Ortaöğretim 11. Sınıf Öğrencilerinin Türev Konusundaki Hata Örnekleri

Hülya GÜR, Başak BARAK***

Özet

Çalışmanın amacı öğrencilerin türev konusunda yaptıkları hataları incelemek, sahip olabilecekleri hataları ve kavram yanılgılarını tespit etmektir. Kavram yanılgılarının belirlenmesi, öğretmenlerin türev konusunu anlatırken dikkat etmeleri gereken faktörlerin neler olduğunun, öğrencilerin neleri yanlış anlayabileceğinin ve neleri öğrenmede güçlük çekeceklerinin bilinmesinde öğretmenlere çok faydalı olacaktır. Çalışmada, ÖSS'de sorulmuş türevle ilgili sorular seçilmiş ve bu soruların açık uçlu olarak çözülmesi istenmiştir. Böylece öğrencilerin soruları nasıl cevapladıkları ve yorumladıkları araştırılmıştır. Hazırlanan test, 2005-2006 öğretim yılında, Balıkesir'de bir Anadolu lisesinin 11. sınıflarından yansız atama yoluyla seçilen 3 şubeden toplam 53 öğrenciye uygulanmıştır. Çalışma sonunda, öğrencilerin türevin limite dayanan tanımını anlayamadıkları, bileşke fonksiyonun ve trigonometrik fonksiyonların türevlerini hesaplarken hatalar yaptıkları, teğetin eğimi ile normalin eğimi arasında yanlış ilişki kurdukları sonuçlarına varılmıştır. Çalışma sonucunda elde edilen bu bulgulardan yararlanarak gözlenen hata ve kavram yanılgılarının giderilmesi için çalışma yaprağı örnekleri ve çeşitli öneriler sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler

Hata ve Yanlış Anlamalar, Kavram Yanılgısı, Türev Konusundaki Hata ve Yanlış Anlamalar.

* Yrd. Doç. Dr., Balıkesir Üniversitesi Necatibey Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Öğretim Üyesi.
** Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri / Educational Sciences: Theory & Practice
7 (1) • Ocak / January 2007 • 453-480

Yrd. Doç. Dr. Hülya GÜR
Balıkesir Üniversitesi Necatibey Eğitim Fakültesi
OFMA Matematik Eğitimi ABD 10100 Balıkesir.
Elektronik posta: hgur@balikesir.edu.tr

Yayın ve Diğer Çalışmalarından Seçmeler

Korkmaz, E. & **Gür, H**. (2006). Öğretmen adaylarının problem kurma becerilerinin belirlenmesi. *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitü Dergisi, 8* (1), 64-74.

Seyhan, G. ve **Gür, H**. (2006). İlköğretim 7. sınıf matematik öğretiminde aktif öğrenmenin öğrenci başarısına etkisi. *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitü Dergisi, 8* (1), 17-27.

Gür, H. & Bütüner, S. Ö. (2006) Matematik derslerinde kullanılan Zihin Haritalama Tekniğine yönelik bir tutum ölçeğinin geliştirilmesi. *İlköğretim Online* [Elektronik Versiyon], *5* (2).

Gür, H. (2006). Ulusal programa etki eden kontrol mekanizmaları. *Türk Fen Eğitimi Dergisi* [Elektronik Versiyon], *3* (2), 92-102.

Gür, H. (2006). *Problem solving.* (IETC 2005) Paper presented at the V. International Educational Technologies Conference, Sakarya.

Gür, H. (2006, June-July). *Learning to teach: stage theory and pedagogical content knowledge*. Paper presented at the 3rd International Conference on the Teaching of Mathematics at the Undergraduate Level ICME 3, İstanbul.

Başak BARAK
Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Balıkesir
Elektronik posta: barakbasak@gmail.com

Yayın ve Diğer Çalışmalarından Seçmeler

Barak, B. (2006, Nisan). *Ortaöğretim 11. sınıf öğrencilerinin türev konusundaki hatalarının ve kavram yanılgılarının tespiti*. Eğitimde Çağdaş Yönelimler III "Yapılandırmacılık ve Eğitime Yansımaları" Sempozyumu, Özel Tevfik Fikret Okulları, İzmir.

Barak, B., Gür, H. (2006, Eylül). *Etkinlik temelli matematik öğretiminin ortaöğretim 11. sınıf öğrencilerinin türev konusundaki başarılarına etkisi*. 7. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi, Gazi Üniversitesi, Ankara.

Ortaöğretim 11. Sınıf Öğrencilerinin Türev Konusundaki Hata Örnekleri

Hülya GÜR, Başak BARAK

Türev, özellikle matematik, mühendislik, fizik, ekonomi, kimya ve istatistikte karşılaşılan, bir değişkene çok küçük bir artış verilmesi durumunda, fonksiyonda meydana gelecek değişikliğin, değişkendeki bu artışa oranının limit durumudur. Bu matematikte teğetin eğimi, fizikte hız ve ivme, kimyada reaksiyon hızı, ekonomide marjinal gelir ve marjinal fiyat kavramları, kısacası iki değişkenin birbirine göre durumlarını karşılaştırmamız gereken tüm durumları açıklamamızı sağlar (Balcı, 2003). Türev pek çok bilim dalında çok büyük bir öneme sahip olmasına rağmen maalesef ülkemizde son 7 yıldır uygulanmakta olan ÖSS sisteminin yapısı gereği, sadece ders kitaplarının içinde bir konu olarak yer almanın ötesine geçememiştir. Gerek öğrencilerin sınav kaygısıyla konuya olan ilgisizlikleri gerekse öğretmenlerin de sisteme ayak uydurarak sınav kapsamında yer almayan konuları bir külfet olarak görmelerinin sonucu sınavda yer almayan diğer tüm konular gibi müfredatta görünmesine rağmen işlenmeyen ya da üzerinde ayrıntılı durulmayan matematik konularından biri hâline gelmiştir. Her ne kadar yapılan son değişiklikle türev konusu ÖSS'ye dâhil edilse de geçmiş yıllarda pek de anlatılmayan bir konu olması ve buna bağlı olarak öğretmenlerin bu konudaki mevcut bilgilerinin körelmesi ya da konu hakkında yeterli bilgiye sahip olmamaları nedeniyle konunun öğrencilere doğru bir şekilde anlatılamaması ya da yanlış anlamalarla hatalara ve kavram yanılgılarına yol açmıştır. Kavram, insan zihninin somut ya da soyut bir düşünce nesnesinden oluşturduğu ve söz konusu nesneden edindiği çeşitli algıları o nesneye bağlamasına ve o nesneyle ilgili bilgileri düzene sokmasına olanak veren genel ve soyut fikirdir (Benk, 1986). Bir başka tanıma göre ise kavram, benzer nesneleri, insanları, olayları, fikirleri, süreçleri gruplamada kullanılan bir kategoridir (Senemoğlu, 2004). Öğrencilerin bilimsel tanımlamalardan uzak ve farklı anlamlar yükleyerek bilimsel kavramları açıklamaları araştırmacıları *kavramları bu şekilde öğrenmelerinin nedeni nedir?* sorusuna cevap bulmak üzere yeni incelemelere itmiştir. Zaman içinde çok farklı şekillerde isimlendirilen bu bilimsel olmayan kavrayışlar en yaygın hâliyle kavram yanılgısı olarak literatürde yerini almaktadır (Driver, & Easley, 1978). Driver ve Easley (1978)'in belirttikleri gibi dış çevreden gelen bilgilerin öğrenenin yapılanmış bilişi ile etkileşimi olarak bilinen günlük yaşantılar, öğrenme sayılabilir. Bu etkileşim alternatif şemaların oluşumuna neden olabilmektedir; şemalar yaşantı sonucunda edinilenlerin bilim otoritelerinin kabul ettiğinden farklı olarak yorumlandığı durumlarda ortaya çıkmaktadır (Driver, & Easley, 1978). Diğer yandan planlı öğretim sürecindeki yaşantılar da kavram yanılgılarının oluşmasına neden olabilmektedir. Öğrenme sürecinde öğrenenin sahip olduğu ön bilgiler ile tutumların yeni sunulan bilgiyi etkilemesi ve değiştirebilmesinin bu durumun nedenlerinden olduğu ifade edilmektedir (Osborne, & Cosgrove, 1983). Osborne ve Freyberg (1985) daha iyi bir öğrenme sağlayabilmenin ilk aşamasının öğretim sürecinde öğrencilerin sahip oldukları alternatif görüşlere ve kavram yanılgılarına yer vermek olduğunu vurgulamışlardır. Kavram yanılgısı ise öğrencilerin anlamada güçlük çektikleri kavramları kendi anlayışlarına göre uygun bir şekilde yorumlamaları ve bilimsel kavramlara bakış açılarının bilim adamları tarafından kabul edilmiş olandan farklı olmasıdır (Mayer, 1987). Gür ve Seyhan (2004) ise çalışmalarında hata ile yapılan yanlışlıkları, kavram yanılgısı ile de öğrenmeye engel oluşturan kavramsal engelleri tanımlamaktadırlar.

