T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

FOURIER OPERATÖRLERİNİN MORREY UZAYLARINDA YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

LEVENT AÇIL

BALIKESİR, HAZİRAN - 2013

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

FOURIER OPERATÖRLERİNİN MORREY UZAYLARINDA YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LISANS TEZI

LEVENT AÇIL

BALIKESİR, HAZİRAN - 2013

KABUL VE ONAY SAYFASI

Levent AÇIL tarafından hazırlanan "**FOURİER OPERATÖRLERİNİN MORREY UZAYLARINDA YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 06.06.2013 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Danışman Prof. Dr. Ali GÜVEN	....
Üye Prof. Dr. Daniyal İSRAFİLZADE	....
Üye Doç. Dr. Yunus Emre YILDIRIR	....

Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez BAÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Prof. Dr. Hilmi NAMLI ....

ÖZET

FOURIER OPERATÖRLERİNİN MORREY UZAYLARINDA YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
LEVENT AÇIL
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. ALİ GÜVEN)

BALIKESİR, HAZİRAN - 2013

Bu çalışma trigonometrik Fourier serilerinin Cesàro, Zygmund, Nörlund ve Riesz ortalamalarının Morrey uzaylarındaki bazı yaklaşım özelliklerinden oluşmaktadır.

Bu tez birinci bölüm giriş olmak üzere dört ana bölümden oluşmaktadır

İkinci bölümde, trigonometrik yaklaşımın temel taşı olan Fourier serilerinin tanımı verilmiştir. Bu bölümün ikinci kısmı ise, Cesàro, Zygmund Nörlund ve Riesz ortalamalarının tanımı ile ana teoremlerde kullanılacak bazı tanımlardan oluşmaktadır.

Üçüncü bölümde, bu çalışmada kullanılan fonksiyon uzaylarının tanımı ve temel özellikleri verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise, elde edilen sonuçlar, bu sonuçların ispatları ve bu ispatlarda kullanılan bazı lemmalar verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Morrey uzayı / Lipschitz sınıfı / Fourier serisi / Cesàro ortalaması / Zygmund ortalaması / Nörlund ortalaması / Riesz ortalaması

ABSTRACT

APPROXIMATION PROPERTIES OF FOURIER OPERATORS IN MORREY SPACES
MSC THESIS
LEVENT AÇIL
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE MATHEMATICS

(SUPERVISOR: PROF. DR. ALİ GÜVEN)

BALIKESİR, JUNE 2013

This study consists of some approximation properties of Cesàro, Zygmund, Nörlund and Riesz means of trigonometric Fourier series in Morrey spaces.

This study consists of four main chapters including the introduction part as the first chapter.

In the second chapter, the definition of Fourier series, which is the crucial point of trigonometric approximation is given.The second part of this chapter consists of the definitions of Cesàro, Zygmund, Nörlund and Riesz means with some definitions that are going to be used in the main theorems.

In the third chapter, the definition of the main properties of function spaces used in this study are given.

In the fourth chapter, the results which were obtained, the proofs of these results and some lemmas that are used in these proofs are given.

KEYWORDS: Morrey space / Lipschitz class / Fourier series / Cesàro mean / Zygmund mean / Nörlund mean /Riesz mean

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbb{T}$	:	Birim çember ($[0,2\pi]$ aralığı)
$L^{p,\alpha}(\mathbb{T})$	:	Morrey Uzayı
$Lip_{\alpha,p}(\beta)$	:	Lipschitz Uzayı
σ_n	:	Cesàro (Fejér) ortalaması
$Z_{n,r}$	:	Zygmund ortalaması
R_n	:	Riesz ortalaması
N_n	:	Nörlund ortalaması
$\omega_{p,\alpha}$	:	Süreklilik modülü

ÖNSÖZ

Yüksek lisans çalışmam süresince bana değerli zamanını ayıran, tecrübesini benden esirgemeyen değerli danışmanım Prof. Dr. Ali GÜVEN’ e teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca çalışmalarımda bana destek olan kıymetli hocalarım Yrd. Doç. Dr. Figen AÇIL KİRAZ, Doç. Dr. Sebahattin İKİKARDEŞ ve Doç. Dr. Yunus Emre YILDIRIR’ a teşekkür ederim.

Son olarak her zaman yanımda olan, büyük bir özveriyle beni yetiştiren sevgili annem ile babama ve sonsuz anlayışından dolayı sevgili eşim Sema’ya çok teşekkür ederim.

1. GİRİŞ

Trigonometrik Fourier serilerinin Cesàro, Zygmund, Nörlund ve Riesz ortalamaları ile yaklaşım problemi birçok matematikçi tarafından çalışılmıştır. Cesàro ortalamasının Lebesgue uzaylarında bazı yaklaşım özellikleri Quade tarafından incelenmiştir [1]. Kokilashvili ve Samko Değişken üslü Ağırlıklı Lebesgue uzayında trigonometrik serilerin Zygmund ve Cesàro ortalamalarını incelemişlerdir [2].Cesàro ve Zygmund ortalamalarının ağırlıklı Orlicz uzaylarında yaklaşım özellikleri ise Güven ve Israfilov tarafından çalışılmıştır([7]).

Nörlund ve Riesz ortalamalarının L^p uzaylarında yaklaşım özellikleri Mohapatra ve Russell ([3]) , Chandra ([4]) , Leindler ([5]) tarafından çalışılmıştır. Güven , Chandra'nın ağırlıklı L^p uzaylarına genellemelerini ispatlamış ([6]) , Güven ve İsrafilov ise Chandra ve Leindler'in sonuçlarının benzerlerini genelleştirilmiş Lebesgue uzaylarında elde etmişlerdir ([8]).

