T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BİR MANİFOLD ÜZERİNDE FARKLI KONEKSİYONLARA GÖRE SEMİ-SİMETRİ ŞARTLARI

DOKTORA TEZİ

Yusuf DOĞRU

Balıkesir, Eylül-2010

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BİR MANİFOLD ÜZERİNDE FARKLI KONEKSİYONLARA GÖRE SEMİ-SİMETRİ ŞARTLARI

DOKTORA TEZİ

Yusuf DOĞRU

Balıkesir, Eylül-2010

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BİR MANİFOLD ÜZERİNDE FARKLI KONEKSİYONLARA GÖRE SEMİ-SİMETRİ ŞARTLARI

DOKTORA TEZİ

Yusuf DOĞRU

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Cihan ÖZGÜR

Sınav Tarihi: 28.09.2010

Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Yusuf YAYLI (AÜ)

Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN (UÜ)

Doç. Dr. Cihan ÖZGÜR (Danışman – BAÜ)

Yrd. Doç. Dr. Necati ÖZDEMİR (BAÜ)

Yrd. Doç. Dr. Bengü BAYRAM (BAÜ)

Enstitü Yönetim Kurulunun ……………. tarih ………. sayılı oturumunun ….. nolu kararı ile ………………………… Mezun olmuştur.

Balıkesir, Eylül-2010

ÖZET

BİR MANİFOLD ÜZERİNDE FARKLI KONEKSİYONLARA GÖRE SEMİ-SİMETRİ ŞARTLARI

Yusuf DOĞRU

Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,
Matematik Anabilim Dalı

(Doktora Tezi / Tez Danışmanı : Doç. Dr. Cihan ÖZGÜR)
Balıkesir, 2010

Bu çalışmada üzerinde semi-simetrik metrik koneksiyon ve bazı semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlar tanımlanmış olan Riemann manifoldlarının sağladığı bazı semi-simetri durumları ile üzerinde bir semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon tanımlanan bir Riemann manifoldunun altmanifoldları incelenmiştir. Ayrıca üzerinde bir semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon tanımlanmış olan bir reel uzay formun altmanifoldları için Chen eşitsizlikleri elde edilmiştir.

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş bölümüdür.

İkinci bölümde, çalışmanın ileriki bölümlerinde kullanılan temel tanım ve kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde semi-simetrik metrik ve bazı özel semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon kavramları tanıtılarak bazı özellikleri verilmiştir.

Dördüncü bölüm orijinal sonuçlar içermektedir. Bu bölümde üzerinde semi-simetrik metrik koneksiyon ve [16] ve [18] anlamında semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlar tanımlı olan Riemann manifoldları için bazı semi-simetri şartlarının sağlanması durumunda karakterizasyonlar elde edilmiştir.

Beşinci bölümde üzerinde [17] anlamında semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon tanımlı bir Riemann manifoldunun altmanifoldları ele alınarak orijinal sonuçlar elde edilmiştir.

Son bölümde ise [17] anlamında semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu reel uzay formunun altmanifoldları için Chen eşitsizlikleri elde edilmiştir. Elde edilen eşitsizlikler orijinaldir.

ANAHTAR KELİMELER : Levi-Civita koneksiyonu, semi-simetrik metrik koneksiyon, semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon, yarı-Einstein manifold, semi-simetrik manifold, Chen eşitsizliği.

ABSTRACT

THE CONDITIONS OF SEMİ-SYMMETRY WITH RESPECT TO THE DIFFERENT CONNECTIONS ON A MANIFOLD

Yusuf DOĞRU

Balıkesir University, Institute of Science, Department of Mathematics

(Ph. D. Thesis / Supervisor : Associate Prof. Dr. Cihan ÖZGÜR)
Balıkesir-Turkey, 2010

In this thesis, we study for Riemannian manifolds with semi-symmetric metric connection and semi-symmetric non-metric connections satisfying some semi-symmetry conditions. We also study submanifolds of a Riemannian manifold with a semi-symmetric non-metric connection. Furthermore, we obtain Chen inequalities for submanifolds of a real space forms.

This thesis consists of six chapters.

The first chapter is introduction.

In the second chapter, we give some notions and definitions which will be used in the next chapters.

In the third chapter, we introduce semi-symmetric metric and some special semi-symmetric non-metric connections and we give some properties of these connections.

The fourth chapter consists of original results. In this chapter, we obtain some characterizations for a Riemannian manifold with semi-symmetric metric connection and semi-symmetric non-metric connections in the sense of [16], [18] satisfying some semi-symmety conditions.

In the fifth chapter, we consider submanifolds of a Riemannian manifold with a semi-symmetric non-metric connection defined in [17]. This chapter contains some original results.

In the final chapter, we consider Chen inequalities for submanifolds of real space forms endowed with a semi-symmetric non-metric connection defined in [17] and we prove some original results.

KEY WORDS : Levi-Civita connection, semi-symmetric metric connection, semi-symmetric non-metric connection, quasi-Einstein manifold, semi-symmetric manifold, Chen inequality.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\tilde{M}(c)$	Reel Uzay Formu
g	Metrik Tensörü
$[,]$	Lie Parantez Operatörü
T_pM	Tanjant Uzay
$\chi(M)$	M manifoldunun Vektör Alanlarının Uzayı
$\tilde{\nabla}$	Levi-Civita Koneksiyonu
∇	Altmanifoldun İndirgenmiş Koneksiyonu
$\overset{*}{\tilde{\nabla}}$	Semi-Simetrik Metrik Olmayan Koneksiyon
$\overset{*}{\nabla}$	Altmanifoldun İndirgenmiş Semi-Simetrik Metrik Olan/Olmayan Koneksiyonu
$\bar{\nabla}$	Van der Waerden Bortolotti Koneksiyonu
$\nabla^{\perp}$	Normal Koneksiyon
h	2. Temel Form
$\overset{*}{h}$	Semi-Simetrik Metrik Olan/Olmayan Koneksiyonun 2. Temel Formu
$\bar{\nabla}h$	3. Temel Form
A_α	Şekil Operatörü
$\overset{*}{A}_\alpha$	Semi-Simetrik Metrik Olan/Olmayan Koneksiyona Göre Şekil Operatörü
$\|h\|$	2. Temel Formun Normu
H	Ortalama Eğrilik
$\overset{*}{H}$	Semi-Simetrik Metrik Olan/Olmayan Koneksiyonun Ortalama Eğrilik Vektörü
$\tilde{R}$	Riemann-Christoffel Eğrilik Tensörü

R	Altmanifoldun Riemann-Christoffel Eğrilik Tensörü
$\overset{*}{\tilde{R}}$	Semi-Simetrik Metrik Olan/Olmayan Koneksiyonun Riemann Eğrilik Tensörü
$\overset{*}{R}$	Altmanifoldun Semi-Simetrik Metrik Olan/Olmayan Koneksiyonun Riemann Eğrilik Tensörü
S	Riemann Koneksiyonun Ricci Tensörü
$\tilde{S}$	Semi-Simetrik Metrik Olan/Olmayan Koneksiyonun Ricci Tensörü
r	Skaler Eğrilik
$\tilde{r}$	Semi-Simetrik Metrik Olan/Olmayan Koneksiyonun Skaler Eğriliği
T	Riemann Koneksiyona Göre Torsiyon Tensörü
$\tilde{T}$	Semi-Simetrik Metrik Olan/Olmayan Koneksiyona Göre Torsiyon Tensörü
$\overset{*}{T}$	Altmanifoldun Semi-Simetrik Metrik Olan/Olmayan Koneksiyona Göre Torsiyon Tensörü
η, ω	1-Form
$\otimes$	Tensör Çarpımı
$\mathcal{T}$	(0, k)- Tensör Alanı
L	(1,1)- Tensör Alanı
$\bar{T}$	Teğet Vektör Alanı
Θ_k	Riemann değişmezi

ÖNSÖZ

Bu çalışmada üzerinde semi-simetrik metrik koneksiyon ve bazı semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlar tanımlanmış olan Riemann manifoldlarının sağladığı bazı semi-simetri durumları ile üzerinde bir semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon tanımlanan bir Riemann manifoldunun altmanifoldları incelenmiştir. Ayrıca üzerinde bir semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon tanımlanmış olan bir reel uzay formun altmanifoldları için Chen eşitsizlikleri elde edilmiştir.

Çalışmalarım sırasında benden destek ve yardımını esirgemeyen, beni her konuda yüreklendiren tez danışmanım sayın hocam Doç. Dr. Cihan ÖZGÜR'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca doktora çalışmalarıma katkıda bulunan sayın hocam Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN'a (Uludağ Üniversitesi) teşekkür eder, doktora çalışmalarım boyunca öneri ve görüşlerinden faydalandığım sayın hocam Doç. Dr. Nihal YILMAZ ÖZGÜR'e teşekkürü bir borç bilirim.

Doktora yaptığım süre içerisinde emeği geçen Fen Edebiyat Fakültesinde görevli personele teşekkür ederim.

Doktora yapmamdaki gerekli ortamı sağlayan ve beni teşvik eden Işıklar Askeri Hava Lisesindeki sıralı amirlerime ve mesai arkadaşlarıma göstermiş oldukları anlayış için teşekkür ederim.

Ayrıca doktora çalışmalarım boyunca benden maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen, teşviklerini ve yardımlarını daima sürdüren çok değerli eşim Nermin'e, kızlarım Edagül ve Ecenur'a sonsuz teşekkür eder, sevgilerimi sunarım.

Balıkesir, 2010 **Yusuf DOĞRU**

1. GİRİŞ

Bir Riemann manifoldu üzerinde semi-simetrik afin koneksiyon ilk kez A. Friedman ve J. A. Schouten tarafından tanımlanmıştır [4]. Semi-simetrik metrik koneksiyon tanımı ise H. A. Hayden tarafından verilmiştir [28]. Bunun devamında K. Yano semi-simetrik metrik koneksiyon ile ilgili çalışmaları başlatmış olup semi-simetrik metrik koneksiyona göre eğrilik tensörü R=0 şartını sağlayan bir Riemann manifoldunun konformal flat olduğunu göstermiştir [14]. Daha sonra T. Imai manifoldun Ricci tensörü ile ilgili özellikleri araştırmıştır [38]. Ayrıca [29] nolu çalışmada T. Imai semi-simetrik metrik koneksiyona sahip bir Riemann manifoldunun hiperyüzeyinin özelliklerini incelemiş ve Gauss ile Codazzi-Mainardi denklemlerini elde etmiştir. Bunlardan başka A. Yücesan [30], U. C. De ve G. Pathak [31] tarafından da semi-simetrik metrik koneksiyon üzerine çalışmalar yapılmıştır.

Bir Riemann manifoldu üzerinde semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon tanımı Agashe and Chafle tarafından verilmiştir [16, 23]. Sonraki çalışmalarda De, Kamilya, Sengupta ve Binh tarafından üzerinde semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon tanımlı Riemann manifoldlarının farklı özellikleri elde edilmiştir [17,18,32].

Bu tez çalışması, semi-simetrik metrik ve özel tanımlı bazı semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu Riemann manifoldları ve bunların bazı altmanifoldlarının geometrisini inceleyerek, bu manifoldların belirli eğrilik şartları altında hangi tip özelliklere sahip olacağını araştırmayı hedeflemektedir.

2008 yılında C. Murathan, ve C. Özgür [15] tarafından semi-simetrik metrik koneksiyona sahip bir Riemann manifoldu için bazı semi-simetri şartlarının sağlanması durumunda bazı karakterizasyonlar incelenmiştir. Dördüncü bölümde benzer karakterizasyonlar semi-simetrik metrik ve bazı semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlar için elde edilmiştir.

1974 yılında Z. Nakao [33] semi-simetrik metrik koneksiyonlu bir Riemann manifoldunun bir alt manifoldunu ele alarak Gauss, Codazzi ve Ricci denklemlerini elde etmiştir. Sonraki dönemlerde R. Nivas [34], N. S. Ageshe ve M.R. Chafle [23],

C. Özgür [13] farklı koneksiyonlara göre bir Riemann manifoldun altmanifoldlarının özelliklerini çalışmışlardır.

Yukarıdaki çalışmaların doğrultusunda beşinci bölümde üzerinde [17] anlamında semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon tanımlı olan bir Riemann manifoldunun alt manifoldları ele alınarak, semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonun indirgenmiş koneksiyonunun da bir semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon olduğu gösterilmiştir. Ayrıca semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu bir Riemann manifoldunun bir altmanifoldunun total geodezik, total umbilik ve minimal olma durumları incelenmiş; Gauss, Codazzi ve Ricci eşitlikleri bulunmuştur. Bunlardan başka Levi-Civita koneksiyon ve semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon arasındaki kesitsel eğrilik ilişkileri verilmiştir.

Altmanifold teorisinde bir alt manifoldun esas ve ikincil değişmezleri arasındaki ilişkileri bulmak temel problemlerden birisidir. B. Y. Chen [26, 35, 25] daha sonraları *Chen eşitsizlikleri* ile isimlendirilen eşitsizlikleri kurmuştur. Son zamanlarda [36, 37] nolu çalışmalarda, semi-simetrik metrik koneksiyonlu reel uzay formunun altmanifoldları ve semi-simetrik metrik koneksiyonlu Sasakian uzay formunun ve kompleks uzay formun altmanifoldları için Chen eşitsizlikleri çalışılmaktadırlar. [39] nolu çalışmada üzerinde [23] anlamında semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon tanımlanmış olan bir reel uzay formun altmanifoldları için Chen eşitsizlikleri elde edilmiştir. Bu çalışmaların doğrultusunda altıncı bölümde [17] anlamında semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu reel uzay formunun altmanifoldları için Chen eşitsizlikleri bulunmuştur. Elde edilen eşitsizlikler orijinal sonuçlardır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanımlar ve kavramlar verilecektir.

2.1 Riemann Manifoldları

Tanım 2.1.1. M bir diferensiyellenebilir (C^∞) manifold olsun. M üzerindeki C^∞ vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve M den $\mathbb{R}$ ye C^∞ fonksiyonların uzayı $C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere, M üzerinde;

$$g: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

şeklinde tanımlanan pozitif, simetrik ve 2-lineer g Riemann metriği ile birlikte M ye bir *Riemann manifoldu* adı verilir ve (M, g) şeklinde gösterilir [1].

Tanım 2.1.2. M n-boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold ve M üzerindeki C^∞ vektör alanlarının uzayı χ (M) olmak üzere;

$$\nabla: \chi(M) \times \chi(M) \xrightarrow{\text{2-lineer}} \chi(M)$$

$$(X, Y) \longrightarrow \nabla(X,Y) = \nabla_X Y$$

dönüşümü ;

i) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$; $\quad \forall$ X, Y, Z $\in \chi(M)$,

ii) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$; $\quad \forall$ X, Y, Z $\in \chi(M)$ ve $\forall$ f, g $\in C^\infty(M, \mathbb{R})$,

iii) $\nabla_X(fY) = f\nabla x Y + X(f)Y$; $\quad \forall$ X, Y $\in \chi(M)$ ve $\forall$ f $\in C^\infty(M, \mathbb{R})$

özelliklerini sağlıyor ise ∇ ya M üzerinde bir *Afin Koneksiyon* adı verilir [2].

Tanım 2.1.3. (M, g) n-boyutlu bir Riemann manifoldu ve ∇ da M üzerinde tanımlanan bir afin koneksiyon olmak üzere;

(i) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$; $\forall X, Y \in \chi(M)$,

(ii) $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$; $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$

şartlarını sağladığında ∇ ya M üzerinde *sıfır torsiyonlu Riemann Koneksiyon* veya M nin *Levi-Civita Koneksiyonu* adı verilir [2].

Tanım 2.1.4. (M, g) bir Riemann manifoldu, ∇ da M üzerindeki Levi-Civita koneksiyonu olsun.

$$R: \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \tag{2. 1}$$

ile tanımlanan R fonksiyonu M üzerinde bir (l, 3)-tensör alanıdır ve M nin *Riemann eğrilik tensörü* olarak adlandırılır. Ayrıca $R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W)$ tensörüne M nin *Riemann-Christoffel eğrilik tensörü* adı verilir.

Her $X, Y, Z, V, W \in \chi(M)$ için Riemann eğrilik tensörü R;

$$\left.\begin{array}{ll} \text{i)} & R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z, \\ \text{ii)} & g(R(X, Y)V, W) = -\, g(R(X, Y)W, V), \\ \text{iii)} & R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = O \\ \text{iv)} & g(R(X, Y)V, W) = g(R(V, W)X, Y) \\ \text{v)} & g(X, R(Y, Z)W) = R(Y, Z, W, X) \end{array}\right\} \tag{2. 2}$$

özelliklerine sahiptir [1].

Tanım 2.1.5. M n-boyutlu, diferensiyellenebilir bir manifold ve M üzerinde (r, s)-tipinde simetrik bir tensör A olsun. Bu durumda, $1 \le a < b \le s$ reel sayıları ve keyfi bir r değeri için;

$$C_{ab} : \chi_s^r(M) \rightarrow \chi_{s-2}^r(M)$$

$$(C_{ab}A)_{j_1 \dots j_{s-2}}^{i_1 \dots i_r} = \sum_{p,q} g^{pq} A_{j_1 \dots \underset{a.\text{bileşen}}{p} \dots \underset{b.\text{bileşen}}{q} \dots j_{s-2}}^{i_1 \dots i_r}$$

biçiminde tanımlanan C_{ab} operatörüne a**.** ve b**.** bileşenlere göre A tensörünün *metrik kontraksiyonu* adı verilir. Böylece kontraksiyon operatörü, (r, s)-tipindeki bir tensörü (r-1, s-1)-tipinde bir tensöre dönüştürür [8].

Tanım 2.1.6. (M, g) bir Riemann manifoldu olsun. T_PM tanjant uzayının iki boyutlu bir alt uzayı Π olmak üzere V, W∈ Π tanjant vektörleri için Q alan fonksiyonu;

$$Q(V, W) = g(V, V)g(W, W) - g(V, W)^2$$

biçiminde tanımlansın. Q(V, W) ≠ 0 olmak üzere;

$$K(V,W) = \frac{g(R(V,W)W,V)}{Q(V,W)}$$

ya Π nin *kesitsel eğriliği* denir ve K(Π) ile gösterilir [1].

Tanım 2.1.7. (M, g) n-boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, lokal vektör alanları olsunlar.

$$S:\ \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(X,Y) \rightarrow S(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} g(R(e_i, X)Y, e_i) \qquad (2.\ 3)$$

şeklinde tanımlı (0, 2)-tipindeki S tensör alanına, M üzerinde *Ricci eğrilik tensörü* adı verilir [5]. Ayrıca $\overline{S}$ Ricci operatörü ve S^2 (0, 2)-tensörü sırası ile

$$g(\overline{S}X, Y) = S(X, Y) \qquad (2.\ 4)$$

$$S^2(X, Y) = S(\overline{S}X, Y) \qquad (2.\ 5)$$

biçiminde tanımlanır [6].

Tanım 2.1.8. (M, g) n>2 boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Her $X,Y \in \chi(M)$ için;

$$S(X, Y) = \lambda g(X, Y) \qquad (2.\ 6)$$

olacak biçimde M üzerinde bir $\lambda \in \mathbb{R}$ sayısı var ise yani M nin S Ricci tensörü, g metrik tensörünün bir katı ise M ye bir *Einstein manifoldu* adı verilir [1].

M üzerinde bir vektör alanı U olmak üzere, bir η 1-formunu

$$\eta(X) = g(X, U)$$

biçiminde tanımlayalım. Eğer M nin Ricci tensörü, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için;

$$S(X, Y) = ag(X, Y) + b\eta(X)\eta(Y), \qquad a, b \in C^{\infty}(M, \mathbb{R}) \qquad (2.\ 7)$$

koşulunu sağlıyorsa M ye bir *yarı-Einstein manifold* adı verilir [7]. Eğer $b = 0$ ise M manifoldu bir Einstein manifold olur.

Tanım 2.1.9. (M, g) n-boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ lokal ortonormal vektör alanları olmak üzere;

$$r = \sum_{i=1}^{n} S(e_i, e_i) \qquad (2.8)$$

fonksiyonuna M nin *skaler eğrilik fonksiyonu* adı verilir [1].

Tanım 2.1.10. (M, g) n-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Eğer, M nin kesitsel eğrilik fonksiyonu sabit ise M ye *sabit eğrilikli uzay* denir ve M(c) ile gösterilir [8].

Sonuç 2.1.11. (M, g) n-boyutlu c = sabit eğrilikli bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda M nin eğrilik tensörü R, $\forall\, X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için;

$$R(X, Y, Z, W) = c\{g(Y, Z)g(X, W) - g(X, Z)g(Y, W)\}$$

biçimindedir [8].

Tanım 2.1.12. Sabit eğrilikli, tam, bağlantılı manifoldlara *reel uzay form* adı verilir ve n-boyutlu bir M uzay formu M(c) ile gösterilir.

Eğer;

$c = 0$ ise $M(c) \cong E^n$ Öklid uzayı,

$c = \dfrac{1}{r^2}$ ise $M(c) \cong S^n(r)$ küresi,

$c = -\dfrac{1}{r^2}$ ise $M(c) \cong H^n(r)$ Hiperbolik uzay

dır [8].

Tanım 2.1.13. M n-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Her $X, Y, Z \in \chi(M)$ için M nin Weyl konformal eğrilik tensörü;

$$C(X, Y)Z = R(X, Y)Z - \frac{1}{n-2}[S(Y, Z)X - S(X, Z)Y + g(Y, Z)\tilde{S}X$$

$$-g(X, Z)\tilde{S}Y] + \frac{r}{(n-1)(n-2)}[g(Y, Z)X - g(X, Z)Y] \qquad (2.\ 9)$$

şeklinde tanımlanır [5].

Tanım 2.1.14. M $n \geq 2$ boyutlu C^∞ sınıfından bağlantılı bir Riemann manifoldu olsun. M üzerinde tanımlı (0, 2)-tipinde bir simetrik tensör alanı A olmak üzere $\wedge_A$ endoformizmi

$$\wedge_A : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$(X\wedge_A Y)Z = A(Y, Z)X - A(X, Z)Y$$

biçiminde tanımlanır. Eğer A = g alınırsa son denklem

$$(X\wedge_g Y)Z = g(Y, Z)X - g(X, Z)Y \qquad (2.\ 10)$$

biçimine indirgenir. Bundan sonra $(X\wedge_g Y)$ yerine kısaca $X\wedge Y$ kullanılacaktır [9].

M üzerinde (0, k)-tipinde ($k \geq 1$) bir $\mathcal{T}$ tensör alanı ve (0, 2)-tipinde bir simetrik A tensör alanı verildiğinde $R \cdot \mathcal{T}$ ve $Q(A, \mathcal{T})$ tensörleri sırası ile:

$$(R \cdot \mathcal{T})(X_1, X_2,..., X_k; X, Y) = -\mathcal{T}(R(X, Y)X_1, X_2,..., X_k)-...$$
$$-\mathcal{T}(X_1, X_2,...,R(X, Y)X_k) \qquad (2.\ 11)$$

ve

$$Q(A, \mathcal{T})(X_1, X_2,..., X_k; X, Y) = -\mathcal{T}((X\wedge_A Y)X_1, X_2,..., X_k)-...$$
$$-\mathcal{T}(X_1, X_2,...,(X\wedge_A Y)X_k) \qquad (2.\ 12)$$

biçiminde tanımlanır [6].

Böylece (2. 11), (2. 12) denklemlerinde $\mathcal{T}$ yerine R ve A yerine g alındığında

$$(R \cdot R)(X_1, X_2, X_3, X_4; X, Y) = -R(R(X, Y)X_1, X_2, X_3, X_4)-...$$
$$-R(X_1, X_2, X_3, R(X, Y)X_4) \qquad (2.\ 13)$$

$$Q(g, R)(X_1, X_2, X_3, X_4 ; X, Y) = -R((X\wedge_g Y)X_1, X_2, X_3, X_4)-...$$
$$-R(X_1, X_2, X_3, (X\wedge_g Y)X_4) \qquad (2.\ 14)$$

$\mathcal{T}$ yerine C alındığında

$$(R \cdot C)(X_1, X_2, X_3, X_4; X, Y) = -C(R(X, Y)X_1, X_2, X_3, X_4)-...$$
$$-C(X_1, X_2, X_3,R(X, Y)X_4) \qquad (2.\ 15)$$

$\mathcal{T}$ yerine S ve A yerine g alındığında

$$(R \cdot S)(X_1, X_2, X_3, X_4; X, Y) = -S(R(X, Y)X_1, X_2, X_3, X_4)-...$$
$$-S(X_1, X_2, X_3, R(X, Y)X_4) \qquad (2.\ 16)$$
$$Q(g, S)(X_1, X_2, X_3, X_4; X, Y) = -S((X\wedge_g Y)X_1, X_2, X_3, X_4)-...$$
$$-S(X_1, X_2, X_3,(X\wedge_g Y)X_4) \qquad (2.\ 17)$$

ve ayrıca A yerine S, $\mathcal{T}$ yerine R alındığında (2. 12) denkleminden

$$Q(S, R)(X_1, X_2, X_3, X_4; X, Y) = -R((X\wedge_S Y)X_1, X_2, X_3, X_4)-...$$
$$-R(X_1, X_2, X_3,(X\wedge_S Y)X_4) \qquad (2.\ 18)$$

olarak elde edilir.

Eğer

$$R \cdot R = 0 \qquad (2.\ 19)$$

ise M ye *semi-simetriktir* denir [10].

Eğer

$$R \cdot S = 0 \qquad (2.\ 20)$$

ise M ye *Ricci-semisimetriktir* denir [6].

Eğer

$$R \cdot C = 0 \qquad (2.\ 21)$$

ise M ye *Weyl-semisimetriktir* denir [6].

$R \cdot R = 0 \Rightarrow R \cdot S = 0$ ve $R \cdot R = 0 \Rightarrow R \cdot C = 0$ gerektirmeleri sağlanır. Fakat tersleri her zaman doğru değildir [6].

Tanım 2.1.15. (M, g) n-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. M nin R eğrilik tensörü $\forall$ X, Y, Z, W$\in \chi$(M) için;

$$(\nabla_X R)(Y, Z)W = 0 \qquad (2.\ 22)$$

koşulunu sağlıyorsa M ye *lokal simetriktir* denir [8]. Eğer $\nabla R = 0$ ise M için $R \cdot R = 0$ şartı sağlanır. Fakat tersi her zaman doğru değildir [6].

2.2 Altmanifoldlar

Tanım 2.2.1. M n-boyutlu bir manifold ve $\widetilde{M}$ (n+d)-boyutlu manifold olsun. $\forall p \in M$ noktası için $\widetilde{M}$ üzerinde bir $\tilde{U}$, M üzerinde bir U komşuluğu mevcut ve

$$U = \{m \in \tilde{U} : \tilde{x}_{n+1}(m) = \ldots = \tilde{x}_{n+d}(m) = 0\}$$

ise M ye $\widetilde{M}$ nın bir *altmanifoldu* adı verilir. Burada $\{\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{n+d}\}$ koordinat sistemi $\tilde{U}$ da, $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de U üzerinde koordinat sistemleridir [8].

Tanım 2.2.2. M ve $\widetilde{M}$ sırası ile n ve (n+d)-boyutlu Riemann manifoldları olmak üzere M, $\widetilde{M}$ nın altmanifoldu ve ∇ ve $\tilde{\nabla}$ sırası ile M ve $\widetilde{M}$ da indirgenmiş Riemann koneksiyonu ve Riemann koneksiyonu olsun. Böylece X ve Y, M üzerinde vektör alanları olmak üzere;

$$h : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi^{\perp}(M)$$

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y) \qquad (2.\ 23)$$

biçiminde *Gauss eşitliği* elde edilir. Burada $\nabla_X Y$ ve h(X, Y), $\tilde{\nabla}_X Y$ nin sırasıyla tanjant ve normal bileşenleridir. (2. 23) ile tanımlanan h ya M nin *ikinci temel formu* adı verilir. Eğer $h = 0$ ise M ye *total geodeziktir* denir [12]. γ $\widetilde{M}$ nın M altmanifoldu üzerinde yatan bir eğrisi ve $\overline{T}$ de γ nın teğet vektör alanı olsun. Eğer $\tilde{\nabla}_{\overline{T}} \overline{\mathbf{T}} = 0$ ise γ ya $\widetilde{M}$ nın bir geodeziği, $\nabla_{\overline{T}} \overline{\mathbf{T}} = 0$ ise γ ya M nin bir geodeziği denir [12].

Tanım 2.2.3. M ve $\widetilde{M}$ sırası ile n ve (n+d)-boyutlu Riemann manifoldları olmak üzere M, $\widetilde{M}$ nın altmanifoldu olsun. M ye normal bir birim vektör alanı N olsun. $\tilde{\nabla}_X N$ nin teğet ve normal bileşenleri sırasıyla $-A_N X$ ve $\nabla_X^{\perp} N$ olmak üzere;

$$A : \chi(M) \times \chi^{\perp}(M) \to \chi(M)$$

dönüşümü iyi tanımlıdır. Böylece

$$\tilde{\nabla}_X N = -A_N X + \nabla_X^{\perp} N \qquad (2.\ 24)$$

biçiminde *Weingarten eşitliği* elde edilir. Burada A_N ye şekil operatörü, $\nabla^{\perp}$ e de M nin $T^{\perp}M$ *normal demetindeki (normal) koneksiyon* adı verilir [12].

M nin şekil operatörü A_N ile ikinci temel form h arasında;

$$g(A_N X, Y) = g(h(X, Y), N) \tag{2. 25}$$

bağıntısı vardır. Burada g, $T_p M$ de skaler çarpımdır [12].

Tanım 2.2.4. $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ Riemann manifoldunun n-boyutlu bir altmanifoldu (M, g) olsun. M altmanifoldunun ikinci temel formu h nın kovaryant türevi $\overline{\nabla} h$,

$$(\overline{\nabla}_X h)(Y, Z) = \nabla_X^{\perp} h(Y, Z) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z) \tag{2. 26}$$

biçiminde tanımlanır. h nın kovaryant türevi $\overline{\nabla} h$ ya M nin *üçüncü temel formu* adı verilir [12].

Eğer

$$\overline{\nabla} h = 0 \tag{2. 27}$$

ise M ye *paralel ikinci temel formlu* veya 1-*paraleldir* denir. Buradaki $\overline{\nabla}$ M nin $T^{\perp}M$ normal demetinde tanımlanan normal konneksiyon olup buna *van der Waerden Bortolotti koneksiyonu* denir [12].

Tanım 2.2.5. $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ Riemann manifoldunun n-boyutlu bir altmanifoldu (M, g) olsun. $\widetilde{M}$ nın eğrilik tensörü $\widetilde{R}$, $\forall$ X, Y, Z, W$\in \chi(M)$ için;

$$\tilde{R}(X, Y)Z = \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Z - \tilde{\nabla}_{[X,Y]} Z$$

$$\tilde{R}(X, Y, Z, W) = \tilde{g}(\tilde{R}(X, Y)Z, W)$$

biçiminde tanımlanır. M nin eğrilik tensörü R ve $\widetilde{M}$ nın eğrilik tensörü $\widetilde{R}$ olmak üzere, (2. 23) ve (2. 24) denklemleri yardımıyla

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(X, Y, Z, W) = {} & R(X, Y, Z, W) - \widetilde{g}(h(Y, Z), h(X, W)) \\ & + \widetilde{g}(h(X, Z), h(Y, W))\end{aligned} \tag{2. 28}$$

elde edilir. Burada (2. 28) ile tanımlanan denkleme *Gauss denklemi* adı verilir [12]. Gauss denkleminin teğet ve normal bileşenleri sırasıyla

$$(\tilde{R}(X, Y)Z)^T = R(X, Y)Z + A_{h(X,Z)}Y - A_{h(Y,Z)}X \tag{2. 29}$$

ve

$$(\tilde{R}(X, Y)Z)^{\perp} = (\overline{\nabla}_X h)(Y, Z) - (\overline{\nabla}_Y h)(X, Z) \tag{2. 30}$$

biçiminde olup (2. 30) denklemine *Codazzi denklemi* adı verilir [12]. Burada $\overline{\nabla}$, M üzerinde van der Waerden Bortolotti koneksiyonudur.

Ayrıca $\eta, \xi \in \chi^{\perp}(M)$ olmak üzere

$$\tilde{R}(X,Y,\xi,\upsilon) = R^{\perp}(X,Y,\xi,\upsilon) - g([A_{\xi}, A_{\upsilon}]X, Y) \tag{2. 31}$$

biçiminde tanımlanan eşitliğe *Ricci denklemi* adı verilir [12]. Burada

$$[A_{\xi}, A_{\upsilon}] = A_{\xi}A_{\upsilon} - A_{\upsilon}A_{\xi} \tag{2. 32}$$

ve $R^{\perp}$ ise $\nabla^{\perp}$ normal koneksiyonuna göre Riemann eğrilik tensörüdür yani

$$R^{\perp}(X,Y)\xi = \nabla^{\perp}_X\nabla^{\perp}_Y\xi - \nabla^{\perp}_Y\nabla^{\perp}_X\xi - \nabla^{\perp}_{[X,Y]}\xi$$

ile tanımlanır ve

$$R^{\perp}(X,Y,\xi,\upsilon) = g(R^{\perp}(X,Y)\xi,\upsilon))$$

dır. Eğer $R^{\perp}=0$ ise M nin normal koneksiyonuna flattir denir [12].

Tanım 2.2.6. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ Riemann manifoldunun n-boyutlu bir altmanifoldu (M, g) olsun. $\chi(M)$ nin lokal ortonormal $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ bazını alalım. M nin ortalama eğrilik vektör alanı

$$H: \chi(M) \rightarrow C^{\infty}(M, \mathbb{R})$$

$$H = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(X_i, X_i) \tag{2. 33}$$

ile tanımlanır. Bir $p \in M$ için

$$H(p) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(X_{i|p}, X_{i|p})$$

ye $p \in M$ noktasında M nin *ortalama eğrilik vektörü* adı verilir [12].

Eğer M üzerinde

$$H = 0$$

eşitliği sağlanıyorsa M ye *minimaldir* denir [12].

Tanım 2.2.7. $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ nın n-boyutlu bir altmanifoldu (M, g) olsun. M nin ikinci temel formu h ve ortalama eğrilik vektör alanı H olmak üzere $\forall$ X, Y, $\in \chi(M)$ için;

$$h(X,Y) = g(X,Y)H \tag{2. 34}$$

ise M ye *total umbilik altmanifold* adı verilir [12].