Matematiğin ardışık ve yığmalı bir bilim olmasından dolayı matematik dersi diğer derslere göre daha sıkı bir aşamalılık ilişkisine sahiptir. Verilecek olan herhangi bir kavram onun önkoşulu olan kavramlar kazandırılmadan verilmemelidir (Altun, 2002). Bu nedenle öğrenmenin daha sağlam gerçekleşmesi için oluşabilecek kavram yanılgılarının önceden tespiti, buna uygun olarak kavramların verilmesi ve yanlış anlamanın oluşmaması için öğrencilerin sürekli kontrol altında bulundurulması gereklidir (Akkuş, 2000).

Son yıllarda matematik eğitiminde kavram yanılgılarının önüne geçilmesi için pek çok araştırma yapılmaktadır. Özellikle kesirler, ondalık sayı, değişken kavramı, eşitsizlik çözümleri, kümeler, fonksiyonlar, olasılık ve üniversite öğrencilerine yönelik soyut matematik konularında yapılan kavram yanılgıları çok fazla incelenmiştir. Bu çalışmalardan örnekler verecek olursak Gür (2004) 7. ve 8. sınıf öğrencilerinin ondalık sayılar konusunda bir takım kavram yanılgılarına sahip olduklarından bahsederken Sulak ve Ardahan (1999) sayıların öğretiminde bazı yanılgıların olduğunu bulmuş ve alınması gereken tedbirlerden bahsetmiştir. Moralı, Köroğlu ve Çelik (2004) de üniversite 1. sınıf öğrencilerinin soyut matematik dersine yönelik kavram yanılgılarına sahip olduklarını belirtmişlerdir. Fakat tüm bu çalışmalara karşın türev konusuyla ilgili çok az çalışma mevcuttur. Çalışmalar genellikle üniversite 1. sınıf öğrencilerinin analiz dersindeki kavram yanılgıları üzerine yoğunlaşmaktadır. Bu çalışmalardan bazıları Dubinsky & Schwingendorf, (1991), Maurer (1987), Norman & Pritchard (1994), Krutetski (1980), Orton (1983), Donaldson (1963), Cipra (1989), Hirst, (2002), Ubuz (2002)'dur. Ortaöğretim matematik müfredatının bir ünitesi olan türev konusu, ortaöğretim 11. sınıfın ilk döneminin son konusu olup ikinci dönemin ortalarına kadar devam etmektedir. Daha sonra öğrenciler genellikle seçtikleri bölümlere göre (matematik, fizik, kimya gibi temel bilimler, mühendislik, işletme, ekonomi, iktisat vb.) üniversite 1. ve 2. sınıflarda "Analiz", "Genel Matematik", "Yüksek Matematik" derslerinde türev konusunu işlemektedirler. Matematik öğretimi öğrenme ve öğrencilerin konuyu anlamaları ve önceki bilgileri ile doğrudan ilişkilidir (Kendal, 2001). Kendal (2001) çalışmasında çoklu gösterimler kullanmanın türevin daha iyi anlaşılması konusunda etkili olduğunu vurgulamıştır.

Ubuz (2001) mühendislik fakültesi 1. sınıf öğrencilerinin matematik dersinde yaptıkları hatalara yönelik yaptığı araştırmada kavram yanılgılarını, özellikle türev konusunda olanları 4 başlık altında toplamıştır. Bunlar: *(i)*Bir noktadaki türev, fonksiyonun türevini verir, *(ii)* Tanjantın denklemi türev fonksiyonudur, *(iii)* Bir noktadaki türev tanjant denklemidir ve *(iv)* Bir noktadaki türev, o noktadaki tanjant denkleminin değeridir. Aynı zamanda Ubuz öğrencilerin farklı kavramlar konusunda da kavram yanılgılarına düştüklerini bulmuştur. Bunlar: 1)Aynı bağlamda meydana gelen kavramları birbirinden ayırmamak ya da bir kavramı diğer bir kavramın aynı durumdaki farklı bir özeliği ile karıştırmak, 2)Özel bir durumun genel bir duruma uygunsuz genelleştirilmesi 3) Grafiksel gösterimin anlaşılmaması. (Ubuz, 2001)

Hirst (2002) ise öğrenci yanlışlarını, öğrencilere neden öyle yaptıklarını açıklattırarak anlamaya çalışmıştır. Sonunda öğrencilerin kavramları yanlış oluşturduklarını ve kavram yanılgılarına sahip olduklarını ifade etmiştir. Melis (2004) bileşke fonksiyonların türevinde yapılan hata türlerini sekiz başlıkta sınıflamıştır: Türev kavramını yorumlamada yapılan kavram yanılgıları, bileşke fonksiyonda kavram yanılgıları, bileşke fonksiyon hakkında varsayım hataları, türev konusundaki kuralları yanlış uygulama, değişkenlerle ilgili kavram yanılgısı, temel bilgileri unutma, hesaplamalarda hata yapma ve aritmetiksel ya da cebirsel hatalar.

Diğer yandan Doğan, Sulak ve Cihangir (2002) ilköğretim matematik öğretmen adaylarının özel fonksiyonlar ile fonksiyonlarda limit, türev ve türev uygulamaları konularındaki yeterliliklerini araştırmışlardır. Araştırma sonucunda öğrencilerin türev ve türev uygulamaları konusunda % 6 oranında doğru cevap verdikleri, kalan soruları ise genellikle boş bıraktıkları gözlenmiştir. Öğrencilerin lisede öğrenmeleri gereken konuları tam olarak öğrenemeden geldiklerinden üniversite programlarının aksadığı belirtilmiştir.

Bu çalışmanın amacı, 11. sınıf öğrencilerinin türev konusunda yaptıkları hataları ve kavram yanılgılarını tespit edip bunları analiz etmek ve hataları gidermek için çalışma yaprağı, kavram haritası materyallerini sunmaktır.

Bu çalışmada ortaöğretim 11. sınıf öğrencilerinin türev konusunda seçilmiş bazı kavramlarla ilgili hataları ve kavram yanılgıları incelenmiştir. “İncelenen konu matematiğin temel konularından biridir. Öğrencilerin sahip olduğu kavramsal temel sonradan edinilen bilgileri etkileyebildiğine göre mevcut duruma bakılarak geriye dönük değerlendirmeler de yapılabilir. Bu konudaki hata ve kavram yanılgılarının belirlenmesi öğrencilerin matematikte daha başarılı olmalarını sağlayabilir.

Yöntem

Çalışma Grubu

Bu çalışmanın evrenini Balıkesir’deki 11. sınıf öğrencileri, örneklemini ise bu evrenden seçilen Balıkesir Fatma Emin Kutvar Anadolu Lisesi 11. sınıf öğrencileri oluşturmaktadır. Çalışmaya 11. sınıflardan 40'ı Fen ve 13'ü TM (Türkçe-Matematik) olmak üzere toplam 53 öğrenci katılmıştır.

