T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

FİBONACCİ, LUCAS, PELL, PELL-LUCAS, GENELLEŞTİRİLMİŞ PELL SAYI DİZİLERİ VE POLİNOMLARININ LİNEER GRUPLARLA İLİŞKİLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FURKAN BİROL

BALIKESİR, ARALIK - 2018

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

FİBONACCİ, LUCAS, PELL, PELL-LUCAS, GENELLEŞTİRİLMİŞ PELL SAYI DİZİLERİ VE POLİNOMLARININ LİNEER GRUPLARLA İLİŞKİLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FURKAN BİROL

Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Özden KORUOĞLU (Tez Danışmanı)
Prof. Dr. Nihal YILMAZ ÖZGÜR
Prof. Dr. Gökhan SOYDAN

BALIKESİR, ARALIK - 2018

KABUL VE ONAY SAYFASI

Furkan BİROL tarafından hazırlanan "**FİBONACCİ, LUCAS, PELL, PELL-LUCAS, GENELLEŞTİRİLMİŞ PELL SAYI DİZİLERİ VE POLİNOMLARININ LİNEER GRUPLARLA İLİŞKİLERİ**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 25.12.2018 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman **Prof. Dr. Özden KORUOĞLU**	....
Üye **Prof. Dr. Nihal YILMAZ ÖZGÜR**	....
Üye **Prof. Dr. Gökhan SOYDAN**	....

Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Prof. Dr. Necati ÖZDEMİR ....

ÖZET

FİBONACCİ, LUCAS, PELL, PELL-LUCAS, GENELLEŞTİRİLMİŞ PELL SAYI DİZİLERİ VE POLİNOMLARININ LİNEER GRUPLARLA İLİŞKİLERİ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
FURKAN BİROL
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. ÖZDEN KORUOĞLU)
BALIKESİR, ARALIK - 2018

Bu tezde, Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, modified Pell sayı dizileri ve polinomları çalışılmıştır. Bu polinomların kökleri ile lineer gruplar arasındaki bazı sonuçlar verilmiştir. Ayrıca genelleştirilmiş Pell sayıları ile $\overline{H}_{3,q}$ genişletilmiş genel Hecke grubu arasındaki bazı ilişkiler incelenmiştir.

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, çalışma tanıtılmıştır. İkinci bölümde; çalışma için gerekli tanım, teorem, metot ve sonuçlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde, karmaşık fonksiyonlar teorisi ile ilişkili olarak Pell polinomunun farklı bir temsili ve genel kök formülü elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde, Lucas ve Pell polinom sınıfları için yeni üreteç matrisler elde edilmiştir. Fibonacci, Lucas ve Pell polinomlarının kökleri ile ilişkili olan lineer grupların üreteçleri, üreteçlerinin matris temsilleri ve elemanların birbirleri ile ilişkileri incelenmiştir.

Beşinci bölümde, yeni genelleştirilmiş Pell sayı dizisi tanımlanmıştır. Bu sayı dizisinin üreteç matrisleri elde edilmiştir. Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, modified Pell sayıları ile genel Hecke grupları ve genişletilmiş genel Hecke grupları arasında bazı ilişkiler bulunmuştur.

Altıncı bölümde; elde edilenler tartışılmış, açık problem ve öneriler verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Pell sayıları, genişletilmiş genel Hecke grupları, genelleştirilmiş Pell sayıları, Fibonacci polinomları, Lucas polinomları, Pell polinomları, üreteç matris.

ABSTRACT

RELATIONSHIPS BETWEEN FIBONACCI, LUCAS, PELL, PELL-LUCAS, GENERALIZED PELL NUMBER SEQUENCES AND THEIR POLYNOMIALS AND LINEAR GROUPS
MSC THESIS
FURKAN BIROL
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS

(SUPERVISOR: PROF. DR. ÖZDEN KORUOĞLU)
BALIKESİR, DECEMBER 2018

In this thesis, Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, modified Pell number sequences and their polynomials are studied. Some results between the roots of these polynomials and the linear groups are given. Also, some relationships between generalized Pell numbers and extended Hecke groups $\overline{H}_{3,q}$ are investigated.

This thesis consists of six chapters. In the first chapter, the study is introduced. In the second chapter, some definitions, theorems, methods and results that are used in this thesis are given.

In the third chapter, a different representation of Pell polynomial and their general root formulas are obtained in relation to the theory of complex functions.

In the fourth chapter, the new generator matrices are obtained for Lucas and Pell polynomial classes. Fibonacci, Lucas and Pell polynomials associated with the roots of the linear groups of generators, matrice representations of these generators, the elements' relationships between each other and group structures are examined.

In the fifth chapter, the new generalized Pell number sequence is defined. The generator matrices of this sequence of numbers are obtained. Some relationships are found between Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, modified Pell numbers with generalized Hecke groups and extended generalized Hecke groups.

In the sixth chapter, the results obtained from this study are discussed. Also, some open problems and suggestions are given.

KEYWORDS: Pell numbers, extended generalized Hecke groups, generalized Pell numbers, Fibonacci polynomials, Lucas polynomials, Pell polynomials, generator matrice.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

TABLO LİSTESİ

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

Simge		Adı
$\boldsymbol{F_n}$	:	n. Fibonacci Sayısı
$\boldsymbol{L_n}$	:	n. Lucas Sayısı
$\boldsymbol{P_n}$	:	n. Pell Sayısı
$\boldsymbol{Q_n}$	:	n. Pell-Lucas Sayısı
$\boldsymbol{q_n}$	:	n. Modified Pell Sayısı
$\boldsymbol{F_n(x)}$	:	n. Fibonacci Polinomu
$\boldsymbol{L_n(x)}$	:	n. Lucas Polinomu
$\boldsymbol{P_n(x)}$	:	n. Pell Polinomu
$\boldsymbol{Q_n(x)}$	:	n. Pell-Lucas Polinomu
$\mathbb{C}$	:	Karmaşık Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	:	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}^+$	:	Pozitif Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{Z}$	:	Tam Sayılar Kümesi, Sonsuz Mertebeli Devirli Grup
$\mathbb{N}$	:	Doğal Sayılar Kümesi
$\boldsymbol{H_{p,q}}$	:	Genel Hecke Grubu
$\boldsymbol{H_{p,\infty}}$	:	Genel Hecke Grubu
$\boldsymbol{\overline{H}_{p,q}}$	:	Genişletilmiş Genel Hecke Grubu
$\boldsymbol{\overline{H}_{p,\infty}}$	:	Genişletilmiş Genel Hecke Grubu
$\boldsymbol{H(\lambda_q)}$	:	Hecke Grubu
$\boldsymbol{H(\lambda)}$	:	Hecke Grubu
$\boldsymbol{\overline{H}(\lambda_q)}$	:	Genişletilmiş Hecke Grubu
$\boldsymbol{\overline{H}(\lambda)}$	:	Genişletilmiş Hecke Grubu
$[\boldsymbol{G}:\boldsymbol{H}]$	:	H Alt Grubunun G Grubu İçindeki İndeksi
$\boldsymbol{Z_p}$	:	p Mertebeli Devirli Grup
$\boldsymbol{D_n}$	:	Dihedral Grup
$\boldsymbol{A * B}$	:	Serbest Çarpım Grubu
$\boldsymbol{A *_C B}$	:	Karışımlı Serbest Çarpım Grubu
$\boldsymbol{PSL(2,\mathbb{R})}$	:	$\left\{\frac{az+b}{cz+d} \mid a,b,c,d \in \mathbb{R},\ \ ad-bc=1\right\}$
$\boldsymbol{SL(2,\mathbb{R})}$	:	$\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{R},\ \ ad-bc=1\right\}$
$\boldsymbol{gp\ (A_a, B_a)}$	:	A_a ve B_a Üreteçleri ile Üretilen Grup
$\boldsymbol{\Gamma}$	:	Modüler Grup
$\boldsymbol{\overline{\Gamma}}$	:	Genişletilmiş Modüler Grup
$\boldsymbol{G_n}$	:	n. Genelleştirilmiş Pell Sayısı

ÖNSÖZ

Bu çalışmada büyük emeği olan, her zaman desteğini yanımda hissettiğim, değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Özden KORUOĞLU'na,

Çalışmanın gelişimine kıymetli fikirleri ile destek verip zaman ayıran Matematik Bölüm Başkanımız Sayın Prof. Dr. Nihal YILMAZ ÖZGÜR'e,

Katkılarından dolayı; Cebir ve Sayılar Teorisi Anabilim Dalı Başkanımız Sayın Prof. Dr. Recep ŞAHİN'e, Dr. Öğr. Üyesi Sayın Bilal DEMİR'e, Araş. Gör. Dr. Sayın Nihal TAŞ'a ve Araş. Gör. Sayın Ahmet Hamdi AVŞAR'a,

Çalışmalarımızın her zaman destekçisi olan kurumumuzun müdürü Sayın Erdinç ÜNAL'a, diğer idarecilerimize ve çalışma arkadaşlarıma,

Bu zamana kadar geçmiş olduğum farklı eğitim ve öğretim aşamalarında gelişimime katkı sunan tüm öğretmenlerime ve üniversitemizin akademisyenlerine,

Bugünlere gelmemde büyük emeği olan, fedakar anneme, babama ve ağabeyime,

Çalışmalarımda ve hayatımda her zaman destekçim olan, biricik eşime,

teşekkür etmeyi borç ve görev bilirim.

Yoğun bir emeğin ürünü olan bu tez çalışmasının bilim dünyasına katkı sunması dileğiyle…

1. GİRİŞ

Pisalı Leonardo (Leonardo Fibonacci, Leonardo Pisano, Filius Bonacci) 12. yüzyılda İtalya'nın Pisa şehrinde doğmuştur. Dokuz yaşında iken annesi Alessandra'yı kaybeden Leonardo, takma adı Bonaccio (iyi huylu) olan babası Guglielmo'nun tüccar olması nedeniyle Kuzey Afrika ve Cezayir'de İslam matematikçilerinden ders alma imkanı bulmuştur. Babası ile birlikte Akdeniz kıyılarındaki ülkeleri gezen Leonardo, "Bonacci'nin oğlu" anlamına gelen "Fillus Bonacci" kısaltılarak "Fibonacci" adıyla anıldı. 1200'lü yıllarda İtalya'ya döndü ve öğrendiklerine Liber Abaci (Hesaplama kitabı) adlı kitabında yer verdi. Bu eseriyle modern ondalık sayı sistemini Avrupa'ya tanıttı. Bu kitap o döneme kadar hantal Roma sayı sistemiyle hesap yapmaya çalışan Avrupalı bilim insanlarının el kitabı oldu. Böylece Fibonacci Avrupa'da bilimin gelişmesine katkı sundu. Fibonacci bu kitabında modern sayı sistemine yönelik bir örnek teşkil etmesi adına alıştırma sorusu olarak bir tavşan problemine yer vermiştir. Bu problemin çözümünden elde edilen sayıları, Müslümanların ve Hintlilerin çok önceki zamanlardan beridir bildiği bilinmektedir. Problemin çözümünden elde edilen sayılar Fibonacci'den sonraki dönemlerde Fibonacci sayıları olarak adlandırılmıştır. Fibonacci sayılarının çok farklı alanlarda, beklenmedik durumlarda dahi çıkabilmesi bu sayıların oldukça ilgi görmesine neden olmaktadır. 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,… biçiminde ilk iki terimi hariç her bir teriminin kendinden hemen önceki iki terimin toplanmasıyla elde edilen bu sayı dizisinin, ardışık terimlerinin oranından elde edilen dizinin limitinin altın oran olarak adlandırılan ve çok farklı alanlarda uygulamasını bulan $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ irrasyonel sayısıyla ilişkili olduğu bilinir. Altın oran, matematik ve geometrinin yanı sıra; yaşamda, kozmolojide, anatomide, tasarımda, sanatta, piyasalarda, teolojide ve daha birçok farklı alanda şaşırtıcı bir biçimde karşımıza çıkar. Altın oran ve Fibonacci sayı dizisine yönelik toplumsal hayatla ilişkili birçok örnek görmek mümkündür: Yazar Dan Brown, "The Da Vinci Code" isimli roman türündeki kitabında Fibonacci sayılarına yer vermiştir. Müzisyen Bela Bartok'un Fibonacci sayılarından esinlenerek "Dance Suite" isimli eserini bestelediği bilinmektedir. Heykeltraş Peter Randall-Page, Fibonacci sayı dizisini temel alan, "Seed" isminde 70 ton ağırlığında heykel yapmıştır. Leonardo Da Vinci ve Seurat'ın tablolarında altın orana önem verdikleri bilinmektedir. Avrupalıların taşın şairi ünvanını verdikleri Mimar Sinan da eserlerinde bu orandan yararlanmıştır [1,2].