Önerme 2.2.8. $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ sabit eğrilikli uzay formunun n-boyutlu bir altmanifoldu (M, g) olsun. Bu taktirde M nin normal koneksiyonunun flat olması için gerek ve yeter şart tüm A_r ikinci temel tensörlerinin aynı anda köşegenleştirilebilir olmasıdır [12].

Tanım 2.2.9. M ve $\widetilde{M}$ sırası ile n ve (n+d)-boyutlu Riemann manifoldları olmak üzere M, $\widetilde{M}$ nın altmanifoldu olsun. M üzerindeki bir $p \in M$ için T_pM nin lokal ortonormal $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ bazını alalım. M nin ikinci temel formu h nın normu

$$\|h\|^2 = \sum_{i,j} g(h(e_i, e_j), h(e_i, e_j)) \tag{2. 35}$$

ile tanımlanır. Ayrıca

$$A_{h(e_i, e_j)} e_k = \sum_{\alpha} g(A_\alpha e_i, e_j) A_\alpha e_k \tag{2. 36}$$

eşitliği sağlanır [12].

3. ÖZEL TANIMLANMIŞ KONEKSİYONLAR

Bu bölümde bir Riemann manifoldu üzerinde özel tanımlanmış semi-simetrik metrik ve bazı semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlar tanıtılacaktır.

3.1 Semi-Simetrik Metrik Koneksiyon

Tanım 3.1.1. M, n-boyutlu bir diferansiyellenebilir (C^{∞}) manifold ve $\overset{*}{\tilde{\nabla}}$ M üzerinde bir afin koneksiyon olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ olmak üzere; $\overset{*}{\tilde{\nabla}}$ nın $\tilde{T}$ torsiyon tensörü

$$\tilde{T}(X,Y) = \overset{*}{\tilde{\nabla}}_X Y - \overset{*}{\tilde{\nabla}}_Y X - [X,Y] \tag{3. 1}$$

ile tanımlanır [14]. Eğer $\tilde{T} = 0$ ise $\overset{*}{\tilde{\nabla}}$ ya *simetrik koneksiyon*, $\tilde{T} \neq 0$ ise *simetrik olmayan koneksiyon* adı verilir.

(M, g) bir Riemann manifoldu olmak üzere M üzerinde bir g Riemann metriği;

$$\overset{*}{\tilde{\nabla}} g = 0 \tag{3. 2}$$

şartını sağlıyor ise $\overset{*}{\tilde{\nabla}}$ afin koneksiyonu *metrik koneksiyon,*

$$\overset{*}{\tilde{\nabla}} g \neq 0 \tag{3. 3}$$

şartını sağlıyor ise *metrik olmayan koneksiyon,* olarak adlandırılır [16].

η bir 1-form ve $U \in \chi(M)$ olmak üzere η 1-formu

$$\eta(X)=g(X, U) \tag{3. 4}$$

ile tanımlansın. Eğer $\tilde{T}$ torsiyon tensörü

$$\tilde{T}(X,Y) = \eta(Y)X - \eta(X)Y \tag{3. 5}$$

şeklinde tanımlanırsa $\overset{*}{\tilde{\nabla}}$ bir *semi-simetrik koneksiyon* denir [4, 14, 28]. Eğer $\tilde{T}$, (3.5) şartını sağlar ve $\overset{*}{\tilde{\nabla}} g = 0$ ise $\overset{*}{\tilde{\nabla}}$ ya M üzerinde *semi-simetrik metrik koneksiyon*, eğer $\tilde{T}$, (3. 5) şartını sağlar ve $\overset{*}{\tilde{\nabla}} g \neq 0$ ise $\overset{*}{\tilde{\nabla}}$ ya M üzerinde *semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon* denir [16].

Teorem 3.1.2. (M, g) bir Riemann manifoldu ve $\tilde{\nabla}$, M üzerinde üzerinde Levi-Civita koneksiyonu olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ ve $U \in \chi(M)$ için;

$$\overset{*}{\tilde{\nabla}}_X Y = \tilde{\nabla}_X Y + \eta(Y)X - g(X, Y)U \tag{3. 6}$$

ile tanımlanan $\overset{*}{\tilde{\nabla}}$ afin koneksiyonu bir semi-simetrik metrik koneksiyondur [14].

Teorem 3.1.3. (M, g) bir Riemann manifoldu olmak üzere $\overset{*}{\tilde{\nabla}}$ ve $\tilde{\nabla}$ sırası ile M üzerinde semi-simetrik metrik koneksiyon ve Levi-Civita koneksiyonu olsun. $\overset{*}{\tilde{\nabla}}$ ve $\tilde{\nabla}$ nın Riemann eğrilik tensörleri sırasıyla $\overset{*}{\tilde{R}}$ ve $\tilde{R}$, Ricci tensörleri ise sırası ile $\overset{*}{\tilde{S}}$ ve $\tilde{S}$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}\overset{*}{\tilde{R}}(X, Y)Z = \tilde{R}(X, Y)Z - \alpha(Y, Z)X + \alpha(X, Z)Y \\ - g(Y, Z)LX + g(X, Z)LY\end{aligned} \tag{3. 7}$$

ve

$$\overset{*}{\tilde{S}}(X, Y) = \tilde{S}(X, Y) - (n-2)\alpha(X, Y) + a\alpha(X, Y) \tag{3. 8}$$

dır. Burada L bir (1, 1)- tensör alanı, a=tr(L) ve α

$$\alpha(X, Y) = g(LX, Y) = \left(\tilde{\nabla}_X \eta\right)Y - \eta(X)\eta(Y) + \frac{1}{2}\eta(U)g(X, Y) \tag{3. 9}$$

biçiminde tanımlanan bir (0, 2)- tensör alanıdır [14].

Yardımcı Teorem 3.1.4. (M, g) üzerinde semi-simerik metrik koneksiyon tanımlanan bir Riemann manifoldu ve U Levi-Civita koneksiyona göre paralel birim vektör alanı olsun. Bu taktirde

$$\alpha(X,Y) = -\eta(X)\eta(Y) + \frac{1}{2}g(X,Y) \tag{3.10}$$

$$\overset{*}{\tilde{\nabla}}_X U = X - \eta(X)U \tag{3.11}$$

$$\tilde{R}(X,Y)U=0 \tag{3.12}$$

$$\overset{*}{\tilde{R}}(X,Y)U=0 \tag{3.13}$$

ve

$$\overset{*}{\tilde{S}} = \tilde{S} - (n-2)(g - \eta \otimes \eta) \tag{3.14}$$

dir [15].

3.2 [16] Anlamında Semi-Simetrik Metrik Olmayan Koneksiyon

Tanım 3.2.1. (M, g) bir Riemann manifoldu ve $\tilde{\nabla}$, M üzerinde Levi-Civita koneksiyonu, $\overset{*}{\tilde{\nabla}}$ da M üzerinde bir afin koneksiyon olmak üzere $\forall X,Y \in \chi(M)$ için $\overset{*}{\tilde{\nabla}}$ koneksiyonunu

$$\overset{*}{\tilde{\nabla}}_X Y = \tilde{\nabla}_X Y + \eta(Y)X \tag{3. 15}$$

ile tanımlayalım. Burada η bir 1-formu (3. 4) de tanımlandığı şekildedir [16]. Bu taktirde

i) $$\tilde{T}(X,Y) = \overset{*}{\tilde{\nabla}}_X Y - \overset{*}{\tilde{\nabla}}_Y X - [X,Y] = \eta(Y)X - \eta(X)Y, \tag{3. 16}$$

ii) $$\left(\overset{*}{\tilde{\nabla}}_X g\right)(Y,Z) = \tilde{\nabla}_X g(Y,Z) - g(\overset{*}{\tilde{\nabla}}_X Y, Z) - g(Y, \overset{*}{\tilde{\nabla}}_X Z)$$

$$= -\eta(Y)g(X,Z) - \eta(Z)g(X,Y) \tag{3. 17}$$

bulunur. Böylece Tanım 3.1.1. gereği $\overset{*}{\tilde{\nabla}}$ bir semi-simetrik metrik olmayan koneksiyondur [16].

Teorem 3.2.2. (M, g) bir Riemann manifoldu, $\tilde{\nabla}$ M üzerinde Levi-Civita koneksiyonu ve $\overset{*}{\tilde{\nabla}}$ da M üzerinde (3. 15) denklemi ile tanımlanan semi-simetrik

metrik olmayan koneksiyon olsun. $\overset{*}{\tilde{\nabla}}$ ve $\tilde{\nabla}$ nın Riemann eğrilik tensörleri sırasıyla $\overset{*}{\tilde{R}}$ ve $\tilde{R}$, Ricci tensörleri ise sırası ile $\overset{*}{\tilde{S}}$ ve $\tilde{S}$ olmak üzere;

$$\overset{*}{\tilde{R}}(X,Y)Z = \tilde{R}(X,Y)Z - \alpha(Y,Z)X + \alpha(X,Z)Y \tag{3. 18}$$

ve

$$\overset{*}{\tilde{S}}(Y,Z) = \tilde{S}(Y,Z) - (n-1)\alpha(Y,Z) \tag{3. 19}$$

dır. Burada α

$$\alpha(X,Y) = \left(\tilde{\nabla}_X \eta\right) Y - \eta(X)\eta(Y) \tag{3. 20}$$

biçiminde tanımlanan bir (0, 2)- tensör alanıdır [16].

3.3 [17] Anlamında Semi-Simetrik Metrik Olmayan Koneksiyon

Tanım 3.3.1. (M, g) bir Riemann manifoldu ve $\tilde{\nabla}$, M üzerinde üzerinde Levi-Civita koneksiyonu olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ olmak üzere M üzerinde;

$$\overset{*}{\tilde{\nabla}}_X Y = \tilde{\nabla}_X Y + \omega(Y)X - g(X,Y)U - \eta(X)Y - \eta(Y)X \tag{3. 21}$$

şeklinde bir afin koneksiyon tanımlayalım. Burada ω ve η birer 1-form olmak üzere

$$\omega(X) = g(X,U), \quad U \in \chi(M) \tag{3. 22}$$

ve

$$\eta(X) = g(X,E), \quad E \in \chi(M) \tag{3. 23}$$

ile tanımlanır. $\tilde{T}$, M nin $\overset{*}{\tilde{\nabla}}$ koneksiyonuna göre torsiyon tensörü olmak üzere (3.21) kullanılarak

$$\text{i)} \quad \tilde{T}(X,Y) = \overset{*}{\tilde{\nabla}}_X Y - \overset{*}{\tilde{\nabla}}_Y X - [X,Y] = \omega(Y)X - \omega(X)Y \tag{3. 24}$$

$$\text{ii)} \quad \left(\overset{*}{\tilde{\nabla}}_X g\right)(Y,Z) = \tilde{\nabla}_X g(Y,Z) - g(\overset{*}{\tilde{\nabla}}_X Y, Z) - g(Y, \overset{*}{\tilde{\nabla}}_X Z)$$

$$= 2\,\eta(X)g(Y,Z) + \eta(Y)g(X,Z) + \eta(Z)g(X,Y) \tag{3. 25}$$

elde edilir. Böylece Tanım 3.1.1. gereği $\overset{*}{\tilde{\nabla}}$ bir semi-simetrik metrik olmayan koneksiyondur [17].

Teorem 3.3.2. (M, g) bir Riemann manifoldu olmak üzere $\overset{*}{\tilde{\nabla}}$ ve $\tilde{\nabla}$ sırası ile M üzerinde [17] anlamında semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonu ve Levi-Civita koneksiyonu göstersin. Bu taktirde $\overset{*}{\tilde{\nabla}}$ ve $\tilde{\nabla}$ nın Riemann eğrilik tensörleri sırası ile $\overset{*}{\tilde{R}}$ ve $\tilde{R}$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}\overset{*}{\tilde{R}}(X,Y)Z = \tilde{R}(X,Y)Z - \alpha(Y,Z)X + \alpha(X,Z)Y - g(Y,Z)LX \\ + g(X,Z)LY + \beta(Y,X)Z - \beta(X,Y)Z + \beta(Y,Z)X - \beta(X,Z)Y\end{aligned} \tag{3. 26}$$

dır. Burada α ve β

$$\alpha(Y,Z) = g(LY,Z) = (\tilde{\nabla}_Y \omega)(Z) - \omega(Y)\omega(Z) + \frac{1}{2}\omega(U)g(Y,Z), \tag{3. 27}$$

$$\begin{aligned}\beta(Y,Z) = (\tilde{\nabla}_Y \eta)(Z) - \eta(Y)\omega(Z) + \eta(Y)\eta(Z) \\ -\omega(Y)\eta(Z) + \eta(U)g(Y,Z)\end{aligned} \tag{3. 28}$$

biçiminde tanımlanan 1-formlar ve L

$$LX = \tilde{\nabla}_X U - \omega(X)U + \frac{1}{2}\omega(U)X \tag{3. 29}$$

şeklinde tanımlanan bir (1, 1)- tensör alanıdır [17].

3.4 [18] Anlamında Semi-Simetrik Metrik Olmayan Koneksiyon

Tanım 3.4.1. (M, g), (n+d)-boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\tilde{\nabla}$, M üzerinde üzerinde Levi-Civita koneksiyonu olsun. $\forall X,Y \in \chi(M)$ olmak üzere M üzerinde;

$$\overset{*}{\tilde{\nabla}}_X Y = \tilde{\nabla}_X Y + \omega(Y)X - g(X,Y)U + g(X,Y)E \tag{3. 30}$$

şeklinde bir afin koneksiyon tanımlayalım. Burada ω ve η birer 1-form ve

$$\omega(X) = g(X,U), \ U \in \chi(M) \tag{3. 31}$$

ve

$$\eta(X) = g(X,E), \ E \in \chi(M) \tag{3. 32}$$

ile tanımlanır. $\tilde{T}$, M nin $\overset{*}{\tilde{\nabla}}$ koneksiyonuna göre torsiyon tensörü olmak üzere (3.30) denklemi kullanılarak

i) $\tilde{T}(X,Y) = \overset{*}{\tilde{\nabla}}_X Y - \overset{*}{\tilde{\nabla}}_Y X - [X,Y] = \omega(Y)X - \omega(X)Y$ (3. 33)

ii) $$\left(\overset{*}{\tilde{\nabla}}_X g\right)(Y,Z) = \tilde{\nabla}_X g(Y,Z) - g(\overset{*}{\tilde{\nabla}}_X Y, Z) - g(Y, \overset{*}{\tilde{\nabla}}_X Z)$$

$$= -\eta(Y)g(X,Z) - \eta(Z)g(X,Y) \quad (3.\ 34)$$

elde edilir. Böylece Tanım 3.1.1. gereği $\overset{*}{\tilde{\nabla}}$ bir semi-simetrik metrik olmayan koneksiyondur [18].

Teorem 3.4.2. (M, g) bir Riemann manifoldu olmak üzere $\overset{*}{\tilde{\nabla}}$ ve $\tilde{\nabla}$ sırası ile M üzerinde [18] anlamında semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonu ve Levi-Civita koneksiyonu göstersin. Bu taktirde $\overset{*}{\tilde{\nabla}}$ ve $\tilde{\nabla}$ nın Riemann eğrilik tensörleri sırası ile $\overset{*}{\tilde{R}}$ ve $\tilde{R}$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} \overset{*}{\tilde{R}}(X,Y)Z &= \tilde{R}(X,Y)Z - \alpha(Y,Z)X + \alpha(X,Z)Y \\ &\quad + g(Y,Z)\{\lambda(X,E) - \lambda(X,U)\} - g(X,Z)\{\lambda(Y,E) - \lambda(Y,U)\} \end{aligned} \quad (3.\ 35)$$

dır. Burada α (0, 2)-tensör alanı olmak üzere

$$\alpha(X,Y) = (\tilde{\nabla}_X \omega)(Y) - \omega(X)\omega(Y) \quad (3.\ 36)$$

ve

$$\lambda(X,Y) = \tilde{\nabla}_X Y + \omega(Y)X - g(X,Y)U + g(X,Y)E \quad (3.\ 37)$$

şeklinde tanımlanır [18].

4. ÜZERİNDE SEMi-SİMETRİK METRİK OLMAYAN VE SEMi-SİMETRİK METRİK KONEKSİYON TANIMLI OLAN RİEMANN MANİFOLDLARININ SAĞLADIĞI BAZI SEMİ-SİMETRİ ŞARTLARI

Bu bölüm orijinal sonuçlar içermektedir. Birinci bölümde (M, g) bir Riemann manifoldu olmak üzere, (M, g) üzerinde [16] anlamında semi-simetrik metrik olmayan bir koneksiyon tanımlı olan bir Riemann manifoldu için bazı semi-simetri şartlarının sağlanması durumunda manifold için bazı karakterizasyonlar elde edilmiştir. İkinci bölümde üzerinde semi-simetrik metrik koneksiyon tanımlı olan bir Riemann manifoldu için bazı semi-simetri şartlarının sağlanması durumunda karakterizasyonlar elde edilmiştir. Üçüncü bölümde ise (M, g) üzerinde [18] anlamında semi-simetrik metrik olmayan bir koneksiyon tanımlı olan bir Riemann manifoldu için bazı semi-simetri şartlarının sağlanması durumunda manifold için karakterizasyonlar elde edilmiştir.

4.1 Üzerinde [16] Anlamında Semi-Simetrik Metrik Olmayan Koneksiyon Tanımlı Olan Bir Riemann Manifoldunun Sağladığı Bazı Semi-Simetri Şartları

Bu bölümde üzerinde [16] anlamında semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon tanımlı olan bir Riemann manifoldu için U Levi-Civita koneksiyona göre bir paralel birim vektör alanı olmak üzere $\tilde{R}\cdot\overset{*}{\tilde{R}}=0$, $\overset{*}{\tilde{R}}\cdot\tilde{R}=0$, $\tilde{R}\cdot\overset{*}{\tilde{R}}-\overset{*}{\tilde{R}}\cdot\tilde{R}=0$, $\tilde{R}\cdot\overset{*}{\tilde{S}}=0$, $\overset{*}{\tilde{R}}\cdot\tilde{S}=0$, $\tilde{R}\cdot\overset{*}{\tilde{S}}-\overset{*}{\tilde{R}}\cdot\tilde{S}=0$ ve $\overset{*}{\tilde{R}}\cdot\overset{*}{\tilde{S}}=0$ eğrilik şartlarının sağlanması durumunda manifold için bazı karekterizasyonlar elde edilmiştir.

Önerme 4.1.1. (M, g) üzerinde [16] anlamında semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon tanımlı bir Riemann manifoldu ve U Levi-Civita koneksiyona göre paralel bir birim vektör alanı olsun. Bu taktirde α, (0, 2)-tensör alanı olmak üzere

$$\alpha(X,Y) = -\eta(X)\eta(Y) \tag{4.1}$$

dir.

İspat : $\forall X, Y \in \chi(M)$ ve $U \in \chi(M)$ olmak üzere (3. 20) ve (3. 4) denklemleri kullanıldığında (4. 1) elde edilir. ■

(2. 1) eşitliğinde Z yerine U alınırsa

$$\tilde{R}(X,Y)U=0 \tag{4. 2}$$

elde edilir. (3. 18) eşitliğinde W ile iç çarpım alınıp X ve W üzerinde bir kontraksiyon yapılır ise

$$\tilde{S}(Y,U)= \eta(\overline{S}Y) \tag{4. 3}$$

bulunur. Burada $\tilde{S}$, $\tilde{\nabla}$ Levi-Civita koneksiyonun Ricci tensörü ve $\overline{S}$ ise (2. 4) ile tanımlanan Ricci öperatörüdür. Bundan başka (3. 15) yardımıyla

$$\overset{*}{\tilde{\nabla}}_X U = X \tag{4. 4}$$

elde edilir. (3. 18) denkleminde Z=U alınıp (4. 1) eşitliği kullanıldığında

$$\overset{*}{\tilde{R}}(X,Y)U = \eta(Y)X - \eta(X)Y \tag{4. 5}$$

elde edilir. Ayrıca (3. 19) denkleminde (4. 1) kullanılarak

$$\overset{*}{\tilde{S}}(Y,Z) = \tilde{S}(Y,Z) + (n-1)\eta(Y)\eta(Z) \tag{4. 6}$$

bulunur. (4. 6) eşitliğinde kontraksiyon uygulanırsa

$$\overset{*}{\tilde{r}} = \tilde{r} + (n-1) \tag{4. 7}$$

sonucuna ulaşılır.

Önerme 4.1.2. (M, g) üzerinde [16] anlamında semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon tanımlı bir Riemann manifoldu ve U Levi-Civita koneksiyona göre bir paralel birim vektör alanı olsun. Bu taktirde,

$$\overset{*}{\tilde{R}} \cdot \alpha = \tilde{R} \cdot \alpha = 0 \tag{4. 8}$$

dır.

İspat : $\forall$ X, Y, Z, W$\in \chi$(M) olmak üzere (2. 11) denkleminde $\mathcal{T}$ yerine α alındığında

$$(\overset{*}{\tilde{R}}\cdot\alpha)(Z,W;X,Y) = -\alpha(\overset{*}{\tilde{R}}(X, Y)Z,W)-\alpha(Z, \overset{*}{\tilde{R}}(X, Y)W) \qquad (4.\ 9)$$

elde edilir. Böylece (3. 18) eşitliği (4. 9) denkleminde yerine yazılır ve sadeleştirme yapılırsa

$$(\overset{*}{\tilde{R}}\cdot\alpha)(Z,W;X,Y) = -\alpha(\tilde{R}(X, Y)Z,W)-\alpha(Z, \tilde{R}(X, Y)W) \qquad (4.10)$$

eşitliği bulunur. Benzer şekilde

$$(\tilde{R}\cdot\alpha)(Z,W;X,Y) = -\alpha(\tilde{R}(X, Y)Z,W)-\alpha(Z, \tilde{R}(X, Y)W) \qquad (4.\ 11)$$

eşitliğinde (4.1) denklemi kullanılırsa

$$(\tilde{R}\cdot\alpha)(Z,W;X,Y) = \eta(\tilde{R}(X, Y)Z)\eta(W) + \eta(Z)\eta(\tilde{R}(X, Y)W) \qquad (4.\ 12)$$

yazılabilir. (4. 12) denkleminde (3. 4) denklemi kullanıldığında

$$(\tilde{R}\cdot\alpha)(Z,W;X,Y) = g(\tilde{R}(X, Y)Z, U)\eta(W) + \eta(Z)g(\tilde{R}(X, Y)W, U) \qquad (4.\ 13)$$

elde edilir. Diğer taraftan (2. 2) denklemi gereği

$$g(\tilde{R}(X, Y)Z, U) = -g(\tilde{R}(X, Y)U, Z) \qquad (4.\ 14)$$

olduğundan (4. 13) denkleminde (2. 2), (4. 2) ve (4. 14) denklemleri kullanılırsa;

$$(\tilde{R}\cdot\alpha)(Z,W;X,Y) = 0$$

sonucuna ulaşılır. ■

Yardımcı Teorem 4.1.3. (M, g) üzerinde [16] anlamında semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon tanımlı bir Riemann manifoldu ve U Levi-Civita koneksiyona göre bir paralel birim vektör alanı olsun. Bu taktirde

$$\tilde{R}\cdot\overset{*}{\tilde{R}} = \tilde{R}\cdot\tilde{R} \qquad (4.\ 15)$$

ve

$$\overset{*}{\tilde{R}}\cdot\tilde{R} = \tilde{R}\cdot\tilde{R} - Q(-\eta\otimes\eta, \tilde{R}) \qquad (4.\ 16)$$

dir.

İspat : $\forall X_h, X_i, X_j, X_k, X_l, X_m \in\chi(M)$ olmak üzere (2. 11) denkleminde $\mathcal{T}$ yerine $\overset{*}{\tilde{R}}$ alındığında

$$(\tilde{R} \cdot \overset{*}{\tilde{R}})(X_h, X_i, X_j, X_k; X_l, X_m) = -\overset{*}{\tilde{R}}(\tilde{R}(X_l, X_m)X_h, X_i, X_j, X_k)$$
$$-\overset{*}{\tilde{R}}(X_h, \tilde{R}(X_l, X_m)X_i, X_j, X_k)$$
$$-\overset{*}{\tilde{R}}(X_h, X_i, \tilde{R}(X_l, X_m)X_j, X_k)$$
$$-\overset{*}{\tilde{R}}(X_h, X_i, X_j, \tilde{R}(X_l, X_m)X_k) \tag{4. 17}$$

elde edilir. (4. 17) denkleminde (3. 18) eşitliği kullanıldığında

$$(\tilde{R} \cdot \overset{*}{\tilde{R}})(X_h, X_i, X_j, X_k; X_l, X_m) = -\tilde{R}(\tilde{R}(X_l,X_m)X_h,X_i,X_j,X_k)$$
$$+\alpha(X_i,X_j)g(\tilde{R}(X_l,X_m)X_h,X_k)-\alpha(\tilde{R}(X_l,X_m)X_h, X_j)g(X_i,X_k)$$
$$-\tilde{R}(X_h,\tilde{R}(X_l,X_m)X_i,X_j,X_k)+\alpha(\tilde{R}(X_l,X_m)X_i,X_j)g(X_h,X_k)$$
$$-\alpha(X_h, X_j)g(\tilde{R}(X_l,X_m)X_i,X_k)-\tilde{R}(X_h,X_i,\tilde{R}(X_l,X_m)X_j,X_k)$$
$$+\alpha(X_i,\tilde{R}(X_l,X_m),X_j)g(X_h,X_k)-\alpha(X_h,\tilde{R}(X_l,X_m)X_j)g(X_i,X_k)$$
$$-\tilde{R}(X_h,X_i,X_j,\tilde{R}(X_l,X_m)X_k)+\alpha(X_i,X_j)g(X_h,\tilde{R}(X_l,X_m)X_k)$$
$$-\alpha(X_h, X_j)g(X_i,\tilde{R}(X_l,X_m)X_k) \tag{4. 18}$$

bulunur. Burada (2. 2), (4. 1) ve (4. 2) kullanılır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa;

$$\tilde{R} \cdot \overset{*}{\tilde{R}} = \tilde{R} \cdot \tilde{R} \tag{4. 19}$$

elde edilir. Diğer taraftan (2. 11) denkleminde R yerine $\overset{*}{\tilde{R}}$ ve $\mathcal{T}$ yerine $\tilde{R}$ alınırsa

$$(\overset{*}{\tilde{R}} \cdot \tilde{R})(X_h, X_i, X_j, X_k; X_l, X_m) = -\tilde{R}(\overset{*}{\tilde{R}}(X_l, X_m)X_h, X_i, X_j, X_k)$$
$$-\tilde{R}(X_h, \overset{*}{\tilde{R}}(X_l, X_m)X_i, X_j, X_k)$$
$$-\tilde{R}(X_h, X_i, \overset{*}{\tilde{R}}(X_l, X_m)X_j, X_k)$$
$$-\tilde{R}(X_h, X_i, X_j, \overset{*}{\tilde{R}}(X_l, X_m)X_k) \tag{4. 20}$$

elde edilir. (4. 20) denkleminde (3. 18) eşitliği kullanıldığında

$$(\overset{*}{\tilde{R}} \cdot \tilde{R})(X_h, X_i, X_j, X_k; X_l, X_m) = -\tilde{R}(\tilde{R}(X_l,X_m)X_h,X_i,X_j,X_k)$$
$$+\alpha(X_m,X_h)\tilde{R}(X_l,X_i,X_j,X_k)-\alpha(X_l,X_h)\tilde{R}(X_m,X_i,X_j,X_k)$$
$$-\tilde{R}(X_h,\tilde{R}(X_l,X_m)X_i,X_j,X_k)+\alpha(X_m,X_i)\tilde{R}(X_h,X_l,X_j,X_k)$$
$$-\alpha(X_l,X_i)\tilde{R}(X_h,X_m,X_j,X_k)-\tilde{R}(X_h,X_i,R(X_l,X_m)X_j,X_k)$$
$$+\alpha(X_m,X_j)\tilde{R}(X_hX_i,X_l,X_k)-\alpha(X_l,X_j)\tilde{R}(X_h,X_i,X_m,X_k)$$

$$- \tilde{R}(X_h,X_i,X_j, \tilde{R}(X_l,X_m)X_k) +\alpha(X_m,X_k)\tilde{R}(X_h,X_i,X_j,X_l)$$

$$-\alpha(X_l,X_k)\tilde{R}(X_h,X_i,X_j,X_m) \qquad (4.\ 21)$$

bulunur. (2. 11) denkleminde $\mathcal{T}$ yerine $\tilde{R}$ alınarak ve (2. 12) denkleminde A yerine α ve $\mathcal{T}$ yerine $\tilde{R}$ alınarak elde edilen denklemler (4. 21) de yerine yazılırsa

$$\overset{*}{\tilde{R}}\cdot\tilde{R} = \tilde{R}\cdot\tilde{R} - Q(\alpha,\tilde{R}) \qquad (4.\ 22)$$

yazılabilir. Ayrıca (4. 1) denklemi yardımıyla

$$\overset{*}{\tilde{R}}\cdot\tilde{R} = \tilde{R}\cdot\tilde{R} - Q(-\eta\otimes\eta,\tilde{R}) \qquad (4.\ 23)$$

bulunur. ■

Teorem 4.1.4. (M, g) üzerinde [16] anlamında semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon tanımlı bir Riemann manifoldu ve U Levi-Civita koneksiyona göre bir paralel birim vektör alanı olsun. Bu taktirde

$\tilde{R}\cdot\overset{*}{\tilde{R}} = 0 \Leftrightarrow$ M Levi-Civita koneksiyona göre semi-simetriktir.

İspat : (4. 15) eşitliğinde $\tilde{R}\cdot\overset{*}{\tilde{R}} = 0$ alınırsa $\tilde{R}\cdot\tilde{R} = 0$ bulunur. O halde M Levi-Civita koneksiyona göre semi-simetriktir. ■

Teorem 4.1.5. (M, g) üzerinde [16] anlamında semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon tanımlı, Levi-Civita koneksiyona göre semi-simetrik bir Riemann manifoldu ve U Levi-Civita koneksiyona göre bir paralel birim vektör alanı olsun. Eğer $\overset{*}{\tilde{R}}\cdot\tilde{R} = 0$ ise M bir yarı-Einstein manifoldudur.

İspat : (4. 23) eşitliğinde $\overset{*}{\tilde{R}}\cdot\tilde{R} = 0$ alınırsa

$$Q(-\eta\otimes\eta,\tilde{R})_{hijklm} =0 \qquad (4.\ 24)$$

elde edilir. (4. 24) eşitliği uygun bir kontraksiyonu ile

$$Q(\eta\otimes\eta,\tilde{S})_{hklm} =0 \qquad (4.\ 25)$$

biçimine dönüşür. Böylece $\tilde{r}$ M nin skaler eğriliği olmak üzere

$$\tilde{S} = \tilde{r}(\eta\otimes\eta) \qquad (4.\ 26)$$

elde edilir. O halde Tanım 2.1.8. gereği M bir yarı-Einstein manifoldudur. ■

Teorem 4.1.6. (M, g) üzerinde [16] anlamında semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon tanımlı bir Riemann manifoldu ve U Levi-Civita koneksiyona göre bir paralel birim vektör alanı olsun. Eğer $\tilde{R}\cdot\overset{*}{\tilde{R}}-\overset{*}{\tilde{R}}\cdot\tilde{R}=0$ ise M bir yarı-Einstein manifoldudur.

İspat : (4. 15) ve (4. 16) yardımıyla

$$Q(-\eta\otimes\eta,\tilde{R})_{hijklm}=0$$

elde edilir. Teorem 4.1.5. deki işlemler tekrar yapılırsa M bir yarı-Einstein manifold olarak bulunur. ■

Örnek 4.1.7. M, (2n+1)-boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold olsun. φ, (1, 1)-tipinden bir tensör alanı, ξ bir vektör alanı, η M üzerinde bir diferensiyel 1-form olmak üzere, $\forall X\in\chi(M)$ için $\{\varphi, \xi, \eta\}$ üçlüsü;

$$\varphi : \chi(M)\xrightarrow{\text{lineer}}\chi(M)$$

$$\eta : \chi(M)\xrightarrow{\text{dif.bilir}}C^{\infty}(M, \mathbb{R})$$

$$\eta(\xi) = 1 \text{ ve } \varphi^2 X = -X+\eta(X)\xi$$

koşullarını sağlıyor ise bu üçlüye bir *hemen hemen değme yapı*, $\{M,\varphi,\xi,\eta\}$ dörtlüsüne de bir *hemen hemen değme manifoldu* adı verilir [5]. M hemen hemen değme manifoldu üzerinde $X\neq\xi$ için,

$$\eta(\xi) = 1 \quad \text{ve} \quad d\eta(\xi, X) = 0$$

olacak biçimde bir tek $\xi\in\chi(M)$ vektör alanı var ise; ξ ye η*-değme yapısının öz vektör alanı* denir [19].

(2n+1)-boyutlu M hemen hemen değme manifoldu üzerinde, X, $\xi\in\chi(M)$, $X\neq\xi$ vektör alanları ve $\varphi : \chi(M)\xrightarrow{\text{lineer}}\chi(M)$ için,

$$\varphi\xi = 0$$

$$\eta o\varphi = 0$$

$$\text{rank}\varphi = 2n$$

eşitlikleri sağlanır [5]. (2n+1)-boyutlu M hemen hemen değme manifoldu üzerinde, $\forall X, Y\in\chi(M)$ ve $\xi\in\chi(M)$ için;

$$\eta(X) = g(X, \xi)$$

ve

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

koşullarını sağlayan bir g metriği var ise; $\{\varphi, \xi, \eta, g\}$ dörtlüsüne bir *hemen hemen değme metrik yapı*, $\{M, \varphi, \xi, \eta, g\}$ beşlisine de bir *hemen hemen değme metrik manifoldu* adı verilir [5].

Eğer $\tilde{\nabla}_X\varphi=0$ ise bir hemen hemen değme metrik manifolda kosimplektikdir denir [20]. $\tilde{\nabla}_X\varphi=0$ formülünden

$$\tilde{\nabla}_X\xi= 0, \quad \tilde{\nabla}_X\eta=0 \text{ ve } R(X, Y)\xi =0$$

yazılabilir. Buradan (3. 15), (3. 16) ve (3. 20) denklemlerinden :

$$\overset{*}{\tilde{\nabla}}_X Y = \tilde{\nabla}_X Y + \eta(Y)X,$$

$$T(X,Y) = \eta(Y)X - \eta(X)Y$$

$$\alpha = -\eta \otimes \eta$$

elde edilir. Böylece Yardımcı Teorem 4.1.3. gereği $\tilde{R} \cdot \overset{*}{\tilde{R}} = \tilde{R} \cdot \tilde{R}$ bulunur.