Verilerin Toplanması ve İşlemler

Kavram yanılgılarının, hataların belirlenmesinde ve muhtemel kaynakların araştırılmasında en yaygın olarak kullanılan yöntemlerden birisi görüşme olmasına rağmen yöntem uzmanlık gerektirmekte, çok zaman almakta (Fensham, Garrard, & West, 1981) ve bundan dolayı da örneklemi sınırlandırmaktadır. Çoktan seçmeli soruları içeren testlerin yanında (Treagust, 1986) açık uçlu sorular da gerek tek gerekse çoktan seçmeli soruların bir parçası olarak (Boujaoude, 1992) öğrencilerin kavram yanılgılarının belirlenmesinde kullanılmaktadır. İyi yapılandırılmış açık uçlu sorular, öğrencilere verdikleri cevabın nedenlerini de kendi sözcükleri ile ifade etme imkânı vermekte ve üst düzey düşünme becerilerini yansıtmaktadır (Gronlund, & Linn, 1990). Çalışmada kullanılan aracın içerdiği sorular açık uçlu yazılı formattadır. Soruları içeren kavramların seçiminde; ÖSS sınavında çıkan türev konusu ile ilgili sorulardan, literatürden ve matematik öğretmenleri ile yapılan ön görüşmelerden elde edilen sorular dikkate alınmıştır. Çalışma için 11. sınıf öğrencilerinin türev konusuna ilişkin kavram yanılgılarını incelemek amacıyla 1981 ile 1993 yılları arasında çıkmış, geçerliliği ve güvenilirliği test edilmiş türevle ilgili ÖSS soruları derlenerek açık uçlu 15 soruluk bir test hazırlanmış, bu test 4 uzmanın görüşüne sunulmuş pilot çalışma ile test edilmiş ve elde edilen sonuçlara göre bilgiler yeniden düzenlenip uygulanmıştır. Testteki sorular, türevle ilgili temel kavramların çoğunu içerecek şekilde müfredatı içeren sorulardan seçilmiştir. Çalışmada, seçerek oluşturulan 15 sorudan 7 soruya verilen cevaplarda kavram yanılgılarına ve hatalara rastlandığından bu 7 soru çalışma için uygun görülüp incelenmiştir. Kodlamanın güvenilirliğini test etmek üzere beş kodlayıcı ile gerçekleştirilen çalışmada uyum oranı % 92 olarak bulunmuştur. Öğrencilerden alınan yanıtlar doğru, kısmen doğru, yanlış ve boş olarak kodlanmıştır. Kısmen doğru ve yanlış kategorilerindeki yanıtlar detaylı olarak incelenerek öğrencilerin hataları belirlenmeye ve literatürle karşılaştırılmaya çalışılmıştır. Öğrenci yanıtlarının frekansları, yüzdeleri, yanıtlardaki hatalar ve bu hataların betimlemeleri tablolarda verilmiştir.

Hazırlanan test, 2005-2006 öğretim yılında Balıkesir Fatma Emin Kutvar Anadolu Lisesi'ndeki 11. sınıflarından, FEN şubelerinden 40 ve TM şubelerinden 13 olmak üzere toplam 53 öğrenciye uygulanmıştır. Öğrenciler başarı puanları ve ilgilerine göre TM ve FEN şubelerine olarak sınıflara ayrılmıştır. Bu sınıfların Matematik ders notları arasında anlamlı fark yoktur. Hem TM hem FEN şubesine aynı öğretmen derse girmektedir. Cevaplar analiz edilmeden önce öğrenci tarafından verilmesi beklenilen bilimsel cevapları içeren bir cevap anahtarı hazırlanmıştır. Öğrencilerin testin açık uçlu sorularına verdikleri yanıtlar, Abraham ve Williamson (1994)'nın 5'li anlama skalasına göre "tam (istenen) doğru yanıt", "kısmen doğru yanıt", "kısmen doğru/kavram yanılgısı var", "kavram yanılgısı var", "yanıt yok" olmak üzere beş kategoride değerlendirilmiş ve literatürle karşılaştırılmaya çalışılmıştır. Kodlamanın güvenilirliğini test etmek üzere beş kodlayıcı ile gerçekleştirilen çalışmada uyum oranı % 92 olarak bulunmuştur. Tekrarlanan ifadeler kodlanarak analiz edilmiştir. Doküman analizi yapılarak elde edilen veriler incelenmiş (Yıldırım & Şimşek, 2003) ve sonuçlar frekans ve yüzde olarak tablolaştırılmıştır. Ayrıca öğrencilerin yaptıkları hatalar analiz edilmiş ve bunların bir bölümü sunulmuştur. Çalışmanın ilk hâli Çağdaş Yönelimler III (yapılandırmacılık ve eğitime yansımaları) sempozyumunda sunulmuş ve çalışma gelen eleştiriler doğrultusunda tekrar analiz edilmiştir (Barak, 2006).

Bulgular

Bu bölümde, öğrencilere uygulanan testteki 7 soru incelenmiş; öğrencilerin vermiş olduğu yanlış cevaplar irdelenerek öğrencilerin yaptıkları hatalar ve sahip oldukları kavramsal yanılgılar tespit edilmeye çalışılmıştır. Ayrıca öğrencilerin verdikleri cevaplardaki hataların nitelikleri, betimlemeleri, frekans ve yüzdeleri tablolarla belirtilmiştir. Ayrıca öğrencilerin verdikleri cevaplar, Abraham ve Williamson (1994) skalasına göre tam (istenen) doğru yanıt, kısmen doğru yanıt, kısmen doğru/kavram yanılgısı var, kavram yanılgısı var, yanıt yok kategorilerine ayrılmış ve öğrencilerin bölümlerine göre (FEN, TM) tablolaştırılmıştır.

a) İlk soru “f : R → R, $y=f(x)=-4x^2$ fonksiyonu veriliyor. f, fonksiyonunun x=1 noktasındaki türevini, türev tanımından yararlanarak bulunuz.” şeklindedir.

Çözümünde öğrencilerden türev tanımını

$\left(\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)\right)$ kullanarak çözüme gitmeleri

istenmiştir.

Tablo 1a

Birinci soruya verilen cevapların 5’li anlama skalasına göre yüzdeleri

Soru	Tam Doğru Yanıt		Kısmen Doğru Yanıt		Kısmen Doğru Kavram Yanılgısı Var		Kavram Yanılgısı Var		Yanıt Yok	
	FEN (40)	TM (13)	FEN (40)	TM (13)	FEN (40)	TM (13)	FEN (40)	TM (13)	FEN (40)	TM (13)
1	%3	0	%97	%62	0	0	0	%23	0	%15

Tablo 1b

Birinci soruya verilen hatalı cevap örnekleri

Hatalar	Öğrenci Cevaplarından Örnekler	Betimsel Nitelendirme	Öğrenci Sayısı (frekans)
1.1	$f(x)=-4x^2$ ise $f(x)=-8x$ x=1 için; $f'(1)=-8.1=-8$	Türevin tanımını bilmediğinden ezbere formül kullanma. Dikkatsizlik	40 FEN 10 TM
1.2	$f(x)=-4x^2$ ise $y'=\frac{f'}{f}=\frac{-8x}{-4x^2}$ ise x=1 için $\frac{-8.1}{-4.1}=2$	Fonksiyon çeşitlerinin türevlerini karıştırma. Kapalı fonksiyon gibi çözme.	3 TM

Tablo 1a ve Tablo 1b den de görüldüğü gibi çalışmaya katılan öğrencilerin büyük bir çoğunluğu $f(x)=a.x^n$ ise $f(x)=a.n.x^{n-1}$ sonucundan yararlanarak çözüme gitmişlerdir. Bu durum aslında bir hata değildir fakat soruda sorulan da değildir. Hem FEN hem M öğrencilerinin büyük çoğunluğu tanımı değil bildiği ya da ezberlediği kuralı uygulamışlardır. İkinci durumda ise hata söz konusudur. Türev yanlış tanımlanmış ve dolayısıyla yanlış bir sonuca ulaşılmıştır. Öğrenciler büyük olasılıkla fonksiyonu kapalı fonksiyon olarak ele almışlar ya da mutlak değerin türev tanımından yararlanmaya çalışmışlardır. Bu durum Ubuz (2001)'un sonuçlarının 1. maddesi ve Hirst (2004)'in sonuçlarının 1. ve 4. maddesiyle örtüşmektedir.

b) İkinci soru "y<0 olmak üzere $x^2 + y^2 = 9$ çemberinin $x=\sqrt{3}$ noktasındaki teğetinin eğimi kaçtır?" şeklindedir. Çözümde öğrencilerden, önce verilen koşula uygun teğetin değme noktasını bulup sonra kapalı türev tanımından yaralanarak o noktadaki teğetin eğiminin bulunması istenmiştir.