Fibonacci sayılarının çok farklı alanlardaki etkisinin yanı sıra, matematiğin kendi içerisindeki etkileri de oldukça fazladır. Fibonacci sayı dizisinin sadece başlangıç koşullarının ya da sadece tekrarlama bağıntısının ya da her ikisinin birden değiştirilerek elde edildiği farklı sayı dizileri tanımlanmıştır. Hatta benzer yaklaşımla tekrarlama ilişkisine sahip polinom sınıfları da tanımlanmıştır. Fibonacci sayı dizisi ve Fibonacci sayı dizisinden esinlenerek, metalik oranlardan altın ve gümüş oranla ilişkili olan sayı dizileri ile polinomları $\forall\, n \geq 2$ için, aşağıdaki biçimiyle tanımlanmıştır [3-7].

Tablo 1.1: Tekrarlama bağıntısına sahip bazı sayı dizileri ve polinom sınıfları.

Tekrarlama Bağıntısına Sahip Sayı Dizisi ya da Polinom Sınıfı	**Başlangıç Koşulları**	**Tekrarlama Bağıntısı**
Fibonacci Sayı Dizisi	$F_0 = 0\,, F_1 = 1$	$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$
Lucas Sayı Dizisi	$L_0 = 2\,, L_1 = 1$	$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$
Pell Sayı Dizisi	$P_0 = 0\,, P_1 = 1$	$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$
Pell-Lucas Sayı Dizisi	$Q_0 = 2\,, Q_1 = 2$	$Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}$
Modified Pell Sayı Dizisi	$q_0 = 1\,, q_1 = 1$	$q_n = 2q_{n-1} + q_{n-2}$
Fibonacci Polinomları	$F_0(x) = 0\,, F_1(x) = 1$	$F_n(x) = xF_{n-1}(x) + F_{n-2}(x)$
Lucas Polinomları	$L_0(x) = 2\,, L_1(x) = x$	$L_n(x) = xL_{n-1}(x) + L_{n-2}(x)$
Pell Polinomları	$P_0(x) = 0\,, P_1(x) = 1$	$P_n(x) = 2xP_{n-1}(x) + P_{n-2}(x)$
Pell-Lucas Polinomları	$Q_0(x) = 2\,, Q_1(x) = 2x$	$Q_n(x) = 2xQ_{n-1}(x) + Q_{n-2}(x)$

Bu sayı dizileri ve polinomlarıyla ilgili çok fazla çalışma yapılmış, birçok özdeşlik bulunmuştur. Çalışmaların çoğunda, elde edilen özdeşlikler ve yapılan araştırmalar, öncelikle Fibonacci sayı dizisine yönelik olarak elde edilmiş olup sonraki dönemlerde diğer sayı dizileri ya da polinom sınıflarında incelenip benzer özdeşlikler bu sayı dizileri ve polinom sınıfları için de elde edilmiştir. Örneğin; Fibonacci sayı dizisindeki herhangi bir terimi aradaki tüm terimleri hesaplamaya gerek kalmadan genel yoldan elde edilişi; Jacques Philippe Marie Binet tarafından verilmiş ve zaman içinde diğer sayı dizileri ve polinomlar için de literatürde Binet formülü ya da Binet benzeri formül ismiyle ifade edilen, genel terimi temsil etmek için yararlanılan formüller verilmiştir [3-7]. Böylece bu sayı dizileri ve polinomlarına yönelik olarak, yeni birçok özdeşlik Binet formülleri aracılığıyla elde edilmiştir. Fibonacci sayılarının Binet formülü aşağıdaki biçimdedir.

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\ ,\ \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ olmak üzere, } F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha-\beta} \text{ biçimindedir.}$$

Özdeşlik elde etmek ve var olan özdeşlikleri ispat etmek için Binet formüllerinden yararlanıldığı gibi, matris teorisi verilerinden de yararlanılmaktadır. Literatürde, tekrarlama ilişkisine sahip sayı dizileri ya da polinomları ile matrisler arasında ilişkiler kurularak, bu sayı dizileri ve polinom sınıfları hakkında incelemelerin yapıldığı çok sayıda çalışma bulunmaktadır [3,7-9]. Bu tarz çalışmaların öncüsü King'tir. King 1960 yılında yüksek lisans tezinde, günümüzde Fibonacci Q matrisi ya da altın matris olarak bilinen matris ile Fibonacci sayıları arasındaki ilişkiyi sunmuştur. Benzer yaklaşımla diğer sayı dizileri ve polinomları için de üreteç matris olarak adlandırılan Fibonacci Q matrisine benzer özellikte olan matrisler farklı matematikçiler tarafından ortaya konulmuştur. Biz de tezimizin ilerleyen bölümlerinde bu sayı dizilerine, genellemelerine ve polinomlarına yönelik olarak birtakım yeni üreteç matrisler tanımlayacağız. King'in Q matrisi tanımı şu şekildedir:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ Q^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix};\ n \geq 1$$

Bu özel polinom sınıfları, matris teorisinden yararlanılarak çalışıldığı gibi karmaşık fonksiyonlar teorisindeki birtakım tanım, teorem ve özdeşliklerden yararlanılarak da çalışılmıştır. 1963 yılında, P. F. Byrd, [10] -o dönemler Byrd'ün Fibonacci polinomu adı ile anılan- Pell polinomunun karmaşık hiperbolik fonksiyonlar cinsinden temsilini elde etmiştir. 1973 yılında, V. E. Hoggatt ve M. Bicknell, [11] Fibonacci ve Lucas polinomlarını karmaşık hiperbolik fonksiyonlar cinsinden ifade etmişler ve bu temsilden hareketle de Fibonacci ve Lucas polinom sınıflarının her biri için genel kök bulma formülünü elde etmişlerdir. Bu geçişten yararlanarak bu polinom sınıflarının türev özellikleri ile ilgili birtakım çalışmalar da yapılmıştır [12].

Literatür incelendiğinde bu özel sayı dizilerinin ve polinomlarının matris teorisi ve karmaşık fonksiyonlar teorisinin yanı sıra grup teorisi perspektifinde de ele alındığı görülür. Çeşitli yazarlar tarafından, elemanları kesirli lineer dönüşüm olan belirli gruplar ile bu özel sayı dizileri ve polinomları arasında çeşitli yönlerden incelemeler yapılmıştır [13-19]. Biz de bu yaklaşımlardan esinlenerek, genişletilmiş genel Hecke grupları ile bu özel sayı dizileri ve Fibonacci, Lucas ve Pell polinomlarının kökleri ilişkili olan lineer grupların belirli özelliklerini elde edeceğiz.

Üreteçleri kesirli lineer dönüşüm olan genel Hecke gruplarını; Lehner [20], 1975 yılında tanımlamıştır. Bu grup sınıfı; Erich Hecke [21] tarafından, 1936 yılında tanımlanan Hecke gruplarını da kapsayan daha genel bir grup sınıfıdır. Lehner; $2 \leq p \leq q \leq \infty$ ve $p + q > 4$ eşitsizliklerini gerçekleyen p ve q tamsayıları için, $\lambda_p = 2\, cos\frac{\pi}{p}$, $\lambda_q = 2cos\frac{\pi}{q}$ olmak üzere;

$$X(z) = -\frac{1}{z - \lambda_p} \quad , \quad V(z) = z + \lambda_p + \lambda_q$$

dönüşümlerinin ürettiği grubu genel Hecke grupları olarak tanımlamıştır. Bu gruplar $H_{p,q}$ sembolü ile gösterilir. Burada $Y = X.V$ dönüşümü;

$$Y(z) = -\frac{1}{z + \lambda_q}$$

şeklinde elde edilir. Genel Hecke gruplarında, $p = 2$ alındığı takdirde Erich Hecke'nin tanımladığı Hecke grupları sınıfının elde edildiği görülür. Yani, $H_{2,q} = H_q$ biçimindedir. Bununla birlikte literatürde en çok çalışılan Hecke grubu olan modüler grubun, genel Hecke grupları sınıfında $p = 2\,, q = 3$ değerinde elde edildiği görülür. Yani, $H_{2,3} = H_3 = \Gamma$ biçimindedir. Ayrıca genel Hecke gruplarının üreteçleri kümesine birim çembere göre yansıma dönüşümü olan $R(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ eklenmesiyle, genişletilmiş genel Hecke gruplarının üreteç kümesi elde edilir [22].

Tezin diğer bölümlerinde yapılanlar aşağıda kısaca açıklanmıştır.

Tezin ikinci bölümü olan ön bilgiler kısmında tezin diğer bölümlerinde elde edilen teorem ve sonuçlar için temel teşkil eden; sayılar teorisi, grup teorisi, karmaşık fonksiyonlar teorisi ile matris teorisine yönelik bazı tanımlara, teoremlere, özdeşliklere ve yöntemlere yer verilmiştir.

Tezin üçüncü bölümünde Fibonacci, Lucas ve Pell polinimlarının farklı bir temsil biçimi olan, karmaşık hiperbolik fonksiyonlar cinsinden temsillerine yer verilmiştir. V. E. Hoggatt ve M. Bicknell'in, [11] Fibonacci ve Lucas polinomlarının kökleri için vermiş olduğu genel kök bulma tekniğinden ve literatürdeki birtakım özdeşliklerden yararlanarak Pell polinomları için genel kök bulma formülü elde edilmiştir. [10,11] çalışmalarında sunulan Fibonacci, Lucas ve Pell polinomlarının, karmaşık hiperbolik fonksiyonlar cinsinden temsillerine yönelik teoremleri farklı bir teknikle ispatlanmıştır. Bununla birlikte bu özel polinom sınıflarındaki herhangi bir polinomunun köklerinin, aynı polinom sınıfındaki başka birtakım üyeleri hangi noktaya resmettiğini inceleyip teorem ve sonuçlarla ifade ettik. Böylece dördüncü bölüm için gerekli olacak önemli bilgiler elde edilmiştir.

Tezin dördüncü bölümünde, iki ya da üç üreteci olan lineer grupların (yarı grupların) üreteçlerinin matris temsillerinden yararlanarak, bu grup ya da yarı grupların hangi koşullarda serbest grup (yarı grup) olduğunu ya da serbest grup (yarı grup) olmadığını belirten önemli bazı çalışmalara kısaca değinilmiştir [23-32]. Özel polinom sınıflarında bu konunun ilk kez ele alındığı Piotr Slanina'nın $F_n(a) = 0$ iken; $A_a = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$ olmak üzere, $gp\,(A_a, B_a)$ grubunun serbest grup olmadığını ifade ettiği [13] çalışmasını kısaca özetleyip, bu çalışmada incelenmeyen bazı elemanlarının özelliklerini ve grup yapısı hakkında elde ettiğimiz bulguları ortaya koyduk. Ayrıca bu bölümde, birtakım özdeşliklerden yararlanarak Lucas ve Pell polinomları için yeni üreteç matrisler elde ettik. Bu üreteç matrislerden yararlanarak Pell polinomlarının kökleri ile ilişkili olan lineer grupların üreteçleri, üreteçlerinin matris temsilleri, bazı elemanları ve grup yapıları hakkında elde ettiğimiz özgün bulguları ifade ettik. Bununla birlikte bu özel polinom sınıfları ile ilgili olarak elde ettiğimiz bu elemanlarının özelliklerini ve elemanların birbirleriyle olan bazı ilişkilerini tablolar halinde topluca ortaya koyduk.