Bir M bir kosimplektik manifoldu için $p \in M$ noktasındaki T_pM tanjant uzayında ξ vektör alanına dik bir X birim vektör alanı $\{X, \varphi X\}$ ortonormal olacak biçimde var ise $\{X, \varphi X\}$ düzlemine T_pM nin φ-kesitseli denir.

Ayrıca

$$K(X, \varphi X) = g(R(X, \varphi X)\varphi X, X)$$

biçiminde tanımlanan ifadeye M nin φ-kesitsel eğriliği adı verilir [21].

Eğer M kosimplektik manifoldunun φ-kesitsel eğriliği bir c sabitine eşit ise M ye bir kosimplektik uzay form adı verilir ve M(c) ile gösterilir. Bir kosimplektik uzay formunun eğrilik tensörü

$$\begin{aligned} 4R(X,Y,Z,W) = c\{&g(X,W)g(Y,Z)-g(X,Z)g(Y,W) \\ &+g(X, \varphi W)g(Y, \varphi Z)-g(X, \varphi Z)g(Y, \varphi W) \\ &-2g(X, \varphi Y)g(Z, \varphi W)-g(X,W)\eta(Y)\eta(Z) \\ &+g(X,Z)\eta(Y)\eta(W)-g(Y,Z)\eta(X)\eta(W) \\ &+g(Y,W)\eta(X)\eta(Z)\} \end{aligned}$$

ile verilir [22]. Buradan Y ve Z ye göre kontraksiyon yapılırsa

$$S(X,W)=\frac{nc}{2}\{g(X,W)-\eta(X)\eta(W)\},$$

elde edilir. Böylece Tanım 2.1.8. gereği M bir yarı-Einstein manifoldudur.

Yardımcı Teorem 4.1.8. (M, g) üzerinde [16] anlamında semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon tanımlı bir Riemann manifoldu ve U Levi-Civita koneksiyona göre bir paralel birim vektör alanı olsun. Bu taktirde

$$\tilde{R}\cdot\overset{*}{\tilde{S}}=\tilde{R}\cdot\tilde{S} \tag{4. 27}$$

ve

$$\overset{*}{\tilde{R}}\cdot\tilde{S}=\tilde{R}\cdot\tilde{S}-Q(-\eta\otimes\eta,\tilde{S}) \tag{4. 28}$$

dir.

İspat : $\forall X, Y, Z, W\in\chi(M)$ olmak üzere (2. 11) denkleminde $\mathcal{T}$ yerine $\tilde{S}$ alındığında

$$(\tilde{R}\cdot\overset{*}{\tilde{S}})(Z,W;X,Y) = -\overset{*}{\tilde{S}}(\tilde{R}(X, Y)Z,W)-\overset{*}{\tilde{S}}(Z, \tilde{R}(X, Y)W) \tag{4. 29}$$

yazılabilir. (4. 29) denkleminde (3. 19) denklemi kullanıldığında

$$(\tilde{R}\cdot\overset{*}{\tilde{S}})(Z,W;X,Y) = -(\tilde{S}(\tilde{R}(X,Y)Z,W)-(n-1)\alpha(\tilde{R}(X,Y)Z,W))$$
$$-(\tilde{S}(Z,\tilde{R}(X,Y)W)-(n-1)\alpha(Z,\tilde{R}(X,Y)W)) \tag{4. 30}$$

bulunur. (4. 30) denkleminde (4. 1) ve (4. 2) eşitlikleri kullanılırsa

$$(\tilde{R}\cdot\overset{*}{\tilde{S}})(Z,W;X,Y) =-\tilde{S}(\tilde{R}(X,Y)Z,W)-\tilde{S}(Z,\tilde{R}(X,Y)W) \tag{4. 31}$$

elde edilir. Ayrıca (2. 11) denkleminde $\mathcal{T}$ yerine $\tilde{S}$ alındığında

$$(\tilde{R}\cdot\tilde{S})(Z,W;X,Y) =-\tilde{S}(\tilde{R}(X,Y)Z,W)-\tilde{S}(Z,\tilde{R}(X,Y)W) \tag{4. 32}$$

olduğundan

$$(\tilde{R}\cdot\overset{*}{\tilde{S}})(Z,W;X,Y) = (\tilde{R}\cdot\tilde{S})(Z,W;X,Y) \tag{4. 33}$$

elde edilir.

Diğer taraftan $\forall X, Y, Z, W\in\chi(M)$ olmak üzere (2. 11) denkleminde R yerine $\overset{*}{\tilde{R}}$ ve $\mathcal{T}$ yerine $\tilde{S}$ alındığında

$$(\overset{*}{\tilde{R}}\cdot\tilde{S})(Z,W;X,Y) = -\tilde{S}(\overset{*}{\tilde{R}}(X, Y)Z,W)- \tilde{S}(Z, \overset{*}{\tilde{R}}(X, Y)W) \tag{4. 34}$$

yazılabilir. (4. 34) denkleminde (3. 18) denklemi kullanıldığında

$$(\overset{*}{\tilde{R}}\cdot\tilde{S})(Z,W;X,Y) = -\tilde{S}(\tilde{R}(X, Y)Z-\alpha(Y,Z)X+\alpha(X,Z)Y,W)- \tilde{S}(Z, \tilde{R}(X, Y)W$$
$$-\alpha(Y,W)X+\alpha(X,W)Y) \tag{4. 35}$$

elde edilir. Son eşitlikte gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$(\overset{*}{\tilde{R}}\cdot\tilde{S})(Z,W;X,Y) = -\tilde{S}(\tilde{R}(X, Y)Z,W)+\alpha(Y,Z)\tilde{S}(X,W)-\alpha(X,Z)\tilde{S}(Y,W)$$
$$-\tilde{S}(Z,\tilde{R}(X, Y)W)+\alpha(Y,W)\tilde{S}(Z,X)-\alpha(X,W)\tilde{S}(Z,Y) \tag{4. 36}$$

bulunur. Ayrıca (2. 12) denkleminde A yerine α ve $\mathcal{T}$ yerine $\tilde{S}$ alınır ve (2. 10) denklemi kullanılırsa

$$Q(\alpha,\tilde{S})(Z,W ; X, Y)=- \tilde{S}(X,W)\alpha(Y,Z)+\tilde{S}(Y,W)\alpha(X,Z) -\tilde{S}(Z,X)\alpha(Y,W)$$
$$+\tilde{S}(Z,Y)\alpha(X,W) \tag{4. 37}$$

elde edilir. (4. 32) ve (4. 37) eşitlikleri (4. 36) de yerine yazılırsa

$$\overset{*}{\tilde{R}}\cdot\tilde{S}=\tilde{R}\cdot\tilde{S}- Q(\alpha,\tilde{S})$$

bulunur. ■

Teorem 4.1.9. (M, g) üzerinde [16] anlamında semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon tanımlı bir Riemann manifoldu ve U Levi-Civita koneksiyona göre bir paralel birim vektör alanı olsun. Bu taktirde

$\tilde{R}\cdot\overset{*}{\tilde{S}}=0 \Leftrightarrow$ M Levi-Civita koneksiyona göre Ricci-semisimetriktir.

İspat : (4. 27) eşitliğinde $\tilde{R}\cdot\overset{*}{\tilde{S}}=0$ alınırsa $\tilde{R}\cdot\tilde{S}=0$ bulunur. O halde M Levi-Civita koneksiyona göre Ricci-semisimetriktir. ■

Teorem 4.1.10. (M, g) üzerinde [16] anlamında semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon tanımlı, Levi-Civita koneksiyona göre bir Ricci-semisimetrik Riemann manifoldu ve U Levi-Civita koneksiyona göre bir paralel birim vektör alanı olsun. Eğer $\overset{*}{\tilde{R}}\cdot\tilde{S}=0$ ise M bir yarı-Einstein manifoldudur.

İspat : (4. 28) eşitliğinde $\overset{*}{\tilde{R}} \cdot \tilde{S} = 0$ alınırsa

$$Q(-\eta \otimes \eta, \tilde{S}) = Q(\eta \otimes \eta, \tilde{S}) = 0 \tag{4. 38}$$

elde edilir. Böylece $\tilde{r}$ M nin skaler eğriliği olmak üzere

$$\tilde{S} = \tilde{r}(\eta \otimes \eta)$$

elde edilir. O halde Tanım 2.1.8. gereği M bir yarı-Einstein manifoldudur. ■

Teorem 4.1.11. (M, g) üzerinde [16] anlamında semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon tanımlı bir Riemann manifoldu ve U Levi-Civita koneksiyona göre bir paralel birim vektör alanı olsun. Eğer $\tilde{R} \cdot \overset{*}{\tilde{S}} - \overset{*}{\tilde{R}} \cdot \tilde{S} = 0$ ise M bir yarı-Einstein manifoldudur.

İspat : (4. 27) ve (4. 28) eşitlikleri yardımıyla

$$Q(-\eta \otimes \eta, \tilde{S}) = 0$$

eşitliğini elde ederiz. Teorem 4.1.10. deki işlemler tekrar edilirse M bir yarı-Einstein manifold olarak bulunur. ■

Yardımcı Teorem 4.1.12. (M, g) üzerinde [16] anlamında semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon tanımlı bir Riemann manifoldu ve U Levi-Civita koneksiyona göre bir paralel birim vektör alanı olsun. Bu taktirde

$$\overset{*}{\tilde{R}} \cdot \overset{*}{\tilde{S}} = \tilde{R} \cdot \tilde{S} - Q(\alpha, \tilde{S}) \tag{4. 39}$$

dir.

İspat : $\forall X,Y,Z,W \in \chi(M)$ olmak üzere (2. 11) denkleminde R yerine $\overset{*}{\tilde{R}}$ ve $\mathcal{T}$ yerine $\overset{*}{\tilde{S}}$ alındığında

$$(\overset{*}{\tilde{R}} \cdot \overset{*}{\tilde{S}})(Z,W;X,Y) = -\overset{*}{\tilde{S}}(\overset{*}{\tilde{R}}(X,Y)Z,W) - \overset{*}{\tilde{S}}(Z, \overset{*}{\tilde{R}}(X,Y)W) \tag{4. 40}$$

yazılabilir. (4. 40) denkleminde (3. 18) denklemi kullanıldığında

$$(\overset{*}{\tilde{R}} \cdot \overset{*}{\tilde{S}})(Z,W;X,Y) = -\overset{*}{\tilde{S}}(\tilde{R}(X,Y)Z - \alpha(Y,Z)X + \alpha(X,Z)Y, W)$$

$$-\overset{*}{\tilde{S}}(Z, \tilde{R}(X,Y)W - \alpha(Y,W)X + \alpha(X,W)Y)$$

elde edilir. Son eşitlikte gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$(\overset{*}{\tilde{R}}\cdot\overset{*}{\tilde{S}})(Z,W;X,Y) = -(\tilde{S}(\tilde{R}(X, Y)Z,W)-\alpha(Y,Z)\tilde{S}(X,W)+\alpha(X,Z)\tilde{S}(Y,W))$$

$$-(\tilde{S}(Z,\tilde{R}(X, Y)W)-\alpha(Y,W)\tilde{S}(Z,X)+\alpha(X,W)\tilde{S}(Z,Y)) \quad (4.\ 41)$$

bulunur. (3. 19) denklemi yardımı ile (4. 41) eşitliği

$$(\overset{*}{\tilde{R}}\cdot\tilde{S})(Z,W;X,Y) = -(\tilde{S}(\tilde{R}(X,Y)Z,W)-(n-1)\alpha(\tilde{R}(X,Y)Z,W)-\alpha(Y,Z)(\tilde{S}(X,W)$$

$$-(n-1)\alpha(X,W)) +\alpha(X,Z)((\tilde{S}(Y,W)-(n-1)\alpha(Y,W))$$

$$-(\tilde{S}(Z,R(X,Y)W)-(n-1)\alpha(Z,\tilde{R}(X,Y)W)-\alpha(Y,W)(\tilde{S}(Z,X)$$

$$-(n-1)\alpha(Z,X)) +\alpha(X,W)((\tilde{S}(Z,Y)-(n-1)\alpha(Z,Y)) \quad (4.\ 42)$$

şeklinde yazılır. (4.1) gereği α simetrik olduğundan ayrıca (4. 1) ve (4. 2) eşitlikleri kullanılarak

$$\alpha(X, \tilde{R}(Y, Z)W) = 0 \quad (4.\ 43)$$

elde edilir. Buradan (4. 43) eşitliği ve bu eşitliğe benzer durumlar (4. 42) denkleminde yerine yazılır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$(\overset{*}{\tilde{R}}\cdot\overset{*}{\tilde{S}})(Z,W;X,Y) = -\tilde{S}(\tilde{R}(X,Y)Z,W)- \tilde{S}(Z,\tilde{R}(X,Y)W)+\alpha(Y,Z)\tilde{S}(X,W)$$

$$-\alpha(X,Z)\tilde{S}(Y,W)+\alpha(Y,W)\tilde{S}(Z,X)-\alpha(X,W)\tilde{S}(Z,Y) \quad (4.\ 44)$$

elde edilir. (2. 11) denkleminde $\mathcal{T}$ yerine $\tilde{S}$ alındığında

$$(\tilde{R}\cdot\tilde{S})(Z,W;X,Y) =-\tilde{S}(\tilde{R}(X,Y)Z,W)-\tilde{S}(Z,\tilde{R}(X,Y)W) \quad (4.\ 45)$$

bulunur. Ayrıca (2. 12) denkleminde A yerine α ve $\mathcal{T}$ yerine $\tilde{S}$ alındığında

$$Q(\alpha,\tilde{S})(Z,W;X,Y) = -\tilde{S}((X\wedge_\alpha Y)Z,W)-\tilde{S}(Z,(X\wedge_\alpha Y)W) \quad (4.\ 46)$$

yazılabilir. (4. 46) eşitliği (2. 10) denklemi yardımıyla

$$Q(\alpha,\tilde{S})(Z,W;X,Y) = \tilde{S}(X,W)\alpha(Y,Z)- \tilde{S}(Y,W)\alpha(X,Z) +\tilde{S}(Z,X)\alpha(Y,W)$$

$$-\tilde{S}(Z,Y)\alpha(X,W) \quad (4.\ 47)$$

biçiminde yazılır. (4. 45) ve (4. 47) eşitlikleri (4. 44) de yerine yazılırsa

$$\overset{*}{\tilde{R}}\cdot\overset{*}{\tilde{S}}=\tilde{R}\cdot\tilde{S}- Q(\alpha,\tilde{S}) \quad (4.\ 48)$$

bulunur. ■

Teorem 4.1.13. (M, g) üzerinde [16] anlamında semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon tanımlı bir Riemann manifoldu ve U Levi-Civita koneksiyona göre bir paralel birim vektör alanı olsun. Eğer $\overset{*}{\tilde{R}} \cdot \tilde{S} = 0$ ve $\tilde{R} \cdot S = 0$ ise M bir yarı-Einstein manifolddur.

İspat : (4. 48) eşitliğinde $\overset{*}{\tilde{R}} \cdot \overset{*}{\tilde{S}} = 0$ ve $\tilde{R} \cdot \tilde{S} = 0$ olarak alınırsa

$$Q(\alpha, \tilde{S}) = Q(-\eta \otimes \eta, \tilde{S}) = 0$$

elde edilir. Teorem 4.1.10. deki işlemler tekrar edilirse M bir yarı-Einstein manifold olarak bulunur. ■

4.2 Üzerinde Semi-Simetrik Metrik Koneksiyon Tanımlı Olan Bir Riemann Manifoldunun Sağladığı Bazı Semi-Simetri Şartları

Bu bölümde üzerinde semi-simetrik metrik koneksiyon tanımlı olan bir Riemann manifoldu için U Levi-Civita koneksiyona göre bir paralel birim vektör alanı olmak üzere $\tilde{R} \cdot \overset{*}{\tilde{S}} = 0$, $\overset{*}{\tilde{R}} \cdot \tilde{S} = 0$, $\tilde{R} \cdot \overset{*}{\tilde{S}} - \overset{*}{\tilde{R}} \cdot \tilde{S} = 0$, $\overset{*}{\tilde{R}} \cdot \overset{*}{\tilde{S}} = 0$ ve $\overset{*}{\tilde{R}} \cdot \tilde{C} = 0$ eğrilik şartlarının sağlanması durumunda manifold için bazı karekterizasyonlar elde edilmiştir.

Yardımcı Teorem 4.2.1. (M, g) üzerinde semi-simetrik metrik koneksiyon tanımlı bir Riemann manifoldu ve U Levi-Civita koneksiyona göre bir paralel birim vektör alanı olsun. Bu taktirde

$$\tilde{R} \cdot \overset{*}{\tilde{S}} = \tilde{R} \cdot \tilde{S} \tag{4. 49}$$

ve

$$\overset{*}{\tilde{R}} \cdot \tilde{S} = \tilde{R} \cdot \tilde{S} - Q(g - \eta \otimes \eta, \tilde{S}) \tag{4. 50}$$

dir.

İspat : $\forall$ X, Y, Z, W$\in \chi$(M) olmak üzere (2. 11) denkleminde $\mathcal{T}$ yerine $\overset{*}{\tilde{S}}$ alındığında

$$(\tilde{R}\cdot\overset{*}{\tilde{S}})(Z,W;X,Y) = -\overset{*}{\tilde{S}}(\tilde{R}(X,Y)Z,W)-\overset{*}{\tilde{S}}(Z,\tilde{R}(X,Y)W) \tag{4. 51}$$

yazılabilir. (4. 51) denkleminde (3. 14) denklemi kullanıldığında

$$\begin{aligned}(\tilde{R}\cdot\overset{*}{\tilde{S}})(Z,W;X,Y) = &-[\tilde{S}(\tilde{R}(X,Y)Z,W)+(2-n)g(\tilde{R}(X,Y)Z,W)\\ &+(n-2)\eta(\tilde{R}(X,Y)Z)\eta(W)]-[\tilde{S}(Z,\tilde{R}(X,Y)W)+(2-n)g(Z,\tilde{R}(X,Y)W)\\ &+(n-2)\eta(\tilde{R}(X,Y)W)\eta(Z)]\end{aligned} \tag{4. 52}$$

bulunur. (4. 52) denkleminde (2. 2) ve (3. 12) eşitlikleri kullanılırsa

$$(\tilde{R}\cdot\overset{*}{\tilde{S}})(Z,W;X,Y) = -\tilde{S}(\tilde{R}(X,Y)Z,W)-\tilde{S}(Z,\tilde{R}(X,Y)W) \tag{4. 53}$$

elde edilir. Ayrıca (2. 11) denkleminde $\mathcal{T}$ yerine $\tilde{S}$ alındığında

$$(\tilde{R}\cdot\tilde{S})(Z,W;X,Y) =-\tilde{S}(\tilde{R}(X,Y)Z,W)-\tilde{S}(Z,\tilde{R}(X,Y)W) \tag{4. 54}$$

olduğundan (4. 53) ve (4. 54) eşitlikleri gereği

$$(\tilde{R}\cdot\overset{*}{\tilde{S}})(Z,W;X,Y) = (\tilde{R}\cdot\tilde{S})(Z,W;X,Y)$$

elde edilir. Diğer taraftan $X,Y,Z,W\in\chi(M)$ olmak üzere (2. 11) denkleminde R yerine $\overset{*}{\tilde{R}}$ ve $\mathcal{T}$ yerine $\tilde{S}$ alındığında

$$(\overset{*}{\tilde{R}}\cdot\tilde{S})(Z,W;X,Y) = -\tilde{S}(\overset{*}{\tilde{R}}(X,Y)Z,W)-\tilde{S}(Z,\overset{*}{\tilde{R}}(X,Y)W) \tag{4. 55}$$

yazılabilir. (4. 55) denkleminde (3. 7) denklemi kullanıldığında

$$\begin{aligned}(\overset{*}{\tilde{R}}\cdot\tilde{S})(Z,W;X,Y) = &-\tilde{S}(\tilde{R}(X,Y)Z-\alpha(Y,Z)X+\alpha(X,Z)Y-g(Y,Z)LX\\ &+g(X,Z)LY,W)-\tilde{S}(Z,\tilde{R}(X,Y)W-\alpha(Y,W)X\\ &+\alpha(X,W)Y-g(Y,W)LX+g(X,W)LY)\end{aligned}$$

elde edilir. Son denklem düzenlenirse

$$\begin{aligned}(\overset{*}{\tilde{R}}\cdot\tilde{S})(Z,W;X,Y) =&-[\tilde{S}(\tilde{R}(X,Y)Z,W)-\alpha(Y,Z)\tilde{S}(X,W)+\alpha(X,Z)\tilde{S}(Y,W)\\ &-g(Y,Z)\tilde{S}(LX,W)+g(X,Z)\tilde{S}(LY,W)]-[\tilde{S}(Z,\tilde{R}(X,Y)W)\\ &-\alpha(Y,W)\tilde{S}(Z,X)+\alpha(X,W)\tilde{S}(Z,Y)-g(Y,W)\tilde{S}(Z,LX)\\ &+g(X,W)\tilde{S}(Z,LY)]\end{aligned} \tag{4. 56}$$

bulunur. Ayrıca (3. 10) denklemi

$$\alpha(X,Y)=g(LX,Y)$$

biçiminde yazılabilir. Burada

$$LX = -\eta(X)U + \frac{1}{2}X \quad (4.\ 57)$$

olup böylece

$$\tilde{S}(LX,Y) = -\eta(X)\tilde{S}(U,Y) + \frac{1}{2}\tilde{S}(X,Y)$$

ve

$$\eta(LX) = g(LX,U) = \alpha(X,U) = -\eta(X)\eta(U) + \frac{1}{2}g(X,U) = -\frac{1}{2}\eta(X) \quad (4.\ 58)$$

elde edilir. Böylece (2. 3) ve (3. 14) eşitlikleri yardımı ile

$$\overset{*}{\tilde{S}}(Y,U) = \tilde{S}(Y,U)$$

elde edilir. (3. 12) eşitliği gereği $\tilde{S}(Y,U)=0$ olduğundan

$$\overset{*}{\tilde{S}}(Y,U) = \tilde{S}(Y,U) = 0 \quad (4.\ 59)$$

olarak bulunur. Buradan da

$$\tilde{S}(LX,Y) = \frac{1}{2}\tilde{S}(X,Y) \quad (4.\ 60)$$

yazılabilir. (3. 10) ve (4. 60) eşitlikleri (4. 56) denkleminde kullanılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}(\overset{*}{\tilde{R}}\cdot\tilde{S})(Z,W;X,Y) = {} & -\tilde{S}(\tilde{R}(X,Y)Z,W) - \tilde{S}(Z,\tilde{R}(X,Y)W) - \eta(Y)\eta(Z)\tilde{S}(X,W) \\ & + g(Y,Z)\tilde{S}(X,W) + \eta(X)\eta(Z)\tilde{S}(Y,W) - g(X,Z)\tilde{S}(Y,W) - \eta(Y)\eta(W)\tilde{S}(Z,X) \\ & + g(Y,W)\tilde{S}(Z,X) + \eta(X)\eta(W)\tilde{S}(Z,Y) - g(X,W)\tilde{S}(Z,Y) \quad (4.\ 61)\end{aligned}$$

elde edilir. (4. 61) denklemi ortak parantez ile

$$\begin{aligned}(\overset{*}{\tilde{R}}\cdot\tilde{S})(Z,W;X,Y) = {} & -\tilde{S}(\tilde{R}(X,Y)Z,W) - \tilde{S}(Z,\tilde{R}(X,Y)W) + \tilde{S}(X,W)(-\eta(Y)\eta(Z) \\ & + g(Y,Z)) - \tilde{S}(Y,W)(-\eta(X)\eta(Z) + g(X,Z)) + \tilde{S}(Z,X)(-\eta(Y)\eta(W) + g(Y,W)) \\ & - \tilde{S}(Z,Y)(-\eta(X)\eta(W) + g(X,W)) \quad (4.\ 62)\end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. (4. 62) denkleminde

$F(X,Z) = -\eta(X)\eta(Z) + g(X,Z)$,

olarak tanımlayalım. Bu durumda (4. 62) denklemi

$$\begin{aligned}(\overset{*}{\tilde{R}}\cdot\tilde{S})(Z,W;X,Y) = {} & -\tilde{S}(\tilde{R}(X,Y)Z,W) - \tilde{S}(Z,\tilde{R}(X,Y)W) + \tilde{S}(X,W)F(Y,Z) \\ & - \tilde{S}(Y,W)F(X,Z) + \tilde{S}(Z,X)F(Y,W) - \tilde{S}(Z,Y)F(X,W) \quad (4.\ 63)\end{aligned}$$

biçimine dönüşür. (2. 11) denkleminde $\mathcal{T}$ yerine S alındığında

$$(\tilde{R}\cdot\tilde{S})(Z,W;X,Y) = -\tilde{S}(\tilde{R}(X,Y)Z,W)-\tilde{S}(Z,\tilde{R}(X,Y)W) \tag{4. 64}$$

bulunur. Ayrıca (2. 12) denkleminde $\mathcal{T}$ yerine S ve A yerine F alındığında

$$Q(F,\tilde{S})(Z,W;X,Y) = -\tilde{S}((X\wedge_F Y)Z,W)-\tilde{S}(Z,(X\wedge_F Y)W) \tag{4. 65}$$

yazılabilir. (4. 65) eşitliği (2 .10) denklemi yardımıyla

$$Q(F,\tilde{S})(Z,W;X,Y) = -\tilde{S}(X,W)F(Y,Z)+\tilde{S}(Y,W)F(X,Z)-\tilde{S}(Z,X)F(Y,W)$$

$$+\tilde{S}(Z,Y)F(X,W) \tag{4. 66}$$

olarak bulunur. (4. 64) ve (4. 66) eşitlikleri (4. 62) de yerine yazılırsa

$$\overset{*}{\tilde{R}}\cdot\tilde{S}=\tilde{R}\cdot\tilde{S}-Q(F,\tilde{S})$$

ve

$$\overset{*}{\tilde{R}}\cdot\tilde{S}=\tilde{R}\cdot\tilde{S}-Q(g-\eta\otimes\eta,\tilde{S})$$

elde edilir. ■

Teorem 4.2.2. (M, g) üzerinde semi-simetrik metrik koneksiyon tanımlı bir Riemann manifoldu ve U Levi-Civita koneksiyona göre bir paralel birim vektör alanı olsun. Bu taktirde

$\tilde{R}\cdot\overset{*}{\tilde{S}}=0 \Leftrightarrow$ M Levi-Civita koneksiyona göre Ricci-semisimetriktir.

İspat : (4. 49) eşitliğinde $\tilde{R}\cdot\overset{*}{\tilde{S}}=0$ alınırsa $\tilde{R}\cdot\tilde{S}=0$ bulunur. O halde M Levi-Civita koneksiyona göre Ricci-semisimetriktir. ■

Teorem 4.2.3. (M, g) üzerinde semi-simetrik metrik koneksiyon tanımlı, Levi-Civita koneksiyona göre Ricci-semisimetrik bir Riemann manifoldu ve U Levi-Civita koneksiyona göre bir paralel birim vektör alanı olsun. Eğer $\overset{*}{\tilde{R}}\cdot\tilde{S}=0$ ise M bir yarı-Einstein manifoldudur.

İspat : (4. 50) eşitliğinde $\overset{*}{\tilde{R}}\cdot\tilde{S}=0$ ve $\tilde{R}\cdot\tilde{S}=0$ alınırsa

$$Q(g-\eta\otimes\eta,\tilde{S})=0 \tag{4. 67}$$

elde edilir. Böylece $\tilde{r}$ M nin skaler eğriliği olmak üzere

$$\tilde{S}=\frac{\tilde{r}}{n-1}(g-\eta\otimes\eta)$$

elde edilir. O halde Tanım 2.1.8. gereği M bir yarı-Einstein manifoldudur. ■

Teorem 4.2.4. (M, g) üzerinde semi-simetrik metrik koneksiyon tanımlı bir Riemann manifoldu ve U Levi-Civita koneksiyona göre bir paralel birim vektör alanı olsun. Eğer $\tilde{R}\cdot\overset{*}{\tilde{S}}-\overset{*}{\tilde{R}}\cdot\tilde{S}=0$ ise M bir yarı-Einstein manifoldudur.

İspat : (4. 49) ve (4. 50) eşitlikleri yardımıyla

$$Q(g-\eta\otimes\eta,\tilde{S})=0$$

elde ederiz. Teorem 4.2.3. de yapılan işlemler tekrar edilirse M bir yarı-Einstein manifoldu olarak bulunur. ■

Yardımcı Teorem 4.2.5. (M, g) üzerinde semi-simetrik metrik koneksiyon tanımlı bir Riemann manifoldu ve U Levi-Civita koneksiyona göre bir paralel birim vektör alanı olsun. Bu taktirde

$$\overset{*}{\tilde{R}}\cdot\overset{*}{\tilde{S}}=\tilde{R}\cdot\tilde{S}-Q(g-\eta\otimes\eta,\tilde{S}) \tag{4. 68}$$

dir.

İspat : $\forall X, Y, Z, W\in\chi(M)$ olmak üzere (2. 11) denkleminde R yerine $\overset{*}{\tilde{R}}$ ve $\mathcal{T}$ yerine $\overset{*}{\tilde{S}}$ alındığında

$$(\overset{*}{\tilde{R}}\cdot\overset{*}{\tilde{S}})(Z,W;X,Y)=-\overset{*}{\tilde{S}}(\overset{*}{\tilde{R}}(X,Y)Z,W)-\overset{*}{\tilde{S}}(Z,\overset{*}{\tilde{R}}(X,Y)W) \tag{4. 69}$$

yazılabilir. (4. 69) denkleminde (3. 7) denklemi kullanıldığında

$$\begin{aligned}(\overset{*}{\tilde{R}}\cdot\overset{*}{\tilde{S}})(Z,W;X,Y)=&-\overset{*}{\tilde{S}}(\tilde{R}(X,Y)Z-\alpha(Y,Z)X+\alpha(X,Z)Y-g(Y,Z)LX+g(X,Z)LY,W)\\&-\overset{*}{\tilde{S}}(Z,\tilde{R}(X,Y)W-\alpha(Y,W)X+\alpha(X,W)Y-g(Y,W)LX+g(X,W)LY)\end{aligned}$$

bulunur. Son eşitlikte gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$(\overset{*}{\tilde{R}}\cdot\overset{*}{\tilde{S}})(Z,W;X,Y) = -[\overset{*}{\tilde{S}}(\tilde{R}(X,Y)Z,W)-\alpha(Y,Z)\overset{*}{\tilde{S}}(X,W)+\alpha(X,Z)\overset{*}{\tilde{S}}(Y,W)$$

$$-g(Y,Z)\overset{*}{\tilde{S}}(LX,W)+g(X,Z)\overset{*}{\tilde{S}}(LY,W)]-[\overset{*}{\tilde{S}}(Z,\tilde{R}(X,Y)W)-\alpha(Y,W)\overset{*}{\tilde{S}}(Z,X)$$

$$+\alpha(X,W)\overset{*}{\tilde{S}}(Z,Y)-g(Y,W)\overset{*}{\tilde{S}}(Z,LX)+g(X,W)\overset{*}{\tilde{S}}(Z,LY)] \qquad (4.70)$$

elde edilir. (4. 70) denkleminde (3. 14) eşitliği kullanılırsa

$$(\overset{*}{\tilde{R}}\cdot\overset{*}{\tilde{S}})(Z,W;X,Y)=-[\tilde{S}(\tilde{R}(X,Y)Z,W)+(2-n)g(R(X,Y)Z,W)+(n-2)\eta(\tilde{R}(X,Y)Z)\eta(W)$$

$$-\alpha(Y,Z)[\tilde{S}(X,W)+(2-n)g(X,W)+(n-2)\eta(X)\eta(W)]\ +\alpha(X,Z)[\tilde{S}(Y,W)$$

$$+(2-n)g(Y,W)+(n-2)\eta(Y)\eta(W)]-g(Y,Z)[\tilde{S}(LX,W)+(2-n)g(LX,W)$$

$$+(n-2)\eta(LX)\eta(W)]+g(X,Z)[\tilde{S}(LY,W)+(2-n)g(LY,W)+(n-2)\eta(LY)\eta(W)]]$$

$$-[\tilde{S}(Z,\tilde{R}(X,Y)W)+(2-n)g(Z,R(X,Y)W)+(n-2)\eta(\tilde{R}(X,Y)W)\eta(Z)$$

$$-\alpha(Y,W)[\tilde{S}(Z,X)+(2-n)g(Z,X)+(n-2)\eta(X)\eta(Z)]\ +\alpha(X,W)[\tilde{S}(Z,Y)$$

$$+(2-n)g(Z,Y)+(n-2)\eta(Z)\eta(Y)]-g(Y,W)[\tilde{S}(Z,LX)+(2-n)g(Z,LX)$$

$$+(n-2)\eta(LX)\eta(Z)]+g(X,W)[\tilde{S}(Z,LY)+(2-n)g(Z,LY)+(n-2)\eta(LY)\eta(Z)]] \qquad (4.71)$$

elde edilir. Ayrıca (2. 2), (3. 4) ve (3. 12) eşitlikleri yardımıyla

$$\eta(\tilde{R}(X,Y)Z)=0 \text{ ve } \eta(\tilde{R}(X,Y)W)=0 \qquad (4.72)$$

bulunur. (4. 72) eşitliği (4. 71) de yerine yazılır ve (3. 9) eşitliği kullanılıp gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$(\overset{*}{\tilde{R}}\cdot\overset{*}{\tilde{S}})(Z,W;X,Y) = -\tilde{S}(\tilde{R}(X,Y)Z,W)-\tilde{S}(Z,\tilde{R}(X,Y)W)$$

$$+\alpha(Y,Z)\tilde{S}(X,W)+(n-2)\alpha(Y,Z)\eta(X)\eta(W)$$

$$-\alpha(X,Z)\tilde{S}(Y,W)-(n-2)\alpha(X,Z)\eta(Y)\eta(W)$$

$$+g(Y,Z)\tilde{S}(LX,W)+(n-2)g(Y,Z)\eta(LX)\eta(W)$$

$$-g(X,Z)\tilde{S}(LY,W)-(n-2)g(X,Z)\eta(LY)\eta(W)$$

$$+\alpha(Y,W)\tilde{S}(Z,X)+(n-2)\alpha(Y,W)\eta(X)\eta(Z)$$

$$-\alpha(X,W)\tilde{S}(Z,Y)-(n-2)\alpha(X,W)\eta(Y)\eta(Z)$$

$$+g(Y,W)\tilde{S}(Z,LX))+(n-2)g(Y,W)\eta(LX)\eta(Z)$$

$$-g(X,W)\tilde{S}(Z,LY)-(n-2)g(X,W)\eta(LY)\eta(Z) \qquad (4.73)$$

elde edilir. (4. 73) eşitliğinde (3. 10), (4. 58) ve (4. 60) eşitlikleri yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa ;

$$(\overset{*}{\tilde{R}}\cdot\overset{*}{\tilde{S}})(Z,W;X,Y) = -\tilde{S}(\tilde{R}(X,Y)Z,W)-\tilde{S}(Z,\ \tilde{R}(X,Y)W)-\eta(Y)\eta(Z)\tilde{S}(X,W)$$

$$+g(Y,Z)\tilde{S}(X,W)+\eta(X)\eta(Z)\tilde{S}(Y,W)-g(X,Z)\tilde{S}(Y,W)-\eta(Y)\eta(W)\tilde{S}(Z,X)$$

$$+g(Y,W)\tilde{S}(Z,X)+\eta(X)\eta(W)\tilde{S}(Z,Y)-g(X,W)\tilde{S}(Z,Y) \qquad (4.\ 74)$$

bulunur. (4. 74) de ki işlemler Yardımcı Teorem 4.2.1. in ispatına benzer şekilde devam ettirilirse

$$\overset{*}{\tilde{R}}\cdot\overset{*}{\tilde{S}}=\tilde{R}\cdot\tilde{S}-Q(F,\ \tilde{S}) \qquad (4.\ 75)$$

ve

$$\overset{*}{\tilde{R}}\cdot\overset{*}{\tilde{S}}=\tilde{R}\cdot\tilde{S}-Q(g-\eta\otimes\eta,\tilde{S})$$

bulunur. ■

Teorem 4.2.6. (M, g) üzerinde semi-simetrik metrik koneksiyon tanımlı bir Riemann manifoldu ve U Levi-Civita koneksiyona göre bir paralel birim vektör alanı olsun. Eğer $\overset{*}{\tilde{R}}\cdot\overset{*}{\tilde{S}}=0$ ve $\tilde{R}\cdot\tilde{S}=0$ ise M bir yarı-Einstein manifolddur.