Tablo 2a

İkinci soruya verilen cevapların 5'li anlama skalasına göre yüzdeleri

Soru	Tam Doğru Yanıt		Kısmen Doğru Yanıt		Kısmen Doğru Kavram Yanılgısı Var		Kavram Yanılgısı Var		Yanıt Yok	
	FEN (40)	TM (13)	FEN (40)	TM (13)	FEN (40)	TM (13)	FEN (40)	TM (13)	FEN (40)	TM (13)
1	%13	0	%18	%85	%63	0	0	0	%6	%15

Tablo 2b

İkinci soruya verilen hatalı cevap örnekleri

Hatalar	Öğrenci Cevaplarından Örnekler	Betimsel Nitelendirme	Öğrenci Sayısı (frekans)
2.1	$x^2+y^2=9$ ise $y^2=9-x^2$, $y=\sqrt{9-x^2}$ ve $y'=\dfrac{-2x}{2.\sqrt{9-x^2}}=f'(\sqrt{3})$ $=\dfrac{-2.\sqrt{3}}{2.\sqrt{9-3}}=\dfrac{-2\sqrt{3}}{2.\sqrt{2}.\sqrt{3}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	Hatalı karekök alma. Köklerin işaretlerini bilememe. Kapalı Fonksiyon tanımını bilmeme	2 FEN 1 TM
		Hatalı karekök alma	1 FEN 1 TM
2.2	$x^2+y^2=9$ ise $y^2=9-x^2$, $y=\sqrt{9-x^2}$ ve $y'=\dfrac{-2x}{2.\sqrt{9-x^2}}=f'(\sqrt{3})$ $=\dfrac{-2.\sqrt{3}}{2.\sqrt{9-3}}=\dfrac{-2\sqrt{3}}{2.\sqrt{2}.\sqrt{3}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$		

Tablo 2a ve Tablo 2b den de görüldüğü gibi ilk durumda öğrenciler $x=\sqrt{3}$ için y<0 koşuluna uyan teğetin değme noktasını bulmamışlar ve kapalı ifadenin türevini almaları gerekirken kapalı ifadeyi fonksiyon şekline çevirip fonksiyonun türevini almışlardır. Dolayısıyla da teğetin değme noktasını ihmal edip sadece elde edilen fonksiyonun $x=\sqrt{3}$ noktasındaki türevini bulmuşlardır. İkinci durumda da benzer bir mantıkla verilen kapalı ifadeyi fonksiyon formatında yazıp türevini aldıktan sonra bir noktası ve eğimi bilinen doğru denkleminden yararlanarak bulduklarını denklemde yerine yazmışlardır. Bu durum Melis (2004)'in 1., 7 ve 8. sonucuna benzerlik göstermektedir. Öğrencilerin bir kısmı da sadece $x=\sqrt{3}$ için $3+y^2 = 9$ bu durumda $y=\pm\sqrt{6}$ 'dır demişler ve $y=-\sqrt{6}$ olmalıdır şeklinde soruyu yarım bırakmışlardır, bir kısmı da sonuca ulaşmış olmalarına rağmen $\frac{-2\sqrt{3}}{-2\sqrt{6}}=\sqrt{2}$ şeklinde işlem hataları yapmışlardır.

c) Üçüncü soru "Denklemi f(x)=sin(cos5x) olan eğrinin $x=\frac{\pi}{10}$ normalinin eğimi kaçtır?" şeklinde olup öğrencilerden zincir kuralını (bileşke) uygulamaları istenmiştir. Bunu uygularken de trigonometrik fonksiyonların türevlerinin alınması söz konusudur.

Tablo 3a

Üçüncü soruya verilen cevapların 5'li anlama skalasına göre yüzdeleri

Soru	Tam Doğru Yanıt		Kısmen Doğru Yanıt		Kısmen Doğru Kavram Yanılgısı Var		Kavram Yanılgısı Var		Yanıt Yok	
	FEN (40)	TM (13)	FEN (40)	TM (13)	FEN (40)	TM (13)	FEN (40)	TM (13)	FEN (40)	TM (13)
3	%50	%15	%2	%53	%28	%8	%2	%16	%18	%8

Tablo 3b

Üçüncü soruya verilen hatalı cevap örnekleri

Hatalar	Öğrenci Cevaplarından Örnekler	Betimsel Nitelendirme	Öğrenci Sayısı (frekans)
3.1	$f(x)=\sin(\cos 5x),\ x=\frac{\pi}{10}$ için $f(\frac{\pi}{10})=\sin(\cos\frac{\pi}{2})=0$ $f'(x)=5.-\sin 5x.\cos(\cos 5x)=5.-\sin\frac{\pi}{2}.\cos(\cos\frac{\pi}{2})=5.-$	Teğetin eğimi ile normalin eğimi arasındaki ilişkiyi kuramama.	2 FEN
	1.1= -5 teğetin eğimidir. $m_N = -1. -5 = 5$'tir.		

Tablo 3b'nin devamı

Üçüncü soruya verilen hatalı cevap örnekleri

Hatalar	Öğrenci Cevaplarından Örnekler	Betimsel Nitelendirme	Öğrenci Sayısı (frekans)
3.2	f(x)=sin(cos5x), $f'(x)=-5.\sin5x.\cos(\cos5x)$ $f'(\frac{\pi}{10})=-5.\sin5.\frac{\pi}{10}.\cos(\cos5.\frac{\pi}{10})=-5.\sin\frac{\pi}{2}.\cos(\cos\frac{\pi}{2})=-5.1.\cos(0)=-5$ teğetin eğimidir. Normalin eğimi $-\frac{1}{5}$'tir.	Teğetin eğimi ile normalin eğimi arasında yanlış ilişki kurma.	4 FEN
3.3	f(x)=sin(cos5x), $x=\frac{\pi}{10}$ $f'(x)=-\sin5x.\cos(\cos5x)=-1.1=-1$ ise m.-1=-1 m=1'dir.	Bileşke fonksiyonunun türevinde kural hatası. Dikkatsizlik.	1 TM
3.4	$f'(x)=-\sin5x.\cos(\cos5x)$ $=-\sin\frac{\pi}{2}.\cos0=+1.1=1$	Bileşke fonksiyonunun türevinde kural hatası. Dikkatsizlik.	1 TM
3.5	$f'(x)=\cos5x.-\cos(\cos5x)$ $=\cos\frac{\pi}{2}.-\cos(\cos\frac{\pi}{2})=0$	Trigonemetrik fonksiyonun değeri yanlış bulunma.	1 FEN
3.6	$f'(x)=-5.\sin5x.\cos(\cos5x)$ $=-5.\sin5.\frac{\pi}{10}.\cos(\cos5.\frac{\pi}{10})$ $=-5.\sin90.\cos(\cos90)=-5$'tir.	Soruda istenene dikkat etmeme. Normalin eğimi ile teğetin eğiminin aynı olduğunu düşünme.	7 FEN 8 TM

Tablo 3a ve Tablo 3b den de görüldüğü gibi öğrenciler türevi doğru bir şekilde almış fakat teğetin eğimi ile normalin eğimi arasındaki ilişkiyi yanlış kurmuşlar bu nedenle de yanlış sonuca ulaşmışlardır. İkinci durumda da öğrenciler türevi doğru bulurken yine teğetin eğimi ile normalin eğimi arasında yanlış bir ilişki kurduklarından doğru sonuca ulaşamamışlardır. Üçüncü durumda da öğrenciler türevi doğru bulmuş yalnız bu sefer de trigonometrik fonksiyonların değerlerini bulmada hata yapmışlardır. Aslında teğetin eğimi ile normalin eğimi arasındaki ilişkiyi doğru kurmuşlardır. Bu bulgular, Melis (2004)'in 4. sonucuna uymaktadır. Beşinci hata tipinde öğrenciler parantezin içindeki cosinüs fonksiyonunun türevini almamış aynen çarpım durumunda yazmışlardır. Son hata tipinde ise öğrenciler doğru türev alıp değerleri doğru bularak teğetin eğimine ulaşmış olmalarına rağmen buldukları değerin normalin eğimi olduğunu söylemişlerdir. Bu durumda öğrenciler teğetin eğimiyle normalin eğimi arasındaki farkı kavrayamamış ya da soruda istenene dikkat etmeksizin soruyu yarım bırakmış olabilirler. Bu durum, Ubuz'un (2001) 1*. sonucuyla örtüşmektedir . Öğrencilerden bir kısmı da cevap kâğıtlarına $m_N = -\frac{1}{f'(x)}$ yazmalarına rağmen -5 sonucuna ulaşıp istenene ulaşamamışlardır.

d) Dördüncü soru "f(x) = $2x^2 + 3$ olduğuna göre $\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ değeri kaçtır?" şeklinde bir soru olup öğrencilerden verilen ifadenin, fonksiyonun 1 noktasındaki türevi olduğunu anlamaları beklenmiştir.(türev tanımını anlayıp anlamadıkları sınanmak istenmiştir.)