Tezin beşinci bölümünde literatürdeki; Hecke grupları ya da genişletilmiş Hecke grupları ile klasik ya da genelleştirilmiş Fibonacci, Lucas, Pell ve Pell-Lucas sayı dizileri arasındaki ilişkilerin ortaya konulduğu çalışmaların başlıcaları [14-19] hakında kısaca bilgi verilmiştir. Koruoğlu ve Şahin'in [15] numaralı çalışmasında, genişletilmiş Hecke gruplarının bazı elemanlarının matris temsillerinin kuvvetlerini alıp elde edilen matrisin ögelerinin genelleştirilmiş Fibonacci sayı dizisinin birer terimi olduğunu belirttikleri ve özelde genişletilmiş modüler grupta çalışıldığında, bu grubun tüm elemanlarının matris temsillerindeki matris ögelerinin klasik Fibonacci sayı dizisinin birer terimi olduğunu ifade ettikleri çalışmaya kısaca değinilmiştir. Bu çalışmalardan hareketle genel Hecke grupları ve genişletilmiş genel Hecke grupları ile klasik ve genelleştirilmiş sayı dizileri arasındaki ilişkilerin incelenip, belirlendiği ilk çalışma olma özelliğine sahip olan tezimin bu bölümünde elde ettiğimiz birçok orijinal bulguya yer verdik. Genişletilmiş genel Hecke gruplarından $\overline{H}_{p,q}$ gruplarında, $p = 3$ alınarak elde edilen $\overline{H}_{3,q}$ grubunun bazı elemanlarının matris temsilleri ve kuvvetleri ile; yeni tanımladığımız genelleştirilmiş Pell sayı dizisi arasındaki ilişkileri inceleyip, özelliklerini tespit ettik. Böylece bu bölümde yeni birçok üreteç matris elde edilmiştir. Bununla birlikte özelde, $p = q = 3$ seçerek elde edilen $\overline{H}_{3,3}$ grubunun her bir elemanının matris temsilindeki her bir ögesinin klasik Pell sayı dizisinin birer terimi olduğunu elde ettik. Ayrıca, $\overline{H}_{3,3}$ grubundaki elemanların klasik Pell sayıları ile ilişkisinin yanı sıra; Pell-Lucas ve modified Pell sayılarıyla ilişkisini de tespit ettik. Bunların yanı sıra, genel Hecke gruplarından $H_{3,3}$ grubunun bazı elemanlarının matris temsillerinin ve kuvvetlerinin Fibonacci ile Lucas sayı dizileriyle ilişkilerini belirledik. Bu bölümde ortaya koyduğumuz tanım, teorem ve sonuçlar [33,34] yayına sunulmuştur.

Tezin altıncı bölümünde tezde elde edilen sonuçlar kısaca özetlenip, literatürdeki çalışmalarla karşılaştırılmıştır. Ayrıca bu bölümde bazı açık problem ve önerilere yer verilmiştir.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde tezin diğer bölümleri için gerekli olan tanım, teorem, kavram ve açıklamalara yer verilmiştir.

2.1 Rekürans Diziler

Matematikte çok farklı biçimlerde tanımlanan diziler bulunmaktadır. Bu kısımda, dizinin başlangıcındaki birkaç terim hariç olmak üzere, her bir teriminin kendinden önceki terimler yardımıyla elde edildiği diziler hakkında genel bilgiler vereceğiz.

2.1.1 Tanım : Bir dizide bir terim kendinden önceki terimler aracılığı ile hesaplanıyorsa, bu diziye *rekürans (tekrarlama, indirgeme) dizisi* denir. Bu terimi hesaplarken kullanılan bağıntıya ise *rekürans bağıntısı* denir [35].

2.1.2 Tanım : $\forall\, n \geq k$, sabit a_j $(0 \leq j \leq k-1)$ ve $a_0 \neq 0$ katsayıları için,

$$u_n = a_{k-1}u_{n-1} + a_{k-2}u_{n-2} + \cdots + a_1u_{n-k+1} + a_0u_{n-k} \tag{2.1}$$

eşitliğini sağlayan (u_n) dizisine k*. dereceden homojen lineer rekürans dizi* denir. Buradaki eşitliğe ise k*. dereceden homojen lineer rekürans bağıntı* denir. Bu dizinin $u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}$ biçiminde olan ilk k terimine (u_n) dizisinin *başlangıç koşulları* denir [3,35].

2.1.3 Tanım : (2.1) eşitliğindeki gibi tanımlı olan (u_n) dizisi için,

$$p(x) = x^k - a_{k-1}x^{k-1} - a_{k-2}x^{k-2} - \cdots - a_1x - a_0$$

polinomuna (u_n) dizisinin *karakteristik polinomu* denir [35].

2.1.4 Tanım : $p(x) = x^k - a_{k-1}x^{k-1} - a_{k-2}x^{k-2} - \cdots - a_1x - a_0 = 0$

denklemine (u_n) dizisinin *karakteristik denklemi* denir [35].

2.1.5 Tanım : $p(x)$ polinomunun kökleri $b_1, b_2, \ldots, b_k \in \mathbb{C}$ olmak üzere, $\forall\, i,j \in \{1,2,\ldots,k\}$ için, $b_i \neq b_j$ ise, $u_n = c_1{b_1}^n + c_2{b_2}^n + \cdots + c_k{b_k}^n$ olacak şekilde $c_1, c_2, \ldots, c_k$ sabitleri vardır. Bu eşitlik başlangıç koşulları için yerine yazılıp elde edilen denklem sisteminden $c_1, c_2, \ldots, c_k$ bilinmeyenleri bulunur. Böylece elde edilen karakteristik polinomunun kökleri ve u_n arasındaki eşitliğe *rekürans bağıntının çözümü* denir [35].

2.1.6 Tanım : (u_n) dizisinin terimleri kullanılarak tanımlanan,

$$G(x) = u_0 x^0 + u_1 x^1 + u_2 x^2 + u_3 x^3 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \, x_i$$

serisine (u_n) dizisinin *üreteç fonksiyonu* denir [3,35].

Üreteç fonksiyonlar ile tekrarlama bağıntıları arasında sıkı bir ilişki vardır. Öyle ki yukarıda açıkladığımız herhangi sabit katsayılı homojen lineer rekürans bağıntının genel anlamdaki çözüm tekniğinin bilinmediği dönemlerde, 1718 yılında Fransız matematikçi Abraham De Moivre Fibonacci sayı dizisinin tekrarlama bağıntısını çözmek için üreteç fonksiyonları ortaya koymuştur [3].

2.1.7 Uyarı : Bu tezde ikinci dereceden homojen lineer rekürans dizilerini inceleyeceğiz.

2.2 Metalik Oranlar

Arjantinli matematikçi Vera W. Spinadel metalik oranlar adını verdiği yeni bir pozitif matematiksel sabitler sınıfını tanımladı. Spinadel'in tanımladığı formül şu şekildedir:

$$\Phi_\lambda = \frac{\lambda + \sqrt{4 + \lambda^2}}{2} \tag{2.2}$$

Bu sabitler sınıfının ilk birkaç üyesi için özel bir isimlendirme vardır. Bunlar, (2.2) eşitliğinde sırasıyla $\lambda = 1, 2, 3$ alındığında; altın, gümüş ve bronz oran olarak aşağıdaki gibi elde edilir [36].

Altın oran $\longrightarrow$ $\Phi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Gümüş oran $\longrightarrow$ $\Phi_2 = 1 + \sqrt{2}$

Bronz oran $\longrightarrow$ $\Phi_3 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$

Vera W. Spinadel'in yapmış olduğu metalik oranlar tanımıyla, geçmişi çok eskilere dayanan altın oranın bir genellemesini ortaya koyduğunu söyleyebiliriz.

2.3 Rekürans Sayı Dizileri

Bu kısımda rekürans sayı dizileri arasında en çok bilinen Fibonacci sayı dizileri başta olmak üzere; Fibonacci sayı dizisinin başlangıç koşullarının, tekrarlama bağıntısının ya da her ikisinin birden değiştirilerek elde edilen ve metalik oranlar ile ilişkili olan sayı dizilerinden bahsedeceğiz.

2.3.1 Tanım : (Fibonacci Sayıları)

$F_0 = 0$, $F_1 = 1$ başlangıç koşulları ve $\forall\, n \geq 2$ için,

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlıdır.

Fibonacci sayıları altın oran ($\frac{1+\sqrt{5}}{2}$) ile ilişkilidir [3].

2.3.2 Tanım : (Lucas Sayıları)

$L_0 = 2$, $L_1 = 1$ başlangıç koşulları ve $\forall\, n \geq 2$ için,

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlıdır.

Lucas sayıları da altın oran ile ilişkilidir [3].

2.3.3 Tanım : (Pell Sayıları)

$P_0 = 0$, $P_1 = 1$ başlangıç koşulları ve $\forall\, n \geq 2$ için,

$$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlıdır.

Pell sayıları gümüş oran $(1 + \sqrt{2})$ ile ilişkilidir [4].

2.3.4 Tanım : (Pell-Lucas Sayıları)

$Q_0 = 2$, $Q_1 = 2$ başlangıç koşulları ve $\forall\, n \geq 2$ için,

$$Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlıdır.

Pell-Lucas sayıları da gümüş oran $(1 + \sqrt{2})$ ile ilişkilidir [4,6].

Tablo 2.1: Fibonacci, Lucas, Pell ve Pell-Lucas sayı dizilerinin ilk 10 terimi.

n	F_n	L_n	P_n	Q_n
1	1	1	1	2
2	1	3	2	6
3	2	4	5	14
4	3	7	12	34
5	5	11	29	82
6	8	18	70	198
7	13	29	169	478
8	21	47	408	1154
9	34	76	985	2786
10	55	123	2378	6726

2.4 Rekürans Bağıntıya Sahip Polinomlar

Literatürde farklı biçimlerde tanımlanan polinom sınıfları mevcuttur. Tekrarlama bağıntısı yardımıyla tanımlanan birçok polinom sınıfı vardır. Bu polinom sınıflarının ortaya çıkışında Fibonacci sayıları ve tekrarlama bağıntısı temel hareket noktası olmuştur. Farklı başlangıç koşulları ve farklı tekrarlama bağıntısı yardımı ile çeşitli polinom sınıfları elde edilir. Bunların başlıcaları Fibonacci polinomları, Lucas polinomları, Pell polinomları ve Pell-Lucas polinomlarıdır. Bu polinomlar sırası ile; $F_n(x), L_n(x), P_n(x)$ ve $Q_n(x)$ ile gösterilir.

2.4.1 Tanım : (Fibonacci Polinomu)

E. C. Catalan tarafından, 1883 yılında tanımlanan Fibonacci polinomları;

$$F_1(x) = 1\,, F_2(x) = x$$

olmak üzere,

$$F_n(x) = xF_{n-1}(x) + F_{n-2}(x) \quad ; n \geq 3$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır [3].

2.4.2 Tanım : (Lucas Polinomu)

M. Bicknell tarafından, 1970 yılında tanımlanan Lucas polinomları;

$$L_0(x) = 2\,, L_1(x) = x$$

olmak üzere,

$$L_n(x) = xL_{n-1}(x) + L_{n-2}(x) \quad ; n \geq 2$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır [3].

2.4.3 Tanım : (Pell Polinomu)

$$P_0(x) = 0 \, , P_1(x) = 1$$

olmak üzere,

$$P_n(x) = 2xP_{n-1}(x) + P_{n-2}(x) \quad ; n \geq 2$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır [6].

2.4.4 Tanım : (Pell-Lucas Polinomu)

$$Q_0(x) = 2 \, , Q_1(x) = 2x$$

olmak üzere,

$$Q_n(x) = 2xQ_{n-1}(x) + Q_{n-2}(x) \quad ; n \geq 2$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır [6].

Bu polinom sınıflarının ilk 10 üyesi aşağıdaki gibidir [3,7].

Tablo 2.2 : Fibonacci ve Lucas polinomlarının ilk 10 üyesi.

n	$F_n(x)$	$L_n(x)$
1	1	x
2	x	x^2+2
3	x^2+1	x^3+3x
4	x^3+2x	x^4+4x^2+2
5	x^4+3x^2+1	x^5+5x^3+5x
6	x^5+4x^3+3x	$x^6+6x^4+9x^2+2$
7	$x^6+5x^4+6x^2+1$	$x^7+7x^5+14x^3+7x$
8	$x^7+6x^5+10x^3+4x$	$x^8+8x^6+20x^4+16x^2+2$
9	$x^8+7x^6+15x^4+10x^2+1$	$x^9+9x^7+27x^5+30x^3+9x$
10	$x^9+8x^7+21x^5+20x^3+5x$	$x^{10}+10x^8+35x^6+50x^4+25x^2+2$

Tablo 2.3 : Pell ve Pell-Lucas polinomlarının ilk 10 üyesi.

n	$P_n(x)$	$Q_n(x)$
1	1	$2x$
2	$2x$	$4x^2+2$
3	$4x^2+1$	$8x^3+6x$
4	$8x^3+4x$	$16x^4+16x^2+2$
5	$16x^4+12x^2+1$	$32x^5+40x^3+10x$
6	$32x^5+32x^3+6x$	$64x^6+96x^4+36x^2+2$
7	$64x^6+80x^4+24x^2+1$	$128x^7+224x^5+112x^3+14x$
8	$128x^7+192x^5+80x^3+8x$	$256x^8+512x^6+320x^4+64x^2+2$
9	$256x^8+448x^6+240x^4+40x^2+1$	$512x^9+1152x^7+864x^5+240x^3+18x$
10	$512x^9+1024x^7+672x^5+160x^3+10x$	$1024x^{10}+2560x^8+2240x^6+800x^4+100x^2+2$

2.4.5 Uyarı : Bu polinom sınıflarının derece özellikleri aşağıdaki gibidir [3].

$$der\left(F_n(x)\right) = n - 1$$

$$der\left(L_n(x)\right) = n$$

$$der\left(P_n(x)\right) = n - 1$$

$$der\left(Q_n(x)\right) = n$$

2.4.6 Uyarı : Polinom sınıfları ile kendi sayı dizileri arasında çok güçlü bir bağ vardır. Her bir polinom sınıfı aynı isme sahip sayı dizisi ile doğrudan bağlantılıdır.