İspat : (4. 68) eşitliğinde $\overset{*}{\tilde{R}}\cdot\overset{*}{\tilde{S}}=0$ ve $\tilde{R}\cdot\tilde{S}=0$ olarak alınırsa

$$Q(g-\eta\otimes\eta,\tilde{S})_{hklm}=0 \qquad (4.\ 76)$$

bulunur. Teorem 4.2.3. de yapılan işlemler tekrar edilirse M bir yarı-Einstein manifold olarak bulunur. ■

Teorem 4.2.7. (M, g) üzerinde semi-simetrik metrik koneksiyon tanımlı bir yarı-Einstein Riemann manifoldu ve U Levi-Civita koneksiyona göre bir paralel birim vektör alanı olsun. Eğer $\overset{*}{\tilde{R}}\cdot\tilde{C}=0$ ise M Ricci-semisimetriktir.

İspat : $\forall X_h, X_i, X_j, X_k, X_l, X_m \in\chi(M)$ olmak üzere (2. 11) denkleminde R yerine $\overset{*}{\tilde{R}}$ ve $\mathcal{T}$ yerine $\tilde{C}$ alındığında

$$(\overset{*}{\tilde{R}}\cdot\tilde{C})(X_h, X_i, X_j, X_k;X_l, X_m) = -\tilde{C}(\overset{*}{\tilde{R}}(X_l,X_m)X_h,X_i,X_j,X_k)$$

$$-\tilde{C}(X_h,\ \overset{*}{\tilde{R}}(X_l, X_m)X_i,X_j,X_k)$$

$$-\tilde{C}(X_h,X_i,\ \overset{*}{\tilde{R}}(X_l,X_m)X_j,X_k)$$

$$-\tilde{C}(X_h,X_i,X_j,\ \overset{*}{\tilde{R}}(X_l,X_m)X_k) \qquad (4.\ 77)$$

olarak yazılabilir. (4. 77) denkleminde (3. 7) denklemi ve sonrasında (2. 9) denklemi kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
(\overset{*}{\tilde{R}} \cdot \tilde{C})(X_h, X_i, X_j, X_k; X_l, X_m) = & -\tilde{R}(\tilde{R}(X_l,X_m)X_h,X_i,X_j,X_k) \\
& + \frac{1}{n-2}[\tilde{S}(X_i,X_j)g(\tilde{R}(X_l,X_m)X_h,X_k) - \tilde{S}(\tilde{R}(X_l,X_m)X_h,X_j)g(X_i,X_k) \\
& + \tilde{S}(\tilde{R}(X_l,X_m)X_h,X_k)g(X_i,X_j) - \tilde{S}(X_i,X_k)g(\tilde{R}(X_l,X_m)X_h,X_j)] \\
& - \frac{\tilde{r}}{(n-1)(n-2)}[g(X_i,X_j)g(\tilde{R}(X_l,X_m)X_h,X_k) - g(\tilde{R}(X_l,X_m)X_h,X_j)g(X_i,X_k)] \\
& + \alpha(X_m,X_h)(\tilde{R}(X_l,X_i,X_j,X_k) - \frac{1}{n-2}[\tilde{S}(X_i,X_j)g(X_l,X_k) - \tilde{S}(X_l,X_j)g(X_i,X_k) \\
& + \tilde{S}(X_l,X_k)g(X_i,X_j) - \tilde{S}(X_i,X_k)g(X_l,X_j)] + \frac{\tilde{r}}{(n-1)(n-2)}[g(X_i,X_j)g(X_l,X_k) \\
& - g(X_l,X_j)g(X_i,X_k)]) - \alpha(X_l,X_h)(\tilde{R}(X_m,X_i,X_j,X_k) - \frac{1}{n-2}[\tilde{S}(X_i,X_j)g(X_m,X_k) \\
& - \tilde{S}(X_m,X_j)g(X_i,X_k) + \tilde{S}(X_m,X_k)g(X_i,X_j) - \tilde{S}(X_i,X_k)g(X_m,X_j)] \\
& + \frac{\tilde{r}}{(n-1)(n-2)}[g(X_i,X_j)g(X_m,X_k) - g(X_m,X_j)g(X_i,X_k)]) \\
& + g(X_m,X_h)(\tilde{R}(LX_l,X_i,X_j,X_k) - \frac{1}{n-2}[\tilde{S}(X_i,X_j)g(LX_l,X_k) \\
& - \tilde{S}(LX_l,X_j)g(X_i,X_k) + \tilde{S}(LX_l,X_k)g(X_i,X_j) - \tilde{S}(X_i,X_k)g(LX_l,X_j)] \\
& + \frac{\tilde{r}}{(n-1)(n-2)}[g(X_i,X_j)g(LX_l,X_k) - g(LX_l,X_j)g(X_i,X_k)]) \\
& - g(X_l,X_h)(\tilde{R}(LX_m,X_i,X_j,X_k) - \frac{1}{n-2}[\tilde{S}(X_i,X_j)g(LX_m,X_k) - \tilde{S}(LX_m,X_j)g(X_i,X_k) \\
& + \tilde{S}(LX_m,X_k)g(X_i,X_j) - \tilde{S}(X_i,X_k)g(LX_m,X_j)] + \frac{\tilde{r}}{(n-1)(n-2)}[g(X_i,X_j)g(LX_m,X_k) \\
& - g(LX_m,X_j)g(X_i,X_k)]) \\
& - \tilde{R}(X_h, \tilde{R}(X_l,X_m)X_i,X_j,X_k) + \frac{1}{n-2}[\tilde{S}(R(X_l,X_m)X_i,X_j)g(X_h,X_k) \\
& - \tilde{S}(X_h,X_j)g(\tilde{R}(X_l,X_m)X_i,X_k) + \tilde{S}(X_h,X_k)g(\tilde{R}(X_l,X_m)X_i,X_j) \\
& - \tilde{S}(\tilde{R}(X_l,X_m)X_i,X_k)g(X_h,X_j)] - \frac{\tilde{r}}{(n-1)(n-2)}[g(\tilde{R}(X_l,X_m)X_i,X_j)g(X_h,X_k)
\end{aligned}
$$

$$- g(X_h,X_j)g(\tilde{R}(X_l,X_m)X_i,X_k)]+\alpha(X_m,X_i)(\tilde{R}(X_h,X_l,X_j,X_k)]$$

$$-\frac{1}{n-2}[\tilde{S}(X_l,X_j)g(X_h,X_k)-\tilde{S}(X_h,X_j)g(X_l,X_k)+\tilde{S}(X_h,X_k)g(X_l,X_j)-S(X_l,X_k)g(X_h,X_j)]$$

$$+\frac{\tilde{r}}{(n-1)(n-2)}[g(X_l,X_j)g(X_h,X_k)- g(X_h,X_j)g(X_l,X_k)])$$

$$-\alpha(X_l,X_i)(\tilde{R}(X_h,X_m,X_j,X_k)-\frac{1}{n-2}[\tilde{S}(X_m,X_j)g(X_h,X_k)-\tilde{S}(X_h,X_j)g(X_m,X_k)$$

$$+\tilde{S}(X_h,X_k)g(X_m,X_j)-\tilde{S}(X_m,X_k)g(X_h,X_j)]+\frac{\tilde{r}}{(n-1)(n-2)}[g(X_m,X_j)g(X_h,X_k)$$

$$- g(X_h,X_j)g(X_m,X_k)])+g(X_m,X_i)(\tilde{R}(X_h,LX_l,X_j,X_k)-\frac{1}{n-2}[\tilde{S}(LX_l,X_j)g(X_h,X_k)$$

$$-\tilde{S}(X_h,X_j)g(LX_l,X_k)+\tilde{S}(X_h,X_k)g(LX_l,X_j)-\tilde{S}(LX_l,X_k)g(X_h,X_j)]$$

$$+\frac{\tilde{r}}{(n-1)(n-2)}[g(LX_l,X_j)g(X_h,X_k)- g(X_h,X_j)g(LX_l,X_k)])$$

$$-g(X_l,X_i)(\tilde{R}(X_h,LX_m,X_j,X_k)-\frac{1}{n-2}[\tilde{S}(LX_m,X_j)g(X_h,X_k)-\tilde{S}(X_h,X_j)g(LX_m,X_k)$$

$$+\tilde{S}(X_h,X_k)g(LX_m,X_j)-\tilde{S}(LX_m,X_k)g(X_h,X_j)]+\frac{\tilde{r}}{(n-1)(n-2)}[g(LX_m,X_j)g(X_h,X_k)$$

$$-g(X_h,X_j)g(LX_m,X_k)])$$

$$-\tilde{R}(X_h,X_i,\tilde{R}(X_l,X_m)X_j,X_k)+\frac{1}{n-2}[\tilde{S}(X_i,\tilde{R}(X_l,X_m)X_j)g(X_h,X_k)$$

$$-\tilde{S}(X_h,\tilde{R}(X_l,X_m)X_j)g(X_i,X_k)+\tilde{S}(X_h,X_k)g(X_i,\tilde{R}(X_l,X_m) X_j)$$

$$-\tilde{S}(X_i,X_k)g(X_h,\tilde{R}(X_l,X_m)X_j)]-\frac{\tilde{r}}{(n-1)(n-2)}[g(X_i,\tilde{R}(X_l,X_m)X_j)g(X_h,X_k)$$

$$-g(X_h,\tilde{R}(X_l,X_m)X_j)g(X_i,X_k)]+\alpha(X_m,X_j)(\tilde{R}(X_h,X_i,X_l,X_k)$$

$$-\frac{1}{n-2}[\tilde{S}(X_i,X_l)g(X_h,X_k)-\tilde{S}(X_h,X_l)g(X_i,X_k)+\tilde{S}(X_h,X_k)g(X_i,X_l)-\tilde{S}(X_i,X_k)g(X_h,X_l)]$$

$$+\frac{\tilde{r}}{(n-1)(n-2)}[g(X_i,X_l)g(X_h,X_k)- g(X_h,X_l)g(X_i,X_k)])$$

$$-\alpha(X_l,X_j)(\tilde{R}(X_h,X_i,X_m,X_k)-\frac{1}{n-2}[\tilde{S}(X_i,X_m)g(X_h,X_k)-\tilde{S}(X_h,X_m)g(X_i,X_k)$$

$$+\tilde{S}(X_h,X_k)g(X_i,X_m)-\tilde{S}(X_i,X_k)g(X_m,X_h)]+\frac{\tilde{r}}{(n-1)(n-2)}[g(X_i,X_m)g(X_h,X_k)$$

$$-g(X_m,X_h)g(X_i,X_k)])+g(X_m,X_j)(\tilde{R}(X_h,X_i,LX_l,X_k)-\frac{1}{n-2}[\tilde{S}(X_i,LX_l)g(X_h,X_k)$$

$$-\tilde{S}(X_h,LX_l)g(X_i,X_k)+\tilde{S}(X_h,X_k)g(X_i,LX_l)-\tilde{S}(X_i,X_k)g(X_h,LX_l)]$$

$$+\frac{\tilde{r}}{(n-1)(n-2)}[g(X_i,LX_l)g(X_h,X_k)-g(X_h,LX_l)g(X_i,X_k)])$$

$$-g(X_l,X_j)(\tilde{R}(X_h,X_i,LX_m,X_k)-\frac{1}{n-2}[\tilde{S}(X_i,LX_m)g(X_h,X_k)-\tilde{S}(X_h,LX_m)g(X_i,X_k)$$

$$+\tilde{S}(X_h,X_k)g(X_i,LX_m)-\tilde{S}(X_i,X_k)g(X_h,LX_m)]+\frac{\tilde{r}}{(n-1)(n-2)}[g(X_i,LX_m)g(X_h,X_k)$$

$$-g(X_h,LX_m)g(X_i,X_k)])$$

$$-\tilde{R}(X_h,X_i,X_j,\tilde{R}(X_l,X_m)X_k)+\frac{1}{n-2}[\tilde{S}(X_i,X_j)g(X_h,\tilde{R}(X_l,X_m)X_k)$$

$$-\tilde{S}(X_h,X_j)g(X_i,\tilde{R}(X_l,X_m)X_k)+\tilde{S}(X_h,\tilde{R}(X_l,X_m)X_k)g(X_i,X_j)$$

$$-\tilde{S}(X_i,\tilde{R}(X_l,X_m)X_k)g(X_h,X_j)]-\frac{\tilde{r}}{(n-1)(n-2)}[g(X_i,X_j)g(X_h,\tilde{R}(X_l,X_m)X_k)$$

$$-g(X_h,X_j)g(X_i,\tilde{R}(X_l,X_m)X_k)]+\alpha(X_m,X_k)(\tilde{R}(X_h,X_i,X_j,X_l)$$

$$-\frac{1}{n-2}[\tilde{S}(X_i,X_j)g(X_h,X_l)-\tilde{S}(X_h,X_j)g(X_i,X_l)+\tilde{S}(X_h,X_l)g(X_i,X_j)-\tilde{S}(X_i,X_l)g(X_h,X_j)]$$

$$+\frac{\tilde{r}}{(n-1)(n-2)}[g(X_i,X_j)g(X_h,X_l)-g(X_h,X_j)g(X_i,X_l)])-\alpha(X_l,X_k)(\tilde{R}(X_h,X_i,X_j,X_m)$$

$$-\frac{1}{n-2}[\tilde{S}(X_i,X_j)g(X_m,X_h)-\tilde{S}(X_h,X_j)g(X_i,X_m)+\tilde{S}(X_h,X_m)g(X_i,X_j)$$

$$-\tilde{S}(X_i,X_m)g(X_h,X_j)]+\frac{\tilde{r}}{(n-1)(n-2)}[g(X_i,X_j)g(X_h,X_m)-g(X_h,X_j)g(X_i,X_m)])$$

$$+g(X_m,X_k)(\tilde{R}(X_h,X_i,X_j,LX_l)-\frac{1}{n-2}[\tilde{S}(X_i,X_j)g(X_h,LX_l)-\tilde{S}(X_h,X_j)g(X_i,LX_l)$$

$$+\tilde{S}(X_h,LX_l)g(X_i,X_j)-\tilde{S}(X_i,LX_l)g(X_h,X_j)]+\frac{\tilde{r}}{(n-1)(n-2)}[g(X_i,X_j)g(X_h,LX_l)$$

$$-g(X_h,X_j)g(X_i,LX_l)])-g(X_l,X_k)(\tilde{R}(X_h,X_i,X_j,LX_m)-\frac{1}{n-2}[\tilde{S}(X_i,X_j)g(X_h,LX_m)$$

$$-\tilde{S}(X_h,X_j)g(X_i,LX_m)+\tilde{S}(X_h,LX_m)g(X_i,X_j)-\tilde{S}(X_i,LX_m)g(X_h,X_j)]$$

$$+\frac{\tilde{r}}{(n-1)(n-2)}[g(X_i,X_j)g(X_h,LX_m)-g(X_h,X_j)g(X_i,LX_m)]) \qquad (4.78)$$

bulunur. Ayrıca (2. 2), (3. 10) ve (4. 72) denklemleri kullanılarak

$$\tilde{R}(LX_l,X_i,X_j,X_k)=\tilde{R}(X_i,X_j,X_k,LX_l)=g(\tilde{R}(X_i,X_j)X_k,LX_l)=\alpha(\tilde{R}(X_i,X_j)X_k,X_l)$$

$$=-\eta(\tilde{R}(X_i,X_j)X_k)\eta(X_l)+\frac{1}{2}\tilde{R}(X_i,X_j,X_k,X_l)=\frac{1}{2}\tilde{R}(X_i,X_j,X_k,X_l) \quad (4.\ 79)$$

elde edilir. Buradan (4. 79) eşitliğindeki sonuca benzer sonuçlar ile (2. 11) denkleminde $\mathcal{T}$ yerine $\tilde{R}$ alınarak ve (2. 12) denkleminde A yerine α ve $\mathcal{T}$ yerine $\tilde{R}$ alınarak elde edilen denklemler (4. 78) da yerine yazılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$(\overset{*}{\tilde{R}}\cdot\tilde{C})(X_h, X_i, X_j, X_k;X_l, X_m)=\left(\tilde{R}\cdot\tilde{R}\right)_{hijklm}-Q(\alpha,\tilde{R})_{hijklm}-\frac{1}{2}Q(g,\tilde{R})_{hijklm}$$

$$+\frac{1}{n-2}\big[\tilde{S}(X_i,X_j)g(\tilde{R}(X_l,X_m)X_h,X_k)-\tilde{S}(\tilde{R}(X_l,X_m)X_h,X_j)g(X_i,X_k)$$

$$+\tilde{S}(\tilde{R}(X_l,X_m)X_h,X_k)g(X_i,X_j)-\tilde{S}(X_i,X_k)g(\tilde{R}(X_l,X_m)X_h,X_j)$$

$$+\tilde{S}(\tilde{R}(X_l,X_m)X_i,X_j)g(X_h,X_k)-\tilde{S}(X_h,X_j)g(\tilde{R}(X_l,X_m)X_i,X_k)$$

$$+\tilde{S}(X_h,X_k)g(\tilde{R}(X_l,X_m)X_i,X_j)-(\tilde{R}(X_l,X_m)X_i,X_k)g(X_h,X_j)$$

$$+\tilde{S}(X_i,\tilde{R}(X_l,X_m)X_j)g(X_h,X_k)-\tilde{S}(X_h,\tilde{R}(X_l,X_m)X_j)g(X_i,X_k)$$

$$+\tilde{S}(X_h,X_k)g(X_i,\tilde{R}(X_l,X_m)X_j)-\tilde{S}(X_i,X_k)g(X_h,\tilde{R}(X_l,X_m)X_j)$$

$$+\tilde{S}(X_i,X_j)g(X_h,\tilde{R}(X_l,X_m)X_k)-\tilde{S}(X_h,X_j)g(X_i,\tilde{R}(X_l,X_m)X_k)$$

$$+\tilde{S}(X_h,\tilde{R}(X_l,X_m)X_k)g(X_i,X_j)-\tilde{S}(X_i,\tilde{R}(X_l,X_m)X_k)g(X_h,X_j)\big]$$

$$-\frac{\tilde{r}}{(n-1)(n-2)}\big[g(X_i,X_j)g(\tilde{R}(X_l,X_m)X_h,X_k)-g(\tilde{R}(X_l,X_m)X_h,X_j)g(X_i,X_k)$$

$$+g(\tilde{R}(X_l,X_m)X_i,X_j)g(X_h,X_k)-g(X_h,X_j)g(\tilde{R}(X_l,X_m)X_i,X_k)$$

$$+g(X_i,\tilde{R}(X_l,X_m)X_j)g(X_h,X_k)-g(X_h,\tilde{R}(X_l,X_m)X_j)g(X_i,X_k)$$

$$+g(X_i,X_j)g(X_h,\tilde{R}(X_l,X_m)X_k)-g(X_h,X_j)g(X_i,\tilde{R}(X_l,X_m)X_k)\big]$$

$$-\frac{1}{n-2}\big[\alpha(X_m,X_h)\tilde{S}(X_i,X_j)g(X_l,X_k)-\alpha(X_m,X_h)\tilde{S}(X_l,X_j)g(X_i,X_k)$$

$$+\alpha(X_m,X_h)\tilde{S}(X_l,X_k)g(X_i,X_j)-\alpha(X_m,X_h)\tilde{S}(X_i,X_k)g(X_l,X_j)-\alpha(X_l,X_h)\tilde{S}(X_i,X_j)g(X_m,X_k)$$

$$+\alpha(X_l,X_h)\tilde{S}(X_m,X_j)g(X_i,X_k)-\alpha(X_l,X_h)\tilde{S}(X_m,X_k)g(X_i,X_j)+\alpha(X_l,X_h)\tilde{S}(X_i,X_k)g(X_m,X_j)$$

$$+\alpha(X_m,X_i)\tilde{S}(X_l,X_j)g(X_h,X_k)-\alpha(X_m,X_i)\tilde{S}(X_h,X_j)g(X_l,X_k)+\alpha(X_m,X_i)\tilde{S}(X_h,X_k)g(X_l,X_j)$$

$$-\alpha(X_m,X_i)\tilde{S}(X_l,X_k)g(X_h,X_j)-\alpha(X_l,X_i)\tilde{S}(X_m,X_j)g(X_h,X_k)+\alpha(X_l,X_i)\tilde{S}(X_h,X_j)g(X_m,X_k)$$

$$-\alpha(X_l,X_i)\tilde{S}(X_h,X_k)g(X_m,X_j)+\alpha(X_l,X_i)\tilde{S}(X_m,X_k)g(X_h,X_j)+\alpha(X_m,X_j)\tilde{S}(X_i,X_l)g(X_h,X_k)$$

$$-\alpha(X_m,X_j)\tilde{S}(X_h,X_l)g(X_i,X_k)+\alpha(X_m,X_j)\tilde{S}(X_h,X_k)g(X_i,X_l)-\alpha(X_m,X_j)\tilde{S}(X_i,X_k)g(X_h,X_l)$$

$$-\alpha(X_l,X_j)\tilde{S}(X_i,X_m)g(X_h,X_k)+\alpha(X_l,X_j)\tilde{S}(X_h,X_m)g(X_i,X_k)-\alpha(X_l,X_j)\tilde{S}(X_h,X_k)g(X_i,X_m)$$

$$+\alpha(X_l,X_j)\tilde{S}(X_i,X_k)g(X_m,X_h)+\alpha(X_m,X_k)\tilde{S}(X_i,X_j)g(X_h,X_l)-\alpha(X_m,X_k)\tilde{S}(X_h,X_j)g(X_i,X_l)$$

$$+\alpha(X_m,X_k)\tilde{S}(X_h,X_l)g(X_i,X_j)-\alpha(X_m,X_k)\tilde{S}(X_i,X_l)g(X_h,X_j)-\alpha(X_l,X_k)\tilde{S}(X_i,X_j)g(X_m,X_h)$$

$$+\alpha(X_l,X_k)\tilde{S}(X_h,X_j)g(X_i,X_m)-\alpha(X_l,X_k)\tilde{S}(X_h,X_m)g(X_i,X_j)$$

$$+\alpha(X_l,X_k)\tilde{S}(X_i,X_m)g(X_h,X_j)\Big]$$

$$-\frac{1}{n-2}\Big[g(X_m,X_h)\tilde{S}(X_i,X_j)\alpha(X_l,X_k)-\frac{1}{2}g(X_m,X_h)\tilde{S}(X_l,X_j)g(X_i,X_k)$$

$$+\frac{1}{2}g(X_m,X_h)\tilde{S}(X_l,X_k)g(X_i,X_j)-g(X_m,X_h)\tilde{S}(X_i,X_k)\alpha(X_l,X_j)$$

$$-g(X_l,X_h)\tilde{S}(X_i,X_j)\alpha(X_m,X_k)+\frac{1}{2}g(X_l,X_h)\tilde{S}(X_m,X_j)g(X_i,X_k)$$

$$-\frac{1}{2}g(X_l,X_h)\tilde{S}(X_m,X_k)g(X_i,X_j)+g(X_l,X_h)\tilde{S}(X_i,X_k)\alpha(X_m,X_j)$$

$$+\frac{1}{2}g(X_m,X_i)\tilde{S}(X_l,X_j)g(X_h,X_k)-g(X_m,X_i)\tilde{S}(X_h,X_j)\alpha(X_l,X_k)$$

$$+g(X_m,X_i)\tilde{S}(X_h,X_k)\alpha(X_l,X_j)-\frac{1}{2}g(X_m,X_i)\tilde{S}(X_l,X_k)g(X_h,X_j)$$

$$-\frac{1}{2}g(X_l,X_i)\tilde{S}(X_m,X_j)g(X_h,X_k)+g(X_l,X_i)\tilde{S}(X_h,X_j)\alpha(X_m,X_k)$$

$$-g(X_l,X_i)\tilde{S}(X_h,X_k)\alpha(X_m,X_j)+\frac{1}{2}g(X_l,X_i)\tilde{S}(X_m,X_k)g(X_h,X_j)$$

$$+\frac{1}{2}g(X_m,X_j)\tilde{S}(X_i,X_l)g(X_h,X_k)-\frac{1}{2}g(X_m,X_j)\tilde{S}(X_h,X_l)g(X_i,X_k)$$

$$+g(X_m,X_j)\tilde{S}(X_h,X_k)\alpha(X_i,X_l)-g(X_m,X_j)\tilde{S}(X_i,X_k)\alpha(X_h,X_l)$$

$$-\frac{1}{2}g(X_l,X_j)\tilde{S}(X_i,X_m)g(X_h,X_k)+\frac{1}{2}g(X_l,X_j)\tilde{S}(X_h,X_m)g(X_i,X_k)$$

$$-g(X_l,X_j)\tilde{S}(X_h,X_k)\alpha(X_i,X_m)+g(X_l,X_j)\tilde{S}(X_i,X_k)\alpha(X_h,X_m)$$

$$+g(X_m,X_k)\tilde{S}(X_i,X_j)\alpha(X_h,X_l)-g(X_m,X_k)\tilde{S}(X_h,X_j)\alpha(X_i,X_l)$$

$$+\frac{1}{2}g(X_m,X_k)\tilde{S}(X_h,X_l)g(X_i,X_j)-\frac{1}{2}g(X_m,X_k)\tilde{S}(X_i,X_l)g(X_h,X_j)$$

$$-g(X_l,X_k)\tilde{S}(X_i,X_j)\alpha(X_h,X_m)+g(X_l,X_k)\tilde{S}(X_h,X_j)\alpha(X_i,X_m)$$

$$-\frac{1}{2}g(X_l,X_k)\tilde{S}(X_h,X_m)g(X_i,X_j)+\frac{1}{2}g(X_l,X_k)\tilde{S}(X_i,X_m)g(X_h,X_j)\Big]$$

$$+\frac{\tilde{r}}{(n-1)(n-2)}\Big[\alpha(X_m,X_h)\,g(X_i,X_j)g(X_l,X_k)-\alpha(X_m,X_h)g(X_l,X_j)g(X_i,X_k)$$

$$-\alpha(X_l,X_h)g(X_i,X_j)g(X_m,X_k)+\alpha(X_l,X_h)g(X_m,X_j)g(X_i,X_k)+\alpha(X_m,X_i)g(X_l,X_j)g(X_h,X_k)$$

$$-\alpha(X_m,X_i)g(X_h,X_j)g(X_l,X_k)-\alpha(X_l,X_i)g(X_m,X_j)g(X_h,X_k)+\alpha(X_l,X_i)g(X_h,X_j)g(X_m,X_k)$$

$$+\alpha(X_m,X_j)g(X_i,X_l)g(X_h,X_k)-\alpha(X_m,X_j)g(X_h,X_l)g(X_i,X_k)-\alpha(X_l,X_j)\,g(X_i,X_m)g(X_h,X_k)$$

$$+\alpha(X_l,X_j)g(X_m,X_h)g(X_i,X_k)+\alpha(X_m,X_k)g(X_i,X_j)g(X_h,X_l)-\alpha(X_m,X_k)g(X_h,X_j)g(X_i,X_l)$$

$$-\alpha(X_l,X_k)g(X_i,X_j)g(X_h,X_m)+\alpha(X_l,X_k)g(X_h,X_j)g(X_i,X_m)\Big]$$

$$+\frac{\tilde{r}}{(n-1)(n-2)}[g(X_m,X_h)g(X_i,X_j)\alpha(X_l,X_k)-g(X_m,X_h)\alpha(X_l,X_j)g(X_i,X_k)$$

$$-g(X_l,X_h)g(X_i,X_j)\alpha(X_m,X_k)+g(X_l,X_h)\alpha(X_m,X_j)g(X_i,X_k)+g(X_m,X_i)\alpha(X_l,X_j)g(X_h,X_k)$$

$$-g(X_m,X_i)g(X_h,X_j)\alpha(X_l,X_k)-g(X_l,X_i)\alpha(X_m,X_j)g(X_h,X_k)+g(X_l,X_i)g(X_h,X_j)\,\alpha(X_m,X_k)$$

$$+g(X_m,X_j)\alpha(X_i,X_l)g(X_h,X_k)-g(X_m,X_j)\alpha(X_h,X_l)g(X_i,X_k)-g(X_l,X_j)\alpha(X_i,X_m)g(X_h,X_k)$$

$$+g(X_l,X_j)\alpha(X_h,X_m)g(X_i,X_k)+g(X_m,X_k)g(X_i,X_j)\alpha(X_h,X_l)-g(X_m,X_k)g(X_h,X_j)\alpha(X_i,X_l)$$

$$-g(X_l,X_k)g(X_i,X_j)\alpha(X_h,X_m)+g(X_l,X_k)g(X_h,X_j)\alpha(X_i,X_m)] \qquad (4.80)$$

elde edilir. Diğer taraftan M yarı-Einstein Riemann manifoldu olduğundan

$$\tilde{S}(X_i,X_j)g(\tilde{R}(X_l,X_m)X_h,X_k)-\tilde{S}(\tilde{R}(X_l,X_m)X_h,X_j)g(X_i,X_k)$$

$$+\tilde{S}(\tilde{R}(X_l,X_m)X_h,X_k)g(X_i,X_j)-\tilde{S}(X_i,X_k)g(\tilde{R}(X_l,X_m)X_h,X_j)$$

$$+\tilde{S}(\tilde{R}(X_l,X_m)X_i,X_j)g(X_h,X_k)-\tilde{S}(X_h,X_j)g(\tilde{R}(X_l,X_m)X_i,X_k)$$

$$+\tilde{S}(X_h,X_k)g(\tilde{R}(X_l,X_m)X_i,X_j)-(\tilde{R}(X_l,X_m)X_i,X_k)g(X_h,X_j)$$

$$+\tilde{S}(X_i,\tilde{R}(X_l,X_m)X_j)g(X_h,X_k)-\tilde{S}(X_h,\tilde{R}(X_l,X_m)X_j)g(X_i,X_k)$$

$$+\tilde{S}(X_h,X_k)g(X_i,\tilde{R}(X_l,X_m)X_j)-\tilde{S}(X_i,X_k)g(X_h,\tilde{R}(X_l,X_m)X_j)$$

$$+\tilde{S}(X_i,X_j)g(X_h,\tilde{R}(X_l,X_m)X_k)-\tilde{S}(X_h,X_j)g(X_i,\tilde{R}(X_l,X_m)X_k)$$

$$+\tilde{S}(X_h,\tilde{R}(X_l,X_m)X_k)g(X_i,X_j)-\tilde{S}(X_i,\tilde{R}(X_l,X_m)X_k)g(X_h,X_j)=0 \qquad (4.81)$$

dır. O halde (4. 80) denkleminde (2. 2), (4. 81) eşitlikleri kullanılır ayrıca $\overset{*}{\tilde{R}}\cdot\tilde{C}=0$ alınır ve kontraksiyon yapılarak düzenlenirse

$$0=\left(\tilde{R}\cdot\tilde{S}\right)_{hklm}-Q(\alpha,\tilde{S})_{hklm}-\frac{1}{2}Q(g,\tilde{S})_{hklm}-\frac{1}{n-2}\Big[(n-2)\big(\alpha(X_m,X_h)\tilde{S}(X_l,X_k)$$

$$-\alpha(X_l,X_h)\tilde{S}(X_m,X_k)+\alpha(X_m,X_k)\tilde{S}(X_h,X_l)-\alpha(X_l,X_k)\tilde{S}(X_h,X_m)\big)$$

$$+\left(\frac{n-2}{2}\right)\big(g(X_m,X_h)\tilde{S}(X_l,X_k)-g(X_l,X_h)\tilde{S}(X_m,X_k)+g(X_m,X_k)\tilde{S}(X_h,X_l)$$

$$-g(X_l,X_k)\tilde{S}(X_h,X_m)\big)\Big] \tag{4. 82}$$

elde edilir. (2. 12) denkleminde ilk önce A yerine α ve $\mathcal{T}$ yerine $\tilde{S}$ sonra A yerine α ve $\mathcal{T}$ yerine g alındığında

$$Q(\alpha,\tilde{S})(X_h,X_k;X_l,X_m)=-\tilde{S}((X_l\wedge_\alpha X_m)X_h,X_k)-\tilde{S}(X_h,(X_l\wedge_\alpha X_m)X_k) \tag{4. 83}$$

$$Q(g,\tilde{S})(X_h,X_k;X_l,X_m)=-\tilde{S}((X_l\wedge_g X_m)X_h,X_k)-\tilde{S}(X_h,(X_l\wedge_g X_m)X_k) \tag{4. 84}$$

yazılabilir. O halde (4. 83) ve (4. 84) eşitlikleri (2. 10) denklemi yardımıyla

$$Q(\alpha,\tilde{S})(X_h,X_k;X_l,X_m)=-(\alpha(X_m,X_h)\tilde{S}(X_l,X_k)-\alpha(X_l,X_h)\tilde{S}(X_m,X_k)$$

$$+\alpha(X_m,X_k)\tilde{S}(X_h,X_l)-\alpha(X_l,X_k)\tilde{S}(X_h,X_m)) \tag{4. 85}$$

$$Q(g,\tilde{S})(X_h,X_k;X_l,X_m)=-(g(X_m,X_h)\tilde{S}(X_l,X_k)-g(X_l,X_h)\tilde{S}(X_m,X_k)$$

$$+g(X_m,X_k)\tilde{S}(X_h,X_l)-g(X_l,X_k)\tilde{S}(X_h,X_m)) \tag{4. 86}$$

biçimine dönüşür. (4. 85) ve (4. 86) eşitlikleri (4. 82) de yerine yazılırsa

$$0=\tilde{R}\cdot\tilde{S}-Q(\alpha,\tilde{S})-\frac{1}{2}Q(g,\tilde{S})+Q(\alpha,\tilde{S})+\frac{1}{2}Q(g,\tilde{S})$$

ve

$$\tilde{R}\cdot\tilde{S}=0$$

elde edilir. O halde (2. 20) denklemi gereği M Ricci-semisimetriktir. ■

4.3 Üzerinde [18] Anlamında Semi-Simetrik Metrik Olmayan Koneksiyon Tanımlı Olan Bir Riemann Manifoldunun Sağladığı Bazı Semi-Simetri Şartları

Bu bölümde üzerinde [18] anlamında semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon tanımlı olan bir Riemann manifoldu için U ile E Levi-Civita koneksiyona göre bir paralel birim vektör alanları olmak üzere $\tilde{R}\cdot\overset{*}{\tilde{R}}=0$, $\overset{*}{\tilde{R}}\cdot\tilde{R}=0$ ve $\tilde{R}\cdot\overset{*}{\tilde{R}}-\overset{*}{\tilde{R}}\cdot\tilde{R}=0$ eğrilik şartlarının sağlanması durumunda manifold için bazı karekterizasyonlar elde edilmiştir.

