

**T.C.  
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**HİSTERİSİS YAPISINA SAHİP OLAN SİSTEMLER İÇİN KONTROL  
TASARIMLARI**

**DOKTORA TEZİ**

**Beyza Billur İSKENDER**

**Balıkesir, Eylül-2011**

T.C.  
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

HİSTERİSİS YAPISINA SAHİP OLAN SİSTEMLER İÇİN KONTROL  
TASARIMLARI

DOKTORA TEZİ

Beyza Billur İSKENDER

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Necati ÖZDEMİR

Sınav Tarihi: 05.09.2011

Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Nihal YILMAZ ÖZGÜR (BAÜ)

Doç. Dr. Fatma AYZAZ (GÜ)

Doç. Dr. Mustafa KAZAZ (CBÜ)

Yrd. Doç. Dr. Necati ÖZDEMİR (Danışman-BAÜ)

Yrd. Doç. Dr. Yunus Emre YILDIRIR (BAÜ)

Enstitü Yönetim Kurulunun ..... tarih ..... sayılı oturumunun .....  
nolu kararı ile ..... Mezun olmuştur.

Balıkesir, Eylül-2011

## ÖZET

### HİSTERİSİS YAPISINA SAHİP OLAN SİSTEMLER İÇİN KONTROL TASARIMLARI

**Beyza Billur İSKENDER**  
**Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,**  
**Matematik Anabilim Dalı**

**(Doktora Tezi / Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Necati ÖZDEMİR)**

**Balıkesir, 2011**

Histerisisin sistem performansı üzerindeki kararsızlık veya salınım gibi istenmeyen etkilerini telafi etmek amacıyla histerisisli sistemlerin kontrol tasarımlarının araştırıldığı bu tezde biri tam sayı diğeri kesirli mertebeden tek girdili ve tek çıktılı iki tip sistem göz önüne alınmıştır. Her iki sistemin histerisis etkileri diferansiyel bir model olan Duhem histerisis sınıfına ait modeller ile modellenmiştir.

İlk olarak tam sayı mertebeden lineer olmayan histerisis girişli sistemlerin bir sınıfının kontrol tasarımı sağlam bir kontrol tekniği olan kayan kip kontrolü ile gerçekleştirilmiştir. Histerisis etkisi Duhem modelin tersi alınmadan modelin analitik çözümü ile telafi edilmiştir. Daha sonra, aynı histerisis telafi yöntemi ile birleştirilen kayan kip kontrol tekniği ikinci dereceden afin olmayan histerisis girişli, lineer olmayan bir sistem için de araştırılmış ve bu kontrol manyetik askı sistemlerine uygulanmıştır. Ferromanyetik histerisis etkisi için Duhem histerisisin elektromanyetizmaya uygulaması olan Coleman-Hodgdon modeli kullanılmıştır. Coleman-Hodgdon modelin analitik çözümünü elde etmek amacıyla yeni materyal fonksiyonları tanımlanmıştır.

Ayrıca, kesirli türevlerin fiziksel sistemleri tam olarak modelleyebilme özelliğinden dolayı kesirli mertebeden sistemlerin histerisis etkisi altındaki davranışları incelenmiştir. Özel olarak, histerisis girişine maruz kalan kesirli yayılım sistemleri göz önüne alınmıştır. Kontrol tasarımı için klasik PID nin genelleştirmesi olan kesirli mertebeden  $PI^\lambda D^\mu$  kontrolleri kullanılmış ve kontrol parametreleri karesel integral hatasına göre ayarlanmıştır. Riemann-Liouville kesirli türevi ile modellenen yayılım sistemi nümerik olarak Grünwald-Letnikov yöntemiyle çözülmüştür. Sistem için kesirli mertebeden  $PI^\lambda D^\mu$  kontrolörleri klasik PID ile karşılaştırılmış ve sonuç olarak kesirli mertebeden  $PI^\lambda D^\mu$  kontrolün daha verimli olduğu gözlemlenmiştir.

**ANAHTAR SÖZCÜKLER :** Histerisis / Duhem histerisis / lineer olmayan sistemler / kesirli yayılım sistemleri / kayan kip kontrol / kesirli mertebeden  $PI^\lambda D^\mu$  kontrol

## ABSTRACT

### CONTROL DESIGNS FOR SYSTEMS THAT HAVE HYSTERESIS STRUCTURE

**Beyza Billur İSKENDER**

**Balikesir University, Institute of Science, Department of Mathematics**

**( Ph. D. Thesis / Supervisor : Assist. Prof. Dr. Necati ÖZDEMİR )**

**Balikesir - Turkey, 2011**

Two types of single input and single output systems with integer and fractional order are considered in this thesis where the control designs of systems with hysteresis are investigated by the purpose of compensation of undesirable effects of hysteresis on the system performance such as oscillations or instability. Hysteresis effects of both systems are modeled by the models belong to the class of Duhem hysteresis which is a differential model.

First of all, control design of a class of integer order nonlinear systems with input hysteresis is realized by a robust technique which is sliding mode control. The hysteresis effect is compensated by analytical solution of the Duhem model without taking inverse of the model. Later on, the sliding mode control technique combined with the same hysteresis compensation method is also investigated for a nonlinear system that has nonaffine hysteretic input of order two and applied to the magnetic levitation systems. Coleman-Hodgdon model which is the application of Duhem hysteresis to the electromagnetism is used to model the ferromagnetic hysteresis effect. New material functions are defined to obtain the analytical solution of the Coleman-Hodgdon model.

Furthermore, behaviors of fractional order systems under hysteresis effect are investigated since fractional derivatives have ability to model physical system exactly. Particularly, fractional diffusion systems subject to input hysteresis are considered. Fractional order  $PI^\lambda D^\mu$  controllers which are generalization of classical PID are used for control design and controller parameters are tuned according to square integral error. The diffusion system modeled with Riemann-Liouville fractional derivative is numerically solved by Grünwald-Letnikov approach. The fractional order  $PI^\lambda D^\mu$  controllers are compared with classical PID and it is observed that the fractional  $PI^\lambda D^\mu$  are more effective than classical ones.

**KEYWORDS :** Hysteresis / nonlinear systems / fractional diffusion systems / sliding mode control / fractional order  $PI^\lambda D^\mu$  control.

## İÇİNDEKİLER

	<b><u>Sayfa</u></b>
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SEMBOL LİSTESİ	vii
ŞEKİL LİSTESİ	ix
TABLO LİSTESİ	x
ÖNSÖZ	xi
1. GİRİŞ	1
2. HİSTERİSİS	4
2.1 Histerisis Çevrimi	4
2.2 Histerisis Operatörü	8
2.3 Temel Histerisis Operatörleri	11
2.3.1 Değişirme (Relay) Operatörü	11
2.3.2 Durma (Stop) Operatörü	12
2.3.3 Hareket (Play) Operatörü	13
2.4 Prandtl-Ishlinskii Model	14
2.5 Preisach Model	15
2.6 Duhem Model	16
2.7 SSSL (durma-tipi) Model	17
2.8 Coleman-Hodgdon Model	18
2.8.1 Coleman-Hodgdon Modelin Ferromanyetik Histerisise Uygulaması	21
2.9 Coleman-Hodgdon Histerisis Modeli İçin Yeni Materyal Fonksiyonları	25
2.9.1 Manyetik Histerisisi Karakterize Eden Parametreler	25
2.9.2 Manyetik Alana Bağlı Materyal Fonksiyonları	26
2.9.3 Deneysel Verilerin Modellenmesi	28
3. KONTROL TASARIMI İÇİN ÖN BİLGİLER	31
3.1 Kontrol Sistemi	31

3.2 Kontrol Edilebilirlik	32
3.3 Gözlenebilirlik	33
3.4 Kararlılık	34
3.4.1 Lyapunov Kararlılık Kriteri	36
3.5 Koordinat dönüşümleri	37
3.6 Kayan Kip Yöntemi	43
3.7 PID Kontrol	44
4. GİRİŞİNDE HİSTERİSİS ETKİSİNE MARUZ KALAN LİNEER OLMAYAN SİSTEMLERİN KONTROL TASARIMLARI	47
4.1 Girişinde Histerisis Etkisine Maruz Lineer Olmayan Sistemler Sınıfı	47
4.2 Kontrol Tasarımı Süreci	47
5. İKİNCİ DERECEDEDEN AFİN OLMAYAN HİSTERİSİS GİRİŞLİ LİNEER OLMAYAN SİSTEMLERİN KONTROL TASARIMLARI	51
5.1 İkinci Dereceden Afin Olmayan Histerisis Girişli Sistemlerin Sınıfı	52
5.2 Afin Olmayan Kontrol Tasarımı	53
5.3 Kontrol Tasarımının Manyetik Askı Sistemine Uygulanması	57
5.3.1 Manyetik Askı Sistemlerinin Matematiksel Modeli	59
5.3.2 Kontrol Tasarımı	61
5.3.3 Simülasyon Sonuçları	63
6. HİSTERİSİS ETKİSİNE MARUZ KESİRLİ MERTEBEDEN SİSTEMLERİN KONTROL TASARIMLARI	65
6.1 Kesirli Analiz	65
6.1.1 Kesirli Mertebeden Türevler	65
6.1.2 Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemler	68
6.1.3 Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemlerin Çözüm Yöntemleri	69
6.2 Histerisis Etkisine Maruz Kesirli Yayılım Sistemleri ve Kontrol Tasarımları	71
6.2.1 Kesirli Yayılım-Dalga Sistemleri	71
6.2.2 Kesirli Yayılım Süreci ve Çözümü	73
6.2.3 Kesirli Mertebeden PID Kontrolörü	77
6.2.4 Nümerik Örnek	78
7. SONUÇ	84
8. EKLER	85
EK A. Parçalı Tanımlı Fonksiyon Uzayları	85
EK A.1 Parçalı Monoton Fonksiyon	85

EK A.2 Parçalı Sürekli Fonksiyon	85
EK A.3 Parçalı Düzgün Fonksiyon	85
EK B. Difeomorfizma	85
9. KAYNAKLAR	86

## SEMBOL LİSTESİ

<b><u>Simge</u></b>	<b><u>Tanımı</u></b>
$\mathbb{R}_+$	Negatif olmayan reel sayılar
$\mathbb{R}^n$	$n$ boyutlu reel uzay
$C^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$	Pozitif reel sayılardan reel sayılara tanımlı sürekli fonksiyonlar uzayı
$C^n(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$	Pozitif reel sayılardan reel sayılara tanımlı, $n$ . mertebeden türevlenebilir ve türevleri sürekli fonksiyonlar uzayı
$C_{pm}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$	Pozitif reel sayılardan reel sayılara tanımlı sürekli parçalı monoton fonksiyonlar uzayı
$PC_{pm}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$	Pozitif reel sayılardan reel sayılara tanımlı parçalı sürekli parçalı monoton fonksiyonlar uzayı
$\Lambda$	Monotonluk parçalanışı
$\mathcal{H}$	Histerisis bölgesi
$\Phi$	Histerisis operatörü (Duhem histerisis)
$R_{r,s}$	Değiştirme histerisis operatörü
$S_h$	Durma operatörü
$P_h$	Hareket operatörü
$\Sigma$	Prandtl-Ishlinskii operatör
$P$	Preisach operatörü
$\mu(\alpha, \beta)$	Preisach yoğunluk fonksiyonu
$p$	Prandtl-Ishlinskii yoğunluk fonksiyonu
$\xi, \eta$	Coleman-Hodgdon modelin materyal fonksiyonları
$L$	Lie türev operatörü
$H$	Manyetik alan
$B$	Manyetik indüksiyon



<b><u>Simge</u></b>	<b><u>Tanımı</u></b>
$\Gamma(\cdot)$	Gamma fonksiyonu
${}_a I_t^\alpha$	Riemann-Liouville kesirli integral operatörü
${}_a D_t^\alpha$	Sol Riemann-Liouville kesirli türev operatörü
${}_t D_b^\alpha$	Sağ Riemann-Liouville kesirli türev operatörü
${}^G L D_t^\alpha$	Sol Grünwald-Letnikov kesirli türev operatörü
${}^G L D_b^\alpha$	Sağ Grünwald-Letnikov kesirli türev operatörü
${}_a^C D_t^\alpha$	Sol Caputo kesirli türev operatörü
${}_t^C D_b^\alpha$	Sağ Caputo kesirli türev operatörü
$\mathcal{L}$	Laplace operatörü
$E_\alpha$	Bir parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu
$E_{\alpha,\beta}$	İki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu
$k_p$	Oransal kontrolün kazancı
$k_i$	İntegral kontrolün kazancı
$k_d$	Türev kontrolün kazancı
max	maksimum
min	minimum

## ŞEKİL LİSTESİ

### Şekil

<u>Numarası</u>	<u>Adı</u>	<u>Sayfa</u>
Şekil 2.1	Ana histerisis çevrimi.	5
Şekil 2.2	Küçük histerisis çevrimi.	6
Şekil 2.3	(a) ve (b): Ekstremum değerleri aynı başlangıç değerleri farklı girişler. (c): (a) ve (b) deki girişlere ait histerisis çevrimi.	8
Şekil 2.4	Histerisis dönüştürücüsü	10
Şekil 2.5	Değiştirme histerisis çeşitleri:(a)sürekli histerisis, (b)süreksiz histerisis	11
Şekil 2.6	(a) Yay kütlesi, (b) Yay kütlesinin histerisis diyagramı.	13
Şekil 2.7	(a) Piston (b) Piston hareketinin histerisis diyagramı	14
Şekil 2.8	Preisach modelin blok diyagramı.	16
Şekil 2.9	SSSL histerisis	18
Şekil 2.10	Coleman-Hodgdon Modelin parametreleri	24
Şekil 2.11	Co-Cu filmin histerisis eğrisi	30
Şekil 2.12	Ni-Fe filmin histerisis eğrisi	30
Şekil 3.1	Kararlı denge noktasının geometrik yorumu.	35
Şekil 5.1	Manyetik askı sistemi	59
Şekil 5.2	Manyetik askı sisteminin çıktısı	64
Şekil 6.1	Sağ ve sol kesirli türevlerin fiziksel yorumu	66
Şekil 6.2	Histerisis girişli kesirli mertebeden yayılım sisteminin blok diyagramı	76
Şekil 6.3	Özdeğer sayısı $m$ nin (6.28) sisteminin cevabına olan katkısı	80
Şekil 6.4	(6.28) sisteminin analitik ve nümerik çözümlerinin karşılaştırılması	80
Şekil 6.5	(6.28) Sistemi için kesirli ve klasik PID kontrollerin karşılaştırılması	81
Şekil 6.6	(6.28) Sistemi için kesirli ve klasik PI kontrollerin karşılaştırılması	82
Şekil 6.7	(6.28) Sistemi için kesirli ve klasik PD kontrollerin karşılaştırılması	82

## TABLO LİSTESİ

### Tablo

<u>Numarası</u>	<u>Adı</u>	<u>Sayfa</u>
Tablo 2.1	Deneyisel histerisisin parametreleri	23
Tablo 2.2	Deneyisel verilerden okunan değerler	29
Tablo 5.1	Manyetik askı sisteminin parametreleri	61
Tablo 5.2	(5.18) sistemi için seçilen parametreler	63

## ÖNSÖZ

Bilindiği üzere matematikçiler genel olarak soyut kavramlar üzerinde çalışır, gerçek hayat problemleri ile pek ilgilenmezler. Bu durum ise genellikle kendilerine oluşturdukları soyut dünyada çok da lüzumlu olmayan şeyler ile uğraştıkları şeklinde algılanabilmektedir. Uygulamalı matematik bu algıyı değiştiren, matematiksel dünya ile gerçek dünyayı buluşturan bir bilim dalıdır. Fizik, mühendislik, tıp, ekonomi gibi pek çok disiplin ile iç içe olan kontrol teorisinin uygulamalı matematiğin bir dalı olarak bu buluşmaya katkısı büyüktür. Çünkü günümüzde baş döndürücü bir hızla değişen teknolojinin kontrol olmadan ilerlemesi mümkün değildir.

Tezde histerisisli sistemlerin kontrol tasarımları araştırılmaktadır. Lineer olmayan durumların özel bir tipi olan histerisis olgusu sistem performansını sınırlandırmakta ve dolayısıyla sistemin verimliliğini düşürmektedir. Histerisis olgusu fizik, mekanik, ekonomi gibi pek çok alanda meydana geldiğinden histeritik sistemler ile sık sık karşılaşmak mümkündür. Bu tezde ferromanyetik histerisis yapısına sahip manyetik askı sistemleri ile mekanik sınıftan bir histerisis etkisine maruz kesirli mertebeden yayılım sistemleri ele alınmıştır.

Tezin kapsamı göz önüne alındığında kontrol teorisinin gereği olan disiplinler arası çalışmanın kapısını araladım diyebilirim. Böylece hayata bakış açım değişti desem abartmış olmam. Çünkü her ne kadar bu disiplinlerle alakalı bilgilerim okyanusta birkaç damla olsa da bir nesne ile karşılaştığımda artık düşündüklerim çalışma mantığı, nasıl kontrol edildiği, nasıl geliştirilebileceği, vesaire...

Bu çalışma için öncelikle histerisis olgusunun da çıkış noktası olan ferromanyetik histerisis yani ferromanyetizma ile ilgilenmeye başladım. Başlangıçta her şey çok yabancıydı ve okuduğum bir bilgiyi anlamam tamamen matematiksel olarak değerlendirmem sebebiyle uzun vakit alıyordu. Örneğin, histerisisin tersinebilirliğini fonksiyonun tersi gibi düşünüyor ve çok değerli bir yapı olan histerisisin nasıl olur da tersinden bahsedilir diye şaşırıyordum. Bunun gibi problemleri aşmama ve histerisisin özünü kavramama yardımcı olan Üniversitemiz Fizik Bölümünden hocam Prof. Dr. Hakan Köçkar'a, verilerini kullanmama izin veren Yrd. Doç. Dr. Hilal Kuru ve Arş. Gör. Dr. Öznur Karaağaç'a teşekkür ederim.

Histerisis yapısına sahip sistemler ve kontrol tasarımları üzerine yoğunlaşma çalışmamın ikinci aşamasıydı. Sistem seçimi ve mantığını oluşturmama rehberlik yapan Orta Doğu Teknik Üniversitesi Elektrik Mühendisliği öğretim üyelerinden Prof. Dr. Kemal Leblebicioğlu'na; kayan kip kontrolün uygulamaları ve sistem parametrelerinin ayarlanması ile ilgili bilgilerinden faydalanma imkânı bulduğum Üniversitemiz Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümünden Yrd. Doç. Dr. Metin Demirtaş'a; teorik bilgileri görselleştirmek için kullandığım MATLAB programının temellerini oluşturmamda payı olan Exeter Üniversitesi Matematik Bölümünden Prof. Dr. Stuart Townley'e ve yine Üniversitemizin Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümünden Arş. Gör. Yusuf Altun'a minnetlerimi sunarım.

Ayrıca değerli vakitlerini ayıran tez izleme komitesine katkılarından; bilimsel çalışmalarımıza önem veren ve vaktimizi bu yönde değerlendirmemizi sağlayan bölümümüzün tüm ğretim üyelerine anlayışlarından; her zaman pozitif ve yardım sever olan çalışma arkadaşlarıma desteklerinden dolayı teşekkürü bir borç bilirim.

Uzun ve zaman zaman yorucu bir aşama olan doktora eğitimim boyunca ilgisi ve desteğiyle her zaman yanımda olduğunu bildiğim; disiplinler arası çalışmalar için beni cesaretlendiren, gerekli zemini oluşturan ve alanlarında uzman hocalarım ile çalışma ortamı sağlayan değerli hocam ve danışmanım Yrd. Doç. Dr. Necati zdemir'e bana her zaman güvendiği, moral ve motivasyonumu yüksek tuttuğu; daima önümde yeni ufuklar atığı ve yol gösterdiği için sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Son olarak canım ailem; sevgi, ilgi ve en önemlisi tükenmeyen sabrınızla hep yanımda olduğunuz için sağ olun...

Balıkesir, 2011

Beyza Billur İSKENDER

## 1. GİRİŞ

Histerisis yapısı; mekanik (plastik histerisis), fizik (ferromanyetik histerisis), faz geçişleri, hidroloji (soil-moisture histerisis), ekonomi (şok analizi) [1] gibi çeşitli alanlarda meydana geldiğinden bilim ve teknolojinin birçok dalında histeritik sistemler ile karşılaşmak mümkündür. Bu durum histerisisin modellenmesini ve histeritik sistemlerin analizini gerekli kılmış ve sonuç olarak histeritik sistemlerin matematiksel teorisi uygulamalı matematiğin yeni bir dalı olarak ortaya çıkmıştır. Bu teori, matematikçiler ve mühendisler tarafından lineer olmayan analiz, dinamik sistemler ve kontrol teori metotlarına dayanarak geliştirilmiştir (bkz. [1-6]).

En genel anlamda girdi ile çıktı arasında hafızaya dayalı lineer olmayan bir ilişki [4] olarak tanımlanan histerisis olgusu matematiksel anlamda uygun fonksiyon uzayları arasında tanımlanan bir operatördür. Tüm histerisis operatörlerinin ortak özelliği düzgün olmamalarıdır ve dolayısıyla lineer yaklaşımlara dayanan, sınır-değer problemlerini çözmek için gradient metotları, lineer kararlılık analizleri v.b. gibi etkili metotlar histeritik sistemler için henüz geliştirilmemiştir.

Histerisis yapısına sahip sistemlerin kontrolü önemli bir problemdir. Çünkü histerisis yapısı, kararsızlık veya salınım gibi istenmeyen etkilere sebep olarak sistem performansını sınırlamaktadır. Bu problemi çözmek için değişik metotlar içeren birçok çalışma yapılmıştır. Genel olarak iki yol kullanılmaktadır. İlki histerisisin tersinin oluşturularak sistemdeki etkisinin telafi edilmesi [7-9], diğeri ise histerisisin etkisinin kontrol tasarımı sürecinde telafi edilmesidir [10-17].

Histerisisin tersinin kullanıldığı kontrol tasarımları genellikle histerisis etkisinin operatör tabanlı modeller ile ifade edildiği sistemlere uygulanmıştır. Histerisisin düzgün olmayan yapısı ve çok değerliliği sebebiyle tersinin oluşturulduğu bu metotlar oldukça karmaşık, masraflı ve model parametrelerinin bilinmeyen hatalarına karşı duyarlıdır. Ayrıca bu tip kontrol tasarımları sistem kararlılığının garantilenmesini bazı özel kısıtlamalar dışında zorlaştırmaktadır [18]. Tersinin oluşturulması genellikle zor olan diferansiyel histerisis modellerini içeren sistemler ise ikinci tip kontrol tasarımı süreçlerinde tercih edilmiştir. Bu tip

sistemlerin kontrol tasarımlarında sağlam (robust) ve uyarlanabilir (adaptive) kontrol teknikleri kullanılmıştır [19,20]. Bunların dışında Fu ve diğerleri [21] sağlam ayarlanabilir (robust adaptive) kontrol tasarımını yeni tanımladıkları histerisis modeline uygulamışlardır. Tanımladıkları bu histerisis modeli operatör tabanlı modeller sınıfına dahildir. Çünkü durma operatörü ile oluşturulan Prandtl-Ishlinskii modelinde durma operatörünü SSSL histerisis modeli ile değiştirmişlerdir.

Histerisis yapısına sahip sistemler için uygun kontrol tasarımları araştırılan bu tezde histerisisin düzgün olmamasından kaynaklanan problemlere çözüm aranmıştır. Genel olarak histerisis etkisinin sistemin girişinde olduğu varsayılmıştır. Bu etki sistemin karakteristiğinden ötürü girişte kendiliğinden meydana gelebileceği gibi kontrol girişi sisteme nüfuz etmeden böyle bir etkiye maruz kalmış da olabilir.

Bu tezde kontrol tasarımları incelenen sistemleri iki sınıfa ayırmak mümkündür. İlki lineer olmayan bağıl derecesi durum değişkeninin boyutuna eşit olan sistemlerdir. Bu sistemlere 4. Bölümde değinilmiştir. Duhem modelin ferromanyetizmaya uygulaması olan Coleman-Hodgdon modelinin kullanıldığı bu tip sistemlerin kontrol tasarımı kayan kip kontrol tekniği ile yapılmıştır. Histerisis etkisi Coleman-Hodgdon modelin analitik çözümünün lineer olmayan bir fonksiyon ve sınırlı bir terimin toplamı ile ifadesine bağlı olarak telafi edilmiştir. 5. Bölümde ikinci dereceden afin olmayan histerisis girişli, bağıl derecesi durum değişkeninin boyutuna eşit, lineer olmayan sistemler ele alınmıştır. Buradaki kontrol tasarımı yine kayan kip tekniğinin 4. Bölümdeki histerisis telafi yöntemi ile birleştirilmesinden oluşmaktadır. Kontrol girdisinin ikinci dereceden afin olmayan histerisis ile karşılaşmasından kaynaklanan problem kontrol bölgesi sınırlandırılarak ve uygun kayan kip kontrolü tasarlanarak aşılmıştır. Oluşturulan kontrol günümüzde birçok teknolojinin temelini oluşturan manyetik askı sistemlerine uygulanmıştır. Manyetik askı sistemlerinin histerisis karakteristiği ferromanyetiktir ve sistem içinde kendiliğinden meydana gelir. Hodgdon'un ferromanyetik malzemeler için verdiği materyal fonksiyonlarıyla oluşturulan Coleman-Hodgdon modelin analitik çözümü olmadığından bu tezin 2. Bölümünde analitik çözüme izin veren ve ferromanyetik histerisisi modelleyen yeni materyal fonksiyonları tanımlanmıştır. Bu fonksiyonlar kullanılarak manyetik askı sistemi histerisis karakteristiği ile modellenmiş ve kontrol tasarımı verilmiştir.

İncelenen ikinci tip sistemler ise kesirli mertebeden lineer sistemlerdir. Son zamanlarda fiziksel sistemleri modellemedeki üstünlüğünden dolayı kesirli mertebeden sistemlere olan ilgi artmıştır ve bu durum kesirli mertebeden kontrol tasarımlarının ilgi odağı haline gelmesine sebebiyet vermiştir. Bu sebeple, 6. Bölüm histerisis etkisine maruz kesirli mertebeden sistemlerin kesirli mertebeden kontrol tasarımlarına ayrılmıştır. Histerisis etkisinin Duhem modeli sınıfından SSSL histerisis olduğu kabul edilmiştir. Özel olarak kesirli yayılım sistemi incelenmiş ve kontrol tasarımı kesirli mertebeden  $PI^\lambda D^\mu$  ve kombinasyonları kullanılarak araştırılmıştır. Karesel integral hatası kullanılarak optimize edilen bu kontroller klasik PID kontrolü ile karşılaştırılmıştır. Simulasyon sonuçları nümerik çözümler kullanılarak elde edilmiştir.

Tezin diğer bölümleri şu şekilde düzenlenmiştir. 2. Bölümde histerisis olgusunun ne olduğu ve matematiksel anlamı verilmiştir. Histerisis operatörleri ve histerisis modelleri kısaca tanıtılmış, bu tezde kullanılan Duhem histerisis modeli ve modelin farklı alanlara uygulamaları ayrıntılı olarak ele alınmıştır. Kontrol teorisinin özü 3. Bölümde verilmiş ve tezin diğer bölümlerinde kullanılacak olan kontrol kavramlarına, yöntemlerine ve kararlılık kriterlerine değinilmiştir. Yapılan çalışmaların değerlendirmesi ve elde edilen sonuçlar 7. Bölümde özetlenmiştir.



## 2. HİSTERİSİS

Kökeni antik Yunanca olan histerisis ( $\upsilon\sigma\tau\epsilon\rho\epsilon\tilde{\sigma}\upsilon\sigma$ ) teriminin kelime anlamı “geride kalan” veya “sonradan gelen” dir. Bu terimi ilk kez Ewing 1882’de ferromanyetizma üzerine yaptığı çalışmalarda kullanmıştır. Ancak histerisis kavramı sadece fizikte değil kimya, biyoloji, mühendislik, ekonomi ve hatta psikoloji gibi pek çok alanın farklı farklı dallarında ortaya çıkar. Örneğin plastisite, sürtünme, ferromanyetizma, ferroelektrik, süper iletkenlik, soğurma ve soğrulma, faz geçişleri ve şekil hafızası fizik alanında karşılaşılan histerisislerin yalnızca bir kısmıdır.

İlgilenildiği alana göre anlamı değişen histerisis olgusu için tüm alanlarda geçerli olacak bir tanım vermek tabii ki histerisis olgusunun matematiksel modellenmesi ile mümkündür. Bu anlamdaki çalışmaların başlangıç noktası 1897 de Duhem’in oluşturduğu diferansiyel modeldir. Duhem modeli olarak anılan bu model girdinin yön değiştirmesinin çıktının yön değiştirmesine sebep olduğu gerçeğini yansıtmaktadır. Histerisis kavramının ilk fonksiyonel yaklaşımı ise 1966’da Bouc’un yayınladığı çalışmasıdır [22]. Bouc çeşitli histerisis olgularını fonksiyon uzayları arasındaki bir dönüşüm olarak tanımlamıştır. Daha sonra Krasnosel’ski ve Pokrovskii adlı Rus matematikçiler histerisis operatörü kavramını tanımlamışlardır [3]. Böylece histerisisin matematiksel modellenmesi üzerine yapılan sistematik çalışmalar hız kazanmıştır ve farklı alanlarda çalışan birçok bilim adamı histerisisin matematiksel modellenmesine katkıda bulunmuştur. Bunlardan en önemlileri kronolojik sıra ile şöyle verilebilir; Mayergoyz [2], Macki ve diğerleri [4], Visintin [5], Brokate ve Sprekels [6].