Morrey uzaylarında yaklaşım teorisinin düz ve ters problemleri Tozman tarafından elde edilmiştir ([9]).

Bu çalışmada trigonometrik Fourier serilerinin Cesàro, Zygmund , Nörlund ve Riesz ortalamaları ile yaklaşım özellikleri incelenmiş ve [2], [4] ve [5] çalışmalarında elde edilen sonuçların Morrey uzaylarında benzerleri ispatlanmıştır.

2. FOURIER SERİLERİ

2. 1 Fourier Serileri

2. 1.1 Tanım : a_k **,** b_k $(\mathrm{k}=0,1,2,...)$ sabit sayılar olmak üzere

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos kx+b_k \sin kx\right) \qquad (2.\ 1)$$

serisine bir trigonometrik seri denir.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \sin kx-b_k \cos kx\right)$$

serisine de (2. 1) serisinin eşlenik serisi denir.

2. 1. 2 Tanım : $n\in\mathbb{N}$ **,** a_k**,** b_k $(k=0,1,2,...,n)$ sabit sayılar ve $|a_n|+|b_n|\neq 0$ olmak üzere

$$t_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k \cos kx+b_k \sin kx\right),\ \ n=0,1,2,...$$

ifadesine n . dereceden bir trigonometrik polinom denir.

2. 1. 3 Tanım : $n=0,1,\dots$ için derecesi n'yi aşmayan trigonometrik

polinomların kümesi Π_n ile gösterilir.

2. 1. 4 Tanım : $\mathbb{T}=[0,2\pi]$ olmak üzere $f\in L^1(\mathbb{T})$ olsun.

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos kt dt,\ k=0,1,2,...$$

ve

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin kt dt,\ k=1,2,...$$

olmak üzere $\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos kx+b_k \sin kx\right)$ trigonometrik serisine f fonksiyonunun *Fourier serisi* denir ve

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos kx+b_k \sin kx\right)$$

yazılır.

2. 1. 5 Tanım : $A_0(f)(x):=\frac{a_0}{2}$,

$$A_k(f)(x):=a_k \cos kx+b_k \sin kx \ , \ k=1,2,...$$

olmak üzere

$$S_n(f)(x)=\sum_{k=0}^{n}A_k(f)(x) \ , \ n=0,1,2,...$$

biçiminde tanımlı $\left(S_n(f)\right)$ dizisine f fonksiyonun Fourier serisinin kısmi toplamlar dizisi denir.

2. 1.6 Tanım : $f\in L^1$ ve $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos kx+b_k \sin kx\right)$

olsun. $\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \sin kx-b_k \cos kx\right)$ trigonometrik serisi bir fonksiyonun Fourier serisi ise bu fonksiyona f fonksiyonunun eşlenik fonksiyonu denir ve $\tilde{f}$ şeklinde gösterilir.

2. 2 Cesàro, Zygmund, Nörlund ve Riesz Ortalamaları

2. 2. 1 Tanım : $\left(S_n(f)\right)$, f fonksiyonun Fourier serisinin kısmi toplamlar dizisi olmak üzere

$$\sigma_n(f)(x)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}S_k(f)(x)=\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)A_k(f)(x),\quad n=1,2,...$$

ifadesine f fonksiyonunun Fourier serisinin n. dereceden *Cesàro (Fejér)* ortalaması denir.

2. 2. 2 Tanım : $r=1,2,...$ olmak üzere ,

$$Z_{n,r}(f)(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k^r}{(n+1)^r}\right)A_k(f),\ n=1,\ 2,\ \dots$$

ifadesine f fonksiyonunun Fourier serisinin r. mertebeden Zygmund ortalaması denir. Zygmund ortalaması , r = 1 durumunda Cesàro ortalamasına eşit olur.

2. 2. 3 Tanım : $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ pozitif reel sayıların bir dizisi olsun.

$$P_n=\sum_{m=0}^{n}p_m\ ,\ p_{-1}=P_{-1}=0$$

olmak üzere

$$N_n(f)(x)=\frac{1}{P_n}\sum_{m=0}^{n}p_{n-m}S_m(f)(x)$$

ifadesine f fonksiyonun Fourier serisinin $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine göre *Nörlund* ortalaması,

$$R_n(f)(x)=\frac{1}{P_n}\sum_{m=0}^{n}p_mS_m(f)(x)$$

ifadesine ise f fonksiyonun Fourier serisinin $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine göre *Riesz* ortalaması denir.

$$p_n = 1,\ n = 0,1,2,...$$

durumunda Nörlund ve Riesz ortalamalarının ikisi de Cesàro ortalamasına eşittir.

2. 2. 4 Tanım : $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ pozitif reel sayıların bir dizisi olsun. $n \geq m$ şeklindeki her $n,m \in \mathbb{N}$ için

$$p_n \leq c p_m \quad \left(p_n \geq c p_m \right)$$

olacak şekilde sadece $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine bağlı bir c pozitif sabiti varsa $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine

hemen hemen monoton azalan (artan) dizi denir ve $\{p_n\}_{n=0}^{\infty} \in AMDS$ $\left(\{p_n\}_{n=0}^{\infty} \in AMIS \right)$ şeklinde gösterilir.

2. 2. 5 Tanım : Ana teoremlerde kullanılacak olan Δp_n gösterimi

$$\Delta p_n := p_n - p_{n+1}$$

şeklinde tanımlıdır.

3. FONKSİYON SINIFLARI

3.1 Morrey Uzayları

3. 1. 1 Tanım : $\mathbb{T}=[0,2\pi]$, $0\le \alpha \le 2$ ve $p\ge 1$ olmak üzere

$$\|f\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} := \left\{ \sup_I \frac{1}{|I|^{1-\frac{\alpha}{2}}} \int_I |f(\theta)|^p |d\theta| \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty$$

koşulunu sağlayan $f\in L^p_{loc}(\mathbb{T})$ fonksiyonlarının kümesine $L^{p,\alpha}(\mathbb{T})$ Morrey uzayı denir . Buradaki supremum tüm $I\subset \mathbb{T}$ aralıkları üzerinden alınır.

