving category was included as the focus of the study. Since interaction with the milieu affects the construction of knowledge, the interaction with the milieu and construction of function knowledge were the other categories. The items in the construction of function knowledge category were related to identifying the previous knowledge, using previous knowledge and construction of function knowledge, and 10 items. In this context, the check list included 11 items such as to understand the problem, to develop the strategy, to implement the developed strategy, to check the validity of the solution and its validity and to generalize the solution. In the "Interact with Milieu" category; 14 items evaluating student, teacher, problem interactions, group work, discussion environments and student participation were included in the checklist. To ensure the validity of the checklist, two experts evaluated the list, and necessary revisions were made. The appropriate one from the ones that measure the same characteristics was included in the checklist. Furthermore, two independent researchers described interactions with the milieu while analyzing the video recordings. The inter-rater reliability coefficient between the researchers was 97.00%.

### **Results**

This section investigates the data according to the five stages of TDS. The participants' performances were evaluated according to the checklist, and the results are shown in percentages and frequencies.

#### **Devolution Stage**

The problem was presented to the milieu. First, a discussion environment was established, and students were provided with the opportunity to present their evaluation about whether there is missing or extra information in the problem. Here is one student's evaluation of the problem:

Adem: There are two companies in the problem. Ahmet will choose the one that is cheaper. I think the first company is better. The one who charges .40 \$ is better. I mean Milas because I calculated the dollar difference. One dollar is three Turkish liras. Multiply 3 by 2 because .80 is .40 doubled. The result is 6.

Adem expressed the problem in his own words, and while doing so, he tried to reach a result mechanically by operating with the numbers in the problem. This shows that the effect of teaching problem-solving was observed: solutions based on memorization, lack of rule-based explanation and mechanical operations (Altun & Arslan, 2006). This makes it quite important in the beginning of the

activities to identify the information given and what is asked in the problem and to detect missing or extra information. A lack of understanding of what is asked makes it more difficult to solve the problem. Here is a dialogue between two students in the process of understanding the problem:

Researcher: Is there anyone who thinks that there is missing or extra information in the problem?

Merih: There is missing information. It does not say how many kilometers he will go.

Taha: I do not agree. Both companies stated their fee per kilometer. However, the fee per day of the Helen Company is missing.

Merih: No. The Milas Company charges .40 \$ per kilometer in addition to 20.00 \$ per a day. The Helen Company charges according to the total kilometers and doesn't ask for extra money per day.

Taha: I guess you are right. Apparently, I did not fully grasp this detail.

With a guiding question, the researcher created an atmosphere that enables students to freely express their thoughts about the problem. It was observed that most students think that there is only one answer to the question. The explanation of what the variable in the problem means and its relationship with what is given is an indicator of understanding the problem (Schoenfeld, 1985). It was observed that students seek only one variable in the problem and perceive the second variable as missing knowledge. This dialogue between two students without intervention by the teacher in an adidactic learning environment, in which students significantly changed their incorrect understandings about the problem by interacting with each other. This conversation between two students without the intervention of the teacher in the adidactic learning environment shows the students interact with each other and convince each other on different ideas they have about the problem. This 20-minute stage enabled students to take responsibility for learning by understanding the problem.

### Action Stage

In this stage, the groups developed various strategies by following the contest rules, and these strategies were implemented and written on worksheets. The criterion that the consent of all group members is required for a solution to be the group's ultimate decision led the group members to cooperate with each other. The student who undertakes the responsibilities of learning interacted with his group friends to solve the car rental problem and to develop the strategies to win the game. Here is an example of a conversation within a group during the activity (Group 1):

Aleyna: If we assume distance as x, then we can come up with a numerical result.

Ayşe: Then, we can solve this formula.

Zeynep: I agree with this solution.

Ayşe: Let the distance be x. Then, the distance is " $\frac{4}{10}x + 20$ " for Milas and " $\frac{8}{10}x$ " for Helen. If both are equal, we need to solve the formula  $\frac{4}{10}x + 20 = \frac{8}{10}x$ .

Zeynep: Then, the distance is 50.00 kilometers.

Aleyna: I am completely lost right now.

Ayşe: According to the contest rules, we must convince each other. We cannot defend the solution unless all of us reach a consensus about the solution.

Zeynep: Now look. In the first equation, only for 50.00 kilometer drive, both companies charge the same amount of money. However, for the different kilometer values, the Milas company charges more money. For instance, for a 10.00 kilometer drive, while Milas earns 24.00 dollars, Helen earns 8.00 dollars. For every kilometer value other than 50.00, Milas makes more profit.



As this conversation shows, Group 1 developed strategies cooperatively and paid attention to the rule about convincing all group members. The adaptation of an approach that is based on the cooperation and solidarity builds a democratic atmosphere in which the students feel comfortable to express themselves (MoNE, 2013). Hence, students freely introduce their thoughts during the development of strategies in group work. When determining the strategies for the solution of the problem, one of the groups had a quite dissimilar experience. Here is their dialogue (Group 5).

Taha: For a 5.00 kilometer drive, Helen charges 4.00 dollars. If we calculate these two for a particular distance value. Helen charges more above this value, while Milas charges more profit below this value.

Ahmet: No.

Taha: Well, do not confuse others. You are never trying.

Mehmet: We did not understand what you are doing.

Taha: Why not? The Helen Company charges 4.00 dollars for a 5.00 kilometer distance.

Ahmet: Where does 5.00 kilometers come from?

Taha: I tried a value that I made up.

As this dialogue shows, the students in group 5 did not fulfill their individual responsibilities to develop strategies. The fact that only one student developed a strategy, and the others just listened prevented the development of a solution. Since the fulfillment of students' tasks in a group study is dependent on the nature of the group and the relationship between students (Akyüz, 2006), Taha's behavior prevented the development and implementation of solution strategies for the problem. The students tried to reach solutions to the problem by interacting with the milieu in the action stage, and this process was successful in the groups with good peer interaction.

### Formulation Stage

The solution strategies developed in the action stage were explained to the classroom in the formulation stage. The solution of Group 1 is shown in Figure 1.

Yol = x

Milas	Helen
$\frac{4x}{10} + 20$	$\frac{8}{10} \cdot x$

$$\frac{4x}{10} + 20 = \frac{8x}{10}$$

$$20 = \frac{8x}{10} - \frac{4x}{10}$$

$$10 \cdot 20 = \frac{8x - 4x}{10}$$

$$\frac{200}{10} = \frac{4x}{10}$$

$$50 = x$$

$30 \cdot \frac{4}{10} = \frac{120}{10} = 12 + 20 = 32 \rightarrow \text{Milas}$   
 $30 \cdot \frac{8}{10} = \frac{240}{10} = 24 \rightarrow \text{Helen}$

İki baste yolu bulduğumuzda 50km'de her ikisinde aynı parayı elde ediyor.  
 Ama farkı bu ile hesapladığımız tablolarda Milas şirketi daha kârlı çıkıyor. Örnekte verdiğimiz tablo'da Milas şirketi 24 dolar kazanıyor, tablo'da Helen şirketi 8 lira kazanıyor.  
 50km'den fazla yolalma durumunda Milas şirketi kârlıdır.

"Group 1:Both companies charge the same amount of money for a 50.00 kilometer distance. However, the Milas company charges more money for other distances. For example, for a 10.00 kilometer distance, Milas charges 24.00 dollars, while Helen Company charges 8.00 dollars. For any value other than 50.00 kilometers, the Milas company charges more."

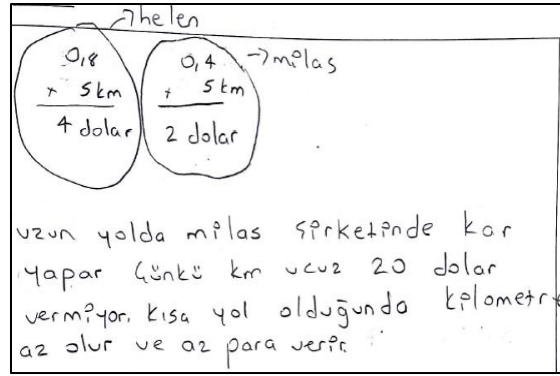
Figure 1. The solution of group 1.

Here is Group 1's explanation of their solution:

Zeynep: We determined an arbitrary kilometer distance x. Then, Milas earns dollars and Helen earns dollars. Afterward, we equated these solutions and solved them. We found that x, the distance, is 50.00

kilometers. When the distance becomes 50.00 kilometers, both companies earn the same amount of money. For distances other than 50.00 kilometers, the Helen Company should be chosen. For a 50.00 kilometer distance, both can be chosen.

It was observed in the group's explanation that they wrote an algebraic expression for both companies by choosing kilometers as variable  $x$ , and that they were partially able to adopt the appropriate strategy and approach in the solution. However, they claimed that for the distances other than 50.00 kilometers, the Helen Company makes more profit due to an incorrect generalization about companies' profit that is the result of misconceptions. Group 5's solution to the problem is shown in Figure 2.



"The Milas Company charges more for long distances because the fee per kilometers is less and they do not charge an extra 20.00 dollars per day. When it is a short distance they charge less because kilometer is less."

Figure 2. The solution of group 5.

With the idea that the amount of money to be paid increased as the kilometers variable increased, group 5 calculated the money for one determined kilometer value and made a generalization. Students' generalization of a solution that they reach by guessing and trial-and-error is described by Radford (2008) as naïve induction. Here, students made a calculation for one value and proposed that the Helen company should be chosen for long distances without determining the variables in the problems and their relationship to each other. However, they did not explain how many kilometers they meant by a long distance. Similarly, the students in group 1 only estimated the amount of money for a 10.00 kilometer distance and generalized the result. In this 25-minute stage, the spokespeople for each group presented their solution and models without interruption.

### Validation Stage

In this stage, the students tried to prove the correctness of their solutions and models using their previous knowledge. This, the longest stage of the process, lasted 35 minutes. Objections to the solutions were explained with justifications in the classroom. The solution of Group 3 is shown in Figure 3.

km basına	günlük (5 km basına)	
Milas: 0,4	+ 20	= 22 \$
Helen: 0,8	+ 0	= 4 \$

5 km basına Milas 2 \$ alır ve ayrıca 20 \$ daha alır.  
Ancak Helen 5 km basına 4 \$ alır. Milas şirketi günlük  
para miktarı ve km basına toplam 22 \$ alırken Helen  
Şirketi günlük para miktarı ve km basına 4 \$ alır.  
Bu yüzden Milas Şirketi Helen Şirketine göre daha  
kattır. Ama Ahmet ücret olduğu için Helen Şirketi  
tercih eder.

“Milas charges 2.00 \$ and an extra 20.00 \$ for a 5.00 kilometer distance, while Helen charges 4.00 \$. Therefore, the Milas Company earns a total of 22.00 \$, while the Helen Company earns a total of 4.00 \$. As a result, the Milas Company makes more than the Helen Company. Since Ahmet is looking for the cheaper company, he should choose the Helen Company.”

**Figure 3.** The solution of group 3.

Here is an excerpt of interaction in the milieu about the solution suggested by Group 3.

Ecem: We calculated how much the Milas and Helen companies charge for a 5.00 kilometer distance. Milas charges .40 \$ per kilometer. However, they ask an extra 20.00 \$ per day independently of the distance driven. On the other hand, the Helen Company only charges .80 \$ per kilometer. That is to say, they do not charge an extra fee per day. For a 5.00 kilometer distance, the Milas company charges 2.00 \$ and 20.00 \$ for one day, 22.00 \$ in total, while Helen Company only charges 4.00 \$. Milas charges more since Helen charges 4.00 \$. However, in this example, we only derived this solution according to a 5.00 kilometer distance. We think we were not able to reach a complete solution since the kilometers were not determined. We cannot comment on which one is cheaper.

Researcher: Is there anyone who objects to the solution of Group 3?

Ali: I think the solution is incomplete. They said we cannot reach a complete solution; however, the problem can be solved. We can determine which company is cheaper with different kilometer values.

Researcher: Can you prove this?

Ali: Milas charges 24.00 \$ for a 10.00 kilometer distance, and Helen charges a lower amount of money. We calculated this up to 100.00 kilometers (The students demonstrated their group's solution on the board). They are equal for a 50.00 kilometer distance. For a 20.00 kilometer distance, Helen is cheaper. When we tried a 49.00 kilometer distance, again Helen was cheaper. However, for a 51.00 kilometer distance Milas is cheaper. Therefore, between the distances of 10.00 kilometers and 50.00 kilometers per day, Ahmet should choose the Helen Company, while for the distances longer than 50.00 kilometers he should choose the Milas Company.

Ecem (Group 3) claimed that a complete solution cannot be obtained since the kilometers were not determined and tried to convince her classmates of this. However, Ali (Group 4) objected and with mathematical operations proved that Ecem's way of thinking was incorrect. At this stage, he defended his groups' suggestion and claimed that for distances between 10.00 and 50.00 kilometers per day, Ahmet should prefer the Helen Company, while for the distances of more than 50.00 kilometers; he should prefer the Milas Company. This claim elicited further discussion in the classroom. Here is a dialogue between the students:

Ali (Group 4): The companies charge equally for a 50.00 kilometer distance per day. For a 10.00 kilometer distance, Helen is cheaper, while Milas is cheaper for a 100.00 kilometer distance.

Fatih (Group 2): No, we do not agree with this idea.

Ali: You must justify your reason. Otherwise, we get the points.

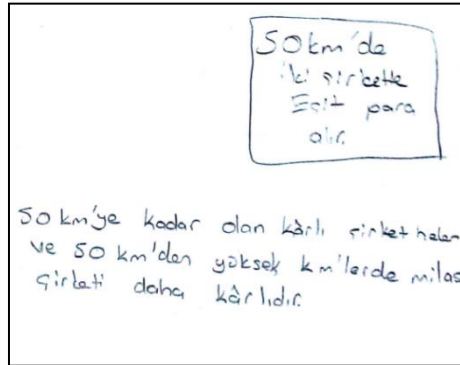
Fatih: It is not only 10.00 kilometers. Values below 10.00 should also be included. That is to say, up to 50.00 kilometers Helen is cheaper, at 50.00 kilometers they are the same, and above 50.00 kilometers Milas is cheaper.