$F_n(x), L_n(x), P_n(x)$ ve $Q_n(x)$ polinom sınıflarında $x = 1$ alındığında;

$$F_n(1) = F_n$$

$$L_n(1) = L_n$$

$$P_n(1) = P_n$$

$$Q_n(1) = Q_n$$

elde edilir [3,6].

2.4.7 Uyarı : Fibonacci, Lucas, Pell ve Pell-Lucas sayı dizileri ile polinomlarının tanımını negatif alt indisleri de kapsayacak biçimde genişletmek mümkündür. Bu şekilde yapılan tanımlamada aşağıdaki eşitlikler geçerlidir [3-6].

$$F_{-n} = (-1)^{n+1}F_n \quad , n \geq 1$$

$$L_{-n} = (-1)^{n}L_n \quad , n \geq 1$$

$$P_{-n} = (-1)^{n+1}P_n \quad , n \geq 1$$

$$Q_{-n} = (-1)^{n}Q_n \quad , n \geq 1$$

$$F_{-n}(x) = (-1)^{n+1}F_n(x) \quad , n \geq 1$$

$$L_{-n}(x) = (-1)^{n}L_n(x) \quad , n \geq 1$$

$$P_{-n}(x) = (-1)^{n+1}P_n(x) \quad , n \geq 1$$

$$Q_{-n}(x) = (-1)^{n}Q_n(x) \quad , n \geq 1$$

Bu tezde, pozitif alt indisli Fibonacci, Lucas, Pell ve Pell-Lucas sayı dizileri ile polinomlarını ele alacağız.

2.5 Binet Formülleri

Rekürans bağıntıya sahip sayı dizilerinin, ya da polinomlarının başlangıç koşulları dışındaki herhangi bir terimini önceki ardışık terimler aracılığı ile bulabileceğimiz gibi, Binet formüllerinden yararlanarak da bulabiliriz. Binet formülü kulanıldığı takdirde, herhangi bir terimi hesaplamak için aradaki tüm terimleri hesaplanmak zorunda kalmayız. Bunun yanı sıra özdeşlik elde etmek ve var olan özdeşlikleri ispatlamak için de Binet formüllerinden yararlanılır. Binet formülüne yönelik ilk çalışmayı yapanlar arasında; Abraham De Moivre, Gabriel Lame ve Jacques Phillipe Marie Binet bulunmaktadır [3].

Binet formülü esasen, Tanım 2.1.5'te açıklanan rekürans bağıntı çözüm tekniğinden elde edilir.

Rekürans sayı dizileri ve polinomları için hesaplama, özdeşlik elde etme ve var olan özdeşlikleri ispatlama, Binet formülleri dışında matrisler aracılığıyla da yapılmaktadır.

2.5.1 Sayı Dizileri için Binet Formülü

2.5.1.1 F_n , L_n için Binet Formülü

2.5.1.1.1 Teorem : Fibonacci ve Lucas sayı dizilerinin karakteristik denklemi $x^2 - x - 1 = 0$ olup bu denklemin kökleri;

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} , \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

biçimindedir. Bu köklerden hareketle, Fibonacci ve Lucas sayı dizilerinin Binet formülü sırasıyla şu şekildedir [3]:

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} , L_n = \alpha^n + \beta^n$$

2.5.1.2 P_n , Q_n için Binet Formülü

2.5.1.2.1 Teorem : Pell ve Pell-Lucas sayı dizilerinin karakteristik denklemi $x^2 - 2x - 1 = 0$ olup bu denklemin kökleri;

$$\gamma = 1 + \sqrt{2}\,, \delta = 1 - \sqrt{2}$$

biçimindedir. Bu köklerden hareketle, Pell ve Pell-Lucas sayı dizilerinin Binet formülü sırasıyla şu şekildedir [4,6]:

$$P_n = \frac{\gamma^n - \delta^n}{\gamma - \delta}\,, Q_n = \gamma^n + \delta^n$$

2.5.2 Polinomlar için Binet Formülü

2.5.2.1 $F_n(x)$ ve $L_n(x)$ için Binet Formülü

2.5.2.1.1 Teorem : Fibonacci ve Lucas polinomlarının karakteristik denklemi $t^2 - xt - 1 = 0$ olup bu denklemin kökleri;

$$\alpha(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}\,, \beta(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 + 4}}{2}$$

biçimindedir. Bu köklerden hareketle, Fibonacci ve Lucas polinomlarının Binet formülü sırasıyla şu şekildedir [3]:

$$F_n(x) = \frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)}\,, L_n(x) = \alpha^n(x) + \beta(x)^n$$

2.5.2.2 $P_n(x)$ ve $Q_n(x)$ için Binet Formülü

2.5.2.2.1 Teorem : Pell ve Pell-Lucas polinomlarının karakteristik denklemi $t^2 - 2xt - 1 = 0$ olup bu denklemin kökleri;

$$\gamma(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}\,, \delta(x) = x - \sqrt{x^2 + 1}$$

biçimindedir. Bu köklerden hareketle, Pell ve Pell-Lucas polinomlarının Binet formülü sırasıyla şu şekildedir [6]:

$$P_n(x) = \frac{\gamma^n(x) - \delta^n(x)}{\gamma(x) - \delta(x)}\,, Q_n(x) = \gamma^n(x) + \delta^n(x)$$

2.6 Rekürans Diziler ve Matrisler

Literatürde tekrarlama bağıntısına sahip sayı dizileri (ya da polinomları) ile; matrisler arasındaki bağıntıların kurulduğu ve bu bağıntılardan hareketle sayı dizilerinin (ya da polinomlarının) özelliklerinin incelendiği çalışmalar bulunmaktadır. Matrisler ile ikinci dereceden tekrarlama ilişkisine sahip bazı sayı dizileri (ya da polinomları) ile ilgili birtakım çalışmalar aşağıdaki şekilde özetlenebilir:

Charles H. King 1960 yılında, Fibonacci sayılarını farklı bir yaklaşım ile elde etmenin bir yolunu buldu. Fibonacci Q matrisi adı verilen 2x2'lik matrisin kuvvetlerini aldığında oluşan matrisin her bir ögesinin alınan kuvvete bağlı olarak bir Fibonacci sayısı olduğunu keşfetti. King bunu yüksek lisans tezinde şu şekilde belirtmiştir [8]:

2.6.1 Teorem : $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ olmak üzere,

$$Q^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$$

biçimindedir [8].

Bu yaklaşım, Fibonacci sayılarını matrisler üzerinden çalışıp matrislerin sahip olduğu özellikleri kullanarak birçok özdeşliği elde etmeye ve var olan özdeşlikleri farklı bir yöntemle ispatlamaya olanak sağlamaktadır. Bu duruma yönelik birkaç örnek şu şekilde verilebilir:

Matris teorisinden $Q^m Q^n = Q^{m+n}$ olduğu bilinmektedir. Bu eşitliği ve Teorem 2.6.1'i birlikte ele aldığımızda;

$$\begin{aligned} Q^m Q^n &= \begin{bmatrix} F_{m+1} & F_m \\ F_m & F_{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_{m+1}F_{n+1} + F_m F_n & F_{m+1}F_n + F_m F_{n-1} \\ F_m F_{n+1} + F_{m-1}F_n & F_m F_n + F_{m-1}F_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_{m+n+1} & F_{m+n} \\ F_{m+n} & F_{m+n-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Böylece şu özdeşliklere ulaşılır [3]:

$$F_{m+n+1} = F_{m+1}F_{n+1} + F_m F_n \tag{2.3}$$

$$F_{m+n} = F_{m+1}F_n + F_m F_{n-1} \tag{2.4}$$

$$F_{m+n} = F_m F_{n+1} + F_{m-1}F_n$$

$$F_{m+n-1} = F_m F_n + F_{m-1}F_{n-1}$$

Ayrıca sırasıyla (2.3) ve (2.4) özdeşliklerinde $m = n$ alındığında, sayılar teorisinde çok kullanılan şu özdeşlikler elde edilir:

$$F_n^{\ 2} + F_{n+1}^{\ \ 2} = F_{2n+1}$$

$$F_{2n} = F_{n+1}F_n + F_nF_{n-1} = F_n(F_{n+1} + F_{n-1}) = F_nL_n$$

Bununla birlikte;

$$Q^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$$

matrisinin determinantını hesapladığımızda literatürde Cassini özdeşliği (formülü) ya da Simpson formülü olarak ifade edilen,

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^{\ 2} = (-1)^n \text{ (Cassini Formülü)}$$

özdeşliğine ulaşmış oluruz.

Fibonacci sayıları ile ilgili olarak daha birçok özdeşlik matris teorisi yardımıyla elde edilebilmektedir.

Benzer çalışmaları Lucas sayıları için de yapmak mümkündür. Lucas sayıları ile matrisler arasındaki ilişkilerin öncüleri V. E. Hoggatt ve I. D. Ruggles'tir [37]. 1963 yılında;

$$L_n = F_{n+1} + F_{n-1} \ ; n \geq 1$$

$$L_{n+1} + L_{n-1} = 5F_n \ ; n \geq 1$$

özdeşliklerini kullanıp R matrisi tanımlayıp, King'in Q matrisinden de yararlanarak aşağıdaki biçimi ile ifade ettikleri şu matrise ulaştılar [37]:

2.6.2 Teorem : $R = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ve $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ olmak üzere,

$$RQ^n = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix}$$

biçimindedir [37].

Böylece bu geçiş ile birlikte Lucas sayıları hakkında birçok özdeşliğe ulaşmak mümkündür. Örneğin determinant aracılığıyla;

$$L_{n+1}L_{n-1} - L_n^{\ 2} = 5(-1)^{n-1}$$

özdeşliğinin varlığı kolayca görülür [37].

1972 yılında Serkland, Pell sayıları için M matrisi tanımlayıp, benzer sonuçları Pell sayıları için elde etmiştir [8].

2.6.3 Teorem : $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ olmak üzere,

$$M^n = \begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{bmatrix}$$

biçimindedir [8].

2.6.4 Uyarı : Yukarıdaki üreteç matrislerinin kuvvetleri alındığında elde edilen matrisin ögelerinin her birinin aynı sayı dizisinin birer terimi olduğu görülmektedir. Ancak literatürde bunların yanı sıra bir matrisin kuvvetleri alındığında elde edilen matrisin ögelerinin birden fazla sayı dizisinin birer terimi olduğu çalışmalar da mevcuttur. Bu durumu J. Ercolano'nun çalışmasından şu şekilde örnekleyebiliriz [9]:

2.6.5 Teorem : $N = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ olmak üzere,

$$N^n = \begin{bmatrix} \frac{Q_n}{2} & 2P_n \\ P_n & \frac{Q_n}{2} \end{bmatrix}$$

biçimindedir [9].

Fibonacci, Lucas ve Pell polinomlarının matrislerle olan ilişkisi sırasıyla aşağıdaki biçimdedir:

2.6.6 Teorem : $Q(x) = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ olmak üzere,

$$Q(x)^n = \begin{bmatrix} F_{n+1}(x) & F_n(x) \\ F_n(x) & F_{n-1}(x) \end{bmatrix}$$

biçimindedir [38].

Fibonacci polinomunun tekrarlama bağıntısını, [3]'te belirtilen;

$$F_{n+1}(x) + F_{n-1}(x) = L_n(x)$$

özdeşliğini ve Teorem 2.6.5'te ifade edilen matrisi kullanarak Lucas polinomlarının üreteç matrisini aşağıdaki biçimiyle elde ederiz.