Bu uzay bir Banach uzayıdır ve $\alpha=2$ olduğu durumda $L^p(\mathbb{T})$ uzayıyla , $\alpha=0$ durumunda da $L^\infty(\mathbb{T})$ uzayı ile çakışır . $L^{p,\alpha}(\mathbb{T})\subset L^p(\mathbb{T})$ dir.

3. 1. 2 Teorem : $0\le \alpha \le 2$ ve $1<p<\infty$ olsun. Her $f\in L^{p,\alpha}(\mathbb{T})$ için

$$\|S_n(f)\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} \le c\|f\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})}$$

olacak şekilde bir $c>0$ sabiti vardır ([9]).

3. 1. 3 Teorem : $0\le \alpha \le 2$ ve $1<p<\infty$ olsun .Her $f\in L^{p,\alpha}(\mathbb{T})$

için

$$\left\| \tilde{f} \right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} \leq c \left\| f \right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})}$$

olacak şekilde f 'den bağımsız bir $c > 0$ sabiti vardır ([9]).

3. 2 Süreklilik Modülü ve Lipschitz Sınıfları

3. 2. 1 Tanım : $f \in L^{p,\alpha}(\mathbb{T})$, $0 \leq \alpha \leq 2$ *ve* $p \geq 1$ *olsun.*

$$\Delta_h(f)(x) = f(x+h) - f(x)$$

olmak üzere

$$\omega_{p,\alpha}(f,\delta) = \sup_{0<h\leq\delta} \left\| \Delta_h(f) \right\|_{L^{p,\alpha}(T)}, \quad \delta \geq 0$$

şeklinde tanımlanan $\omega_{p,\alpha}(f,.) : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ fonksiyonuna f fonksiyonunun ***süreklilik modülü*** denir.

Süreklilik modülünün bazı özellikleri şunlardır ;

- *Her* f_1 , $f_2 \in L^{p,\alpha}(T)$ *için* $\omega_{p,\alpha}(f_1+f_2,.) \leq \omega_{p,\alpha}(f_1,.) + \omega_{p,\alpha}(f_2,.)$,
- $\omega_{p,\alpha}(f, n.\delta) \leq n\omega_{p,\alpha}(f,.)$, $n \in \mathbb{N}$
- $\omega_{p,\alpha}(f,0) = 0$,

- $\lim\limits_{\delta \to 0^+} \omega_{p,\alpha}\left(f,\delta\right)=0$.

3. 2. 2 Tanım : $0<\beta\leq 1$ **,** $0\leq\alpha\leq 2$ ve $p>1$ olsun.

$$Lip_{\alpha,p}\left(\beta\right):=\left\{ f\in L^{p,\alpha}\left(\mathbb{T}\right):\omega_{p,\alpha}\left(\delta,f\right)=O\left(\delta^{\beta}\right)\text{ , }\delta>0\right\}$$

kümesine ***Lipschitz sınıfı*** denir.

4. ANA TEOREMLER

4.1 Cesaro ve Zygmund Ortalamaları ile Yaklaşım

4. 1. 1 Yardımcı Sonuçlar

4. 1. 1. 1. Lemma : $f \in L^{p,\alpha}(\mathbb{T})$, $0 \le \alpha \le 2$ ve $p \ge 1$ $olmak\, üzere$,

$$\text{(i)} \qquad \left\| S_n(f) - \sigma_n(f) \right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} \le c \left\| S_n(\tilde{f}) - \sigma_n(\tilde{f}) \right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} \qquad (4.1)$$

olacak şekilde bir c >0 sabiti vardır.

$$\text{(ii)} \qquad \left\| S_n(f) - Z_{n,r}(f) \right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} \le c \left\| S_n(\tilde{f}) - Z_{n,r}(\tilde{f}) \right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} \qquad (4.2)$$

olacak şekilde bir c >0 sabiti vardır.

İspat: (i)

$$\begin{aligned}
\left\| S_n(f) - \sigma_n(f) \right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} &= \left\| S_n\left(-\tilde{\tilde{f}}\right) - \sigma_n\left(-\tilde{\tilde{f}}\right) \right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} \\
&= \left\| \sigma_n\left(\tilde{\tilde{f}}\right) - S_n\left(\tilde{\tilde{f}}\right) \right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} \\
&= \left\| \left(\sigma_n(\tilde{f}) - S_n(\tilde{f})\right)^{\sim} \right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} \\
&\le c \left\| \sigma_n(\tilde{f}) - S_n(\tilde{f}) \right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})}
\end{aligned}$$

(ii) ispatı (i) deki gibi yapılır.

4.1.1. 2 Teorem :(Morrey uzaylarındaki Marcinkiewicz Çarpan Teoremi)

$\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ reel sayıların

$$|\lambda_k| \le M \;, \quad \sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} |\lambda_j - \lambda_{j+1}| \le M \qquad k = 0,1,\ldots \tag{4.3}$$

koşullarını sağlayan bir dizisi olsun . Eğer $f \in L^{p,\alpha}(\mathbb{T})$, $0 \le \alpha \le 2$,

$1 < p < \infty$ ve $f(e^{i\theta}) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ik\theta}$ ise

$$h(e^{i\theta}) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda_k e^{ik\theta}$$

ve

$$\|h\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} \le c \|f\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})}$$

olacak şekilde $h \in L^{p,\alpha}(\mathbb{T})$ ve bir c >0 sabiti vardır ([9]).