Ali: It is the same. Helen is still cheaper even whether you consider the distances between 10.00 kilometers and 50.00 kilometers or 1.00 kilometer and 50.00 kilometers.

Fatih: It is not the same. If you take the distance between 10.00 and 25.00 km, then the result cannot be accepted for the distances below 10.00 kilometers. You neglect the distances below 10.00 kilometers. Maybe he drives only for 5.00 kilometers. Then, in this case, Helen is still cheaper.

Ali: Aaaa! That's right. We didn't notice this.

Ali had claimed that distances between 10.00 and 50.00 kilometers and distances up to 50.00 kilometers are the same. However, Ali's mistake was noticed by Group 2 and corrected using an example. In the validation stage, explaining solutions with their justifications eliminates these kind of mistakes. Questioning the thoughts of their interlocutors and defending their own ideas in the validation stage also occurred in the action stage during the development of solutions within the groups. The solution of Group 2 in the validation stage is shown in Figure 5:



“Up to 50.00 kilometers, Helen is cheaper. Above 50.00 kilometers, Milas is.”

**Figure 4.** The solution of group 2.

Merih: For a 50.00 kilometer distance, both companies charge equal amounts of money. Helen should be chosen up to 50.00 kilometers, while Milas should be chosen above 50.00 kilometers. When we try a 20.00 kilometer value, Milas charges 28.00 \$, and Helen charges 16.00 \$. When we try a 40.00 kilometer value, Milas charges 36.00 \$, and Helen charges 32.00 \$. When we try an 80.00 kilometer value, Milas charges 52.00 \$, and Helen charges 64.00 \$. For a 50.00 kilometer value, they both charge the same. Therefore, Ahmet saves money if he chooses Milas for a drive of more than 50.00 kilometers or chooses Helen for a drive of less than 50.00 kilometers. He can choose either for a 50.00 kilometer drive. Is there anyone who has an objection?

Taha, Zeynep, Ali and Ecem: No, there is not. This must be the correct solution.

Merih tried to prove his suggestion by assigning different values to the kilometers variable. The correctness of the suggestion was validated by the entire class since no missing information or mistake was detected. In the validation stage, the solutions were explained with their justifications, the mistakes

were corrected by other students in the milieu, and the reasons for the mistakes were shown. In the second stage, the students had difficulty proving their models and generalizing for all situations, while the opposite occurred between the groups in the third stage. This change is thought to have been caused by increased interaction with the milieu.

### **Institutionalization Stage**

In this stage, the informal knowledge the students obtained as a result of interaction with the milieu in the previous stages was given a formal status with the help of guiding questions. Here is an excerpt of this interaction:

Researcher: What does the  $x$  that you used in your solutions mean in mathematical language?

Students: Variable.

Researcher: What are the other variables in the problem?

Ali, Zeynep and Fatih: Money. It is dependent on the kilometers variable.

Researcher: Can you establish an algebraic relationship between the variables that you proposed?

Oğuzhan: Then, we can call money  $y$  and kilometers  $x$ .

Merih: " $y = .4x + 20$ " Milas and " $y = .8x$ " Helen.

Researcher: Is there anyone who describes this relation in a different way?

Students: No. We all agree with Merih.

Researcher: What do the expressions " $y = 0,4x + 20$ " and " $y=0,8x$ " remind you of?

Students: Line equation, equation.

Researcher: If you made a machine that calculates the amount of money the Helen and Milas companies charge, what do you think would be the rule of this machine?

Merih: " $y = \frac{4}{10}x + 20$ " would be the rule of Milas's machine.

Süleyman: " $y = \frac{8}{10}x$ " would be the rule of Helen's machine.

Researcher: What number do you enter on the machine to estimate the amount of money that a customer who rents a car for a 200.00 kilometer drive for one day? If these machines gave an invoice showing the amount of money the customer pays, what would the invoice fee be?

Mehmet: We would enter 200 on the machine and the output would be the value of  $y$ , the amount of money to be paid.  $x$  values would be the inputs.

Then, the teacher explained that these machines correspond to the concept of functions, the input values that are formed by  $x$  values are the domain of the function, and the  $y$  values are the codomain of the function. A table indicating the input and output values in the frame of mathematical rules was designed by the students. Afterward, the researcher introduced the definition of functions and related examples. Institutionalization is necessary for the knowledge that students construct to be valid in other settings (Brousseau, 2002). The knowledge is given a theoretical status by the imaginary machine that establishes the relationship between input and output sets in students' minds, and the rule of this machine is the function rule. Finally, the teaching process was completed with concrete examples to reinforce the concept of functions.

The students' performances were evaluated by two independent researchers using the checklist for problem-solving, construction of function knowledge and interaction with the milieu. The results are shown in Table 2.

**Table 2.**  
*Rates of Demonstrating Behaviors in Groups*

Categories	Rates of Demonstrating Behaviors in Groups									
	Group 1 (n=6)		Group 2 (n=6)		Group 3 (n=7)		Group 4 (n=7)		Group 5 (n=7)	
	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%
Problem-Solving (11 items)	8	72.72	9	81.81	6	54.54	9	81.81	7	63.63
Construction of function knowledge (9 items)	9	100.00	9	100.00	4	44.40	9	100.00	4	44.40
Interaction with the milieu (14 items)	14	100.00	13	92.85	8	57.14	14	100.00	7	50.00

Table 2 shows that the groups' indicator rates for 11 problem-solving items were 72.72% for group 1, 81.81% for groups 2 and 4, 54.54% for group 3 and 63.63% for group 5. It was determined that all groups understood the problem and developed solution strategies. The analysis of students' solution strategies revealed that while group 1 tried to find a solution using an equation and variables, the other groups used the strategies of assigning values to the variable and guessing about solutions. When they checked their solutions' correctness, groups 1, 2 and 4 noticed that they had used an incorrect strategy, reviewed the problem and sought new ways to solve it, but none of the groups developed more than one strategy. These three groups succeeded at the stages of understanding the problem, planning a solution, implementing the plan, checking the correctness and validity of the solution and finally generalizing the solution, while the other two groups were unable to check the correctness and validity of the solution successfully and thus unable to finish the problem. Table 2 shows that the groups' percentages of indicators for 9 construction of function knowledge were 100.00 % for groups 1, 2 and 4 and 44.40% for groups 3 and 5. Given the number of students in each group, the success of the entire class's construction of function knowledge in an adidactic learning environment was 77.60.

The collected data in the construction of function knowledge category indicated that all of the groups identified the variables in the problems and symbolized them using algebraic expressions except for group 3. The students in group 3 attempted to do arithmetical generalization through trial and error; however, they used naive induction and were unable to generalize correctly. All the groups were able to calculate the money variable based on the kilometers variable, but Groups 3 and 5 were unable to establish equations showing the relationship between the variables. Groups 1, 2 and 4 were able to relate their prior knowledge to the new knowledge, while the other two groups remembered the necessary prior knowledge, but since they were not able to establish its relations with the new information, they were unable to construct the concept of functions in their minds. It may be that low interaction with the milieu was the reason for these two groups' lack of success.

The indicators on the checklist for the 14 interaction with the milieu category items were 100.00 % for groups 1 and 4, 92.85 % for group 2, 57.14 % for group 3 and 50.00 % for group 5. All the students interacted with the milieu to solve the rental car problem. The groups performed as expected with no intervention by the teacher and expressed their thoughts freely. During the group discussions, they listened to each other and exchanged their ideas about justifying their solutions. Groups 3 and 5 worked individually, rather than as a group. In these groups, the members did not fulfill their individual responsibilities. In the other three groups where individual responsibilities were fulfilled, the members encouraged each other and exchanged ideas, and the proposed suggestions were determined by group consensus. Thus, groups 1, 2 and 4 interacted with the milieu by participating every stage of an adidactic learning environment, while groups 3 and 5 were unable to do group work successfully. The groups' attainment of the goal was made possible by members' attainment of their individual goals. Collaboration is important in order to successfully complete this procedure. For the success of the group, individuals must help each other (Lejik & Wyvill, 2001). Groups 3 and 5 were unable to do so.

Since they did not fulfill the requirements of group work, they could not obtain successful results at the stages of formulation, validation and institutionalization. Table 2 shows the indicator behaviors on the checklist of groups for interaction with the milieu category. The groups' performances were 91.17 % for groups 1 and 2, 52.94 % for groups 3 and 5 and 94.12 % for group 4. This indicates that in groups where interaction with the milieu was high, the process of problem-solving was completed, and the concept of functions was learned.

### **Discussion, Conclusion and Implications**

This study investigated students' learning of the concept of functions in an adidactic environment. The five stages of adidactic learning environments were explained as described in TDS, and the interactions of students with the milieu that was formed for the problem were described.

It was found that when the students first encountered the problem in the devolution stage, they had a tendency to try to solve the problem with the numbers given and tried to reach a solution without understanding it. Because of the results-oriented approaches of the individuals in the problem-solving process (Altun & Arslan, 2006; Ford, 1994; Schoenfeld, 1985; Soylu & Soylu, 2006), understanding the problem is important. After understanding the problem and taking responsibility for learning in the designed scenario, the students worked with the members of their groups and developed and implemented various strategies to solve the problem in the action stage. During the group work, the students first developed their individual ways of solving the problem, and later they communicated with their friends. The new mathematical constructs formed based on students' prior knowledge were revealed at the processes of developing suggestions for solving the problem and proving them. The suggestions for solving the problem developed as a result of interactions with the milieu were presented in the formulation stage. In this stage, one group solved the problem by establishing an equation, while the others tried to generalize the result that they found by assigning values for the solution. However, the students obtained intuitionally incorrect results when they used limited strategies such as trial and error (Akkan, Baki & Çakıroğlu, 2012; Gick, 1986; Radford, 2008). The correctness or incorrectness of the proposed suggestions for solving the problem was tested by the students in the validation stage. Those who objected to the proposed solutions convinced their peers by justifying their objections. The groups who proposed incorrect solutions either corrected them or changed their information based on the feedback they got from others. This procedure was followed in group work, as well. The models that were proven to be correct in the validation became shared information. After the information was expressed in informal language by the students, it was converted into a formal structure in the institutionalization stage. The teacher explained the concepts of functions, domains and codomains in relation to the results obtained by the class. The adidactic environment stages mentioned here form a spiral in the construction of the concept of functions. In particular, the action, formulation and validation stages overlap and are not clearly separated (Arslan et al. 2011). However, within the framework of the problematic situation presented and the game, phase of adidactic learning environment contributed to class interaction.

The students' performance of the indicators on the checklist for the evaluation of the learning process for the entire class was 70.90 % for problem-solving, 77.77 % for construction of function knowledge and 80.00 % for interaction with the milieu. It is thought that the stages of the adidactic environment are influential in the acquisition of the functional knowledge by 77.77 % of the students.

The groups with high interaction with the milieu completed the process of solving the problem and constructed knowledge about the concept of functions, while the groups that did not cooperate in their work were unable to generate knowledge about the concept of functions. The groups that actively interacted with the milieu in all stages used equations with two unknowns by recognizing the relation between the value tables and the equations they established and the algebraic operations and variables in the problem. These students knowingly used the knowledge of equations with two unknowns. Most of the students constructed function knowledge at the end by recognizing input and output sets. The

students were able to find out the domains and co-domains of given functions by using different applications of knowledge about functions, which became shared knowledge of the class after the teacher's explanation of the teacher, and the students who gave examples of different functions succeeded in using this knowledge.

In didactic learning environments, when interaction with the milieu is high, the stages can easily be completed and the target knowledge is constructed. The students discovered, expressed and verified knowledge about functions at the end of the teaching process because the didactic learning environment is modified and enriched in every situation thanks to the framework proposed by TDS (Brousseau, 2002). With experiments that comply with the philosophy of quasi-experimental mathematics (Baki, Bütün & Karakuş, 2010), the students started to mathematically prove their arguments. This finding is in line with the results of theoretical studies (Bloch, 2003; Sadovsky & Sessa, 2005). In this respect, this study constitutes an example of designing learning environments where the philosophy of mathematics and school mathematics are associated with the approach of the curriculum (Baki et al. 2010). This study also provided a chance to recognize the learner-teacher relationship that is the focus of the theory (Bartlett, 2005; Brousseau, 2002), the complicated structure of interactions in the environment, and the processes of forming knowledge. This is why it is thought that TDS is more functional than many student-centered teaching approaches, which structure the teaching process in detail, but evaluate the outcome (Daniel & King, 1998). Despite these positive aspects, this theory only involves modelling a concept within the framework of a problem situation. However, the curriculum is not limited to concepts (MoNE, 2013). With this in mind, using TDS in the mathematics curriculum with different groups at various grade levels can shed light on both student and teacher behaviors. It has also been found that new mathematical structures are formed when students are able to combine old information about equations and variables into knowledge about functions. This involves a new thinking process with connections and relations established by students in order to attain knowledge about functions. In this respect, it is important to integrate the didactic process of TDS into future studies with models developed to allow analysis of information learning processes and the creation of knowledge about mathematical concepts (Memnun & Altun, 2012; Özdemir, 2014; Yeşildere & Türnüklü, 2008) so that a holistic answer can finally be given to the question: What happens in mathematics classrooms?