2.6.7 Teorem : $C_x = \begin{bmatrix} x & 2 \\ 2 & -x \end{bmatrix}$, $Q(x) = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ olmak üzere,

$$C_xQ(x)^n = \begin{bmatrix} L_{n+1}(x) & L_n(x) \\ L_n(x) & L_{n-1}(x) \end{bmatrix}$$

biçimindedir.

İspat : $C_xQ(x)^n = \begin{bmatrix} x & 2 \\ 2 & -x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{n+1}(x) & F_n(x) \\ F_n(x) & F_{n-1}(x) \end{bmatrix}$

$$C_x(A_xB_x)^n = \begin{bmatrix} xF_{n+1}(x) + 2F_n(x) & xF_n(x) + 2F_{n-1}(x) \\ 2F_{n+1}(x) - xF_n(x) & 2F_n(x) - xF_{n-1}(x) \end{bmatrix}$$

$$C_x(A_xB_x)^n = \begin{bmatrix} F_{n+2}(x) + F_n(x) & F_{n+1}(x) + F_{n-1}(x) \\ F_{n+1}(x) + F_{n-1}(x) & F_n(x) + F_{n-2}(x) \end{bmatrix}$$

$$C_x(A_xB_x)^n = \begin{bmatrix} L_{n+1}(x) & L_n(x) \\ L_n(x) & L_{n-1}(x) \end{bmatrix}$$

elde edilir.□

2.6.8 Teorem : $P = \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ olmak üzere,

$$P^n = \begin{bmatrix} P_{n+1}(x) & P_n(x) \\ P_n(x) & P_{n-1}(x) \end{bmatrix}$$

biçimindedir [6].

2.7 Fibonacci, Lucas, Pell Sayı Dizileri ve Polinomları ile İlgili Bazı Özdeşlikler

2.7.1 F_n, L_n ve P_n ile İlgili Özdeşlikler

Bu sayı dizileri ile ilgili birçok özdeşlik bulunmaktadır [3,7]. Bu özdeşliklerin bir kısmı sayı dizilerinin birbirleri arasındaki ilişkiyi ortaya koyar.

2.7.1.1 Teorem : [3,7]

$$F_{n+1}F_{n-1} - {F_n}^2 = (-1)^n \quad , n \geq 1 \text{ (Cassini Formülü)}$$

$$L_{n+1}L_{n-1} - {L_n}^2 = 5(-1)^{n-1} \quad , n \geq 1$$

$$P_{n+1}P_{n-1} - {P_n}^2 = (-1)^n \quad , n \geq 1$$

$$F_{n+1} + F_{n-1} = L_n \quad , n \geq 1$$

$$L_{n+1} + L_{n-1} = 5F_n \quad , n \geq 1$$

Ayrıca Fibonacci, Lucas ve Pell sayılarının üçünün birden ilişkisinin ortaya konulduğu, Euler özdeşliği ya da Cassini formülündeki gibi matematiksel estetiği ortaya koyan bir özdeşliği ifade edelim:

2.7.1.2 Teorem :

$n \geq 2$ için,

$$\frac{F_n + L_n P_n}{(F_n - L_n)(F_n - P_n)} + \frac{L_n + F_n P_n}{(L_n - F_n)(L_n - P_n)} + \frac{P_n + F_n L_n}{(P_n - F_n)(P_n - L_n)} = 1$$

biçimindedir [7].

2.7.2 $F_n(x), L_n(x)$ ve $P_n(x)$ ile İlgili Özdeşlikler

Bu polinom sınıfları ile ilgili birçok özdeşlik bulunmaktadır [3,7,13]. Bu özdeşliklerin bir kısmı bir polinom sınıfının kendi terimleri arasındaki ilişkiyi ortaya koyarken, bir kısmı ise farklı polinom sınıflarının birbirleri arasındaki ilişkiyi ortaya koyar.

2.7.2.1 Teorem : [3,7,13] $n \geq 1$ için,

$$F_{n+1}(x)F_{n-1}(x) - F_n(x)^2 = (-1)^n$$

$$L_{n+1}(x)L_{n-1}(x) - L_n(x)^2 = (-1)^{n-1}(x^2+4)$$

$$P_{n+1}(x)P_{n-1}(x) - P_n(x)^2 = (-1)^n$$

$$F_{n+2}(x) = (1+x^2)F_n(x) + xF_{n-1}(x)$$

2.7.2.2 Teorem : $n \geq 1$ için,

$$L_{n+2}(x) = (1+x^2)L_n(x) + xL_{n-1}(x)$$

$$P_{n+2}(x) = (1+4x^2)\, P_n(x) + 2xP_{n-1}(x)$$

Bu polinom sınıflarının birbirleri ile olan ilişkisini ortaya koyan önemli özdeşlikler şu şekildedir [3,6]:

$$L_n(x) = F_{n+1}(x) + F_{n-1}(x) = xF_n(x) + 2F_{n-1}(x) \tag{2.5}$$

$$P_n\left(\frac{x}{2}\right) = F_n(x) \tag{2.6}$$

(2.6) özdeşliğinde $x = 1$ alınırsa, $P_n\left(\frac{1}{2}\right) = F_n(1) = F_n$ elde edilir.

(2.6) özdeşliğinde $x = 2$ alınırsa, $P_n(1) = F_n(2) = P_n$ elde edilir.

(2.5) özdeşliğinde $x = 2$ alınırsa,

$$L_n(2) = F_{n+1}(2) + F_{n-1}(2) = P_{n+1}(1) + P_{n-1}(1) = P_{n+1} + P_{n-1}$$

Böylece polinomlardan hareketle Fibonacci, Pell ve Lucas sayılarına yönelik önemli eşitlikler görülür.

2.8 Bazı Karmaşık Fonksiyonlar ve Özdeşlikler

Bu kısımda $x, y \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$ ve $z = x + iy$ karmaşık sayı olmak üzere, bazı karmaşık fonksiyonlarla ilgili bilgiler verilecektir.

2.8.1 Tanım : (Karmaşık Üstel Fonksiyon)

$z = x + iy$ için,

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona *karmaşık üstel fonksiyon* denir [39].

2.8.2 Tanım : (Karmaşık Trigonometrik Fonksiyonlar)

$z = x + iy$ için, karmaşık trigonometrik fonksiyonlardan sinüs ve kosinüs fonksiyonu sırasıyla;

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

biçiminde tanımlanır [39].

2.8.3 Tanım : (Karmaşık Hiperbolik Fonksiyonlar)

$z = x + iy$ için, hiperbolik sinüs fonksiyonu ve hiperbolik kosinüs fonksiyonu sırasıyla;

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

biçiminde tanımlanır [39].

2.8.4 Teorem : [39,40]

$z = x + iy$ için,

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$

$$\sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$$

$$\cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$$

$$\cosh iz = \cos z$$

$$\sinh iz = i \sin z$$

2.8.5 Teorem :

$x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \geq 1$$

$$\sinh y \in (-\infty, \infty)$$

biçimindedir [41].

2.8.6 Teorem :

$$\sin y = 0 \text{ ise, } y = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = 0 \text{ ise, } x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

biçimindedir [41].

2.9 Polinomların Kökleri

Polinomların köklerini bulma çalışmaları MÖ 2000'li yıllarda Mezopotamya'da yaşayan Bablyon kabilesinden günümüze kadar devam eden, popülerliğini yüzyıllar boyunca sürdüren çalışma konusudur.

1799 yılında C. F. Gauss, cebirin temel teoremi olan; karmaşık sayılar üzerinde sabit olmayan her polinomun en az bir karmaşık kökünün olacağını ispatlamıştır. Ayrıca n. dereceden bir polinomun n tane kökünün varlığını da ispatlamıştır.

W. N. H. Abel, 5. ve daha yüksek dereceden polinom denklemlerinin köklerini verecek bir formülün bilinen yöntemlerle elde edilemeyeceğini ifade etmiştir. Ancak bazı nümerik çalışmalarla köklerin yaklaşık değerleri hesaplanmaya çalışılmaktadır [42].

E. Galois, polinom kökleri ile ilgili önemli çalışmalar yapmıştır. Bu konu hakkında daha detaylı bilgi için [2] numaralı kaynağa bakılabilir.

Bazı polinom sınıflarında, polinomun köklerini veren genel bir formül elde edilebilmektedir. Bunların başlıcaları; Fibonacci ve Lucas polinomlarıdır. 1973 yılında V. E. Hoggatt ve M. Bicknell, Fibonacci ve Lucas polinomlarının Binet formüllerini karmaşık hiperbolik trigonometrik fonksiyonlar aracılığı ile ifade etmişler ve bu yaklaşımdan hareketle de Fibonacci ve Lucas polinom sınıflarının her biri için genel kök formülünü elde etmişlerdir [11].

2.10 Genel Hecke Grupları

J. Lehner, [20] 1975 yılında genel Hecke gruplarını tanıtmıştır. Genel Hecke grupları ile ilgili daha detaylı bilgi için, [20,22,43] kaynaklarına bakılabilir.

2.10.1 Tanım : $p, q \in \mathbb{Z}, 2 \leq p \leq q \leq \infty,\ p+q > 4$ iken,

$$X(z) = -\frac{1}{z-\lambda_p}, V(z) = z + \lambda_p + \lambda_q$$

dönüşümleri ile üretilen gruplara, genel Hecke grupları denir ve $H_{p,q}$ ile gösterilir [20,22].

Genel Hecke gruplarının Tanım 2.10.1'de verilen üreteçlerinde $q < \infty$ değerleri için $Y = XV$ alınırsa;

$$Y(z) = XV(z) = -\frac{1}{z+\lambda_q}$$

dönüşümü elde edilir. Ayrıca X ve Y elemanlarının ürettiği devirli alt gruplar;

$$< X > = < X \mid X^p = I > \cong \mathbb{Z}_p$$

$$< Y > = < Y \mid Y^q = I > \cong \mathbb{Z}_q$$

biçimindedir. $H_{p,q}$ gruplarında X ve Y elemanlarının birbirleriyle bir ilişkisi olmadığından $H_{p,q}$ grubu p mertebeli ve q mertebeli iki devirli grubun serbest çarpımına izomorf olur [22].

2.10.2 Teorem: $p, q \in \mathbb{Z}, 2 \leq p \leq q < \infty,\ p+q > 4$ için, $H_{p,q}$ genel Hecke gruplarının sunuşu;

$$H_{p,q} = < X, Y \mid X^p = Y^q = I > \cong \mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_q$$

biçimindedir [22,43].

Lehner [20] çalışmasında $q = \infty$ değerine karşılık $\lambda_q = 2$ olduğunu belirtmiş ve elde edilen grupları $H_{p,\infty}$ sembolü ile ifade etmiştir. Bu şekilde elde edilen grupların p mertebeli ve sonsuz mertebeli iki devirli grubun serbest çarpımına izomorf olduğunu belirtmiştir. Burada λ_q değeri yerine $\lambda \geq 2$ değerleri için elde edilebilecek tüm genel Hecke gruplarının izomorfizma anlamında aynı olduğu söylenebilir. Ancak tüm bu grupların elemanları birbirinden farklı olduğu için aşağıdaki tanıma ihtiyaç duyulmuştur [22].

2.10.3 Tanım: $p \in \mathbb{Z}\,, p \geq 2$ için, $\lambda_p = 2cos\frac{\pi}{p}$ ile $\lambda \in \mathbb{R}\,, \lambda \geq 2$ iken,

$$X(z) = -\frac{1}{z - \lambda_p}\ , Y(z) = -\frac{1}{z + \lambda}$$

dönüşümleri ile üretilen gruplara $H_{p,\infty}$ genel Hecke grupları denir [22,43,44].

2.10.4 Teorem: $H_{p,\infty}$ gruplarının sunuşu;

$$H_{p,\infty} =< X, Y \mid X^p = Y^\infty = I >\cong \mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}$$

biçimindedir [22,43,44].

2.11 Genişletilmiş Genel Hecke Grupları

2.10 kısmında açıklanan genel Hecke gruplarına $R(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ yansıma dönüşümünün eklenmesiyle genişletilmiş genel Hecke grupları oluşur. Bu gruplar ile ilgili daha fazla bilgi için [22,43-47] kaynaklarına bakılabilir.