Tablo 4a

Dördüncü soruya verilen cevapların 5'li anlama skalasına göre yüzdeleri

Soru	Tam Doğru Yanıt		Kısmen Doğru Yanıt		Kısmen Doğru Kavram Yanılgısı Var		Kavram Yanılgısı Var		Yanıt Yok	
	FEN (40)	TM (13)	FEN (40)	TM (13)	FEN (40)	TM (13)	FEN (40)	TM (13)	FEN (40)	TM (13)
4	%70	%62	%0	%0	%0	%0	%22	%16	%8	%22

Tablo 4a ve Tablo 4b'den de görüldüğü gibi hata yapan öğrenciler

Tablo 4b

Dördüncü soruya verilen hatalı cevap örnekleri

Hatalar	Öğrenci Cevaplarından Örnekler	Betimsel Nitelendirme	Öğrenci Sayısı (frekans)
4.1	f '(x) = 4x ise, f ' (0) = 4.0=0'dır	Türevin tanımını bilmeme	1 FEN 1 TM
4.2	f ' (x) = 4x=4.0=0	Fonksiyonun türevi ile bir noktadaki değeri aynı olarak düşünme	5 FEN 1 TM
4.2	f ' (1) = 4x=0	Yanlış değer verme.	5 FEN 1 TM

soruda verilen ifadenin fonksiyonun 1'deki türevi olduğunu anlayamamış " $h \rightarrow 0$" ifadesini fonksiyonun 0'daki türevi olarak yorumlamışlardır. Bu durum, Melis (2004)'in 1. sonucuna uymaktadır. İkinci tipte de yine 0'daki türevin istendiği algılanmış; fakat fonksiyonun türev ifadesi ile bir noktadaki türevinin değeri aynı şeymiş gibi eşitliklerle yan yana yazılmıştır. Üçüncü tipte ise öğrenci büyük ihtimalle bir kavram karmaşası yaşamış 1 noktasındaki türev olarak anlamasına rağmen 0 noktasındaki türevin değerini bulmuştur. Ayrıca öğrencilerden biri de $\frac{0}{0}=4x=0$ şeklinde ifade ederek önce soruda verilen ifadenin bir belirsizlik olduğunun farkına varmış sonra da belirsizlikle türev ifadesi ve bir noktadaki türev eşit şeyler olmamasına rağmen eşitlikler kullanarak ifade etmiştir. Bu durumlar, Ubuz (2001)'un i ve Melis (2004)'in 8. sonucuna benzerlik göstermektedir.

e) Beşinci soru "$f(3x-5)=2x^2+x-1$ olduğuna $f'(1)+f(1)$ kaçtır? şeklinde verilmiş olup öğrencilerden bileşke fonksiyonunun türevinin alınması ve özel bir noktadaki bu türevin değeriyle fonksiyonun bu noktadaki değerinin toplanması istenmiştir. Burada öğrenciler bileşke fonksiyonunun türevinden yararlanabilecekleri gibi fonksiyon bilgilerinden de yararlanabilirler.

Tablo 5a

Beşinci soruya verilen cevapların 5'li anlama skalasına göre yüzdeleri

Soru	Tam Doğru Yanıt		Kısmen Doğru Yanıt		Kısmen Doğru Kavram Yanılgısı Var		Kavram Yanılgısı Var		Yanıt Yok	
	FEN (40)	TM (13)	FEN (40)	TM (13)	FEN (40)	TM (13)	FEN (40)	TM (13)	FEN (40)	TM (13)
5	%88	%77	%0	%0	%0	%0	%10	%23	%2	%0

Tablo 5b

Beşinci soruya verilen hatalı cevap örnekleri

Hatalar	Öğrenci Cevaplarından Örnekler	Betimsel Nitelendirme	Öğrenci Sayısı (frekans)
5.1	$f(3x-5)=2x^2+x-1$ $3x-5=1$ ise $3x=6$, $x=2$ $f(1)=2.4+2-1=9$ $f'(3x-5)=4x+1$	Bileşke fonksiyonunun türevini almada hata	3 FEN 2 TM
	$f'(1)=9$; $f'(1)+f(1)=9+9=18$ $f'(3x-5)=4x+1=5$ $3x-5=1$, $3x=6$, $x=2$ $f(1)=2$; $f'(1)+f(1)=5+2=7$	Dikkatsizlik	1 TM

Tablo 5a ve Tablo 5b den de görüldüğü gibi öğrenciler bileşke fonksiyonun türevini alırken içteki fonksiyonun türevini almadıklarından fonksiyonun türevini yanlış bulmuşlar dolayısıyla yanlış sonuca ulaşmışlardır. Bu durum, Melis (2004)'in 2. ve 3. sonuçlarına benzerlik göstermektedir. İkinci hatada ise parantezin içini 1 yapan değer bulunmasına rağmen bilinmeyen yerine yine de 1 verilerek sonuca gidilmeye çalışılmış bu da öğrencileri yanlış sonuca götürmüştür. Bu durum, Melis (2004)'in 5. sonucuna benzerdir.

f) Altıncı soru "y=f(x) fonksiyonu $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$ olarak tanımlı olduğuna göre f ' (2) değeri kaçtır?"şeklinde verilmiş ve öğrencilerden kapalı ifadeyi fonksiyon hâline getirmeleri ve o fonksiyonun türevini alıp 2 noktasındaki değerini bulmaları istenmiştir.

Tablo 6a

Altıncı soruya verilen cevapların 5'li anlama skalasına göre yüzdeleri

Soru	Tam Doğru Yanıt		Kısmen Doğru Yanıt		Kısmen Doğru Kavram Yanılgısı Var		Kavram Yanılgısı Var		Yanıt Yok	
	FEN (40)	TM (13)	FEN (40)	TM (13)	FEN (40)	TM (13)	FEN (40)	TM (13)	FEN (40)	TM (13)
6	%77	%23	%5	%0	%0	%23	%10	%0	%8	%54

Tablo 6b

Altıncı soruya verilen hatalı cevap örnekleri

Hatalar	Öğrenci Cevaplarından Örnekler	Betimsel Nitelendirme	Öğrenci Sayısı (frekans)
6.1	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ ise $f'(2)=-\frac{1}{4}$ 'tür. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$ ise $\frac{y+x}{xy}=1$	Fonksiyonun türevini yanlış alma.	3 FEN
6.2	y+x=xy, x=y(x-1), $y=(\frac{x}{x-1})$ $y'=(x)'.(x-1)+(x-1)'.x=x-1+x=(2-1)+2,\ y'=3$	Bölmenin türevini yanlış alma	1 TM

Tablo 6a'dan da görüldüğü gibi kapalı ifadeyi fonksiyon hâline dönüştürmeden $\frac{1}{x}$ 'den oluşuyor gibi $\frac{1}{x}$ 'in türevi alınmıştır. İkinci hatada kapalı ifade fonksiyon hâline getirilmesine rağmen elde edilen fonksiyonun türevi yanlış alınmış; fonksiyon bölme durumunda ol-

Tablo 6 b'nin devamı

Altıncı soruya verilen hatalı cevap örnekleri

Hatalar	Öğrenci Cevaplarından Örnekler	Betimsel Nitelendirme	Öğrenci Sayısı (frekans)
6.3	$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$ ise $\frac{y+x}{xy}=1$ y+x=xy, x=y(x-1) $y=(\frac{x}{x-1})$; $y'=\frac{(x)'.(x-1)+(x-1)'.x}{(x-1)^2}$ $=\frac{1.(x-1)+(1).x}{(x-1)^2}=\frac{(2-1)+(1).2}{(2-1)^2}=3$	Bölmenin türevinde kural hatası	2 FEN
6.4	$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$ $f(x)=x^{-1}+y^{-1}$ $f'(x)=-x^{-2}+-y^{-2}$ $f'(2)=-(2)^{-2}-(2)^{-2}=-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$	Fonksiyonun türevini yanlış alma	1 FEN

duğundan bölmenin türevi uygulanması gerekirken çarpmanın türevi uygulanmıştır. Üçüncü hatada da kapalı ifade fonksiyon hâline getirildikten sonra elde edilen fonksiyona bölmenin türevi uygulanmış fakat yanlış uygulanmış; payda iki ifadenin arası "-" olması gerekirken "+" yazılmıştır. Bu durumlar, Melis (2004)'in 2. sonucuna uymaktadır. Dördüncü hatada ise fonksiyon kapalı ifade aynen bırakılmış ve türev alınmıştır. Kapalı ifade fonksiyon gibi algılanmış ve kapalı fonksiyonun türevi yanlış alınmıştır. Bu durum Ubuz (2001)'un 2. sonucuna uymaktadır.

g) Yedinci $\frac{d^2}{dx^2}(\sin^2 3x)$ değeri kaçtır?"şeklinde verilmiş ve öğrencilerden 2. mertebeden türev almaları istenmiştir. Ayrıca burada öğrencilerden zincir kuralı ve trigonometrik fonksiyonların türevlerini bilmesi beklenmektedir.