4. 1. 2 Teoremler

4.1.2.1 Teorem: $f \in L^{p,\alpha}(\mathbb{T})$, $0 \le \alpha \le 2$ ve $p \ge 1$ olmak üzere

$$\| f - \sigma_n(\cdot\,, f)\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} \le c\,\omega_{p,\alpha}\left(\frac{1}{n}, f\right), \quad n = 1,2,3,\ldots$$

olacak şekilde n'den bağımsız bir $c > 0$ sabiti vardır.

İspat : $S_n(x, \tilde{f}) - \sigma_n(x, \tilde{f}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n+1} A_k(x, \tilde{f})$ dir.

$$\lambda_k^{(n)} = \begin{cases} \dfrac{\dfrac{k}{n+1}}{\sin\dfrac{k}{2n}}, & k \le n \\ 0, & k > n \end{cases} \qquad , \qquad k = 1, 2, \ldots$$

dizisi (4.3) deki şartları sağlar ([7]).

$$\left\| S_n\left(\cdot, \tilde{f}\right) - \sigma_n\left(\cdot, \tilde{f}\right) \right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} = \left\| \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n+1} A_k\left(\cdot, \tilde{f}\right) \right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})}$$

$$= \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} \sin\frac{k}{2n} A_k\left(\cdot, \tilde{f}\right) \right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})}$$

$$= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{(n)} \sin\frac{k}{2n} A_k\left(x, \tilde{f}\right) \right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})}$$

$$\le c \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \sin\frac{k}{2n} A_k\left(\cdot, \tilde{f}\right) \right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})}$$

$$\le c \left\| f\left(\cdot + \frac{1}{2n}\right) - f\left(\cdot - \frac{1}{2n}\right) \right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})}$$

$$\le c\, \omega_{p,\alpha}\left(\frac{1}{n}, f\right)$$

ve (4.1) den

$$\left\| S_n(\cdot, f) - \sigma_n(\cdot, f) \right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} \le c\, \omega_{p,\alpha}\left(\frac{1}{n}, f\right)$$

elde edilir. Buradan

$$\left\| f - \sigma_n(\cdot, f) \right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} \le \left\| f - S_n(\cdot, f) \right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} + \left\| S_n(\cdot, f) - \sigma_n(\cdot, f) \right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})}$$

$$\leq c\omega_{p,\alpha}\left(\frac{1}{n}, f\right)$$

bulunur.

4.1.2. 2 Teorem $f \in L^{p,\alpha}(\mathbb{T})$, $0 \leq \alpha \leq 2$, $p > 1$ $ve\ n = 1, 2, \ldots olmak\ üzere$,

$$\left\| f - Z_{n,r}(\,.\,,\, f) \right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} \leq c\omega_{p,\alpha}\left(f, \frac{1}{n}\right)$$

olacak şekilde *n*'den bağımsız bir c > 0 sabiti vardır.

İspat: $S_n\left(x, \tilde{f}\right) - Z_{n,r}\left(x, \tilde{f}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^r}{(n+1)^r} A_k\left(x, \tilde{f}\right)$

$$\lambda_k^{(n)} = \begin{cases} \dfrac{\dfrac{k^r}{(n+1)^r}}{\sin \dfrac{k}{2n}}, & k \leq n \\ 0, & k > n \end{cases} \qquad k = 1, 2, \ldots$$

dizisi (4.3) deki şartları sağlar ([7]).

$$\left\| S_n\left(., \tilde{f}\right) - Z_{n,r}\left(., \tilde{f}\right) \right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} = \left\| \sum_{k=1}^{n} \frac{k^r}{(n+1)^r} A_k\left(., \tilde{f}\right) \right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})}$$

$$= \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} \sin \frac{k}{2n} A_k\left(., \tilde{f}\right) \right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})}$$

$$= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{(n)} \sin \frac{k}{2n} A_k\left(., \tilde{f}\right) \right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})}$$

$$\leq c \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k}{2n} A_k\left(\,.\,, \tilde{f}\right) \right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})}$$

$$\leq c \left\| f\left(\,.+\frac{1}{2n}\right) - f\left(\,.-\frac{1}{2n}\right) \right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})}$$

$$\leq c\,\omega_{p,\alpha}\left(\frac{1}{n},f\right)$$

ve (4.2) den

$$\left\|S_n(.,f)-Z_{n,r}(.,f)\right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})}\leq c\,\omega_{p,\alpha}\left(\frac{1}{n},f\right)$$

elde edilir. Buradan

$$\left\|f-Z_{n,r}(.,f)\right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})}\leq\left\|f-S_n(.,f)\right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})}+\left\|S_n(.,f)-Z_{n,r}(.,f)\right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})}$$

$$\leq\left\|f-Z_{n,r}(.,f)\right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})}\leq c\omega_{p,\alpha}\left(f,\frac{1}{n}\right).$$

bulunur.

4. 2 Nörlund ve Riesz Ortalamaları İle Yaklaşım

4. 2. 1 Yardımcı Sonuçlar

Bu kısımda teoremler ispatlanırken kullanılacak bazı lemmalar verilmiştir .

4. 2. 1. 1 Lemma : $f\in L^{p,\alpha}(\mathbb{T})$, $0<\alpha\leq 2$ *ve* $1<p<\infty$ için

$$E_n(f)_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})}=O\left(\omega_{p,\alpha}\left(\frac{1}{n},f\right)\right),\quad n=1,2,3,...$$

olur.

4.2. 1. 2 Lemma : $0<\beta\leq 1$ *ve* $p>1$ *olsun. Bu durumda*

Her $f\in Lip_{\alpha,p}(\beta)$ *için*

$$\left\| f - S_n(f) \right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} = O\left(n^{-\beta}\right), \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{4.4}$$

olur.