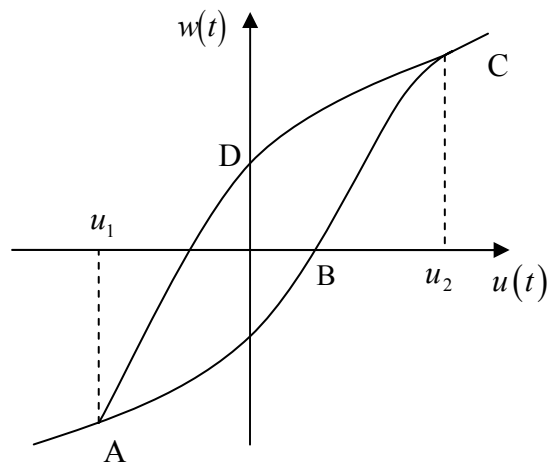
Histerisis kavramının matematiksel tanımlamasına değinmeden önce genel olarak histerisis çevriminin ne olduğu üzerinde durulacak böylece histerisisin çalışma mantığı oluşturulacaktır.

### 2.1 Histerisis Çevrimi

Histerisis olgusu en genel anlamda girdi ve çıktı arasındaki hafızaya dayalı lineer olmayan ilişki olarak tanımlanmaktadır [4]. Histerisisin diğer hafıza

etkilerinden en önemli farkı hızdan bağımsız olmasıdır. Dolayısıyla histerisis hızdan bağımsız hafıza etkisi olarak da tanımlanmaktadır [5]. Histeresinin özü kollara ayrılmadır, çevrim ise kollara ayrılmanın özel bir durumudur [3]. Çünkü elastik-plastik materyallerde olduğu gibi çevrimin oluşmadığı histerisis tipleri de mevcuttur. Çevrimin meydana geldiği histerisisler için çevrim içindeki alan fiziksel olarak enerji dağıtımına karşılık gelmektedir.

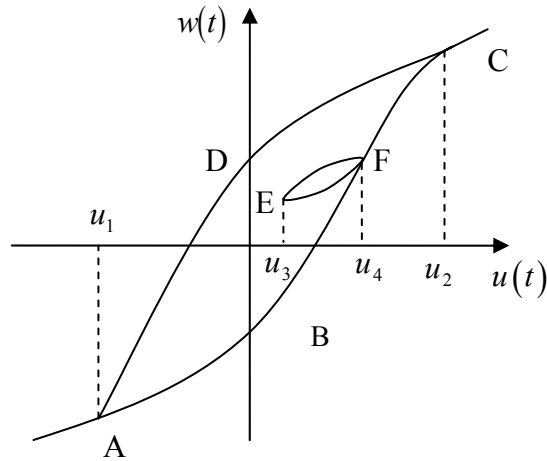
Histeresinin temel özelliklerini veren bu tanımlamalarda bahsi geçen kavramlar genel bir histerisis grafiği üzerinden açıklanacaktır. Bunun için sürekli  $t$  zamanına bağımlı  $u(t)$  ve  $w(t)$  gibi iki skaler değişken ile karakterize edilen bir sistem göz önüne alınır. Zamana bağlı  $u(t)$  ve  $w(t)$  değişkenleri için kolaylık olması bakımından bazen  $u$  ve  $w$  gösterimleri de kullanılacaktır.  $u$  ve  $w$  değişkenleri sistem teorisi terminolojisine göre sırasıyla girdi ve çıktı veya kontrol ve durum olarak adlandırılırlar. Girdi (veya kontrol) ve çıktı (veya durum)nın farklı farklı fiziksel anlamları olabilir. Mesela, ferromanyetik histerisiste girdi manyetik alan iken buna bağlı olarak çıktı manyetizasyon veya manyetik indüksiyondur; elastisitede girdi germe iken çıktı gerilimdir; ya da mekanikte girdi güç iken çıktı yer değiştirir. Girdi ve çıktının fiziksel anlamları ne olursa olsun genel olarak bir histerisis çevrimi  $u$  girdisinin herhangi iki değer arasında artırılıp azaltılmasıyla (veya tersine) oluşur.



**Şekil 2.1** Ana histerisis çevrimi.

Şekil 2.1'deki histerisis çevrimi şu şekilde oluşur.  $u(t)$  girdisi bir  $u_1$  değerinden  $u_2$  değerine kadar artırıldığında  $w(t)$  çıktısı ABC eğrisi üzerinde hareket eder, tersine olarak  $u(t)$  girdisi  $u_2$  değerinden  $u_1$  değerine kadar azaltıldığında  $w(t)$  çıktısı ABC eğrisi yerine CDA eğrisi üzerinde hareket eder. Yani histeritik bir sistemde girdinin ortadan kaldırılması ile sistem çıktısının başlangıç durumuna dönmesi sağlanamaz. Bunun için uygulanan girdi yönünün aksi yönünde girdi uygulamaya devam etmek gerekir.

Yukarıda verilen sürecin takip edilmesi ile oluşan grafiğe histerisis çevrimi, ABC ve CDA eğrilerine ise histerisisin kolları denir. Şekil 2.1'deki gibi bir histerisis çevrimi için histerisis grafiğinin iç bölgesi (histerisis bölgesi)  $\mathcal{H}$  olmak üzere  $\mathcal{H}$  deki her bir noktanın  $(u, w)$  ikilisi ile ulaşılabilir olduğu kabul edilir. Bu durum sistemin kontrol edilebilir olduğunu verir; yani  $u$  nun uygun bir seçimi ile sistem  $\mathcal{H}$  deki herhangi bir başlangıç noktasından  $\mathcal{H}$  deki herhangi bir bitiş noktasına yönlendirilebilir. Her durumda  $w$  çıktısının  $u$  girdisi ile tek türlü belirlendiği kabul edilir. Bu kabul histerisis operatörü kavramının formüle edilmesini daha açık bir hale getirir.



Şekil 2.2 Küçük histerisis çevrimi.

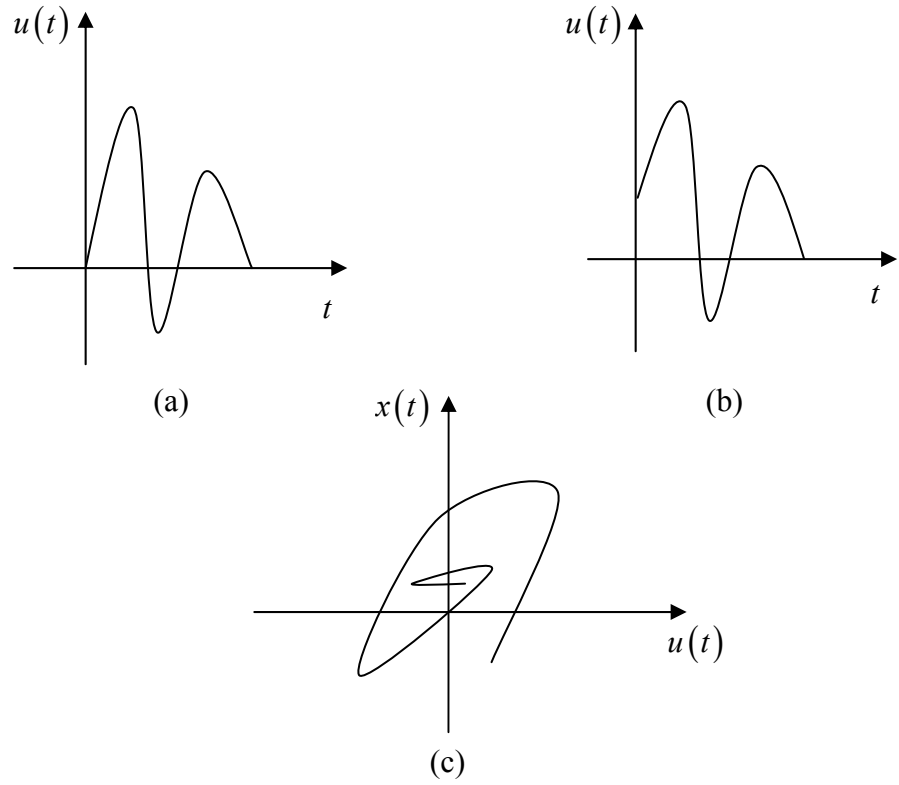
Ayrıca bazı histerisis tipleri için  $u_1 < u(t) < u_2$  iken  $u(t)$  nin hareketinin yönü değiştirilirse (mesela artan durumdayken azalan duruma getirilirse)  $w(t)$  çıktısı ABCDA ana çevrimi tarafından sınırlandırılmış  $\mathcal{H}$  bölgesinde hareket eder. Bu davranış özel modeller tarafından tanımlanır. Girişin Şekil 2.2'deki gibi  $u_1 < u_3 < u_4 < u_2$  özelliğini sağlayan  $u_3$  ve  $u_4$  değerleri arasında artırılıp azaltılması ile oluşan çevrimlere ise küçük (minör) çevrimler denir. [4]'de oluşturulan terminolojiye göre küçük çevrimlere izin veren histerisis ilişkilerine aktif (negatif) histerisis, diğerlerine ise pasif (pozitif) histerisis adları verilmiştir.

Küçük çevrimlerin olması durumunda histerisis bölgesindeki  $w$  değerini  $u$  girdisi ile tek türlü belirlemek mümkün değildir. Çünkü histerisis bölgesindeki her bir nokta bir veya iki ya da sonsuz tane küçük çevrimin içinde olabilir. Bu ise, herhangi bir  $t$  anındaki çıktının sadece o andaki girdi değerine değil aynı zamanda önceki girdi değerlerine de bağlı olduğunu gösterir. Buna hafıza etkisi denir.

Şekil 2.1'deki histerisise yerel hafızalı, Şekil 2.2'deki histerisise ise yerel olmayan hafızalı histerisis denmektedir. Yerel hafızalı histerisislerde kollara ayrılma giriş eşik değerini aştığı zaman meydana gelirken, yerel olmayan hafızalı histerisislerde girişin yön değiştirmesi kollanmaya sebep olur.

Histerisisin diğer bir önemli özelliği ise hızdan bağımsızlıktır. Hızdan bağımsızlık çıktının zaman skalasına göre değişmez kalması, diğer bir deyişle  $u$  nun türevine bir bağımlılığın olmamasıdır.

Birçok histerisis modeli için hızdan bağımsızlık histerisis kollarının geçmiş girişlerin ekstremum değerleri ile belirlenmesine izin vermektedir. Bu modeller için hafıza etkisi geçmiş girişlerin ekstremum değerleri tarafından saklanmaktadır. (Şekil 2.3).



**Şekil 2.3** (a) ve (b): Ekstremum değerleri aynı başlangıç değerleri farklı girişler, (c): (a) ve (b) deki girişlere ait histerisis çevrimi.

## 2.2 Histerisis Operatörü

Histerisis olgusu matematiksel olarak zamana bağlı fonksiyon uzayları arasında tanımlanan bir operatördür. Brokate ve Sprekels [6] histerisis operatörünü sürekli (C) parçalı monoton (pm) fonksiyonlar uzayı (bkz. EK A)  $C_{pm}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  üzerinde tanımlamıştır.  $C_{pm}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  tam olmadığından parçalı monotonluk kavramı çok kısıtlayıcı bir koşuldur. Bu durumun aşılması için Visintin [5] histerisis operatörünü  $C_{pm}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  den sürekli fonksiyonlar uzayı  $C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  ye genişletmiştir. Logemann ve Mawby [23] ise genellikle sürekli fonksiyonlar üzerinde tanımlanan histerisis operatörlerini parçalı sürekli (PC) parçalı monoton fonksiyonlar uzayı  $PC_{pm}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  ye genişletmiştir ve ayrıca ayrıca zamanda histerisis operatörünü tanımlamıştır.

**2.1.1 Tanım (Nedensellik) :** Herhangi bir  $t \in [0, T]$  anında  $w(t)$  çıktısı  $u|_{[t, T]}$  girdisinden bağımsız yani;

$$u_1|_{[0, t]} = u_2|_{[0, t]} \Rightarrow [\Phi(u_1, w_0)](t) = [\Phi(u_2, w_0)](t) \quad (2.1)$$

ise  $\Phi$  operatörüne nedensel operatör denir. Bu özellik Volterra özelliği olarak da bilinmektedir.

**2.1.2 Tanım (Hızdan Bağımsızlık) :**  $\varphi(0) = 0$  ve  $\varphi(T) = T$  koşullarını sağlayan sürekli ve artan her  $\varphi: [0, T] \rightarrow [0, T]$  fonksiyon için  $[0, T]$  aralığında

$$\Phi(u \circ \varphi, w_0) = \Phi(u, w_0) \circ \varphi$$

veya buna denk olarak herhangi bir sabit  $w_0$  başlangıç koşulu için

$$\Phi(\cdot, w_0): u \rightarrow w \Rightarrow \Phi(\cdot, w_0): u \circ \varphi \rightarrow w \circ \varphi$$

ise  $\Phi$  operatörüne hızdan bağımsız operatör denir.

Histerisisin temel özelliklerinden olan hızdan bağımsızlık,  $(u, w)$ -düzlemindeki grafiksel gösterimi için gereklidir. Özel olarak,  $u$  fonksiyonu periyodik ise hızdan bağımsızlık frekanstan bağımsızlığı beraberinde getirir.

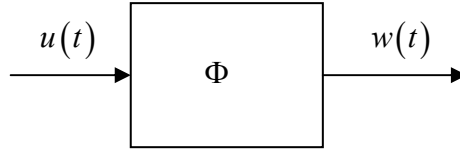
**2.1.3 Tanım (Genel Histerisis Operatörü) :** Sabit bir  $w(0) = w_0$  başlangıç durumu için herhangi bir  $t$  anındaki  $w(t)$  çıktısını  $u(t)$  girdisi ile ilişkilendiren hızdan bağımsız ve nedensel

$$w(t) = [\Phi(u, w_0)](t), \quad \forall t \in [0, T] \quad (2.2)$$

operatörüne histerisis operatörü denir.  $\Phi$  operatörüne histerisis dönüştürücüsü de denilmektedir [2]. Burada

$$(u(0), w_0) \in \mathcal{H} \text{ ve } [\Phi(u, w_0)](0) = w_0 \quad (2.3)$$

olduğu kabul edilmektedir.



**Şekil 2.4** Histerisis dönüştürücüsü.

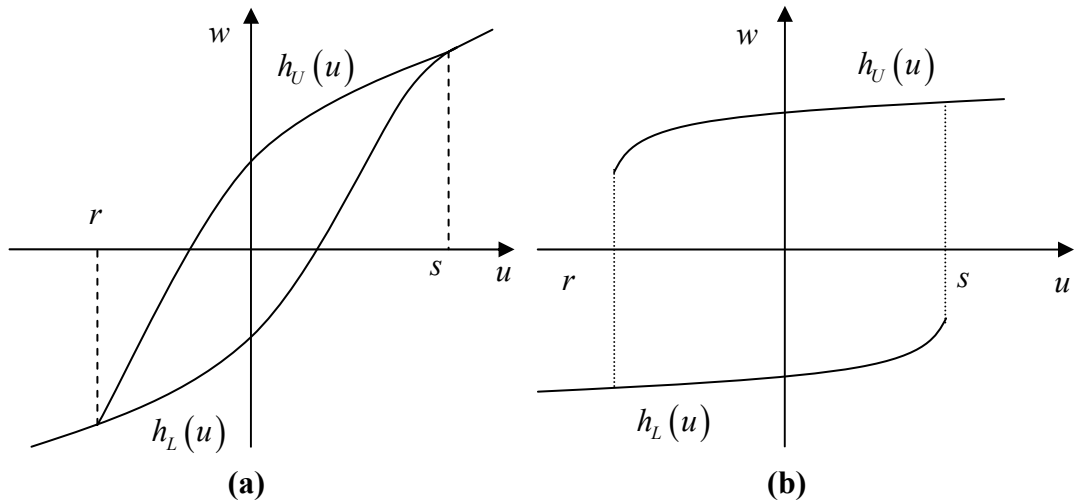
Çeşitli alanlarda meydana gelen histerisisleri modellemek için farklı histerisis operatörleri tanımlanmıştır. Değiştirme, durma ve hareket operatörleri bu tip operatörlere örnek olarak verilebilir. Bu operatörler basit histeritik ilişkileri modellemede kullanılır. Daha karmaşık histerisisleri modellemek için histerisis modelleri geliştirilmiştir. Histerisis modelleri genel olarak operatör tabanlı modeller ve diferansiyel modeller olmak üzere iki sınıfa ayrılır. Operatör tabanlı modeller temel histerisis operatörlerinin deneysel fonksiyonlar ile kombinasyonundan oluşan integral tipi modellerdir. Bu tip operatörlerin en çok bilinen örnekleri Preisach ve Prandtl-Ishlinskii modelleridir. Preisach tipi modeller olarak da anılan operatör tabanlı modellerin birçok histerisis tipine uygulanması mümkündür. Diferansiyel modeller ise başlıcası Duhem model olmak üzere Bouc-Wen, Duhem modelin özel bir durumu olan ve geliştirilmiş durma operatörü olarak da anılan SSSL model ve Duhem modelin elektromanyetizmaya uyarlaması olan Coleman-Hodgdon modeldir. Diferansiyel modeller uygulama kolaylığı ve parametrelerinin azlığı bakımından avantajlıdır. Ayrıca bu operatörlerin girdi fonksiyonlarının uzayı Preisach tipi operatörlere göre daha geniştir. Buna rağmen hızdan bağımsız bu modellerin çıktıları Preisach tipi histerisis modellerinde olduğu gibi geçmiş girişlerin ekstremum değerleri ile hesaplanamamaktadır [24].

Aşağıdaki kısımda öncelikle elektrik, mekanik ve elastik-plastik histerisisler için tanımlanan operatörler temel histerisis operatörleri başlığı altında verilecektir. Yerel hafızalı bu operatörlere temel operatör denilmesinin sebebi Preisach veya Prandtl-Ishlinskii modellerini oluşturmalarıdır. Sonraki kısımlarda ise histerisis modelleri ayrı başlıklar halinde ele alınacaktır.

## 2.3 Temel Histerisis Operatörleri

### 2.3.1 Değişirme (Relay) Operatörü

Pasif histerisis örneği olan değişirme histerisis, verilen sürekli, parçalı monoton  $u(t)$  girdisi için sırası ile  $[s, \infty)$  ve  $(-\infty, r]$  aralıklarında tanımlanan  $h_U(u)$  ve  $h_L(u)$  çıktı eğrilerini  $w(t) = [R_{r,s}(u)](t)$  ilişkisi ile takip eder. Burada  $r$  ve  $s$  değerleri  $r < s$  özelliğindeki eşik değerleridir ve  $R$  ilişkisi için bu değerler en son atanır.  $u \rightarrow \infty (-\infty)$  için doyumdan dolayı  $h_U$  ( $h_L$ ) asimptotik olarak sabittir.



Şekil 2.5 Değişirme histerisis çeşitleri: (a) sürekli histerisis, (b) süreksiz histerisis.

Değişirme histerisiste çıktının hafızaya dayalı davranışı aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$[R_{r,s}(u)](t) = \begin{cases} h_L(u(t)) & u(t) \leq r; \\ h_U(u(t)) & u(t) \geq s; \\ h_L(u(t)) & u(t) \in (r, s) \text{ ve } u(\tau(t)) = r; \\ h_U(u(t)) & u(t) \in (r, s) \text{ ve } u(\tau(t)) = s; \end{cases} \quad (2.4)$$



burada  $\tau(t) = \sup\{x : x \leq t, u(x) = r \text{ veya } u(x) = s\}$  dir (yani,  $\tau(t)$  eşik değerine en son ulaşılan zamanın değeridir). Eğer  $\tau(t) = \emptyset$  ( yani her  $x < t$  için  $u(x) \in (r, s)$ ) ise, modellenen fiziksel probleme bağlı olarak  $[R_{r,s}(u)](t)$  özel olarak tanımlanmalıdır. Yani herhangi bir eşik değerine ulaşılmamışsa  $[R_{r,s}(u)](t) = h_U(u(t))$  veya  $h_L(u(t))$  şeklinde gerektiği gibi tanımlanır [4].

Değiştirme histerisisin histerisis bölgesi  $\mathcal{H}$  aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\mathcal{H} = \{(u, w) : r < u < s, h_L(u) < w < h_U(u)\} \quad (2.5)$$

### 2.3.2 Durma (Stop) Operatörü

Durma operatörü  $S_h$ , ideal elastik-plastik bir materyalin bağıntısı olarak düşünülebilir (bkz. Şekil 2.6 (a)) ve bu yüzden genellikle elastik-plastik operatör olarak adlandırılır. Backlash olarak da bilinen bu operatöre durma (stop) adı Krasnosel'skii ve Pokrovskii tarafından verilmiştir.  $w$  çıktısı gerilim ve  $u$  girdisi gerginlik olmak üzere bu ikisi arasındaki ilişki, gerilimin modülü belli bir  $h$  gerilim veriminden (eşik değeri) küçük olduğu sürece, lineer Hooke kanunu ile ilişkilendirilir. Fakat gerilim bu verim değerine ulaştığında azalan bir gerginliğin etkisinde bile sabit kalır. Lineer elastik davranış gerginlik arttırıldığında tekrar elde edilir. Bu özellik analitik olarak durma operatörü ile açıklanır.

Durma operatörünün histerisis bölgesi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

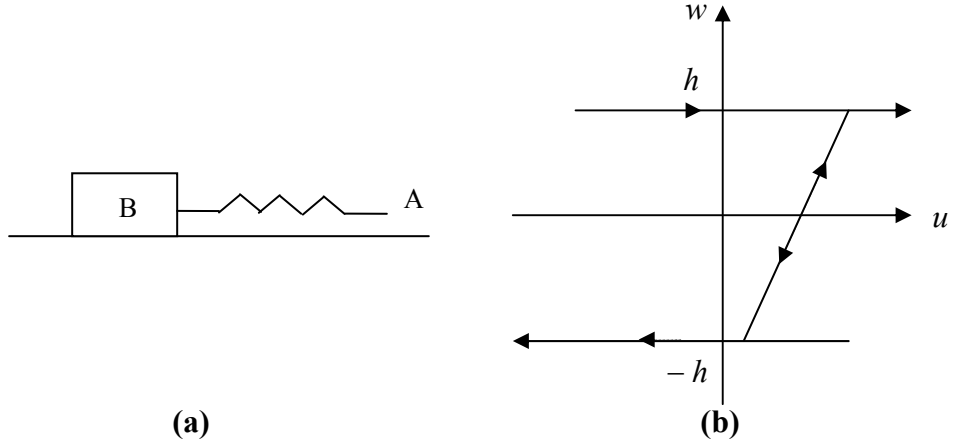
$$\mathcal{H} = \{(u, w) : -\infty < u < \infty, -h < w < h\}. \quad (2.6)$$

$w(t) = [S_h(u)](t)$  durma operatörünü tanımlamak için öncelikle sürekli parçalı monoton bir  $u$  girdisi için  $s_h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$s_h(u) = \min\{h, \max\{-h, u\}\} \quad (2.7)$$

fonksiyonu tanımlanır.  $\Lambda : 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$ ,  $[0, T]$  aralığının monotonluk parçalanışı (bkz. Ek A.1) ve  $w_0$  başlangıç koşulu olmak üzere  $S_h(u)$  durma operatörü aşağıdaki şekilde tanımlanır [6]:

$$\begin{aligned} S_h(u, w_0)(0) &= s_h(u(0) - w_0) \\ S_h(u, w_0)(t) &= s_h(u(t) - u(t_i)) + S_h(u, w_0)(t_i), \quad t_i < t \leq t_{i+1}, i = 0, 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (2.8)$$



**Şekil 2.6** (a) Yay kütlesi, (b) Yay kütlesinin histerisis diyagramı.

### 2.3.3 Hareket (Play) Operatörü

Hareket operatörü  $P_h$  tamamen iki element arasındaki mekanik hareket ile ilişkilendirilir. Bir boyutlu hareket bir piston olarak düşünülebilir. Uzunluğu  $2h$  olan bir piston Şekil 2.7 (a)'da gösterilmiştir.  $w(t)$  çıktısı pistonun merkezinin konumudur,  $u(t)$  girişi ise plançerin (hareketli göbek) konumudur. Şekil 2.7 (b) ise hareketi gösterir. Her zaman için  $|w - u| \leq h$  dir. Verilen bir  $u$  girişi için  $w(t) = [P_h(u)](t)$  hareket operatörünün çıktısı

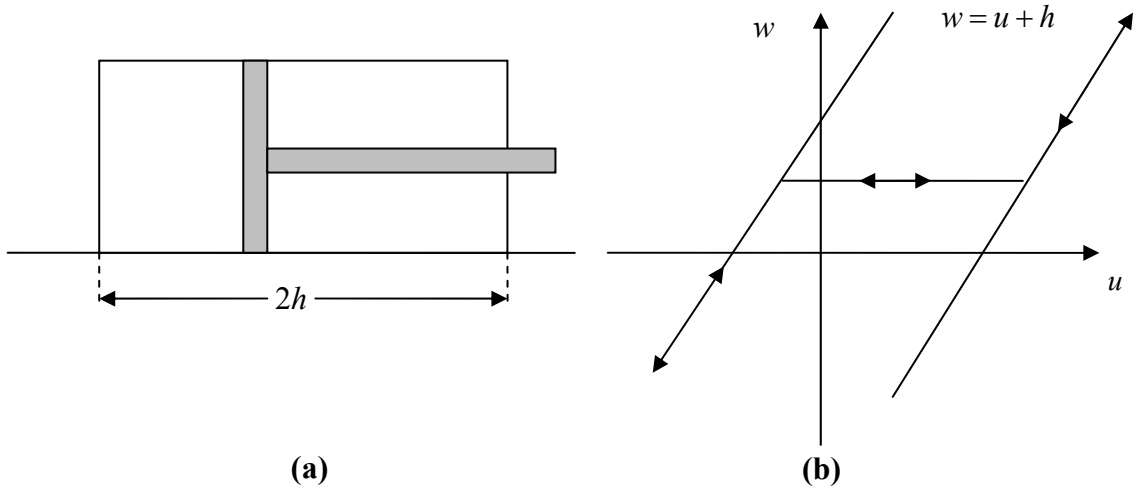
$$[P_h(u)](t) = u(t) - [S_h(u)](t) \quad (2.9)$$

şeklindedir. Burada  $S_h$  Şekil 2.6 (b)'deki stoptur.  $P_h$  için doğrudan bir formül vermek için

$$g_h(u, w) = \min[u + h, \max(u - h, w)]$$

olarak tanımlansın. Parçalı monoton sürekli  $u$  girişi için başlangıç koşulu  $w_0$  ve  $[0, T]$  aralığının monotonluk parçalanışı  $\Lambda : 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$  olmak üzere hareket operatörü aşağıdaki ifade ile verilir [6].

$$[P_h(u, w_0)](t) = g_h(u(t), w(t_{i-1})), \quad t \in [t_{i-1}, t_i], \quad i = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (2.10)$$



Şekil 2.7 (a) Piston, (b) Piston hareketinin histerisis diyagramı.

#### 2.4 Prandtl-Ishlinskii Model

Bu model ilk olarak 1928 de Prandtl tarafından tanıtılmıştır, fakat ondan bağımsız olarak 1944 de Ishlinskii tarafından formüle edilmiştir. Bu yüzden modeli literatürde her iki isimle de görmek mümkündür. Ishlinskii modeli elastisik-plastisik materyaller için önerilen bir modeldir ve matematiksel olarak Şekil 2.6'daki  $S_h$  durma operatörü ile oluşturulur:

$$w(t) = [\Sigma(u)](t) = \int_0^{\infty} p(h) [S_h(u)](t) dh. \quad (2.11)$$

Burada  $p(\cdot)$  bir yoğunluk fonksiyonudur. Prandtl-Ishlinskii modeli Preisach modelin özel bir durumudur.