## Türkçe Sürüm

### Giriş

Bilginin insan zihninde nasıl oluştuğu ve öğrenme ortamının bu yönde nasıl şekillendirilmesi gerektiğine yönelik çalışmalar, bu alanda çeşitli öğretim yöntem, yaklaşım ve teorilerin ortaya çıkmasına neden olmuştur. Bu teorilerden birisi Matematik Öğrenme Ortamları Kuramı olarak da anılan ve Guy Brousseau tarafından 1998 yılında oluşturulan Didaktik Durumlar Teorisi (DDT), Matematik eğitim-öğretim etkinliklerini anlama, yorumlama ve iyileştirme amacıyla ortaya atılmıştır. Didaktik bilimi kapsamında; etkili öğretim yöntemlerinin ve nasıl öğretim yapılması gerektiğinin kişi, ortam ve koşullara göre değiştiği anlayışıyla oluşturulan teori öğretmen, öğrenci, matematiksel bilgi, öğrenme ortamı gibi unsurların görevlerini ve işlevlerini modelleme amacı gütmektedir. Bu teoriye göre öğretmenin didaktik niyeti, sınıfın bilgi üretim sürecine özgüdür ve üretilen bilgiyle kültürel bilgiyi birbirine bağlar. Matematik sınıflarında gerçekleştirilen faaliyetleri anlamayı, yorumlamayı ve bu etkinlikleri daha iyi hale getirmeyi amaçlayan DDT, öğrenme sürecinde neler yaşandığına ilişkin uzun süreli incelemeler doğrultusunda çeşitli açıklamalar getirmektedir. Yapılandırmacı anlayış ile paralellik gösteren bu teori, Matematik sınıflarında öğrenmenin gerçekleşmesi üzerinde rol oynayan öğrenme ortamı ile ilgilenmektedir (Erdoğan & Özdemir Erdoğan, 2013). DDT'ne göre öğrenme ortamı; kazanımlara ulaşmak için öğrencilerin önceki bilgilerini kullanarak yeni bilgileri yapılandırdıkları etkinlikler topluluğu olarak görülmektedir. Brousseau (2002) bu teori kapsamında didaktik, didaktik olmayan ve adidaktik olmak üzere üç farklı öğrenme ortamı tanımlamıştır.

Didaktik ortamlar, öğretmenin niyetini belli ettiği, öğrencilerin bilgilerini değiştirmek veya ortaya çıkarmak amacıyla hazırladığı ve uyguladığı, öğrencinin ise öğretim amacından haberdar olduğu öğrenme ortamlarıdır. Öğreticinin aktif rol oynadığı bu tür ortamlarda, bütün öğrenme etkinliklerinin sınıf ortamında gerçekleştirilerek öğrencinin öğrenmeye zorlanması söz konusudur (Altundağ, 2010; Bessot, 1994). Bu tür ortamlarda öğretmen, dersin içeriği ve öğrencilerin davranışlarına müdahale etme eğilimindedir.

Didaktik Olmayan ortamlar, eğitim-öğretim faaliyetlerinin olmadığı fakat öğrenmeyle sonuçlanan doğal ortamlar olarak tanımlanmaktadır. Öğrenme, eğitim öğretim amacıyla tasarlanmamış bir ortamda deneyimler sonucu gerçekleşir.

Adidaktik ortamlarda ise öğretmen didaktik amacını gizleyerek öğretimin tüm sorumluluğunu öğrenciye devreder. Öğrenci bir öğretimin gerçekleştirildiğinin farkındadır, ancak hedef kazanımdan haberdar değildir. Adidaktik ortamlarda öğretmen öğretilcek bilgiyi aktarmak yerine ortamı düzenleyerek öğrenme sürecine rehberlik etmektedir. Bu süreçte adidaktik ortamın özellikleri doğrultusunda bir milieu tasarlanarak öğrencinin hedef bilgiye ulaşması amaçlanmaktadır. Milieu kelime anlamı açısından ortam olarak tanımlanmaktadır. Öğrenme ortamında bulunan bütün bileşenler (öğretmen, öğrenci, problem, kaynak, vb.) ve bu bileşenlerin etkileşimiyle ortaya çıkan tüm durumlar milieu kapsamındadır. Brousseau (2002) milieuyu daha genel bir ifade ile öğrenme sürecinde öğrenciyi etkileyen ve öğrencinin etkilediği her şey olarak tanımlamıştır. Milieuyu oluşturmak için hedef bilgiye ulaştıracak problem ya da oyun durumlarından yararlanılması önerilmektedir (Samaniego & Barrera, 1999). Öğrenciler fiziksel gelişimleri doğrultusunda oyun oynamaktan ve sportif etkinliklerden; zihinsel gelişimleri açısından problemler hakkında düşünmekten zevk aldıklarından (Skemp, 1993) problemi çözmek ya da oyunu kazandıran stratejiye ulaşmak için milieu ile etkileşime girer ve ortamdaki aldığı dönütlerle bilgiye ulaşırlar (Brousseau, 2002). Öğrencinin bilgi üretim faaliyetlerinin öğretmenin arabuluculuğundan bağımsız olarak gerçekleştiği bu tür ortamlarda öğrenme, öğrenci veya okul kurumu konusundan ziyade öğrenci ve çevre arasındaki etkileşimler doğrultusunda bilişsel bir süreç olarak ele alınmaktadır.

Örneğin, bölme algoritmasının öğretilme sürecinde öğretmen bilgiyi doğrudan öğrencilerine aktarırsa öğretim didaktik bir öğrenme ortamında gerçekleşmektedir. Öğrenme amacının olmadığı market alışverişi sonunda kalan 20.00 lira para üstünü üç arkadaş arasında eşit şekilde paylaştırılırken birer liralık tekrarlı paylaşımlardan sonra 2.00 liranın kalması ile 20'nin 3'e bölünmediği fark edilebilir. Günlük hayatta karşılaşılabilecek bu tür durumlar didaktik olmayan öğrenme ortamlarda öğrenmenin gerçekleşmesini göstermektedir. Adidaktik ortamlarda ise bölme için "Kim önce 20 diyecek?" oyunu tasarlanmaktadır (Brousseau, 2002). 1 veya 2 diyerek başlanan oyuna yine 1 veya 2 eklenmektedir. Bu ortamda 20 sayısına ulaşmak amacıyla oyunu kazandıracak stratejinin 3'ün herhangi bir katının 2 fazlasını olduğu, öğretmenin bilgilendirici ve yönlendirici müdahalesi olmadan öğrenciler tarafından ispatlanarak keşfedilmektedir.

Brousseau'ya (2002) göre adidaktik bir öğrenme ortamında bilginin oluşması için beş evrenin yaşanması gereklidir. Öğretmenin tasarladığı öğretim ortamında öğrenciye görevlerini bildirerek sorumluluğu öğrencilere devretmesiyle başlayan sorumluluk aktarma evresinde, problem durumu tanıtılır ve öğrencilerin güdülenerek hareket etmeleri sağlanır. Öğrenme sorumluluğunu üstlenen öğrenci, çevresiyle etkileşime girerek sunulan problemi çözmek ya da oyunu kazanmak için stratejiler geliştirip uygulayarak eylem evresini gerçekleştirir. Ancak öğrenci bu evrede elde ettiği bilginin tam olarak farkında değildir ve bu bilgiyi ortamdaki diğer bireylerle paylaşmaz. Öğrencilerin eylem evresinde deneme-yanılma veya farklı yollarla elde edilen örtük bilgi, yazılı ya da sözlü olarak ortamın diğer üyeleriyle ifade etme evresinde paylaşılır. Öğrencilerin ön bilgilerinden yararlanarak oluşturdukları bilginin doğruluğu onaylama evresinde test edilerek hatalı ya da eksik olduğu düşünülen bilgi ortamdaki tüm bireylerin aynı fikirde olduğu informal bilgi oluşturulur. Kurumsallaştırma evresinde, doğruluğu kesinleştirilen informal bilgi öğretmen tarafından matematiksel dille ifade edilerek bilgiye kurumsal bir statü verilir. Adidaktik öğrenme ortamları, öğretim programındaki ortamlardan bu evre açısından ayrılır (Brousseau, 2002; Samaniego & Barrera, 1999). Evrelerin özellikleri dikkate alındığında öğretici, sadece ilk ve son evrelerde rol oynayarak öğrencilerin sürece aktif katılımını sağlar.

Adidaktik ortamlarda gerçekleştirilen kavram öğretimi üzerine gerçekleştirilen çalışmalarda; bireysel çalışan öğrencilerin, grup çalışması yapan öğrencilere göre daha başarılı oldukları tespit edilmiştir (Altundağ, 2010; Arslan et al. 2011; Arslan et al. 2015; Erdoğan et al. 2014; Manno, 2006; Semerádová, 2015; Spagnolo & Di Paola, 2009; Sadovsky & Sessa, 2005). Matematiksel süreç becerilerinin gelişimine odaklanan çalışmalarda (Çelik et al. 2015; Erdoğan & Özdemir Erdoğan, 2013; Erümit et al. 2012); adidaktik ortamların problem çözme becerisinin gelişimine katkıda bulunduğu görülmüştür. Öğretmen tarafından oluşturulan adidaktik öğrenme ortamında üç öğretmen adayı ile yapılan bir çalışmada (Måsøval, 2009) ise; adayların oluşturduğu bazı değerleri doğrulayan formüller ile geometrik modellerdeki yapısal ilişkileri kullanarak oluşturulan genel terimler ifadeler arasındaki farkı kavrayamadıkları sonucuna ulaşılmıştır. Bu bağlamda Måsøval (2009) adayların üçgensel sayılar hakkında ön bilgi eksikliğinin adidaktik durumla baş etmeye engel olduğu belirtmiştir. Ancak öğrenme ortamlarına teknolojinin entegre edilmesi ile bu durum ortadan kaldırılmıştır (Mackrell et al. 2013; Sollervall & de La Iglesia, 2015).

Öğrenciler, özellikle yeni ve zor konuları öğrenirken başarı ve gelişimleri hakkında geribildirim almaya ihtiyacı duymaktadır (Zuljan et al. 2012). Adidaktik ortamlarla ilgili yapılan çalışmalar incelendiğinde; bu ihtiyacın milieudan alınan dönütlerle karşılandığı ve milieu ile etkileşimin ilgi ve motivasyonu arttırarak öğrenmeyi olumlu yönde etkilediği görülmüştür (Altundağ, 2010; Brousseau, 2002; Hersant & Perrin-Glorian, 2005; Sensevy et al. 2005; Vankúš, 2005). Öğrencinin müdahale olmaksızın kendisini öğrenmeye güdülendiği adidaktik öğrenme ortamlarında didaktik mühendisliği (Artigue, 2009; González-Martín et al. 2014) ve didaktik antlaşması (Laborde & Perrin-Glorian, 2005; Putra, 2016; Sarrazy, 2002; Yavuz & Kepceoğlu, 2016) gibi sistemden kaynaklanan kısıtları ortadan kaldırarak öğrenme sürecine esneklik katmaktadır. Öğrenme sorumluluğun öğrencide olduğu böyle bir ortamda öğrencinin kendi öğrenme faaliyetlerini kontrol etmesi beklenir. Bu doğrultuda öz-düzenleme becerileri ile anlamlı öğrenmelerin gerçekleştiği bilinmektedir (Alcı & Altun, 2007; Arsal, 2009; Çiltaş 2011; Haşlaman & Aşkar, 2007; Leung

& Chan, 1998; Malpass et al. 1999; Üredi & Üredi, 2007; Zimmerman, 2002). Dolayısıyla adidaktik bir öğrenme ortamında; içinde barındırdığı soyut düşünceden dolayı öğrenilme düzeyi düşük olan (Dikici & İşleyen, 2004; Dikkartin Övez, 2012; Narlı & Başer, 2008; Tatar & Dikici, 2008; Ural 2006) fonksiyon kavramına ilişkin kavramsal bilginin oluşturulması sağlanabilir. Böylece matematiğin temel kavramlarından biri olan fonksiyon kavramının ön şart olduğu diğer matematiksel kavramların öğrenilmesinin kolaylaştırması (Altun, 2016) ve buna bağlı olarak kavramsal anlamayı sağlayacağı açıktır. Bu nedenle adidaktik ortamlarda fonksiyon kavramına ilişkin gerçekleştirilecek öğretim faaliyetlerinin öğrencilerin matematiğe karşı tutumlarına ve matematik başarısına katkıda bulunacağı düşünülmektedir. Bu doğrultuda öğretim programının yaklaşımıyla uyumlu (Gömlüksiz, 2005), fonksiyon kavramı çerçevesinde oluşturulan adidaktik öğrenme ortamının incelendiği bu çalışma, matematik öğrenme ortamında neler olduğunun incelenerek meydana gelen olayları irdelemek ve didaktik ortamların sınırlılıklarını gidermesi açısından önemli görülmektedir. Bu bağlamda yapılan çalışmada, gerçekleştirilen sınıf içi faaliyetler öğrenmede etkili problem çözme (Karataş & Güven, 2004; Olkun & Toluk Uçar, 2006; Polya, 1981; Schoenfeld, 1985; Soylu & Soylu, 2006) süreci içerisinde ele alınmış, öğrencilerin milie ile olan etkileşimleri ayrıntılı olarak incelenmiştir. Ayrıca çalışmada hem grup çalışması hem de bireysel çalışmalara yer verilerek işbirlikli ve bireysel öğrenmenin bir örneği de sunulmuştur.

Bu doğrultuda çalışmanın amacı, adidaktik bir öğrenme ortamında gerçekleştirilen fonksiyon kavramının öğretimine yönelik sürecin incelenmesidir. Bu amaçla çalışmanın araştırma problemi “Fonksiyon kavramı adidaktik bir öğrenme ortamında nasıl öğrenilmektedir?” olarak belirlenmiştir.

## Yöntem

### Araştırmanın Deseni

Bu çalışmada nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması modeli benimsenmiştir. Bir ya da daha fazla olayın, ortamın derinlemesine incelendiği yöntem olarak tanımlanan durum çalışması, bir olayı meydana getiren ayrıntıları tanımlamak ve olaya ilişkin çeşitli açıklamalar geliştirerek olayı değerlendirmek amacıyla kullanılmaktadır. (Büyüköztürk et al. 2008). Matematik sınıflarında fonksiyon kavramının nasıl öğrenildiğini araştırmayı hedefleyen ve DDT teorisini merkeze alan bu çalışmada, sınıf ortamının derinlemesine incelenmesi amaçlandığından durum çalışması araştırmanın modeli olarak seçilmiştir. Araştırma bir okulun bir sınıfında gerçekleştirildiği için, deseni bütüncül tek durum deseni olarak belirlenmiştir. Bütüncül tek durum deseninde tek bir birim (bir birey, bir kurum, bir program, bir okul vb.) analiz edilmektedir (Yıldırım & Şimşek, 2013).