İspat : $t^*_n \quad (n = 0,1,2,\ldots)$, $f \in Lip_{\alpha,p}(\beta)$ fonksiyonun trigonometrik polinomlarla en iyi yaklaşımı olsun. O halde

$$E_n(f)_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} = \left\| f - t^*_n \right\|_{L^{\alpha,p}(\mathbb{T})}$$

ve 4.2.1.1 Lemma'dan

$$\left\| f - t^*_n \right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} = O\left(\omega_{p,\alpha}\left(\frac{1}{n}, f \right) \right)$$

ve $f \in Lip_{\alpha,p}(\beta)$ olduğundan

$$\left\| f - t^*_n \right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} = O\left(n^{-\beta}\right)$$

olur .

Kısmi toplamlar dizisinin $L^{p,\alpha}(\mathbb{T})$ uzayında düzgün sınırlılığından ([9]),

$$\begin{aligned}
\left\| f - S_n(f) \right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} &\le \left\| f - t^*_n \right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} + \left\| t^*_n - S_n(f) \right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} \\
&= \left\| f - t^*_n \right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} + \left\| S_n(t^*_n - f) \right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} \\
&\le \left\| f - t^*_n \right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} + c \left\| f - t^*_n \right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} \\
&= O\left(\left\| f - t^*_n \right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} \right) \\
&= O\left(n^{-\beta}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

4. 2. 1. 3 Lemma : $0<\alpha\leq 2$, $1<p<\infty$ olsun .

$f\in Lip_{\alpha,p}(1)$ ise f mutlak sürekli ve $f'\in L^{p,\alpha}(\mathbb{T})$

olur .

İspat : $L^{p,\alpha}(\mathbb{T})\subset L^{p}(\mathbb{T})$ olduğundan $\|f\|_{p}\leq c\|f\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})}$ dır.

Buradan

$$\sup_{0<h\leq\delta}\left\|\Delta_h(f)\right\|_p\leq c\sup_{0<h\leq\delta}\left\|\Delta_h(f)\right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})}$$

ve

$$\omega_p(f,\delta)\leq c\;\omega_{p,\alpha}(f,\delta)$$

olur.

$f\in Lip_{\alpha,p}(1)$ ise

$$\omega_{p,\alpha}(f,\delta)\leq c\;\delta,$$

ve böylece

$$\omega_p(f,\delta)\leq c\;\delta$$

olduğundan $f\in Lip_p(1)$ dir. Böylece f mutlak sürekli ve $f'\in L^{p}(\mathbb{T})$ olur $([11])$.

f mutlak sürekli olduğundan h.h. $x\in[0,2\pi]$ için türevlenebilirdir.

$$\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\to f'(x),\ t\to 0\quad h.h.$$
$$\frac{\left|f(x+t)-f(x)\right|^p}{t^p}\to\left|f'(x)\right|^p,\ t\to 0\quad h.h.$$

olur.

Buradan

$$\frac{2}{\delta}\int_{\frac{\delta}{2}}^{\delta}\frac{\left|f\left(x+t\right)-f\left(x\right)\right|^{p}}{t^{p}}dt\rightarrow\left|f'\left(x\right)\right|^{p}\ ,\ \delta\rightarrow 0^{+}$$

elde edilir.

Her $I\subset\mathbb{T}$ aralığı için, Fatou Lemmadan

$$\frac{1}{\left|I\right|^{1-\frac{\alpha}{2}}}\int_{I}\left|f'\left(x\right)\right|^{p}dx=\frac{1}{\left|I\right|^{1-\frac{\alpha}{2}}}\int_{I}\left[\lim_{\delta\to 0^{+}}\frac{2}{\delta}\int_{\frac{\delta}{2}}^{\delta}\frac{\left|f\left(x+t\right)-f\left(x\right)\right|^{p}}{t^{P}}dt\right]dx$$

$$\leq\liminf_{\delta\to 0^{+}}\frac{1}{\left|I\right|^{1-\frac{\alpha}{2}}}\int_{I}\left[\frac{2}{\delta}\int_{\frac{\delta}{2}}^{\delta}\frac{\left|\Delta_{t}f\left(x\right)\right|^{p}}{t^{p}}dt\right]dx$$

$$\leq\liminf_{\delta\to 0^{+}}\frac{1}{\left|I\right|^{1-\frac{\alpha}{2}}}\int_{I}\frac{2}{\delta}\left(\frac{2}{\delta}\right)^{p}\left[\int_{0}^{\delta}\left|\Delta_{t}f\left(x\right)\right|^{p}dt\right]dx$$

$$=\liminf_{\delta\to 0^{+}}\left(\frac{2}{\delta}\right)^{p+1}\int_{0}^{\delta}\left[\frac{1}{\left|I\right|^{1-\frac{\alpha}{2}}}\int_{I}\left|\Delta_{t}f\left(x\right)\right|^{p}dx\right]dt$$

$$\leq\liminf_{\delta\to 0^{+}}\left[\left(\frac{2}{\delta}\right)^{p+1}\int_{0}^{\delta}\left\|\Delta_{t}f\left(x\right)\right\|_{L^{p,\alpha}}^{p}dt\right]$$

$$\leq\liminf_{\delta\to 0^{+}}\left[\left(\frac{2}{\delta}\right)^{p+1}\int_{0}^{\delta}\left(\omega_{p,\alpha}\left(f,\delta\right)\right)^{p}dt\right]$$

$$\leq\liminf_{\delta\to 0^{+}}\left(\frac{2}{\delta}\right)^{p+1}\int_{0}^{\delta}\left(c.\delta\right)^{p}dt$$

$$=\liminf_{\delta\to 0^{+}}\left(\frac{2}{\delta}\right)^{p+1}.\left(c.\delta\right)^{p}.\delta$$

$$=\ c$$

elde edilir . Buradan

$$\sup_{I} \frac{1}{|I|^{1-\frac{\alpha}{2}}} \int_{I} |f'(x)|^{P} dx \le c < \infty,$$

ve böylece $f' \in L^{p,\alpha}$ bulunur.