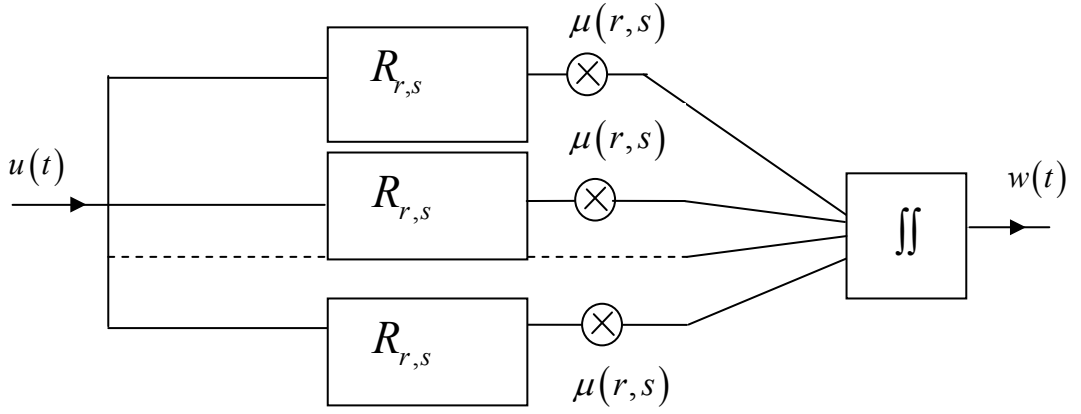
## 2.5 Preisach Model

Bu model Preisach tarafından 1930'lu yıllarda manyetik histerisisi modellemek için geliştirilmiştir. Preisach modeli için matematiksel bir analizden ziyade geometrik bir yorum vermiştir. Everett 1950'lerde bağımsız olarak aynı modeli soğurma histerisisi için oluşturmuştur. Modelin matematiksel formülasyonu ise 1970'de Krasnoselskii tarafından değiştirme operatörü kullanılarak oluşturulmuştur ve böylece Preisach modelin matematiksel özellikleri üzerine sistematik çalışmalar başlamıştır. 1980'ler ise modelin geliştirilmesinin çalışılmaya başlandığı yıllar olmuştur. Preisach modelin tamamen matematiksel ifadesi ise Brokate ve Sprekels [6] tarafından tanımlanmıştır. Preisach model ferromanyetik, manyetostriksüyon, piezoelastik ve elastik-plastik histerisis gibi pek çok alandaki histerisis ilişkisini modellemek için kullanılmaktadır.

Preisach modelin matematiksel ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$w(t) = [P(u)](t) = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(r, s) [R_{r,s}(u)](t) ds dr. \quad (2.12)$$

Burada  $[R_{r,s}(u)](t)$  2.3.1. Kısımda tanımlanan, eşik değerleri  $r$  ve  $s$ , çıkış değerleri ise  $\pm 1$  olan, değiştirme histerisisidir.  $\mu(r, s)$  fonksiyonu genellikle Preisach fonksiyonu veya ağırlık fonksiyonu olarak adlandırılan bir yoğunluk fonksiyonudur. Bu fonksiyon deneysel verilere bağlı olarak hesaplanır ve çok büyük  $r$  ve  $s$  değerleri için sıfır olduğu varsayılır.  $w(t) = [P(u)](t)$  ilişkisindeki  $P$  operatörüne ise Preisach operatörü denir. Preisach modeli, Şekil 2.8'de verildiği gibi paralel bağlı değiştirme operatörlerini ileten bir sistemin sürekli örnekleyicisi olarak yorumlanabilir.



Şekil 2.8 Preisach modelin blok diyagramı.

## 2.6 Duhem Model

Duhem histerisis modeli mekanik, manyetik gibi pek çok histerisis sınıfını tanımlayabilen bir modeldir. Model çıkışın karakterini değiştirmesinin sadece girişin yön değiştirmesine bağlı olduğu gerçeği üzerinde durur ve olgusal bir yaklaşım kullanır.

$w(t) = [\Phi(u, w_0)](t)$  Duhem operatörü aşağıdaki diferansiyel denklem ile tanımlanır:

$$\dot{w}(t) = \phi_L(u, x) \dot{u}_+(t) - \phi_U(u, x) \dot{u}_-(t). \quad (2.13)$$

Burada  $\dot{w}(t)$ , zamana göre türevi temsil etmek için kullanılmaktadır. Bu kullanıma ilerleyen bölümlerde de başvurulacaktır. (2.13) modelinde  $\phi_L$  ve  $\phi_U$  sırası ile histerisisin yükselen ve alçalan kollarını veren sürekli fonksiyonlardır ve

$$\dot{u}_+ = \max[0, \dot{u}] = \frac{1}{2} [|\dot{u}| + \dot{u}], \quad \dot{u}_- = \min[0, \dot{u}] = \frac{1}{2} [|\dot{u}| - \dot{u}]$$

şekindedir. Duhem operatörünün (2.13) ifadesine denk olan diğer bir ifadesi  $\text{sgn}(\cdot)$  işaret fonksiyonu olmak üzere şu şekildedir:

$$\dot{w} = \Phi(u, w, \text{sgn}(\dot{u}))\dot{u} \text{ ve } \Phi = \begin{cases} \phi_L(u, w), & \dot{u} > 0, \\ \phi_U(u, w), & \dot{u} < 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

(2.15) denkleminden açıkça görülür ki  $\dot{u} > 0$  iken histerisisin yükselen kolu ve  $\dot{u} < 0$  iken histerisisin alçalan kolu izlenir.

Bouc ise bu denklemin özel bir durumunu kullanır.

$$\frac{dw}{dt} + a \left| \frac{du}{dt} \right| \xi(u, w) = b \frac{du}{dt}. \quad (2.16)$$

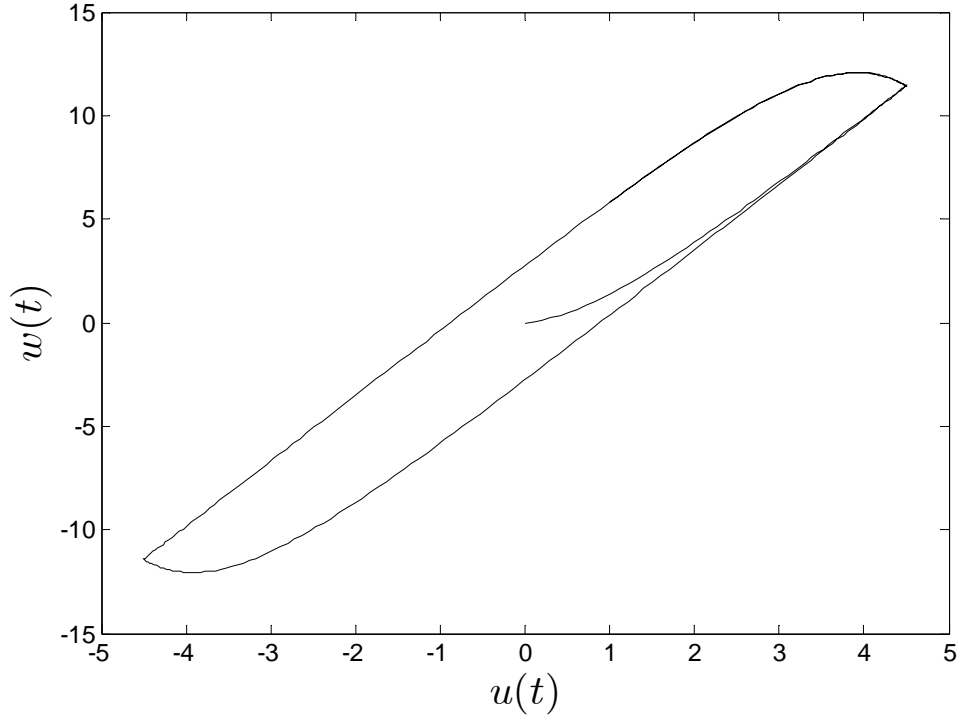
$\xi$  için tipik bir seçim  $\varphi$  parçalı doğrusal olarak seçilen bir fonksiyon olmak üzere  $\xi(u, w) = w - b\varphi(u)$  şeklindedir, dolayısıyla  $u(t)$  sinüsoidal iken  $w(t)$  klasik histerisisi biçimlendirir [4].

## 2.7 SSSL (durma-tipi) Model

Durma-tipi histerisis olarak sınıflandırılan modeli Su, Stepanenko, Svaboda ve Leung histerisis girişli bir sistemin uyarlanabilir kontrolünü histerisisin tersine başvurmadan gerçekleştirmek için önermişlerdir [12]. Son zamanlarda kontrol tasarımı açısından oldukça ilgi gören model literatürde yazarların isimlerinin ilk harfleri olan SSSL ile anılmaktadır. [12]'de verilen model  $u \in C^1([0, T], \mathbb{R})$  girdilerini  $w$  sürekli fonksiyonu ile ilişkilendirir.  $\rho$ ,  $c$  ve  $b$ ,  $c > b$  koşulunu sağlayan sabitler ve  $u(0) = u_0$  ve  $w(0) = w_0$  başlangıç koşulları olmak üzere SSSL modeli

$$\frac{dw}{dt} = \rho(cu - w) \left| \frac{du}{dt} \right| + b \frac{du}{dt} \quad (2.17)$$

şeklinde tanımlanır. Örneğin,  $\rho = 1$  parametresi,  $c = 3.165$ ,  $b = 0.345$  ve  $u(t) = 4.5 \sin(2.3t)$  girdisi için SSSL histerisisi Şekil 2.9'da verilmektedir.



Şekil 2.9 SSSL histerisis.

## 2.8 Coleman-Hodgdon Model

Coleman ve Hodgdon [25,26] Duhem modeli ayrıntılı olarak analiz etmiş ve manyetik histerisisi modellemek için Duhem modelin (2.13)'e denk bir ifadesini vermişlerdir. Böylece Duhem modelin elektromanyetizma uygulamaları için kullanışlı olduğunu göstermişlerdir. Duhem modelin özel bir hali olan bu model son zamanlarda bu iki bilim adamının isimleri ile anılmaktadır.

Coleman-Hodgdon modeli

$$\frac{dw}{dt} = \rho \left[ \xi(u) - w \right] \left| \frac{du}{dt} \right| + \eta(u) \frac{du}{dt} \quad (2.18)$$

diferansiyel denklemi ile verilmektedir. Burada  $\rho$  bir sabit,  $\eta(u)$  fonksiyonu histerisis kollarına ait ortalama eğimleri kapsayan ve  $\xi(u)$  ise histerisis kollarındaki  $w(t)$  çıktısının ortalama farkını veren materyal fonksiyonlarıdır. Gerçeğiyle uyumlu

bir histerisis modeli elde etmek için  $\xi$  ve  $\eta$  fonksiyonlarının aşağıdaki koşulları sağlaması gerekir:

- i.  $\xi$  parçalı düzgün (bkz. EK A), monoton artan ve  $u$  ya göre tek bir fonksiyondur. Ayrıca  $\lim_{u \rightarrow \infty} \xi'(u)$  sonlu bir değere sahip olmalıdır ( $\xi'(\cdot)$ ,  $\xi$  fonksiyonunun türevini göstermektedir).
- ii.  $\eta$  parçalı sürekli ve  $u$  ya göre çift bir fonksiyondur ve  $\lim_{u \rightarrow \infty} \eta(u) = \lim_{u \rightarrow \infty} \xi'(u)$  koşulunu sağlamalıdır.
- iii. Sonlu her  $u$  değeri için  $\xi'$  ve  $\eta$  aşağıdaki eşitsizlikleri sağlamalıdır:

$$\xi'(u) \geq \eta(u) \geq \rho e^{\rho u} \int_u^{\infty} [\xi'(\tau) - \eta(\tau)] e^{-\rho \tau} d\tau.$$

Modelin verilen deneysel sonuçları en iyi şekilde eşlemesini sağlamak için  $\xi$  ve  $\eta$  fonksiyonları ile  $\rho$  parametresi uygun biçimde ayarlanabilir. Duhem operatörünün elektromanyetizmadaki kullanışlığı da buradan gelmektedir.

(2.18) denkleminde  $\dot{u} \neq 0$  olması durumunda her iki taraf  $\frac{du}{dt}$  ile bölünürse

$$\frac{dw}{du} = \rho [\xi(u) - w] \operatorname{sgn}\left(\frac{du}{dt}\right) + \eta(u) \quad (2.19)$$

lineer diferansiyel denklemi elde edilir. Başlangıç koşulu  $(u_0, w_0)$  olmak üzere (2.19) diferansiyel denkleminin çözümü

$$\begin{aligned} w(t) &= [\Phi(u, w_0)](t) \\ &= \xi(u) + [w_0 - \xi(u_0)] e^{-\rho \operatorname{sgn}\left(\frac{du}{dt}\right)(u-u_0)} + e^{-\rho \operatorname{sgn}\left(\frac{du}{dt}\right)u} \int_{u_0}^u [\eta(\tau) - \xi'(\tau)] e^{\rho \operatorname{sgn}\left(\frac{du}{dt}\right)\tau} d\tau \end{aligned} \quad (2.20)$$

olarak bulunur.



$\text{sgn}\left(\frac{du}{dt}\right) = 1$  ise histerisinin yukarı çıkan kolu izlenir yani;

$$\phi_L(u) = \xi(u) + [w_0 - \xi(u_0)] e^{-\rho(u-u_0)} + e^{-\rho u} \int_{u_0}^u [\eta(\tau) - \xi'(\tau)] e^{\rho\tau} d\tau \quad (2.21)$$

ve  $\text{sgn}\left(\frac{du}{dt}\right) = -1$  ise histerisinin aşağı inen kolu izlenir

$$\phi_U(u) = \xi(u) + [w_0 - \xi(u_0)] e^{\rho(u-u_0)} + e^{\rho u} \int_u^{u_0} [\eta(\tau) - \xi'(\tau)] e^{-\rho\tau} d\tau. \quad (2.22)$$

$\xi'$  ve  $\eta$  sürekli olduklarından histerisinin yukarı çıkan kolunda

$$\left| [w_0 - \xi(u_0)] e^{-\rho(u-u_0)} + e^{-\rho u} \int_{u_0}^u [\eta(\tau) - \xi'(\tau)] e^{\rho\tau} d\tau \right| \leq \varphi_L \quad (2.23)$$

ve aşağı inen kolunda

$$\left| [w_0 - \xi(u_0)] e^{\rho(u-u_0)} + e^{\rho u} \int_u^{u_0} [\eta(\tau) - \xi'(\tau)] e^{-\rho\tau} d\tau \right| \leq \varphi_U \quad (2.24)$$

olacak şekilde  $\varphi_L$  ve  $\varphi_U$  sayıları vardır.  $\varphi = \max(\varphi_L, \varphi_U)$  denirse

$$\left| [w_0 - \xi(u_0)] e^{-\rho \text{sgn}\left(\frac{du}{dt}\right)(u-u_0)} + e^{-\rho \text{sgn}\left(\frac{du}{dt}\right)u} \int_{u_0}^u [\eta(\tau) - \xi'(\tau)] e^{\rho \text{sgn}\left(\frac{du}{dt}\right)\tau} d\tau \right| \leq \varphi \quad (2.25)$$

bulunur. Yani Coleman-Hodgdon modelin analitik çözümü  $\xi$  monoton artan fonksiyonu ile sınırlı bir terimin toplamı şeklinde ifade edilebilir. (2.25) sınırlı terimi

$$d_d(u) = [w_0 - \xi(u_0)] e^{-\rho \text{sgn}(\dot{u})(u-u_0)} + e^{-\rho \text{sgn}(\dot{u})u} \int_{u_0}^u [\eta(\tau) - \xi'(\tau)] e^{\rho \text{sgn}(\dot{u})\tau} d\tau$$

olarak gösterilirse (2.20) analitik çözümü

$$[\Phi(u, w_0)](t) = \xi(u) + d_d(u) \quad (2.26)$$

şeklinde yeniden ifade edilebilir. Coleman-Hodgdon modelin bu özelliği kontrol tasarımı açısından anlamlıdır. [20] ve [27]'de verilen kontrol tasarımı süreci Coleman-Hodgdon modelin bu özelliğine dayanmaktadır. Yine bu tezin 4. ve 5. Bölümlerindeki kontrol tasarımları bu özelliğe dayanarak geliştirilecektir.

### 2.8.1 Coleman-Hodgdon Modelin Ferromanyetik Histerisise Uygulaması

Hodgdon [28]'de Coleman ile oluşturdukları modeli ferromanyetik histerisise uygulamıştır. Bilindiği üzere ferromanyetik histerisiste girdi manyetik alan  $H(t)$  ve buna karşılık elde edilen çıktı manyetik indüksiyon  $B(t)$  dir. (2.18) modelinde  $u(t) = H(t)$  ve  $w(t) = B(t)$  olduğu kabul edilirse Hodgdon ferromanyetik histerisise modelini bu ikisinin (2.18) denklemindeki yerlerini değiştirip materyal fonksiyonları üzerindeki kısıtlamaları yeniden belirleyerek oluşturmuştur. Böylece hem yumuşak hem de sert ferromanyetik malzemelerin histerisise yapılarını modelleyen aşağıdaki histerisise modelini elde etmiştir:

$$\frac{du}{dt} = \rho \left[ \tilde{\xi}(w) - u \right] \left| \frac{dw}{dt} \right| + \tilde{\eta}(w) \frac{dw}{dt}. \quad (2.27)$$

(2.27) modelinde  $H(t)$  ile  $B(t)$  yerine diğer histerisise modelleri ile uyumluluk göstermesi bakımından  $u(t)$  ve  $w(t)$  gösterimleri kullanılmaktadır. Bu bölümün devamında  $u(t)$  manyetik alan ve  $w(t)$  manyetik indüksiyonu ifade edecektir.

(2.27)'nin  $\frac{dw}{du}$  (yerel manyetik geçirgenlik) cinsinden ifadesi

$$\frac{dw}{du} = \begin{cases} \left[ \rho(\tilde{\xi}(w) - u) + \tilde{\eta}(w) \right]^{-1}, & \frac{du}{dt} > 0 \\ \left[ -\rho(\tilde{\xi}(w) - u) + \tilde{\eta}(w) \right]^{-1}, & \frac{dH}{dt} < 0 \end{cases} \quad (2.28)$$

dir. Manyetik indüksiyona bağlı yeni materyal fonksiyonları  $\tilde{\xi}$  ve  $\tilde{\eta}$  üzerindeki kısıtlamalar ise şu şekildedir:

- iv.  $\tilde{\xi}$  parçalı düzgün ve  $w$  nun tek fonksiyonudur. Ayrıca  $\tilde{\xi}'(\infty)$  sonlu bir değere sahip olmalıdır ( $\tilde{\xi}'(\cdot)$ ),  $\tilde{\xi}$  fonksiyonunun türevini göstermektedir).
- v.  $\tilde{\eta}$  parçalı sürekli ve  $w$  nun çift fonksiyonudur ve  $\tilde{\eta}(\infty) = \tilde{\xi}'(\infty)$  koşulunu sağlar.
- vi. Her  $w$  değeri için  $\tilde{\eta}$  aşağıdaki eşitsizliği sağlamalıdır:

$$\tilde{\eta}(w) \geq \max \left\{ \tilde{\xi}'(w), \rho e^{\rho w} \left| \int_w^{\infty} [\tilde{\xi}'(\tau) - \tilde{\eta}(\tau)] e^{-\rho \tau} d\tau \right| \right\}.$$

$\tilde{\xi}$  ve  $\tilde{\eta}$  parçalı lineer fonksiyonlar olması durumunda (2.28) denkleminin kapalı çözümü elde edilir [25,26]. Bu çözümler nümerik integrasyon yerine yalnızca materyal fonksiyonlarının hesabını gerektirdiğinden daha kullanışlıdır. Farklı materyal fonksiyonları kullanıldığında çözümler nümerik integrasyon ile elde edilir. Aşağıda verilecek olan materyal fonksiyonları için  $u_0$  ve  $w_0$  başlangıç koşulları altında (2.28) denkleminin sonlu fark formu:

$$w_{i+1} = w_i + \left[ \pm \rho (\tilde{\xi}(w_i) - u_i) + \tilde{\eta}(w_i) \right]^{-1} (u_{i+1} - u_i) \quad (2.29)$$

dir.

$\xi$  ve  $\eta$  fonksiyonlarının seçimine paralellik gösteren  $\tilde{\xi}$  ve  $\tilde{\eta}$  fonksiyonlarının seçiminde aşağıdaki iki özellik göz önüne alınır:

- $\tilde{\xi}$  fonksiyonu ideal manyetizasyon eğrisi (anhisterisis)nin tersidir. İdeal manyetizasyon eğrisi yaklaşık olarak ana histerisis kollarının orta noktasında bulunmaktadır.
- $\tilde{\eta}(w) = \tilde{\xi}'(w)$  eşitliğinin sağlandığı aralıkta histerisisin kolları birleşmektedir. Dolayısıyla histerisis çevrimi tek bir eğriye dönüşür.

Hodgdon [28]'de  $\tilde{\xi}$  ve  $\tilde{\eta}$  fonksiyonları için modellenecek histerisis çevrimi üzerinden okunan verileri kullanmaktadır. Kullanılan veriler ve anlamları Tablo 2.1'de verilmiş ve ayrıca Şekil 2.10'daki histerisis çevrimi üzerinde gösterilmiştir. Bu şekildeki histerisis çevrimi Hodgdon'un permalloy malzemesi için oluşturduğu çevrimdir. Tablo 2.1'deki parametrelerin fiziksel anlamlarına 2.9.1 Kısımda değinilecektir.

**Tablo 2.1** Deneysel histerisisin parametreleri.

Parametre	Anlamı
$B_s$	Doyum noktasındaki manyetik indüksiyon değeri
$H_s$	Doyum noktasındaki alan değeri
$B_r$	Manyetik reminans
$H_c$	Koersivite alanı
$\mu_r$	Reminans değerindeki eğim
$\mu_c$	Koersivite noktasındaki eğim
$\mu_s$	Doyum noktasındaki eğim
$\mu_{cl}$	Doyumdan sonraki eğrinin eğimi

Hodgdon'un oluşturduğu materyal fonksiyonları aşağıdaki eşitlikler ile verilir:

$$\tilde{\xi}(w) = \begin{cases} A_1 \tan(A_2 w), & |w| < B_s \\ A_1 \tan(A_2 B_s) + (w - B_s) / \mu_{cl}, & w \geq B_s \\ -A_1 \tan(A_2 B_s) + (w + B_s) / \mu_{cl}, & w \leq -B_s \end{cases}, \quad (2.30)$$

$$\tilde{\eta}(w) = \begin{cases} \tilde{\xi}'(w) \left[ 1 - A_3 e^{\left( \frac{-A_4 |w|}{B_s - |w|} \right)} \right], & |w| < B_s \\ \tilde{\xi}'(w), & |w| \geq B_s \end{cases}. \quad (2.31)$$

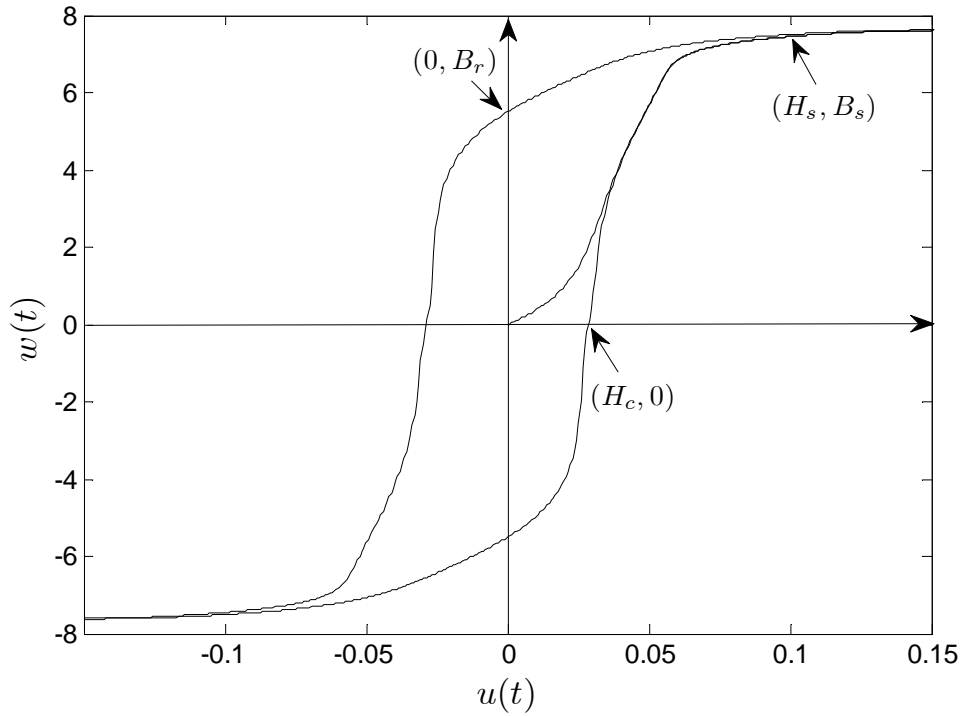
(2.30) ve (2.31) fonksiyonlarındaki  $A_1, A_2, A_3$  ve  $A_4$  parametreleri deneysel veriler ve (2.27) modeli kullanarak aşağıdaki şekilde hesaplanan parametrelerdir:

$$2H_s\mu_s A_2 - \sin(2B_s A_2) = 0,$$

$$A_1 = H_s \cot(A_2 B_s),$$

$$A_3 = 1 - \frac{1}{A_1 A_2} \left[ \frac{1}{\mu_c} - \rho H_c \right],$$

$$A_4 = \frac{B_r - B_{cl}}{B_r} \ln \left[ \frac{1}{A_3} - \frac{\cos(A_2 B_r)}{A_1 A_2 A_3} \left( \frac{1}{\mu_r} + \rho A_1 \tan(A_2 B_r) \right) \right].$$



Şekil 2.10 Coleman-Hodgdon modelin parametreleri.

## 2.9 Coleman-Hodgdon Histerisis Modeli İçin Yeni Materyal Fonksiyonları

Yukarıdaki kısımda bahsedildiği üzere Coleman-Hodgdon modelin ferromanyetik malzemelere uygulanması için Hodgdon'un önerdiği modelin analitik çözümü yoktur. Bu tezin 4. ve 5. Bölümlerinde önerilen kontrol tasarımı süreçleri ise Duhem histerisisin analitik çözümüne dayanmaktadır. Dolayısıyla manyetik histerisis için (2.28) modeli yerine (2.19) modelini kullanmayı sağlayacak manyetik indüksiyona değil manyetik alana bağımlı yeni materyal fonksiyonları önerilmiştir. Böylece Coleman-Hodgdon modelde parametrelerin yerlerini değiştirmeye gerek kalmayacak ve analitik çözümün elde edilmesi sağlanacaktır.

Hodgdon'un çalışmasında olduğu gibi materyal fonksiyonları histerisis eğrisi üzerinden okunacak veriler yardımıyla modellenecektir. Bu veriler histerisis eğrisinin karakteristiğini ortaya çıkaran ve histerisisi ölçülen malzeme hakkında bilgi veren önemli parametrelerdir.

### 2.9.1 Manyetik Histerisisi Karakterize Eden Parametreler

2.8.1 Kısımda belirtildiği gibi manyetik histerisiste girdi manyetik alan ve çıktı manyetik indüksiyondur. Bu süreci şu şekilde açıklamak mümkündür. Manyetik alan uygulanan bir ferromanyetik malzeme manyetize olur; yani bir manyetizasyon değeri kazanır. Manyetik alan ve malzemenin manyetizasyon değeri ortamda bir manyetik indüksiyon oluşmasına sebep olur. Alan uygulanmaya devam edildikçe malzemenin manyetizasyon değeri artar; ancak manyetik alan ortamdan çekildiğinde manyetizasyonun değeri sıfır olmaz ve bir histerisis eğrisi oluşur. Manyetik alanın artırılması ve azaltılması esnasında malzemenin karakteristiğini açığa çıkaran bazı özel parametreler vardır. Aşağıda anlamları verilen parametrelerle ilgili ayrıntılı bilgiye [29] numaralı kaynaktan ulaşılabilir.

1.  $H_s$  (*Doymuş manyetik alanı*) : Malzeme manyetize edilmeye devam edildiğinde belli bir değerden sonra manyetizasyon artık değişmeyecek veya oldukça küçük bir değişim meydana gelecektir. İşte bu noktadaki manyetik alan değerine doymuş manyetik alanı değeri denilmektedir.

2.  $B_s$  (Doyum manyetik indüksiyonu) : Doyum manyetik alanına karşılık gelen manyetik indüksiyon değerini göstermektedir.
3.  $B_r$  (Reminans-Kalıcı manyetik indüksiyon) : Manyetik alanın yönü değiştirilip sıfıra doğru azaltıldığında sıfır manyetik alan değerine karşılık gelen manyetik indüksiyon değeridir. Histerisisin en temel özelliklerinden biridir.  $B_r$  nin büyük olması kayıt malzemeleri için aranan bir özelliktir; küçük olması ise elektromıknatıslar ve aktüatörler için istenen bir özelliktir.
4.  $H_c$  (Koersivite) : Histerisis çevriminin genişliğini veren alan değeridir. Bu değerde manyetik indüksiyon sıfırdır.  $H_c$  nin büyük olması histerisisin geniş olduğu anlamına gelir ki bu malzemenin sert olduğuna işaret eder.  $H_c$  nin küçük olması ise malzemenin yumuşak olduğunu gösterir.
5. 1., 2., 3. ve 4. maddelerde verilen değerlerdeki eğim değerleri sırasıyla  $\mu_c = \left. \frac{dw}{du} \right|_{(H_c, 0)}$ ,  $\mu_r = \left. \frac{dw}{du} \right|_{(0, B_r)}$  ve  $\mu_s = \left. \frac{dw}{du} \right|_{(B_s, H_s)}$  olarak gösterilmektedir. Ayrıca  $\mu_{cl}$  doyumdan sonraki eğim değeridir.