### Çalışma Grubu

Araştırmanın çalışma grubunu seçkisiz olmayan örnekleme yöntemlerinden uygun örnekleme yöntemi ile seçilen, Balıkesir ilinde yer alan bir Anadolu lisesinde öğrenim gören 33 (18 kız, 15 erkek) dokuzuncu sınıf öğrencisi oluşturmaktadır. Araştırmada uygun örnekleme yönteminin seçilme nedeni, bu yöntemle zaman ve işgücü açısından var olan sınırlılıklar nedeniyle kolay ulaşılabilir ve uygulama yapılabilir birimden seçilmesidir. Ayrıca çalışmada grup çalışması yapılarak adidaktik öğrenme ortamının oluşturulması amaçlandığından öğretmen ve öğrencilerin gönüllü olması gerekmektedir. Bu nedenle çalışma ilgili okulda öğrenim gören gönüllü 33 öğrenci ile gerçekleştirilmiştir. Çalışmaya gönüllü olarak katılan bu öğrenciler adidaktik ortamın eylem, ifade etme ve onaylama evrelerinde gruplar halinde çalışmışlardır. Gruplar oluşturulurken matematik dersi I. dönem karne not ortalaması 85-100 olan öğrencilerden her bir grupta en az bir öğrencinin bulunması sağlanmıştır. Ayrıca gruptaki öğrencilerin not ortalamaları ile belirlenen grup başarı ortalamaları dikkate alınmıştır. Oluşturulan grupların başarı ortalamaları Tablo 1’de verilmiştir.

**Tablo 1.***Gruplar ve Grupların I. Dönem Matematik Dersi Başarı Ortalamaları.*

Gruplar	Öğrenci Sayısı	Grup Başarı Ortalaması
Grup 1	6	84.36
Grup 2	6	88.33
Grup 3	7	83.20
Grup 4	7	81.33
Grup 5	7	76.66

Bu doğrultuda 2 grupta 6 ve 3 grupta 7 öğrencinin yer aldığı 5 grup oluşturulmuştur. Tablo 1'e göre grupların başarı ortalamaları incelendiğinde Grup 1'in başarı ortalamasının 83.36; Grup 2'nin 88.33; Grup 3'ün 83.20; Grup 4'ün 81.33 ve Grup 5'in 76.66 olduğu görülmektedir.

Araştırmanın çalışma grubunu seçkisiz olmayan örnekleme yöntemlerinden uygun örnekleme yöntemi ile seçilen, Balıkesir ilinde yer alan bir Anadolu lisesinde öğrenim gören 33 (18 kız, 15 erkek) dokuzuncu sınıf öğrencisi oluşturmaktadır. Aynı sınıfta yer alan bu öğrenci grubunun seçilme nedeni, matematik öğretmenin ve öğrencilerin araştırmaya katılmaya gönüllü olmalarıdır. Matematik öğretmenin görüşleri doğrultusunda, I. dönem matematik dersinde başarılı öğrencilerden en az bir öğrencinin inin yer aldığı homojen gruplar oluşturulmuştur. Buna göre çalışma 3 grupta 7 kişi ve 2 grupta 6 kişi olmak üzere; 5 grup ile gerçekleştirilmiştir.

### Süreç

Çalışmanın amacı doğrultusunda Ortaöğretim 9. Sınıf Matematik Dersi Öğretim Programında yer alan "Fonksiyon kavramını açıklar." kazanımı çerçevesinde Brousseau tarafından ortaya konulan DDT'nin beş evresi ve adidaktik öğrenme ortamının özelliklerine uygun olarak bir miliue geliştirilmiştir. Geliştirilen miliue kapsamında öğretmen müdahalesi olmadan öğrencilerin bilgiyi keşfetmeleri amaçlanmıştır. Öğrencilerin adidaktik bir ortamda, yeni bilgileri kendi deneyimleriyle yapılandırabilmesi için miliue ile etkileşime girmesini sağlayacak bir problem durumu ve yarışma etkinlikleri düzenlenmiştir. Bu doğrultuda öğrencilere araç kiralama problemi isimli rutin olmayan gerçek hayat problemi sunulmuştur.

Araç Kiralama Problemi: "Ahmet Midilli Adasına geziye gitmeye karar verir. Adadaki koynları dolaşmak için bir günlüğüne araç kiralamak ister. Milas şirketine gittiğinde arabayı kullandığı kilometre başına .40 \$ ve günlük 20.00 \$ para istediğini öğrenir. Hemen yanındaki Helen şirketine gider ve onların da arabayı kullandığı kilometre başına .80 \$ para istediğini öğrenir. Ahmet bir türlü hangi firmanın karlı olacağına karar veremez. Ona yardım etmeye ne dersin?"

**Adidaktik Öğrenme Ortamı:**Miliue bir problem durumu çerçevesinde tasarlandığı için her evrede problem çözme sürecinin aşamalarının gerçekleşmesine yönelik öğrenci davranışlarının ortaya çıkmasını sağlayacak bir öğrenme ortamı düzenlenmiştir. Bu kapsamda öğrenme ortamının özellikleri şöyledir:

1. Sorumluluk Aktarma Evresi: Bu evrede öğrenme sorumluluğunun öğrenciye aktarılmasını sağlamak amacıyla öğretim süreci başlangıcında araç kiralama problemi sunulmuştur. Sınıfta 6-7 kişilik homojen beş grup oluşturulmuştur. Daha sonra miliueun önemli bir parçası olan, öğrencilerin farklı çözüm stratejileri geliştirmelerini hedefleyen bir yarışma düzenlenmiştir. Yarışmanın kuralları; probleme ilişkin grup çalışmalarıyla en çok sayıda farklı çözümü üretme, üretilen çözümlerin geçerliliği için grup üyelerini ikna etme, bulunan çözümleri savunma, farklı grupların ileri sürdüğü çözüm önerilerini değerlendirme, yapılan çözümlerde bulunan hatalı düşünceleri tespit etme olarak belirlenmiştir.
2. Eylem Evresi: Bu evrede problemle karşı karşıya bırakılan öğrenciler grup içerisinde birbirleri ile fikir alışverişinde bulunarak problemin çözümüne yönelik çeşitli stratejiler belirlemişler ve seçtikleri stratejilerin gerektirdiği işlem ve algoritmaları yürütmüşlerdir. Öğrencilerin grup içi çalışmalarında

birbirleriyle etkileşimleri sonucu akranlarından aldıkları dönütler, grup üyelerinin stratejilerini ve çözümlerini gözden geçirmelerini sağlamıştır.

3. İfade Etme Evresi: Bu evrede miliue ile etkileşim halinde olan öğrenciler geliştirdikleri yöntem, strateji ve çözümlerini matematiksel bir dille ifade edip arkadaşlarıyla paylaşmışlardır.
4. Onaylama Evresi: Bir önceki evrede her grubun sunduğu çözümler sınıfça değerlendirilmiştir. Hatalı olduğu düşünülen çözümün neden hatalı olduğu diğer gruplar tarafından tartışılmış ve bu tartışma sürecinde çözümü üreten grup, çözümünün doğruluğunu savunmuştur. Bu süreçte öğretmen tartışmaları yönetmiş ve çözümlerin doğruluğu konusunda herhangi bir yargıda bulunmamıştır. Öğretmen, öğrencilerin akran iletişimi ve tartışma ortamı ile birbirleri arasında oluşturdukları bilişsel çatışma ortamı sayesinde doğru bilgiye ulaşma sürecini kontrol etme görevini üstlenmiştir. Yapılan bu uygulamanın amacı, farklı kavramların kullanımı ve çözüm önerilerinin geliştirilmesiyle öğrencilere ilgili matematiksel dili kullanma imkânı sağlamaktır. Bu aşamada sınıftaki tüm bireylere düşüncesini söyleme özgürlüğü verilerek milieu ile etkileşime girmeleri sağlanmıştır. Öğrenciler çeşitli matematiksel kanıtlar sunarak çözümlerinin doğruluğunu kanıtlamaya çalışmışlardır.
5. Kurumsallaştırma Evresi: Öğrencilerin miliue ile etkileşimleri sonucu ifade ettikleri informal matematiksel açıklamalar öğretmen tarafından matematiksel olarak ifade edilerek formal bir yapıya dönüştürülmüştür. Öğretmen öğrencilere yönelttiği yönlendirilmiş keşif sorularıyla problem çözümünde elde edilen kilometre ve para değişkenleri arasında kurulan ilişkileri ve bu ilişkilere dayalı olarak oluşturulan değişken değerlerine ait kümeleri, girdi ve çıktı kümeleri gibi düşünerek bu kümeleri tanımlamalarını istemiştir. Bu doğrultuda öğrencilerden araç kiralama problemine ilişkin sonuçları hesap gerektirmeden bulan bir makine icat etmeleri ve bu makinenin kuralını bulmaları istenmiştir. Ardından bulunan girdi ve çıktı kümeleri ile makinenin kuralının matematik dilinde fonksiyon olarak isimlendirilen bir kavrama karşılık geldiği ve girdi çıktı kümelerinin fonksiyonun tanım ve değer kümeleri olarak isimlendirildiği belirtilmiştir.

### Verileri Toplama

Çalışmada, adidaktik bir öğrenme ortamında ortaya çıkan durumları ayrıntılı olarak incelemek amaçlandığından; gözlem yöntemi kullanılmıştır. Bu süreçte öğrencilerin grup çalışmalarındaki diyalogları ve sınıf içinde gerçekleşen miliue ile etkileşimleri gözlemlenmiştir. Öğrenci etkinliklerinin yürütülmesinde, araştırmacıların ortama ilişkin öznel yargılarının önlenmesi, grup çalışmalarından kaynaklanabilecek bazı durumların gözden kaçırılmaması ve veri kaybı yaşanmaması amacıyla sürecin her aşaması, araştırmacı dışında iki gözlemci tarafından video kameralarla kayıt altına alınmıştır. Bunun yanı sıra araştırmacının güvenilirliğinin için gözlem verileri her grubun çözümlerini yaptığı kâğıtlarla desteklenerek veri tutarlılığının sağlanması amaçlanmıştır.

### Veri Analizi

Araştırmada video kayıtları ve öğrencilerin çalışma yapraklarından elde edilen veriler betimsel olarak analiz edilmiştir. Betimsel analizde amaç, elde edilen verileri sistematik ve açık bir şekilde betimleyerek okuyucuya düzenli ve yorumlanmış bilgi sunmaktır (Yıldırım & Şimşek, 2013). Bu doğrultuda öğrencilerin fonksiyon kavramını öğrenme süreci, adidaktik öğrenme ortamının beş evresi dikkate alınarak ayrıntılı olarak betimlenmiştir. Elde edilen bulgularda doğrudan alıntılara yer verilmiştir. Grupların uygulama sürecinde sergiledikleri performanslar problem çözme, fonksiyon bilgisini oluşturma ve miliue ile etkileşimleri açısından hazırlanan kontrol listesiyle değerlendirilmiştir. Uygulama oluşturulan problem durumu çerçevesinde yürütüldüğü için kontrol listesinde “problem çözme” kategorisine yer verilmiştir. DDT’ne göre, milieu ile etkileşimlerin bilginin oluşum sürecini etkilemesi nedeniyle “milieu ile etkileşim” ve “fonksiyon bilgisini oluşturma” diğer kategoriler olarak belirlenmiştir. Fonksiyon bilgisini oluşturma kategorisinde yer alan maddeler belirlenirken, ön bilgileri kullanarak tanıma, ön bilgileri kullanma,

fonksiyon bilgisini oluşturma süreçleri dikkate alınarak oluşturulan 10 madde kontrol listesinde yer almıştır. Problem çözme kategorisinde yer alan maddeler oluşturulurken öğretim programında yer alan problem çözme süreci öğrenci davranışları temel alınmıştır. Bu kapsamda problemi anlama, strateji geliştirme, geliştirilen stratejiyi uygulama, çözümün doğruluğunu ve geçerliğini kontrol etme ve çözümü genelleme basamaklarını dikkate alan 11 madde kontrol listesinde yer almıştır. "Miliue ile etkileşim" kategorisinde ise; öğrenci, öğretmen, problem arasındaki etkileşimler, grup çalışmaları, tartışma ortamları ve öğrenci katılımlarını değerlendiren 14 madde kontrol listesinde yer almıştır. Kontrol listesinin kapsam geçerliği için iki alan eğitim uzmanının görüşüne başvurulmuş maddelerde gerekli değişiklikler yapılmıştır. Bu kapsamda birbiri ile aynı özelliği ölçen ifadelerden uygun olanları kontrol listesine dâhil edilmiştir. Bunun yanında video kayıtları bağımsız iki araştırmacı tarafından incelenerek adidantik durum evrelerinde gerçekleşen miliue etkileşimleri betimlenmiştir. Veriler bağımsız iki araştırmacı tarafından analiz edilmiş kodlayıcılar arasındaki uyum % 97.00 olarak tespit edilmiştir.

### Bulgular

Bu bölümde adidantik bir öğrenme ortamında fonksiyon kavramını oluşturma sürecini incelemek amacıyla elde edilen bulgular, DDT'nin beş evresine göre incelenmiştir. Ayrıca katılımcıların sergiledikleri performanslar kontrol listesiyle değerlendirilmiş ve ulaşılan sonuçlar yüzde ve frekans tablosuyla sunulmuştur.