Tablo 7a

Yedinci soruya verilen cevapların 5'li anlama skalasına göre yüzdeleri

Soru	Tam Doğru Yanıt		Kısmen Doğru Yanıt		Kısmen Doğru Kavram Yanılgısı Var		Kavram Yanılgısı Var		Yanıt Yok	
	FEN (40)	TM (13)	FEN (40)	TM (13)	FEN (40)	TM (13)	FEN (40)	TM (13)	FEN (40)	TM (13)
7	%63	%69	%2	%8	%0	%8	%27	%0	%8	%15

Tablo 7b

Yedinci soruya verilen hatalı cevap örnekleri

Hatalar	Öğrenci Cevaplarından Örnekler	Betimsel Nitelendirme	Öğrenci Sayısı (frekans)
7.1	$f'(x)=2.\sin 3x.3.\cos 3x$ $f''(x)=2.3.\cos 3x.3.3.-\sin 3x=-27.\sin 6x$	Çarpmanın türevinde kural hatası	5 FEN
7.2	$f'(x)=2\sin 3x.\cos 3x$ $f''(x)=6\cos 3x(-3\sin 3x)=18\sin 3x.\cos 3x=-9\sin 6x$	Bileşke fonksiyonun türevinde kural hatası ya da dikkatsizlik.	2 FEN
7.3	$f'(x)=2\sin 3x.3=6\sin 3x$ $f''(x)=-3.6.\cos 3x=-18\cos 3x$	Yanlış türev alma.	2 FEN
7.4	$f'(x)= 2\sin 3x.\cos 3x$ $f''(x)=6\cos 3x.(-3\sin 3x)=-6\sin 3x.\cos 3x=-18\sin 3x$	Bileşke fonksiyonun türevinde kural hatası ya da dikkatsizlik.	1 FEN
7.5	$f'(x)=2\cos 3x.3=6\cos 3x$ $f''(x)=-18\sin 3x$	Yanlış türev alma.	1 FEN
7.6	$f'(x)=2.\sin 3x.3.\cos 3x = 3\sin 6x$ $f''(x)=3.6\cos 6x+\sin 6x$	Dikkatsizlik	1 TM

Tablo 7a ve Tablo 7b den de görüldüğü gibi ilk hatada öğrenciler, ilk türevi doğru almış ancak ikinci türevi, çarpmanın türevini yanlış almışlar, çarpımın türevini türevlerin çarpımı şeklinde almışlardır. Buradaki hata, Melis (2004)'in 4. sonucuna uymaktadır. İkinci hatada ilk türev alınırken cos x fonksiyonunun içindeki fonksiyonun türevi alınmamıştır. Bulunan sonuç, Melis (2004)'in 2. ve 3. sonucuna uymaktadır. Üçüncü hatada ilk türev yanlış alınmıştır. Dördüncü hatada ilk türev yanlış alınmış, son basamak da yanlış ifade edilmiştir. Beşinci hatada ilk türev yanlış alınmıştır. Altıncı hatada ise birinci türev doğru alınmış, ikinci türevin alınmasında hata yapılmıştır. Bu hatalar, Melis (2004)'in çalışmasının 4. sonucuna uymaktadır.

Tartışma

Bu çalışmada, öğrencilerin türev konusundaki hataları incelenerek sahip oldukları kavram yanılgılarına ulaşılmaya çalışılmıştır. FEN ve TM şubeleri karşılaştırılmıştır. İki şube arasında başarı olarak çok büyük bir fark bulunamamıştır.

Sorulan sorular değerlendirilecek olursa öğrencilerin türev konusunda birtakım kavram yanılgılarına sahip oldukları ve yaptıkları hataların türevden önceki konu olan limit ve her iki konunun da temelini oluşturan fonksiyonlar konularının tam olarak öğrenilememesinden ileri geldiği tespit edilmiştir. Öğrencilerin gözlenebilir hataları Sleeman (1984) ve Payne ve Squibb (1990) tarafından saptanan "mal rule" veya yanlış kurallama olarak adlandırılmıştır. Belirlenen ortak yanlışlar literatürde önerilen yanlış kurallamanın yanı sıra aşağıdaki şekilde de verilmiştir. Öğrencilerin sık sık tekrarladıkları yanlışlıklar kavramsal açıdan ele alınırsa kavram yanılgılarına sahip olabilecekleri görülür. Öğrencilerin özellikle köklü ve üslü sayılarla ilgili pek çok işlem hatası yaptıkları görülmüştür. İncelenen bu 7 sorudaki bulguları toparlayacak olursak:

1. soruda yapılan hatalar; $f(x)=a.x^{n}$ eklindeki fonksiyonun türevini soruda istenen şekliyle türev tanımından yararlanarak bulmadan $f(x)=a.n.x^{n-1}$ sonucundan yararlanarak bulma, ezbere yapma.

2. soruda yapılan hatalar; karekök dışına yanlış çıkarma; kapalı bir fonksiyonun türevini, fonksiyonu normal bir fonksiyonun çevirerek türevini alma.

3. soruda yapılan hatalar; trigonometrik fonksiyonların türevini yanlış alma; bileşke fonksiyonun türevini yanlış alma; trigonometrik fonksiyonların değerlerini yanlış hesaplama;teğetin eğimi ile normalin eğimini aynı algılama; teğetin eğimi ile normalin eğimi arasında yanlış ilişki kurma, işlemsel hatalar yapma, tanımla ilgili yanlış hatırlamaları kullanma.

4. soruda yapılan hatalar; türevin tanımındaki "$h \to 0$" ifadesini fonksiyonun sıfırdaki türevi olarak algılama; fonksiyonun türevi ile fonksiyonun türevinin bir noktadaki değerini eşit olarak alma.

5. soruda yapılan hata; bileşke fonksiyonunun türevini yanlış alma.

6. soruda yapılan hatalar; fonksiyonun türevini yanlış alma; bölmenin türevini yanlış alma.

7. soruda yapılan hatalar; çarpmanın türevini yanlış alma; bileşke fonksiyonun türevini yanlış alma.

Öğrencilerin yaptıkları hatalar gruplanacak olursa üslü sayılarda işlem hatası yaptıkları, köklü sayılarda işlem hatası yaptıkları, fonksiyonlar konusundaki bilgi eksikliğinden kaynaklanan hatalar yaptıkları, trigonometrik fonksiyonların özel noktalardaki değerlerini yanlış hesapladıkları, türevin tanımını yanlış yorumladıkları, türev almadaki genel kurallarda kavram yanılgılarına sahip oldukları (sabit fonksiyonun türevi, çarpmanın türevi, bölmenin türevi, bileşke fonksiyonun türevi), trigonometrik fonksiyonların türevlerini yanlış aldıkları, kapalı fonksiyonların türevini almada hatalar yaptıkları, (normal fonksiyonun türevini alır gibi türev aldıkları) fonksiyonların yüksek mertebeden türevlerini alırken hatalar yaptıkları, teğetin eğimi ile normalin eğimi arasındaki farkı anlayamadıklarıdır. Bu bulgular Amit & Vinner, 1990; Artique, 1991; Orton, 1983; Ubuz, 1996, 2001; Maurer (1987); Norman & Pritchard (1994); Krutetski (1980); Orton (1983); Donaldson (1963); Cipra (1989); (1990). Ubuz (2001, s. 129) çalışmalarının sonuçları ile örtüşmektedir. Ayrıca Ubuz'un (2001) yaptığı mühendislik fakültesi 1. sınıf öğrencilerinin matematik dersinde yaptıkları hatalara yönelik araştırma ve Melis (2001)'in web temelli aktif matematik eğitimi konusunda yaptığı çalışma ile de paralel sonuçlara ulaşılmıştır (bk, Ubuz (2001) i, 1, 2 ve Melis'in çalışmasının bulguları). Ayrıca ek olarak öğrencilerin teğetin eğimi ve normalin eğimi ile ilgili hatalara rastlanmıştır.

Öğrencilerin yaptıkları bu hataları ve kavram yanılgılarını gidermek ya da bunların oluşmasını engellemek için öğretmene büyük görev düşmektedir. Öğretmen konuyu aktarırken matematik dersinin aşamalılık ilişkisine sahip olduğunu göz önünde bulundurmalı ve derslerini sürekli bu aşamalılığı gözden kaçırmayacak şekilde kontrollü bir biçimde yürütmelidir. Gerekirse öğrencilerden sözlü ya da yazılı olarak sürekli dönüt alması, oluşabilecek kavram yanılgılarından önceden haberdar olup buna göre dersi işlemelidir. Özellikle öğrencinin zihninde ezber bilgilerin ve kalıp soru ve cevapların oluşmaması için dersi etkinliklerle ve mümkün olduğunca öğrencinin zihninde soru işaretleri oluşturarak konunun öğrencide ihtiyaç hâline getirilmesini sağlayarak daha kalıcı bir öğrenme-öğretme ortamı sunmaya çalışmalıdır.