### 2.9.2 Manyetik Alana Bağlı Materyal Fonksiyonları

Materyal fonksiyonlarından  $\xi$  nin anhisterisis eğrisini modellediği bilinmektedir. Bu fonksiyonun doyum değerleri arasında lineer olmadığı, doyumdan sonra ise lineer davranış gösterdiği kabul edilmektedir.  $\xi$  fonksiyonu histerisis karakteristiğine uygun olarak; doyum değerleri arasında tanjant hiperbolik fonksiyonu, doyumdan sonra ise eğimi ve bir noktası bilinen bir doğru denklemi ile parçalı olarak aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\xi(u) = \begin{cases} A_1 \tanh(A_2 H_s) + \mu_{cl}(u - H_s), & u \geq H_s, \\ A_1 \tanh(A_2 u), & |u| < H_s, \\ -A_1 \tanh(A_2 H_s) + \mu_{cl}(u + H_s), & u \leq -H_s. \end{cases} \quad (2.32)$$

$\eta(u) = \xi'(u)$  eşitliğinin sağlandığı aralıkta histerisis kollarının birleşmekte olduğu göz önüne alınarak manyetik alana bağlı  $\eta$  fonksiyonu ise şu şekilde tanımlanır:

$$\eta(u) = \begin{cases} \mu_{cl} \left( 1 - A_3 \exp\left(-\frac{A_4 |u|}{H_s - |u|}\right) \right), & |u| < H_s, \\ \mu_{cl}, & |u| \geq H_s. \end{cases} \quad (2.33)$$

(2.32) ve (2.33) materyal fonksiyonlarının 2.8 Kısımda verilen **i**, **ii** ve **iii** koşullarını sağladıkları kolaylıkla gösterilir.

(2.32) ve (2.33) materyal fonksiyonlarında verilen  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  ve  $A_4$  parametreleri deneysel verilere bağlı olarak aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$A_1$  katsayısı  $(H_s, B_s)$  doyum noktasındaki veriler yardımıyla hesaplanmaktadır. Bu noktada histerisisin yükselen ve alçalan kolları birleşmekte ve sonrasında histerisis eğrisi anhisterisis fonksiyonunu takip etmektedir. Bu sebeple, doyum değerleri  $\xi$  fonksiyonunda yerine yazılır ve

$$A_1 = B_s \coth(A_2 H_s) \quad (2.34)$$

olarak bulunur.

$A_2$  katsayısı  $\xi(u)$  nun  $(H_s, B_s)$  doyum noktasındaki eğimi  $\mu_s$  ile hesaplanır.

Buna göre,

$$\xi'(H_s) = A_1 A_2 (1 - \tanh^2(A_2 H_s)) = \mu_s \quad (2.35)$$

ifadesinde  $A_1$  in değeri yerine yazılıp düzenlenirse

$$2A_2 B_s - \mu_s \sinh(2A_2 H_s) = 0 \quad (2.36)$$

denklemini elde edilir. Bu denklemin çözümü  $A_2$  katsayısının değerini verir.



$A_3$  katsayısı histerisisin  $(0, B_r)$  reminans noktasında eğim değeri  $\mu_r$  ile hesaplanır.  $\frac{dw}{du}\Big|_{(0, B_r)} = \mu_r$  ifadesi (2.19) modelde yerine yazılır. Pozitif reminans

değerine manyetik alan azaltılarak ulaşıldığı için  $\text{sgn}(\dot{u}) = -1$  alınırsa

$$A_3 = \frac{\mu_s - \mu_r + \rho B_r}{\mu_{cl}} \quad (2.37)$$

elde edilir.

Benzer şekilde;  $(H_c, 0)$  koersivite noktasında histerisisin eğim değeri

$\frac{dw}{du}\Big|_{(H_c, 0)} = \mu_c$  (2.19) modelde yerine yazılır ve bulunan denklemde  $A_3$  değerinin

yukarıdaki ifadesi kullanılırsa  $A_4$  değeri

$$A_4 = -\text{Re} \left[ \frac{H_c - H_s}{H_c} \ln \left( \frac{1}{A_3} - \frac{\mu_c - \rho A_1 \tanh(A_2 H_c)}{A_3 \mu_{cl}} \right) \right] \quad (2.38)$$

eşitliğinden hesaplanır. Pozitif koersivite değerine manyetik alan artırıldığı durumda ulaşıldığından  $\text{sgn}(\dot{u}) = 1$  alınmıştır.

### 2.9.3 Deneysel Verilerin Modellenmesi

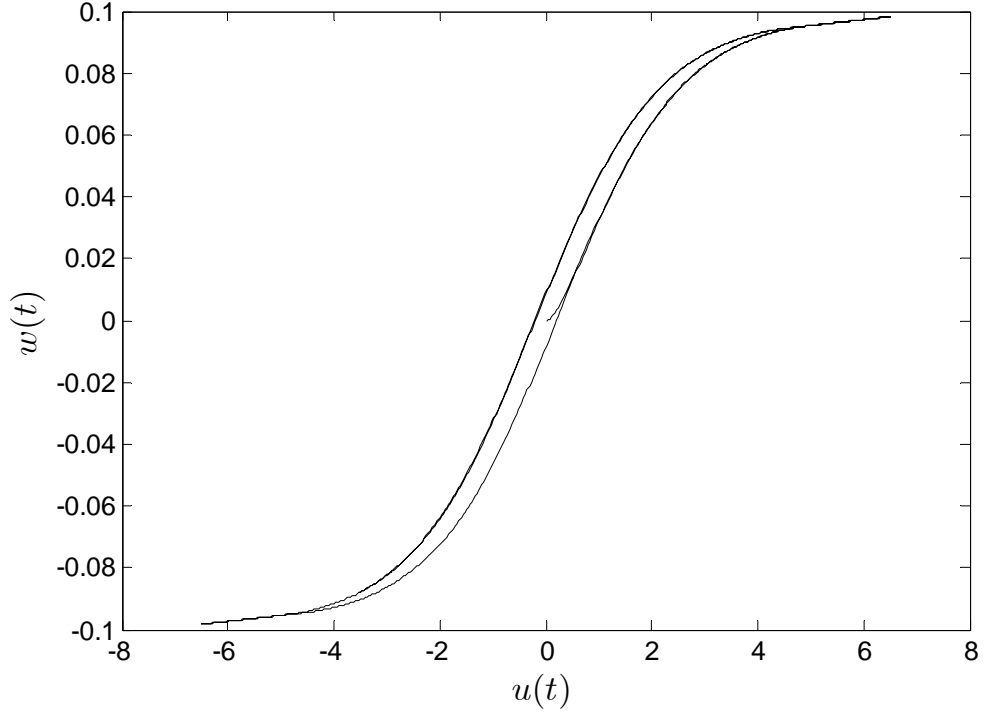
Bu kısımda Co-Cu [30] ve Ni-Fe [31] filmlerin histerisis modelleri (2.39) modeli ve (2.40), (2.41) materyal fonksiyonları kullanılarak oluşturulacaktır. Bu malzemeler ferromanyetik özellikte olup deneysel verileri manyetik alana karşılık manyetizasyon değerleridir. Modelleme sürecinde ilk olarak malzemelerin deneysel verileri MATLAB ortamında çizdirilmiş ve elde edilen histerisis grafikleri üzerinden Tablo 2.1’de istenen bilgiler okunmuştur. Eğim değerleri için ise MATLAB programının “Eğri Uydurma Aracı (Curve Fitting Toolbox)” kullanılarak eğimin hesaplanacağı noktanın civarındaki belli sayıdaki noktaya uygun dereceden polinomlar uydurulmuştur. Eğim değerleri bu polinomların türevleri hesaplanarak elde edilmiştir.  $A_2$  parametresi (2.36) ile verilen  $2A_2 B_s - \mu_s \sinh(2A_2 H_s) = 0$  denkleminin bir köküdür. Bu kökü bulmak için sembolik işlemlerde daha kullanışlı

olan MAPLE programı kullanılmıştır. Böylece elde edilen değerler Tablo 2.2’de verilmektedir. Tablo 2.2’deki manyetik alan değerleri Oersted, manyetizasyon değerleri ise kilo Gauss cinsindedir.

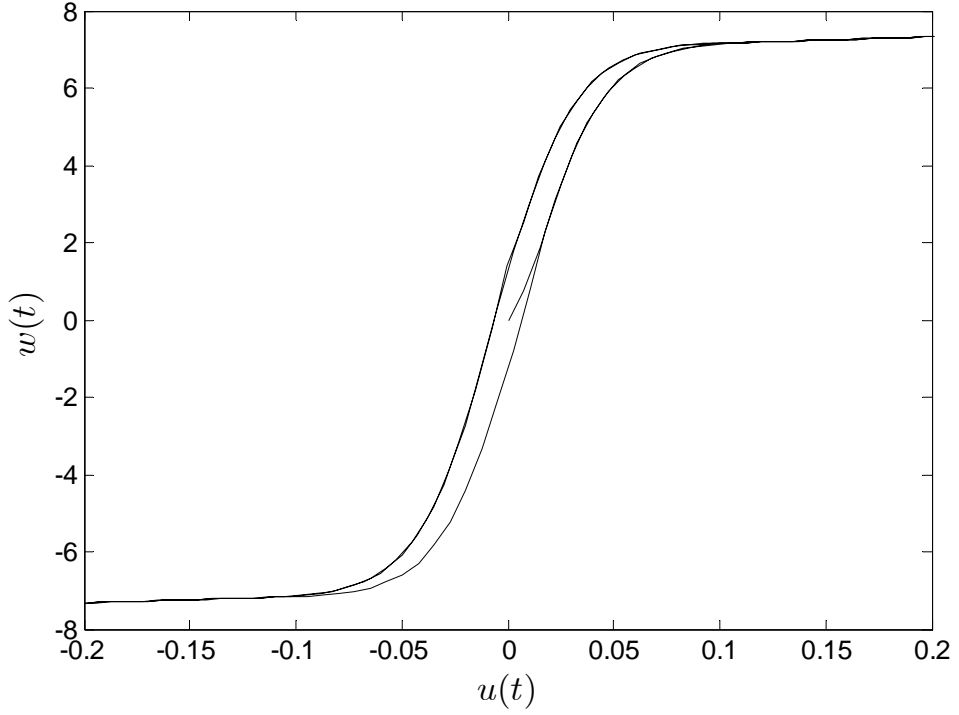
**Tablo 2.2** Deneysel verilerden okunan değerler

<b>Parametre</b>	<b>Co-Cu</b>	<b>Ni-Fe</b>
$B_s$	0.094	7.16
$H_s$	4.480	0.1
$B_r$	0.036	3.439
$H_c$	0.072	0.005
$\mu_r$	0.130	598.9
$\mu_c$	1.352	623.9
$\mu_s$	0.003	3.042
$\mu_{cl}$	0.002	1.624
$\rho$	4.1	200
$A_1$	0.0984	7.214
$A_2$	0.432	27.84
$A_3$	10.321	55.74
$A_4$	248.5	29.278

Tablodaki değerlere göre (2.32) ve (2.33) materyal fonksiyonları oluşturulmuş ve bu fonksiyonlar (2.20) analitik çözümünde yerine yazılarak Co-Cu ve Ni-Fe filmlerin matematiksel histerisis modelleri elde edilmiştir. (2.20) denklemindeki integraller nümerik olarak hesaplanmıştır. Şekil 2.11, Co-Cu filmin ve Şekil 2.12 ise Ni-Fe filmin modelini vermektedir.



Şekil 2.11 Co-Cu filmin histerisis eğrisi.



Şekil 2.12 Ni-Fe filmin histerisis eğrisi.

### 3. KONTROL TASARIMI İÇİN ÖN BİLGİLER

Uygulamalı matematiğin bir dalı olan kontrol teori matematik ve mühendisliğin kesişim noktalarını açığa çıkarmak amacıyla matematiksel fikir ve yöntemlerin araştırıldığı disiplinler arası bir alandır.

Kontrolden kasıt istenilen amaca ulaşmak için ilgilenilen nesnenin veya sistemin davranışını etkilemektir. Hemen hemen bütün teknolojik aygıtlar kontrol içermektedir. Örneğin, uçaklar denge kontrolü olmadan uçamaz; merkezi ısıtma sistemleri kontrol olmadan ayarlanamaz; ekonomi ise kontrol olmadan işlemez. Özetle, modern hayatın tüm elemanları kontrole ihtiyaç duymaktadır. Bu anlamda kontrol teori günümüz teknolojik uygulamalarının temelini oluşturan matematiksel bir disiplin olarak tanımlanır.

Kontrol teorideki çalışmaların temeli öncelikle kontrol edilecek nesnenin iyi bir modelini oluşturmak ve daha sonra istenilen amaca ulaşmayı sağlayacak kontrol tasarımını gerçekleştirmektedir.

Bu bölümde öncelikle matematiksel kontrol teorisinin kapsamı ve temel kavramları üzerinde durulacak ve daha sonra bu tezde kullanılacak olan kontrol tipleri tanıtılacaktır. Kontrol teori ile ilgili geniş bilgiye [32-37] kaynaklarından ulaşılabilir.

#### 3.1 Kontrol Sistemi

Kontrol teorisinin çıkış noktası

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= F(x(t), u(t)), \quad t \geq 0 \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

şeklindeki kısmi diferansiyel denklemdir.  $t$  zaman değişkeni;  $x$ ,  $[0, \infty)$  aralığı üzerinden  $\mathbb{R}^n$  üzerine tanımlı durum değişkeni ve  $u$ ,  $[0, \infty)$  dan  $U \subset \mathbb{R}^m$  ye tanımlı

kontrol parametresi olarak adlandırılmaktadır.  $F$  ise  $\mathbb{R}^n \times U$  dan  $\mathbb{R}^n$  ye tanımlı bir fonksiyondur. (3.1) sistemi lineer olmayan kontrol sistemi örneğidir.

Lineer kontrol sistemleri ise genel olarak  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  katsayı matrisleri olmak üzere

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

olarak tanımlanır.

**Not:** (3.1) ve (3.2) kontrol sistemleri zamanla değişmeyen (otonom) sistemlerdir. Bununla birlikte Kontrol teori zamanla değişen (otonom olmayan) sistemlerle de ilgilenmektedir. Bu durum (3.1) sisteminde  $F$  fonksiyonunun  $x$  ve  $u$  dışında  $t$  zamanına da bağlı olması, (3.2) lineer sisteminde ise katsayı matrislerinin zamana bağlı olarak değişmesi anlamına gelir. Bu tezde ilgilenilen sistemler zamanla değişmeyen sistemler olduğundan zamanla değişen sistemlere bu bölümde değinilmeyecektir.

Kontrol teorisinin diferansiyel denklemler teorisinden farkı (3.1) veya (3.2) denklemlerinin çözümlerinin  $u$  kontrol parametresine bağlı olarak yönlendirilebilir olmasıdır.  $u$  parametresinin seçimine göre kontrol tipleri ikiye ayrılır. Eğer  $u(t) = k(x(t))$  gibi  $x$  durumunun bir fonksiyonu ise  $u$  kapalı çevrim kontroldür ve  $k(\cdot)$  geri besleme olarak adlandırılır. Eğer  $u$  kontrolü  $x$  in bir fonksiyonu değilse  $u$  açık çevrim kontroldür.

### 3.2 Kontrol Edilebilirlik

Kontrol teorisinin temel kavramlarından ilki kontrol edilebilirliktir. Seçilen kontrol parametresinin sistemi istenilen şekilde etkilemesi için sistemin buna izin verme kabiliyetinin olması gerekir. Aksi halde hangi kontrol tipi seçilirse seçilsin sistemi istenilen değere yönlendirmek mümkün olmayacaktır.

**3.1 Tanım (Ulaşılabilirlik) :** (3.1) sistemini  $x_0$  başlangıç durumundan  $\tau$  anındaki  $x(\tau) = x_\tau$  durumuna yönlendirecek bir  $u$  kontrolü varsa  $x_\tau$  durumuna  $\tau$  anında  $x_0$  dan ulaşılabilir denir.

**3.2 Tanım (Kontrol edilebilirlik) :** Herhangi bir  $\tau \in [0, \infty)$  anındaki bir  $x_\tau$  durumuna herhangi bir  $x$  durumundan ulaşılabiliriyorsa (3.1) sistemi kontrol edilebilirdir denir. Daha basit bir ifade ile  $x$  durumunu istenilen herhangi bir  $x_\tau$  durumuna yönlendirecek bir  $u$  kontrolü bulunabiliyorsa sistem kontrol edilebilirdir.

### 3.3 Gözlenebilirlik

Kontrol teorisinin temel kavramlarından ikincisi gözlenebilirliktir. Sistemin durum değişkeni her zaman elde edilemediğinde yahut sistemin sadece belli durumları ölçülmek istendiğinde sisteme  $y: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^p$  çıktı ve  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  bir fonksiyon olmak üzere

$$y(t) = h(x(t)) \quad (3.3)$$

gözlem etkisi eklenir. Sistemin lineer olması durumunda gözlem ilişkisi,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  katsayı matrisi olmak üzere,

$$y(t) = Cx(t) \quad (3.4)$$

dir. Bu durumda sistemin iç dinamikleri hakkında bilgi edinmek için sistemin gözlenebilir olması gerekir.

**3.3 Tanım (Ayırt edilemez durum) :**  $u$  kontrol parametresinin her seçimi için farklı  $x_0$  ve  $x_0^1$  başlangıç durumları altında aynı  $y(t)$  çıktısı elde ediliyorsa  $x_0$  ve  $x_0^1$  durumları ayırt edilemez durumlardır denir.

**3.4 Tanım (Gözlenebilirlik) :** (3.1) ve (3.3) veya (3.2) ve (3.4) denklemleri ile verilen sistemin herhangi iki durumu ayırt edilebilir ise sistem gözlenebilirdir denir. Bu özellik her bir durum değişkeninin kontrol seçimi altında sistemi etkilediğini işaret eder.

Aşağıdaki kısımda lineer sistemler için kontrol edilebilirlik ve gözlenebilirlik koşulları verilmektedir. Lineer olmayan sistemler için bu koşullar sistem lineerleştirilerek elde edilir. Lineerleştirilen sistemin kontrol edilebilirlik ve gözlenebilirlik şartları verilen teoremlere denktir [32].

**3.5 Teorem** (*Lineer sistemler için kontrol edilebilirlik koşulu*) :

$$\mathbf{C} = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad (3.5)$$

kontrol edilebilirlik matrisi olmak üzere

$$\text{rank}[\mathbf{C}] = n \quad (3.6)$$

ise (3.2) sistemi kontrol edilebilir veya buna denk olarak  $(A, B)$  kontrol edilebilirdir denir.

**3.6 Teorem** (*Lineer sistemler için gözlenebilirlik koşulu*) :

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

gözlenebilirlik matrisi olmak üzere

$$\text{rank}[\mathbf{O}] = n$$

ise (3.2) ve (3.4) denklemleri ile verilen sistem gözlenebilir veya  $(A, C)$  gözlenebilirdir denir.

### 3.4 Kararlılık

Kontrol teorideki amacın sistemin istenen değere ulaşmasını sağlayacak şekilde kontrol parametresinin seçimi olduğu önceki kısımda belirtilmişti. Bununla birlikte, sistemin bu istenilen değerde kalması sistemin kararlılığına bağlıdır. Sonuç olarak, sistem teorisinin temel kavramı olan kararlılık kavramı kontrol teorisinin de

önemli bir yapı taşıdır. Bu kısımda kararlılık kavramı kısaca tanıtılacak ve bu tezde kullanılacak olan kararlılık kriterleri verilecektir.

$D \subset \mathbb{R}^n$  bir bölge  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  tanımlı yerel Lipschitz özelliğinde bir fonksiyon olmak üzere

$$\dot{x}(t) = F(x(t)), \quad x(0) = x_0 \quad (3.8)$$

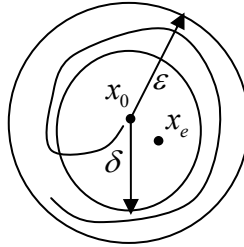
sistemi göz önüne alınsın.

**3.7 Tanım (Denge noktası) :**  $F(x_e) = 0$  şartını sağlayacak biçimde bir  $x_e \in D$  varsa  $x_e$  ye (3.8) sisteminin denge noktası (sabit nokta) denir.

**3.8 Tanım:** Her  $\varepsilon > 0$  için

$$\|x_0 - x_e\| < \delta \text{ iken } \|x(t) - x_e\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0$$

olacak şekilde bir  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  bulunabiliyorsa  $x_e$  ye kararlı denge noktası denir.



**Şekil 3.1** Kararlı denge noktasının geometrik yorumu.

**3.9 Tanım:**  $x_e$  denge noktası kararlı ve her  $x_0$  başlangıç koşulu için

$$\|x_0 - x_e\| < \gamma \text{ iken } \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_e$$

olacak şekilde bir  $\gamma > 0$  varsa  $x_e$  ye asimptotik kararlı denge noktası denir.



Tanımlamalarda kolaylık sağlanması açısından denge noktası genellikle orijin noktasında alınır. Denge noktasının orijinde olmadığı durumlarda ise bu nokta orijine ötelenir.

Çeşitli kararlılık tipleri vardır. Örnek olarak sınırlı girdi-sınırlı çıktı, mutlak, üstel veya Lyapunov kararlılık verilebilir. Burada lineer sistemler için sınırlı girdi-sınırlı çıktı kararlılığına değinilecektir.

(3.2) lineer sistemi sınırlı girdiler altında sınırlı çıktılar üretiyorsa sistem sınırlı girdi-sınırlı çıktı kararlıdır denir. Bu tip kararlılık aşağıdaki teorem yardımıyla test edilir [32]:

**3.10 Teorem:** (3.2) sisteminde  $A$  matrisinin tüm öz değerleri negatif reel kısma sahip ise sistem sınırlı girdi-sınırlı çıktı kararlıdır.

Aşağıdaki kısımda ele alınan sistemin çözümünü bulmadan kararlılığını belirlemeyi sağlayan Lyapunov kararlılık kriteri verilmektedir. Kriteri literatürde hem lineer hem de lineer olmayan sistemler için görmek mümkündür.

### 3.4.1 Lyapunov Kararlılık Kriteri

#### 3.11 Tanım (Lyapunov Fonksiyonu) :

Denge noktası orijin olan (3.8) sistemi göz önüne alınsın ve  $D \subset \mathbb{R}^n$  bölgesi orijinin bir komşuluğu olsun.  $D$  bölgesinden  $\mathbb{R}$  ye tanımlı sürekli diferansiyellenebilen bir  $V$  fonksiyonu

$$\bullet \quad V(0) = 0 \text{ ve her } x \in D - \{0\} \text{ için } V(x) > 0 \quad (3.9)$$

$$\bullet \quad \text{Her } x \in D \text{ için } \dot{V}(x) \leq 0 \quad (3.10)$$

özelliklerini sağlıyorsa  $V$  ye Lyapunov fonksiyonu denir.

(3.10) özelliği  $V$  Lyapunov fonksiyonunun (3.8) sisteminin çözümleri boyunca azaldığını verir. Bu ise (3.9) özelliği ve 3.8 Tanımı gereğince (3.8) sisteminin kararlılığına işaret eder. Bu durum Lyapunov kararlılık teorisi olarak bilinir ve aşağıdaki şekilde ifade edilir [34].

**3.12 Teorem:** (3.8) sistemi için orijinin bir komşuluğunda bir Lyapunov fonksiyonu varsa orijin kararlıdır.

3.12 Teoremi orijinin kararlılığını verir. Lyapunov teorisi yardımıyla orijinin asimptotik kararlılığı ise aşağıdaki teorem ile ifade edilir [34].

**3.13 Teorem:** Orijinin bir komşuluğundaki her  $x \neq 0$  değeri için  $\dot{V} < 0$  özelliğinde bir Lyapunov fonksiyonu varsa orijin asimptotik kararlıdır.

### 3.5 Koordinat dönüşümleri

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ve  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  düzgün fonksiyonlar olmak üzere (3.1) sisteminin aşağıdaki şekilde ifade edilebildiği varsayalım:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t)) + g(x(t))u(t), \\ y &= h(x(t)). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Daha basit bir analiz gerektirdiğinden (3.11) sistemi için  $m = p = 1$  kabul edilecektir. Yani tek girdili ve tek çıktılı sistemler ele alınacaktır.

Yerel koordinat dönüşümü tanımlamada çıkış noktası (3.11) ile verilen sistemin bağıl derecesidir [37]. Dolayısıyla aşağıdaki kısımda öncelikle bağıl derece kavramının tanımlanacaktır.

**3.13 Tanım:** (3.11) sistemi bir  $\tau$  anındaki  $x(\tau) = x_\tau$  durumunda aşağıda verilen

- $x_\tau$  nin komşuluğundaki her  $x$  ve  $k < r - 1$  için  $L_g L_f^k h(x) = 0$
- $L_g L_f^{r-1} h(x_\tau) \neq 0$ .

koşullarını sağlıyorsa sistemin  $x_\tau$  noktasındaki bağıl derecesi  $r$  dir denir.

Burada  $L$  Lie türevini simgelemektedir ve  $L_f h(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h(x)}{\partial x_i} f_i(x)$  olarak tanımlanır.

Bağlı derece kavramı basitçe şu şekilde yorumlanabilir.  $x(\tau) = x_\tau$  noktasında  $y(t)$  çıktısının ve bu çıktının  $t$  ye göre  $y^{(k)}(t)|_{t=\tau}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , türevlerinin değerleri hesaplanmak istendiğinde

$$\begin{aligned} y(\tau) &= h(x(\tau)) = h(x_\tau) \\ \dot{y}(t) &= \frac{\partial h}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial h}{\partial x} (f(x(t)) + g(x(t))u(t)) \\ &= L_f h(x(t)) + L_g h(x(t))u(t) \end{aligned}$$

elde edilir. Eğer sistemin bağlı derecesi  $r > 1$  ise  $x_\tau$  nın bir komşuluğu  $D(x_\tau)$  olmak üzere  $x(t) \in D(x_\tau)$  özelliğindeki her  $t$  ( $\tau$  civarındaki her  $t$ ) için  $L_g h(x(t)) = 0$  dır. Böylece

$$\dot{y}(t) = L_f h(x(t))$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) &= \frac{\partial L_f h}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial L_f h}{\partial x} (f(x(t)) + g(x(t))u(t)) \\ &= L_f^2 h(x(t)) + L_g L_f h(x(t))u(t) \end{aligned}$$

ve eğer bağlı derece  $r > 2$  ise  $\tau$  civarındaki her  $t$  için  $L_g L_f h(x(t)) = 0$  ve

$$\ddot{y}(t) = L_f^2 h(x(t))$$

elde edilir. Benzer şekilde devam edildiğinde

$$\begin{aligned} y^{(k)}(t) &= L_f^k h(x), \text{ her } k < r \text{ ve } \tau \text{ civarındaki } t \text{ ler için} \\ y^{(r)}(\tau) &= L_f^r h(x_\tau) + L_g L_f^{r-1} h(x_\tau)u(\tau) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece bağıl derece;  $u(\tau)$  girdi değeri elde edilinceye kadar  $t = \tau$  anında sistemin çıktısı  $y(t)$  nin kaç kez türevleneceğini gösteren sayı olarak yorumlanabilir. Dikkat edilirse, eğer  $D(x_\tau)$  daki tüm  $x$  ler ve  $k \geq 0$  lar için  $L_g L_f^k h(x) = 0$  ise  $\tau$  civarındaki her  $t$  için sistemin girdisi çıktısına etki edemez.

Yukarıda yapılan hesaplamalar  $h(x), L_f h(x), \dots, L_f^{r-1} h(x)$  fonksiyonlarının özel bir öneme sahip olduklarını gösterir. Aslında bu fonksiyonlar  $x_\tau$  noktası ( $L_g L_f^{r-1} h(x_\tau) \neq 0$  özelliğini sağlayan nokta) etrafında kısmen de olsa bir yerel koordinat dönüşümü tanımlamak için kullanılabilir. Bu durum aşağıdaki özelliğe bağlıdır.

**3.14 Yardımcı Teorem:**  $dh(x_\tau), dL_f h(x_\tau), \dots, dL_f^{r-1} h(x_\tau)$  vektörleri lineer bağımsızdırlar [37].

3.14 Yardımcı Teoremde  $d$  notasyonu gradienti göstermektedir ve  $\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  bir fonksiyon olmak üzere

$$d\lambda(x) = \frac{\partial \lambda}{\partial x} = \left[ \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} \quad \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial \lambda}{\partial x_n} \right].$$

şeklinde tanımlanır.

**3.15 Önerme:**  $T$  bir  $D \subset \mathbb{R}^n$  bölgesinde düzgün bir fonksiyon olmak üzere  $T$  nin Jacobian matrisi  $D(x_\tau) \subset D$  bölgesinde singüler değilse  $T$  bir yerel koordinat dönüşümü tanımlar.

3.15 Önerme gereğince 3.14 Yardımcı Teoremi  $r \leq n$  olması durumunda  $r$  adet  $h(x), L_f h(x), \dots, L_f^{r-1} h(x)$  fonksiyonları,  $x_\tau$  noktasındaki yeni koordinat dönüşümünün bir kısmını oluşturur. Aşağıdaki önerme  $r < n$  durumunda da koordinat dönüşümünün mümkün olduğunu verir.