#### Sorumluluk Aktarma Evresi

Milieu kapsamında öğrencilere sunulan problem çerçevesinde ilk olarak problemin anlaşılması için gerekli tartışma ortamı oluşturularak öğrencilerin probleme ilişkin eksik ya da fazla bilgi bulunup bulunmadığına ilişkin öznel değerlendirmelerini sınıfta sunmaları sağlanmıştır. Gerçekleştirilen uygulamaya ilişkin bir öğrencinin probleme ilişkin değerlendirmesi aşağıda görülmektedir:

Adem: Problemde iki tane şirket var, Ahmet bu şirketlerden hangisi karlıysa onu seçecek. Bence .40 lı olan birinci şirket daha iyi. Yani Milas şirketi. Çünkü ben dolar farkını hesapladım. Bir dolar 3.00 lira .80 ile .40 birbirinin iki katı olduğu için 3 ile 2'yi çarp, sonuç 6.

Adem isimli öğrenci problemi kendi cümleleri ile ifade etmiş, bu sırada problemde gördüğü sayılarla işlem yaparak mekanik olarak bir sonuca ulaşmaya çalışmıştır. Bu süreçte sınıf içinde problem çözümünde kullanılan yöntemlerin öğretilmesine dayalı olarak gerçekleştirilen öğretim uygulamalarının etkisi görülmüştür. Bu etki kendisini ezbere dayalı olarak kurallarla bir takım açıklaması olmayan, mekanik çözüm önerilerinin öğrenciler tarafından geliştirilmesiyle ortaya konulmuştur (Altun & Arslan, 2006). Dolayısıyla problemde ne sorulduğunun anlaşılması, problem çözme zorlaştırdığı için problemdeki verilen ve istenenlerin ifade edilmesi, eksik veya fazla bilginin tespit edilmesi etkinliklerine uygulama süreci başında gerekli önem verilmiştir. Bu kapsamda problemin anlaşılması sürecinde birkaç öğrenci arasında geçen konuşmalar şu şekildedir:

Araştırmacı: Problemde fazla ya da eksik bilgi olduğunu düşünen var mı?

Merih: Eksik bilgi var. Bence kaç kilometre gideceğini söylememiş.

Taha: Ben farklı düşünüyorum. İki şirkette kilometre başına kaç dolar ödemesi gerektiğini söylemiş. Ancak Helen şirketinin günlük kaç para istediği eksiktir.

Merih: Hayır. Milas şirketi kilometre başına .40 \$ ve buna ek olarak günlük 20.00 \$ istiyor.

Helen şirketi de kullanılan kaç kilometre miktarına göre ücret istiyor, fazladan para istemiyor.

Taha: Evet haklısının sanırım. Ben tam anlayamamışım ayrıntıyı.

Araştırmacının öğrencilere yönlendirdiği soru ile öğrencilerin problemi analiz ederek düşüncelerini özgür bir şekilde ifade etmesine izin veren bir atmosfer yaratılmıştır. Bu süreçte çoğu öğrencinin problemin tek bir cevabının olduğunu düşündükleri gözlenmiştir. Problem çözme sürecinde problemdeki değişkenin ne ifade ettiği ve problemde verilenlerle ilişkisinin açıklanması problemin anlaşılmasına ilişkin bir göstergedir (Schoenfeld, 1985). Öğrencilerin yanıtları incelendiğinde, soruda tek bir değişken aranarak problemde verilen ikinci değişkeni eksik bilgi olarak algıladıkları gözlenmiştir. Adidaktik öğrenme ortamında öğretmenin müdahalesi olmadan iki öğrenci arasında geçen bu konuşma öğrencilerin birbirleriyle etkileşime girerek problem hakkında sahip oldukları farklı fikirleri birbirlerini ikna ederek değiştirdiklerini göstermektedir. 20 dakika süren bu aşamanın sonucunda, öğrencilerin oluşturulan problemi anlayarak ne yapmaları gerektiği konusunda öğrenme sorumluluğunu üstlenmeleri sağlanmıştır.

### Eylem Evresi

Bu evrede, oluşturulan gruplar belirlenen yarışma koşullarına uyarak problemi çözmek için çeşitli stratejiler geliştirmiş ve buldukları stratejileri uygulayarak grup çalışma kâğıtlarına aktarmışlardır. Belirlenen çözümlerin grup üyelerinin tamamının onayının alınması ile grup kararı olarak kabul edilmesi, öğrencileri grup içerisinde işbirliği yapmaya sevk etmiştir. Böylece öğrenme sorumluluğunu üstlenen öğrenci, grup arkadaşlarıyla etkileşime girerek araç kiralama problemini çözmek ve oyunu kazanmak için stratejiler geliştirip uygulayarak eylem evresini gerçekleştirmiştir. Bu evreye ilişkin grup üyeleri arasında gerçekleşen diyaloglara ilişkin örnekler aşağıda sunulmuştur:

Aleyna: Yola x desek, sonra sayısal olarak bir sonuç bulabiliriz.

Ayşe: Daha sonra bulduğumuz denklemi eşitleyebiliriz.

Zeynep: Bence de bu çözümle yol değişkenini bulabiliriz.

Ayşe: Yol x olsun. Milas için " $\frac{4}{10}x + 20$ ", Helen için " $\frac{8}{10}x$ ". İkisini eşitlersek  $\frac{4}{10}x + 20 = \frac{8}{10}x$  denklemini çözmemiz gerek.

Zeynep: O halde yol 50.00 km olur.

Aleyna: Ben şu anda hiçbir şey anlamadım.

Ayşe: Yarışmaya göre birbirimizi ikna etmeliyiz. Gruptan bir kişi ikna olmazsa çözümü savunamayız.

Zeynep: Bak şimdi ilk başta yazdığımız eşitlikte sadece 50.00 km de her ikisi de aynı parayı alıyor. Ama farklı kilometre ile hesapladığımızda Milas şirketi daha karlı çıkıyor. Örnek verirsek 10.00 km de Milas 24.00 \$ kazanıyor. 10.00 km de Helen 8.00 \$ kazanıyor. 50.00 km den farklı yol alma sonucunda Milas şirketi kardanadır.

Yukarıdaki diyalogda görüldüğü gibi 1. Grup problemi çözmek için işbirliği içerisinde stratejiler geliştirmiş; üyelerin tamamının ikna edilmesi kuralını dikkate alınmıştır. Öğrenme ve öğretim sürecinde, işbirliği ve dayanışmaya dayalı bir yaklaşımın benimsenmesi, öğrencilerin kendilerini rahat ifade edebilecekleri demokratik bir öğrenme ortamının oluşmasını sağlamaktadır (MEB, 2013). Dolayısıyla grup çalışmalarıyla çözüm önerileri geliştirilirken öğrenciler fikirlerini özgür bir şekilde ortaya atmıştır. Problemin çözümü için strateji belirlenirken 5. grupta bu durumun tersi bir süreç yaşanmıştır. İlgili diyalog aşağıda verilmektedir.

Taha: 5.00 km gitse Helen 4.00 \$ alıyor. Bunların ikisini hesaplırsak belli bir kilometre den sonrası Helen, belli bir kilometre den öncesi Milas karlı olur.

Ahmet: Hayır.

Taha: Öyle, herkesin kafasını karıştırma. Hiç uğraşmıyorsunuz ki.

Mehmet: Ne yaptığını anlamadık ki.

Taha: Neden anlamadınız? Helen şirketi 5.00 km de 4.00 \$ kazanıyor.

Ahmet: Nereden 5.00 km gidiyor?

Taha: Öyle değer verdim, kafadan attım.

Yukarıdaki diyalogda görüldüğü gibi çözüm üretmek için 5. gruptaki öğrenciler bireysel sorumluluklarını yerine getirmemektedir. Grup içerisinde bir kişinin çözüm üretmesi diğerlerinin sadece dinlemesi, problemin çözümü için bir önerinin geliştirilmesini engellemiştir. Grup çalışmasında öğrencilere verilen görevin yerine getirilmesi, grubun yapısı, öğrencilerin birbirleriyle ilişkisine bağlı olduğu (Akyüz, 2006) için Taha'nın davranışı probleme yönelik çözüm stratejilerinin geliştirilmesine ve uygulanmasına engel olmuştur. Görüldüğü gibi eylem evresinde öğrenciler milue ile etkileşime girerek probleme çözümler üretmeye çalışmışlardır. Akran etkileşiminin yaşandığı gruplarda bu sürecin başarılı olduğu görülmüştür.

### İfade Etme Evresi

Bu aşamada eylem evresinde grupların probleme yönelik ürettikleri çözüm stratejileri ve uygulamalar sınıfta açıklanmıştır. Sürece yönelik Grup 1'in ürettiği çözüm Şekil 1' de verilmiştir.

Yol = x

<u>Milas</u>	<u>Helen</u>
$\frac{4}{10} \cdot x + 20$	$\frac{8}{10} \cdot x$

  
$$\frac{4x}{10} + 20 = \frac{8x}{10}$$
$$20 = \frac{8x}{10} - \frac{4x}{10}$$
$$10 \cdot 20 = \frac{4x}{10} \cdot 10$$
$$\frac{200 - 4x}{10} = x$$
$$50 = x$$
  
$$50 \cdot \frac{4}{10} = \frac{200}{10} = 20 + 20 = 40 \rightarrow \text{Milas}$$
$$50 \cdot \frac{8}{10} = \frac{400}{10} = 40 \rightarrow \text{Helen}$$

İlk basta yolu bulduğumuzda 50km'de her ikisi de aynı parayı elde ediyor.  
Ama farklı km ile hesapladığımızda mesela 10km'de Milas şirketi daha kârlı alıyor. Örnekle verirsek 10km'de Milas şirketi 24 lira kazanıyor 10km'de Helen şirketi 8 lira kazanıyor

50km'den farklı yolalma sonucunda Milas şirketi kârlıdır.

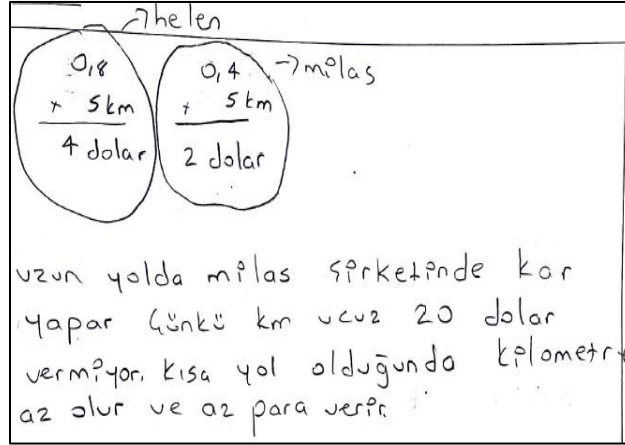
Şekil 1. Grup 1'in çözümü.

Şekil 1'de verilen çözüme yönelik Grup 1'in açıklaması şöyledir:

Zeynep: Yola x diyerek herhangi bir yol belirledik. Milas'ın alacağı para  $\frac{4}{10}x + 20$  'dir. Helen şirketinin alacağı para ise  $\frac{8}{10}x$  dir. Daha sonra bu denklemleri eşitleyerek çözdük. x'i yani yolu 50 bulduk. Yol 50.00 km olduğunda iki şirket de aynı parayı alıyor. Ama kilometreyi farklı hesapladığımızda mesela 10.00 km'de Milas şirketi 24, Helen şirketi 8.00 \$ alıyor. Bu durumda 50.00 km'den farklı yollarda Helen şirketini tercih etmelidir. 50.00 km'de her ikisini de tercih edebilir, fakat farklı yollarda Helen şirketini tercih etmelidir.

Grubun açıklaması incelendiğinde kilometre değerini değişken olarak seçip, bu değişkeni temsil etmesi için x ifadesini kullanarak iki şirket için cebirsel ifadeler yazdıkları, problemi çözerken doğru strateji ve yaklaşımı kısmen belirleyebildikleri görülmüştür. Ancak kavramsal hatalar yaptıkları için hangi şirketin karlı olacağına yönelik yanlış bir genellemeye vararak 50.00 km dışında Helen şirketi karlıdır fikrini savundukları belirlenmiştir. Probleme yönelik Grup 5'in ürettiği çözüm Şekil 2' de verilmiştir.



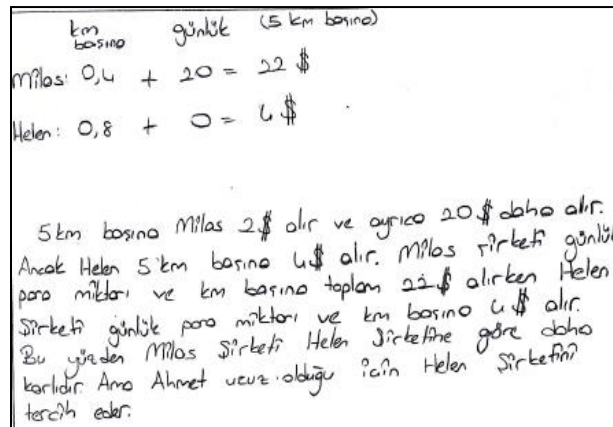


Şekil 2. Grup 5'in çözümü.

Beşinci grubun çözümlerinde, kilometre değişkeni arttıkça ödenecek para miktarının artacağı düşüncesinden yola çıkarak kilometre için tek değer seçip para miktarını hesapladıkları ve genellemeye gittikleri görülmüştür. Öğrencilerin tahminde bulunarak ya da deneme-yanılma ile ulaştıkları çözüm genelleme yoluna gittikleri bu davranışı, Radford (2008) olgunlaşmamış tümevarım olarak açıklamaktadır. Bu süreçte öğrenciler tek değer için hesaplama yapmış, problemde verilen değişkenler ve aralarındaki ilişkileri belirlemeden uzun yolda Helen şirketinin seçilmesi gerektiğini belirtmişlerdir. Ancak 'uzun yol' ifadesiyle kaç kilometre kastedildiğini açıklamamışlardır. Benzer şekilde, Grup 1'deki öğrenciler de sadece 10.00 km için para miktarını hesaplamış ve buldukları sonucu genellemişlerdir. 25 dakika süren bu aşamada grup sözcüleri ürettikleri çözüm önerilerini kimsenin müdahalesi olmadan sunmuş ve geliştirdikleri modelleri ortaya koymuşlardır.