2.11.1 Tanım : Genel Hecke gruplarına $R(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ yansıma dönüşümü eklenerek elde edilen gruplara genişletilmiş genel Hecke grupları denir. Bu gruplar λ_q sayısının tanımına göre $\overline{H}_{p,q}$ ya da $\overline{H}_{p,\infty}(\lambda)$ sembolü ile gösterilir [22].

Genişletilmiş Genel Hecke gruplarından $\overline{H}_{p,q}$ gruplarında;

$p, q \in \mathbb{Z}\,, 2 \leq p \leq q < \infty$ ve $p + q > 4$ için,

$\lambda_p = 2cos\frac{\pi}{p}$ ve $\lambda_q = 2cos\frac{\pi}{q}$ sayıları kullanılmaktadır [43].

$\overline{H}_{p,q}$ grubunun temel özellikleri şu şekildedir [22]:

$\overline{H}_{p,q}$ genişletilmiş genel Hecke grubu X, Y ve R elemanları tarafından üretilir. Bu elemanlardan sadece X ve R elemanlarını üreteç kabul eden grubun sunuşu;

$$< X, R \mid X^p = R^2 = (XR)^2 = I > \cong D_p$$

biçimindedir. Sadece Y ve R elemanlarını üreteç kabul eden grubun sunuşu ise;

$$< Y, R \mid Y^q = R^2 = (YR)^2 = I > \cong D_q$$

biçimindedir. Her iki grupta da bulunan R elemanının sadece kendisi, iki mertebeli devirli grup üretir. Böylece $\overline{H}_{p,q}$ grubu, elde edilen bu iki dihedral grubun iki mertebeli devirli grup altında karışımlı serbest çarpımına izomorf olur.

2.11.2 Teorem : $\overline{H}_{p,q}$ genişletilmiş genel Hecke grubunun sunuşu;

$$\overline{H}_{p,q} =< X, Y, R \mid X^p = Y^q = R^2 = (XR)^2 = (YR)^2 = I > \cong D_p *_{\mathbb{Z}_2} D_q$$

ya da

$$\overline{H}_{p,q} =< X, Y, R \mid X^p = Y^q = R^2 = I , RX = X^{-1}R, RY = Y^{-1}R > \cong D_p *_{\mathbb{Z}_2} D_q$$

biçimindedir [22,43].

$\overline{H}_{p,\infty}$ grubunun temel özellikleri ise şu şekildedir [22]:

Bu grup p mertebeli dihedral grup ile sonsuz mertebeli dihedral grubun iki mertebeli devirli grup altında karışımlı serbest çarpımına izomorf olur.

2.11.3 Teorem : $\overline{H}_{p,\infty}(\lambda)$ genişletilmiş genel Hecke grubunun sunuşu;

$$\overline{H}_{p,\infty}(\lambda) =< X, Y, R \mid X^p = Y^\infty = R^2 = (XR)^2 = (YR)^2 = I > \cong D_p *_{\mathbb{Z}_2} D_\infty$$

ya da

$$\overline{H}_{p,\infty}(\lambda) =< X, Y, R \mid X^p = Y^\infty = R^2 = I , RX = X^{-1}R, RY = Y^{-1}R > \cong D_p *_{\mathbb{Z}_2} D_\infty$$

biçimindedir [44].

2.11.4 Uyarı : Genel Hecke grupları, genişletilmiş genel Hecke gruplarının iki indeksli normal alt grubudur [44].

2.11.5 Lemma : Genişletilmiş genel Hecke gruplarında,

$$XR = RX^{p-1}$$

$$YR = RY^{-1}$$

eşitlikleri sağlanır [22].

2.12 Hecke Grupları

Hecke gruplarını 1936 yılında E. Hecke [21] numaralı çalışmasında tanımlanmıştır.

2.12.1 Tanım : $\lambda \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere,

$$X(z) = -\frac{1}{z}\,, V(z) = z + \lambda$$

kesirli doğrusal dönüşümleri ile üretilen gruplara Hecke grupları denir [21]. Hecke grupları $H(\lambda)$ ile gösterilir.

Hecke gruplarının üreteçleri reel katsayılıdır. Dolayısıyla bu gruplar, $PSL(2,\mathbb{R})$ grubunun birer alt grubu olur. Böylece Hecke gruplarının bazılarının, Fuchsian grup olabileceği Fuchsian grup tanımı gereğince doğrudan söylenebilir. E. Hecke, [21] çalışmasında hangi Hecke gruplarının Fuchsian grup olduğunu belirtmiştir [22].

2.12.2 Teorem : Hecke grupları, $\lambda \in \mathbb{R}\ , \lambda \geq 2$ veya $q \in \mathbb{Z}\,, q \geq 3$ iken, $\lambda = \lambda_q = 2cos\frac{\pi}{q}$ şeklinde tanımlandığında $H(\lambda)$ grubu bir Fuchsian gruptur [21].

Hecke gruplarının üreteçleri olan $X(z) = -\frac{1}{z}$ ve $V(z) = z + \lambda$ kesirli doğrusal dönüşümleri için, $Y = X.V$ alınırsa;

$$Y(z) = -\frac{1}{z + \lambda}$$

kesirli doğrusal dönüşümü elde edilir. Buradaki λ sayısı $\lambda_q = 2cos\frac{\pi}{q}$ biçiminde tanımlanırsa Y üreteci $H(\lambda_q)$ grubunda q mertebeli bir eleman iken, X üreteci 2 mertebeli bir elemandır. Böylece X ve Y elemanlarının ürettiği devirli gruplar;

$$< X >= \{I, X\} \cong \mathbb{Z}_2$$
$$< Y >= \{I, Y, Y^2, \dots, Y^{q-1}\} \cong \mathbb{Z}_q$$

biçiminde olur. Ayrıca $H(\lambda_q)$ grubunda X ve Y elemanlarının birbirleri ile bir ilişkisi olmadığından $H(\lambda_q)$ grubu 2 mertebeli devirli grup ve q mertebeli devirli grubun serbest çarpımına izomorf olur [22].

2.12.3 Teorem : $H(\lambda_q)$ Hecke grubunun sunuşu;

$$H(\lambda_q) = < X, Y \mid X^2 = Y^q = I > \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_q$$

biçimindedir [48].

2.12.4 Sonuç : $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq 2$ için elde edilen $H(\lambda)$ Hecke grubunun sunuşu;

$$H(\lambda) = < X, Y \mid X^2 = Y^\infty = I > \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}$$

biçimindedir [49].

2.12.5 Uyarı : J. Lehner'in [20] çalışmasında belirttiği gibi Genel Hecke grupları, Hecke gruplarını da kapsayan daha genel bir grup sınıfıdır. Tanım 2.10.1'de açıklanan Genel Hecke gruplarında; $p = 2$ alındığında, Tanım 2.12.1'de belirtilen Hecke grupları tanımı ile çakışır. Böylece $p = 2$ için aşağıdaki ifadenin verilebileceği açıkça görülür [22].

2.12.6 Sonuç : $p = 2$ için, $H_{2,q} = H(\lambda_q)$ ile Hecke grupları elde edilir [20].

2.12.7 Uyarı : Genel Hecke grupları sınıfında $p = q = 2$ alınarak $H_{2,2}$ biçiminde bir grubunun elde edilemeyeceği genel Hecke grupları tanımı gereğince açıktır [20].

Ayrıca genel Hecke gruplarında $p = q$ olarak seçildiğinde elemanları Hecke grubunun elemanlarından oluşan $H_{p,p}$ grubu elde edilir. $H_{p,p}$ grupları, $H(\lambda_q)$ grupları tarafından kapsanır [20].

2.13 Genişletilmiş Hecke Grupları

Genişletilmiş Hecke grupları, Şahin ve Bizim tarafından Hecke gruplarına $R(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ yansıma dönüşümünün eklenmesiyle literatüre kazandırılmıştır [50]. Bu grupların sembolleri Koruoğlu, Şahin ve Bizim'in çalışmaları ile λ_q sayısının tanımına göre $\overline{H}(\lambda_q)$ ya da $\overline{H}(\lambda)$ olarak verilmiştir [50,51].

Genişletilmiş genel Hecke grupları ile ilgili ilk çalışmalar, Huang ve Demir tarafından yapılmıştır [22,45]. Genişletilmiş Hecke grupları da, Genel Hecke grupları ile Hecke grupları arasında olan ilişkiye benzer olarak kısaca şöyle özetlenebilir: Genişletilmiş genel Hecke gruplarında $p = 2$ alınması halinde, genişletilmiş Hecke grupları elde edilir. Dolayısıyla 2.11 kısmında özelliklerini açıkladığımız bu gruplarda bu özel değer ile birlikte aşağıdaki bilgiler elde edilir.

2.13.1 Teorem : $\overline{H}_{2,q} = \overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grubunun sunuşu;

$$\overline{H}_{2,q} = \overline{H}(\lambda_q) =< X,Y,R \mid X^2 = Y^q = R^2 = (XR)^2 = (YR)^2 = I > \cong D_2 *_{\mathbb{Z}_2} D_q$$

ya da

$$\overline{H}_{2,q} = \overline{H}(\lambda_q) =< X,Y,R \mid X^2 = Y^q = R^2 = I\,, RX = X^{-1}R, RY = Y^{-1}R > \cong D_2 *_{\mathbb{Z}_2} D_q$$

biçimindedir [50].

2.13.2 Teorem : $\overline{H}_{2,\infty}(\lambda) = \overline{H}(\lambda)$ genişletilmiş Hecke grubunun sunuşu;

$$\overline{H}_{2,\infty}(\lambda) = \overline{H}(\lambda) =< X,Y,R \mid X^2 = Y^\infty = R^2 = (XR)^2 = (YR)^2 = I > \cong D_2 *_{\mathbb{Z}_2} D_\infty$$

biçimindedir [51].

3. FİBONACCİ, LUCAS, PELL POLİNOMLARININ; TRİGONOMETRİK TEMSİLLERİ, GENEL KÖK FORMÜLLERİ VE POLİNOM KÖKLERİNİN AYNI POLİNOM SINIFI İÇERİSİNDEKİ BAŞKA POLİNOM ÜYELERİ ALTINDAKİ GÖRÜNTÜLERİ

Bu bölümde Fibonacci, Lucas ve Pell polinomlarını, karmaşık hiperbolik fonksiyonlar cinsinden ifade edip, kökleri için genel formülü vereceğiz. Bunun yanı sıra herhangi bir polinom sınıfındaki polinomun kök değerlerini, aynı polinom sınıfının başka polinomlarında inceleyip o polinomu hangi noktaya resmettiğini özgün bulgularımızla ortaya koyacağız.

Fibonacci, Lucas ve Pell polinom sınıflarının klasik tanımının, tekrarlama bağıntısı ile ifade edildiği bilinmektedir. Ayrıca bu polinom sınıflarının matris teorisinden yararlanarak başka birtakım farklı yollarla temsili de mümkündür. Bununla birlikte bu polinom sınıflarının farklı cebirsel temsilleri de bulunmaktadır. Biz bu bölümde Fibonacci, Lucas ve Pell polinom sınıfların temsillerini karmaşık fonksiyonlar teorisi perspektifinden ele alacağız. Bu konu ile ilgili olarak literatürdeki çalışmaları kısaca özetleyelim ve bizim ortaya koyacağımız özgün bulgulardan bahsedelim.

1963 yılında P.F.Byrd [10] çalışmasında -o dönemler Byrd'ün Fibonacci polinomu adı ile anılan- Pell polinomunun hiperbolik fonksiyonlar cinsinden temsiline yer vermiştir. 1973 yılında V. E. Hoggatt ve M. Bicknell; [11] numaralı çalışmalarında Fibonacci ve Lucas polinomlarını, karmaşık hiperbolik fonksiyonlar cinsinden ifade etmişler ve bu temsilden hareketle de Fibonacci ve Lucas polinom sınıflarının her biri için genel kök bulma formülünü elde etmişlerdir. 2016 yılında Piotr Slanina, [13] çalışmasında bir lineer grubun serbestliğini Fibonacci polinomunun kökü perspektifinden incelemiştir. Biz de V. E. Hoggatt ve M. Bicknell'in [11] çalışmasından yararlanarak [6] numaralı kaynakta yer alan; Fibonacci polinomları ile Pell polinomları arasında geçişe imkan sağlayan, $P_n\left(\frac{x}{2}\right) = F_n(x)$ eşitliğini de kullanarak Pell polinomlarını karmaşık hiperbolik fonksiyonlar cinsinden ifade edip, Pell polinomları için de genel kök bulma formülünü elde edeceğiz. Bununla birlikte bir polinom sınıfının herhangi bir polinomunun köklerinin, aynı polinom sınıfındaki başka birtakım üyelerini hangi noktaya resmettiğini inceleyeceğiz. Ayrıca bu bölümde ulaştığımız bilgiler; diğer bölümde, yeni matris formları elde etmeye ve bu matris formlar hakkında yorum yapmaya imkan sağlayacaktır.