Önerme 4.3.1. (M, g), üzerinde [18] anlamında semi-simetrik metrik olmayan bir koneksiyon tanımlı olan bir Riemann manifoldu ve U ile E Levi-Civita koneksiyona göre paralel birim vektör alanları olsunlar. O halde α, (0, 2)-tensör alanı olmak üzere

$$\alpha(X,Y)=-\omega(X)\omega(Y) \tag{4. 87}$$

dir.

İspat : $\forall X, Y\in\chi(M)$ ve $U\in\chi(M)$ olmak üzere (3. 36) ve (3. 31) denklemleri kullanılırsa (4. 87) eşitliği elde edilir. ■

(2. 1) eşitliğinde Z yerine U alınırsa

$$\tilde{R}(X,Y)U=0$$

ve Z yerine E alınırsa

$$\tilde{R}(X,Y)E=0 \tag{4. 88}$$

elde edilir. Ayrıca (3. 37) eşitliğinde Y yerine E alınarak (3. 32) eşitliği kullanılırsa

$$\lambda(X,E)=\omega(E)X-\eta(X)U+\eta(X)E \tag{4. 89}$$

ve Y yerine U alınarak (3. 31) eşitliği kullanılırsa

$$\lambda(X,U)=X-\omega(X)U+\omega(X)E \tag{4. 90}$$

bulunur. Buradan (4. 89) ve (4. 90) eşitlikleri (3. 35) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\overset{*}{\tilde{R}}(X,Y)Z=\tilde{R}(X,Y)Z-\alpha(Y,Z)X+\alpha(X,Z)Y\\ +g(Y,Z)\{\omega(E)X-\eta(X)U+\eta(X)E-X+\omega(X)U-\omega(X)E\}\\ -g(X,Z)\{\omega(E)Y-\eta(Y)U+\eta(Y)E-Y+\omega(Y)U-\omega(Y)E\}\end{aligned} \tag{4. 91}$$

elde edilir.

Yardımcı Teorem 4.3.2. (M, g), üzerinde [18] anlamında semi-simetrik metrik olmayan bir koneksiyon tanımlı olan bir Riemann manifoldu ve U ile E Levi-Civita koneksiyona göre paralel birim vektör alanları olsun. Bu taktirde

$$\tilde{R}\cdot\overset{*}{\tilde{R}}=\tilde{R}\cdot\tilde{R} \qquad (4.\ 92)$$

ve

$$\overset{*}{\tilde{R}}\cdot\tilde{R}=\tilde{R}\cdot\tilde{R}-Q(g-\omega\otimes\omega-\omega(E)g,\tilde{R}) \qquad (4.\ 93)$$

dir.

İspat : $\forall X_h, X_i, X_j, X_k, X_l, X_m \in\chi(M)$ ve $U, E\in\chi(M)$ olmak üzere (2. 11) denkleminde $\mathcal{T}$ yerine $\overset{*}{\tilde{R}}$ alındığında

$$\begin{aligned}(\tilde{R}\cdot\overset{*}{\tilde{R}})(X_h,X_i,X_j,X_k;X_l,X_m) = &-\overset{*}{\tilde{R}}(\tilde{R}(X_l,X_m)X_h,X_i,X_j,X_k)\\ &-\overset{*}{\tilde{R}}(X_h,\tilde{R}(X_l,X_m)X_i,X_j,X_k)\\ &-\overset{*}{\tilde{R}}(X_h,X_i,\tilde{R}(X_l,X_m)X_j,X_k)\\ &-\overset{*}{\tilde{R}}(X_h,X_i,X_j,\tilde{R}(X_l,X_m)X_k) \qquad (4.\ 94)\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan (4. 94) denkleminde (4. 91) eşitliği kullanıldığında

$$\begin{aligned}(\tilde{R}\cdot\overset{*}{\tilde{R}})(X_h, X_i, X_j, X_k;X_l, X_m) =&-\tilde{R}(\tilde{R}(X_l,X_m)X_h,X_i,X_j,X_k)\\ &+\alpha(X_i,X_j)g(\tilde{R}(X_l,X_m)X_h,X_k)-\alpha(\tilde{R}(X_l,X_m)X_h,X_j)g(X_i,X_k)\\ &-g(X_i,X_j)g(\omega(E)\tilde{R}(X_l,X_m)X_h-\eta(\tilde{R}(X_l,X_m)X_h)U+\eta(\tilde{R}(X_l,X_m)X_h)E\\ &-\tilde{R}(X_l,X_m)X_h+\omega(R(X_l,X_m)X_h)U-\omega(\tilde{R}(X_l,X_m)X_h)E, X_k)\\ &+g(\tilde{R}(X_l,X_m)X_h,X_j)g(\omega(E)X_i-\eta(X_i)U+\eta(X_i)E-X_i+\omega(X_i)U-\omega(X_i)E, X_k)\\ &-\tilde{R}(X_h,\tilde{R}(X_l,X_m)X_i,X_j,X_k)+\alpha(\tilde{R}(X_l,X_m)X_i,X_j)g(X_h,X_k)\\ &-\alpha(X_h,X_j)g(\tilde{R}(X_l,X_m)X_i, X_k)-g(\tilde{R}(X_l,X_m)X_i, X_j)g(\omega(E)X_h-\eta(X_h)U\\ &+\eta(X_h)E-X_h+\omega(X_h)U-\omega(X_h)E,X_k)+g(X_h,X_j)g(\omega(E)\tilde{R}(X_l,X_m)X_i\\ &-\eta(\tilde{R}(X_l,X_m)X_i)U+\eta(\tilde{R}(X_l,X_m)X_i)E-\tilde{R}(X_l,X_m)X_i+\omega(\tilde{R}(X_l,X_m)X_i)U\\ &-\omega(\tilde{R}(X_l,X_m)X_i)E, X_k)\\ &-\tilde{R}(X_h,X_i,\tilde{R}(X_l,X_m)X_j,X_k)+\alpha(X_i,\tilde{R}(X_l,X_m)X_j)g(X_h,X_k)\\ &-\alpha(X_h,\tilde{R}(X_l,X_m)X_j)g(X_i,X_k)-g(X_i,\tilde{R}(X_l,X_m)X_j)g(\omega(E)X_h-\eta(X_h)U+\eta(X_h)E\\ &-X_h+\omega(X_h)U-\omega(X_h)E, X_k)+g(X_h, \tilde{R}(X_l,X_m)X_j)g(\omega(E)X_i-\eta(X_i)U+\eta(X_i)E\\ &-X_i+\omega(X_i)U-\omega(X_i)E, X_k)\end{aligned}$$

$$-\tilde{R}(X_h,X_i,X_j,\tilde{R}(X_l,X_m)X_k)+\alpha(X_i,X_j)g(X_h,\tilde{R}(X_l,X_m)X_k)$$
$$-\alpha(X_h,X_j)g(X_i,\tilde{R}(X_l,X_m)X_k)-g(X_i,X_j)g(\omega(E)X_h-\eta(X_h)U+\eta(X_h)E-X_h+\omega(X_h)U$$
$$-\omega(X_h)E,\tilde{R}(X_l,X_m)X_k)+g(X_h,X_j)g(\omega(E)X_i-\eta(X_i)U+\eta(X_i)E-X_i+\omega(X_i)U$$
$$-\omega(X_i)E,\tilde{R}(X_l,X_m)X_k) \qquad (4.\ 95)$$

bulunur. (4. 87), (4. 88) denklemleri gereği $\forall$ X, Y, Z, W$\in \chi$(M) için

$$\alpha(X,\tilde{R}(Y,Z)W)=0 \qquad (4.\ 96)$$

olduğundan (4. 95) denkleminde (2. 2), (3. 31), (3. 32) ve (4. 96) eşitlikleri kullanılır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa;

$$\tilde{R}\cdot\overset{*}{\tilde{R}}=\tilde{R}\cdot\tilde{R}$$

elde edilir. Diğer taraftan (2. 11) denkleminde R yerine $\overset{*}{\tilde{R}}$ ve $\mathcal{T}$ yerine $\tilde{R}$ alınırsa

$$(\overset{*}{\tilde{R}}\cdot\tilde{R})(X_h,X_i,X_j,X_k;X_l,X_m)=-\tilde{R}(\overset{*}{\tilde{R}}(X_l,X_m)X_h,X_i,X_j,X_k)$$
$$-\tilde{R}(X_h,\overset{*}{\tilde{R}}(X_l,X_m)X_i,X_j,X_k)$$
$$-\tilde{R}(X_h,X_i,\overset{*}{\tilde{R}}(X_l,X_m)X_j,X_k)$$
$$-\tilde{R}(X_h,X_i,X_j,\overset{*}{\tilde{R}}(X_l,X_m)X_k) \qquad (4.\ 97)$$

elde edilir. (4. 97) denkleminde (4. 91) eşitliği kullanıldığında

$$(\overset{*}{\tilde{R}}\cdot\tilde{R})(X_h,X_i,X_j,X_k;X_l,X_m)=-\tilde{R}(\tilde{R}(X_l,X_m)X_h,X_i,X_j,X_k)+\alpha(X_m,X_h)\tilde{R}(X_l,X_i,X_j,X_k)$$
$$-\alpha(X_l,X_h)\tilde{R}(X_m,X_i,X_j,X_k)-g(X_m,X_h)\omega(E)\tilde{R}(X_l,X_i,X_j,X_k)$$
$$+g(X_m,X_h)\eta(X_l)\tilde{R}(U,X_i,X_j,X_k)-g(X_m,X_h)\eta(X_l)\tilde{R}(E,X_i,X_j,X_k)$$
$$+g(X_m,X_h)\tilde{R}(X_l,X_i,X_j,X_k)-g(X_m,X_h)\omega(X_l)\tilde{R}(U,X_i,X_j,X_k)$$
$$+g(X_m,X_h)\omega(X_l)\tilde{R}(E,X_i,X_j,X_k)+g(X_l,X_h)\omega(E)\tilde{R}(X_m,X_i,X_j,X_k)$$
$$-g(X_l,X_h)\eta(X_m)\tilde{R}(U,X_i,X_j,X_k)+g(X_l,X_h)\eta(X_m)\tilde{R}(E,X_i,X_j,X_k)$$
$$-g(X_l,X_h)\tilde{R}(X_m,X_i,X_j,X_k)+g(X_l,X_h)\omega(X_m)\tilde{R}(U,X_i,X_j,X_k)$$
$$-g(X_l,X_h)\omega(X_m)\tilde{R}(E,X_iX_j,X_k)$$
$$-\tilde{R}(X_h,\tilde{R}(X_l,X_m)X_i,X_j,X_k)+\alpha(X_m,X_i)\tilde{R}(X_h,X_l,X_j,X_k)-\alpha(X_l,X_i)\tilde{R}(X_h,X_m,X_j,X_k)$$
$$-g(X_m,X_i)\omega(E)\tilde{R}(X_h,X_l,X_j,X_k)+g(X_m,X_i)\eta(X_l)\tilde{R}(X_h,U,X_j,X_k)$$
$$-g(X_m,X_i)\eta(X_l)\tilde{R}(X_h,E,X_j,X_k)+g(X_m,X_i)\tilde{R}(X_h,X_l,X_j,X_k)$$

$-g(X_m,X_i)\omega(X_l)\tilde{R}(X_h,U,X_j,X_k)+g(X_m,X_i)\omega(X_l)\tilde{R}(X_h,E,X_j,X_k)$

$+g(X_l,X_i)\omega(E)\tilde{R}(X_h,X_m,X_j,X_k)-g(X_l,X_i)\eta(X_m)\tilde{R}(X_h,U,X_j,X_k)$

$+g(X_l,X_i)\eta(X_m)\tilde{R}(X_h,E,X_j,X_k)-g(X_l,X_i)\tilde{R}(X_h,X_m,X_j,X_k)$

$+g(X_l,X_i)\omega(X_m)\tilde{R}(X_h,U,X_j,X_k)-g(X_l,X_i)\omega(X_m)\tilde{R}(X_h,E,X_j,X_k)$

$-\tilde{R}(X_h,X_i,\tilde{R}(X_l,X_m)X_j,X_k)+\alpha(X_m,X_j)\tilde{R}(X_h,X_i,X_l,X_k)-\alpha(X_l,X_j)\tilde{R}(X_h,X_i,X_m,X_k)$

$-g(X_m,X_j)\omega(E)\tilde{R}(X_h,X_i,X_l,X_k)+g(X_m,X_j)\eta(X_l)\tilde{R}(X_h,X_i,U,X_k)$

$-g(X_m,X_j)\eta(X_l)\tilde{R}(X_h,X_i,E,X_k)+g(X_m,X_j)\tilde{R}(X_h,X_i,X_l,X_k)$

$-g(X_m,X_j)\omega(X_l)\tilde{R}(X_h,X_i,U,X_k)+g(X_m,X_j)\omega(X_l)\tilde{R}(X_h,X_i,E,X_k)$

$+g(X_l,X_j)\omega(E)\tilde{R}(X_h,X_i,X_m,X_k)-g(X_l,X_j)\eta(X_m)\tilde{R}(X_h,X_i,U,X_k)$

$+g(X_l,X_j)\eta(X_m)\tilde{R}(X_h,X_i,E,X_k)-g(X_l,X_j)\tilde{R}(X_h,X_i,X_m,X_k)$

$+g(X_l,X_j)\omega(X_m)\tilde{R}(X_h,X_i,U,X_k)-g(X_l,X_j)\omega(X_m)\tilde{R}(X_h,X_i,E,X_k)$

$-\tilde{R}(X_h,X_i,X_j,\tilde{R}(X_l,X_m)X_k)+\alpha(X_m,X_k)\tilde{R}(X_h,X_i,X_j,X_l)-\alpha(X_l,X_k)\tilde{R}(X_h,X_i,X_j,X_m)$

$-g(X_m,X_k)\omega(E)\tilde{R}(X_h,X_i,X_j,X_l)+g(X_m,X_k)\eta(X_l)\tilde{R}(X_h,X_i,X_j,U)$

$-g(X_m,X_k)\eta(X_l)\tilde{R}(X_h,X_i,X_j,E)+g(X_m,X_k)\tilde{R}(X_h,X_i,X_j,X_l)$

$-g(X_m,X_k)\omega(X_l)\tilde{R}(X_h,X_i,X_j,U)+g(X_m,X_k)\omega(X_l)\tilde{R}(X_h,X_i,X_j,E)$

$+g(X_l,X_k)\omega(E)\tilde{R}(X_h,X_i,X_j,X_m)-g(X_l,X_k)\eta(X_m)\tilde{R}(X_h,X_i,X_j,U)$

$+g(X_l,X_k)\eta(X_m)\tilde{R}(X_h,X_i,X_j,E)-g(X_l,X_k)\tilde{R}(X_h,X_i,X_j,X_m)$

$$+g(X_l,X_k)\omega(X_m)\tilde{R}(X_h,X_i,X_j,U)-g(X_l,X_k)\omega(X_m)\tilde{R}(X_h,X_i,X_j,E) \qquad (4.\ 98)$$

elde edilir. (4. 98) eşitliğinde (4. 88) eşitliği kullanılarak sadeleştirme yapılırsa

$(\overset{*}{\tilde{R}}\cdot\tilde{R})(X_h,X_i,X_j,X_k;X_l,X_m)=-\tilde{R}(\tilde{R}(X_l,X_m)X_h,X_i,X_j,X_k)-\tilde{R}(X_h,\tilde{R}(X_l,X_m)X_i,X_j,X_k)$

$-\tilde{R}(X_h,X_i,\tilde{R}(X_l,X_m)X_j,X_k)-\tilde{R}(X_h,X_i,X_j,R(X_l,X_m)X_k)+\alpha(X_m,X_h)\tilde{R}(X_l,X_i,X_j,X_k)$

$-\alpha(X_l,X_h)\tilde{R}(X_m,X_i,X_j,X_k)+\alpha(X_m,X_i)\tilde{R}(X_h,X_l,X_j,X_k)-\alpha(X_l,X_i)\tilde{R}(X_h,X_m,X_j,X_k)$

$+\alpha(X_m,X_j)\tilde{R}(X_h,X_i,X_l,X_k)-\alpha(X_l,X_j)\tilde{R}(X_h,X_i,X_m,X_k)+\alpha(X_m,X_k)\tilde{R}(X_h,X_i,X_j,X_l)$

$-\alpha(X_l,X_k)\tilde{R}(X_h,X_i,X_j,X_m)+g(X_m,X_h)\tilde{R}(X_l,X_i,X_j,X_k)-g(X_l,X_h)\tilde{R}(X_m,X_i,X_j,X_k)$

$+g(X_m,X_i)\tilde{R}(X_h,X_l,X_j,X_k)-g(X_l,X_i)\tilde{R}(X_h,X_m,X_j,X_k)+g(X_m,X_j)\tilde{R}(X_h,X_i,X_l,X_k)$

$-g(X_l,X_j)\tilde{R}(X_h,X_i,X_m,X_k)+g(X_m,X_k)\tilde{R}(X_h,X_i,X_j,X_l)-g(X_l,X_k)\tilde{R}(X_h,X_i,X_j,X_m)$

$-g(X_m,X_h)\omega(E)\tilde{R}(X_l,X_i,X_j,X_k)+g(X_l,X_h)\omega(E)\tilde{R}(X_m,X_i,X_j,X_k)$

$-g(X_m,X_i)\omega(E)\ \tilde{R}(X_h,X_l,X_j,X_k)+g(X_l,X_i)\omega(E)\ \tilde{R}(X_h,X_m,X_j,X_k)$

$-g(X_m,X_j)\omega(E)\ \tilde{R}(X_h,X_i,X_l,X_k)+g(X_l,X_j)\omega(E)\ \tilde{R}(X_h,X_i,X_m,X_k)$

$$-g(X_m,X_k)\omega(E)\ \tilde{R}(X_h,X_i,X_j,X_l)+g(X_l,X_k)\omega(E)\ \tilde{R}(X_h,X_i,X_j,X_m) \quad (4.\ 99)$$

bulunur. (2. 11) ve (2. 12) denklemleri kullanıldığında (4. 99) denklemi

$$\overset{*}{\tilde{R}}\cdot\tilde{R} = \tilde{R}\cdot\tilde{R} - Q(\alpha,\tilde{R}) - Q(g,\tilde{R}) + Q(\omega(E)g,\tilde{R}) \quad (4.\ 100)$$

biçimine dönüşür. Ayrıca (4. 87) denklemi yardımıyla

$$\overset{*}{\tilde{R}}\cdot\tilde{R} = \tilde{R}\cdot\tilde{R} - Q(g-\omega\otimes\omega-\omega(E)g,\tilde{R})$$

bulunur. ■

Teorem 4.3.3. (M, g), üzerinde [18] anlamında semi-simetrik metrik olmayan bir koneksiyon tanımlı olan bir Riemann manifoldu, U ve E Levi-Civita koneksiyona göre paralel birim vektör alanları olsun. Bu taktirde

$\tilde{R}\cdot\overset{*}{\tilde{R}}=0 \Leftrightarrow$ M Levi-Civita koneksiyona göre semi-simetriktir.

İspat : (4. 98) eşitliğinde $\tilde{R}\cdot\overset{*}{\tilde{R}}=0$ alınırsa $\tilde{R}\cdot\tilde{R}=0$ bulunur. O halde M Levi-Civita koneksiyona göre semi-simetriktir. ■

Teorem 4.3.4. (M, g), üzerinde [18] anlamında semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon tanımlı, Levi-Civita koneksiyona göre semi-simetrik bir Riemann manifoldu, U ve E Levi-Civita koneksiyona göre paralel birim vektör alanları olsun. Bu durumda $\overset{*}{\tilde{R}}\cdot\tilde{R}=0$ ise M bir yarı-Einstein manifoldudur.

İspat : (4. 93) eşitliğinde $\overset{*}{\tilde{R}}\cdot\tilde{R}=0$ ve $\tilde{R}\cdot\tilde{R}=0$ alınırsa

$$Q(g-\omega\otimes\omega-\omega(E)g,\tilde{R})=0 \quad (4.\ 101)$$

elde edilir. (4. 101) eşitliği uygun kontraksiyon ile

$$Q(g-\omega\otimes\omega-\omega(E)g,\tilde{S})=0$$

biçimine dönüşür. Böylece $\tilde{r}$ M nin skaler eğriliği olmak üzere

$$\tilde{S} = \frac{\tilde{r}}{n(1-\omega(E))-1}((1-\omega(E))g - \omega \otimes \omega)$$

elde edilir. O halde Tanım 2.1.8. gereği M bir yarı-Einstein manifoldudur. ■

Teorem 4.3.5. (M, g), üzerinde [18] anlamında semi-simetrik metrik olmayan bir koneksiyon tanımlı olan bir Riemann manifoldu, U ve E Levi-Civita koneksiyona göre paralel birim vektör alanları olsun. Eğer $\tilde{R} \cdot \overset{*}{\tilde{R}} - \overset{*}{\tilde{R}} \cdot \tilde{R} = 0$ ise M bir yarı-Einstein manifoldudur.

İspat : (4. 92) ve (4. 93) eşitlikleri yardımıyla

$$Q(g - \omega \otimes \omega - \omega(E)g, \tilde{R})_{hijklm} = 0$$

eşitliğini elde ederiz. Teorem 4.3.4. deki işlemler tekrar yapılırsa M bir yarı-Einstein manifoldu olarak bulunur. ■

5. ÜZERİNDE [17] ANLAMINDA SEMİ-SİMETRİK METRİK OLMAYAN KONEKSİYON TANIMLI OLAN BİR RİEMANN MANİFOLDUNUN ALTMANİFOLDLARI

Bu bölüm orijinal sonuçlar içermektedir. Bu bölümde üzerinde [17] anlamında semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon tanımlı olan bir Riemann manifoldunun alt manifoldları ele alınarak, birinci bölümde [17] anlamında semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonun indirgenmiş koneksiyonunun bazı özellikleri verilmiştir. İkinci bölümde [17] anlamında semi-simetrik metrik olmayan koneksiyona göre Gauss, Codazzi ve Ricci eşitlikleri bulunmuştur. Ayrıca Levi-Civita koneksiyon ve semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon arasındaki kesitsel eğrilik ilişkileri verilmiştir.

5.1 [17] anlamında Semi-Simetrik Metrik Olmayan Koneksiyonun İndirgenmiş Koneksiyonunun Özellikleri

Bu bölümde [17] anlamında semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonun indirgenmiş koneksiyonunun semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon olduğu gösterilmiştir. Ayrıca semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu bir Riemann manifoldunun bir altmanifoldunun total geodezik, total umbilik ve minimal durumları araştırılmıştır.

M, üzerinde [17] anlamında $\overset{*}{\tilde{\nabla}}$ semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon tanımlı (n+d)-boyutlu bir $\tilde{M}$ Riemann manifoldunun n-boyutlu bir altmanifoldu olsun. (3. 21) eşitliği gereği $\forall X, Y \in \chi(M)$ ve $\tilde{U}, \tilde{E} \in \chi(M)$ için;

$$\overset{*}{\tilde{\nabla}}_X Y = \tilde{\nabla}_X Y + \omega(Y)X - g(X,Y)\tilde{U} - \eta(X)Y - \eta(Y)X \qquad (5.1)$$

yazılabilir. M üzerinde $\tilde{U}$ ve $\tilde{E}$ vektör alanlarını sırasıyla $U^T, U^\perp$ ve $E^T, E^\perp$ tanjant ve normal bileşenleri olmak üzere

$$\tilde{U} = U^T + U^\perp \tag{5. 2}$$

$$\tilde{E} = E^T + E^\perp \tag{5. 3}$$

biçimde yazalım. $\tilde{\nabla}$ Levi-Civita koneksiyonuna göre $\tilde{M}$ Riemann manifoldunun bir M altmanifoldu için Gauss formülünün, ∇ Levi-Civita koneksiyonun indirgenmiş koneksiyonu olmak üzere (2. 23) den

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y) \tag{5. 4}$$

olduğunu biliyoruz. $\overset{*}{\nabla}$, [17] anlamında semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonun indirgenmiş koneksiyonu olsun. O halde

$$\overset{*}{\tilde{\nabla}}_X Y = \overset{*}{\nabla}_X Y + \overset{*}{h}(X,Y) \tag{5. 5}$$

yazılabilir. (5. 5) denklemine [17] anlamında semi-simetrik metrik olmayan koneksiyona göre M için Gauss denklemi denir [23]. Böylece (5. 1), (5. 2), (5. 4) ve (5.5) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}\overset{*}{\nabla}_X Y + \overset{*}{h}(X,Y) = \nabla_X Y + h(X,Y) + \omega(Y)X - g(X,Y)U^T \\ -g(X,Y)U^\perp - \eta(X)Y - \eta(Y)X\end{aligned} \tag{5. 6}$$

elde edilir. Buradan (5. 6) denkleminin tanjant ve normal kısımlarını karşılaştırırsak

$$\overset{*}{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \omega(Y)X - g(X,Y)U^T - \eta(X)Y - \eta(Y)X \tag{5. 7}$$

ve

$$\overset{*}{h}(X,Y) = h(X,Y) - g(X,Y)U^\perp \tag{5. 8}$$

eşitliklerini buluruz. Eğer $\overset{*}{h} = 0$ ise M, [17] anlamında semi-simetrik metrik olmayan koneksiyona göre total geodeziktir [23]. $\overset{*}{T}$, $\overset{*}{\nabla}$ koneksiyonuna göre M nin torsiyon tensörü olmak üzere (5. 7) denklemi kullanılarak

$$\begin{aligned}\overset{*}{T}(X,Y) &= \overset{*}{\nabla}_X Y - \overset{*}{\nabla}_Y X - [X,Y] \\ &= \nabla_X Y + \omega(Y)X - g(X,Y)U^T - \eta(X)Y - \eta(Y)X \\ &\quad -\nabla_Y X - \omega(X)Y + g(Y,X)U^T + \eta(Y)X + \eta(X)Y - [X,Y] \\ &= \omega(Y)X - \omega(X)Y\end{aligned} \tag{5. 9}$$

sonucuna ulaşılır. Ayrıca (5. 7) denklemi kullanılarak her $\forall X$, Y, $Z \in \chi(M)$ ve $\tilde{U}$, $\tilde{E} \in \chi(M)$ için;

$$\left(\overset{*}{\nabla}_X g\right)(Y,Z) = \overset{*}{\nabla}_X g(Y,Z) - g(\overset{*}{\nabla}_X Y, Z) - g(Y, \overset{*}{\nabla}_X Z)$$

$$\begin{aligned} &= \nabla_X g(Y,Z) \\ &\quad - g(\nabla_X Y + \omega(Y)X - g(X,Y)U^T - \eta(X)Y - \eta(Y)X, Z) \\ &\quad - g(Y, \nabla_X Z + \omega(Z)X - g(X,Z)U^T - \eta(X)Z - \eta(Z)X) \\ &= 2\eta(X)g(Y,Z) + \eta(Y)g(X,Z) + \eta(Z)g(X,Y) \end{aligned} \qquad (5\ .10)$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 5.1.1.

M, üzerinde [17] anlamında $\overset{*}{\tilde{\nabla}}$ semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon tanımlı (n+d)-boyutlu bir $\tilde{M}$ Riemann manifoldunun n-boyutlu bir altmanifoldu olsun. Bu taktirde M üzerindeki $\overset{*}{\nabla}$ indirgenmiş koneksiyonu da semi-simetrik metrik olmayan koneksiyondur.

İspat: (5. 9) ve (5. 10) eşitliklerine göre Tanım 3.1.1 gereği [17] anlamında semi-simetrik metrik olmayan koneksiyona göre bir Riemann manifoldunun bir altmanifoldu üzerindeki $\overset{*}{\nabla}$ indirgenmiş koneksiyonu da semi-simetrik metrik olmayan koneksiyondur. ■

Yardımcı Teorem 5.1.2.

M, üzerinde [17] anlamında $\overset{*}{\tilde{\nabla}}$ semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon tanımlı (n+d)-boyutlu bir $\tilde{M}$ Riemann manifoldunun n-boyutlu bir altmanifoldu olsun. [17] anlamında $\overset{*}{\tilde{\nabla}}$ semi-simetrik metrik olmayan koneksiyona göre M nin ortalama eğrilik vektörü $\overset{*}{H}$ ve $\tilde{\nabla}$ Levi-Civita koneksiyona göre M nin ortalama eğrilik vektörü H olsun. Bu taktirde

$$\overset{*}{H} = H - U^{\perp}$$

dir.

İspat : M nin tanjant uzayının bir ortonormal bazını $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ olarak alalım. Tanım 2.2.6. gereği $\overset{*}{\tilde{\nabla}}$ semi-simetrik metrik olmayan koneksiyona göre ve $\tilde{\nabla}$ Levi-Civita koneksiyona göre M nin ortalama eğrilik vektörünü sırasıyla

$$\overset{*}{H} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overset{*}{h}(E_i, E_i) \tag{5. 11}$$

ve

$$H = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(E_i, E_i) \tag{5. 12}$$

olarak yazabiliriz. O halde (5. 11) denkleminde (5. 8) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\overset{*}{H} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(h(E_i, E_i) - g(E_i, E_i)U^{\perp}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(E_i, E_i) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(g(E_i, E_i)U^{\perp}\right) \\
&= H - \frac{1}{n}.nU^{\perp} \\
&= H - U^{\perp}
\end{aligned} \tag{5. 13}$$

elde edilir. ■

Eğer $\overset{*}{H} = 0$ ise [17] anlamında semi-simetrik metrik olmayan koneksiyona göre M minimal olarak adlandırılır [23]. Böylece aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Teorem 5.1.3.

M, üzerinde [17] anlamında $\overset{*}{\tilde{\nabla}}$ semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon tanımlı (n+d)-boyutlu bir $\tilde{M}$ Riemann manifoldunun n-boyutlu bir altmanifoldu olsun.

i) $\tilde{U}$ vektör alanı M ye teğet olsun. Bu taktirde M nin Levi-Civita koneksiyona göre total geodezik olması için gerek ve yeter şart M nin semi-simetrik metrik olmayan koneksiyona göre total geodezik olmasıdır.

ii) M nin semi-simetrik metrik olmayan koneksiyona göre total umbilik olması için gerek ve yeter şart M nin Levi-Civita koneksiyona göre total umbilik olmasıdır.

iii) $\tilde{U}$ vektör alanı M ye teğet olsun. Bu taktirde M nin Levi Civita koneksiyona göre ortalama eğrilik normali ve M nin semi-simetrik metrik olmayan koneksiyona göre ortalama eğrilik normali eşittir. Böylece M nin semi-simetrik metrik olmayan koneksiyona göre minimal olması için gerek ve yeter şart M nin Levi Civita koneksiyona göre minimal olmasıdır.

İspat :

i) $\tilde{U}$ M ye teğet ise $U^{\perp}=0$ dır. M Levi-Civita koneksiyona total geodezik ise h=0 dır. (5. 8) eşitliği gereği h=0 ise $\overset{*}{h}=0$ dır. Tersi de doğrudur. Böylece M nin Levi-Civita koneksiyona göre total geodezik olması için gerek ve yeter şart M nin semi-simetrik metrik olmayan koneksiyona göre total geodezik olmasıdır.

ii) $\forall X, Y \in \chi(M)$ için ; (5. 8) eşitliği gereği

$$\overset{*}{h}(X,Y) = h(X,Y) - g(X,Y)U^{\perp}$$

yazılır. M semi-simetrik metrik olmayan koneksiyona göre total umbilik ise (2. 34) gereği $\overset{*}{h}(X,Y) = g(X,Y)\overset{*}{H}$ yazılabilir. O halde

$$g(X,Y)\overset{*}{H} = h(X,Y) - g(X,Y)U^{\perp}$$

elde edilir. (5. 13) eşitliği kullanılırsa

$$g(X,Y)(H - U^{\perp}) = h(X,Y) - g(X,Y)U^{\perp}$$

bulunur. Sonuç olarak

$$h(X,Y) = g(X,Y)H$$

elde edilir. Böylece Tanım 2.2.7. gereği M, Levi-Civita koneksiyona göre total umbiliktir. Ters ifadenin doğru olduğu da kolayca gösterilebilir.

iii) $\tilde{U}$ M ye teğet olduğundan $U^{\perp}=0$ dır. M Levi-Civita koneksiyona göre minimal ise H=0 dır. (5. 13) eşitliği gereği $\overset{*}{H}=0$ bulunur. İşlemin tersi de doğru olduğundan M nin semi-simetrik metrik olmayan koneksiyona göre minimal olması için gerek ve yeter şart M nin Levi Civita koneksiyona göre minimal olmasıdır. ■

Yardımcı Teorem 5.1.4.

Üzerinde [17] anlamında $\overset{*}{\tilde{\nabla}}$ semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon tanımlı olan (n+d)-boyutlu bir $\tilde{M}$ Riemann manifoldunun n-boyutlu bir M altmanifoldu için $\overset{*}{\nabla}{}^{\perp}_X \xi = \nabla^{\perp}_X \xi - \eta(X)\xi$ olmak üzere Weingarten denklemi

$$\overset{*}{\tilde{\nabla}}_X \xi = -\overset{*}{A}_{\xi} X + \overset{*}{\nabla}{}^{\perp}_X \xi$$

dir.