4. 2. 1. 4 Lemma : $0 < \alpha \le 2$, $1 < p < \infty$ olsun .

$f \in Lip_{\alpha,p}(1)$ ise her n=1 , 2,… için

$$\|S_n(f) - \sigma_n(f)\|_{L^{p,\alpha}} = O\left(n^{-1}\right) \tag{4. 5}$$

olur.

İspat: 4. 2. 1. 3 Lemma’dan f mutlak sürekli ve $f' \in L^{p,\alpha}(\mathbb{T})$ *dır.* f fonksiyonunun Fourier serisi

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f)(x)$$

ise

$$\tilde{f}'(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} k.A_k(f)(x)$$

olur.

$$S_n(f) - \sigma_n(f) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n+1} A_k(f)(x)$$

$$= \frac{1}{n+1} S_n\left(\tilde{f}'\right)(x).$$

Buradan, 3. 1. 2 Teorem ve 3. 1. 3 Teorem kullanılarak

$$\|S_n(f) - \sigma_n(f)\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} = \frac{1}{n+1} \left\|S_n\left(\tilde{f}'\right)\right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})}$$

$$\leq \frac{1}{n+1} c_1 \left\| \left(\tilde{f}' \right) \right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})}$$

$$\leq \frac{1}{n+1} c_2 \left\| \left(f' \right) \right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})}$$

$$\leq \frac{1}{n+1} c_3 \leq c \frac{1}{n}$$

elde edilir. Böylece

$$\left\| S_n(f) - \sigma_n(f) \right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} = O\left(n^{-1}\right)$$

bulunur.

4. 2. 1. 5 Lemma : $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ pozitif sayıların bir dizisi olsun .

$$\{p_n\}_{n=0}^{\infty} \in AMDS$$

veya

$$\{p_n\}_{n=0}^{\infty} \in AMIS \quad \text{ve} \quad (n+1) p_n = O(P_n)$$

ise $0 < \beta < 1$ için

$$\sum_{m=1}^{n} m^{-\beta} p_{n-m} = O\left(n^{-\beta} P_n\right) \tag{4. 6}$$

olur ([4]).

4. 2.1.6 Lemma (Abel dönüşümü): $u_1, u_2, ..., u_n$ ve $m_1, m_2, ..., m_n$, $n \in \mathbb{N}^+$, reel sayıları için

$$\sum_{v=1}^{n} u_v m_v = \sum_{v=1}^{n-1} U_v \left(m_v - m_{v+1}\right) + U_n m_n$$

olur. Burada $U_k = u_1 + u_2 + ... + u_k$, $k = 1, 2, ..., n$ dır ([10]).

4. 2. 2 Teoremler

4. 2 .2 .1 Teorem : : $p>1$, $0<\beta<1$ *için* $f \in Lip_{p,\alpha}(\beta)$ *olsun*.

$$\{p_n\}_{n=0}^{\infty} \in AMDS$$

veya

$$\{p_n\}_{n=0}^{\infty} \in AMIS \quad ve \quad (n+1)\,p_n = O(P_n)$$

ise

$$\left\| f - N_n(f) \right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} = O\left(n^{-\beta}\right)$$

olur.

İspat: $f(x) = \dfrac{1}{P_n}\sum_{m=0}^{n} p_{n-m} f(x)$ olduğundan

$$f(x) - N_n(f)(x) = \frac{1}{P_n}\sum_{m=0}^{n} p_{n-m}\left\{ f(x) - S_m(f) \right\}$$

olur. (4. 4) ve (4. 6) dan

$$\begin{aligned}
\left\| f - N_n(f) \right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} &\leq \frac{1}{P_n}\sum_{m=0}^{n} p_{n-m}\left\| f - S_m(f) \right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} \\
&= \frac{1}{P_n}\sum_{m=1}^{n} p_{n-m}\left\| f - S_m(f) \right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} + \frac{p_n}{P_n}\left\| f - S_0(f) \right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} \\
&= \frac{1}{P_n}\sum_{m=1}^{n} p_{n-m} O\left(m^{-\beta}\right) + O\left(\frac{1}{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{P_n} O\left(n^{-\beta} P_n\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= O\left(n^{-\beta}\right)
\end{aligned}$$

bulunur.

4. 2 .2 .2 Teorem : $p>1$ ve $0\le\alpha\le 2$ olmak üzere $f\in Lip_{p,\alpha}(1)$ *için*

$$\sum_{k=1}^{n-1} k\left|\Delta p_k\right| = O\left(P_n\right)$$

veya

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left|\Delta p_k\right| = O\left(\frac{P_n}{n}\right) \quad \text{ve} \quad (n+1)\,p_n = O\left(P_n\right)$$

ise

$$\left\| f-N_n(f)\right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} = O\left(n^{-1}\right) \quad dir.$$