3.1 Fibonacci, Lucas, Pell Polinomlarının Karmaşık Hiperbolik Trigonometrik Fonksiyonlar Cinsinden Temsili ve Genel Kök Formülleri

Bu kısımda V. E. Hoggatt ve M. Bicknell'in Fibonacci ve Lucas polinomlarının Binet formüllerinde değişken değimini uygulayıp, Fibonacci ve Lucas polinomları için elde ettikleri farklı temsil biçimlerini ve kök formüllerini ifade edeceğiz. Bunu yaparken daha anlaşılır olması için V. E. Hoggatt ve M. Bicknell [11] çalışmasındaki teoremlerin ispatlarını farklı bir yaklaşım ile sunacağız. Ayrıca bu çalışmadan hareketle biz de Pell polinomları için benzer çalışmayı yapacağız.

Fibonacci ve Lucas polinomlarının farklı temsil biçimlerinin sayesinde çok geniş polinom sınıflarının her bir üyesinin köklerini veren genel bir formül elde edilmiş olur. Ayrıca bu farklı temsil biçimiyle birlikte bu polinom sınıflarının türevleri ile ilgili yapılacak çalışmalara kolaylık sağlanmış olur. Fibonacci ve Lucas polinomlarının türevleri ile ilgili detaylı bilgi için, Wang'ın [52] ve Özgür ile Kaymak'ın [12] numaralı çalışmalarına bakılabilir.

W. N. H. Abel'in 5. ve daha yüksek dereceden polinom denklemlerinin köklerini verecek bir formülün bilinen yöntemlerle elde edilemeyeceğini belirttiği bilinmektedir. Bu açıdan Fibonacci ve Lucas polinomlarının kökleri için, birtakım özdeşlikler kullanılarak elde edilen formül oldukça dikkat çekici bir özelliğe ve öneme sahiptir.

Fibonacci ve Lucas polinomlarının sırasıyla aşağıdaki biçimde ifade edildiğini biliyoruz.

$$F_1(x) = 1\,, F_2(x) = x \text{ iken, } F_n(x) = xF_{n-1}(x) + F_{n-2}(x)\,; n \geq 3$$

$$L_0(x) = 2\,, L_1(x) = x \text{ iken, } L_n(x) = xL_{n-1}(x) + L_{n-2}(x)\,; n \geq 2$$

Bu polinom sınıflarının karakteristik denklemi, $t^2 - xt - 1 = 0$ şeklinde olup bu denklemin kökleri;

$$\alpha(x) = \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}, \beta(x) = \frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}$$

biçiminde elde edilir. Bu polinom sınıfları için, matematiksel tümevarım yöntemi ve tekrarlama bağıntısını kullanarak ispatlanabilen ve Binet formülü adı verilen farklı bir temsil biçiminin olduğu bilinmektedir. Fibonacci ve Lucas polinomlarının Binet formülleri aşağıdaki gibidir.

3.1.1 Teorem : $\alpha(x) = \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}$ ve $\beta(x) = \frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}$ olmak üzere;

$$F_n(x) = \frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x)-\beta(x)} \text{ ve } L_n(x) = \alpha^n(x) + \beta^n(x)$$

biçimindedir [3].

Binet formülünden görüldüğü üzere herhangi bir Fibonacci ya da Lucas polinomunu $\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}$ ve $\frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}$ ile ilişkili olarak yazmak mümkündür. Bu durumdan hareketle V. E. Hoggatt ve M. Bicknell bu polinom sınıflarını farklı bir yolla temsil etmek için $\sqrt{x^2+4}$ ifadesine odaklanmışlar ve bu ifadeyi kökten işlevsel bir biçimde

çıkarmak için değişken değişimi tekniğini ustaca kulanmışlardır. Bu sayede bu polinom sınıfları için farklı bir temsil elde ettikleri gibi, genel anlamda polinom denklemleri için zorlu çalışma alanlarından olan kökleri için genel formül elde etmeyi de başarmışlardır. Biz bu çalışmayı farklı birtakım özdeşlikler yardımıyla aşağıdaki biçimiyle ispatlayacağız.

3.1.2 Teorem [11] : $x = 2\,sinh\,z$ olmak üzere,

$$F_{2n}(x) = \frac{e^{2nz} - (-1)^{2n}e^{-2nz}}{e^z + e^{-z}} = \frac{sinh\,2nz}{cosh\,z}$$

$$F_{2n+1}(x) = \frac{e^{(2n+1)z} - (-1)^{2n+1}e^{-(2n+1)z}}{e^z + e^{-z}} = \frac{cosh(2n+1)z}{cosh\,z}$$

$$L_{2n}(x) = e^{2nz} + (-1)^{2n}e^{-2nz} = 2\,cosh\,2nz$$

$$L_{2n+1}(x) = e^{(2n+1)z} + (-1)^{(2n+1)}e^{-(2n+1)z} = 2\,sinh(2n+1)z$$

İspat : $\alpha(x) = \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}$ ve $\beta(x) = \frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}$ olmak üzere,

$$F_n(x) = \frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x)-\beta(x)} \text{ ve } L_n(x) = \alpha^n(x) + \beta^n(x)$$

olduğunu biliyoruz. 2.8 kısmındaki tanım ve özdeşliklerden yararlanıp değişken değişimini kullanarak Fibonacci ve Lucas polinomlarının farklı bir temsil biçimine ulaşmak mümkün olacaktır. Bunun için $x = 2\sinh z$ olsun. Böylece,

$$\sqrt{x^2+4} = \sqrt{4(\sinh z)^2 + 4} = \sqrt{4[(\sinh z)^2 + 1]} = \sqrt{4(\cosh z)^2} = 2\cosh z$$

elde edilir.

$\alpha(x) = \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}$ ve $\beta(x) = \frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}$ idi.

$$\alpha(x) = \frac{2\sinh z + 2\cosh z}{2} = \sinh z + \cosh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} + \frac{e^z + e^{-z}}{2} = e^z$$

$$\beta(x) = \frac{2\sinh z - 2\cosh z}{2} = \sinh z - \cosh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} - \frac{e^z + e^{-z}}{2} = -e^{-z}$$

olur.

$x = 2\sinh z$ değişken değişimi ile elde etiklerimizi Fibonacci ve Lucas polinomlarının Binet formüllerinde yazdığımızda,

$$F_n(x) = \frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} = \frac{e^{nz} - (-1)^n e^{-nz}}{e^z + e^{-z}}$$

$$L_n(x) = \alpha^n(x) + \beta^n(x) = e^{nz} + (-1)^n e^{-nz}$$

elde edilir. Burada çift ve tek indise göre bir sınıflama yapıldığında;

$$F_{2n}(x) = \frac{e^{2nz} - (-1)^{2n} e^{-2nz}}{e^z + e^{-z}} = \frac{\sinh 2nz}{\cosh z}$$

$$F_{2n+1}(x) = \frac{e^{(2n+1)z} - (-1)^{2n+1} e^{-(2n+1)z}}{e^z + e^{-z}} = \frac{\cosh(2n+1)z}{\cosh z}$$

$$L_{2n}(x) = e^{2nz} + (-1)^{2n} e^{-2nz} = 2\cosh 2nz$$

$$L_{2n+1}(x) = e^{(2n+1)z} + (-1)^{(2n+1)} e^{-(2n+1)z} = 2\sinh(2n+1)z$$

olduğu karmaşık hiperbolik trigonometrik fonksiyon tanımlarından kolayca görülür.□

V. E. Hoggatt ve M. Bicknell, Fibonacci ve Lucas polinomlarını yukarıdaki biçimiyle karmaşık hiperbolik fonksiyonlar cinsinden ifade etmenin yanı sıra bu polinom sınıfları için genel kök formülünü vermişlerdir. Biz de bunun farklı bir yaklaşımla ispatını sunacağız.

3.1.3 Teorem [11]:

$$F_{2n}(x) = 0 \quad : \quad x = \pm 2i\, sin\frac{k\pi}{2n} \qquad ; k = 0, 1, \dots, n-1$$

$$F_{2n+1}(x) = 0 \ : \ x = \pm 2i\, sin\frac{(2k+1)}{(2n+1)} \cdot \frac{\pi}{2} \qquad ; k = 0, 1, \dots, n-1$$

$$L_{2n}(x) = 0 \quad : x = \pm 2i\, sin\frac{(2k+1)}{2n} \cdot \frac{\pi}{2} \qquad ; k = 0, 1, \dots, n-1$$

$$L_{2n+1}(x) = 0 \ : x = \pm 2i\, sin\frac{k\pi}{(2n+1)} \qquad ; \ k = 0, 1, \dots, n$$

İspat : Öncelikle $F_{2n}(x) = 0$ için kök formülünü ispatlayalım. $x = 2\, sinh\, z$ değişken değişimi uygulanırsa, $F_{2n}(x) = \frac{sinh\, 2nz}{cosh\, z}$ elde edildiğini Teorem 3.1.2'den biliyoruz.

$F_{2n}(x) = 0$ olması için $sinh\, 2nz = 0$ ve $cosh\, z \neq 0$ olmalıdır.

$a, b \ \in R$, $z = a + ib$ bir karmaşık sayı olmak üzere;

$$sinh\, z = sinh\, a\, cos\, b + i\, cosh\, a\, sin\, b$$

$$cosh\, z = cosh\, a\, cos\, b + i\, sinh\, a\, sin\, b$$

eşitlikleri bilinmektedir. Bu eşitlikleri $F_{2n}(x) = \frac{sinh\, 2nz}{cosh\, z} = 0$ olması için, dolayısıyla $sinh\, 2nz = 0$ *ve* $cosh\, z \neq 0$ durumu için incelediğimizde;

$$sinh\, 2nz = sinh(2na + i2nb) = sinh\, 2na\, cos\, 2nb + i\, cosh\, 2na\, sin\, 2nb = 0$$

$$cosh\, z = cosh(a + ib) = cosh\, a\, cos\, b + i\, sinh\, a\, sin\, b \neq 0$$

özelliklerini sağlayan a ve b'yi bulmalıyız. Bunun için;

$sinh\, 2na\, cos\, 2nb = 0 \wedge cosh\, 2na\, sin\, 2nb = 0$ ve

$cosh\, a\, cos\, b \neq 0 \ \vee sinh\, a\, sin\, b \neq 0$ olmalıdır. Bu istenenleri,

$$cosh\, a = \frac{e^a + e^{-a}}{2} \geq 1$$

$$sinh\, a = \frac{e^a - e^{-a}}{2}$$

fonksiyonlarının tanım ve özellikleri ile birlikte düşündüğümüzde;

$cosh\, 2na\, sin\, 2nb = 0$ ifadesinde, $sin\, 2nb = 0$ olmak zorundadır. Çünkü, $cosh\, 2na \geq 1$'dir. Böylece $k \in \mathbb{Z}$ için, $2nb = k\pi$ ve $b = \frac{k\pi}{2n}$ elde edilir.