### Onaylama Evresi

Bu aşamada, öğrenciler ifade etme evresinde ileri sürdükleri çözümlerin ve genellemelerin neden doğru olduğunu önceki matematiksel bilgilerini kullanarak ispatlamaya çalışmışlardır. Öğretim sürecinin en uzun aşaması olan bu evre 35 dakika sürmüştür. Üretilen çözüm önerilerine yönelik itirazlar gerekçeleriyle birlikte sınıf ortamında açıklanmıştır. Şekil 3'te Grup 3'ün sunduğu çözüm önerisi verilmektedir.



Şekil 3. Grup 3'ün çözümü.

Grup 3'ün sunduğu çözüm önerisine yönelik dilde kapsamında öğrenciler arasında gerçekleşen diyalog aşağıda verilmektedir.

Ecem: Biz Milas ve Helen şirketinin 5.00 km için kaç dolar alacaklarını hesapladık. Milas kilometre başına .40 \$ alıyor. Ama ister sıfır kilometre gitsin, ister 100.00 km gitsin günlük 20.00 \$ daha istiyor. Helen şirketi ise sadece kilometre başına .80 \$ istiyor. Yani günlük bir para istemiyor. 5.00 km başına hesapladığımızda Milas kilometre başına 2.00 \$ ve günlük 20.00 \$ aldığı için toplam 22.00 \$ alır. Helen ise sadece 5.00 km için 4.00 \$ alır. Buradan Helen 4.00 \$ aldığı için daha karlı olan Milas'tır. Ama bunu sadece 5.00 km için hesapladık. Kilometre belli olmadığı için sorunun çözümünü tam olarak bulamayacağımızı düşünüyoruz. Hangisinin karlı olduğu hakkında yorum yapamayız.

Araştırmacı: Grup 3'ün açıkladığı çözüme yönelik itirazı olan var mı?

Ali: Bence söylediği çözüm eksik. Sorunun çözümünü tam olarak bulamayız demişlerdi. Ama aslında soru çözülebilir. Farklı kilometre değerleri için karlı şirketi bulabiliriz.

Araştırmacı: Bunu kanıtlayabilir misin?

Ali: Milas şirketi günde 10.00 km giderse 24.00 \$ para alır. Ama Helen daha düşük bir para alır. Biz bunu 100.00 km'ye kadar hesapladık (Öğrenci tahtada gruplarına ait kendi çözümlerini gösterir). Günde 50.00 km için hesapladığımızda ikisi de eşittir. Günde 20.00 km de Helen karlı çıktı. Günde 49.00 km için denediğimizde yine Helen karlı çıktı. Ama 51.00 km de denediğimizde Milas daha karlı çıktı. Yani 10.00 ve 50.00 km arasında Helen'i tercih etmeli, 50.00 km'den fazla mesafelerde Milas şirketini tercih etmeli şeklinde yorum yapabiliriz.

Ecem (Grup 3) soruda kaç kilometre gideceğinin belirtilmemesi nedeniyle sorunun tam olarak çözülemeyeceğini savunmuş ve sınıftaki diğer arkadaşlarını ikna etmeye çalışmıştır. Ancak Ali (Grup 4) itiraz etmiş ve çeşitli kilometre değerlerini deneyerek Ecem'in hatalı düşündüğünü matematiksel işlemler ile ispatlamıştır. Bu aşamada Ali kendi grubunun önerisini savunmuş, böylece Grup 3'ün önerisini çürütmeye çalışarak " Günde 10.00 ve 50.00 km arasında Helen'i tercih etmeli, 50.00 km'den fazla mesafelerde ise Milas şirketini tercih etmeli" iddiasını ortaya atmıştır. Bu iddia da sınıfta tartışmalara neden olmuştur. Miliue kapsamında öğrenciler arasında geçen diyalog aşağıda verilmektedir.

Ali (Grup 4): Günde 50.00 km için şirketler eşit ücret alır. 10.00 için Helen, 100.00 km için Milas karlıdır.

Fatih: (Grup 2): Hayır biz bu düşünceye katılmıyoruz.

Ali: Nedenini kanıtlamalısınız. Yoksa biz puanı alırız.

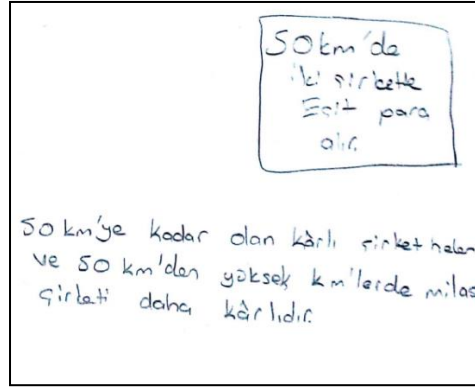
Fatih: Sadece 10.00 km değil, 10.00 km'nin altındaki değerler de var. Yani günde 50.00 km'ye kadar Helen daha karlı, 50.00 km'de eşit, 50.00 km'den sonra Milas daha karlıdır.

Ali: Aynı şey! 10.00 km ile 50.00 km arasında alsan da 1.00 km ile 50.00 km arasında alsan da, yine Helen karlı olacak.

Fatih: Aynı şey değil. Kilometreyi 10.00 km ile 50.00 km arasında aldığı zaman bulunan sonucu, 10.00 km den daha az mesafeler için de kabul edemezsin. 10.00 km den küçük değerleri ihmal ediyorsun. Belki arabayı sadece 5.00 km kullanırlar. O zaman yine Helen karlı olur.

Ali: Aaaa! Doğru bunu fark etmemişiz.

Bu süreçte Ali günde 10.00 km ile 50.00 km arasındaki kilometre değerler ile 50.00 km'ye kadar olan değerlerin aynı anlamı ifade ettiğini savunmuştur. Ancak Ali'nin yaptığı bu hata Grup 2 üyeleri tarafından fark edilerek verdiği örnekle düzeltilmiştir. Onaylama evresinin özelliği açısından ortaya atılan düşüncelerin gerekçeleriyle birlikte açıklanması, bu tür hataların ortadan kaldırılmasına imkân sağlamıştır. Gerekçeler sunarak etkileşimde bulunduğu kişinin düşüncesini sorgulama ve kendi fikrini savunma davranışı, miliue kapsamında onaylama evresinde gerçekleştiği gibi eylem evresinde grup içi çözümler üretilirken de gerçekleşmiştir. Grup 2'nin onaylama evresinde sunduğu çözüm önerisi aşağıda verilmiştir.



Şekil 4. Grup 2'nin çözümü.

Merih (Grup 2): 50.00 km için iki şirkette eşit ücret alır. 50.00 km ye kadar Helen, 50.00 km den fazlası için Milas tercih edilmelidir. 20.00 km değerini verdiğimizde Milas şirketi 28.00 \$, Helen şirketi 16.00 \$ alıyor. Bu değeri 40.00 km olarak alırsak Milas 36.00 \$, Helen 32.00 \$ alıyor. 80 değerini verdiğimizde ise Milas 52.00 \$, Helen 64.00 \$ alıyor. 50.00 km de olunca da ikisi de 40.00 \$ yani eşit miktarda para alıyorlar. Bunun sonucunda Ahmet 50.00 km'nin üstünde yapacağı bir yolculukta Milas'ı, 50.00 km'nin aşağı yapacağı yolculukta Helen'i seçerse daha karlı olur. 50.00 km de ise her ikisini de seçebilir. İtirazı olan var mı?

Taha, Zeynep, Ali ve Ecem: Hayır yok doğru sonuç bu olmalı.

Görüldüğü gibi Merih önerisini kilometre değişkenine değerler vererek kanıtlamaya çalışmıştır. Arkadaşlarının sunulan çözümde herhangi bir eksik ya da hata bulamamaları üzerine önerinin doğruluğu sınıfta kabul edilmiştir. Doğrulama evresinde genel olarak gruplar tarafından ifade edilen çözüm önerileri gerekçeleri ile açıklanmış; yanlış olan öneriler milieudaki diğer öğrenciler tarafından düzeltilmiş ve neden yanlış olduğu öğrenciler tarafından kanıtlanmaya çalışılmıştır. İkinci evrede gruplar içinde yapılan doğrulama işlemleri incelendiğinde öğrencilerin ortaya attıkları modelleri kanıtlamada tüm durumlar için bir genelleme ortaya atmakta zorlandıkları ancak üçüncü evrede gruplar arası doğrulama sürecinde tersi durumun geliştiği gözlenmiştir. Bu değişime milieu ile etkileşimlerin artmasının neden olabileceği düşünülmektedir.

#### Kurumsallaştırma Evresi

Bu evrede, önceki evrelerle milieu ile etkileşimin sonucunda öğrencilerin ulaştığı sonuçların yönlendirilmiş keşif soruları yardımı ile formal bilgiye dönüştürülme süreci gerçekleştirilmiştir. Bu doğrultuda evrede yaşanan etkileşime yönelik bir diyalog aşağıda verilmektedir.

Araştırmacı: Elde ettiğiniz çözümlerde kilometre değeri için kullandığınız x, matematik dilinde ne ifade etmektedir?

Öğrenciler: Değişken.

Araştırmacı: Problemden yer alan diğer değişkenler nelerdir?

Ali, Zeynep ve Fatih: Para var, kilometreye göre değişiyor.

Araştırmacı: Değişken olarak belirlediğiniz para ve kilometre arasındaki ilişkiyi cebirsel olarak ifade edebilir misiniz?

Oğuzhan: O zaman paraya y, kilometre değişkenini x olarak seçebiliriz.

Merih: Milas,  $y = .40x + 20$  ve Helen  $y = .80x$  olur.

Araştırmacı: Bu iki değişken arasındaki ilişkiyi farklı şekilde ifade eden var mı?

Öğrenciler: Yok, hepimiz Merih'e katılıyoruz.

Araştırmacı:  $y = .40x + 20$  ve  $y = .80x$  ifadeleri size matematiksel olarak neyi çağrıştırıyor?

Öğrenciler: Doğru denklemi, denklem.

Araştırmacı: Helen ve Milas şirketlerinin gelen müşterilerden talep edeceği para miktarını hesaplayan bir makine icat etmek istenseydi, bu makinelerin kuralı sizce ne olurdu?

Merih:  $y = \frac{4}{10}x + 20$  Milas makinesinin kuralı olurdu.

Süleyman:  $y = \frac{8}{10}x$  Helen makinesinin kuralı olurdu.

Araştırmacı: Bir günlüğüne kiraladığı aracı 200 km kullanmak isteyen bir müşterinin ödeyeceği para miktarını hesaplamak için makineye hangi sayıyı girersiniz? Bu makineler müşteriye ödeyeceği para miktarını gösteren bir fatura verse, fatura ücreti ne olur?

Mehmet: Makineye girdi olarak 200 yazardık, çıktı olarak  $y$  değerini yani ödenecek para miktarını yazardı.  $x$  değerleri burada girilen sayılar olurdu.

Evrenin devam eden sürecinde öğretmen öğrencilerin bulunduğu makinelerin matematikte fonksiyon kavramına karşılık geldiğini, problemi çözerken buldukları  $x$  değerlerinin oluşturduğu girdi kümesinin bu makinenin yani fonksiyonun tanım kümesi,  $y$  değerlerinin ise fonksiyonun değer kümesi olduğunu açıklar. Bulunan matematiksel kurallar çerçevesinde girdi ve çıktı değerlerini gösteren bir tablo öğrenciler tarafından düzenlenir. Ardından araştırmacı fonksiyonun tanımını ve ilgili örnekleri tanıtır. Öğrencilerin oluşturduğu bilginin başka bir ortamda da geçerli olması için kurumsallaştırılması gereklidir (Brousseau, 2002). Bu öğrencilerin zihninde canlandırdığı tanım ve değer kümeleri arasında ilişki kuran hayali makine fonksiyon; bu ilişkiyi belirten makinenin kuralına da fonksiyon kuralı dendiği açıklanarak oluşturdukları bilgiye kurumsal bir statü kazandırılmıştır. Son olarak oluşturulan fonksiyon kavramının pekiştirilmesi için somut örnekler verilerek öğretim süreci tamamlanmıştır.

Araştırmanın amacı kapsamında uygulamaya katılan öğrencilerin uygulama sürecinde sergiledikleri performanslar bağımsız iki araştırmacı tarafından problem çözme, fonksiyon bilgisini oluşturma ve milieu ile etkileşimleri açısından hazırlanan kontrol listesiyle grup bazında değerlendirilmiş ve elde edilen sonuçlar Tablo 2'de verilmiştir.

**Tablo 2.**  
*Grupların Göstergelerdeki Davranışları Sergileme Oranları.*

Kategoriler	Grupların Göstergelerdeki Davranışları Sergileme Oranları									
	Grup 1 (n=6)		Grup 2 (n=6)		Grup 3 (n=7)		Grup 4 (n=7)		Grup 5 (n=7)	
	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%
Problem çözme (11 madde)	8	72.72	9	81.81	6	54.54	9	81.81	7	63.63
Fonksiyon bilgisi oluşturma (9 madde)	9	100.00	9	100.00	4	44.40	9	100.00	4	44.40
Milieu ile etkileşim (14 madde)	14	100.00	13	92.85	8	57.14	14	100.00	7	50.00

Tablo 2'ye göre problem çözme sürecinin değerlendirilmesine ilişkin kontrol listesinde yer alan 11 gösterge incelendiğinde, grupların bu göstergelerdeki davranışları sergileme oranı Grup 1 için %72.72, Grup 2 ve Grup 4 için % 81.81, Grup 3 için % 54.54 ve Grup 5 için % 63.63 olduğu tespit edilmiştir. Bu kapsamda problem çözme kategorisinde genel olarak bütün grupların problemi anlayarak çözüm için strateji geliştirdikleri belirlenmiştir. Öğrencilerin çözüm stratejileri incelendiğinde Grup 1'in denklem ve

değişken kullanarak, diğer grupların ise değişkenlere değer verip tahmin etme stratejisini kullanarak çözüme ulaşmaya çalıştığı gözlemlenmiştir. Yaptıkları çözümün doğruluğunu ve geçerliğini kontrol ettikleri aşamada 1, 2 ve 4. Grup hatalı bir yol izlediklerini fark ederek problemi tekrar gözden geçirmiş ve yeni çözüm yolları aramışlardır. Bu kapsamda hiçbir grup birden fazla çözüm stratejisi geliştirememiştir. Genel olarak üç grubun problemi anlama, çözümü planlama, planı uygulama, çözümün doğruluğunu ve geçerliğini kontrol etme, çözümü genelleme aşamalarını başarı ile geçtikleri iki grubun ise çözümün doğruluğunu ve geçerliğini kontrol etme aşamasında başarılı olamayıp problemi sonlandıramadıkları belirlenmiştir.