Kendal (2001)'in de belirttiği gibi öğrencilerin sahip olduğu hataların giderilmesi için konu ile ilgili çalışma yaprakları ve materyaller sunulmalıdır (bk, Ek B). Anlamlı öğrenme araçlarından birisi olan kavram haritaları kullanılmalıdır. Eksikliklerin giderilmesi ile ilgili tedbirler alınmalıdır. Öğretim yılı başında, öğrencilerin ön şart davranışlarındaki eksiklikleri tespit etmek için izleme testleri uygulanmalıdır. Öğrencilere sadece işlem becerisini ölçen değil onları aynı zamanda düşündürecek, yorum ve açıklama gerektirecek türde sorular sorulmalıdır. Ayrıca öğrencilere önerilen ya da kullanılan kaynak ve yardımcı kitapların seçiminde özen gösterilmelidir.

Öğrencilerin büyük ölçüde nerede hata yaptıkları ve kavram yanılgısına sahip oldukları somut bir şekilde araştırılmalıdır. Türev konusunda çok az çalışma bulunması ve örneklemin sınırlılığı nedeniyle bu çalışmanın başka çalışmalarla desteklenmesi gereklidir.

The Erroneous Derivative Examples of Eleventh Grade Students

Hulya GÜR, Başak BARAK***

Abstract

The derivative is not only an important subject for mathematics but also is an important subject for engineering, physics, economy, chemistry, and statistics. Especially, mathematics depends on strongly preceding learning and the subject of derivative will be used in university education by all students. Therefore, it is one of the most important subjects. This study's purpose is to explore student mistakes and errors in derivative and determine the areas in which students have probable misconceptions. For this purpose, 7 questions were chosen from "the Student Placement Test" (OSS). These questions were transferred into open-ended questions. The results of the study took place at sixth form college are described and discussed. The test administered to 53 students from Balikesir Fatma Emin Kutvar Anatolian High School in the fall-term of 2005-2006. Determining the possible misconceptions should help teachers when they teach this subject. The study findings showed that students could not understand derivative definition that depends on limit, make mistakes in composite functions and trigonometric functions, and establish wrong relations between tangent's slope, and normal's slope. Teachers need to be able to find errors and misconceptions in students' solutions. Teachers also need to be applying meaningful learning strategies such as concept maps, worksheets about derivative (e.g. Appendix B, Appendix C).

Key Words

Errors and Misunderstanding, Misconceptions, Errors and Misunderstanding Towards Derivative

**Correspondence:* Asist Prof. Dr. Hulya GÜR, Balikesir University, Necatibey Educational Faculty, 10100 Balikesir, Turkey. E-mail: hgur@balikesir.edu.tr

** Balikesir University, Science Institute.

Educational Sciences: Theory & Practice

7 (1) • January 2007 • 473-480

The derivative of a function represents an infinitesimal change in the function with respect to whatever parameters it may have. The "simple" derivative of a function f with respect to x is denoted either f(x). Students have some misconceptions or errors in derivative. Misconception is defined as erroneous conception, false opinion, or wrong understanding (Big Larousse, 1986). Studies about derivative and ideas related to it (such as tangent lines) have emphasized students' misconceptions and common errors (e.g., Amit & Vinner, 1990; Artique, 1991; Orton, 1983; Ubuz, 1996, 2001; Maurer (1987; Norman & Pritchard, 1994; Krutetski, 1980; Orton, 1983; Donaldson, 1963; Cipra, 1989; Keith et al., 1990). Ubuz (2001, p. 129) showed that students' common misconceptions on derivative were as follows: " (a) derivative at a point gives the function of a derivative, (b) tangent equation is the derivative function, (c) derivative at a point is the tangent equation, and (d) derivative at a point is the value of the tangent equation at that point." Ubuz also found that students seem to think different concepts as the same. He reported that *"(a) the lack of discrimination of concepts which occur in the same context or the confusion of a concept with another concept describing a different feature of the same situation, (b) the inappropriate extension of a specific case to a general case, and (c) the lack of understanding of graphical representation"(p.133)*. Some studies have mainly focused on the constructions of mathematical knowledge in a theoretical perspective rather than students' misconceptions and common errors (Dubinsky & Schwingendorf, 1991) On the other hand, few empirical research were conducted such as Tall (1986a). He revealed that 67% of the experimental students who used Graphic Calculus (Tall, 1986b) chose the right answer with a correct explanation, while only 8% of the control students did. Thus, it is likely that visualization in the graphical context can help students understand the relations between differentiation and integration. Mathematics teaching is directly linked to learning and students' understanding of the concept of derivative is related to their prior knowledge (Kendal, 2001). Kendal (2001) stated that using multiple presentations was important in developing the understanding of the concept of derivative. In the present study the following questions are addressed. What are the errors and misconceptions beyond the difficulties? Is it possible to diminish or eliminate these difficulties with the use of technology or meaningful learning tools? If so, How?

Method

Subject

The sample consists of 53 eleventh grade students in Fatma Emin Kutvar Anatolian High School. Science (Fen) class had 40 students and Turkish and Mathematics (TM) class had 13 students. Both classes are taught by the same mathematics teacher during the 2005-2006 term. 53 students took the test on derivative. The students who took both the test was taken as the sample of the study.

Instruments

The test used for assessing students' learning of derivative consisted of 7 questions some of which had different tasks (altogether 15 tasks), on which students were to work individually to provide written responses. The test was administered after derivative subject had taught at the end of the semester. Each task in the questions was graded by one of the four categories (Abraham *et al.,* 1994): correct (5), partially correct (4), misconception or error (3), incorrect (2) and missing (1). Factor analysis was carried out for the questions in the test. The questions were related to curriculum of derivative.

Treatment

The study was conducted in a mathematics course designed to teach derivative and the basic theorems of differential calculus. After each course, students completed homework exercises about derivative. Teacher of the course was available to answer their questions. At the end of the term, the derivative test was given.

Results and Discussion

The study described eleventh grade students' errors and misconceptions in derivative. The primary goal of the first and fourth questions was to analyze the definition of derivative in the question. These questions were mostly answered correctly. %8 of TM students have errors (table 1a, 1b, 2a, 2b, 3a, 3b, 4a, 4b, 5a, 5b, 6a, 6b, 7a, 7b). These errors were two types: Not knowing the definition of derivative or the type of function. Students memorized the rules not the definition. The second and third questions focused on tangent line and normal line. Students have misconceptions related to square root; the derivative of close function; tangent line, normal line; the derivation of composite functions, and application of rules. Fifth questions focused on the computation of two functions: f(1)+f (1). Students have misconceptions related to the derivation of composite functions. Sixth questions focused on the computation of derivative. Students have misconceptions related to the derivation of composite function; not knowing derivative rules. Similar errors were observed in the last question. To sum, the study found several types of errors and misconceptions in derivative.

The frequent errors in derivative include: not knowing definition of derivative, missing or erroneous square root, not knowing the type of function, the error of formulation, erroneous variable handling, the derivation of composite functions, not knowing tangent line, normal line, the erroneous of the interpretation of the notion 'derivative', composite functions, the mal rule of formulation, erroneous about composite functions, application of wrong derivation rules or wrong application of such rules, misconception about variables, missing domain conditions, slips in computations, and arithmetic or algebraic errors.

Conclusion

Teaching is directly linked to learning and each class developed understanding of the concept of derivative that related to the combined effect of their teacher's privileging characteristics: Calculus content, teaching approach.

The general analysis of students' performance pointed to a misconception or errors in derivative topic. Teachers need to be able to find errors and misconceptions in students' solutions in mathematics topics. Teachers need to be applying meaningful learning strategies such as concept maps or worksheets about derivative (e.g. Appendix B, Appendix C).

Kaynakça/References

Abraham, M. R., Williamson, V. M. (1994). A cross-age student understanding of five chemistry concept. *Journal of Research and Science Teaching*, *31*, 147-165.

Akkuş, O. (2000). *Principles and standarts for school mathematics NCTM.* 11 Aralık 2005 tarihinde mategt.web.ibu.edu.tr/makaleler/OKUL_MATEMATi-Gi.hTM adresinden edinilmiştir.