İspat : $\forall X \in \chi(M)$ ve M ye normal bir birim vektör alanı ξ olsun. (5. 1) denkleminden

$$\overset{*}{\tilde{\nabla}}_X \xi = \tilde{\nabla}_X \xi + \omega(\xi)X - \eta(X)\xi - \eta(\xi)X \tag{5. 14}$$

elde ederiz. (2. 24) gereği bir Riemann manifoldunun bir altmanifoldu için Weingarten denklemi

$$\tilde{\nabla}_X \xi = -A_{\xi} X + \nabla^{\perp}_X \xi \tag{5. 15}$$

dir. Burada A_{ξ}, ξ yönünde M nin şekil operatörüdür. (5. 15) denklemi yardımıyla (5. 14) denklemi

$$\overset{*}{\tilde{\nabla}}_X \xi = -A_{\xi} X + \nabla^{\perp}_X \xi + \omega(\xi)X - \eta(X)\xi - \eta(\xi)X \tag{5. 16}$$

olarak yazılabilir. Şimdi M üzerinde

$$\overset{*}{A}_{\xi} = \big(A_{\xi} - \omega(\xi) + \eta(\xi)\big)I \tag{5. 17}$$

olacak şekilde (1, 1)-tipinde $\overset{*}{A}_{\xi}$ tensör alanı tanımlayalım. O halde (5. 16) denklemi

$$\overset{*}{\tilde{\nabla}}_X \xi = -\overset{*}{A}_{\xi} X + \nabla^{\perp}_X \xi - \eta(X)\xi \tag{5. 18}$$

biçimine dönüşür. ■

Önerme 5.1.5.

$\overset{*}{\nabla}{}^{\perp}$ normal koneksiyonu bir metrik olmayan koneksiyondur.

İspat : M için iki farklı normal birim vektör alanları ξ_1 ve ξ_2 olsun. Böylece Yardımcı Teorem 5.1.4. kullanıldığında

$$\left(\overset{*}{\nabla}{}^{\perp}{}_X\, g\right)(\xi_1,\xi_2)=\overset{*}{\nabla}{}^{\perp}{}_X\, g(\xi_1,\xi_2)-g(\overset{*}{\nabla}{}^{\perp}{}_X\,\xi_1,\xi_2)-g(\xi_1,\overset{*}{\nabla}{}^{\perp}{}_X\,\xi_2)$$

$$=\nabla_X g(\xi_1,\xi_2)-g(\nabla_X^{\perp}\xi_1,\xi_2)+\eta(X)g(\xi_1,\xi_2)$$

$$-g(\xi_1,\nabla_X^{\perp}\xi_2)+\eta(X)g(\xi_1,\xi_2)$$

$$=2\eta(X)g(\xi_1,\xi_2)$$

elde edilir. Dolayısıyla $\overset{*}{\nabla}{}^{\perp} g\neq 0$ olduğundan Tanım 3.1.1. gereği $\overset{*}{\nabla}{}^{\perp}$ metrik olmayan koneksiyondur. ■

Önerme 5.1.6. M, üzerinde [17] anlamında $\overset{*}{\tilde{\nabla}}$ semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon tanımlı (n+d)-boyutlu bir $\tilde{M}$ Riemann manifoldunun n-boyutlu bir altmanifoldu olsun. ξ ve υ M nin birim normal vektör alanları olmak üzere

i) $g(\overset{*}{A}_\xi X,Y)=g(X,\overset{*}{A}_\xi Y)$ (5. 19)

ve

ii) $g\left(\left[\overset{*}{A}_\xi,\overset{*}{A}_\upsilon\right]X,Y\right)=g\left(\left[A_\xi,A_\upsilon\right]X,Y\right)$ (5. 20)

dir.

İspat : $\forall$ X, Y $\in \chi$(M) için ;

i) (5. 17) eşitliği kullanılarak

$$g(\overset{*}{A}_\xi X,Y)=g(A_\xi X,Y)-\omega(\xi)g(X,Y)+\eta(\xi)g(X,Y) \quad (5.\ 21)$$

yazılabilir. A_ξ simetrik olduğu için

$$g(A_\xi X,Y)=g(X,A_\xi Y) \quad (5.\ 22)$$

yazılabileceğinden (5. 22) eşitliği (5. 21) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$g(\overset{*}{A}_\xi X,Y)=g(X,A_\xi Y)-\omega(\xi)g(X,Y)+\eta(\xi)g(X,Y)=g(X,\overset{*}{A}_\xi Y)$$

elde edilir.

ii) (2. 32) denklemi gereği $g\left(\left[\overset{*}{A}_\xi,\overset{*}{A}_\upsilon\right]X,Y\right)=g\left(\left(\overset{*}{A}_\xi\overset{*}{A}_\upsilon-\overset{*}{A}_\upsilon\overset{*}{A}_\xi\right)X,Y\right)$

olduğundan burada (5. 17) eşitliği kullanılırsa

$$\overset{*}{A}_\xi \overset{*}{A}_\upsilon - \overset{*}{A}_\upsilon \overset{*}{A}_\xi = \overset{*}{A}_\xi\left(A_\upsilon - \omega(\upsilon) + \eta(\upsilon)\right) - \overset{*}{A}_\upsilon\left(A_\xi - \omega(\xi) + \eta(\xi)\right)$$

bulunur. Son denklemde tekrar (5. 17) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}\overset{*}{A}_\xi \overset{*}{A}_\upsilon - \overset{*}{A}_\upsilon \overset{*}{A}_\xi = {} & A_\xi A_\upsilon - \omega(\xi)A_\upsilon + \eta(\xi)A_\upsilon - A_\xi\omega(\upsilon) + \omega(\xi)\omega(\upsilon) \\ & - \eta(\xi)\omega(\upsilon) + A_\xi\eta(\upsilon) - \omega(\xi)\eta(\upsilon) + \eta(\xi)\eta(\upsilon) \\ & - A_\upsilon A_\xi + \omega(\upsilon)A_\xi - \eta(\upsilon)A_\xi + A_\upsilon\omega(\xi) - \omega(\upsilon)\omega(\xi) \\ & + \eta(\upsilon)\omega(\xi) - A_\upsilon\eta(\xi) + \omega(\upsilon)\eta(\xi) - \eta(\upsilon)\eta(\xi)\end{aligned}$$

elde edilir. Son denklemde gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\overset{*}{A}_\xi \overset{*}{A}_\upsilon - \overset{*}{A}_\upsilon \overset{*}{A}_\xi = A_\xi A_\upsilon - A_\upsilon A_\xi$$

olarak bulunur. ■

Böylece Önerme 5.1.6 yardımıyla aşağıdaki iki teoremi verebiliriz.

Teorem 5.1.7.

M, üzerinde [17] anlamında $\overset{*}{\tilde{\nabla}}$ semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon tanımlı (n+d)-boyutlu bir $\tilde{M}$ Riemann manifoldunun n-boyutlu bir altmanifoldu olsun. Bu taktirde M nin semi-simetrik metrik olmayan koneksiyona göre şekil operatörlerinin köşegenleştirilebilir olması için gerek ve yeter şart M nin Levi-Civita koneksiyona göre şekil operatörlerinin köşegenleştirilebilir olmasıdır.

İspat : $\forall X, Y \in \chi(M)$ için (5. 20) eşitliği

$$g\left(\left[\overset{*}{A}_\xi, \overset{*}{A}_\upsilon\right]X, Y\right) = g\left(\left[A_\xi, A_\upsilon\right]X, Y\right)$$

olduğundan M nin semi-simetrik metrik olmayan koneksiyona göre şekil operatörlerinin köşegenleştirilebilir olması için gerek ve yeter şart M nin Levi-Civita koneksiyona göre şekil operatörlerinin köşegenleştirilebilir olmasıdır. ■

Teorem 5.1.8.

M, üzerinde [17] anlamında $\overset{*}{\tilde{\nabla}}$ semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon tanımlı (n+d)-boyutlu bir $\tilde{M}$ Riemann manifoldunun n-boyutlu bir altmanifoldu olsun. M altmanifoldu üzerinde ki bir ξ birim normal vektör alanı $U^\perp$ ve $E^\perp$ vektör alanlarına dik veya $U^\perp = E^\perp$ ise Levi-Civita koneksiyona ve [17] anlamında semi-simetrik metrik olmayan koneksiyona göre ξ birim normal vektör alanının asli doğrultuları çakışıktır ve asli eğrilikleri eşittir.

İspat : $E_1, E_2, ..., E_n$ ler M üzerinde Levi-Civita koneksiyona göre ξ birim normal vektör alanına karşılık gelen asli vektör alanları olsunlar. (5. 17) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}\overset{*}{A}_{\xi}(E_i) &= A_{\xi}(E_i) - \omega(\xi)(E_i) + \eta(\xi)(E_i)\\ &= (k_i - \omega(\xi) + \eta(\xi))E_i \qquad (5.\ 23)\\ &= \overset{*}{k}_i E_i\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\overset{*}{k}_i E_i = (k_i - \omega(\xi) + \eta(\xi))E_i$$

dir. Son denklemde k_i ve $\overset{*}{k}_i$ ler sırasıyla $\tilde{\nabla}$ ve $\overset{*}{\tilde{\nabla}}$ 'ye göre ξ birim normal vektör alanına karşılık gelen asli eğriliklerdir. Böylece ξ, $U^{\perp}$ ve $E^{\perp}$ 'ye dik veya $U^{\perp} = E^{\perp}$ olduğundan

$$\overset{*}{k}_i E_i = k_i E_i$$

bulunur. Bu ise

$$\overset{*}{k}_i = k_i$$

demektir. Dolayısıyla asli doğrultuları çakışıktır ve asli eğrilikleri eşittir. ■

5.2 Semi-Simetrik Metrik Olmayan Koneksiyona Göre Gauss, Codazzi ve Ricci Eşitlikleri

Yardımcı Teorem 5.2.1.

M, üzerinde [17] anlamında $\overset{*}{\tilde{\nabla}}$ semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon tanımlı (n+d)-boyutlu bir $\tilde{M}$ Riemann manifoldunun n-boyutlu bir altmanifoldu olsun. Bu taktirde [17] anlamında semi-simetrik metrik olmayan koneksiyona göre Gauss, Codazzi ve Ricci denklemleri $\forall X,Y,Z,W \in \chi(M)$ için sırasıyla;

$$\overset{*}{\tilde{R}}(X,Y,Z,W) = \overset{*}{R}(X,Y,Z,W) - g(h(X,W),h(Y,Z)) + g(h(Y,W),h(X,Z))$$
$$+ g(Y,Z)\omega(h(X,W)) - g(X,Z)\omega(h(Y,W))$$
$$+ g(X,W)\big(\omega(h(Y,Z)) - \eta(h(Y,Z))\big)$$
$$+ g(Y,W)\big(\eta(h(X,Z)) - \omega(h(X,Z))\big)$$
$$+ \omega(U^{\perp})\big[g(X,Z)g(Y,W) - g(Y,Z)g(X,W)\big]$$
$$+ \eta(U^{\perp})\big[g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W)\big] \tag{5. 24}$$

$$\left(\overset{*}{\tilde{R}}(X,Y)Z\right)^{\perp} = \left(\overset{*}{\tilde{\nabla}}_X \overset{*}{h}\right)(Y,Z) - \left(\overset{*}{\tilde{\nabla}}_Y \overset{*}{h}\right)(X,Z) + \omega(Y)\overset{*}{h}(X,Z)$$
$$-\omega(X)\overset{*}{h}(Y,Z) + \eta(Y)\overset{*}{h}(X,Z) - \eta(X)\overset{*}{h}(Y,Z) \tag{5. 25}$$

ve

$$\overset{*}{\tilde{R}}(X,Y,\xi,\upsilon) = R^{\perp}(X,Y,\xi,\upsilon) + g\left(\left[A_{\xi}, A_{\upsilon}\right]X, Y\right)$$
$$+\left(g(X,\nabla_Y E^T) - g(Y,\nabla_X E^T)\right)g(\xi,\upsilon) \tag{5. 26}$$

dir.

İspat : M altmanifoldunun $\overset{*}{\tilde{\nabla}}$ semi-simetrik metrik olmayan koneksiyona, $\tilde{\nabla}$ Riemann koneksiyona, $\overset{*}{\nabla}$ indirgenmiş semi-simetrik metrik olmayan koneksiyona ve ∇ indirgenmiş Riemann koneksiyona göre eğrilik tensörlerini sırasıyla $\forall$ X,Y,Z,$\in \chi$(M) için ;

$$\overset{*}{\tilde{R}}(X,Y)Z = \overset{*}{\tilde{\nabla}}_X \overset{*}{\tilde{\nabla}}_Y Z - \overset{*}{\tilde{\nabla}}_Y \overset{*}{\tilde{\nabla}}_X Z - \overset{*}{\tilde{\nabla}}_{[X,Y]} Z, \tag{5. 27}$$

$$\overset{*}{R}(X,Y)Z = \overset{*}{\nabla}_X \overset{*}{\nabla}_Y Z - \overset{*}{\nabla}_Y \overset{*}{\nabla}_X Z - \overset{*}{\nabla}_{[X,Y]} Z, \tag{5. 28}$$

$$\tilde{R}(X,Y)Z = \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Z - \tilde{\nabla}_{[X,Y]} Z, \tag{5. 29}$$

ve

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \tag{5. 30}$$

ile gösterelim. (5. 27) eşitliğinde (5. 5) ve (5. 16) eşitlikleri kullanılırsa

$$\overset{*}{\tilde{\nabla}}_X \overset{*}{\tilde{\nabla}}_Y Z = \overset{*}{\tilde{\nabla}}_X(\overset{*}{\nabla}_Y Z + \overset{*}{h}(Y,Z))$$

$$= \overset{*}{\tilde{\nabla}}_X(\overset{*}{\nabla}_Y Z) + \overset{*}{\tilde{\nabla}}_X \overset{*}{h}(Y,Z)$$

$$= \overset{*}{\nabla}_X \overset{*}{\nabla}_Y Z + \overset{*}{h}(X, \overset{*}{\nabla}_Y Z) - A^{*}_{h(Y,Z)} X + \nabla^{\perp}_X \overset{*}{h}(Y,Z)$$

$$+\omega(\overset{*}{h}(Y,Z))X - \eta(X)\overset{*}{h}(Y,Z) - \eta(\overset{*}{h}(Y,Z))X \tag{5. 31}$$

olup benzer şekilde

$$\overset{*}{\tilde{\nabla}}_Y \overset{*}{\tilde{\nabla}}_X Z = \overset{*}{\nabla}_Y \overset{*}{\nabla}_X Z + \overset{*}{h}(Y, \overset{*}{\nabla}_X Z) - A^{*}_{h(X,Z)} Y + \nabla^{\perp}_Y \overset{*}{h}(X,Z)$$

$$+\omega(\overset{*}{h}(X,Z))Y - \eta(Y)\overset{*}{h}(X,Z) - \eta(\overset{*}{h}(X,Z))Y \tag{5. 32}$$

ve

$$\overset{*}{\tilde{\nabla}}_{[X,Y]} Z = \overset{*}{\nabla}_{[X,Y]} Z + \overset{*}{h}([X,Y],Z) \tag{5. 33}$$

elde edilir. (5. 31), (5. 32) ve (5. 33) denklemleri (5. 27) eşitliğinde yerine yazılır ve (5. 28) eşitliği dikkate alınırsa

$$\overset{*}{\tilde{R}}(X,Y)Z = \overset{*}{R}(X,Y)Z + \overset{*}{h}(X, \overset{*}{\nabla}_Y Z) - \overset{*}{h}(Y, \overset{*}{\nabla}_X Z) - \overset{*}{h}([X,Y],Z)$$

$$- A^{*}_{h(Y,Z)} X + A^{*}_{h(X,Z)} Y + \nabla^{\perp}_X \overset{*}{h}(Y,Z) - \nabla^{\perp}_Y \overset{*}{h}(X,Z)$$

$$+\omega(\overset{*}{h}(Y,Z))X - \omega(\overset{*}{h}(X,Z))Y - \eta(X)\overset{*}{h}(Y,Z) + \eta(Y)\overset{*}{h}(X,Z)$$

$$-\eta(\overset{*}{h}(Y,Z))X + \eta(\overset{*}{h}(X,Z))Y \tag{5. 34}$$

yazılabilir. Ayrıca (5. 34) eşitliğinin her iki yanının $W \in \chi(M)$ ile iç çarpımı alınırsa

$$\overset{*}{\tilde{R}}(X,Y,Z,W) = \overset{*}{R}(X,Y,Z,W) - g(A^{*}_{h(Y,Z)} X, W) + g(A^{*}_{h(X,Z)} Y, W)$$

$$+g(\omega(\overset{*}{h}(Y,Z))X, W) - g(\omega(\overset{*}{h}(X,Z))Y, W)$$

$$-g(\eta(\overset{*}{h}(Y,Z))X, W) + g(\eta(\overset{*}{h}(X,Z))Y, W)$$

elde edilir. M ye normal bir birim vektör alanı ξ olmak üzere (2. 25) eşitliği gereği $g(A_{\xi}X,Y) = g(h(X,Y),\xi)$ olduğundan son denklem

$$\overset{*}{\tilde{R}}(X,Y,Z,W) = \overset{*}{R}(X,Y,Z,W) - g(h(X,W), \overset{*}{h}(Y,Z)) + g(h(Y,W), \overset{*}{h}(X,Z))$$

$$+\omega(\overset{*}{h}(Y,Z))g(X,W) - \omega(\overset{*}{h}(X,Z))g(Y,W)$$

$$-\eta(\overset{*}{h}(Y,Z))g(X,W) + \eta(\overset{*}{h}(X,Z))g(Y,W) \tag{5. 35}$$

biçiminde yazılabilir. (5. 35) denkleminde (5. 8) eşitliği kullanırsa

$$\begin{aligned}\overset{*}{\tilde{R}}(X,Y,Z,W) = \overset{*}{R}(X,Y,Z,W) &- g(\overset{*}{h}(X,W) + g(X,W)U^{\perp}, \overset{*}{h}(Y,Z)) \\ &+ g(\overset{*}{h}(Y,W) + g(Y,W)U^{\perp}, \overset{*}{h}(X,Z)) \\ &+ \omega(\overset{*}{h}(Y,Z))g(X,W) - \omega(\overset{*}{h}(X,Z))g(Y,W) \\ &- \eta(\overset{*}{h}(Y,Z))g(X,W) + \eta(\overset{*}{h}(X,Z))g(Y,W)\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca son eşitlikte (3. 22) eşitliği kullanılır ve düzenlenirse

$$\begin{aligned}\overset{*}{\tilde{R}}(X,Y,Z,W) = \overset{*}{R}(X,Y,Z,W) &- g(\overset{*}{h}(X,W), \overset{*}{h}(Y,Z)) + g(\overset{*}{h}(Y,W), \overset{*}{h}(X,Z)) \\ &- \eta(\overset{*}{h}(Y,Z))g(X,W) + \eta(\overset{*}{h}(X,Z))g(Y,W) \qquad (5.\ 36)\end{aligned}$$

bulunur. Aynı şekilde (5. 35) eşitliğinde (5. 8) eşitliği kullanırsa

$$\begin{aligned}\overset{*}{\tilde{R}}(X,Y,Z,W) = \overset{*}{R}(X,Y,Z,W) &- g(h(X,W), h(Y,Z) - g(Y,Z)U^{\perp}) \\ &+ g(h(Y,W), h(X,Z) - g(X,Z)U^{\perp}) + \omega(h(Y,Z) - g(Y,Z)U^{\perp})g(X,W) \\ &- \omega(h(X,Z) - g(X,Z)U^{\perp})g(Y,W) - \eta(h(Y,Z) - g(Y,Z)U^{\perp})g(X,W) \\ &+ \eta(h(X,Z) - g(X,Z)U^{\perp})g(Y,W)\end{aligned}$$

elde edilir. Son ifadede tekrar (3. 22) eşitliği kullanılır ve gerekli sadeleştirmeler ve düzenlemeler yapılırsa (5. 24) elde edilir. Burada (5. 24) denklemi Tanım 2.2.5. gereği [17] anlamında semi-simetrik metrik olmayan koneksiyona göre bir M altmanifoldunun Gauss eşitliğidir.

(5. 34) eşitliğinden $\overset{*}{\tilde{\nabla}}$ semi-simetrik metrik olmayan koneksiyona göre bir M altmanifoldunun eğrilik tensörünün normal bileşeni

$$\begin{aligned}\left(\overset{*}{\tilde{R}}(X,Y)Z\right)^{\perp} &= \overset{*}{h}(X, \overset{*}{\nabla}_Y Z) - \overset{*}{h}(Y, \overset{*}{\nabla}_X Z) - \overset{*}{h}([X,Y],Z) \\ &+ \nabla_X^{\perp}\overset{*}{h}(Y,Z) - \nabla_Y^{\perp}\overset{*}{h}(X,Z) - \eta(X)\overset{*}{h}(Y,Z) + \eta(Y)\overset{*}{h}(X,Z) \qquad (5.\ 37)\end{aligned}$$

olarak bulunur.

$$\overset{*}{h}([X,Y],Z) = \overset{*}{h}(\nabla_X Y - \nabla_Y X, Z)$$

olduğundan (5. 7) denklemi yardımıyla

$$\overset{*}{h}([X,Y],Z)=\overset{*}{h}(\overset{*}{\nabla}_X Y-\omega(Y)X+g(X,Y)U^T+\eta(X)Y+\eta(Y)X$$
$$-\overset{*}{\nabla}_Y X+\omega(X)Y-g(X,Y)U^T-\eta(Y)X-\eta(X)Y,\ Z)$$

elde edilir. Son ifade de gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\overset{*}{h}([X,Y],Z)=\overset{*}{h}(\overset{*}{\nabla}_X Y-\omega(Y)X-\overset{*}{\nabla}_Y X+\omega(X)Y,Z)$$
$$=\overset{*}{h}(\overset{*}{\nabla}_X Y,Z)-\omega(Y)\overset{*}{h}(X,Z)-\overset{*}{h}(\overset{*}{\nabla}_Y X,Z)+\omega(X)\overset{*}{h}(Y,Z) \quad (5.\ 38)$$

bulunur. Böylece (5. 38) eşitliği (5. 37) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\left(\overset{*}{\tilde{R}}(X,Y)Z\right)^{\perp}=\overset{*}{h}(X,\overset{*}{\nabla}_Y Z)-\overset{*}{h}(Y,\overset{*}{\nabla}_X Z)-\overset{*}{h}(\overset{*}{\nabla}_X Y,Z)+\omega(Y)\overset{*}{h}(X,Z)$$
$$+\overset{*}{h}(\overset{*}{\nabla}_Y X,Z)-\omega(X)\overset{*}{h}(Y,Z)+\nabla_X^{\perp}\overset{*}{h}(Y,Z)-\nabla_Y^{\perp}\overset{*}{h}(X,Z)$$
$$-\eta(X)\overset{*}{h}(Y,Z)+\eta(Y)\overset{*}{h}(X,Z) \quad (5.\ 39)$$

elde edilir.

$\overset{*}{\bar{\nabla}}$, $\overset{*}{\nabla}$ ve $\nabla^{\perp}$ ile kurulan $TM\oplus T^{\perp}M$ ’de bir koneksiyon olmak üzere Tanım 2.2.4. gereği [17] anlamında semi-simetrik metrik olmayan koneksiyona göre van der Wearden Bortolotti koneksiyonunu

$$\left(\overset{*}{\bar{\nabla}}_X \overset{*}{h}\right)(Y,Z)=\nabla_X^{\perp}\overset{*}{h}(Y,Z)-\overset{*}{h}\left(\overset{*}{\nabla}_X Y,Z\right)-\overset{*}{h}\left(Y,\overset{*}{\nabla}_X Z\right) \quad (5.\ 40)$$

şeklinde tanımlayalım. O halde (5. 40) denklemiyle birlikte (5. 39) denklemi (5. 25) eşitliğine dönüşür. Buradan Tanım 2.2.5. gereği (5. 25) denklemi [17] anlamında semi-simetrik metrik olmayan koneksiyona göre Codazzi denklemi olarak isimlendirilir.

M ye normal bir birim vektör alanı ξ olmak üzere (5. 27) eşitliğinde Z yerine ξ alınırsa

$$\overset{*}{\tilde{R}}(X,Y)\xi=\overset{*}{\tilde{\nabla}}_X\overset{*}{\tilde{\nabla}}_Y\xi-\overset{*}{\tilde{\nabla}}_Y\overset{*}{\tilde{\nabla}}_X\xi-\overset{*}{\tilde{\nabla}}_{[X,Y]}\xi \quad (5.\ 41)$$

bulunur. Ayrıca (5. 1), (5. 5) ve (5. 18) eşitlikleri yardımıyla

$$\overset{*}{\tilde{\nabla}}_X \overset{*}{\tilde{\nabla}}_Y \xi = \overset{*}{\tilde{\nabla}}_X (-\overset{*}{A}_\xi Y + \nabla^\perp_Y \xi - \eta(Y)\xi)$$

$$= -\overset{*}{\tilde{\nabla}}_X \overset{*}{A}_\xi Y + \overset{*}{\tilde{\nabla}}_X (\nabla^\perp_Y \xi) - \overset{*}{\tilde{\nabla}}_X (\eta(Y)\xi)$$

$$= -(\overset{*}{\nabla}_X \overset{*}{A}_\xi Y + \overset{*}{h}(X, \overset{*}{A}_\xi Y)) - \overset{*}{A}_{\nabla^\perp_Y \xi} X + \nabla^\perp_X \nabla^\perp_Y \xi - \eta(X)\nabla^\perp_Y \xi$$

$$-(\tilde{\nabla}_X (\eta(Y)\xi) + \omega(\eta(Y)\xi)X - g(X, \eta(Y)\xi)\tilde{U}$$

$$-\eta(X)\eta(Y)\xi - \eta(\eta(Y)\xi)X)$$

ve

$$\overset{*}{\tilde{\nabla}}_X \overset{*}{\tilde{\nabla}}_Y \xi = -\overset{*}{\nabla}_X \overset{*}{A}_\xi Y - \overset{*}{h}(X, \overset{*}{A}_\xi Y) - \overset{*}{A}_{\nabla^\perp_Y \xi} X + \nabla^\perp_X \nabla^\perp_Y \xi - \eta(X)\nabla^\perp_Y \xi$$

$$-\tilde{\nabla}_X (\eta(Y))\xi - \eta(Y)\tilde{\nabla}_X \xi - \eta(Y)\omega(\xi)X$$

$$+\eta(X)\eta(Y)\xi + \eta(Y)\eta(\xi)X$$

elde edilir. Böylece son denklem (3. 23) denklemi yardımıyla

$$\overset{*}{\tilde{\nabla}}_X \overset{*}{\tilde{\nabla}}_Y \xi = -\overset{*}{\nabla}_X \overset{*}{A}_\xi Y - \overset{*}{h}(X, \overset{*}{A}_\xi Y) - \overset{*}{A}_{\nabla^\perp_Y \xi} X + \nabla^\perp_X \nabla^\perp_Y \xi - \eta(X)\nabla^\perp_Y \xi$$

$$-g(\tilde{\nabla}_X Y, E^T)\xi - g(Y, \tilde{\nabla}_X E^T)\xi - \eta(Y)\tilde{\nabla}_X \xi - \eta(Y)\omega(\xi)X$$

$$+\eta(X)\eta(Y)\xi + \eta(Y)\eta(\xi)X \qquad (5.\ 42)$$

olarak bulunur. Benzer şekilde;

$$\overset{*}{\tilde{\nabla}}_Y \overset{*}{\tilde{\nabla}}_X \xi = -\overset{*}{\nabla}_Y \overset{*}{A}_\xi X - \overset{*}{h}(Y, \overset{*}{A}_\xi X) - \overset{*}{A}_{\nabla^\perp_X \xi} Y + \nabla^\perp_Y \nabla^\perp_X \xi - \eta(Y)\nabla^\perp_X \xi$$

$$-g(\tilde{\nabla}_Y X, E^T)\xi - g(X, \tilde{\nabla}_Y E^T)\xi - \eta(X)\tilde{\nabla}_Y \xi - \eta(X)\omega(\xi)Y$$

$$+\eta(X)\eta(Y)\xi + \eta(X)\eta(\xi)Y \qquad (5.\ 43)$$

ve

$$\overset{*}{\tilde{\nabla}}_{[X,Y]} \xi = -\overset{*}{A}_\xi [X, Y] + \nabla^\perp_{[X,Y]} \xi - \eta([X, Y])\xi \qquad (5.\ 44)$$

elde edilir. (5. 42), (5. 43) ve (5. 44) eşitlikleri (5. 41) de yerine yazılırsa

$$\overset{*}{\tilde{R}}(X, Y)\xi = -\overset{*}{\nabla}_X \overset{*}{A}_\xi Y - \overset{*}{h}(X, \overset{*}{A}_\xi Y) - \overset{*}{A}_{\nabla^\perp_Y \xi} X + \nabla^\perp_X \nabla^\perp_Y \xi - \eta(X)\nabla^\perp_Y \xi$$

$$-g(\tilde{\nabla}_X Y, E^T)\xi - g(Y, \tilde{\nabla}_X E^T)\xi - \eta(Y)\tilde{\nabla}_X \xi - \eta(Y)\omega(\xi)X$$

$$+\eta(X)\eta(Y)\xi + \eta(Y)\eta(\xi)X + \overset{*}{\nabla}_Y \overset{*}{A}_\xi X + \overset{*}{h}(Y, \overset{*}{A}_\xi X)$$

$$+\overset{*}{A}_{\nabla^\perp_X \xi} Y - \nabla^\perp_Y \nabla^\perp_X \xi + \eta(Y)\nabla^\perp_X \xi + g(\tilde{\nabla}_Y X, E^T)\xi + g(X, \tilde{\nabla}_Y E^T)\xi$$

$$+\eta(X)\tilde{\nabla}_Y \xi + \eta(X)\omega(\xi)Y - \eta(X)\eta(Y)\xi - \eta(X)\eta(\xi)Y$$

$$+\overset{*}{A}_\xi [X, Y] - \nabla^\perp_{[X,Y]} \xi + \eta([X, Y])\xi \qquad (5.\ 45)$$

bulunur. (5. 45) denkleminde

$$\eta([X,Y])\xi = g(\tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X, E^T)\xi = g(\tilde{\nabla}_X Y, E^T)\xi - g(\tilde{\nabla}_Y X, E^T)\xi$$

olduğundan gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\begin{aligned}\overset{*}{\tilde{R}}(X,Y)\xi = & -\overset{*}{\nabla}_X \overset{*}{A}_\xi Y - \overset{*}{h}(X, \overset{*}{A}_\xi Y) - \overset{*}{A}_{\nabla_Y^\perp \xi} X + \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp \xi - \eta(X)\nabla_Y^\perp \xi \\ & - g(Y, \tilde{\nabla}_X E^T)\xi - \eta(Y)\tilde{\nabla}_X \xi - \eta(Y)\omega(\xi)X \\ & + \eta(Y)\eta(\xi)X + \overset{*}{\nabla}_Y \overset{*}{A}_\xi X + \overset{*}{h}(Y, \overset{*}{A}_\xi X) \\ & + \overset{*}{A}_{\nabla_X^\perp \xi} Y - \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \xi + \eta(Y)\nabla_X^\perp \xi + g(X, \tilde{\nabla}_Y E^T)\xi \\ & + \eta(X)\tilde{\nabla}_Y \xi + \eta(X)\omega(\xi)Y - \eta(X)\eta(\xi)Y \ + \overset{*}{A}_\xi [X,Y] - \nabla_{[X,Y]}^\perp \xi \end{aligned} \qquad (5.\ 46)$$

elde edilir. (5. 46) eşitliğinin M ye normal bir υ birim vektör alanı ile iç çarpımı alınır ise

$$\begin{aligned}\overset{*}{\tilde{R}}(X,Y,\xi,\upsilon) = & R^\perp(X,Y,\xi,\upsilon) - g(\overset{*}{h}(X, \overset{*}{A}_\xi Y), \upsilon) - \eta(X)g(\nabla_Y^\perp \xi, \upsilon) \\ & - g(Y, \tilde{\nabla}_X E^T)g(\xi,\upsilon) - \eta(Y)g(\tilde{\nabla}_X \xi, \upsilon) + g(\overset{*}{h}(Y, \overset{*}{A}_\xi X), \upsilon) \\ & + \eta(Y)g(\nabla_X^\perp \xi, \upsilon) + g(X, \tilde{\nabla}_Y E^T)g(\xi,\upsilon) + \eta(X)g(\tilde{\nabla}_Y \xi, \upsilon) \end{aligned} \qquad (5.\ 47)$$

olarak bulunur. (5. 47) denkleminde (5. 4), (5. 8) ve (5. 15) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}\overset{*}{\tilde{R}}(X,Y,\xi,\upsilon) = & R^\perp(X,Y,\xi,\upsilon) - g(h(X, \overset{*}{A}_\xi Y) - g(X, \overset{*}{A}_\xi Y)U^\perp, \upsilon) \\ & - \eta(X)g(\nabla_Y^\perp \xi, \upsilon) - g(Y, \nabla_X E^T + h(X, E^T))g(\xi,\upsilon) \\ & - \eta(Y)g(-A_\xi X + \nabla^\perp{}_X \xi, \upsilon) + g(h(Y, \overset{*}{A}_\xi X) - g(Y, \overset{*}{A}_\xi X)U^\perp, \upsilon) \\ & + \eta(Y)g(\nabla_X^\perp \xi, \upsilon) + g(X, \nabla_Y E^T + h(Y, E^T))g(\xi,\upsilon) \\ & + \eta(X)g(-A_\xi Y + \nabla^\perp{}_Y \xi, \upsilon) \end{aligned}$$

bulunur. Son denklemde gerekli düzenleme ve sadeleştirmeler yapılırsa

$$\begin{aligned}\overset{*}{\tilde{R}}(X,Y,\xi,\upsilon) = & R^\perp(X,Y,\xi,\upsilon) - g(h(X, \overset{*}{A}_\xi Y), \upsilon) + g(X, \overset{*}{A}_\xi Y)g(U^\perp, \upsilon) \\ & - g(Y, \nabla_X E^T)g(\xi,\upsilon) + g(h(Y, \overset{*}{A}_\xi X), \upsilon) - g(Y, \overset{*}{A}_\xi X)g(U^\perp, \upsilon) \\ & + g(X, \nabla_Y E^T)g(\xi,\upsilon) \end{aligned} \qquad (5.\ 48)$$

elde edilir. Ayrıca (5. 48) denkleminde (5. 17) eşitliği kullanılır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\begin{aligned}\overset{*}{\tilde{R}}(X,Y,\xi,\upsilon) = & R^\perp(X,Y,\xi,\upsilon) - g(h(X, A_\xi Y), \upsilon) + g(h(Y, A_\xi X), \upsilon) \\ & + \left(g(X, \nabla_Y E^T) - g(Y, \nabla_X E^T)\right)g(\xi,\upsilon) \end{aligned} \qquad (5.\ 49)$$

bulunur. $g(A_\xi X,Y)=g(h(X,Y),\xi)$, A simetrik ve $\left[A_\xi,A_\upsilon\right]=A_\xi A_\upsilon - A_\upsilon A_\xi$ olduğundan (5. 49) denkleminde gerekli düzenlemeler yapılırsa (5. 26) elde edilir. (5. 26) denklemi Tanım 2.2.5. gereği [17] anlamında semi-simetrik metrik olmayan koneksiyona göre Ricci denklemidir. ■

Yardımcı Teorem 5.2.2.