Tablo 2 incelendiğinde; fonksiyon bilgisini oluşturma sürecinin değerlendirilmesine ilişkin kontrol listesinde yer alan 9 gösterge incelendiğinde; grupların göstergelerdeki davranışları sergileme oranlarının Grup 1, Grup 2 ve Grup 4 için % 100.00, Grup 3 ve Grup 5 için % 44.40 olduğu tespit edilmiştir. Gruplarda yer alan öğrenci sayıları açısından tüm sınıfın adidaktik öğrenme ortamında fonksiyon bilgisini oluşturma sürecini % 77.77 oranında tamamladıkları gözlenmiştir.

Elde edilen bulgular incelendiğinde fonksiyon bilgisini oluşturma kategorisinde, Grup 3 dışında yer alan tüm grupların problemdeki değişkenleri tespit ederek cebirsel ifadelerle sembolize ettikleri görülmüştür. Grup 3'te yer alan öğrencilerin ise deneme-yanılma yoluyla aritmetik genelleme sürecini yaşadıkları ancak olgunlaşmamış tümevarımın bir örneğini göstererek doğru genellemeye ulaşamadıkları belirlenmiştir. Bunun yanında tüm gruplar kilometre değişkenine bağlı olarak para değişkenini hesaplayabilmiştir. Ancak bu süreçte Grup 3 ve Grup 5'in değişkenler arasındaki ilişkiyi veren denklemleri kuramadığı gözlenmiştir. Genel olarak Grup1, Grup2 ve Grup 4'ün fonksiyon bilgisini oluşturma sürecinde ön bilgileriyle yeni bilgileri ilişkilendirebildikleri; diğer iki grubun ise gerekli ön bilgileri hatırlamalarına rağmen bu bilgiler arasında ilişki kuramadıkları için fonksiyon kavramını zihinlerinde oluşturmada başarısız oldukları görülmüştür. Bu duruma iki grubun adidaktik ortam sürecinde milie ile düşük etkileşiminin neden olduğu düşünülmektedir.

Adidaktik ortamda milieu ile etkileşim kategorisine ilişkin kontrol listesinde yer alan 14 gösterge incelendiğinde; grupların kontrol listesinde yer alan göstergelerdeki davranışları sergileme oranlarının Grup 1 ve Grup 4 için % 100.00, Grup 2 için % 92.85, Grup 3 için %57.14, Grup 5 için % 50.00 olduğu tespit edilmiştir. Milieu ile etkileşim sürecinde öğrencilerin tümü sunulan problem durumunu çözmeye sürecine katılmıştır. Öğretim sürecinde grupların bilgiyi oluştururken göstermeleri beklenen davranışları öğretmenin müdahalesinden bağımsız olarak gerçekleştirdikleri ve düşüncelerini özgür bir şekilde ifade ettikleri gözlenmiştir. Ayrıca gruplar tartışmalar sırasında birbirlerinin düşüncelerini dinlemiş ve ortaya atılan gerekçeler doğrultusunda düşüncelerini değiştirmişlerdir. Bu süreçte Grup 3 ve Grup 5'in grup çalışması yapmak yerine bireysel olarak çözüm sürecine katıldıkları gözlenmiştir. Bu gruplarda üyelerin bireysel sorumluluklarını yerine getirmediği görülmüştür. Bireysel sorumlulukların yerine getirildiği işbirliği içerisinde çalışan diğer üç grupta ise, üyeler birbirlerini cesaretlendirerek fikir alışverişinde bulunmuş ve ortaya atılan öneriler, grubun ortak kararı olarak belirlenmiştir. Bu kategoride 1, 2 ve 4. gruplarda yer alan öğrencilerin adidaktik öğrenme ortamının her evresinde sürece katılarak milieu ile etkileşimde buldukları, Grup 3 ve Grup 5'te yer alan öğrencilerin ise grup çalışmasında başarı sağlayamadıkları görülmüştür.

Grupların belirlenen hedefe ulaşması, üyelerin bireysel amaçlarına ulaşmasıyla mümkündür. Bu sürecin başarılı şekilde tamamlanmasında işbirlikçi çalışma önemlidir. Grubun başarısı için, grubu oluşturan bireylerin birbirlerine yardım etmeleri gerekmektedir (Lejik & Wyvill, 2001). Grup çalışmasının gereklerini yerine getirmediği için uygun bir çözüm önerisi ve doğrulama ortaya koyamayan Grup 3 ve Grup 5 ifade etme, onaylama ve kurumsallaştırma evrelerinde varlık gösterememişlerdir. Bu durum fonksiyon bilgisinin oluşma sürecinde başarı getirmemiştir.

Genel olarak Tablo 2 incelendiğinde oluşturulan sürecin değerlendirilmesine ilişkin grupların kontrol listesinde yer alan göstergelerdeki davranışları sergileme düzeyi Grup 1 ve Grup 2 için % 91.17, Grup 3 ve Grup 5 için % 52.94 ve Grup 4 için % 94.12 olduğu görülmüştür. Buradan hareketle milieu ile etkileşimin fazla olduğu gruplarda, problem çözme sürecinin tamamlandığı ve fonksiyon bilgisine ulaşıldığı belirlenmiştir.

### Tartışma, Sonuç ve Öneriler

Adidaktik bir öğrenme ortamında gerçekleştirilen fonksiyon kavramının öğretimine yönelik sürecin incelendiği bu çalışmada; DDT’de tanımlanan adidaktik öğrenme ortamlarının beş evresi açıklanmış ve öğrencilerin verilen problem durumu çerçevesinde oluşturulan milieu ile etkileşimleri incelenmiştir.

Çalışmanın sonucunda sorumluluk aktarma evresinde, öğrencilerin problem ile ilk karşılaştıklarında problemi anlamadan gördükleri sayılarla işlem yaparak sonuca ulaşma eğiliminde oldukları gözlenmiştir. Bireylerin problem çözme sürecinde sonuç odaklı yaklaşımları (Altun & Arslan, 2006; Ford, 1994; Schoenfeld, 1985; Soylu & Soylu, 2006) sürecin sağlıklı ilerlemesine engel teşkil ettiğinden; problemin anlaşılmasına önem verilmiştir. Problemin anlaşılması ve öğrenme sorumluluğunun kurulan oyun senaryosu ile öğrencilere aktarılmasının ardından eylem evresinde öğrenciler grup arkadaşlarıyla çalışma yaparak çözüm için çeşitli stratejiler geliştirmiş ve uygulamışlardır. Grup çalışmasında öğrenciler önce bireysel çalışarak çözüm yöntemi geliştirmiş; daha sonra grup arkadaşları ile iletişim kurmuşlardır. Öğrencilerin sahip oldukları ön bilgilere dayalı olarak oluşturulan yeni matematiksel yapılar, geliştirilen çözüm önerileri ve bu önerilerin kanıtlanma süreci içerisinde ortaya çıkmıştır. Bu çalışmalar doğrultusunda; grup içerisinde milieu ile etkileşimler sonucu geliştirilen çözüm önerileri ifade etme evresinde sınıf ortamında sunulmuştur. Bu aşamada bir grup problemi denklem kurarak çözmüş; diğer gruplar ise değerler vererek buldukları sonucu çözüm için genelleme yapmaya çalışmıştır. Ancak Grup 3’te yer alan öğrencilerin problemi çözerken deneme-yanılma gibi sınırlı sayıda strateji kullanmaları (Akkan et al. 2012; Gick, 1986; Radford, 2008) onları sezgisel olarak hatalı sonuca ulaştırmıştır. Ortaya atılan çözüm önerilerinin doğru ya da yanlışlığı öğrenciler tarafından onaylama evresinde test edilmiştir. Bu aşamada problemin çözümü için oluşturulan modellere itirazı olanlar gerekçelerini kanıtlayarak çözümü sunan arkadaşlarını ikna etmiştir. Hatalı çözüm sunan grup, ortamdaki dönütlerle bilgisini düzeltmiş ya da değiştirmiştir. Bu süreç grup çalışmaları sırasında da yaşanmıştır. Onaylama evresinde doğruluğu kanıtlanan modeller, sınıfın bilgisi haline gelmiş ve öğrencilerin informal dille ifade ettikleri bu bilgiler kurumsallaştırma evresinde öğretmen tarafından formal bir yapıya dönüştürülmüştür. Öğretmen fonksiyon tanımını, tanım ve değer kümesi kavramlarını çözülen problemde elde edilen sonuçlar ile ilişkilendirerek açıklamıştır. Adidaktik ortamın evrelerinin iç içe bir süreç içinde var olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Bu kapsamda özellikle eylem, ifade etme ve doğrulama evrelerinin (Arslan et al. 2011) zaman zaman sınırları kesin çizgilerle ayrılamamıştır. Ancak sunulan problem durumu ve oyun çerçevesinde adidaktik öğrenme ortamı evreleri sınıf etkileşimine katkıda bulunmuştur.

Öğretim sürecinin değerlendirilmesine ilişkin kontrol listesinde yer alan göstergelere yönelik öğrencilerin bu göstergelerdeki davranışları sergileme düzeylerinin tüm sınıf için ortalama problem çözme süreci için % 70.90, fonksiyon bilgisini oluşturma için % 77.77, milieu ile etkileşim için % 80.00 olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Fonksiyon bilgisinin % 77.77 oranında öğrenciler tarafından kazanılmasında adidaktik ortamın evrelerinin etkili olduğu düşünülmektedir.

Grup bazında değerlendirilen bu performanslara ilişkin milieu ile etkileşimin yüksek olduğu grupların problem çözme sürecini başarıyla tamamlayarak fonksiyon bilgisine ulaştıkları, çalışmalarını işbirliği içerisinde yapmayan grupların ise problem çözme sürecinde çözümün doğruluğunu ve geçerliğini kontrol etme aşamasında sorunlar yaşayarak fonksiyon bilgisini oluşturmamış oldukları gözlenmiştir. Milieu ile etkileşime girerek tüm aşamalarda aktif katılım gösteren grupların, oluşturdukları değer tabloları ve kurdukları denklemler ile problemde var olan cebirsel işlemleri ve değişkenler arasındaki ilişkileri tanıyarak iki bilinmeyenli denklemleri kurarak kullandıkları görülmüştür. Bu sonuç bu öğrencilerin iki bilinmeyenli denklem bilgisini tanıyarak kullandıklarını göstermiştir. Ayrıca çoğu öğrenci kurulan denklemlerle ilgili girdi ve çıktı kümelerini tanımlayarak uygulama sonunda fonksiyon bilgisini oluşturmuştur. Öğretmenin açıklamalarından sonra sınıfın bilgisi haline gelen fonksiyon bilgisine ilişkin farklı uygulamalar yaparak verilen fonksiyonların tanım ve değer kümelerini bulabilen ve farklı fonksiyon örnekleri verebilen öğrencilerin oluşturdukları bilgiyi kullanmada başarılı oldukları belirlenmiştir.

Sonuç olarak oluşturulan adidaktik öğrenme ortamında milieu ile etkileşimlerin yüksek olduğu durumlarda evrelerin kolay bir şekilde tamamlanarak hedef bilginin oluşturulduğu söylenebilir. Elde

edilen sonuçlar doğrultusunda DDT'nin ortaya koyduğu çerçeve sayesinde her durumda zenginleşip değişen bir ortam sunularak (Brousseau, 2002) öğretim süreci sonunda öğrenciler fonksiyon bilgisini keşfetmiş, ifade edip doğrulamışlardır. Ayrıca öğrenciler yaptıkları yarı deneyselci matematik felsefesine uygun denemelerle (Baki et al., 2010) savlarını matematiksel olarak kanıtlamaya başlamışlardır. Bu sonuç teoriye ilişkin araştırma sonuçlarıyla paralellik göstermiştir (Bloch, 2003; Sadovsky & Sessa, 2005). Bu bağlamda çalışma, matematik felsefesi ile okul matematiğinin ilişkilendirildiği ve öğretim programının yaklaşımına dayalı (Baki et al., 2010) öğrenme ortamlarını tasarlamada örnek teşkil etmektedir. Ayrıca yapılan bu uygulama, teorinin odak noktası olan öğrenen-öğreten ilişkilerini (Bartlett, 2005; Brousseau, 2002), ortamdaki etkileşimlerin karmaşık yapısını ve bilgiyi oluşturma süreçlerini tanıtmaya imkân sağlamıştır. Bu yönüyle DDT'nin, öğretim sürecini ayrıntılı biçimde yapılandıran ancak sonuç değerlendirmesi yapılan (Daniel & King, 1998) pek çok öğrenci merkezli öğretim yaklaşımına göre daha işlevsel bir yapıda olduğu düşünülmektedir. Bu olumlu yönlere karşın teori sadece bir problem durumu çerçevesinde bir kavramın modellemesini içermektedir. Ancak öğretim programı temel kavramlarla sınırlı değildir (MEB, 2013). Bu düşünceden hareketle DDT'nin matematik öğretim programı kapsamında çeşitli sınıf düzeylerinde farklı gruplarla uygulama yapılmasının hem öğrenci hem öğretmenin davranışlarına ışık tutabileceği düşünülmektedir. Öğrencilerin fonksiyon bilgisine ulaşmak için eski denklem ve değişken bilgisini yeniden düzenleyerek kurduğu bağlantı ve ilişkilerle yeni bir düşünme sürecini içeren fonksiyon bilgisi içerisinde birleştirme imkânı bulduğu bu süreçte, yeni matematiksel yapıların oluştuğu da tespit edilmiştir. Bu kapsamda matematik kavram bilgisini oluşturma süreçlerini inceleyen ve bireylerin bilgiyi öğrenme süreçlerinin analizine imkân vermek amacıyla geliştirilen modeller (Memnun & Altun, 2012; Özdemir, 2014; Yeşildere & Türnüklü, 2008) ile DDT'nin adidaktik sürecinin gelecekteki çalışmalarda birleştirmesi önemli görülmektedir. Böylece "Matematik sınıflarında neler oluyor?" sorusuna bütüncül bir cevap verilebileceği öngörülmektedir.