**3.16 Önerme:** (3.11) sisteminin  $x_\tau$  noktasındaki bağıl derecesi  $r$  olsun.  $r \leq n$  ise

$$\begin{aligned}
T_1(x) &= h(x) \\
T_2(x) &= L_f h(x) \\
&\vdots \\
T_r(x) &= L_f^{r-1} h(x)
\end{aligned}$$

olarak seçilir. Eğer  $r < n$  ise her zaman için  $n - r$  tane daha  $T_{r+1}(x), T_{r+2}(x), \dots, T_n(x)$  fonksiyonları bulmak mümkündür öyle ki

$$T(x) = \begin{bmatrix} T_1(x) \\ T_2(x) \\ \vdots \\ T_n(x) \end{bmatrix}$$

matrisi  $x_r$  noktası civarında singüler olmayan bir Jacobian matrisine sahiptir. Dolayısıyla  $T(x)$ ,  $x_r$  nin bir komşuluğunda yerel bir koordinat dönüşümü tanımlar. Eklenen fonksiyonların  $x_r$  noktasındaki değerleri keyfi olarak sınırlandırılabilir.  $T_{r+1}(x), T_{r+2}(x), \dots, T_n(x)$  fonksiyonlarını her  $r+1 \leq i \leq n$  ve  $x_r$  nun komşuluğundaki her  $x$  için

$$L_g T_i(x) = 0$$

olacak şekilde seçmek mümkündür.

(3.11) sisteminin  $z = T(x)$  yeni koordinatları cinsinden ifadesini aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned}
\frac{dz_1}{dt} &= \frac{\partial T_1}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial h}{\partial x} \frac{dx}{dt} = L_f h(x(t)) = T_2(x(t)) = z_2(t) \\
&\vdots \\
\frac{dz_{r-1}}{dt} &= \frac{\partial T_{r-1}}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial L_f^{r-2}}{\partial x} \frac{dx}{dt} = L_f^{r-1} h(x(t)) = T_r(x(t)) = z_r(t)
\end{aligned}$$

$z_r$  için

$$\frac{dz_r}{dt} = L_f^r h(x(t)) + L_g^r L_f^{r-1} h(x(t)) u(t)$$

elde edilir. Son denklemde  $x$  e bağılı ifadeleri  $z$  cinsinden ifade etmek gerektiğinden  $x(t) = T^{-1}(z(t))$  yazılır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \alpha(z) &= L_g L_f^{r-1} h(T^{-1}(z)) \\ \beta(z) &= L_f^r h(T^{-1}(z)) \end{aligned} \quad (3.12)$$

denirse

$$\frac{dz_r}{dt} = \beta(z(t)) + \alpha(z(t)) u(t)$$

bulunur.  $z_\tau = T(x_\tau)$ ,  $\alpha(z_\tau) \neq 0$  olmalıdır. Dolayısıyla  $\alpha(z)$  katsayıları  $z_\tau$  nun komşuluğundaki tüm  $z$  ler için sıfırdan farklıdır.

$r = n$  olduğunda (3.11) sisteminde

$$z = T(x) = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h(x) \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

koordinat dönüşümü yapıldığında sistemin yeni koordinatlar cinsinden ifadesi

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{r-1} &= z_r \\ \dot{z}_n &= \beta(z) + \alpha(z) u \end{aligned} \quad (3.14)$$

olarak elde edilir. Durum geribesleme kontrolü  $u = \frac{1}{\alpha(z)}(-\beta(z) + v)$  olarak seçildiğinde

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= z_2 \\
\dot{z}_2 &= z_3 \\
&\vdots \\
\dot{z}_{r-1} &= z_r \\
\dot{z}_n &= v
\end{aligned} \tag{3.15}$$

kapalı çevrim kontrol sistemine ulaşılmış olunur. (3.15) sistemi düzenlenirse

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{n \times n} \quad \text{ve} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

ve  $z_1 = h(x)$  olduğundan

$$C = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]_{1 \times n}$$

elde edilir.

Böylece (3.11) sistemine denk lineer ve kontrol edilebilir

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= Az + Bv \\
y &= Cz
\end{aligned} \tag{3.16}$$

sistemi elde edilir.

Sonuç olarak bir  $x_\tau$  noktasında bağıl derecesi  $n$  olan lineer olmayan herhangi bir sistem  $z_\tau = T(x_\tau)$  noktasının bir komşuluğunda lineer ve kontrol edilebilir bir sisteme dönüştürülebilir.

**3.17 Tanım (Koordinat dönüşümü) :**  $D(x_\tau) \subset \mathbb{R}^n$ ,  $x(\tau) = x_\tau$  noktasının bir komşuluğunu göstermek üzere (3.11) sistemini  $(A, B)$  kontrol edilebilir ve  $\alpha(z) \neq 0$  olmak üzere

$$\dot{z} = Az + B(\beta(z) + \alpha(z)u)$$

biçimine dönüştürecek bir  $T: D(x_r) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $z = T(x)$  difeomorfizmi varsa (3.11) sistemi geri besleme lineerleştirilebilir denir.  $z = T(x)$  difeomorfizması yerel koordinat dönüşümü olarak adlandırılır.

### 3.6 Kayan Kip Yöntemi

Herhangi bir kontrol probleminin oluşturulması aşamasında gerçek sistem ile matematiksel modeli arasında tutarsızlıklar olabilir. Bu tutarsızlıklar modellenmeyen sistem dinamikleri, sistem parametrelerindeki değişimler veya karmaşık sistem yapısını basitleştirmek adına yapılan yaklaşımlardan kaynaklanabilir. Bu sebeple sağlam kontrol tiplerinin geliştirilmesi üzerine olan ilgi artmıştır. Kayan kip kontrol yöntemi sağlam kontrol yaklaşım tiplerinden biridir. Bu yöntemin özü sistemin yörüngesinin kararlı bir  $s$  manifoldu üzerinde tutulmasıdır. Yöntemin iki temel avantajı vardır. İlki, sistemin davranışının özel bir değişim fonksiyonun (sistem davranışının kararlı manifold üzerinde tutulması için tanımlanan fonksiyon) seçimi ile düzeltilmesidir. İkincisi ise kapalı çevrim sistem davranışının belirsizliklerin özel bir sınıfına tamamen duyarsız hale getirilmesidir.

Kayan kip kontrol yöntemiyle ilgili temel kaynaklara örnek olarak [34-35] verilebilir. Burada [35] numaralı kaynaktan faydalanılmıştır.

(3.11) sistemi tekrar göz önüne alınsın. Kayan kip kontrol yönteminde amaç bu sistemin istenilen bir  $y_d(t)$  referans girdisini izlemesini sağlamaktır. Bağlı derecesi  $n$  olan sistem öncelikle (3.13)'deki  $z = T(x)$  koordinat dönüşümü kullanılarak lineerleştirilir. Böylelikle (3.16) formatındaki lineerleştirilmiş sistem elde edilir. Kayan yüzey ise verilen bir  $y_d(t)$  çıktı-takip fonksiyonu için hata fonksiyonu

$$e(t) = y_d(t) - y(t) \quad (3.17)$$

ye bağlı olarak şu şekilde tanımlanır:



$$\begin{aligned}
s(x) &= e^{(n-1)} + a_{n-2}e^{(n-2)} + \dots + a_0 e \\
&= y_d^{(n-1)} - L_f^{n-1}h + a_{n-2}(y_d^{(n-2)} - L_f^{n-2}h) + \dots + a_0(y_d - h).
\end{aligned} \tag{3.18}$$

$a_i$  katsayıları  $s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_0$  polinomu Hurwitz (tüm kökleri negatif yarı düzlemde olan polinom) olacak şekilde seçilir. Eğer sistemin yörüngesi kayan yüzeye sınırlandırılırsa hata fonksiyonu üstel olarak sifıra yaklaşır. Kayan kip kontrolü süreksiz bir kontrol kuralıdır çünkü  $\{x : s(x) = 0\}$  manifoldunu sonlu zaman aralığında başlangıç koşullarının bir komşuluğunda çekici bir manifold yapmaya çalışır. Yani kayan kip kontrol kuralı ile sistemin yörüngesi tanımlanan  $s$  manifoldu üzerinde tutulmaya çalışılır; böylece hata fonksiyonunun sifırda kalması sağlanmış olur. Bahsedilen kontrol kuralı Lyapunov kararlılık teorisine göre  $K > 0$  bir sabit olmak üzere aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\begin{aligned}
u &= \left[ \frac{1}{L_g L_f^{n-1} h(x)} y_d^{(n)} - L_f^n h(x) + a_{n-2} (y_d^{(n-1)} - L_f^{n-1} h(x)) + \dots \right. \\
&\quad \left. + a_0 (\dot{y}_d - L_f h(x)) - K \operatorname{sgn}(s(x)) \right].
\end{aligned} \tag{3.19}$$

(3.19) kontrol kuralı (3.12)'deki ifadeler göz önüne alındığında  $v(t) = -K \operatorname{sgn}(s(x))$  olmak üzere  $u(t) = \frac{1}{\alpha(z)} (-\beta(z) + v(t))$  formundaki geri besleme lineerizasyonu ile kontrol tasarımıdır.

### 3.7 PID Kontrol

Oransal, integral ve türev kelimelerinin İngilizce karşılıklarının ilk harfleri ile anılan PID kontrol tatmin edici performansının yanı sıra basit ifadesi ve kolay uygulanabilir olması bakımından endüstriyel alanda en çok kullanılan kontrol yöntemidir. P, I ve D nin her biri bir kontrol tipine karşılık gelir ve ulaşılması istenen amaca göre P, I, PI, PD ve PID şeklinde sistemlere uygulanırlar. Tüm kontrol tiplerinde olduğu gibi bu kontrol tipinde de amaç verilen sistemin istenilen bir  $y_d(t)$  referans girdisini izlemesini sağlamak diğer bir deyişle (3.17) hata

fonksiyonunu minimize etmektir. P, I, D kontrol tipleri hataya bağılı olarak aşığıdaki gibi tanımlanırlar:

Adından da anlaşıldığı üzere P oransal kontrolü hata fonksiyonu  $e(t)$  ile orantılıdır. Yani,  $k_p$  orantı kazancı olmak üzere

$$u_p(t) = k_p e(t) \quad (3.20)$$

şeklindedir. Oransal kontrol sistemin mevcut hatası ile ilgilenir. Tek başına kullanılmasının dezavantajı kalıcı durum hatasına sebep olmasıdır.

Büyük  $k_p$  değerleri hatadaki değışime göre sistemin çıktısında büyük değışimlere sebep olurken; küçük  $k_p$  değerleri büyük hataya karşılık küçük çıktılar üretir. Bununla birlikte kazancın çok büyük olması sistemi kararsızlığa götürürken kazancın çok küçük olması kontrole karşı sistemin duyarlılığını azaltır.

İntegral kontrol I,  $k_i$  integral kazancı olmak üzere

$$u_I(t) = k_i \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (3.21)$$

şeklindedir. I kontrol integral operatörünün özelliğinden dolayı geçmişteki hatalar ile ilgilenir. İntegral kontrol çıktının istenen değere ulaşmasını hızlandırır ve oransal kontrolün tek başına kullanılmasından doğan kalıcı durum hatasını ortadan kaldırır. Buna karşın hatanın mevcut değerinden dolayı sistemin çıktısı  $y(t)$  nin  $y_d(t)$  ye ulaşırken ilk etapta bu değeri aşmasına (overshot) sebebiyet verir.

Türev kontrol D,  $k_d$  türev kazancı olmak üzere

$$u_D(t) = k_d \frac{d}{dt} e(t) \quad (3.22)$$

olarak tanımlanır. Türev kontrol kontrolün değışim hızını yavaşlatır, integral etkiden kaynaklanan aşımı azaltır ve kararlılığı geliştirir. Buna karşın türev kontrol sistemin istenen değere ulaşmasını yavaşlatır.

Oransal, integral veya türev kontrolleri birlikte kullanılmak istendiğinde ifadeleri toplanır. Yani P, I, D kontrolleri;

PI kontrol,

$$u(t) = u_p(t) + u_i(t);$$

PD kontrol,

$$u_{PD}(t) = u_p(t) + u_D(t);$$

ya da PID kontrol,

$$u_{PID}(t) = u_p(t) + u_i(t) + u_D(t)$$

olarak sistemlere uygulanır.

PID kontrolün sistemi en iyi şekilde kontrol etmesi için  $k_p$ ,  $k_i$  ve  $k_d$  kazançlarının ayarlanması gerekir. Bu kazançların ayarlanması deneysel olarak yapılabildiği gibi matematiksel olarak geliştirilen yöntemlere dayalı olarak da gerçekleştirilebilir. Bu yöntemlere örnek olarak Ziegler-Nichols ya da optimizasyon yöntemleri verilebilir [38,39].

## 4. GİRİŞİNDE HİSTERİSİS ETKİSİNE MARUZ KALAN LİNEER OLMAYAN SİSTEMLERİN KONTROL TASARIMLARI

Bu bölümde histerisis etkisine maruz kalan lineer olmayan sistemlerin kayan kip yöntemi ile kontrol tasarımı süreci verilmektedir. Histerisis etkisi 2.9 Kısımda verilen Coleman-Hodgdon modeli ile ifade edilmiştir. Histerisisin kontrol tasarımı ile telafi edilmesi için [20] ve [27]'de kullanılan yöntemden faydalanılacaktır.

### 4.1 Girişinde Histerisis Etkisine Maruz Lineer Olmayan Sistemler Sınıfı

Girişinde histerisis etkisine maruz kalan tek girdili ve tek çıktılı lineer olmayan sistemlerin

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t)) + g(x(t))w(t) \\ y(t) &= h(x(t)) \\ w(t) &= [\Phi(u(t), w_0)](t)\end{aligned}\tag{4.1}$$

şeklindeki bir sınıfı göz önüne alınsın. (4.1) sisteminde  $x \in \mathbb{R}^n$  durum değişkeni,  $y \in \mathbb{R}$  sistemin çıktısı ve  $u \in \mathbb{R}$  kontrol girdisidir.  $\Phi$ , (2.19) ile verilen histerisis operatörü ve  $w$  histerisis operatörünün çıktısıdır.  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ve  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ise düzgün fonksiyonlardır. Sistemin bağıl derecesinin  $r = n$  olduğu kabul edilmektedir.

### 4.2 Kontrol Tasarımı Süreci

(4.1) sistemi için kontrol tasarımının amacı sistem çıktısı  $y(t)$  nin istenilen bir referans girdisi  $y_d(t)$  yi izlemesini sağlamaktır. Sistemin maruz kaldığı histerisis etkisi de göz önüne alınarak kontrol tasarımında sağlam bir kontrol tipi olan kayan kip kontrol metodu kullanılmıştır.

(4.1) sistemi için kayan yüzey,

$$e(t) = y_d(t) - y(t)$$

olmak üzere (3.18) denklemindeki gibi tanımlanır:

$$s(x) = e^{(n-1)} + a_{n-2}e^{(n-2)} + \dots + a_0e. \quad (4.2)$$

Burada  $a_i$  katsayıları belirtilmiş olduğu gibi  $s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_0$  polinomu Hurwitz olacak şekilde seçilen katsayılardır. Sistemin bağıl derecesi  $n$  olduğundan (4.2) manifoldunun (3.13) yerel koordinat fonksiyonları cinsinden ifadesi

$$s(x) = y_d^{(n-1)} - L_f^{n-1}h(x) + a_{n-2} \left( y_d^{(n-2)} - L_f^{n-2}h(x) \right) + \dots + a_0 \left( y_d - h(x) \right) \quad (4.3)$$

olarak elde edilir.

Kontrol tasarımı sistemin Lyapunov kararlılık analizine bağlı olarak yapılır. Kayan kip metodunda Lyapunov fonksiyonu genel olarak

$$V(s) = \frac{1}{2}s^2 \quad (4.4)$$

olarak seçilir. Bu fonksiyonun Lyapunov kararlılık kriterinin ilk koşulu (3.9)'u sağladığı açıktır. İkinci koşulun sağlanması için öyle bir  $u$  kontrolü seçilmelidir ki

$$\dot{V}(s) = s\dot{s} < 0, \quad (s \neq 0) \quad (4.5)$$

eşitsizliği elde edilsin. Bu  $u$  kontrolünü elde etmek için öncelikle kayan yüzeyin zamana göre türevi hesaplanır:

$$\begin{aligned} \dot{s}(x) = & y_d^{(n)} - L_f^n h(x) - L_g L_f^{n-1} h(x) w(t) + a_{n-2} \left( y_d^{(n-1)} - L_f^{n-1} h(x) \right) + \dots \\ & + a_0 \left( \dot{y}_d - L_f h(x) \right). \end{aligned} \quad (4.6)$$

(4.6) ifadesi kolaylık olması bakımından

$$\alpha(x) = L_g L_f^{n-1} h(x) \text{ ve}$$

$$\beta(x) = y_d^{(n)} - L_f^n h(x) + a_{n-2} \left( y_d^{(n-1)} - L_f^{n-1} h(x) \right) + \dots + a_0 \left( \dot{y}_d - L_f h(x) \right)$$

olmak üzere

$$\dot{s}(x) = \beta(x) - \alpha(x)w(t) \quad (4.7)$$

biçiminde yeniden ifade edilir.

$v(t)$  yardımcı kontrol kuralı olmak üzere sistemin histerisis etkisi altındaki kontrol çıktısı  $w(t)$  sistemi geri besleme ile lineerleştirecek şekilde aşağıdaki gibi seçilir:

$$w(t) = \frac{1}{\alpha(x)}(\beta(x) - v(t)) \quad (4.8)$$

Sistemin kontrol fonksiyonu  $u(t)$  olduğundan (4.8) kullanılarak bu kontrol kuralı elde edilmelidir.  $u(t)$ , (4.1) sistemini hem kayan manifold üzerinde tutacak hem de histerisis etkisini telafi edecek bir kontrol kuralı olmalıdır. Bunun için Duhem histerisis modelinin 2. Bölümde verilen sınırlılık özelliği kullanılır. (4.8) denkleminde Duhem histerisisin (2.26) ifadesi yerine yazılarak

$$\xi(u) + d_d(u) = \frac{1}{\alpha(x)}[\beta(x) - v(t)] \quad (4.9)$$

elde edilir.  $\xi$  fonksiyonu parçalı düzgün monoton artan olduğundan tersinebilirdir. Bu özellik ve  $d_d(u)$  teriminin sınırlılığı kullanılarak, hem histerisis teriminin etkisini yok edecek hem de sistemi kayan yüzey üzerinde tutacak  $v(t)$  yardımcı kontrol fonksiyonu seçilir.  $v(t)$  nin seçimi aşağıdaki teorem ile verilmektedir.

**4.1 Teorem:** (4.1) sistemi bir  $K > 0$  sabiti için

$$v(t) = -\alpha(x)d_d(u) + K \operatorname{sgn}(s), \quad (4.10)$$

yardımcı kontrol kuralı olmak üzere

$$u(t) = \xi^{-1} \left( \frac{1}{\alpha(x)} (\beta(x) - v(t)) \right) \quad (4.11)$$

kontrol kuralı altında kararlıdır ve istenilen referans girdisi  $y_d(t)$  yi izler.

**İspat:**  $V(s) = \frac{1}{2}s^2$  Lyapunov fonksiyonu için  $\dot{V}(s) = s\dot{s} \leq 0$  olduğu gösterilmelidir.

$$\dot{V}(s) = s\dot{s} = s[\beta(x) + \alpha(x)w(t)]$$

ifadesinde  $w(t)$  yerine (4.9) yazılır

$$\dot{V}(s) = s[\beta(x) - \alpha(x)(\xi(u) + d_d(u))]$$

ve (4.11) kontrolü uygulanırsa

$$\begin{aligned} \dot{V}(s) &= s \left[ \beta(x) - \alpha(x) \left( \xi \left( \xi^{-1} \left( \frac{1}{\alpha(x)} (\beta(x) + v(t)) \right) \right) + d_d(u) \right) \right] \\ &= s \left[ \beta(x) - \alpha(x) \left( \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} + \frac{v(t)}{\alpha(x)} + d_d(u) \right) \right] \end{aligned}$$

elde edilir. (4.10) yardımcı kontrolü bu ifade de yerine yazılır:

$$\begin{aligned} \dot{V}(s) &= s \left[ \beta(x) - \alpha(x) \left( \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} - d_d(u) + \frac{1}{\alpha(x)} K \operatorname{sgn}(s) + d_d(u) \right) \right] \\ &= -Ks \operatorname{sgn}(s) \\ &= -K|s| \end{aligned}$$

bulunur.  $K$  pozitif olduğundan  $s \neq 0$  için  $\dot{V} < 0$  elde edilir. Sonuç olarak Lyapunov kararlılık teorisine göre sistem asimptotik kararlıdır ve  $y(t)$  çıktısı  $y_d(t)$  referans girdisine yakınsar.  $\square$

## 5. İKİNCİ DERECEDEKİ AFİN OLMAYAN HİSTERİSİS GİRİŞLİ LİNEER OLMAYAN SİSTEMLERİN KONTROL TASARIMLARI

Literatürdeki mevcut kontrol tasarımı yöntemleri genel olarak girişli afin olan sistemler için verilmiştir. Fakat fiziksel problemler her zaman için afin girdiye sahip olmayabilirler. Örnek olarak hızlı trenlerden, manyetik rüzgar tünellerine kadar pek çok uygulama alanına sahip olan manyetik askı sistemleri verilebilir. Bu sistemlerde  $u$  kontrolü akım olarak seçildiğinde sistemin ifadesi basitçe aşağıdaki şekilde verilebilir:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = -g + K \frac{1}{y(t)^2} u(t)^2.$$

Bu sebeple afin olmayan girişli sistemlerin kontrol tasarımı üzerine yapılan çalışmalara olan ilgi artmıştır. Girişin afin olmamasından kasıt  $u$  girdisine etki eden lineer olmayan herhangi bir fonksiyon olabileceği gibi (bkz. [40]) genellikle girişin polinom şeklinde olmasıdır:

$$\dot{x} = f_0(x) + f_1(x)u + f_2(x)u^2 + \dots + f_n(x)u^n.$$

Mauloy ve Perruquetti [41],  $n$  herhangi bir doğa sayı olmak üzere yukarıdaki gibi bir sistemin kararlılaştırılması problemini Lyapunov kararlılık kriterini kullanarak incelemişler ve elde ettikleri sonuçları manyetik askı sistemine uygulamışlardır. Boukhobza ve Karsenti [42] ise yukarıda verilen polinom girişli bir sistemin kayan kip kontrol tasarımını gerçekleştirmişlerdir. Fakat Boukhobza ve Karsenti  $n$  yi tek doğal sayı olarak kabul etmişler ve böylece reel  $u$  kontrolünün varlığını garantilemişlerdir.

Bu bölümde ikinci dereceden afin olmayan girdisi aynı zamanda histerisis etkisine maruz sistemlerin bir sınıfı ele alınmaktadır. Problemin çıkış noktası histerisis etkisi göz önüne alınarak modellenen manyetik askı sistemlerinin kontrol tasarımı sürecinde karşılaşılan güçlüklerdir. Manyetik askı sistemindeki histerisis etkisi elektromıknatısa uygulanan gerilim (voltaj) sonucu elde edilen akımın ürettiği manyetik alan ile manyetik indüksiyon arasındaki ilişkiden meydana gelmektedir.



Eğer kontrol girdisi olarak gerilim seçilirse histerisis etkisi sistem dinamiklerinin içinde yer almakta ve histerisis diferansiyellenebilir olmadığından bilinen teknikler ile kontrol tasarımı güçleşmektedir. Bu tip bir sistemin kontrol tasarımı [43,44]'de incelenmiştir. Kontrol girdisi akım seçildiğinde ise girdide hem histerisis etkisi hem de ikinci dereceden lineer olmayan durum söz konusu olmaktadır. Bu güçlüklerin aşılabilmesi amacıyla bu tip sistemlerin kayan kip yöntemiyle kontrol tasarımı ele alınmaktadır. Kontrol tasarımının diğerlerinden öncelikli farkı hem histerisis hem de afin olmayan girdiyle baş etmeye çalışmasıdır. Mauloy ve Perruquetti nin çalışmasından farkı (histerisisli girdinin yanında) kayan kip kullanılıyor olması, Boukhobza ve Karsentinin çalışmasından farkı ise ikinci dereceden afin olmayan girdi ile ilgileniyor olmasıdır. Aşağıdaki kısımda öncelikle kontrol tasarımı için uygun bölge belirlenmiş daha sonra bu bölgede kayan kip kontrol tasarımı gerçekleştirilmiştir [45].

### 5.1 İkinci Dereceden Afin Olmayan Histerisis Girişli Sistemlerin Sınıfı

Bu bölümde afin olmayan histerisis girişli, tek girdi ve tek çıktılı, lineer olmayan sistemlerin

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= f(x(t)) + g(x(t))w^2(t) \\
 y(t) &= h(x(t)) \\
 w(t) &= [\Phi(u(t), w_0)](t)
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

şeklindeki bir sınıfı göz önüne alınmaktadır. (5.1) sisteminde  $x \in \mathbb{R}^n$  durum değişkeni,  $y \in \mathbb{R}$  sistemin çıktısı ve  $u \in \mathbb{R}$  kontrol girdisi,  $\Phi$  (2.19) ile verilen histerisis operatörü,  $w$  histerisis operatörünün çıktısıdır.  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ve  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ise düzgün fonksiyonlardır. Sistemin bağıl derecesi  $r = n$  olduğu kabul edilmektedir.

## 5.2 Afın Olmayan Kontrol Tasarımı

(5.1) sisteminin kontrol tasarımındaki amaç önceki bölümde de olduğu gibi sistem çıktısı  $y(t)$  nin istenilen bir referans sinyali  $y_d(t)$  yi izlemesini sağlamaktır. Bu amacı gerçekleştirmek için kayan kip kontrol metodundan faydalanılacaktır.

Kayan yüzey, hata fonksiyonu

$$e(t) = y_d(t) - y(t)$$

olmak üzere (4.2) denklemindeki gibi seçilir:

$$\begin{aligned} s(x) &= e^{(n-1)} + a_{n-2}e^{(n-2)} + \dots + a_0e \\ &= y_d^{(n-1)} - L_f^{n-1}h(x) + a_{n-2}(y_d^{(n-2)} - L_f^{n-2}h(x)) + \dots + a_0(y_d - h(x)). \end{aligned}$$

(5.1) sistemi için Lyapunov fonksiyonu

$$V(s) = \frac{1}{2}s^2$$

olmak üzere kontrol girdisi  $u(t)$  Lyapunov fonksiyonu

$$\dot{V}(s) = s\dot{s} < 0, \quad (s \neq 0) \quad (5.2)$$

koşulunu sağlayacak şekilde seçilir. Bunun için öncelikle  $\dot{s}(x)$  hesaplanır. Önceki bölümde olduğu gibi

$$\alpha(x) = L_g L_f^{n-1}h(x) \text{ ve}$$

$$\beta(x) = y_d^{(n)} - L_f^n h(x) + a_{n-2}(y_d^{(n-1)} - L_f^{n-1}h(x)) + \dots + a_0(\dot{y}_d - L_f h(x))$$

ifadeleri kullanılarak  $\dot{s}(x)$  kısaca aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\dot{s}(x) = \beta(x) - \alpha(x)w^2.$$

Buradan (5.2) koşulu

$$\dot{V}(s) = s(\beta(x) - \alpha(x)w^2) < 0 \quad (5.3)$$

veya buna denk olarak

$$s\alpha(x)w^2 - s\beta(x) > 0 \quad (5.4)$$

biçiminde düzenlenir. (5.2) koşulu  $s \neq 0$  için incelendiği ve sistemin bağıl derecesi  $r = n$  yani  $\alpha(x) \neq 0$  olduğundan (5.4) ifadesi ikinci dereceden bir eşitsizliktir. Bu eşitsizliğin çözümü

$$\Delta = 4s^2\alpha(x)\beta(x)$$

diskriminantının durumuna göre üç farklı kısımda incelenir.

- $\Delta = 0$  Durumu:

Bu durum;  $s \neq 0$  ve  $\alpha(x) \neq 0$  olduğundan  $\beta(x) = 0$  olmasına karşılık gelir. Sistem,  $s\alpha(x) > 0$  ise her  $w$  değeri için kararlı fakat  $s\alpha(x) < 0$  ise kararsızdır.

- $\Delta < 0$  Durumu:

Bu durum;  $s^2 > 0$  olduğundan  $\alpha(x)\beta(x) < 0$  olmasına karşılık gelir. Sistem,  $s\alpha(x) > 0$  ise tüm  $w$  değerleri için kararlı fakat  $s\alpha(x) < 0$  ise kararsızdır.

- $\Delta > 0$  Durumu:

Bu durum;  $s^2 > 0$  olduğundan  $\alpha(x)\beta(x) > 0$  olmasına karşılık gelir. Eşitsizliğin çözümü

$$s\alpha(x)w^2 - s\beta(x) = 0 \quad (5.5)$$

denkleminin reel iki köküne ve  $s\alpha(x)$  in işaretine göre bulunur. (5.5)

denkleminin kökleri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$w_1 = \text{sgn}(s) \frac{\sqrt{\alpha(x)\beta(x)}}{\alpha(x)} \text{ ve } w_2 = -\text{sgn}(s) \frac{\sqrt{\alpha(x)\beta(x)}}{\alpha(x)}.$$

$$s\alpha(x) > 0 \text{ ise } w_1 > 0 \text{ ve } w_2 < 0 \text{ dır ve } w > w_1 \text{ veya } w < w_2 \quad (5.6)$$

ve

$$s\alpha(x) < 0 \text{ ise } w_1 < 0 \text{ ve } w_2 > 0 \text{ dır ve } w_1 < w < w_2 \quad (5.7)$$

seçilerek (5.5) eşitsizliği sağlanır.