M, üzerinde [17] anlamında semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon tanımlı bir $\tilde{M}(c)$ reel uzay formun n-boyutlu bir altmanifoldu olsun. $\forall$ X, Y$\in \chi$(M) ve M nin ξ, υ birim normal vektör alanları için

$$R^{\perp}(X,Y,\xi,\upsilon)=-g\left(\left[A_\xi,A_\upsilon\right]X,Y\right)$$

dir.

İspat : $\tilde{M}(c)$, üzerinde [17] anlamında semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon tanımlı reel uzay form olsun. O halde (3. 26) denklemi

$$\begin{aligned}\overset{*}{\tilde{R}}(X,Y)Z &= c(g(Y,Z)X-g(X,Z)Y)-\alpha(Y,Z)X+\alpha(X,Z)Y-g(Y,Z)LX \\ &\quad +g(X,Z)LY+\beta(Y,X)Z-\beta(X,Y)Z+\beta(Y,Z)X-\beta(X,Z)Y \qquad (5.\ 50)\end{aligned}$$

biçimine dönüşür. Son eşitliğin normal kısmı

$$\left(\overset{*}{\tilde{R}}(X,Y)Z\right)^{\perp}=-g(Y,Z)(LX)^{\perp}+g(X,Z)(LY)^{\perp} \qquad (5.\ 51)$$

dir. $\forall$X, Y$\in\chi$(M) ve $\tilde{U}\in\chi$(M) için (3. 29) denklemi

$$\begin{aligned}LX &= \tilde{\nabla}_X\tilde{U}-\omega(X)\tilde{U}+\frac{1}{2}\omega(\tilde{U})X \\ &= \tilde{\nabla}_X U^T+\tilde{\nabla}_X U^{\perp}-\omega(X)U^T-\omega(X)U^{\perp}+\frac{1}{2}\omega(\tilde{U})X\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Son eşitlikte (5. 4) ve (5. 15) denklemleri kullanılırsa

$$LX=\nabla_X U^T+h(X,U^T)-A_{U^{\perp}}X+\nabla_X^{\perp}U^{\perp}-\omega(X)U^T-\omega(X)U^{\perp}+\frac{1}{2}\omega(\tilde{U})X$$

elde edilir. Böylece son denklemden

$$\left(LX\right)^{\perp}=h(X,U^T)+\nabla_X^{\perp}U^{\perp}-\omega(X)U^{\perp} \qquad (5.\ 52)$$

ve

$$\left(LY\right)^{\perp} = h(Y, U^{T}) + \nabla_{Y}^{\perp} U^{\perp} - \omega(Y)U^{\perp} \tag{5. 53}$$

bulunur. Böylece (5. 52) ve (5. 53) denklemleri (5. 51) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\left(\overset{*}{\tilde{R}}(X, Y)Z\right)^{\perp} &= -g(Y, Z)\left(h(X, U^{T}) + \nabla_{X}^{\perp} U^{\perp} - \omega(X)U^{\perp}\right) \\ &\quad + g(X, Z)\left(h(Y, U^{T}) + \nabla_{Y}^{\perp} U^{\perp} - \omega(Y)U^{\perp}\right)\end{aligned} \tag{5. 54}$$

elde edilir. O halde (5. 25) ve (5. 54) denklemlerinin eşitliğinden

$$\begin{aligned}&\left(\overset{*}{\bar{\nabla}}_{X} \overset{*}{h}\right)(Y, Z) - \left(\overset{*}{\bar{\nabla}}_{Y} \overset{*}{h}\right)(X, Z) + \omega(Y)\overset{*}{h}(X, Z) - \omega(X)\overset{*}{h}(Y, Z) + \eta(Y)\overset{*}{h}(X, Z) \\ &\quad - \eta(X)\overset{*}{h}(Y, Z) = -g(Y, Z)\left(h(X, U^{T}) + \nabla_{X}^{\perp} U^{\perp} - \omega(X)U^{\perp}\right) \\ &\quad + g(X, Z)\left(h(Y, U^{T}) + \nabla_{Y}^{\perp} U^{\perp} - \omega(Y)U^{\perp}\right)\end{aligned} \tag{5. 55}$$

bulunur.

$\tilde{M}(c)$, reel uzay form olduğu için (5. 50) denkleminde Z yerine ξ alınırsa

$$\begin{aligned}\overset{*}{\tilde{R}}(X, Y)\xi &= c(g(Y, \xi)X - g(X, \xi)Y) - \alpha(Y, \xi)X + \alpha(X, \xi)Y - g(Y, \xi)LX \\ &\quad + g(X, \xi)LY + \beta(Y, X)\xi - \beta(X, Y)\xi + \beta(Y, \xi)X - \beta(X, \xi)Y\end{aligned} \tag{5. 56}$$

elde edilir. (5. 56) denkleminde ξ birim normal vektör alanı olduğundan gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$\begin{aligned}\overset{*}{\tilde{R}}(X, Y)\xi &= -\alpha(Y, \xi)X + \alpha(X, \xi)Y \\ &\quad - \beta(X, Y)\xi + \beta(Y, X)\xi + \beta(Y, \xi)X - \beta(X, \xi)Y\end{aligned} \tag{5. 57}$$

bulunur. (5. 57) denkleminin υ birim normal vektör alanıyla iç çarpımı alınarak gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$\overset{*}{\tilde{R}}(X, Y, \xi, \upsilon) = g(\xi, \upsilon)(\beta(Y, X) - \beta(X, Y)) \tag{5. 58}$$

elde edilir. (5. 58) denkleminde (3. 28) eşitliği kullanılır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\begin{aligned}\overset{*}{\tilde{R}}(X, Y, \xi, \upsilon) &= g(\xi, \upsilon)\left((\tilde{\nabla}_{Y}\eta)(X) - (\tilde{\nabla}_{X}\eta)(Y)\right) \\ &= g(\xi, \upsilon)(g(\tilde{\nabla}_{Y}X, E^{T}) + g(X, \tilde{\nabla}_{Y}E^{T}) - \eta(\tilde{\nabla}_{Y}X) \\ &\quad - g(\tilde{\nabla}_{X}Y, E^{T}) - g(Y, \tilde{\nabla}_{X}E^{T}) + \eta(\tilde{\nabla}_{X}Y))\end{aligned}$$

bulunur. Son eşitlikte gerekli sadeleştirmeler yapılır ve (5. 4) denklemi kullanılırsa

$$\overset{*}{\tilde{R}}(X,Y,\xi,\upsilon)=g(\xi,\upsilon)(g(X,\nabla_Y E^T)-g(Y,\nabla_X E^T)) \tag{5. 59}$$

elde edilir. Böylece (5. 59) eşitliği (5. 26) de yerine yazılırsa

$$R^{\perp}(X,Y,\xi,\upsilon)=-g\left(\left[A_{\xi},A_{\upsilon}\right]X,Y\right) \tag{5. 60}$$

olarak bulunur. ■

Teorem 5.2.3.

M, üzerinde [17] anlamında semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon tanımlı bir $\tilde{M}(c)$ reel uzay formun n-boyutlu bir altmanifoldu olsun. Bu taktirde $\nabla^{\perp}$ normal koneksiyonunun flat olması için gerek ve yeter şart şekil operatörü matrislerinin hem semi-simetrik metrik olmayan koneksiyona hem de Levi-Civita koneksiyona göre aynı anda köşegenleştirilebilir olmasıdır.

İspat : $\nabla^{\perp}$ normal koneksiyon flat ise Tanım 2.2.5. gereği $R^{\perp}=0$ dır. Buradan (5.60) denklemine göre $R^{\perp}=0$ ise $\forall\, X,Y\in\chi(M)$ için $g\left(\left[A_{\xi},A_{\upsilon}\right]X,Y\right)=0$ dır. Dolayısıyla Önerme 5.1.6. gereği $g\left(\left[\overset{*}{A}_{\xi},\overset{*}{A}_{\upsilon}\right]X,Y\right)=0$ elde edilir. O halde Teorem 5.1.7. gereği [17] anlamında semi-simetrik metrik olmayan koneksiyona ve Levi-Civita koneksiyona göre tüm şekil operatörü matrisleri aynı anda köşegenleştirilebilir. İfadenin tersi de Teorem 5.1.7. gereği açıktır. O halde $\nabla^{\perp}$ normal koneksiyonunun flat olması için gerek ve yeter şart şekil operatörü matrislerinin hem semi-simetrik metrik olmayan koneksiyona hem de Levi-Civita koneksiyona göre aynı anda köşegenleştirilebilir olmasıdır. ■

Yardımcı Teorem 5.2.4.

M, üzerinde [17] anlamında $\overset{*}{\tilde{\nabla}}$ semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon tanımlı (n+d)-boyutlu bir $\tilde{M}$ Riemann manifoldunun n-boyutlu bir altmanifoldu olsun. $\tilde{M}$ nın M de yatan bir geodeziği γ ve γ nın birim teğet vektör alanı $\overline{T}$ olmak üzere $\{X,Y\}$ ortonormal bazı ile gerilen T_pM tanjant uzayının bir düzlem kesiti π

ve bir $p \in \tilde{M}$ noktasında $\tilde{M}$ ve M için bu düzlem kesitinin eğrilikleri sırasıyla $\overset{*}{\tilde{K}}(\pi)$ ve $\overset{*}{K}(\pi)$ olsun. Eğer $\tilde{U}$ vektör alanı M ye teğet ise $\overset{*}{\tilde{K}}(\pi)$ ve $\overset{*}{K}(\pi)$ arasında

$$\overset{*}{\tilde{K}}(\pi) = \overset{*}{K}(\pi) + g(h(X,T), h(X,T))$$

bağıntısı vardır.

İspat : (5. 24) denklemi, T_pM tanjant uzayının bir $\{X,Y\}$ ortonormal bazına göre

$$\overset{*}{\tilde{R}}(X,Y,Y,X) = \overset{*}{R}(X,Y,Y,X) - g(h(X,X),h(Y,Y)) + g(h(Y,X),h(X,Y))$$
$$+\omega(h(X,X)) + \omega(h(Y,Y)) - \eta(h(Y,Y)) + \eta(U^{\perp}) - \omega(U^{\perp}) \qquad (5.\ 61)$$

olarak yazılabilir. Buradan da Tanım 2.1.6. gereği

$$\overset{*}{\tilde{K}}(\pi) = \overset{*}{K}(\pi) - g(h(X,X),h(Y,Y)) + g(h(Y,X),h(X,Y))$$
$$+\omega(h(X,X)) + \omega(h(Y,Y)) - \eta(h(Y,Y)) + \eta(U^{\perp}) - \omega(U^{\perp}) \qquad (5.\ 62)$$

elde edilir.

$\tilde{M}$ nın M de yatan bir geodeziği γ ve γ nın birim teğet vektör alanı $\overline{T}$ olsun. Böylece (2. 23) Gauss denklemi gereği $h(\overline{T},\overline{T})=0$ olduğundan (5. 8) eşitliğinde $h(\overline{T},\overline{T})=0$ alınırsa hipotez gereği $\tilde{U}$ tanjant vektör alanı olduğundan

$$\overset{*}{h}(\overline{T},\overline{T}) = h(\overline{T},\overline{T}) = 0 \qquad (5.\ 63)$$

elde edilir. X ve $\overline{T}$ tarafından gerilen T_pM tanjant uzayının bir düzlem kesiti π olsun. Böylece (5. 63) denklemi ve $\tilde{U}$ nın bir tanjant vektör alanı olduğu dikkate alınarak (5. 62) eşitliği

$$\overset{*}{\tilde{K}}(\pi) = \overset{*}{K}(\pi) + g(h(X,\overline{T}), h(X,\overline{T})) \qquad (5.\ 64)$$

biçiminde yazılabilir. ■

M üzerinde X birim teğet vektör alanı M de γ boyunca paralel ve $\overline{T}$ ye dik olsun. O halde $\nabla_{\overline{T}}X = 0$ ve g(X, $\overline{T}$)=0 elde edilir. Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 5.2.5.

M, üzerinde [17] anlamında $\overset{*}{\tilde{\nabla}}$ semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon tanımlı (n+d)-boyutlu bir $\tilde{M}$ Riemann manifoldunun n-boyutlu bir altmanifoldu olsun. $\tilde{M}$ nın M de yatan bir geodeziği γ ve γ nın birim teğet vektör alanı $\overline{T}$ olmak üzere X ve $\overline{T}$ tarafından gerilen T_pM tanjant uzayının bir düzlem kesiti π olsun. Eğer $\tilde{U}$ vektör alanı M ye teğet ise,

i) γ boyunca $\overset{*}{\tilde{K}}(\pi) \geq \overset{*}{K}(\pi)$ dır.

ii) Eğer M üzerinde bir X birim teğet vektör alanı M de γ boyunca paralel ve $\overline{T}$ ye dik ise **i)** eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart X vektör alanının $\tilde{M}$ de γ boyunca paralel olmasıdır.

İspat : i) (5. 64) gereği ispat açıktır.

ii) ($\Rightarrow$) M üzerinde X birim teğet vektör alanı M de γ boyunca paralel ve $\overline{T}$ ye dik ise $\nabla_{\overline{T}}X = 0$ ve g(X, $\overline{T}$)=0 dir. (5. 64) eşitliğinden **i)** eşitliğinin sağlanması durumunda $h(X,\overline{T}) = 0$ dir. Bu eşitlikler (2. 23) Gauss denkleminde kullanıldığında $\tilde{\nabla}_{\overline{T}}X$=0 elde edilir. O halde X $\tilde{M}$ da γ boyunca paraleldir.

($\Leftarrow$) $\tilde{\nabla}_{\overline{T}}X$=0 ise (2. 23) denklemi gereği $\nabla_{\overline{T}}X = h(X,\overline{T})$ dir. X birim teğet vektör alanı aynı zamanda M de γ boyunca paralel olduğundan $\nabla_{\overline{T}}X = 0 = h(X,\overline{T})$ olur. Böylece (5. 64) gereği $\overset{*}{\tilde{K}}(\pi) = \overset{*}{K}(\pi)$ bulunur. ■

Teorem 5.2.6.

M, üzerinde [17] anlamında $\overset{*}{\tilde{\nabla}}$ semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon tanımlı (n+d)-boyutlu bir $\tilde{M}$ Riemann manifoldunun n-boyutlu bir altmanifoldu olsun. Eğer M nin 2. temel formu hem van der Waerden-Bortolotti koneksiyonuna göre hem de [17] anlamında semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonun van der Waerden-Bortolotti koneksiyonuna göre paralel ve $\tilde{E}$ normal ise $U^{\perp}$ normal demette paraleldir.

İspat : M nin 2. temel formunu, [17] anlamında semi-simetrik olmayan metrik koneksiyonun van der Waerden-Bortolotti koneksiyonu için paralel alalım. Yani $\forall$ X, Y, Z$\in\chi$(M) ve $\tilde{U}, \tilde{E} \in\chi$(M) için;

$\left(\overset{*}{\bar{\bar{\nabla}}}_X \overset{*}{h}\right)(Y,Z)=0$ olsun. Böylece (5. 40) gereği

$$\nabla_X^{\perp} \overset{*}{h}(Y,Z) - \overset{*}{h}\left(\overset{*}{\nabla}_X Y, Z\right) - \overset{*}{h}\left(Y, \overset{*}{\nabla}_X Z\right) = 0 \qquad (5.\ 65)$$

dır. (5. 65) eşitliğinde (5. 8) denklemi kullanıldığında

$$\nabla_X^{\perp}(h(Y,Z)\text{-}g(Y,Z)U^{\perp}) - h\left(\overset{*}{\nabla}_X Y, Z\right) + g\left(\overset{*}{\nabla}_X Y, Z\right)U^{\perp}$$
$$-h\left(Y, \overset{*}{\nabla}_X Z\right) + g\left(Y, \overset{*}{\nabla}_X Z\right)U^{\perp} = 0 \qquad (5.\ 66)$$

elde edilir. (5. 66) denkleminde (5. 7) denklemi kullanılırsa

$$\nabla_X^{\perp}h(Y,Z)\text{-}g(\nabla_X Y,Z)U^{\perp}\text{-}g(Y,\nabla_X Z)U^{\perp} - g(Y,Z)\nabla_X^{\perp}U^{\perp}$$
$$\text{-}h(\nabla_X Y + \omega(Y)X - g(X,Y)U^{T} - \eta(X)Y - \eta(Y)X, Z)$$
$$+g(\nabla_X Y + \omega(Y)X - g(X,Y)U^{T} - \eta(X)Y - \eta(Y)X, Z)U^{\perp}$$
$$\text{-}h(Y, \nabla_X Z + \omega(Z)X - g(X,Z)U^{T} - \eta(Z)X - \eta(X)Z)$$
$$+g(Y,\ \nabla_X Z + \omega(Z)X - g(X,Z)U^{T} - \eta(Z)X - \eta(X)Z)U^{\perp} = 0 \quad (5.\ 67)$$

bulunur. (5. 67) denkleminde (3. 22) ve (3. 23) denklemi kullanılarak gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\nabla_X^{\perp} h(Y,Z) - h\left(\nabla_X Y, Z\right) - h\left(Y, \nabla_X Z\right) - g(Y,Z)\nabla_X^{\perp}U^{\perp}$$
$$-\omega(Y)\,h(X,Z) + g(X,Y)h(U^{T},Z) + \eta(X)h(Y,Z) + \eta(Y)h(X,Z)$$
$$-g(Y,Z)\eta(X)U^{\perp} - g(X,Z)\eta(Y)U^{\perp} - \omega(Z)\,h(Y,X)$$
$$+g(X,Z)h(Y,U^{T}) + \eta(Z)h(Y,X) + \eta(X)h(Y,Z)$$
$$-\eta(Z)g(Y,X)U^{\perp} - \eta(X)g(Y,Z)U^{\perp} = 0 \qquad (5.\ 68)$$

bulunur. Tanım 2.2.4. e göre $\bar{\nabla}$, M nin van der Waerden Bortolotti koneksiyonu olduğu için (5. 68) eşitliği

$$(\overline{\nabla}_X h)(Y,Z) - g(Y,Z)\nabla_X^{\perp}U^{\perp} - \omega(Y)h(X,Z) + g(X,Y)h(U^T,Z)$$
$$+2\eta(X)h(Y,Z) + \eta(Y)h(X,Z) - 2\eta(X)g(Y,Z)U^{\perp} - \eta(Y)g(X,Z)U^{\perp}$$
$$-\omega(Z)h(Y,X) + g(X,Z)h(Y,U^T) + \eta(Z)h(Y,X)$$
$$-\eta(Z)g(Y,X)U^{\perp} = 0 \qquad (5.\ 69)$$

olarak yazılabilir. M nin 2. temel formu van der Waerden Bortolotti koneksiyona göre paralel olduğundan $(\overline{\nabla}_X h)(Y,Z) = 0$ olup böylece (5. 69) denklemi

$$-g(Y,Z)\nabla_X^{\perp}U^{\perp} - \omega(Y)h(X,Z) + g(X,Y)h(U^T,Z)$$
$$+2\eta(X)h(Y,Z) + \eta(Y)h(X,Z) - 2\eta(X)g(Y,Z)U^{\perp} - \eta(Y)g(X,Z)U^{\perp}$$
$$-\omega(Z)h(Y,X) + g(X,Z)h(Y,U^T) + \eta(Z)h(Y,X)$$
$$-\eta(Z)g(Y,X)U^{\perp} = 0 \qquad (5.\ 70)$$

biçimine dönüşür. (5. 70) eşitliğinde Y ve Z üzerinden kontraksiyon alınırsa

$$-n\nabla_X^{\perp}U^{\perp} - h(U^T,X) + h(X,U^T) + 2\eta(X)\mathrm{trace}h + h(X,E^T) - 2n\eta(X)U^{\perp}$$
$$-\eta(X)U^{\perp} - h(X,U^T) + h(X,U^T) + h(X,E^T) - \eta(X)U^{\perp} = 0 \qquad (5.\ 71)$$

bulunur. $\tilde{E}$ vektör alanının hipotez gereği normal olduğu göz önüne alınırsa

$$\nabla_X^{\perp}U^{\perp} = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla $U^{\perp}$ normal demette paraleldir. ■

Örnek 5.2.7.

$X(u,v) = (\cos u, \sin u, \cos v, \sin v)$ ile verilen $\mathbf{T}^2 : S^1(1)xS^1(1) \subset \mathbb{R}^4$ tor yüzeyini göz önüne alalım.

$X(u,v)$ ifadesinden kısmi türev yardımı ile $p = (\cos u, \sin u, \cos v, \sin v)$ için $T_p(M)$ tanjant uzayı

$$X_u = (-\sin u, \cos u, 0, 0),$$
$$X_v = (0, 0, -\sin v, \cos v),$$

vektörleri ile ve $T_p^{\perp}(M)$ normal uzayı da

$$n_1 = (\cos u, \sin u, 0, 0),$$
$$n_2 = (0, 0, \cos v, \sin v)$$

vektörleri ile gerilir. Böylece aşağıdaki şekilde $\{X, Y, \upsilon_1, \upsilon_2\}$ ortonormal çatısını tanımlayabiliriz.

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{X_u}{\|X_u\|} = X_u \\ Y &= \frac{X_v}{\|X_v\|} = X_v \\ \upsilon_1 &= \frac{n_1}{\|n_1\|} = n_1 \\ \upsilon_2 &= \frac{n_2}{\|n_2\|} = n_2. \end{aligned}\right\} \tag{5. 72}$$

Ayrıca $\tilde{U}$ ve $\tilde{E}$ vektör alanlarının $\mathbf{T}^2$ ye teğet olduğunu varsayalım. Bu taktirde $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\tilde{U} = a_1 X + b_1 Y \,, \; \tilde{E} = a_2 X + b_2 Y$$

yazılabilir.

X, Y, υ_1, υ_2 nin kovaryant türevleri alındıktan sonra Gauss denklemi yardımıyla

$$\left.\begin{aligned} \nabla_X X &= 0 \\ \nabla_X Y &= 0 \\ \nabla_Y X &= 0 \\ \nabla_Y Y &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{5. 73}$$

$$\left.\begin{aligned} h(X, X) &= -\upsilon_1 \\ h(X, Y) &= 0 \\ h(Y, X) &= 0 \\ h(Y, Y) &= -\upsilon_2 \end{aligned}\right\} \tag{5. 74}$$

sonuçları elde edilmiştir [24]. Buradan

$$\left.\begin{aligned} g_{11} &= < X, X > = 1 \\ g_{12} &= < X, Y > = 0 \\ g_{22} &= < Y, Y > = 1 \end{aligned}\right\} \tag{5. 75}$$

elde edilir. O halde (5. 75) eşitlikleri yardımıyla

$$\tilde{g}(X, Y) = g_{11} d_u(X) d_u(Y) + g_{12} d_u(X) d_v(Y) + g_{22} d_v(X) d_v(Y)$$

$$\tilde{g}(X, Y) = d_u(X) d_u(Y) + d_v(X) d_v(Y) \tag{5. 76}$$

bulunur. X ve Y teğet vektörleri için

$$\left.\begin{aligned} X &= a\frac{\partial}{\partial u} + b\frac{\partial}{\partial v} \\ Y &= c\frac{\partial}{\partial u} + d\frac{\partial}{\partial v} \end{aligned}\right\} \text{ olsun.} \qquad \left.\begin{aligned} X &= \frac{\partial}{\partial u} \quad \text{olduğundan} \quad a = 1, b = 0 \\ Y &= \frac{\partial}{\partial v} \quad \text{olduğundan} \quad c = 0, d = 1 \end{aligned}\right\} \tag{5. 77}$$

olarak elde edilir. O halde

$$d_u(X) = d_u(a\frac{\partial}{\partial u} + b\frac{\partial}{\partial v}) = a$$

bulunur. Benzer şekilde elde edilen sonuçlarla birlikte

$$\tilde{g}(X, Y) = a.c + b.d$$

elde edilir. Dolayısıyla buradan

$$\left.\begin{aligned} \tilde{g}(X, X) &= a.a + b.b = 1 \\ \tilde{g}(X, Y) &= a.c + b.d = 0 \\ \tilde{g}(Y, Y) &= c.c + d.d = 1 \end{aligned}\right\} \tag{5. 78}$$

bulunur.

$\overset{*}{\nabla}, \overset{*}{\tilde{\nabla}}$ semi simetrik metrik olmayan koneksiyonun indirgenmiş koneksiyonu olmak üzere (5. 7), (5. 73), (5. 78) ve (3. 22) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned} \overset{*}{\nabla}_X X &= \nabla_X X + \omega(X)X - \tilde{g}(X, X)U^T - \eta(X)X - \eta(X)X \\ &= \omega(X)X - U^T - 2\eta(X)X \end{aligned} \tag{5. 79}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\overset{*}{\nabla}_X Y = \omega(Y)X - \eta(X)Y - \eta(Y)X \tag{5. 80}$$

$$\overset{*}{\nabla}_Y X = \omega(X)Y - \eta(Y)X - \eta(X)Y \tag{5. 81}$$

$$\overset{*}{\nabla}_Y Y = \omega(Y)Y - U^T - 2\eta(Y)Y \tag{5. 82}$$

eşitliklerine ulaşılır. Böylece (5. 78) ve (5. 79) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned} \left(\overset{*}{\nabla}_X \tilde{g}\right)(X, X) &= \overset{*}{\nabla}_X \tilde{g}(X, X) - \tilde{g}(\overset{*}{\nabla}_X X, X) - \tilde{g}(X, \overset{*}{\nabla}_X X) \\ &= -2\tilde{g}(\overset{*}{\nabla}_X X, X) \\ &= -2(\omega(X)\tilde{g}(X, X) - \tilde{g}(U^T, X) - 2\eta(X)\tilde{g}(X, X)) \\ &= 4\eta(X) \end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde (5. 78) ve (5. 80)-(5. 82) eşitlikleri yardımıyla

$$\left(\overset{*}{\nabla}_X \tilde{g}\right)(X,Y)=\eta(Y)$$

$$\left(\overset{*}{\nabla}_X \tilde{g}\right)(Y,Y)=2\eta(X)$$

$$\left(\overset{*}{\nabla}_Y \tilde{g}\right)(X,X)=2\eta(Y)$$

$$\left(\overset{*}{\nabla}_Y \tilde{g}\right)(X,Y)=\eta(X)$$

$$\left(\overset{*}{\nabla}_Y \tilde{g}\right)(Y,Y)=4\eta(Y)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerde $\tilde{E}$ vektör alanı $\mathbf{T}^2$ ye teğet olduğundan yukarıdaki eşitliklerin sağ tarafları aynı anda sıfır olmayacaktır. Dolayısıyla [17] anlamında semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonun indirgenmiş koneksiyonu metrik olmayan koneksiyondur.

[17] anlamında semi-simetrik metrik olmayan koneksiyona göre torsiyon tensörü (5. 7) ve (5. 78) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned}\overset{*}{T}(X,Y) &= \overset{*}{\nabla}_X Y - \overset{*}{\nabla}_Y X - [X,Y] \\ &= \nabla_X Y + \omega(Y)X - \tilde{g}(X,Y)U^T - \eta(X)Y - \eta(Y)X \\ &\quad - \nabla_Y X - \omega(X)Y + \tilde{g}(X,Y)U^T + \eta(Y)X + \eta(X)Y - [X,Y]\end{aligned}$$

$$\overset{*}{T}(X,Y) = \nabla_X Y + \omega(Y)X - \nabla_Y X - \omega(X)Y - [X,Y]$$

$$\overset{*}{T}(X,Y) = \omega(Y)X - \omega(X)Y$$

olarak hesaplanır. $\tilde{U}$ vektör alanı $\mathbf{T}^2$ ye teğet olduğundan

$$\tilde{g}(Y,\tilde{U}) = \tilde{g}(Y, a_1 X + b_1 Y) = b_1$$

$$\tilde{g}(X,\tilde{U}) = \tilde{g}(X, a_1 X + b_1 Y) = a_1$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\overset{*}{T}(X,Y) = b_1 X - a_1 Y \neq 0 \tag{5. 83}$$

elde edilir. O halde (5. 83) eşitliği ile birlikte [17] anlamında semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonun indirgenmiş koneksiyonu semi-simetrik metrik olmayan koneksiyondur. Bu ifade Teorem 5.1.1. de elde edilen sonucu desteklemektedir.

$\tilde{U}$ vektör alanı $\mathbf{T}^2$ ye teğet olduğundan (5. 8) eşitliğine göre

$$\overset{*}{h}(X,Y) = h(X,Y)$$

yazılabileceğinden (5. 74) ve (5. 78) eşitlikleri yardımıyla

$$\overset{*}{h}(X,X) = -\upsilon_1 \tag{5. 84}$$

$$\overset{*}{h}(X,Y) = h(X,Y) = 0 \tag{5. 85}$$

$$\overset{*}{h}(Y,Y) = -\upsilon_2 \tag{5. 86}$$

elde edilir. O halde $\mathbf{T}^2$ nin semi-simetrik metrik olmayan koneksiyona ve Levi-Civita koneksiyona göre ortalama eğrilikleri

$$\overset{*}{H} = \frac{\overset{*}{h}(X,X) + \overset{*}{h}(X,Y) + \overset{*}{h}(Y,Y)}{2} = -\frac{1}{2}(\upsilon_1 + \upsilon_2) \tag{5. 87}$$

$$H = \frac{h(X,X) + h(X,Y) + h(Y,Y)}{2} = -\frac{1}{2}(\upsilon_1 + \upsilon_2) \tag{5. 88}$$

bulunur. Böylece $\tilde{U}$ vektör alanı $\mathbf{T}^2$ ye teğet, $\overset{*}{h} = h$ ve $\overset{*}{H} = H$ olduğundan takip eden sonuçları elde ederiz. $\mathbf{T}^2$ nin Levi-Civita koneksiyona göre total geodezik olması için gerek ve yeter şart $\mathbf{T}^2$ nin semi-simetrik metrik olmayan koneksiyona göre total geodezik olmasıdır. $\mathbf{T}^2$ nin Levi-Civita koneksiyona göre total umbilik olması için gerek ve yeter şart $\mathbf{T}^2$ nin semi-simetrik metrik olmayan koneksiyona göre total umbilik olmasıdır. Ayrıca $\mathbf{T}^2$ nin Levi-Civita koneksiyona göre minimal olması için gerek ve yeter şart $\mathbf{T}^2$ nin semi-simetrik metrik olmayan koneksiyona göre minimal olmasıdır. Bu ifadeler Teorem 5.1.3. de elde edilen sonuçları desteklemektedir.

6. ÜZERİNDE [17] ANLAMINDA SEMİ-SİMETRİK METRİK OLMAYAN KONEKSİYON TANIMLI OLAN REEL UZAY FORMUNUN ALTMANİFOLDLARI İÇİN CHEN EŞİTSİZLİKLERİ

Bu bölüm orijinal sonuçlar içermektedir. Bu bölümde üzerinde [17] anlamında semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon tanımlı olan reel uzay formunun altmanifoldları için Chen eşitsizlikleri elde edilmiştir

6.1 İlk Chen Eşitsizliği

Tanım 6.1.1. (M, g) n-boyutlu bir Riemann manifoldu, $K(\pi)$ M nin bir π 2-düzlem kesitinin eğriliği, $\pi \subset T_pM^n$, $p \in M^n$ ve τ, p de skaler eğrilik olmak üzere ilk Chen değişmezi

$$\delta_{M^n}(p) = \tau(p) - \inf\{K(\pi) \,|\, \pi \subset T_pM^n, p \in M^n, \dim \pi = 2\} \tag{6. 1}$$

ile tanımlanır [25].

Yardımcı Teorem 6.1.2. $n \geq 2$ olmak üzere $a_1, a_2, ..., a_n, b$ reel sayı (n+1)-lisi verilsin. Bu taktirde

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = (n-1)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\,2} + b\right)$$

dir. O zaman $2a_1a_2 \geq b$ dir. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart $a_1 + a_2 = a_3 = ... = a_n$ olmasıdır [26].

Tanım 6.1.3. (M, g) n-boyutlu bir Riemann manifoldu, $K(\pi)$ M nin bir π 2-düzlem kesitinin eğriliği ve $\pi \subset T_pM$, $p \in M$ olsun. T_pM nin bir k-düzlem kesiti L^k ve X ise L^k da bir birim vektör olsun. $e_1 = X$ olacak şekilde L^k nin ortonormal bir bazını $\{e_1, ..., e_k\}$ olarak seçelim. X de Ricci eğriliği (veya $k -$ Ricci eğriliği)

$$\mathrm{Ric}_{L^k}(X) = K_{12} + \ldots + K_{1k}$$

şeklinde tanımlanır. Burada K_{ij} ler e_i, e_j ile gerilen 2-düzlem kesiminin kesitsel eğrilikleridir. $2 \le k \le n$ olmak üzere k tam sayısı için M üzerinde Θ_k Riemann değişmezi

$$\Theta_k(p) = \frac{1}{k-1} \inf_{L,X} \mathrm{Ric}_L(X), \qquad p \in M,$$

şeklinde tanımlanır [27].

M, üzerinde [17] anlamında semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon tanımlı (n+d)-boyutlu bir $\tilde{M}(c)$ reel uzay formun ($n \ge 3$)-boyutlu bir altmanifoldu olsun. $p \in M$ olmak üzere T_pM ve $T_p^{\perp}M$ nin ortonormal bazıları sırasıyla $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ ve $\{e_{n+1}, \ldots, e_{n+p}\}$ olsun.

$$\Omega(e_2) = \beta_{22} + \eta(\overset{*}{h}(e_2, e_2)) \tag{6. 2}$$

ile tanımlayalım. Böylece aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 6.1.4.