### References

- Akkan, Y., Baki, A. & Çakıroğlu, Ü. (2012). 5-8. sınıf öğrencilerinin aritmetikten cebire geçiş süreçlerinin problem çözme bağlamında incelenmesi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 43(43), 1-13.
- Akyüz, G. (2006). Türkiye ve Avrupa Birliği ülkelerinde öğretmen ve sınıf niteliklerinin matematik başarısına etkisinin incelenmesi. *İlköğretim Online*, 5(2), 75-86.
- Alcı, B. & Altun, S. (2007). Lise öğrencilerinin matematik dersine yönelik öz-düzenleme ve bilişüstü becerileri, cinsiyete, sınıfa ve alanlara göre farklılaşmakta mıdır?. *Çukurova Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 16 (1), 33-44.
- Altun, M. & Arslan, Ç. (2006). İlköğretim öğrencilerinin problem çözme stratejilerini öğrenmeleri üzerine bir çalışma. *Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 19(1), 1-21.
- Altun, M. (2016). *Ortaokullarda (5, 6, 7 ve 8. sınıflarda) matematik öğretimi*. Bursa: Aktüel Alfa Akademi Yayınları.
- Altundağ, R. (2010). *Adidaktik öğrenme ortamlarının öğrenci başarısı üzerine etkisi ve ortama yönelik öğrenci görüşleri*. Unpublished Master's Thesis, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Arsal, Z. (2009). Öz-düzenleme öğretiminin ilköğretim öğrencilerinin matematik başarısına ve tutumuna etkisi. *Eğitim ve Bilim*, 24(152), 3-14.
- Arslan, S., Baran, D. & Okumuş, S. (2011). Brousseau'nun matematiksel öğrenme ortamları kuramı ve adidaktik ortamın bir uygulaması. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi (EFMED)*, 5(1), 204-224.
- Arslan, S., Taşkın, D. & Kirman Bilgin, A. (2015). Adidaktik öğrenme ortamlarında bireysel ve grup çalışması uygulamalarının öğrenci başarısına etkisi. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, 6(1), 47-67.
- Artigue, M. (2009). Didactical design in mathematics education. In Carl, Winsløw (Ed.), *Proceedings of Nordic Research in Mathematics Education (NORMA8)* (pp. 7-16). Rotterdam: Sense Publishers.
- Baki, A., Bütün, M. & Karakuş, F. (2010). Lakatos' un matematiksel bilginin gelişim modelinin okul matematiğine uyarlanması. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, 1(3), 285-308.
- Bartlet, L. (2005). Dialogue, knowledge, and teacher-student relations: Freirean pedagogy in theory and practice. *Comparative and International Education Society*, 49(3), 343-364.
- Bloch, I. (2003). Teaching functions in a graphic milieu: what forms of knowledge enable students to conjecture and prove?. *Educational Studies in Mathematics*, 52(1), 3-28.
- Brousseau, G. (2002). *Theory of didactical situations in mathematics*. In N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland & V. Warfield (Eds). (pp.15-45). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic.
- Büyüköztürk, Ş., Kılıç Çakmak, E., Akgün, Ö. E., Karadeniz, Ş. & Demirel, F. (2008). *Bilimsel araştırma yöntemleri*. Ankara: Pegem Akademi.
- Çelik, D., Güler, M., Bülbül, B. Ö. & Özmen, Z. M. (2015). Matematiksel düşünme sürecini belirlemeye yönelik tasarlanmış bir öğrenme ortamından yansımalar. *International Journal of Educational Studies in Mathematics*, 2(1), 11-23.
- Çiltaş, A. (2011). Eğitimde öz-düzenleme öğretiminin önemi üzerine bir çalışma. *Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 3(5), 1-11.
- Daniel, L. G. & King, D. (1998). A knowledge and use of testing and measurement literacy of elementary and secondary teachers. *Journal of Educational Research*, 91(6), 331-344.
- Dikici, R. & İşleyen, T. (2004). Bağıntı ve fonksiyon konusundaki öğrenme güçlüklerinin bazı değişkenler açısından incelenmesi. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 11( 2), 105-116.



- Dikkartin Övez, F. T. (2012). *Matematik öğretim programlarının değerlendirilmesi (cebir öğrenme alanı)*. Unpublished doctorate dissertation, Balıkesir University, Turkey.
- Erdoğan, A. & Özdemir Erdoğan, E. (2013). Didaktik durumlar teorisi ışığında ilköğretim öğrencilerine matematiksel süreçlerin yaşatılması. *Ahi Evran Üniversitesi Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi*, 14(1), 17-34.
- Erdoğan, A., Gök, M. & Bozkır, M. (2014). Orantı kavramının adidaktik bir ortamda öğretimi. *Gazi Üniversitesi Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 34(3), 535-562.
- Erümit, A. K., Arslan, S. & Erümit, S. F. (2012). Bir matematik probleminin adidaktik ortamdaki çözüm süreci. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi*, 1(4), 75-81.
- Ford, M. I. (1994). Teachers' beliefs about mathematical problem solving in the elementary school. *School Science and Mathematics*, 94(6), 314-322.
- Gick, M. L. (1986). Problem-solving strategies. *Educational Psychologist*, 21(1-2), 99-120.
- González-Martín, A. S., Bloch, I., Durand-Guerrier, V. & Maschietto, M. (2014). Didactic situations and didactical engineering in university mathematics: cases from the study of calculus and proof. *Research in Mathematics Education*, 16(2), 117-134.
- Gömlüksiz, M. N. (2005). An evaluation of the effectiveness of new Turkish primary school curriculum in practice. *Educational Sciences: Theory & Practice* 5(2), 371-384.
- Haşlamam, T. & Aşkar, P. (2007). Programlama dersi ile ilgili öz-düzenleyici öğrenme stratejileri ve başarı arasındaki ilişkinin incelenmesi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 32(32), 110-122.
- Hersant, M. & Perrin-Glorian, M. (2005). Characterization of an ordinary teaching practice with the help of the theory of didactic situations. *Educational Studies in Mathematics*, 59, 113-151.
- Karataş, İ. & Güven, B. (2004). 8. sınıf öğrencilerinin problem çözme becerilerinin belirlenmesi: bir özel durum çalışması. *Milli Eğitim Dergisi*, (163), 1-10.
- Laborde, C. & Perrin-Glorian, M. J. (2005). Introduction teaching situations as object of research: empirical studies within theoretical perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, 59(1-3), 1-12.
- Lejik, M. & Wyvill, M. (2001). Peer assessment of contributions to a group project: A comparison of holistic and category-based approaches. *Assessment and Evaluation in Higher Education*, 26(6), 61-72.
- Leung, M. & Chan, K. (1998). *Gender and elective differences in the motivated strategies for learning of pre-service teacher education in Hong Kong*. Retrieved September 04, 2017, from <https://www.aare.edu.au/data/publications/1998/leu98366.pdf>
- Mackrell, K., Maschietto, M. & Soury-Lavergne, S. (2013). *Theory of didactical situations and instrumental genesis in a cabri elem book*. Retrieved October 03, 2017, from [http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG15/WG15\\_Mackrell.pdf](http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG15/WG15_Mackrell.pdf)
- Malpass, J. R., O'Neil, H. F. & Hocevar, D. (1999). Self-regulation, goal orientation, self-efficacy, worry and high-stakes math achievement for mathematically gifted high school students. *Roeper Review*, 21(4), 281-290.
- Manno, G. (2006). *Embodiment and a didactical situation in the teaching-learning of the perpendicular straight lines concept*. Unpublished doctorate dissertation, Comenius University, Slovakia.
- Måsøval, S. H. (2009). Complexity of operating beyond naïve empiricism when proving a conjectured formula for the general term of a geometrical pattern. In Carl, Winsløw (Ed.), *Proceedings of Nordic Research in Mathematics Education (NORMA08)* (pp. 25-34). Rotterdam: Sense Publishers.
- Memnun, D. S. & Altun, M. (2012). RBC+C modeline göre doğrunun denklemi kavramının soyutlanması üzerine bir çalışma: özel bir durum çalışması. *Cumhuriyet International Journal of Education*, 1(1), 17-37.

- Ministry of National Education (MoNE) (2013). *Secondary Mathematics Course (9th, 10th, 11th and 12th Grades) Curriculum*. Ankara: Education and Training Board. Retrieved February 02, 2017, from <http://ttkb.meb.gov.tr/www/ogretim-programlari/icerik/72>
- Narlı, S. & Başer, N. E. (2008). Küme, bağıntı, fonksiyon konularında bir başarı testi geliştirme ve bu test ile üniversite matematik bölümü 1. sınıf öğrencilerinin bu konulardaki hazırbulunuşluklarını betimleme üzerine nicel bir araştırma. *Buca Eğitim Fakültesi Dergisi*, (24), 147-158.
- Olkun, S. & Toluk Uçar, Z. (2006). *İlköğretimde matematik öğretimine çağdaş yaklaşımlar*. Ankara: Ekinoks Eğitim Danışmanlık.
- Özdemir, E. (2014). *Matematik eğitiminde modelleme üzerine öğrenme-öğretme uygulamaları*. Unpublished doctorate dissertation, Balıkesir University, Turkey.
- Polya, G. (1981). *Mathematical discovery: on understanding, learning, and teaching problem solving*. Canada: Wiley.
- Putra, Z. H. (2016). *Didactic contracts in realistic mathematics education teaching practice in Indonesia: a lesson on addition*. Retrieved November 23, 2017, from [http://static-curis.ku.dk/portal/files/167194196/013\\_ZETRA.pdf](http://static-curis.ku.dk/portal/files/167194196/013_ZETRA.pdf)
- Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM: International Journal in Mathematics Education*, 40(1), 83–96.
- Sadovsky, P. & Sessa, C. (2005). The didactic interaction with the procedures of peers in the transition from arithmetic to algebra: a milieu for the emergence of new questions. *Educational Studies in Mathematics*, 59(3), 85-112.
- Samaniego, A. H. F. & Barrera, S. V. (1999) *Brousseau in action: didactical situation for learning how to graph functions*. Retrieved February 03, 2017, from <http://www.eric.ed.gov/PDFS/ED451036.pdf>
- Sarrazy, B. (2002). Effects of variability of teaching on responsiveness to the didactic contract in arithmetic problem-solving among pupils of 9–10 years. *European Journal of Psychology of Education*, 17(4), 321-341.
- Schoenfeld, A.H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, FL: Academic Press.
- Semerádová, S. (2015). *Didactical situations in building children's ideas about mathematical concepts in preschool education*. Retrieved February 03, 2017, from <http://wydawnictwa.ptm.org.pl/index.php/didactica-mathematicae/article/download/843/850>
- Sensevy, G., Schubauer-Leoni, M. L., Mercier, A., Ligozat, F. & Perrot, G. (2005). An attempt to model the teacher's action in the mathematics class. *Educational Studies in Mathematics*, 59(3), 153-181.
- Skemp, R. R. (1993). *Theoretical foundations of problem solving: a position paper*. Retrieved February 03, 2017, from <http://www.davidtall.com/skemp/sail/theops.html>
- Sollervall, H., & de La Iglesia, D. G. (2015). *Designing a didactical situation with mobile and web technologies*. Paper presented at CERME 9-Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Prague, Czech Republic. Retrieved from <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01289292>
- Soylu, Y. & Soylu, C. (2006). Matematik derslerinde başarıya giden yolda problem çözümlerinin rolü. *İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 7(11), 97-111.
- Spagnolo, F. & Di Paola, B. (2009). *A didactical situation in multicultural primary school*. Paper presented at 90th AERA Annual Meeting, The Impact of Taoism and Confucianism on Mathematics Teaching and Learning, San Diego, California. Retrieved from <http://hdl.handle.net/10447/40039>
- Tatar, E. & Dikici, R. (2008). Matematik eğitiminde öğrenme güçlükleri. *Mustafa Kemal Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 5(9), 183- 193.
- Ural, A. (2006). Fonksiyon öğreniminde kavramsal zorluklar. *Ege Eğitim Dergisi*, 7(2), 75-94.

- Üredi, I. & Üredi, L. (2007). Öğrencilerin öz-düzenleme becerilerini geliştiren öğrenme ortamlarının oluşturulması. *Edu7*, 2(2), 1-29.
- Vankúš, P. (2005). Efficacy of teaching mathematics with method of didactical games in a–didactic situation. *Quaderni di Ricerca in Didattica*, (15), 90-105.
- Yavuz, İ. & Kepceoğlu, İ. (2016). Matematik öğretmenlerinin sınıf içi faaliyetlerinin didaktiksel durum teorisi kapsamında incelenmesi. *Uluslararası Sosyal ve Eğitim Bilimleri Dergisi*, 3(5), 13-27.
- Yeşildere, S. & Türnüklü, E. B. (2008). İlköğretim sekizinci sınıf öğrencilerinin bilgi oluşturma süreçlerinin matematiksel güçlerine göre incelenmesi. *Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 21(2), 485-510.
- Yıldırım, A. & Şimşek H. (2013) *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. Ankara: Seçkin Yayıncılık.
- Zimmerman, B. J. (2002). Becoming a self-regulated learner: An overview. *Theory into Practice*, 41(2), 64-70.
- Zuljan, M. V., Peklaj, C., Pečjak, S., Puklek, M. & Kalin, J. (2012). Didactic competencies of teachers from the learner's viewpoint. *Educational Studies*, 38(1), 51-62.