İspat:

$$N_n(f)=\frac{1}{P_n}\sum_{m=0}^{n} P_{n-m}A_m(f)(x)$$

eşitliğinden ve Abel dönüşümünden

$$S_n(f)(x)-N_n(f)(x)=\frac{1}{P_n}\sum_{m=1}^{n}\left(P_n-P_{n-m}\right)A_m(f)(x)$$

$$=\frac{1}{P_n}\sum_{m=1}^{n}\Delta_m\left(\frac{P_n-P_{n-m}}{m}\right)\sum_{k=1}^{m}kA_k(f)(x)+\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{m}kA_k(f)(x)$$

buradan

$$\left\|S_n(f)-N_n(f)\right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})}\le\frac{1}{P_n}\sum_{m=1}^{n}\left|\Delta_m\left(\frac{P_n-P_{n-m}}{m}\right)\right|.\left\|\sum_{k=1}^{m}kA_k(f)\right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})}+\frac{1}{n+1}\left\|\sum_{k=1}^{m}kA_k(f)\right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})}$$

bulunur. (4. 5) den ise

$$\frac{1}{n+1}\left\|\sum_{k=1}^{m}kA_k(f)\right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})}=\left\|S_n(f)-\sigma_n(f)\right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})}=O\left(n^{-1}\right)$$

olur. Böylece

$$\left\|S_n(f)-N_n(f)\right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})}=O\left(\frac{1}{P_n}\right)\sum_{m=1}^{n}\left|\Delta_m\left(\frac{P_n-P_{n-m}}{m}\right)\right|+O\left(n^{-1}\right) \tag{4.7}$$

elde edilir. Önce

$$\sum_{k=1}^{n-1}k\left|\Delta p_k\right|=O\left(P_n\right)$$

olduğunu kabul edelim. Bu varsayımla birlikte

$$\sum_{m=1}^{n}\left|\Delta_m\left(\frac{P_n-P_{n-m}}{m}\right)\right|=O\left(\frac{P_n}{n}\right)$$

olduğu [5] numaralı kaynakta gösterilmiştir. Böylece (4. 7) den

$$\left\|S_n(f)-N_n(f)\right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})}=O\left(n^{-1}\right)$$

olduğu çıkar. Son eşitlik ve (4. 4) den

$$\begin{aligned}\left\|f-N_{n,}(f)\right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} &\leq \left\|f-S_n(f)\right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})}+\left\|S_n(f)-N_n(f)\right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})}\\ &=O\left(n^{-1}\right)+O\left(n^{-1}\right)\\ &=O\left(n^{-1}\right).\end{aligned}$$

Şimdi de

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left|\Delta p_k\right|=O\left(\frac{P_n}{n}\right) \tag{4.8}$$

olduğunu kabul edelim.

$$\left|\Delta_m\left(\frac{P_n-P_{n-m}}{m}\right)\right|=\frac{1}{m(m+1)}\left\{\sum_{k=n-m}^{n}p_k-(m+1)\,p_{n-m}\right\}$$

eşitliğinden ve tümevarımdan

$$\left|\sum_{k=n-m}^{n}p_k-(m+1)\,p_{n-m}\right|\le\sum_{k=1}^{m}k\left|p_{n-k+1}-p_{n-k}\right|$$

elde edilir. Bununla birlikte

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{n}\left|\Delta_m\left(\frac{P_n-P_{n-m}}{m}\right)\right| &\le\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m(m+1)}\left(\sum_{k=1}^{m}k\left|p_{n-k+1}-p_{n-k}\right|\right)\\
&=\sum_{k=1}^{n}k\left|p_{n-k+1}-p_{n-k}\right|\left(\sum_{m=k}^{n}\frac{1}{m(m+1)}\right)\\
&\le\sum_{k=1}^{n}k\left|p_{n-k+1}-p_{n-k}\right|\left(\sum_{m=k}^{\infty}\frac{1}{m(m+1)}\right)\\
&\le\sum_{k=1}^{n}k\left|p_{n-k+1}-p_{n-k}\right|\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}\left|\Delta p_k\right|.
\end{aligned}$$

(4. 7) ve (4. 8) den

$$\begin{aligned}
\left\|S_n(f)-N_n(f)\right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} &=O\left(\frac{1}{P_n}\right)\sum_{m=1}^{n}\left|\Delta_m\left(\frac{P_n-P_{n-m}}{m}\right)\right|+O\left(n^{-1}\right)\\
&=O\left(\frac{1}{P_n}\right)O\left(\frac{P_n}{n}\right)+O\left(n^{-1}\right)\\
&=O\left(n^{-1}\right).
\end{aligned}$$

Son eşitlik ve (4. 4) den

$$\left\| f - N_{n,}(f) \right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} \leq \left\| f - S_n(f) \right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} + \left\| S_n(f) - N_n(f) \right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})}$$

$$= O\left(n^{-1}\right) + O\left(n^{-1}\right)$$

$$= O\left(n^{-1}\right)$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

4. 2. 2. 3 Teorem : $p > 1$, $0 < \beta \leq 1$ *için* $f \in Lip_{p,\alpha}(\beta)$ *olsun*.

$$\sum_{m=0}^{n-1} \left| \Delta\left(\frac{P_m}{m+1} \right) \right| = O\left(\frac{P_n}{m+1} \right) \tag{4.9}$$

ise

$$\left\| f - R_n(f) \right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} = O\left(n^{-\beta}\right), \quad n = 1, 2, ...$$

olur.

İspat : $0 < \beta < 1$ olsun.

$$f(x) = \frac{1}{P_n} \sum_{m=0}^{n} p_{n-m} f(x)$$

olduğundan ve $R_n(f)(x)$ ortalamasının tanımdan

$$f(x) - R_n(f)(x) = \frac{1}{P_n} \sum_{m=0}^{n} p_m \left\{ f(x) - S_m(f) \right\} .$$