M, üzerinde [17] anlamında semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon tanımlı (n+d)-boyutlu bir $\tilde{M}(c)$ reel uzay formun ($n \ge 3$)-boyutlu bir altmanifoldu olsun. Bu durumda

$$\tau(p) - K(\pi) \le \frac{(n-2)}{2}\left[(n+1)c - 2\lambda + \frac{n^2}{2(n-1)}\|\overset{*}{H}\|^2\right] - \Omega(e_2) - iz\left(\alpha_{|\pi^{\perp}}\right) + \frac{(n-1)}{2}\left(\sigma + n\eta(\overset{*}{H})\right) \tag{6. 3}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\lambda = iz\,\alpha$ ve $\sigma = iz\,\beta$ dır.

İspat : [17] anlamında semi-simetrik metrik olmayan koneksiyona ve Levi-Civita koneksiyona göre M nin ikinci temel formları sırasıyla $\overset{*}{h}$ ve h olmak üzere (5.36) eşitliği gereği [17] anlamında semi-simetrik metrik olmayan koneksiyona göre Gauss denklemi

$$\overset{*}{\tilde{R}}(X,Y,Z,W)=\overset{*}{R}(X,Y,Z,W)-g(\overset{*}{h}(X,W),\overset{*}{h}(Y,Z))+g(\overset{*}{h}(Y,W),\overset{*}{h}(X,Z))$$

$$-\eta(\overset{*}{h}(Y,Z))g(X,W)+\eta(\overset{*}{h}(X,Z))g(Y,W) \qquad (6.\ 4)$$

dir. $\tilde{M}(c)$ üzerinde $\tilde{\nabla}$ Levi-Civita koneksiyona göre $\tilde{R}$ eğrilik tensörünün

$$\tilde{R}(X,Y,Z,W)=c\{g(X,W)g(Y,Z)-g(X,Z)g(Y,W)\} \qquad (6.\ 5)$$

olduğu bilinmektedir. Böylece (3. 26) denklemi

$$\begin{aligned}\overset{*}{\tilde{R}}(X,Y,Z,W)=\ & c\{g(X,W)g(Y,Z)-g(X,Z)g(Y,W)\}-\alpha(Y,Z)g(X,W)\\ & +\alpha(X,Z)g(Y,W)-g(Y,Z)\alpha(X,W)+g(X,Z)\alpha(Y,W)\\ & +\beta(Y,X)g(Z,W)-\beta(X,Y)g(Z,W)+\beta(Y,Z)g(X,W)\\ & -\beta(X,Z)g(Y,W)\end{aligned} \qquad (6.\ 6)$$

biçimine dönüşür. X=W=e_i , Y=Z=e_j olmak üzere (6. 4) eşitliğinden

$$\overset{*}{\tilde{R}}(e_i,e_j,e_j,e_i)=\tilde{R}(e_i,e_j,e_j,e_i)-g(\overset{*}{h}(e_i,e_i),\overset{*}{h}(e_j,e_j))+g(\overset{*}{h}(e_j,e_i),\overset{*}{h}(e_i,e_j))$$

$$-\eta(\overset{*}{h}(e_j,e_j))g(e_i,e_i)+\eta(\overset{*}{h}(e_i,e_j))g(e_j,e_i) \qquad (6.\ 7)$$

ve (6. 6) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\overset{*}{\tilde{R}}(e_i,e_j,e_j,e_i)=\ & c(g(e_i,e_i)g(e_j,e_j)-g(e_i,e_j)g(e_j,e_i))\\ & -\alpha(e_j,e_j)g(e_i,e_i)+\alpha(e_i,e_j)g(e_j,e_i)\\ & -g(e_j,e_j)\alpha(e_i,e_i)+g(e_i,e_j)\alpha(e_j,e_i)\\ & +\beta(e_j,e_i)g(e_j,e_i)-\beta(e_i,e_j)g(e_i,e_j)\\ & +\beta(e_j,e_j)g(e_i,e_i)-\beta(e_i,e_j)g(e_j,e_i)\end{aligned} \qquad (6.\ 8)$$

elde edilir. (6. 7) ve (6. 8) denklemleri eşitlenerek

$$\begin{aligned}& c(g(e_i,e_i)g(e_j,e_j)-g(e_i,e_j)g(e_j,e_i))-\alpha(e_j,e_j)g(e_i,e_i)+\alpha(e_i,e_j)g(e_j,e_i)\\ & -g(e_j,e_j)\alpha(e_i,e_i)+g(e_i,e_j)\alpha(e_j,e_i)+\beta(e_j,e_i)g(e_j,e_i)-\beta(e_i,e_j)g(e_i,e_j)\\ & +\beta(e_j,e_j)g(e_i,e_i)-\beta(e_i,e_j)g(e_j,e_i)=\tilde{R}(e_i,e_j,e_j,e_i)-g(\overset{*}{h}(e_i,e_i),\overset{*}{h}(e_j,e_j))\\ & +g(\overset{*}{h}(e_j,e_i),\overset{*}{h}(e_i,e_j))-\eta(\overset{*}{h}(e_j,e_j))g(e_i,e_i)+\eta(\overset{*}{h}(e_i,e_j))g(e_j,e_i)\end{aligned} \qquad (6.\ 9)$$

yazılabilir. (6. 9) denkleminde $\{e_i,e_j\}$ ortonormal baz olduğundan (6. 9) denklemi

$$c-\alpha(e_j,e_j)-\alpha(e_i,e_i)+\beta(e_j,e_j)=\overset{*}{R}(e_i,e_j,e_j,e_i)-g(\overset{*}{h}(e_i,e_i),\overset{*}{h}(e_j,e_j))$$

$$+g(\overset{*}{h}(e_j,e_i),\overset{*}{h}(e_i,e_j))-\eta(\overset{*}{h}(e_j,e_j)) \qquad (6.\ 10)$$

biçimine dönüşür. Ayrıca (6. 9) denkleminde $i \leq i, j \leq n$ olmak üzere i ve j indisleri üzerinden toplam alınırsa

$$\sum_{i,j=1}^{n}[c(g(e_i,e_i)g(e_j,e_j)-g(e_i,e_j)g(e_j,e_i))-\alpha(e_j,e_j)g(e_i,e_i)+\alpha(e_i,e_j)g(e_j,e_i)$$
$$-g(e_j,e_j)\alpha(e_i,e_i)+g(e_i,e_j)\alpha(e_j,e_i)+\beta(e_j,e_i)g(e_j,e_i)-\beta(e_i,e_j)g(e_i,e_j)$$
$$+\beta(e_j,e_j)g(e_i,e_i)-\beta(e_i,e_j)g(e_j,e_i)]=\sum_{i,j=1}^{n}[\tilde{R}(e_i,e_j,e_j,e_i)-g(\overset{*}{h}(e_i,e_i),\overset{*}{h}(e_j,e_j))$$
$$+g(\overset{*}{h}(e_j,e_i),\overset{*}{h}(e_i,e_j))-\eta(\overset{*}{h}(e_j,e_j))g(e_i,e_i)+\eta(\overset{*}{h}(e_i,e_j))g(e_j,e_i)] \tag{6. 11}$$

elde edilir. (6. 11) eşitliğindeki toplamlar ayrı ayrı hesaplanırsa

$$\sum_{i,j=1}^{n}c(g(e_i,e_i)g(e_j,e_j)-g(e_i,e_j)g(e_j,e_i)) =$$
$$=\sum_{i=1}^{n}c\left(g(e_i,e_i)\sum_{j=1}^{n}g(e_j,e_j)-g(e_i,\sum_{j=1}^{n}g(e_i,e_j)e_j)\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}c\left(n.g(e_i,e_i)-g(e_i,e_i)\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}c(n-1).g(e_i,e_i)=n.(n-1)c \tag{6. 12}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}\alpha(e_j,e_j)g(e_i,e_i)=\sum_{i=1}^{n}\lambda g(e_i,e_i)=n\lambda \tag{6. 13}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}\alpha(e_i,e_j)g(e_i,e_j)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha(e_i,g(e_i,e_j)e_j)=\sum_{i=1}^{n}\alpha(e_i,e_i)=\lambda \tag{6. 14}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}g(e_j,e_j)\alpha(e_i,e_i)=\sum_{j=1}^{n}\lambda g(e_j,e_j)=n\lambda \tag{6. 15}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}g(e_i,e_j)\alpha(e_j,e_i)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha(g(e_i,e_j)e_j,e_i)=\sum_{i=1}^{n}\alpha(e_i,e_i)=\lambda \tag{6. 16}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}\beta(e_j,e_i)g(e_i,e_j)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\beta(g(e_i,e_j)e_j,e_i)=\sum_{i=1}^{n}\beta(e_i,e_i)=\sigma \tag{6. 17}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}\beta(e_i,e_j)g(e_i,e_j)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\beta(e_i,g(e_i,e_j)e_j)=\sum_{i=1}^{n}\beta(e_i,e_i)=\sigma \tag{6. 18}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}\beta(e_j,e_j)g(e_i,e_i)=\sum_{i=1}^{n}\sigma g(e_i,e_i)=n\sigma \tag{6. 19}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}\tilde{R}(e_i,e_j,e_j,e_i)=2\tau \tag{6. 20}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} g(\overset{*}{h}(e_i,e_i),\overset{*}{h}(e_j,e_j))=g(n\overset{*}{H},n\overset{*}{H})=n^2g(\overset{*}{H},\overset{*}{H})=n^2\|\overset{*}{H}\|^2 \tag{6. 21}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} g(\overset{*}{h}(e_j,e_i),\overset{*}{h}(e_i,e_j))=\|\overset{*}{h}\|^2 \tag{6. 22}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \eta(\overset{*}{h}(e_j,e_j))g(e_i,e_i)=\eta(n\overset{*}{H}).n=n^2\eta(\overset{*}{H}) \tag{6. 23}$$

ve

$$\sum_{i,j=1}^{n} \eta(\overset{*}{h}(e_i,e_j))g(e_i,e_j)=\sum_{i,j=1}^{n} \eta(\overset{*}{h}(e_i,g(e_i,e_j)e_j))$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n} \eta(\overset{*}{h}(e_i,e_i))=\eta(n\overset{*}{H})=n\eta(\overset{*}{H}) \tag{6. 24}$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece (6. 12)-(6. 24) eşitlikleri (6. 11) denkleminde yerine yazılırsa

$$(n-1)\left[nc-2\lambda+\sigma\right]=2\tau+\|\overset{*}{h}\|^2-n^2\|\overset{*}{H}\|^2-(n^2-n)\eta(\overset{*}{H}) \tag{6. 25}$$

elde edilir. Burada

$$n^2\|\overset{*}{H}\|^2=(n-1)(\|\overset{*}{h}\|^2+\varepsilon) \tag{6. 26}$$

olacak biçimde bir ε bulmaya çalışalım. Böylece (6. 26) eşitliğinden

$$(n-1)\|\overset{*}{h}\|^2=n^2\|\overset{*}{H}\|^2-(n-1)\varepsilon \tag{6. 27}$$

bulunur. (6. 25) eşitliğinin her iki tarafı (n-1) ile çarpılırsa

$$(n-1)^2\left[nc-2\lambda+\sigma\right]=2(n-1)\tau+(n-1)\|\overset{*}{h}\|^2$$

$$-n^2(n-1)\|\overset{*}{H}\|^2-n(n-1)^2\eta(\overset{*}{H}) \tag{6. 28}$$

elde edilir. (6. 27) eşitliği (6. 28) da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}(n-1)^2\left[nc-2\lambda+\sigma\right]=2(n-1)\tau+n^2\|\overset{*}{H}\|^2-(n-1)\varepsilon\\ -n^2(n-1)\|\overset{*}{H}\|^2-n(n-1)^2\eta(\overset{*}{H})\end{aligned} \tag{6. 29}$$

bulunur. (6. 29) denkleminde ε çekilirse

$$\varepsilon = -(n-1)\left[nc - 2\lambda + \sigma\right] + 2\tau + \frac{n^2(2-n)}{n-1}\|\overset{*}{H}\|^2 - n(n-1)\eta(\overset{*}{H}) \tag{6. 30}$$

elde edilir. O halde (6. 25) ve (6. 30) eşitliklerinden

$$n^2\|\overset{*}{H}\|^2 = (n-1)(\|\overset{*}{h}\|^2 + \varepsilon)$$

eşitliğini sağlayan ε sayısı elde edilmiş olur.

$p \in M$, $\pi \subset T_pM$, $\dim \pi = 2$, $\pi = Sp\{e_1, e_2\}$ olsun. O halde $e_{n+1} = \dfrac{\overset{*}{H}}{\|\overset{*}{H}\|}$ ve

(6.26) denkleminden

$$(\sum_{i=1}^{n} \overset{*}{h}{}_{ii}^{n+1})^2 = (n-1)\left(\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{r=n+1}^{n+d}(\overset{*}{h}{}_{ij}^{r})^2 + \varepsilon\right),$$

veya eşiti olan

$$(\sum_{i=1}^{n} \overset{*}{h}{}_{ii}^{n+1})^2 = (n-1)\{\sum_{i=1}^{n}(\overset{*}{h}{}_{ii}^{n+1})^2 + \sum_{i\neq j}(\overset{*}{h}{}_{ij}^{n+1})^2 + \sum_{i,j=1}^{n}\sum_{r=n+2}^{n+d}(\overset{*}{h}{}_{ij}^{r})^2 + \varepsilon\} \tag{6. 31}$$

eşitliklerini tanımlayalım. Önerme 6.1.2. ve (6. 31) eşitliği kullanılırsa;

$$2\overset{*}{h}{}_{11}^{n+1}\overset{*}{h}{}_{22}^{n+1} \geq \sum_{i\neq j}(\overset{*}{h}{}_{ij}^{n+1})^2 + \sum_{i,j=1}^{n}\sum_{r=n+2}^{n+d}(\overset{*}{h}{}_{ij}^{r})^2 + \varepsilon. \tag{6. 32}$$

elde edilir. (6. 10) eşitliğinde $i=1,\ j=2$ için Gauss denklemi

$$K(\pi) = \overset{*}{R}(e_1,e_2,e_2,e_1) = c - \alpha_{22} - \alpha_{11} + \beta_{22} + \eta(\overset{*}{h}(e_2,e_2)) + \sum_{r=n+1}^{d}\left[\overset{*}{h}{}_{11}^{r}\overset{*}{h}{}_{22}^{r} - (\overset{*}{h}{}_{12}^{r})^2\right] \geq$$

$$\geq c - \alpha_{22} - \alpha_{11} + \beta_{22} + \eta(\overset{*}{h}(e_2,e_2)) + \frac{1}{2}[\sum_{i\neq j}(\overset{*}{h}{}_{ij}^{n+1})^2 + \sum_{i,j=1}^{n}\sum_{r=n+2}^{n+d}(\overset{*}{h}{}_{ij}^{r})^2 + \varepsilon] +$$

$$+ \sum_{r=n+2}^{n+d}\overset{*}{h}{}_{11}^{r}\overset{*}{h}{}_{22}^{r} - \sum_{r=n+1}^{n+d}(\overset{*}{h}{}_{12}^{r})^2 = c - \alpha_{22} - \alpha_{11} + \beta_{22} + \eta(\overset{*}{h}(e_2,e_2)) +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}(\overset{*}{h}{}_{ij}^{n+1})^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{r=n+2}^{n+d}(\overset{*}{h}{}_{ij}^{r})^2 + \frac{1}{2}\varepsilon + \sum_{r=n+2}^{n+d}\overset{*}{h}{}_{11}^{r}\overset{*}{h}{}_{22}^{r} - \sum_{r=n+1}^{n+d}(\overset{*}{h}{}_{12}^{r})^2 =$$

$$= c - \alpha_{22} - \alpha_{11} + \beta_{22} + \eta(\overset{*}{h}(e_2,e_2)) + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}(\overset{*}{h}{}_{ij}^{n+1})^2 + \frac{1}{2}\sum_{r=n+2}^{n+d}\sum_{i,j>2}(\overset{*}{h}{}_{ij}^{r})^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{r=n+2}^{n+d}\left(\overset{*}{h}{}_{11}^{r} + \overset{*}{h}{}_{22}^{r}\right)^2 + \sum_{j>2}[(\overset{*}{h}{}_{1j}^{n+1})^2 + (\overset{*}{h}{}_{2j}^{n+1})^2] + \frac{1}{2}\varepsilon \geq$$

$$\geq c - \alpha_{22} - \alpha_{11} + \beta_{22} + \eta(\overset{*}{h}(e_2,e_2)) + \frac{\varepsilon}{2},$$

olarak yazılabilir. Böylece

$$K(\pi) \geq c-\alpha(e_2,e_2)-\alpha(e_1,e_1)+\beta(e_2,e_2)+\eta(\overset{*}{h}(e_2,e_2))+\frac{\varepsilon}{2} \tag{6. 33}$$

elde edilir.

$$\alpha(e_1,e_1)+\alpha(e_2,e_2)=\lambda-iz\left(\alpha_{|\pi^\perp}\right)$$

olduğundan bu eşitlik (6. 33) denkleminde yerine yazılarak (6. 2) ve (6. 30) eşitlikleri kullanılırsa

$$K(\pi) \geq c-\left(\lambda-iz\left(\alpha_{|\pi^\perp}\right)\right)+\Omega(e_2)+\frac{\varepsilon}{2}=c-\left(\lambda-iz\left(\alpha_{|\pi^\perp}\right)\right)+\Omega(e_2)-$$

$$-\frac{(n-1)}{2}\left[nc-2\lambda+\sigma\right]+\tau+\frac{n^2(2-n)}{2(n-1)}\|\overset{*}{H}\|^2-\frac{n(n-1)}{2}\eta(\overset{*}{H})$$

olup buradan

$$K(\pi) \geq \tau-\frac{(n-2)}{2}\left[(n+1)c-2\lambda+\frac{n^2}{2(n-1)}\|\overset{*}{H}\|^2\right]+\Omega(e_2)+iz\left(\alpha_{|\pi^\perp}\right)$$
$$-\frac{(n-1)}{2}\left(\sigma+n\eta(\overset{*}{H})\right)$$

elde edilir. ■

Sonuç 6.1.5.

Teorem 6.1.4. deki şartlar altında eğer $\tilde{U}$ vektör alanı M ye teğet ise

$$\tau(p)-K(\pi) \leq \frac{(n-2)}{2}\left[(n+1)c-2\lambda+\frac{n^2}{2(n-1)}\|H\|^2\right]-\Omega(e_2)-iz\left(\alpha_{|\pi^\perp}\right)$$
$$+\frac{(n-1)}{2}\left(\sigma+n\eta(H)\right) \tag{6. 34}$$

dir.

İspat : $\tilde{U}$ vektör alanı M ye teğet olduğundan (5. 13) gereği $\overset{*}{H}=H$ dır. Böylece (6. 3) eşitsizliğinde $\overset{*}{H}$ yerine H yazılır ise (6. 34) eşitsizliği elde edilir. ■

Teorem 6.1.6.

$\tilde{U}$ vektör alanı M ye teğet olsun. Bu taktirde (6. 3) eşitsizliğindeki eşitliğin bir $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart M nin şekil operatörü matrislerinin

$$A_{e_{n+1}} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mu & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mu \end{pmatrix}$$

$$A_{e_{n+i}} = \begin{pmatrix} \overset{*}{h}{}^{r}_{11} & \overset{*}{h}{}^{r}_{12} & 0 & \dots & 0 \\ \overset{*}{h}{}^{r}_{12} & -\overset{*}{h}{}^{r}_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad 2 \le i \le d,$$

formlarında olacak şekilde T_pM nin bir $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ve $T_p^{\perp}M$ nin bir $\{e_{n+1}, \dots, e_{n+d}\}$ ortonormal bazı olmasıdır. Burada $\overset{*}{h}{}^{r}_{ij} = g(\overset{*}{h}(e_i, e_j), e_r)$, $i \le i, j \le n$ ve $n+1 \le r \le n+d$ dir.

İspat : Bir $p \in M$ noktasında (6. 3) eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart tüm önceki eşitsizliklerde eşitliğin gerçeklenmesidir. Bu durumda Yardımcı Teorem 6.1.2. deki eşitlik sağlanır. Böylece

$$\overset{*}{h}{}^{n+1}_{ij} = 0, \quad \forall i \ne j, \ i, j > 2,$$

$$\overset{*}{h}{}^{r}_{ij} = 0, \quad \forall i \ne j, \ i, j > 2, \ r = n+1, \dots, n+d,$$

$$\overset{*}{h}{}^{r}_{11} + \overset{*}{h}{}^{r}_{22} = 0, \quad \forall r = n+2, \dots, n+d,$$

$$\overset{*}{h}{}^{n+1}_{1j} = \overset{*}{h}{}^{n+1}_{2j} = 0, \quad \forall j > 2,$$

$$\overset{*}{h}{}^{n+1}_{11} + \overset{*}{h}{}^{n+1}_{22} = \overset{*}{h}{}^{n+1}_{33} = \dots = \overset{*}{h}{}^{n+1}_{nn} .$$

elde edilir. $\{e_1, e_2\}$ yi $\overset{*}{h}{}^{n+1}_{12} = 0$ olacak şekilde seçebiliriz. ve $a = \overset{*}{h}{}^{r}_{11}$, $b = \overset{*}{h}{}^{r}_{22}$, $\mu = \overset{*}{h}{}^{n+1}_{33} = ... = \overset{*}{h}{}^{n+1}_{nn}$ olarak gösterelim. Bu durumda Yardımcı Teorem 6.1.2. gereği M nin şekil operatörleri matrisleri istenilen formlarda elde edilmiş olur. ■

6.2 *k*-Ricci Eğriliği

İlk bölümde [17] anlamında $\overset{*}{\tilde{\nabla}}$ semi-simetrik metrik olmayan koneksiyonla verilen (n+d)-boyutlu $\tilde{M}(c)$ reel uzay formunun, $n \geq 3$ boyutlu bir M alt manifoldunun kesitsel eğriliği ile ortalama eğriliğin normunun karesi $\|\overset{*}{H}\|^2$ arasındaki ilişkiyi açıkladık. Bu bölümde ise bu eşitsizliği kullanılarak M in *k*-Ricci eğriliği ile ortalama eğriliğin normunun karesi $\|\overset{*}{H}\|^2$ arasındaki ilişkiyi vereceğiz.

Teorem 6.2.1.

M, üzerinde [17] anlamında semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon tanımlı (n+d)- boyutlu bir $\tilde{M}(c)$ reel uzay formun ($n \geq 3$)-boyutlu bir altmanifoldu ve $\tilde{U}$ vektör alanı M ye teğet olsun. Bu durumda

$$\|\overset{*}{H}\|^2 \geq \frac{2\tau}{n(n-1)} - \frac{1}{n}\left[nc - 2\lambda + \sigma\right] - \eta(\overset{*}{H}) \tag{6. 35}$$

dir.

İspat : $p \in M$ ve T_pM in ortonormal bir bazı $\{e_1, e_2, ... , e_n\}$ olsun. (6.25) eşitliğini

$$n^2\|\overset{*}{H}\|^2 = 2\tau + \|\overset{*}{h}\|^2 - (n-1)\left[nc - 2\lambda + \sigma\right] - (n^2 - n)\eta(\overset{*}{H}) \tag{6. 36}$$

şeklinde yazalım. e_{n+1}, H(p) ortalama eğrilik vektörüne paralel ve T_pM nin $\{e_1, e_2, ... , e_n\}$ bazına göre $A_{e_{n+1}}$ bir köşegen matris olacak şekilde p de bir $\{e_1, e_2, ... , e_n, e_{n+1}, ... , e_{n+d}\}$ ortonormal bazını seçelim. Böylece şekil operatör matrisleri

$$A_{e_{n+1}} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix} \tag{6. 37}$$

formunda yazılır. Burada

$$A_{e_r} = (h_{ij}^r), \quad i, j = 1, ..., n; \quad r = n+2, ..., n+d, \quad A_r = 0.$$

dir. (6. 36) eşitliğinden

$$n^2 \|\overset{*}{H}\|^2 = 2\tau + \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{r=n+2}^{n+p} \sum_{i,j=1}^{n} (h_{ij}^r)^2$$

$$-(n-1)\left[nc - 2\lambda + \sigma\right] - (n^2 - n)\eta(\overset{*}{H}) \tag{6. 38}$$

eşitliği elde edilir. Diğer taraftan

$$0 \leq \sum_{i<j} (a_i - a_j)^2 = (n-1)\sum_{i} a_i^2 - 2\sum_{i<j} a_i a_j,$$

olduğundan

$$n^2 \|\overset{*}{H}\|^2 = (\sum_{i=1}^{n} a_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{i<j} a_i a_j \leq n\sum_{i=1}^{n} a_i^2, \tag{6. 39}$$

bulunur. Dolayısıyla (6. 39) eşitsizliğinden

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geq n\|\overset{*}{H}\|^2$$

eşitsizliği bulunur. Böylece (6. 38) eşitliğinden

$$n^2 \|\overset{*}{H}\|^2 \geq 2\tau + n\|\overset{*}{H}\|^2 - (n-1)\left[nc - 2\lambda + \sigma\right] - (n^2 - n)\eta(\overset{*}{H}) \tag{6. 40}$$

veya eşiti olan

$$\|\overset{*}{H}\|^2 \geq \frac{2\tau}{n(n-1)} - \frac{1}{n}\left[nc - 2\lambda + \sigma\right] - \eta(\overset{*}{H})$$

elde edilir. Bu da teoremi ispatlar. ■

Teorem 6.2.2.

M, üzerinde [17] anlamında semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon tanımlı (n+d)-boyutlu bir $\tilde{M}(c)$ reel uzay formun ($n \geq 3$)-boyutlu bir altmanifoldu ve $\tilde{U}$ vektör alanı M ye teğet olsun. $p \in M$ ve $2 \leq k \leq n$ olmak üzere her k tam sayısı için,

$$\|\overset{*}{H}\|^2(p) \geq \Theta_k(p) - \frac{1}{n}\left[nc - 2\lambda + \sigma\right] - \eta(\overset{*}{H}) \tag{6. 41}$$

dir.

İspat : T_pM nin bir ortonormal bazı $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ olsun. $e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}$ tarafından gerilen k-düzlem kesitini $L_{i_1 \ldots i_k}$ şeklinde gösterelim. Tanım 6.1.3 gereği

$$\tau(L_{i_1 \ldots i_k}) = \frac{1}{2} \sum_{i \in \{i_1, \ldots, i_k\}} Ric_{L_{i_1 \ldots i_k}}(e_i),$$

$$\tau(x) = \frac{1}{C_{n-2}^{k-2}} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \tau(L_{i_1 \ldots i_k}).$$

yazılabilir. Böylece (6. 35) eşitsizliği ve yukarıdaki denklemlerden

$$\tau(x) \geq \frac{n(n-1)}{2} \Theta_k(p)$$

dir. Bu da bize (6. 41) eşitsizliğini verir. ■

7. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

4. bölümde, üzerinde [16] anlamında semi-simetrik metrik olmayan, semi-simetrik metrik ve [18] anlamında semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon tanımlı olan Riemann manifoldları için bazı semi-simetri şartlarının sağlanması durumunda manifold için bazı karakterizasyonlar incelenerek Teorem 4.1.4, Teorem 4.1.5, Teorem 4.1.6, Teorem 4.1.9, Teorem 4.1.10, Teorem 4.1.11, Teorem 4.1.13, Teorem 4.2.2, Teorem 4.2.3, Teorem 4.2.4, Teorem 4.2.6, Teorem 4.2.7, Teorem 4.3.3, Teorem 4.3.4 ve Teorem 4.3.5 ispatlanmıştır.

5. bölümde, üzerinde [17] anlamında semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon tanımlı olan bir Riemann manifoldunun altmanifoldları incelenerek Teorem 5.1.1, Teorem 5.1.3, Teorem 5.1.7, Teorem 5.1.8, Teorem 5.2.3, Teorem 5.2.5 ve Teorem 5.2.6 ispatlanmıştır.

Son bölümde üzerinde [17] anlamında semi-simetrik metrik olmayan koneksiyon tanımlı olan reel uzay formunun altmanifoldları için Chen eşitsizlikleri incelenerek, Teorem 6.1.4, Teorem 6.1.6, Teorem 6.2.1 ve Teorem 6.2.2 ispatlanmıştır.

8. KAYNAKLAR

[1] Kobayashi S., Nomizu K., Foundations of differential geometry, John Wiley and Sons, Inc., New York (1996).

[2] Hacısalihoğlu, H. H., Diferensiyel Geometri, İnönü Üniversitesi Yayınları, (1983).

[3] Deszcz, R. and Hotlos, M. On certain subclass of pseudosymmetric manifolds. *publ. Math. Debrecen,* 53 (1998), 29-48.

[4] Friedmann and J. A. Schouten, Über die Geometrie der halbsymmetrischen Übertragungen, *Math. Z.* 21 (1924), no. 1, 211-223.

[5] Yano, K. Kon, M., Structures on manifolds. Series in Pure Mathematics, 3. World Scientific Publishing Co., Singapore, (1984).

[6] Deszcz, R., "On pseudosymmetric spaces" *Bull. Soc. Math. Belg. Ser. A* 44 (1992), no. 1, 1-34.

[7] Chaki, M. C. And Maity, R. K. "On quasi Einstein manifolds", *Publ. Math. Debrecen*, 57 (2000), 297-306.

[8] O'Neill, B., Semi-Riemannian geometry with applications to relativity, Pure and Applied Mathematics, 103. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York, 1983.

[9] Schouten, J. A., Ricci-Calculus. Springer, Berlin, 1954.

[10] Szabó, Z. I., "Structure theorems on Riemannian spaces satisfying $R(X,Y)\cdot R=0$ The local version", *J. Differential Geom.* 17 (1982), no. 4, 531-582.

[11] Chaki, M. C., "On pseudo symmetric manifolds" *An. Stiin. Univ. Al. I. Cuza Iasi Sect. I a Mat.* 33 (1987), no. 1, 53--58.

[12] Chen, B.Y., "Geometry of submanifolds", Pure and Applied Mathematics, No. 22. Marcel Dekker, Inc., New York, (1973).

[13] Özgür, C., On submanifolds of a Riemannian manifold with a semi-symmetric non-metric connection, *Kuwait J. Sci. Eng.*, Baskıda.

[14] Yano, K., On semi-symmetric metric connections, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* 15 (1970), 1579-1586.

[15] Murathan, C. and Özgür, C., Riemann manifolds with a semi-symmetric metric connection satisfying some semisymmetry conditions, *Proceedings of the Estonian Acedemy of Sciences* 57 (2008), no. 4, 210-216

[16] Ageshe, N. S. and Chafle, M.R., A semi-symmetric non-metric connection on a Riemann manifold, *Indian J. Pure Appl. Math.* 23-6 (1992), 399-409.

[17] J. Sengupta, U. C. De, On a type of semi-symmetric non metric *Bull. Calcutta Math.Soc.* 92 (2000), no. 5, 375-384.

[18] Sengupta, J., De, U. C. and Binh, T. Q., On a type of semi-symmetric non-metric connection on a Riemannian manifold, *Indian J. Pure Appl. Math.* 31 (2000), no. 12, 1659-1670.

[19] Blair, D. E., Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds, Progress in Mathematics 203, Birkhouser Boston, Inc., MA, 2002.

[20] Blair, D. E., "Contact Manifolds Riemannian geometry. Lecture Notes in Mathematics, Sipringer-Verlag, Berlin, 1976.

[21] Kenmotsu, K., ''A class of almost contact Riemannian manifolds'', *Tohoku Math. Journ.* 24 (1972), 93-103.

[22] Ludden, G. D. Submanifolds of cosymplectic manifolds. *J. Differential Geometry,* 4 (1970), 237-244.

[23] Ageshe, N. S. and Chafle, M.R., On submanifolds of a Riemannian manifold with a semi-symmetric non-metric connection, *Tensor (N.S.)* 55 (1994), no. 2, 120-130.

[24] Arslan, K. Isoparametric Submanifolds With Pointwise k-planer Normal Sections, The University of Leeds Department Of Pure Mathematics. Doktora Tezi (1993).

[25] Chen, B.Y., δ-invariants, Inequalities of Submanifolds and Their Application, in Topics in Differential Geometry, Eds. A. Mihai, I. Mihai, R. Miron, *Editura Academiei Pomane Bucuresti,* 2008, 29-156.

[26] Chen, B.Y., Some piching and classification teorems for minimal submanifolds, *Arch. Math. (Basel)* 60 (1993), no. 6, 568-578.

[27] Chen, B.Y., Relations between Ricci curvature and shape operator for submanifolds with arbitrary codimensions, *Glasg. Math. J.* 41 (1999), no. 1, 33 41.

[28] Hayden, H. A., Subspace of a space with torsion, Proceedings of the London Mathematical Society II Series 34 (1932), 27-50.

[29] Imai, T., Hypersurfaces of a Riemannian manifold with semi-symmetric metric connection, *Tensor (N.S.)* 23 (1972), 300--306.

[30] Yücesan, A., On semi-Riemannian submanifolds of a semi-Riemannian manifold with a semi-symmetric metric connection, to appear in *Kuwait J. Sci. Eng,* 35 (2008), no. 1A, 53-69.

[31] De, U. C., Pathak, G., On a semi-symmetric metric connection in a Kenmotsu manifold, Bull. *Calcutta Math. Soc.* 94 (2002), no. 4, 319-324.

[32] De, U. C., and Kamilya, D. J., Hypersurfaces of a Riemannian manifold with semi-symmetric non-metric connection, *J. Indian Inst. Sci.* 75 (1995), no. 6, 707-710

[33] Nakao, Z. Submanifolds of a Riemannian manifold with a semi-symmetric metric connection, *Proc. Amer. Math. Soc.* 54 (1976), 261-266.

[34] Nivas, R. On a Submanifolds of a Riemannian manifold with a semi-symmetric metric connection, *Nepali Math. Soc.* Rep. 9 (1984), no. 2, 85-90.

[35] Chen, B-Y., Strings of Riemannian invariants, inequalities, ideal immersions and their applications, The Third Pacific Rim Geometry Conference (Seoul, 1996), 7-60, Monogr. Geom. Topology, 25, Int. Press, Cambridge, MA, 1998.

[36] Mihai, A. and Özgür, C., Chen inequalities for submanifolds of complex space forms and Sasakian space forms with semi-symmetric metric connection, *Rocky Mountain J. Math.*, Baskıda.

[37] Mihai, A. and Özgür, C., Chen inequalities for submanifolds of reel space forms with semi-symmetric metric connection, *Taiwanese J. Math.*, Baskıda.

[38] Imai, T., Notes on semi-symmetric metric connections, Vol. I. *Tensor (N.S.)* 24 (1972), 293-296.

[39] Özgür, C., and Mihai, A. Chen inequalities for submanifolds of reel space forms with semi-symmetric non-metric connection, *Canadian Math. Bull*, Baskıda.