Altun, M. (Ed). (2002). *İlköğretim ikinci kademede (6, 7 ve 8. sınıflarda) matematik öğretimi* (2. baskı). Bursa: Alfa Yayınları.

Artigue, M.(1991): Analysis. I D. Tall (red.), *Advanced mathematical thinking* (Kapitel 11). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Amit, M., & Vinner, S. (1990). Some misconceptions in calculus: Anecdotes or tip of an iceberg. In G. Brooker et al. (Eds.), *Proceedings of 14th International Conference for the Psychology of Mathematics Education 14* (Vol.1, p. 3-10). Oaxtepec, Mexico: CINVESTAV.

Balcı, M. (2003). *Genel matematik* (2. baskı). Ankara: Balcı Yayınları.

BauJaoude, S. B. (1992). The relationship between students' learning strategies and the change in their misunderstanding during a high school chemistry course. *Journal of Research in Science Teaching, 29*, 687-699.

Benk, A. (1986). *Büyük larousse* (13. Cilt) İstanbul: Interpress Basın ve Yayıncılık A.Ş.

Cipra, B., (1989). *Mistakes.* New York: Academic Press.

Doğan, A., Sulak, H. & Cihangir, A. (2002, Eylül). *İlköğretim matematik eğitimi anabilim dalı öğrencilerinin özel fonksiyonlar ile fonksiyonlarda limit, türev ve türev uygulamaları konularındaki yeterlikleri üzerine bir araştırma*. V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresinde sunulan bildiri, ODTÜ, Ankara.

Driver, R., & Easley, Y. (1978). Pupils and paradigms: A review of literature related to concept development in adolescent science students. *Studies in Science Education, 5*, 61-84.

Donaldson, M., (1963). *A study of children's thinking.* London: Tavistock Publications.

Dubinsky, E., & Schwingendorf, E. K. (1991). Constructing calculus concepts: cooperation in a computer laboratoy. In C. Leinbach (Ed.), *The laboratory approach to teaching calculus.* Mathematical Association of America, Notes and Reports, 20.

Fensham, P. J. Garrard, J., & West, L. W. (1981). The use of cognitive mapping in teaching and learning strategies. *Research in science Education, 11*, 121-129.

Gronlund, N. E., & Linn, R. L. (1990). *Measurement and evaluation in teaching* (6th ed.). New York, London: MacMillan, Collier MacMillan.

Gür, H. & Seyhan S. (2004). İlköğretim 7. ve 8. sınıf öğrencilerinin ondalık konusundaki hataları ve kavram yanılgıları. 11.11.2005 tarihinde http://matder.org.tr adresinden edinilmiştir.

Gür, H. & Barak, B. (2006, Nisan). Çağdaş Yönelimler III *(Yapılandırmacılık ve Eğitime Yansımaları) Sempozyumu*. İzmir Özel Tevfik Fikret Lisesi, İzmir.

Hirst, K. (2002, Jully). Hirst, K. (2002), *Classifying students' mistakes in Calculus.* Paper presented at the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level), University of Crete.

Hirst, K. (2004), Student expectations of studying mathematics at university. In I. Putt, R. Faragher & M.McLean (Eds), *Proceedings of the 27th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (MERGA27)* (Vol. 1, pp. 295-302). Townsville, Queensland, Australia.

Kendal, M. (2001). *Teaching and learning introductory differential calculus with a computer algebra system*. Unpublished doctorate dissertsation, The University of Melbourne.

Krutetski, V. A. (1980), *The psychology of mathematical abilities in school children.* Chicago: University of Chicago Pres.

Mayer, R. E. (1987). *Educational psychology: A cognitive approach.* Toronto: Little, Brown and Company.

Maurer, S. B., (1987), New knowledge about errors and new views about learners: What they mean to educators and more educators would like to know. In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 165-188). Hillsdale NJ: Erlbaum.

Melis, E. (2004). Erroneous examples as a source of learning in mathematics erroneous examples. In D. G. Sampson, & P. Isaias (Eds.), *International conference: Cognition and exploratory Learning in the Digital Age* (pp. 311-318). Kinshuk.

Moralı, S., Köroğlu, H. & Çelik, A. (2004). Buca Eğitim Fakültesi matematik öğretmen adaylarının soyut matematik dersine yönelik tutumları ve rastlanan kavram yanılgıları. *Gazi Üniversitesi Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *24*(1), 161–175.

Norman, F. A., & Pritchard, M. K. (1994). Cognitive obstacles to the learning of calculus: a krutetskiian perspective. In J. J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Research issues in undergraduate mathematics learning.* Mathematical Association of America.

Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics, 5* (15), 235-250.

Osborne, R. J., & Cosgrove, M. M. (1983). Children's conceptions of the change of states of water. *Journal of Research in Science Teaching, 20*, 825-835.

Osborne, R., & Freyberg, P. (1985). *Learning in science: the implication of children's science.* Auckland: Heinemann.

Payne S. J., & Juibb, H. R. (1990). Algebra mal-rules and cognitive account of error. *Cognitive Science, 14*, 445-481.

Senemoğlu, N. (2004). *Gelişim öğrenme ve öğretim kuramdan uygulamaya* (10. baskı). Ankara: Gazi Kitabevi.

Sleeman, D. (1984). An attempt to understand students` understanding of basic algebra. *Cognitive Science*, *8*, 367-412.

Sulak, H. & Ardahan, H. (1999). Ondalık kesirlerin öğretimindeki yanılgıların teşhisi ve alınması gereken tedbirler, *Selçuk Üniversitesi Araştırma Vakfı Projesi*, 1996-1997, Proje No: 96/123, Konya.

Tall, D. (1986a). *Building and testing a cognitive approach to the calculus using interactive computer graphics.* Unpublished doctorate dissertation, University of Warwick.

Tall, D. (1986b). *Graphic calculus I, II, III, (3 packs of computer programs, with accompanying texts)*. London: Glentop Publishers.

Treagust, D. F. (1986). Evaluating student's misconceptions by means of diagnostic multiple choice items. *Research in Science Education, 16*, 199-207.

Ubuz, B. (1999). 10. ve 11. sınıf öğrencilerinin temel geometri konularındaki hataları ve kavram yanılgıları. *Hacattepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 16-17, 95-104

Ubuz, B. (2001). First year engineering students' learning of point of tangency, numerical calculation of gradients, and the approximate value of a function at a point through computers. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 20* (1), 113-137.

Ubuz, B. (2002). Development of calculus concepts through a computer based learning environment. *Proceedings of the 2th International Conference on Teaching of Mathematics* (pp. 1-10), Greece.

Yıldırım, A. & Şimşek, H. (2003). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri* (3. baskı). Ankara: Seçkin.

EK-A

1. $f : R \rightarrow R$, $y = f(x) = -4x^2$ fonksiyonu veriliyor. f, fonksiyonunun $x = 1$ noktasındaki türevini, türev tanımından yararlanarak bulunuz.

2. $y < 0$ olmak üzere $x^2 + y^2 = 9$ çemberinin $x = \sqrt{3}$ noktasındaki teğetinin eğimi kaçtır?"

3. Denklemi $f(x)=\sin(\cos 5x)$ olan eğrinin $x = \dfrac{\pi}{10}$ noktasındaki normalinin eğimi kaçtır?"

4. $f(x)=2x^2 + 3$ olduğuna göre $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ değeri kaçtır?"

5. $f(3x-5) = 2x^2 + x - 1$ olduğuna göre $f'(1)+f(1)$ kaçtır?"

6. $y = f(x)$ fonksiyonu $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1$ olarak tanımlı olduğuna göre $f'(2)$ değeri kaçtır?"

7. $\dfrac{d^2}{dx^2}(\sin^2 3x)$ değeri kaçtır?"

EK-B

BİR ARABA KADAR HIZLI KOŞABİLİR MİSİN?

Bil bakalım!

Seoul'de düzenlenen 1998 Olimpiyat Oyunları'nda 100 metre koşusunda, Florence Griffith Joyner, 10 metreyi 0.91 saniyede koşmuştu. Acaba bu hızla saatte 15 mil hızla okuluna giden bir arabayı geçebilir misin?

Laboratuarlardan inşaat alanlarına, mutfaklara, her yerde yapılan ölçümlerin birimleri arasında çevirme yapmak gerekir. Aşçılar, marangozlar, bilim adamları ve mühendislerin hepsi işlerinde kullandıkları ölçümlerin birimlerini birbirine çevirmelilerdir.