(4. 4) den

$$\left\|(f)(x)-R_n(f)(x)\right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} \le \frac{1}{P_n}\sum_{m=0}^{n} p_m \left\|(f)-S_m(f)\right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} \tag{4.10}$$

$$= \frac{1}{P_n}\sum_{m=1}^{n} p_m O\left(m^{-\beta}\right) + \frac{p_0}{P_n}\left\|(f)-S_0(f)\right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})}$$

$$= O\left(\frac{1}{P_n}\right)\sum_{m=1}^{n} p_m O\left(m^{-\beta}\right).$$

Abel dönüşümden

$$\sum_{m=1}^{n} p_m m^{-\beta} = \sum_{m=1}^{n-1} P_n \left\{m^{-\beta} - (m+1)^{-\beta}\right\} + n^{-\beta} P_n$$

$$\le \sum_{m=1}^{n-1} m^{-\beta} \frac{P_n}{m+1} + n^{-\beta} P_n ,$$

ve (4. 9) koşulundan

$$\sum_{m=1}^{n-1} m^{-\beta} \frac{P_n}{m+1} = \sum_{m=1}^{n-1} \Delta\left(\frac{P_n}{m+1}\right)\left(\sum_{k=1}^{m} k^{-\beta}\right) + \frac{P_n}{n+1}\sum_{m=1}^{n-1} m^{-\beta}$$

$$= O\left(n^{-\beta} P_n\right)$$

elde edilir. Böylece

$$\sum_{m=1}^{n} p_m m^{-\beta} = O\left(n^{-\beta} P_n\right)$$

olur. Bu son eşitlik ve (4.10) dan

$$\left\| f - R_n(f)\right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} = O\left(n^{-\beta}\right)$$

elde edilir. Şimdi $\beta = 1$ durumunu ele alalım. Abel dönüşümünden

$$R_n(f)(x) = \frac{1}{P_n}\sum_{m=0}^{n} p_m S_m(f)(x)$$

$$=\frac{1}{P_n}\sum_{m=0}^{n-1}\left\{P_m\left(S_m(f)(x)-S_{m+1}(f)(x)\right)+P_nS_n(f)(x)\right\}$$

$$=\frac{1}{P_n}\sum_{m=0}^{n-1}P_m\left(-A_{m+1}(f)(x)\right)+S_n(f)(x)$$

olur ve buradan

$$R_n(f)(x)-S_n(f)(x)=-\frac{1}{P_n}\sum_{m=0}^{n-1}P_mA_{m+1}(f)(x).$$

Yine Abel dönüşümünden

$$\sum_{m=0}^{n-1}P_mA_{m+1}(f)(x)=\sum_{m=0}^{n-1}\Delta\left(\frac{P_m}{m+1}\right)\left(\sum_{k=0}^{m}(k+1)A_{k+1}(f)(x)\right)$$

$$+\frac{P_n}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)A_{k+1}(f)(x).$$

Bununla beraber (4.5) ve (4.7) göz önüne alınırsa

$$\left\|\sum_{m=0}^{n-1}P_mA_{m+1}(f)(x)\right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})}\le\sum_{m=0}^{n-1}\left|\Delta\left(\frac{P_m}{m+1}\right)\right|\left\|\sum_{k=0}^{m}(k+1)A_{k+1}(f)(x)\right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})}$$

$$+\frac{P_n}{n+1}\left\|\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)A_{k+1}(f)(x)\right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})}$$

$$=\sum_{m=0}^{n-1}\left|\Delta\left(\frac{P_m}{m+1}\right)\right|(m+2)\left\|S_{m+1}(f)-\sigma_{m+1}(f)\right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})}$$

$$+P_n\left\|S_m(f)-\sigma_m(f)\right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})}$$

$$=O(1)\sum_{m=0}^{n-1}\left|\Delta\left(\frac{P_m}{m+1}\right)\right|+O\left(\frac{P_n}{n}\right)$$

elde edilir. Bu da

$$\left\| R_n(f) - S_n(f) \right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} = \frac{1}{P_n} \left\| \sum_{m=0}^{n-1} P_m A_{m+1}(f) \right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})}$$

$$\frac{1}{P_n} O\left(\frac{P_n}{n} \right) = O\left(\frac{1}{n} \right)$$

eşitliğini verir. Bu son eşitlik ve (4. 4) den

$$\left\| f - R_n(f) \right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} \leq \left\| f - S_n(f) \right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} + \left\| S_n(f) - R_n(f) \right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})}$$

$$= O\left(n^{-1}\right) + O\left(n^{-1}\right)$$

$$= O\left(n^{-1}\right)$$

elde edilir.

5. KAYNAKLAR

[1] Quade, E.S., "Trigonometric approximation in the mean", *Duke Math. J.* 3, 529-542, (1937).

[2] Kokilashvili, V. M. , Samko, S. G. "Operators of harmonic analysis in weighted spaces with non-standard growth "/ *J. Math. Anal. Appl.* 352 , 15–34, (2009).

[3] Mohapatra, R.N. and Russell, D.C., "Some direct and inverse theorems in approximation of functions", *J. Austral. Math. Soc.* (Ser. A) 34, 143-154, (1983).

[4] Chandra, P., "Trigonometric approximation of functions in L_p -norm", *J. Math Anal. Appl.* 275, 13-26, (2002).

[5] Leindler, L., "Trigonometric approximation in L_p -norm", *J. Math. Anal. Appl* 302, 129-136, (2005).

[6] Guven, A.,"Trigonometric approximation of functions in weighted L^p spaces", *Sarajevo J. Math.* 5 (17) , 99 -108, (2009).

[7] Guven, A., Israfilov, D. M. "Approximation by Means of Fourier Trigonometric Series in weighted Orlicz spaces", *Adv. Stud. Contemp. Math.*19, 283-295, (2009).

[8] Guven, A., Israfilov, D. M. "Trigonometric Approximation in Generalized Lebesgue Spaces $L^{p(x)}$, *J. Math. Inequal*. 4, 285-299, (2010).

[9] Tozman , N. P. ,"Morrey Uzaylarında Yaklaşım Teorisinin Bazı Problemleri",Doktora Tezi, *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstütisi,* (2009).

[10] Zygmund, A.,”Trigonometric Series,Volume I.”, *Cambridge Univ. press*, (1959).

[11] R.A.Devare and G. G. Lorentz, Constructive Approximation, Springer-Verlag (1993).