Diskriminantın işaretine göre yapılan bu inceleme sonucunda sistemin Lyapunov kararlı olmasını sağlayan durumun  $\Delta > 0$  olduğu görülür. Çünkü ilk iki durumda sistem  $s\alpha(x) > 0$  için kararlı iken  $s\alpha(x) < 0$  iken kararsız olmaktadır. Kayan kip kontrol tasarımı sürecinde ise sistemin istenilen  $y_d(t)$  referans girdisine ulaşması esnasında  $s < 0$  ve  $s > 0$  durumlarının her ikisi ile de karşılaşmak mümkündür. Bu sebeple kontrol bölgesi

$$U = \{x \in \mathbb{R}^n : \alpha(x)\beta(x) > 0\}$$

olarak kısıtlanarak aşağıdaki teorem verilir:

**5.1 Teorem:** (5.1) sistemi  $U$  bölgesinde  $\varphi(x)$ ,

$$\alpha(x)\beta(x) \geq -\text{sgn}(s)\alpha(x)\varphi(x)$$

koşulunu sağlayan pozitif tanımlı bir fonksiyon olmak üzere

$$w = \text{sgn}(s) \frac{\sqrt{\alpha(x)(\beta(x) + \text{sgn}(s)\varphi(x))}}{\alpha(x)} \quad (5.8)$$

$$u = \xi^{-1} [w - d_d(u)] \quad (5.9)$$

kontrol fonksiyonları altında kararlıdır.

**İspat:** Öncelikle  $\alpha(x)\beta(x) \geq -\text{sgn}(s)\alpha(x)\varphi(x)$  koşulunu sağlayan pozitif tanımlı  $\varphi(x)$  fonksiyonu için  $w$  kontrol fonksiyonunun (5.6) ve (5.7) koşullarını sağladığı gösterilir:

- $s\alpha(x) > 0$  olsun.  $\varphi(x)$  pozitif tanımlı bir fonksiyon,  $U$  bölgesinde  $\alpha(x)\beta(x) > 0$  ve kabulden  $\text{sgn}(s)\alpha(x) > 0$  olduğundan

$$\alpha(x)\beta(x) + \text{sgn}(s)\alpha(x)\varphi(x) > \alpha(x)\beta(x)$$

dir. Bu ifadenin her iki tarafının karekökü alınır ve  $\frac{\text{sgn}(s)}{\alpha(x)} > 0$  ifadesi ile çarpılırsa  $w > w_1$  koşulunun sağlandığı görülür.

- $s\alpha(x) < 0$  olsun.  $\text{sgn}(s)\alpha(x) < 0$  olduğundan

$$\alpha(x)\beta(x) + \text{sgn}(s)\alpha(x)\varphi(x) < \alpha(x)\beta(x)$$

dir. Bu ifadenin her iki tarafının karekökü alınırsa

$$-\sqrt{\alpha(x)\beta(x)} < \sqrt{\alpha(x)\beta(x) + \text{sgn}(s)\alpha(x)\varphi(x)} < \sqrt{\alpha(x)\beta(x)}$$

elde edilir. Eşitsizliğin her tarafı  $\frac{\text{sgn}(s)}{\alpha(x)} < 0$  ile çarpılırsa

$$\text{sgn}(s) \frac{\sqrt{\alpha(x)\beta(x)}}{\alpha(x)} < w < -\text{sgn}(s) \frac{\sqrt{\alpha(x)\beta(x)}}{\alpha(x)}$$

bulunur ki bu  $w_1 < w < w_2$  şartının sağlandığını gösterir.

$w$  fonksiyonu istenilen özellikleri sağladığına göre (5.9) kontrolü altında (5.1) sisteminin kararlı olduğu gösterilebilir. Bunun için öncelikle  $w = \Phi(u, w_0) = \xi(u) + d_d(u)$  olduğu göz önüne alınarak (5.2) Lyapunov koşulu

$$\dot{V}(s) = s \left( \beta(x) - \alpha(x) (\xi(u) + d_d(u))^2 \right) \quad (5.10)$$

olarak yeniden düzenlenir. Daha sonra (5.9) kontrolü (5.10) Lyapunov fonksiyonunda yerine yazılarak

$$\begin{aligned}\dot{V}(s) &= s \left\{ \beta(x) - \alpha(x) \left[ \xi \left( \xi^{-1}(w - d_d(u)) \right) + d_d(u) \right]^2 \right\} \\ &= s \left\{ \beta(x) - \alpha(x) w^2 \right\}\end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklemde (5.8) kontrolü yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\dot{V}(s) &= s (\beta(x) - \beta(x) - \text{sgn}(s)\varphi(x)) \\ &= -s \text{sgn}(s)\varphi(x) \\ &= -|s|\varphi(x)\end{aligned}$$

elde edilir.  $\varphi(x)$  pozitif tanımlı bir fonksiyon olduğundan

$$\dot{V}(s) < 0$$

bulunur. Yani sistem asimptotik kararlıdır ve istenen  $y_d(t)$  referans girdisini izler.  $\square$

### 5.3 Kontrol Tasarımının Manyetik Askı Sistemine Uygulanması

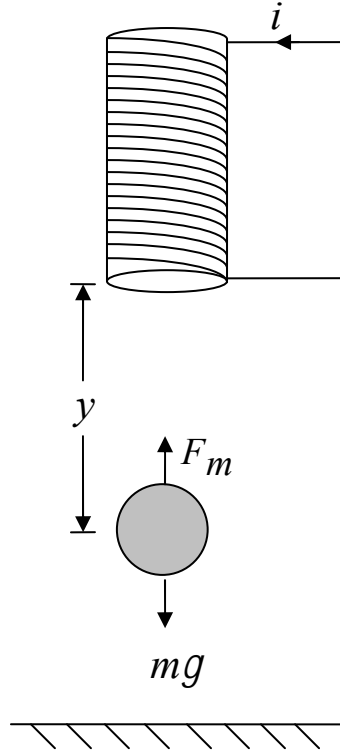
Mühendisliğin birçok dalında uygulama alanı olan manyetik askı sistemleri, histerisis karakteristiğine sahip lineer olmayan sistemlerdir. Uygulama alanlarına örnek olarak yüksek hızlı trenler (maglev), sürtünmesiz motor yatağı (frictionless bearing), manyetik olarak asılan rüzgâr tünelleri, titreşim yalıtma sistemleri ve roket rehber projeleri verilebilir [46-48]. Genellikle açık çevrim kararsız olan manyetik askı sistemlerinin kontrolü önemli bir problemdir ve son zamanlarda bu konu üzerine pek çok çalışma yayınlanmıştır. Çalışmalardaki manyetik askı sistemleri çoğunlukla bir çalışma noktasında lineerleştirilerek modellenmiştir, bu ise çalışma noktasından uzaklaştıkça kontrol edilen sistemin yakınsaklığının bozulmasına sebep olmaktadır. Dolayısıyla geniş bir aralıkta sistemin yakınsaklığının sağlanması için kontrol tasarımının lineer olmayan model için yapılması gerekir. Ayrıca elektromıknatısın ısınmasından kaynaklanan direnç ve indüktanstaki değişim gibi sistemin histeritik yapılarından kaynaklanan enerji kayıpları da göz önüne alınmalıdır.

Manyetik askı sistemlerindeki ferromanyetik çekirdekler ortamın manyetik indüksiyonunu artırmak için kullanılırlar. Çünkü bu malzemeler manyetik alan varlığında manyetize olarak manyetik indüksiyona katkıda bulunurlar. Bununla birlikte, manyetik alan ortamdan çekildiğinde manyetizasyonlarının tamamını kaybetmezler. Dolayısıyla bu malzemelerin manyetizasyonları manyetik alana karşılık histerisis ilişkisi ile ifade edilir. Histerisis eğrisinin içinde kalan alan enerji kaybına karşılık gelir ve genellikle histerisis kaybı olarak adlandırılır. Bu kaybı minimize etmek için daha küçük histerisis çevrimlerine sahip yumuşak ferromanyetikler kullanılır. Küçük olmalarına rağmen bu malzemelerdeki kayıpların yüksek hassasiyete sahip sistemler için modellenmesi ve kontrol problemine dâhil edilmesi gerekir.

Manyetik askı sistemlerinin mevcut modelleri arasında sistemin histerisis karakteristiğine değinen çok az çalışma vardır. Örneğin [49], elektromanyetik aktüatörlerdeki histeresis yapısını deneysel olarak açığa çıkarmıştır. Aktüatörün farklı akımlara karşılık uyguladığı manyetik kuvveti ölçerek elde ettiği histeritik ilişkiyi Preisach modeli ile ifade etmiş ve sistemdeki histerisis etkisini telafi etmek için modelin tersini sisteme uygulamıştır. Ayrıca sistemdeki histerisis etkisinin yüksek hassasiyetteki uygulamalar için önemini, tek dereceden serbestliğe sahip manyetik askı aktüatörü için göstermiştir. Bunun yanında [18] ve [19], ana ve küçük çevrimlerin lineer bir parametrizasyonunu kullanarak elektromanyetik aktüatörler için basit bir histerisis modeli oluşturmuşlardır.

Burada ise manyetik askı sistemlerinin histerisis karakteristiği elektromıknatısta kullanılan malzemenin histerisis özelliği yardımıyla modellenecektir. Manyetik alan ile manyetizasyon arasındaki histerisisi ifade etmek için Duhem modelin ferromanyetizmaya uygulaması olan Coleman-Hodgdon modeli kullanılacaktır. Böylelikle akım ile kuvvet arasındaki histerisis elde edilecektir.

### 5.3.1 Manyetik Askı Sistemlerinin Matematiksel Modeli



Şekil 5.1 Manyetik askı sistemi

Şekil 5.1 de bir elektromıknatıs ile ferromanyetik bir top görülmektedir. Elektromıknatısın üzerinden geçen  $i$  akımı ve içindeki ferromanyetik nüvenin özelliği sayesinde ortamda bir  $B$  manyetik indüksiyonu oluşur. Oluşan manyetik indüksiyon yerçekimi etkisindeki topun üzerine bir  $F_m$  manyetik çekim kuvveti uygulayarak havada asılı kalmasını sağlar.

$m$  topun kütlesi,  $g$  yerçekimi ivmesi ve  $y$  topun elektromıknatısa olan uzaklığı olmak üzere ferromanyetik topun dinamiği:

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = F_m - mg \quad (5.11)$$

şeklindedir. (5.11) denklemindeki  $F_m$  manyetik kuvveti, elektromıknatısın kesit alanı  $A$  ve havanın manyetik geçirgenliği  $\mu_0$  bağlı olarak



$$F_m = \frac{AB_T^2}{2\mu_0} \quad (5.12)$$

ile tanımlanır.  $B_T$ , topa etki eden manyetik indüksiyondur ve ortamdaki manyetik indüksiyon  $B$  ile orantılıdır. Elektromıknatısın ferromanyetik karakteristiğinden dolayı manyetik indüksiyon  $B$  ile manyetik alan  $H$  arasında

$$B(t) = [\Phi(H, B_0)](t) \quad (5.13)$$

histeritik ilişkisi vardır. Bobinin metre başına sarım sayısı  $N$  olmak üzere manyetik alan

$$H(t) = Ni(t) \quad (5.14)$$

ile hesaplanır. Ortamdaki manyetik indüksiyon uzaklık ile ters orantılı olduğundan topa etkiyen manyetik indüksiyon

$$B_T(t) = \mu_0 \frac{B(t)}{y(t)} \quad (5.15)$$

şeklindedir. Bu ifade (5.12) eşitliğinde yerine yazılırsa topa etkiyen manyetik kuvvet

$$F_m = K_m \frac{B^2}{y^2}, \quad K_m = \frac{A\mu_0}{2} \quad (5.16)$$

olarak elde edilir. Sistemin parametreleri Tablo 5.1'de verilmiştir:

Kontrol girdisi  $u(t) = H(t)$  seçilir ve histerisis ilişkisi  $w(t) = [\Phi(u(t), w_0)](t)$  olarak adlandırılırsa (5.11) sistemi yeni parametreler cinsinden aşağıdaki şekilde verilir:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = -g + \frac{K_m}{m} \frac{1}{y(t)^2} w^2. \quad (5.17)$$

Sistemin histerisis karakteristiği 2.9.2 Kısımda önerilen materyal fonksiyonları ile modellenmiştir.

**Tablo 5.1.** Manyetik askı sisteminin parametreleri

Simge	Anlamı	Birimi
$i$	Akım	Amper [A]
$N$	Sarım sayısı	Metre [m]
$A$	Elektromıknatısın kesit alanı	[ m <sup>2</sup> ]
$H$	Manyetik alan	A/m
$B$	Ortamin manyetik indüksiyonu	Tesla [T]
$B_r$	Topa etki eden manyetik indüksiyon	[T]
$m$	Topun kütlesi	Kilogram[kg]
$g$	Yer çekimi ivmesi	Metre/saniye <sup>2</sup> [m/ s <sup>2</sup> ]
$y$	Topun elektromıknatısa uzaklığı	[m]
$F_m$	Topa etki eden kuvvet	Newton [N]
$\mu_0$	Havanın manyetik geçirgenlik katsayısı	[N/ A <sup>2</sup> ]
$K_m$	Kuvvet katsayısı	[ m <sup>2</sup> /H]

### 5.3.2 Kontrol Tasarımı

(5.17) sistemin durum uzay modeli

$$\begin{aligned}x_1(t) &= y(t) \\x_2(t) &= \dot{y}(t)\end{aligned}$$

değişken değişimi kullanılarak elde edilir.  $x = [x_1 \quad x_2]^T$  olmak üzere durum uzay modeli

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t)) + g(x(t))w^2 \\y(t) &= h(x(t)) \\w(t) &= [\Phi(u(t), w_0)](t)\end{aligned}\tag{5.18}$$

şeklindedir, burada

$$f(x(t)) = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -g \end{bmatrix}, \quad g(x(t)) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_m}{m} \frac{1}{x_1(t)^2} \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad h(x) = x_1(t)$$

dir. Görüldüğü gibi  $f$ ,  $g$  ve  $h$ ;  $x_1(t) = 0$  durumu hariç düzgün fonksiyonlardır.

Sistemin istenilen  $y_d(t)$  girdisini izlemesi için kayan kip kontrolü önceki kısımda verildiği şekilde tasarlanır. Bu durumda (5.18) sistemi için kayan yüzey, hata fonksiyonu

$$e(t) = y_d(t) - y(t)$$

olmak üzere

$$s(x) = \dot{e}(t) + ae(t) \quad (5.19)$$

olarak tanımlanır. Sistem için Lyapunov fonksiyonu  $V(s) = \frac{1}{2}s^2$  olarak seçilir ve dolayısıyla kararlılık için kayan yüzeyin zamana göre türevi

$$\dot{s}(x) = \beta(x) - \alpha(x)w^2 \quad (5.20)$$

olarak bulunur. Burada

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= L_g L_f h(x) \\ \beta(x) &= \ddot{y}_d(t) - L_f^2 h(x) + a(\dot{y}_d(t) - L_f h(x)) \end{aligned}$$

biçimindedir ve Lie türevleri hesaplanarak

$$\alpha(x) = \frac{K_m}{m} \frac{1}{x_1(t)^2} \quad (5.21)$$

$$\beta(x) = \ddot{y}_d(t) + g + a(\dot{y}_d(t) - x_2(t)) \quad (5.22)$$

ifadeleri elde edilir. (5.21) ifadesinden görüldüğü gibi  $\frac{K_m}{m} > 0$  ve  $x_1(t)^2 > 0$  olduğundan her  $x$  durumu için  $\alpha(x) > 0$  dır. Bu durumda kontrol bölgesi

$$U = \{x \in \mathbb{R}^2 : \beta(x) > 0\}$$

olarak seçilmelidir. 5.1 Teoremine göre (5.18) sistemi  $U$  bölgesinde tanımlanan

$$w = \text{sgn}(s) \frac{\sqrt{\alpha(x)(\beta(x) + \text{sgn}(s)\varphi(x))}}{\alpha(x)}$$

$$u = \xi^{-1} [w - d_a(u)]$$

kontrol fonksiyonları altında kararlıdır.

Burada  $\alpha(x)\beta(x) \geq -\text{sgn}(s)\alpha(x)\varphi(x)$  koşulunu sağlayan pozitif tanımlı  $\varphi(x)$  fonksiyonu özel olarak

$$\varphi(x) = \alpha(x)\beta(x) \quad (5.23)$$

seçilebilir.

### 5.3.3 Simülasyon Sonuçları

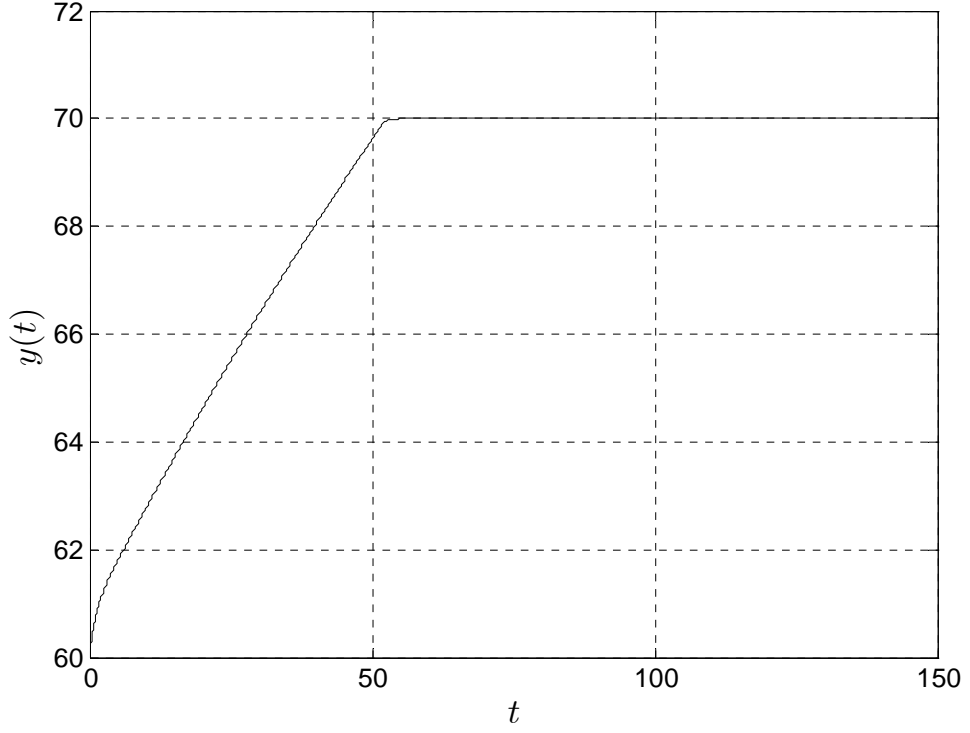
5.3.2 Kısımında manyetik askı sistemleri için verilen kontrol tasarımı süreci bu kısımda görselleştirilmiştir. Bunun için MATLAB programının Simulink aracı kullanılmıştır. (5.18) sistemi için uygun birimde seçilen parametreler Tablo 5.2'de verilmektedir. Sistemin histerisis karakteristiğini ifade etmek için Şekil 2.12'de verilen Ni-Fe in histerisis eğrisi kullanılmıştır.

**Tablo 5.2** (5.18) sistemi için seçilen parametreler

$u_0$	226.9
$A$	$2 \times 10^{-3}$
$\mu_0$	$4\pi \times 10^{-7}$
$m$	0.0165
$g$	9.81
$y_0$	0.06
$\dot{y}_0$	0.001

Şekil 5.2'de sistemin  $y_d(t) = 70$  milimetre sabit referans girisine cevabı verilmektedir. (5.22) denklemini göz önüne alındığında sabit  $y_d(t)$  referans girdisinin  $U$  kontrol bölgesinde olduğu görülmektedir.

Kontrol tasarımında (5.19) kayan yüzeyin katsayısı  $a = 1$  seçilmiştir.  $\varphi(x)$  fonksiyonu (5.23)'deki gibi alınmıştır. Şekilden sistemin verilen referans girdisini izlediği görülmektedir.



Şekil 5.2 Manyetik askı sisteminin çıktısı

## 6. HİSTERİSİS ETKİSİNE MARUZ KESİRLİ MERTEBEDEN SİSTEMLERİN KONTROL TASARIMLARI

Temelleri 17. yüzyılın sonlarında atılan kesirli analiz son zamanlarda fiziksel sistemleri modellemedeki üstünlüğünden dolayı oldukça ilgi gören bir alan haline gelmiştir. Böylece kesirli mertebeden sistem modellemeleri ve bu sistemlerin kesirli mertebeden kontrol tasarımları önem kazanmıştır. Histerisis etkisine sahip sistemlerin kontrol tasarımlarının incelendiği tez bu bölümünde sistemin kesirli mertebeden olması durumu ele alınacaktır. Histerisis etkisi mekanik bir histerisis modeli olan ve 2.7 Kısımında verilen SSSL modeli olarak seçilmiştir.

Kontrol tasarımı aşamasına geçmeden önce kesirli analizin temel kavramları üzerinde durulacaktır.

### 6.1 Kesirli Analiz

Kesirli analiz, tamsayı mertebeli türevlerin ve katlı integrallerin reel ya da karmaşık mertebelilere bir genelleştirmesidir. Gerçek sistemleri modellemedeki ve bu sistemlerin analizindeki etkililiği fark edilen kesirli analizin matematik, fizik, kimya, mühendislik, tıp gibi çeşitli alanlardaki uygulamaları gün geçtikçe artmaktadır.

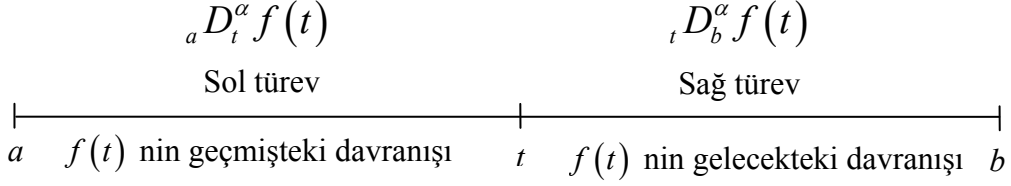
Kesirli analizin temelini kesirli mertebeden türev oluşturmaktadır. Literatürde birden fazla kesirli türev tanımı bulunmaktadır. Bunlardan en sık karşılaşılanları Riemann-Liouville, Caputo, Grünwald-Letnikov, Weyl, Riesz ve Marchaud kesirli türevleridir [50-52]. Hangi kesirli türev tanımının kullanılacağı ise ilgilenilen uygulama probleminin türüne ve yapısına bağlı olarak belirlenir.

Aşağıdaki kısımda öncelikle sağ ve sol kesirli türevlere değinilmiş ve daha sonra sık kullanılan kesirli türev tanımları verilmiştir.

#### 6.1.1 Kesirli Mertebeden Türevler

Klasik analizde olduğu gibi kesirli analizde de sol ve sağ türevlerden söz edilir.  $[a, b]$  aralığı üzerinde tanımlanan bir  $f(t)$  fonksiyonunun sol türevini

göstermek için  ${}_a D_t^\alpha$  ve sağ türevini göstermek için  ${}_t D_b^\alpha$  gösterimleri kullanılır.  $t$  zaman değişkeni için  $f(t)$  fonksiyonunun sol ve sağ türevlerinin fiziksel yorumu Şekil 6.1 ile verilmiştir. Sol türev sistemin geçmişteki davranışını ve sağ türev ise gelecekteki davranışını verir.



**Şekil 6.1** Sağ ve sol kesirli türevlerin fiziksel yorumu

Aşağıdaki kısımda Riemann-Liouville, Caputo ve Grünwald-Letnikov kesirli türev tanımları verilmektedir.

**6.1.1 Tanım (Gamma Fonksiyonu):** Karmaşık düzlemin sağ yarısında yakınsak olan ve  $\Gamma(\cdot)$  notasyonu ile gösterilen Gamma fonksiyonu

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (6.1)$$

olarak tanımlanır. Gamma fonksiyonu faktöriyel fonksiyonunun bir genelleştirmesidir.

**6.1.2 Tanım (Riemann-Liouville Kesirli İntegrali):**  $\alpha > 0$  ve  $f, [a, b]$  üzerinde integrallenebilen bir fonksiyon olmak üzere  $\alpha$  ıncı mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali

$${}_a I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (6.2)$$

biçiminde tanımlanır.  ${}_a I_t^\alpha$  kesirli integral operatörünü ifade etmek için kullanılmaktadır.  ${}_a I_t^\alpha (\cdot) = {}_a D_t^{-\alpha} (\cdot)$  olduğu açıktır.

**6.1.3 Tanım** (*Riemann-Liouville Kesirli Türevleri*) :  $f$ ,  $[a,b]$  üzerinde integrallenebilen, zaman değişkenli bir fonksiyon ve  $n-1 \leq \alpha < n$ , ( $n \in \mathbb{N}^+$ ) olmak üzere  $\alpha$  ıncı mertebeden kesirli sol ve sağ Riemann-Liouville türevleri sırası ile

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left( \frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (6.3)$$

$${}_t D_b^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left( -\frac{d}{dt} \right)^n \int_t^b (\tau-t)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (6.4)$$

olarak tanımlanır.

**6.1.4 Tanım** (*Grünwald-Letnikov Kesirli Türevleri*) :  $f$ ,  $[a,b]$  üzerinde integrallenebilen, zaman değişkenli bir fonksiyon ve  $\alpha > 0$  olmak üzere  $\alpha$  ıncı mertebeden sol ve sağ Grünwald-Letnikov türevleri sırasıyla aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$${}_a^{GL} D_t^\alpha f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^{-\alpha} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{\alpha}{r} f(t-rh), \quad (6.5)$$

$${}_t^{GL} D_b^\alpha f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=b-t}} h^{-\alpha} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{\alpha}{r} f(t+rh). \quad (6.6)$$

**6.1.5 Tanım** (*Caputo Kesirli Türevleri*) :  $f$ ,  $[a,b]$  üzerinde  $n$ . mertebeden türevlenebilir, zaman değişkenli bir fonksiyon ve  $n-1 \leq \alpha < n$ , ( $n \in \mathbb{N}^+$ ) olmak üzere  $\alpha$  ıncı mertebeden kesirli sol ve sağ Caputo türevleri

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \left( \frac{d}{dt} \right)^n f(\tau) d\tau, \quad (6.7)$$

$${}_t^C D_b^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b (\tau-t)^{n-\alpha-1} \left( -\frac{d}{dt} \right)^n f(\tau) d\tau \quad (6.8)$$

olarak tanımlanır.



Matematik, fizik ve mühendislik uygulamaları açısından bakıldığında bu tanımlar bazı farklılıklara sahiptir. Caputo kesirli türevi fiziksel olarak yorumlanabilir başlangıç koşullarının ortaya çıkmasına izin verdiği için mühendislik problemlerinde sıkça tercih edilir. Riemann-Liouville kesirli türevi ise daha çok matematiksel çalışmalarda yaygın olarak kullanılır. Fakat homojen başlangıç koşulları altında Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türev tanımlarının her ikisi de birbirine eşittir. Ayrıca, sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlar için Riemann-Liouville ve Grünwald-Letnikov tanımları birbirine eşittir. Bu fonksiyonların sınıfı uygulamalar için çok önemlidir. Çünkü dinamik sistemlerin büyük kısmının karakteri yeteri kadar düzgündür ve süreksizliklere izin vermezler [52]. Bu amaçla, Riemann-Liouville kesirli türevi problemi analitik olarak çözmek için kullanılabilir, sonrasında bu türeve Grünwald-Letnikov kesirli türev tanımı ile yaklaşılabilir ve böylece nümerik bir çözüme ulaşılır.

### **6.1.2 Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemler**

Kesirli mertebeden türevler içeren diferansiyel denklemlere kesirli diferansiyel denklemler denir. Bu diferansiyel denklemler yardımıyla kesirli mertebeden sistemler modellenir. Kesirli mertebeden diferansiyel denklemler geleneksel analitik metotların uygulanması sonucunda davranışları tam olarak açıklanamayan sistemlerin modellenmesinde kullanılır. Örneğin; histerisis, sönme, hafıza ve gerilim faktörlerinin doğal olarak ortaya çıktığı viskoelastik (yapışkan ve esnek) materyallerin (kıkırdak, deri, kas) fiziksel durumlarının modellenmesinde kesirli hesaplamalar kendiliğinden ortaya çıkar [53].

Eğer zaman bölgesinde tanımlanan bir sistem oldukça yavaş sönüm yapıyorsa, anormal hızlanıyorsa, kendi yayılım hızını yavaşlatıyorsa ya da kendisine ait verilerin ifade edilebilmesi için çok fazla sayıda üstel fonksiyonun toplamını gerektirip işlemleri zorlaştırıyorsa bu durumda kesirli analize başvurmak sistemin tanımlanabilmesi ve analizi açısından oldukça etkilidir. Bir sistemin gerçeğine çok yakın bir modelinin geliştirilebilmesi için sistem farklı alt bölümlere ayrılır. Bu esnada bir takım pratik ve deneysel veriler ile ek oran ya da değişim sabitleri göz önüne alınır. Aynı zamanda, karmaşık bir modelin bütün parametrelerinin gerçeğe en yakın değerleri için basitleştirilmiş varsayımlara gerek vardır. Bu noktada eğer

kesirli analiz az sayıda sabit kullanarak sistem bilgilerini gerçeğe en uygun halde tanımlayabiliyorsa ve daha sınırlı bir zaman diliminde bu sistem sabitleri için iyi bir yaklaşım yapabiliyorsa basit ve kısa bir sistem modeli sağlar. Bir sistemin gösterimi ne kadar basitleşirse, o sistemi modellemek ve kontrol etmek o kadar kolaylaşır.

Sistem dinamikleri yani sistemi tanımlayan diferansiyel denklemler kesirli türevler içeriyorsa bu sistemin analizi kesirli hesaplamalarla yapılır. Ancak sistemin kontrolü klasik ya da kesirli olabilir. Kesirli kontrol, kesirli türev ya da integral içeren kontrollörlerdir. Kesirli kontrolörün kullanımı son zamanlarda yaygınlaşmıştır. Örneğin, sistem elemanları viskoelastik davranışlar gösteriyorsa kesirli kontrolör klasik kontrolörden daha iyi çalışır. Kesirli kontrolörün kullanımının gerekli ve yaygın olduğu başka bir alan ise nöral mühendisliğidir. Biyolojik sistemlerin düzenlenmesinde de kesirli kontrolör kullanılır.

Kesirli diferansiyel denklemleri çözmek için çeşitli yöntemler mevcuttur. Burada analitik yöntemlerden Laplace dönüşüm metoduna ve nümerik olarak Grünwald-Letnikov yaklaşımına değinilecektir.

### 6.1.3 Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemlerin Çözüm Yöntemleri

Kesirli mertebeden diferansiyel denklemleri çözmek için çeşitli yöntemler oluşturulmuştur. Bir sonraki bölümde Riemann-Liouville kesirli türevi ile tanımlanan kesirli bir diferansiyel denklemin çözümü göz önüne alınacağı için bu kısımda Riemann-Liouville kesirli türevinin Laplace dönüşümü ve çözüm için gerekli diğer fonksiyonlar tanımlanacaktır.

**6.1.6 Tanım** (*Riemann-Liouville Kesirli Türevinin Laplace Dönüşümü*) :  $n-1 \leq \alpha < n$ ,  $n \in \mathbb{N}^+$  olmak üzere Riemann-Liouville kesirli türevinin Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}\{ {}_0D_t^\alpha f(t); s \} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} [ {}_0D_t^{\alpha-k-1} f(t) ]_{t=0^+} \quad (6.9)$$

biçiminde tanımlanır.

**6.1.7 Tanım (Mittag-Leffler Fonksiyonu) :**  $\alpha, \beta > 0$  olmak üzere bir ve iki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonları sırası ile aşağıdaki biçimde tanımlanır:

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad (6.10)$$

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}. \quad (6.11)$$

Mittag-Leffler fonksiyonları üstel fonksiyonun genelleştirmesidir. Bu durum  $\alpha = 1$  ve  $\beta = 1$  seçilerek görülür:

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z. \quad (6.12)$$

**6.1.8 Tanım (Grünwald-Letnikov Yaklaşımı) :** (6.5) ve (6.6)'da tanımı verilen Grünwald-Letnikov kesirli türevi zamanın kesikli hale getirilmesi temeli üzerine kurulduğu için sonsuz boyutlu sürekli bir sistemi sonlu boyutlu kesikli bir sistem haline dönüştürür. Bu durum Grünwald-Letnikov tanımının nümerik bir yaklaşım olarak kullanılmasına imkân tanımıştır. Kesirli bir sistemin analitik çözümünün bulunması her zaman kolay ya da mümkün olmayabilir. Bu yüzden kesirli analizde nümerik hesaplama yöntemleri oldukça önemlidir. Grünwald-Letnikov yaklaşımı,  $n-1 \leq \alpha < n$ ,  $n \in \mathbb{N}^+$  olmak üzere homojen başlangıç koşulları altında sabit katsayılı

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{\alpha} y(t) + Ay(t) &= f(t), \quad (t > 0) \\ y^{(k)}(0) &= 0, \quad (k = 0, 1, \dots, n-1) \end{aligned} \quad (6.13)$$

kesirli diferansiyel denklemi üzerinden açıklanabilir. (6.13) başlangıç-değer probleminde zaman aralığı  $h$  uzunluklu  $N$  tane alt aralığa bölünür. Bu şekilde ayrıklaştırılan zaman aralığı üzerindeki algoritma kesirli türevin mertebesine göre iki durumda ifade edilebilir:

**1. Durum:**  $0 < \alpha < 1$  ve  $y_0 = 0$  ise,

$$h^{-\alpha} \sum_{j=0}^M \omega_j^{(\alpha)} y(Mh - jh) + Ay(Mh) = f(Mh), \quad (M = 1, 2, \dots). \quad (6.14)$$

**2. Durum:**  $n-1 \leq \alpha < n$  ve  $y_k = 0$  ( $k = 1, 2, \dots, n-1$ ) ise,

$$y(Mh) = -Ah^\alpha y(Mh - h) - \sum_{j=1}^M \omega_j^{(\alpha)} y(Mh - jh) + h^\alpha f(Mh), \quad (M = n, n+1, \dots). \quad (6.15)$$

(6.14) ve (6.15) denklemlerindeki  $\omega_j^{(\alpha)}$  lar

$$\omega_j^{(\alpha)} = (-1)^j \binom{\alpha}{j}, \quad j = 1, 2, \dots, M$$

biçimde tanımlanır. Bu ifade aşağıda verilen tekrarlı bağıntısı ile hesaplanabilir:

$$\omega_0^{(\alpha)} = 1; \quad \omega_j^{(\alpha)} = \left(1 - \frac{\alpha+1}{j}\right) \omega_{j-1}^{(\alpha)}, \quad j = 1, 2, \dots, M. \quad (6.16)$$

## 6.2 Histerisis Etkisine Maruz Kesirli Yayılım Sistemleri ve Kontrol Tasarımları

Bu kısımda, girişinde histerisis etkisine maruz kalan bir kesirli yayılım sisteminin kontrol problemi ele alınmıştır. Sistem Riemann-Liouville kesirli türevi ve SSSL histerisis modeli kullanılarak modellenmiştir. Sistemdeki histerisis etkisini telafi etmek için kesirli mertebeden PID kontrol tasarımı kare integral hatası minimize edilmek suretiyle gerçekleştirilmiştir. Nümerik hesaplamalar için Riemann-Liouville kesirli türevine Grünwald-Letnikov yaklaşımı ile yaklaşım ve buradan nümerik olarak çözülebilir cebirsel denklemler takımı elde edilmiştir. Kesirli mertebeden PID kontrolü ile klasik PID kontrolü simülasyon sonuçları yardımıyla karşılaştırılmış ve kesirli kontrollerin tamsayı mertebeli olanlardan daha avantajlı olduğu gösterilmiştir.

### 6.2.1 Kesirli Yayılım-Dalga Sistemleri

Klasik yayılım-dalga sürecinin bir genelleştirmesi olan kesirli yayılım-dalga süreci klasik yayılım-dalga denkleminin birinci veya ikinci mertebeden türevli

terimlerinin  $\alpha > 0$  mertebeli kesirli bir türev ile yer değiştirilmesi yolu ile modellenir [54]. Bu süreç, kesirli türevin mertebesine bağlı olarak;  $\alpha < 1$  için alt-yayılm,  $\alpha = 1$  için standart (klasik) yayılım,  $\alpha > 1$  için süper yayılım ve  $\alpha = 2$  için dalga şeklinde karakterize edilebilir. Son zamanlarda kesirli mertebeden yayılım süreci ve kontrolü uygulamaları sebebiyle oldukça ilgi görmektedir. Uygulama alanlarına örnek olarak anormal alt-yayılm ve anormal yayılım sistemleri, sürekli-zaman rastgele yürüyüşü (continuous-time random walk), yayılım ve dalga olgularının verilebilir.

Günümüze kadar kesirli yayılım denklemlerini çözmek için çeşitli teknikler ortaya konmuştur [54-56]. Bu çalışmalar Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türevlerine dayanmaktadır. Caputo kesirli türevi sistemin çözümünde fiziksel olarak yorumlanabilir başlangıç koşullarının ortaya çıkmasına izin verdiği için kesirli yayılım süreçlerini formülize etmek için sıkça tercih edilir. Bununla birlikte, [57]'de Riemann-Liouville kesirli türevi ile ifade edilen başlangıç koşullarının fiziksel anlamı verilmiştir. Hilfer, H fonksiyonlarının Riemann-Liouville kesirli türevi ile oluşturulan bir kesirli yayılım denklemini çözmüştür [58]. Ayrıca, Riemann-Liouville anlamında formülize edilen kesirli yayılım-dalga denkleminin  $\mathbb{R}^m$  uzayındaki çözümü [59]'da, polar koordinatlardaki çözümü [60]'da, silindirik koordinatlardaki çözümü ise [61]'de verilmiştir. [62]'de ise üç boyutlu küre içindeki radyal yayılımı tanımlayan bir kesirli yayılım-dalga denklemi analiz edilmiştir.

Kesirli mertebeden sistemlerin geliştirilmesi kesirli kontrol olarak adlandırılan yeni bir kontrol tipini meydana getirmiştir. Bu tip bir kontrol ilk kez Oustaloup tarafından araştırılmıştır [63]. Oustaloup “Commande Robuste d’Ordre Non Entier” in kısaltması olan ve CRONE olarak adlandırılan bir kesirli kontrolör tasarlamıştır ve CRONE kontrolörün performansının klasik PID kontrolöründen daha iyi olduğunu göstermiştir. Ayrıca Podlubny,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  olmak üzere  $\lambda$  mertebeli integral ve  $\mu$  mertebeli türev içeren bir  $PI^\lambda D^\mu$  kontrolörü tasarlamıştır ve bu kontrolörün kesirli dinamik sistemler için kullanıldığında daha iyi performans sergilediğini göstermiştir [64,65]. Kesirli  $PI^\lambda D^\mu$  kontrol tasarımı için çeşitli ayarlama stratejileri geliştirilmiştir, bu stratejiler [66-68]'de bulunabilir. Ayrıca, kesirli  $PI^\lambda D^\mu$  kontrolünün tamsayı mertebeli sistemler için kullanımı da mümkündür. Örneğin, kesirli  $PI^\lambda D^\mu$  kontrolörü tamsayı mertebeli ısı yayılım

sistemlerine uygulaması [69]'da görülebilir. Bir başka kesirli kontrol tipi de kesirli analizin optimal kontrol alanına uygulanması sonucu ortaya çıkmıştır. Kesirli optimal kontrol problemleri ilk olarak Agrawal tarafından formülize edilmiş ve çözülmüştür [70]. Caputo anlamında kesirli yayılım sistemlerinin kesirli optimal kontrolü [71]'de, Riemann-Liouville anlamında kesirli yayılım-dalga problemlerinin kesirli optimal kontrolü ise kartezyen ve silindirik koordinatlarda [72-74]'de verilmiştir.

Gerçek sistemler genellikle lineer olmayan yapılar içerdiğinden bu tip sistemlerin kontrolü üzerine olan ilgi her geçen gün biraz daha artmaktadır [75]. Aynı durum kesirli mertebeden sistemler için de söz konusudur. Histerisis yapısı gösteren kesirli mertebeden sistemler üzerine çalışmalar mevcuttur [76-80]. Fakat bu çalışmalarda kontrol problemine değinilmemiştir. Aşağıdaki kısımda ise girişinde histerisis etkisine maruz kesirli mertebeden bir yayılım sistemi ve kesirli mertebeden kontrol tasarımı süreci incelenmiştir [81,82]. Bu problem tipi tamsayı mertebeden lineer sistemler için [11]'de bulunabilir.

### 6.2.2 Kesirli Yayılım Süreci ve Çözümü

$[0,1]$  uzaysal bölgesinde tanımlı, SSSL histerisis etkisine maruz kesirli yayılım sistemi ( $\alpha \leq 1$ )

$$\frac{\partial^\alpha z(t,x)}{\partial t^\alpha} = \beta \frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial x^2} + \delta(x-x_b)w(t) \quad (6.17)$$

$$w(t) = [\Phi(u(t), w_0)](t)$$

kısmi kesirli diferansiyel denklemi ile tanımlanır. (6.17)'de  $\beta$  yayılım sabiti,  $\Phi$  SSSL histerisis operatörü ve  $x_b \in (0,1)$  kontrolün uygulandığı noktadır. Kolaylık olması için Dirichlet sınır koşulları

$$z(t,0) = z(t,1) = 0 \quad (6.18)$$

seçilmiştir. Ayrıca sıfır başlangıç koşulları

$$z(0,x) = 0, \quad (6.19)$$

göz önüne alınmıştır. Çünkü sistemin nümerik çözümü için Grünwald Letnikov yaklaşımı kullanılacaktır ve bu yaklaşım Riemann-Liouville kesirli türevi için uygulanabilir. Sıfır başlangıç koşulları altında Riemann-Liouville ve Caputo türevleri denk olduğundan fiziksel olarak anlamlı bir süreç modellenmiş olur.

(6.17) sistemi bir  $x_c \in (x_b, 1)$  noktasında gözlenir, yani sistem çıktısı:

$$y(t) = z(t, x_c) \quad (6.20)$$

dir.

Sistemin çözümü değişkenlerine ayırma metodu kullanılarak elde edilir. Bu amaçla, (6.17)'de verilen kısmi kesirli diferansiyel denklemin aşağıdaki formda bir çözüme sahip olduğu varsayılır:

$$z(t, x) = T(t)X(x). \quad (6.21)$$

İlk olarak, (6.17) denkleminin homojen kısmı düşünülür. (6.21) denkleminin (6.17) denkleminde yazılmasıyla

$$\frac{1}{T} \frac{d^\alpha T}{dt^\alpha} = \beta \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} \quad (6.22)$$

eşitliği meydana getirir. (6.22) diferansiyel denkleminin çözümünün var olması için denklemin aşağıdaki biçimde keyfi olarak seçilen bir ayırma sabitine eşit olması gerekir:

$$\frac{1}{T} \frac{d^\alpha T}{dt^\alpha} = \beta \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\beta \ell^2. \quad (6.23)$$

(6.19) denklemini kullanılarak, (6.23) denkleminin ikinci kısmının ( $x$  değişkenine bağlı olan kısmının) çözümü

$$X(x) = \sin(k\pi x), \quad k = 1, 2, \dots \quad (6.24)$$

bulunur ki bu çözümler öz fonksiyonlar olarak adlandırılır. O halde (6.17) denkleminin genel çözümü:

$$z(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) \sin(k\pi x). \quad (6.25)$$

dir. Çoğu uygulamada yüksek dereceli öz değerlerin çözüme katkısı çok küçüktür. Ayrıca, nümerik olarak sonlu tane terim üzerinden hesaplama yapılabildiğinden yüksek dereceli öz değerler ile ilgili terimler ihmal edilebilir. Dolayısıyla (6.25)'deki sonsuz toplam üst sınırı  $m$  olan sonlu bir toplam ile değiştirilir:

$$z(t, x) = \sum_{k=1}^m q_k(t) \sin(k\pi x).$$

Bu ifadenin (6.17) denkleminde yerine yazılması ile

$$\sum_{k=1}^m \frac{d^\alpha q_k(t)}{dt^\alpha} \sin(k\pi x) = -\beta \sum_{k=1}^m q_k(t) \sin(k\pi x) + \delta(x - x_b) \Phi(u) \quad (6.26)$$

elde edilir. (6.26) denkleminin her iki tarafı  $\sin(j\pi x)$ ,  $1 \leq j \leq m$  ile çarpılır; sonrasında 0'dan 1'e kadar  $x$  değişkenine göre integre edilir ve ortogonalite özelliği kullanılırsa

$$\frac{d^\alpha q_k(t)}{dt^\alpha} = -\beta k^2 \pi^2 q_k(t) + 2 \sin(k\pi x_b) \Phi(u), \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (6.27)$$

bulunur. (6.27) problemi için başlangıç koşulları ise (6.19)'dan  $q_k(0) = 0$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) olarak hesaplanır. (6.27) denklemini durum uzayı formunda aşağıdaki biçimde ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} {}_0D_t^\alpha q(t) &= Aq(t) + Bw(t) \\ y(t) &= Cq(t) \\ w(t) &= [\Phi(u(t), w_0)](t). \end{aligned} \quad (6.28)$$

Burada,  $q(t) = [q_1(t) \ q_2(t) \ \dots \ q_m(t)]^T$  durum değişkeni  $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $B \in \mathbb{R}^m$  ve  $C \in \mathbb{R}^m$  ifadeleri aşağıda verilen ve (6.28) denkleminde hesaplanan



$$A = \text{diyagonal}[-\beta k^2 \pi^2];$$

$$B = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_m]^T, \quad b_k = 2 \sin(k\pi x_b);$$

$$C = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_m], \quad c_k = \sin(k\pi x_c), \quad k = 1, 2, \dots, m$$

matrislerdir. (6.28) denklemini ile tanımlanan sistemin çözümü Laplace dönüşüm metodu kullanılarak aşağıdaki biçimde elde edilir:

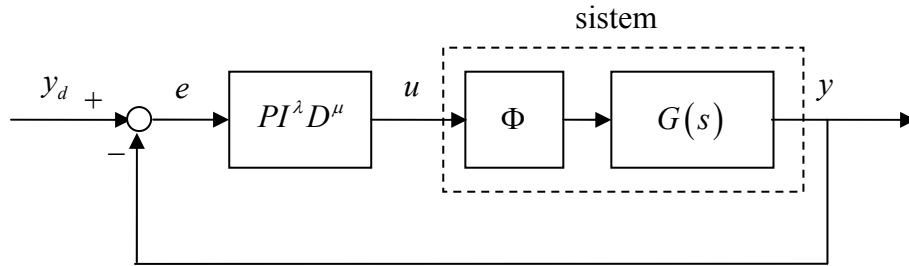
$$Q(s) = (s^\alpha I - A)^{-1} q_0 + (s^\alpha I - A)^{-1} BW(s),$$

$$W(s) = [\Phi(U(s), w_0)](s). \quad (6.29)$$

Burada,  $q_0 = [{}_0 D_t^{\alpha-1} q(t)]_{t=0}$  başlangıç koşulu ve  $U(s) = \mathcal{L}[u(t)]$  dir. (6.29) denkleminin ters Laplace dönüşümünü alarak, çözümün zaman bölgesindeki karşılığı bulunur:

$$q(t) = E_{\alpha,1}(At^\alpha) + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(t-\tau)^\alpha) Bw(\tau) d\tau. \quad (6.30)$$

Kesirli mertebeden lineer (6.28) sistemin blok diyagramı Şekil 6.2'de verilmiştir.



**Şekil 6.2** Histerisis girişli kesirli mertebeden yayılım sisteminin blok diyagramı

### 6.2.3 Kesirli Mertebeden PID Kontrolörü

$\lambda$  mertebeden integral ve  $\mu$  mertebeden türev içeren kesirli mertebeden PID kontrolörü tamsayı mertebeli PID kontrolörünün genelleştirilmiş bir formudur ve kısaca  $PI^\lambda D^\mu$  şeklinde de gösterilebilir.  $PI^\lambda D^\mu$  kontrolü aşağıdaki denklem yardımıyla tanımlanır:

$$u(t) = k_p e(t) + k_i I^\lambda e(t) + k_d D^\mu e(t). \quad (6.31)$$

Burada  $t$  zaman değişkeni,  $u(t)$  kontrolör,  $e(t)$  hata fonksiyonu ve  $k_p$ ,  $k_i$  ve  $k_d$  ise sırası ile oransal, integral ve türev kontrollerinin katsayılarıdır. Hata fonksiyonu istenen referans değeri  $y_d(t)$  ve sistem çıktısı olan  $y(t)$  arasındaki fark olarak tanımlanır. Açıkça görülebilir ki  $\lambda=1$  ve  $\mu=1$  seçimleri tamsayı mertebeli PID kontrolünü verir.  $PI^\lambda D^\mu$  kontrolörü PID kontrolöründen daha esnektir. Çünkü  $PI^\lambda D^\mu$  kontrolörü  $k_p$ ,  $k_i$  ve  $k_d$  katsayılarının yanı sıra  $\lambda$  ve  $\mu$  mertebelerinin de ayarlanmasına imkân verir. Dahası,  $PI^\lambda D^\mu$  kontrolörü kontrol edilen sistemin parametrelerinin değişimine klasik PID kontrolüne göre daha az hassasiyet gösterir [52].

(6.28) denklemi ile verilen sistem, (6.31)'de tanımı verilen kesirli  $PI^\lambda D^\mu$  kontrolörü ile kontrol edilir. Bu çalışmada,  $PI^\lambda D^\mu$  kontrolörü aşağıda tanımı verilen karesel integral hatasının minimize edilmesi ile ayarlanmıştır:

$$J(p) = \int_0^{\infty} [e(t, p)]^2 dt, \quad (6.32)$$

burada  $p = [k_p \ k_i \ k_d \ \lambda \ \mu]$  kontrol parametrelerinin kümesi ve  $e(t, p)$  hata fonksiyonudur.  $J$ 'nin minimizasyonu için [39]'da verilen algoritma kullanılmıştır. Bu algoritma verilen basamaklar takip edilerek uygulanır:

#### 1. Adım: Başlangıç basamağı

- Zaman aralığının seçimi
- Yakınsaklık toleransı  $\varepsilon$  nun seçimi
- Döngü sayacının seçimi:  $k = 0$

- Başlangıç kontrolör parametresi  $p(k)$  vektörünün seçimi

## 2. Adım: Gradientin Hesaplaması

- $J$  nin gradienti  $dJ(p(k)) = \frac{\partial J}{\partial p}(k)$  hesaplanır. Eğer gradient aşağıdaki koşulu sağlıyorsa algoritma durdurulur:

$$|dJ(p(k))| < \varepsilon.$$

## 3. Adım: Hesaplamanın Güncellenmesi

- Güncellenmiş  $\gamma_k$  ve  $R_k$  parametreleri ve aşağıdaki değerler hesaplanır:

$$p(k+1) = p(k) - \gamma_k R_k^{-1} \frac{\partial J}{\partial p}(k).$$

- $k$  değeri  $k = k + 1$  olarak güncellenip 2. adıma tekrar gidilir. Bu adımda,  $R_k^{-1}$   $J$ 'nin Hesse matrisi ve  $\gamma_k$  adım uzunluğunu belirleyen pozitif reel bir skalerdir.

### 6.2.4 Nümerik Örnek

Nümerik hesaplamalar için, (6.28) sistemi Riemann-Liouville kesirli türevinin Grünwald-Letnikov yaklaşımı kullanılarak çözülür. Bu amaçla,  $[0, T]$  zaman bölgesi  $h = \frac{T}{N}$  uzunluklu eşit  $N$  tane alt aralığa bölünür ve her bir zaman düğümü  $0, 1, 2, \dots, N$  olmak üzere işaretlenir.  $0 \leq M \leq N$  olmak üzere  $M$  inci düğümde Riemann-Liouville kesirli türevinin Grünwald-Letnikov yaklaşımı ile elde edilen değeri

$${}_0 D_t^\alpha q(hM) = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^M \omega_j^{(\alpha)} q(hM - jh) \quad (6.33)$$

olarak hesaplanır. (6.33) denklemi kullanılarak, (6.28) sisteminin nümerik çözümü aşağıdaki gibi elde edilir:

$$q(hM) = \left( \frac{1}{h^\alpha} \omega_0^{(\alpha)} I - A \right)^{-1} \left( Bw(hM) - \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=1}^M \omega_j^{(\alpha)} q(hM - jh) \right),$$

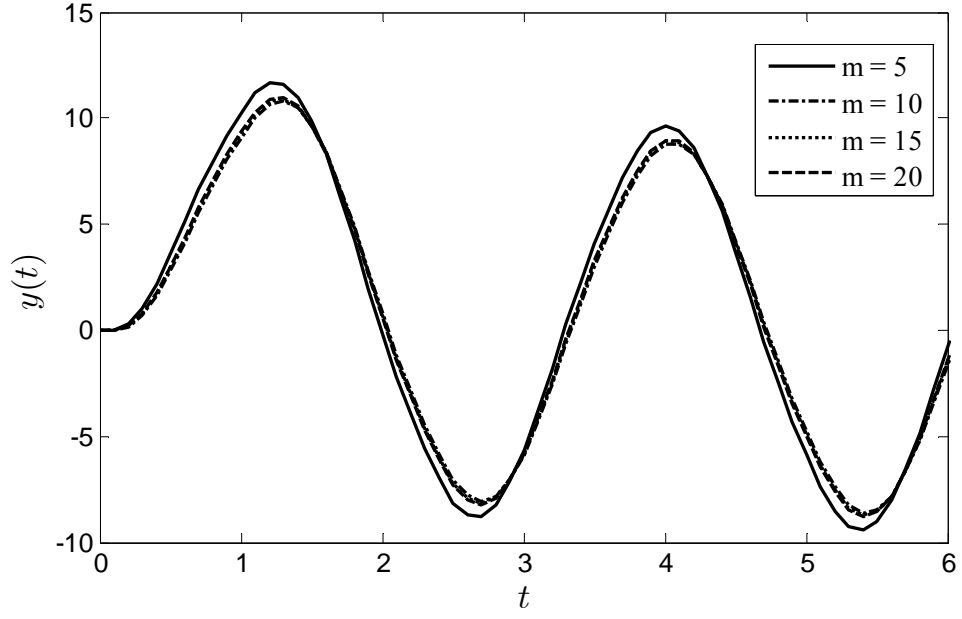
$$w(hM) = [\Phi(u(hM), u_0)](hM).$$

Benzer biçimde, kesirli  $PI^\lambda D^\mu$  kontrolörü Grünwald-Letnikov yaklaşımı ile hesaplanabilir. Dikkat edilirse  $\lambda$  mertebeli integral kontrolün Grünwald-Letnikov yaklaşımına göre değeri (6.33) denkleminde  $\alpha$  yerine  $-\lambda$  ile yazılarak hesaplanır. Böylece,  $M$  inci zaman düğümünde kesirli  $PI^\lambda D^\mu$  kontrolörünün yaklaşık değeri:

$$u(hM) = k_p e(hM) + k_i \frac{1}{h^{-\lambda}} \sum_{j=0}^M \omega_j^{(-\lambda)} e(hM - jh) + \sum_{j=0}^M \omega_j^{(\mu)} e(hM - jh)$$

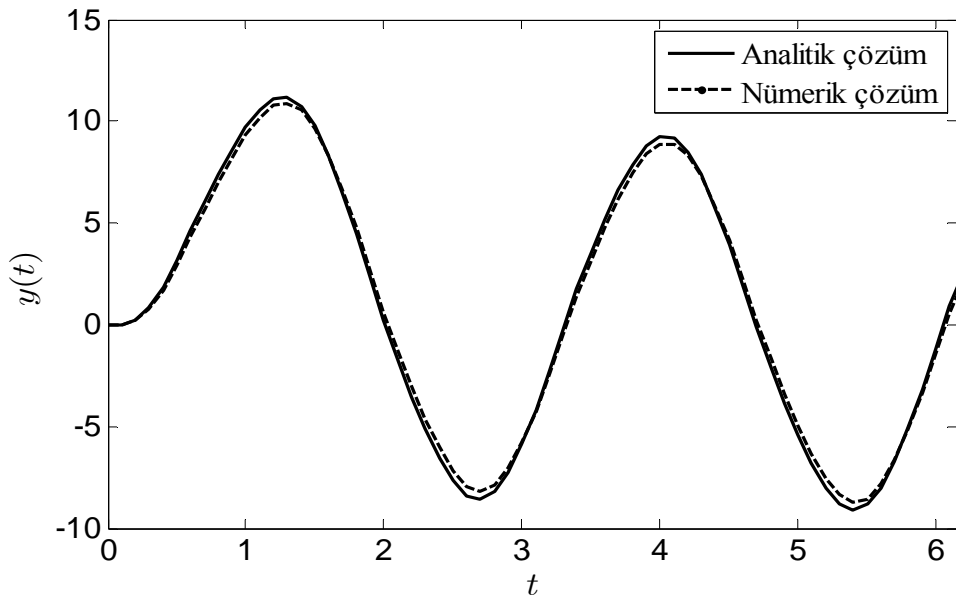
olarak bulunur.

Bu kısımda sistemin kesirli ve tamsayı mertebeli kontrolör tasarımı sistemin mertebesi  $\alpha = 0.8$ , ve  $x_b = 0.25$ ,  $x_c = 0.375$  seçimleri için yapılmıştır. Histerisis etkisi Şekil 2.9'da verilen SSSL operatörü ile tanımlanmıştır ( $\rho = 1$ ,  $c = 3.1635$ ,  $b = 0.345$ ). Yakınsaklık değeri  $\varepsilon = 0.05$  ve  $\gamma_k = h$  seçilmiştir.  $[0, 30]$  zaman aralığı için adım uzunluğu  $h = 0.05$  olmak üzere simülasyon sonuçları verilmektedir. Şekil 6.3'de, özdeğer sayısı  $m$  nin sistem çıktısına katkısı gösterilmiştir. Farklı  $m$  değerleri,  $u(t) = 4.5 \sin(2.3t)$  fonksiyonu ve  $\alpha = 1$  değeri için sistem çözülmüştür. Şekilden,  $m = 10$  değerinden sonraki  $m$  değerlerinin sisteme olan katkılarının çok küçük olduğu görülür. Bu nedenle, sistemin sonsuz boyutlu olmasına rağmen sonlu sayıda özdeğer almak nümerik hesaplamalar için yeterlidir. Bundan sonraki simülasyon sonuçları için  $m = 15$  seçilmiştir.



**Şekil 6.3** Özdeğer sayısı  $m$  nin (6.28) sisteminin cevabına olan katkısı.

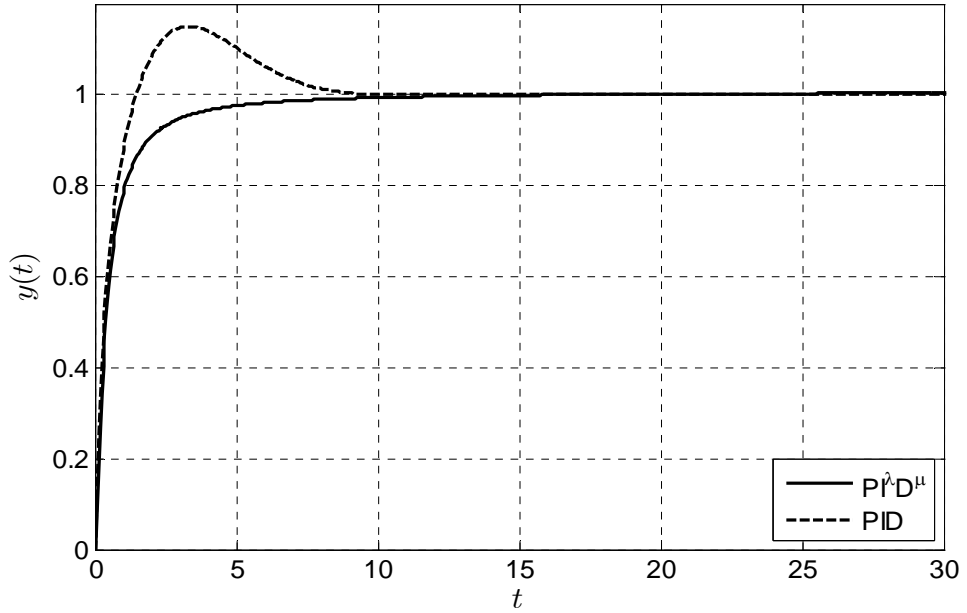
Şekil 6.4’de,  $u(t) = 4.5 \sin(2.3t)$  girdisi uygulanarak (6.28) sisteminin analitik ve nümerik çözümleri karşılaştırılmış ve verilen algoritmanın hassasiyeti gösterilmiştir. Analitik ve nümerik çözümler birbirlerine çok yakın olduklarından algoritmanın doğru bir şekilde çalıştığı sonucuna ulaşılır.



**Şekil 6.4** (6.28) sisteminin analitik ve nümerik çözümlerinin karşılaştırılması.

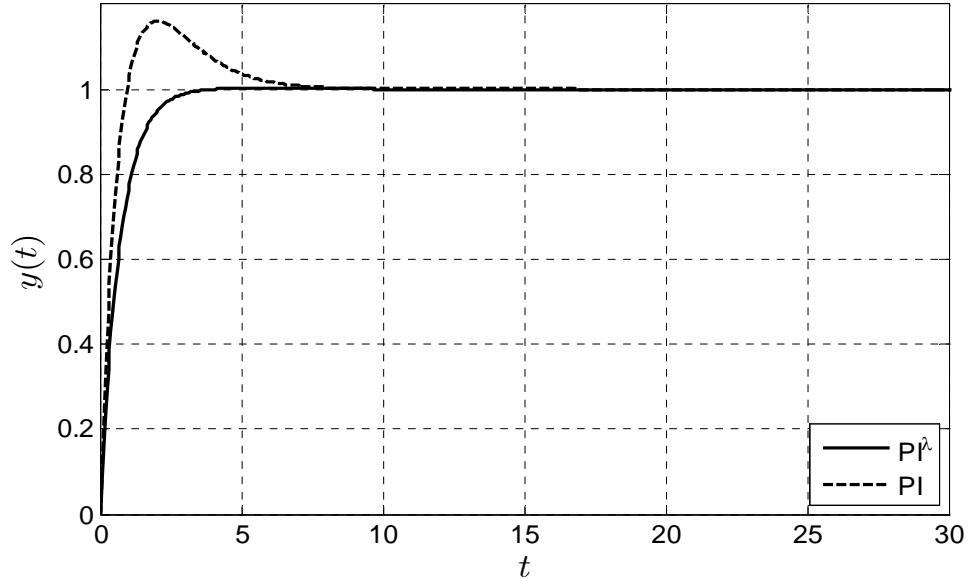
Diğer şekiller histerisis girişli kesirli mertebeden sistemin ( $\alpha = 0.8$ ) kontrolör tasarımını göstermektedir. (6.28) sisteminin kontrol amacı sistemin çıktısı  $y(t)$  nin  $y_d(t) = 1$  referans değerine yakınsamasıdır.

Şekil 6.5’de,  $PI^\lambda D^\mu$  ve PID kontrolörleri karşılaştırılmıştır. Kesirli  $PI^\lambda D^\mu$  kontrolörün ayarlanmış parametreleri  $k_p = 0.2022$ ,  $k_i = 0.1915$ ,  $k_d = 0.1958$ ,  $\lambda = 0.1921$ ,  $\mu = 0.1904$  ve klasik PID kontrolörün ayarlanmış parametreleri  $k_p = 0.0588$ ,  $k_i = 0.4154$ ,  $k_d = 0.0409$  biçimindedir.



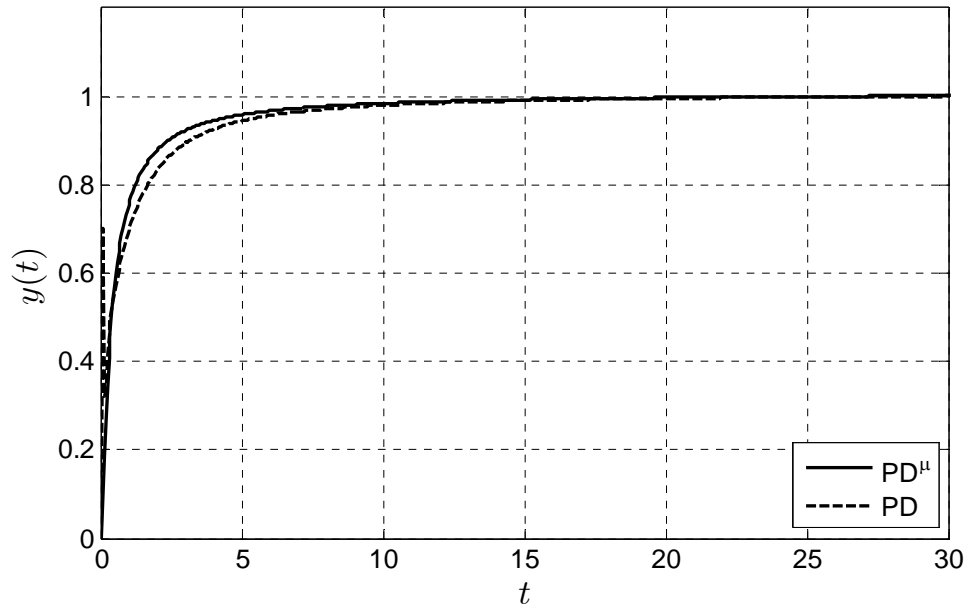
Şekil 6.5 (6.28) sistemi için kesirli ve klasik PID kontrolörlerin karşılaştırılması.

Şekil 6.6, kesirli mertebeli  $PI^\lambda$  ve tamsayı mertebeli PI kontrolör tasarımlarını göstermektedir.  $PI^\lambda$  kontrolörü için gözlenen optimum parametreler  $k_p = 0.2276$ ,  $k_i = 0.2230$ ,  $k_d = 0.1958$ ,  $\lambda = 0.2180$  ve PI kontrolörü için  $k_p = 0.7077$ ,  $k_i = 0.8545$  dir.



Şekil 6.6 (6.28) sistemi için kesirli ve klasik PI kontrollerin karşılaştırılması.

Benzer biçimde Şekil 6.7’de kesirli  $PD^\mu$  ve klasik PD kontrolörleri analiz edilmiştir.  $k_p = 0.2276$ ,  $k_d = 0.2230$ ,  $\mu = 0.2180$  kesirli  $PD^\mu$  kontrolörü için optimum parametreler ve  $k_p = 0.1242$ ,  $k_d = 0.1231$  klasik PD kontrolörü için optimum parametrelerdir.



Şekil 6.7 (6.28) sistemi için kesirli ve klasik PD kontrollerin karşılaştırılması.

Şekil 6.5, Şekil 6.6 ve Şekil 6.7'deki kontrol tipleri karşılaştırıldığı zaman kesirli kontrolörlerin tamsayı mertebeli kontrolörlerden daha iyi performans sergilediği görülmektedir. Bu durum her bir şekil tek tek değerlendirilerek aşağıdaki gibi açıklanır.

Şekil 6.5'de kesirli mertebeden  $PI^\lambda D^\mu$  ve klasik PID kontrolleri altında sistem cevabı hemen hemen aynı zamanda istenilen değere ulaştığı görülür. Buna rağmen  $PI^\lambda D^\mu$  kontrolün cevabında klasikteki gibi aşım meydana gelmediği için daha avantajlıdır.

Şekil 6.6'da kesirli mertebeden  $PI^\lambda$  ile kontrol edilen sistem cevabının klasik PI ile kontrol edilenden daha önce istenilen değere oturduğu ve aşımın meydana gelmediği görülmektedir. Klasik PI kesirliye göre daha erken istenilen değere ulaşır fakat aşımın olması ve yerleşme zamanının  $PI^\lambda$  ya göre daha geç olması sebebiyle  $PI^\lambda$  kontrolü daha iyi bir sonuç verir.

Şekil 6.7'de her iki kontrolün de davranışı aynı gibi gözükmemektedir. Fakat klasik PD kontrol başlangıç noktası civarında bir sıçrayış yapmış ve daha sonra kesirli mertebeden  $PD^\mu$  kontrolüne benzer hareket etmiştir. Bu durum kesirli mertebeden  $PD^\mu$  kontrol tercih edilmesine yol açar.

Sonuç olarak girişinde histerisis etkisine maruz kalan kesirli mertebeden yayılım sistemlerinin (6.34) ile verilen sınıfını kontrol etmek için kesirli mertebeden kontrollerin kullanılmasının daha avantajlı olacağı elde edilir.



## 7. SONUÇ

Histerisis etkisine sahip sistemlerin kontrol tasarımının incelendiği bu tezde öncelikle histerisis girişli lineer olmayan sistemler için kayan kip yöntemi ile kontrol tasarımı yapılmıştır. Histerisis etkisi kontrol tasarımı sürecinde telafi edilmiştir. Bunun için diferansiyel bir model olan Duhem histerisisin analitik çözümü kullanılmıştır. Sonuç olarak sistemin istenen referans girdisini izleyebildiği ispatlanmıştır.

Ayrıca, ikinci dereceden afin olmayan histerisis girişli, lineer olmayan sistemlerin bir sınıfı ele alınmıştır. Kayan kip ile aynı histerisis telafi yöntemi birleştirilerek tasarlanan kontrol, sisteminin kararlılığı için belirlenen bir bölgeye sınırlandırılmıştır ve sistemin bu bölgede seçilen referans girdisini izlediği ispatlanmıştır. Bu tip bir sistemin ele alınmasının sebebi pek çok uygulama alanına sahip ve girişinde kendiliğinden ferromanyetik histerisis meydana gelen manyetik askı sistemleridir. Ferromanyetik histerisis etkisi Coleman-Hodgdon modeli ile modellenmiştir. Modelin analitik çözümünü elde etmek için yeni materyal fonksiyonları tanımlanmıştır. Böylece önerilen kontrol tasarımı manyetik askı sistemlerine uygulanmış ve sistemin istenen değere yakınsadığı gösterilmiştir.

Son olarak, girdisi histerisis etkisine maruz kesirli mertebeden yayılım sistemlerinin kesirli mertebeden kontrol tasarımları incelenmiştir. Kesirli mertebeden türev ve integraller Riemann-Liouville kesirli türev ve integrali ile tanımlanmıştır. Kontrol tasarımında klasik PID kontrolün genelleştirmesi olan kesirli mertebeden  $PI^\lambda D^\mu$  kontrolü kullanılmıştır. Analitik olarak Laplace dönüşümü ile çözülen sistemin nümerik çözümleri Grünwald-Letnikov yöntemiyle gerçekleştirilmiştir. Böylece, bu yaklaşımın tanımlanan tipteki sistemlere uygulanabilirliği gösterilmiştir. SSSL modelinin kullanıldığı histerisis etkisi altında  $PI^\lambda$ ,  $PD^\mu$  ve  $PI^\lambda D^\mu$  kontrolleri araştırılan kesirli yayılım sisteminin bu kontrol tiplerinin her biri için istenilen referans değere yakınsadığı gösterilmiştir. Kontrol parametreleri karesel integral hatası kullanarak ayarlanmıştır. Tasarlanan kesirli mertebeden kontroller klasikleri ile karşılaştırılmış ve kesirli mertebeden kontrollerin daha iyi sonuç verdiği gözlemlenmiştir.

## 8. EKLER

### EK A. Parçalı Tanımlı Fonksiyon Uzayları

$X$  ve  $Y$  boştan farklı iki küme olmak üzere  $f: X \rightarrow Y$  şeklindeki tüm fonksiyonların kümesi  $F(X, Y)$  olarak gösterilsin.

#### EK A.1 Parçalı Monoton Fonksiyon

$f \in F(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  fonksiyonu  $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i = \infty$  özelliğindeki  $\Lambda: 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots$  zaman aralıklarının her bir alt aralığında monoton ise  $f$  fonksiyonu parçalı monoton fonksiyondur denir.  $\Lambda$  ise  $f$  fonksiyonun monotonluk parçalanışı denir.

#### EK A.2 Parçalı Sürekli Fonksiyon

$f \in F(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  fonksiyonu  $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i = \infty$  özelliğindeki  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots$  zaman aralıklarının her bir alt aralığında sürekli ise  $f$  fonksiyonu parçalı sürekli fonksiyondur denir.

#### EK A.3 Parçalı Düzgün Fonksiyon

$f \in F(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  fonksiyonu  $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i = \infty$  özelliğindeki  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots$  zaman aralıklarının her bir alt aralığında her mertebeden türevi var; yani düzgün ise  $f$  fonksiyonu parçalı düzgün fonksiyondur denir.

### EK B. Difeomorfizma

$X$  ve  $Y$  birer manifold olmak üzere  $f: X \rightarrow Y$  fonksiyonunun kendisi ve tersi diferansiyellenebiliyorsa bu fonksiyona bir difeomorfizma denir.

## 9. KAYNAKLAR

- [1] Pokrovskii, A., Sobolev, V., Singular perturbations and hysteresis: “A naive view of time relaxation and hysteresis”, Mortell, M.P., O’ Malley, R.E., Pokrovskii, A., Sobolev, V., SIAM, Philadelphia, (2005).
- [2] Mayergoyz, I.D., Mathematical models of hysteresis, Springer-Verlag, Berlin, (1991).
- [3] Krasnosel’skii, M.A., Pokrovskii, A.V., Systems with hysteresis, Springer-Verlag, Berlin, (1989).
- [4] Macki, J.W., Nistri, P., Zecca, P., “Mathematical models for hysteresis”, *SIAM Review*, **35**, (1993) 94.
- [5] Visintin, A., Differential models of hysteresis, John, F., Marsden J.E., Sirovich, L., Springer, Berlin, (1994).
- [6] Brokate, M., Sprekels, J., Hysteresis and phase transitions, Marsden J. E., Sirovich, L., John, F., Springer, New York, (1996).
- [7] Tao G., Kokotovic P.V., “Adaptive control plants with unknown hysteresis”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **40**, (1995) 200.
- [8] Tao G., Lewis F.L., Eds., Adaptive Control of Nonsmooth Dynamic Systems, Springer-Verlag, New York, (2001).
- [9] Tan X., Baras J.S., “Modeling and control of hysteresis in magnetostrictive actuators”, *Automatica*, **40**, (2000) 1469.
- [10] Sain P.M, Sain M.K., Spencer B.F., Models for hysteresis and applications to structural control, Proceedings of American Control Conference, (1997) 16.
- [11] Logemann H., Mawby A.D., Integral control of distributed parameter systems with input relay hysteresis, UKACC International Conference on Control 98, University of Wales Swansea, United Kingdom, (1998) 1236.
- [12] Su, C.Y., Stepanenko, Y., Svoboda, J., Leung, T.P., “Robust and adaptive control of a class of nonlinear systems with unknown backlash-like hysteresis”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **45**, (2000) 2427.
- [13] Fliegner T., Logemann, H., Ryan, E.P., Low-gain integral control of continuous-time linear systems subject to input nonlinearities, Proc. European Control Conference ECC’01, Porto, Portugal, (2001) 534.
- [14] Haddad W.M., Chellaboina V., Oh J., “Linear controller analysis and design for systems with input hystereses nonlinearities”, *Journal of the Franklin Institute*, **340**, (2003) 371.

- [15] Zhou J., Wen C., Zhang Y., Adaptive backstepping control of a class of uncertain nonlinear systems with unknown backlash-like hysteresis, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **49**, (2004) 1751.
- [16] Logemann, H., Ryan, E.P., “Low-gain integral of well-posed systems subject to input hysteresis:an input-output approach”, MTNS04, Belgium, (2004).
- [17] Belbas S.A., Mayergoyz I.D., “Hadamard-like derivatives in preisach modeling and control”, *Physica B*, **372**, (2006) 87.
- [18] Tao, G., Kokotovic, P.V., Adaptive Control of Systems with Actuator and Sensor Nonlinearities, Wiley, New York, (1996).
- [19] Hatipoğlu, C., “Variable structure control of continuous time systems involving nonsmooth nonlinearities”, Ph.D. dissertation, Ohio State University, Columbus, (1998).
- [20] Wang X.S., Hong H., Su C.Y., Adaptive robust control of dynamical systems with unknown input hysteresis, The Fourth International Conference on Automation, Monreal, Canada, (2003) 138.
- [21] Fu F., Xie, W.F., Wang S.P., Robust adaptive control of a class of nonlinear systems with unknown Prandtl-Ishlinskii-Like hysteresis, Joint 48th Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference, Shangai, P.R. China, (2009).
- [22] Bouc, R., “Solution périodique de l'équation de la ferorrésonance avec hystérésis”, *C. R. Acad. Sci. Paris, Série A* **263**, (1966) 497.
- [23] Logeman, H., Mawby, A.D., “Extending hysteresis operators to spaces of piecewise continuous functions”, *J. Math. Appl.*, **282**, (2003) 107.
- [24] Ekanayake, D.B., Iyer, R.V., “Study of a play-like operator”, *Physica B*, **403**, (2008) 456.
- [25] Colemann, B.D., Hodgdon M.L., “A constitutive relation for rate-independent hysteresis in ferromagnetically soft materials”, *International Journal of Engineering Science*, **24**, (1986) 897.
- [26] Colemann B.D., Hodgdon M.L., “On a class of constitutive relations for ferromagnetic hysteresis”, *Archive for Rational Mechanics Analysis*, **99**, (1987) 375.
- [27] Stepanenko, Y., Su, C.Y., Intelligent control of piezoelectric actuators, Proceeding of the 37th IEEE Conference on Decision & Control, Tampa, Florida, USA, (1998) 4234.
- [28] Hodgdon M.L., “Application of a theory of ferromagnetic hysteresis”, *IEEE Transactions Magnetics*, **MAG-24**, (1988) 218.

- [29] Jiles, D., Introduction to Magnetism and Magnetic Materials, Chapman & Hall, London, (1991).
- [30] Karağaç, Ö., “CoCu alaşım filmlerin elektrodepozisyonu, yapısal ve manyetik özellikleri üzerine depozisyon parametrelerin etkisinin incelenmesi”, Yüksek Lisans Tezi, Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Fizik Anabilim Dalı, Balıkesir, (2007).
- [31] Kuru, H., Alper, M., Köçkar, H., “Structural magnetotransport and magnetic properties of the electrodeposited Ni-Fe films arising from electrolyte PH”, *Journal of Optoelectronics and Advanced Materials-Symposia*, **1**, (2009) 432.
- [32] Chen, C.T., Linear System Theory and Design, Oxford University Press, New York, Oxford, (1999).
- [33] Antsaklis, P.J., Michel A.N., Linear Systems, McGraw-Hill, New-York, (1997).
- [34] Khalil, H. K., Nonlinear Systems, Prentice Hall, New Jersey, (1996).
- [35] Sastry, S., Nonlinear System Analysis, Stability and Control, Springer, USA, (1999).
- [36] Slotine, J.J.E., Li, W., Applied Nonlinear Control, Prentice Hall, New Jersey, (1991).
- [37] Isidori, A., Nonlinear Control Systems, Springer, Great Britain, 1995.
- [38] Aström, K.J., Hagglund, T., PID Controllers: Theory, Design and Tuning, 2nd Edition, ISA Press Research Triangle Park USA, (1995).
- [39] Moradi, M.H., Johnson M.A., PID Control, Springer-Verlag, London, (2005).
- [40] Gutierrez, H.M., Ro, P.I., Magnetic servo levitation by sliding-mode control of nonaffine systems with algebraic input invertibility, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, **52**, (2005) 1449.
- [41] Moulay, E., Perruquetti, W., Stabilization of nonaffine systems: a constructive method for polynomial systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **50**, (2005) 520.
- [42] Boukhobza, T., Karsenti, L., Sliding-mode control for nonlinear systems non affine in the input, European Control Conference, Brussels, Belgium, (1997).
- [43] Özdemir, N., İskender, B.B., Evirgen, F., Histerisis özelliği gösteren fiziksel sistemlerin matematiksel modellenmesi ve kontrol tasarımları, TÜBİTAK 105T446, (2010).
- [44] Özdemir, N., İskender, B.B., Modeling and nonlinear control of magnetic levitation systems with hysteresis, 6th Vienna International Conference on Mathematical Modelling, Vienna, Austria, (2009) 460.

- [45] Özdemir, N., İskender, B.B., Sliding mode control design of nonlinear systems with nonaffine input hysteresis, International Conference on Applied Analysis and Algebra, İstanbul, Turkey, (2011).
- [46] Cho D., Kato Y., Spilmann D., “Sliding mode and classical control of magnetic levitation systems”, *IEEE Control Systems*, **13**, (1993) 42.
- [47] Yang, J., Sun, R., Cui, J., Ding, X., Application of composite fuzzy – PID algorithm to suspension systems of maglev train, The 30th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society, Busan, Korea, (2004), 2502.
- [48] Mizuno, T., Takasaki M., Kishita D., Keiichiro H., “Vibration isolation system combining zero-power magnetic suspension with springs”, *Control Engineering Practice*, **15**, (2007) 187.
- [49] Mittal, S., Menq, C.H., “Hysteresis compensation in electromagnetic actuators through Preisach model inversion”, *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, **5**, (2000) 394.
- [50] Oldham, K.B., Spanier J., The Fractional Calculus, Academic Pres, New York, (1974).
- [51] Miller K.S., Ross B., An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, Wiley, New York, (1993).
- [52] Podlubny I., Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego, (1999).
- [53] Magin R.L., “Fractional calculus in bioengineering”, *Critical Reviews in Biomedical Engineering*, **32**, (2004) 1.
- [54] Agrawal O.P., “Solution for a fractional diffusion-wave equation defined in a bounded domain”, *Nonlinear Dynamics*, **29**, (2002) 145.
- [55] Wyss W., “The fractional diffusion equation”, *Journal of Mathematical Physics*, **27**, (1986) 2782.
- [56] Mainardi F., “The fundamental solutions for the fractional diffusion-wave equation”, *Applied Mathematics Letters*, **9**, (1996) 23.
- [57] Heymans N., Podlubny I., “Physical interpretation of initial conditions for fractional differential equations with Riemann-Liouville fractional derivatives”, *Rheologica Acta*, **45**, (2006) 765.
- [58] Hilfer R., “Fractional diffusion based on Riemann-Liouville fractional derivatives”, *Journal of Physical Chemistry B*, **104**, (2000) 3914.
- [59] Kilbas A.A, Trujillo J.J., Voroshilov A.A., “Cauchy-type problem for diffusion-wave equation with the Riemann-Liouville partial derivative”, *Fractional Calculus and Applied Anaysis*, **8**, (2005) 403.

- [60] Özdemir, N., Agrawal, O.P., Karadeniz, D., İskender, B.B., “Analysis of an axis-symmetric fractional diffusion-wave problem”, *Physics A: Mathematical and Theoretical*, **42**, (2009) 355208.
- [61] Özdemir N., Karadeniz D., “Fractional diffusion-wave problem in cylindrical coordinates”, *Physics Letters A*, **372**, (2008) 5968.
- [62] Povstenko Y.Z., “Time fractional radial diffusion in a sphere”, *Nonlinear Dynamics*, **53**, (2008) 55.
- [63] Oustaloup, A., *La Derivation Non Entiere*, HERMES, Paris, (1995).
- [64] Podlubny I., “Fractional-order systems and fractional order controllers”, Slovak Academy of Science Institute of Experimental Physics, UEF-03-94, Kosice, Slovakia, (1994).
- [65] Podlubny I., Dorcak L., Kostial I., On fractional derivatives, fractional-order dynamic systems and-controllers, Proceeding of the 36th Conference on Decision & Control, San Diego, California, USA, (1997) 4985.
- [66] Zhao C., Xue D., Chen Y.Q., A fractional order PID tuning algorithm for a class of fractional order plants, Proceedings of the IEEE International Conference on Mechatronics & Automation, Niagara Falls, Canada, (2005) 216.
- [67] Lino P., Maione G., “New tuning rules for fractional  $PI^{\lambda}$  controllers”, *Nonlinear Dynamics*, **49**, (2007) 251.
- [68] Barbosa, R.S., Silva, M.F., Machado, J.A.T., “Tuning and application of integer and fractional order PID controllers”, *Intelligent Engineering Systems and Computational Cybernetics*, **4**, (2009) 245.
- [69] Jesus I., Machado J.T., Barbosa R.S., “On the fractional order control of heat systems”, *Intelligent Engineering Systems and Computational Cybernetics*, **4**, (2009) 375.
- [70] Agrawal O.P., “A general formulation and solution scheme for fractional optimal control problems”, *Nonlinear Dynamics*, **38**, (2004) 323.
- [71] Agrawal O.P., Fractional optimal control of a distributed system using eigenfunctions, Proceedings of the ASME 2007 International Design Engineering Technical Conferences, Las Vegas, NV, (2007).
- [72] Özdemir N., Agrawal O.P., İskender B.B., Karadeniz D., “Fractional optimal control of a 2-dimensional distributed system using eigenfunctions”, *Nonlinear Dynamics*, **55**, (2009) 251.
- [73] Özdemir N., Karadeniz D., İskender B.B., “Fractional optimal control problem of a distributed system in cylindrical coordinates”, *Physics Letters A*, **373**, (2009) 221.

- [74] Özdemir, N., Agrawal, O.P., Karadeniz, D., İskender, B.B., “Fractional optimal control problem of an axis-symmetric diffusion-wave propagation”, *Physica Scripta*, **T136** (2009) 014024.
- [75] Barbosa R.S., Machado J.A.T., Galhano A.M., “Performance of fractional PID algorithms controlling nonlinear systems with saturation and backlash phenomena”, *Journal of Vibration and Control*, **13**, (2007) 1407.
- [76] Bagley R.L., Torvik P.J., “On the fractional calculus model of viscoelastic behavior”, *Journal of Rheology*, **30**, (1986) 133.
- [77] Padovan J., Sawicki J.T., “Diophantine type fractional derivative representation of structural hysteresis”, *Computational Mechanics*, **19**, (1997) 335.
- [78] Darwish M.A., El-Bary A.A., “Existence of fractional integral equation with hysteresis”, *Applied Mathematics and Computation*, **176**, (2006) 684.
- [79] Schafer I., Kruger K., “Modeling of coils using fractional derivatives”, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, **307**, (2006) 91.
- [80] Deng W., Lü J., “Generating multi-directional multi-scroll chaotic ettractors via a fractional differential hysteresis system”, *Physics Letters A*, **369**, (2007) 438.
- [81] Özdemir N., İskender B.B., Fractional  $PI^\lambda$  controller for fractional order linear system with input hysteresis, 6th EUROMECH Conference ENOC-2008, Saint Petersburg, Russia, (2008).
- [82] Özdemir N., İskender B.B., “Fractional order control of fractional diffusion systems subject to input hysteresis”, *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, **5**, (2010) 021002.