$sinh\, 2na\, cos\, 2nb = sinh\, 2na\, cos\, k\pi = 0$ ifadesi için, $k \in \mathbb{Z}$ ve kosinüs fonksiyonunun özelliğinden $\cos k\pi \neq 0$ olduğundan $\sinh 2na = 0$ olmalıdır. Dolayısıyla; $sinh\, 2na = \frac{e^{2na} - e^{-2na}}{2} = 0$ ise $a = 0$ olmalıdır. Gerçekten $b = \frac{k\pi}{2n}$ ve $a = 0$ değerleri ile $cosh\, a\, cos\, b \neq 0$ sonucunu beraberinde getirir. Böylece amaçladığımız $cosh\, z \neq 0$ olduğu görülür. Burada $k = 0, 1, \dots, n-1$ biçimindedir. Çünkü $k = n$ olursa, $b = \frac{k\pi}{2n} = \frac{n\pi}{2n} = \frac{\pi}{2}$ olur ki bu durumda $sinh\, 2na\, cos\, 2nb = 0$ olması gerekirken $\sinh 2na \cos 2nb \neq 0$ haline gelir. Dolayısıyla $k = n$ olamaz. Böylece aradığımız kökün; $x = 2\, sinh\, z = 2\, sinh(a + ib) = 2\, sinh\, i\frac{k\pi}{2n} = 2i\, sin\frac{k\pi}{2n}$ biçiminde olduğunu belirledik. Bundan sonraki inceleme konusu k'nın tam olarak hangi değerlere sahip olduğudur. Fibonacci polinomlarının özelliğinden $der\big(F_{2n}(x)\big) = 2n - 1$ olduğunu biliyoruz. Bununla birlikte Gauss'un teoremi dolayısıyla $F_{2n}(x)$ için, $2n - 1$ kadar kök bulmamız gerekir. Ayrıca çift indisli Fibonacci polinomları tek fonksiyon özelliğine sahiptir. Tüm bunları birlikte değerlendirdiğimizde elde ettiğimiz;

$$x = 2i \sin\frac{k\pi}{2n}\ , k = 0, 1, \dots, n-1$$

köklerine ek olarak tek fonksiyon tanımını $F_{2n}(x) = 0$ durumu için değerlendirdiğimizde, bu köklerinin yanı sıra toplamsal terslerinin kök olarak bulunacağını söyleyebiliriz.

Dolayısıyla;

$$F_{2n}(x) = 0 \quad : \quad x = \pm 2i\, sin\frac{k\pi}{2n} \qquad ; k = 0, 1, \dots, n-1$$

olarak çift indisli Fibonacci polinomlarının kökleri için genel formül bulunmuş olur. Ayrıca burada dikkat edilmesi gereken bir diğer durum, $k = 0$ için kökün $x = 0$ olarak elde edileceğidir. Dolayısıyla $2n$ kadar kök değil; derecesinden de anlaşıldığı üzere, olması gerektiği gibi $2n - 1$ kadar kök elde edilmiş olur. Bunların yanı sıra, $k = n + 1, n + 2, ...$ olarak devam ettiğimizde bu değerlere karşılık gelen kök değerlerinin sinüs fonksiyonunun özelliğinden $k = 0, 1, \dots, n - 1$ için karşılık gelen kök değerleri ya da $k = 0, 1, \dots, n - 1$ için karşılık gelen kök değerlerinin toplamsal tersi ile çakışır. Çünkü $sin(\pi + \theta) = -sin\,\theta\ \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ ve $sin(\theta + 2k\pi) = sin\,\theta$ özelliklerin varlığı bilinmektedir. (Çalışmamızın benzer kısımlarında yine k'nın alınamaz değerleri olacaktır, bu ve benzeri yaklaşımlarla bir daha karşılaşacağız. Bunları burada yaptığımız gibi detaylandırmadan fonksiyon özellikleri doğrultusunda k değerlerini doğrudan ifade edeceğiz.) Böylece Fibonacci polinom sınıfının çift indisli olan terimleri için, köklerinin genel formülünün ne olduğu V. E. Hoggatt ve M. Bicknell çalışmasındaki ispat tekniğinden farklı olarak ispatlamış olduk. Benzer yaklaşımla tek indisli Fibonacci polinomları için de kök bulma formülünü ispatlayalım.

$x = 2\,sinh\,z$ değişken değişimi uygulanırsa, $F_{2n+1}(x) = \frac{cosh(2n+1)z}{cosh\,z}$ elde edilir.

$F_{2n+1}(x) = \frac{cosh(2n+1)z}{cosh\,z} = 0$ için kök bulacağız. Bunun için;

$cosh(2n + 1)z = 0$ *ve* $cosh\,z \neq 0$ olmalıdır.

$a, b\ \in R\ ,\ z = a + ib$ bir karmaşık sayı olmak üzere;

$$cosh\,z = cosh\,a\,cos\,b + i\,sinh\,a\,sin\,b$$

eşitliği bilinmektedir. Bu eşitliği $F_{2n+1}(x) = \frac{cosh(2n+1)z}{cosh\,z} = 0$ olması için yani, $cosh(2n + 1)z = 0$ ve $cosh\,z \neq 0$ durumu için incelediğimizde;

$$cosh(2n + 1)z = cosh[(2n + 1)a + i(2n + 1)b]$$

$$= cosh[(2n + 1)a]\,.\,cos[(2n + 1)b] + i\,sinh[(2n + 1)a].\,sin[(2n + 1)b] = 0$$

$$cosh\,z = cosh(a + ib) = cosh\,a\,cos\,b + i\,sinh\,a\,sin\,b \neq 0$$

özelliklerini sağlayan a ve b'yi bulmalıyız. Bunun için;

$cosh[(2n+1)a]\,.\,cos[(2n+1)b]=0 \wedge sinh[(2n+1)a].\,sin[(2n+1)b]=0$ ve

$cosh\,a\,cos\,b \neq 0\ \vee sinh\,a\,sin\,b \neq 0$ olmalıdır. Bu istenenleri,

$$cosh\,a = \frac{e^{a}+e^{-a}}{2} \geq 1$$

$$sinh\,a = \frac{e^{a}-e^{-a}}{2}$$

fonksiyonlarının tanım ve özellikleri ile birlikte düşündüğümüzde,

$cosh[(2n+1)a]\,.\,cos[(2n+1)b]=0$ ifadesinde $cosh[(2n+1)a] \geq 1$ olduğundan, $cos[(2n+1)b]=0$ olmak zorundadır. Böylece Böylece $k \in \mathbb{Z}$ için, $(2n+1)b=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ ve $b=\frac{(2k+1)}{(2n+1)}\cdot\frac{\pi}{2}$ elde edilir.

$sinh[(2n+1)a].\,sin[(2n+1)b] = sinh[(2n+1)a].\,sin\left[(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right]=0$ ifadesi için; $k \in \mathbb{Z}$ ve sinüs fonksiyonunun özelliğinden $\sin\left[(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right] \neq 0$ olduğundan $\sinh[(2n+1)a]=0$ olmalıdır. Dolayısıyla $sinh[(2n+1)a]=\frac{e^{(2n+1)a}-e^{-(2n+1)a}}{2}=0$ ise $a=0$ olmalıdır. Gerçekten $b=\frac{(2k+1)}{(2n+1)}\cdot\frac{\pi}{2}$ ve $a=0$ değerleri $cosh\,a\,cos\,b \neq 0$ sonucunu beraberinde getirir. Böylece amaçladığımız $cosh\,z \neq 0$ olduğu görülür. Burada $k=0,1,\dots,n-1$ biçimindedir. Çünkü $k=n$ olursa, $b=\frac{(2k+1)}{(2n+1)}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{(2n+1)}{(2n+1)}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$ olur ki bu durumda $sinh[(2n+1)a].\,sin[(2n+1)b]=0$ olması gerekirken $sinh[(2n+1)a].\,sin[(2n+1)b] \neq 0$ haline gelir. Dolayısıyla $k=n$ olamaz. Böylece aradığımız kökün $x=2\,sinh\,z=2\,sinh(a+ib)=2\,sinh\,i\frac{(2k+1)}{(2n+1)}\cdot\frac{\pi}{2}=2i\,sin\frac{(2k+1)}{(2n+1)}\cdot\frac{\pi}{2}$ biçiminde olduğunu belirledik. Bundan sonraki inceleme konusu k'nın tam olarak hangi değerlere sahip olduğudur. Bu kısmı çift indisli Fibonacci polinomlarında yaptığımız yaklaşım ile inceleyeceğiz. Fibonacci polinomlarının özelliğinden $der\big(F_{2n+1}(x)\big)=2n$ olduğunu biliyoruz. Bununla birlikte Gauss'un teoremi dolayısıyla $F_{2n+1}(x)$ için, $2n$ kadar kök bulmamız gerekir. Ayrıca tek indisli Fibonacci polinomları çift fonksiyon özelliğine sahiptir. Tüm bunları birlikte değerlendirdiğimizde elde ettiğimiz;

$$x = 2i\sin\frac{(2k+1)}{(2n+1)}\cdot\frac{\pi}{2}\ , k = 0, 1, \ldots, n-1$$

köklerine ek olarak çift fonksiyon tanımını $F_{2n+1}(x) = 0$ durumu için değerlendirdiğimizde bu köklerinin yanı sıra toplamsal terslerinin kök olarak bulunacağını söyleyebiliriz. Dolayısıyla;

$$F_{2n+1}(x) = 0\ :\ x = \pm 2i\sin\frac{(2k+1)}{(2n+1)}\cdot\frac{\pi}{2}\quad ; k = 0, 1, \ldots, n-1$$

olarak tek indisli Fibonacci polinomlarının kökleri için genel formül bulunmuş olur. Böylece, $F_{2n+1}(x)$ için, $2n$ kadar kök elde edilmiş olur.

Ayrıca, $k = n+1, n+2, \ldots$ olarak devam ettiğimizde bu değerlere karşılık gelen kök değerlerinin sinüs fonksiyonunun özelliğinden $k = 0, 1, \ldots, n-1$ için karşılık gelen kök değerleri ya da $k = 0, 1, \ldots, n-1$ için karşılık gelen kök değerlerinin toplamsal tersi ile çakışır. Çünkü $\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta\ \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ ve $\sin(\theta + 2k\pi) = \sin\theta$ özelliklerin varlığı bilinmektedir.

Böylece Fibonacci polinomunun tek indisli olan terimleri için köklerinin genel formülünün ne olduğu V. E. Hoggatt ve M. Bicknell çalışmasındaki ispat tekniğinden farklı olarak ispatlamış olduk.

$L_{2n}(x)$ ve $L_{2n+1}(x)$ biçimiyle temsil edilen çift ve tek indisli Lucas polinom denklemi için de yukarıdaki özdeşlik ve eşitliklerin benzerlerini kullanıp, bu polinom denklemlerinin köklerini benzer yaklaşımla ispatlayabiliriz.□

Bu formülün bir uygulamasını örnek üzerinde inceleyelim:

3.1.4 Örnek : Fibonacci polinom sınıfının 6. terimi olan $F_6(x) = x^5 + 4x^3 + 3x$ polinomunu basit cebirsel yaklaşımlarla çarpanlarına ayırdığımızda; $x^5 + 4x^3 + 3x = 0$ polinom denkleminin kökleri; $x^5 + 4x^3 + 3x = x(x^2+1)(x^2+3) = 0$ ifadesinden yararlanarak $x = 0, \pm i,\ \pm i\sqrt{3}$ olarak bulur. Ayrıca Teorem 3.1.3'te elde edilen kök formülünde $F_6(x)$ için yerine yazdığımızda $x = \pm 2i\sin\frac{k\pi}{2n}$; $k = 0, 1, 2$ olarak; $x = \pm 2i\sin 0, \pm 2i\sin\frac{\pi}{6}, \pm 2i\sin\frac{\pi}{3} = 0, \pm i,$ $\pm i\sqrt{3}$ olarak elde edildiği ve dolayısıyla cebirsel teknikle elde edilen kök değerleri ile çakıştığı görülür.

Fibonacci ve Lucas polinom denklemlerinin genel kök formülleri, $x = 2i\, cosh\, z$ değişken değişimi, karmaşık trigonometrik özdeşlikler ve karmaşık trigonometrik fonksiyon özellikleri kullanılarak indis sınıflaması olmadan aşağıdaki biçimiyle elde edilir. Bunun için öncelikle $x = 2i\cosh z$ değişken değişimi ile Fibonacci ve Lucas polinomlarının karmaşık hiperbolik temsilini ispatlayalım.

3.1.5 Teorem [11] : $x = 2i\, cosh\, z$ olmak üzere,

$$F_n(x) = i^{n-1} \cdot \frac{sinh\, nz}{sinh\, z}$$

$$L_n(x) = 2i^n \cdot cosh\, nz$$

İspat :

$\alpha(x) = \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}$ ve $\beta(x) = \frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}$ olmak üzere,

$$F_n(x) = \frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x)-\beta(x)} \text{ ve } L_n(x) = \alpha^n(x) + \beta^n(x)$$

olduğunu biliyoruz.

2.8 kısmındaki tanım, özdeşliklerden yararlanak ve değişken değişimini kullanarak Fibonacci ile Lucas polinomlarının farklı bir temsiline ulaşmak mümkün olacaktır. Bunun için $x = 2i\, cosh\, z$ olsun. Böylece,

$\sqrt{x^2+4} = \sqrt{-4(cosh\, z)^2 + 4} = \sqrt{4[-(cosh\, z)^2 + 1]} = \sqrt{-4(sinh\, z)^2} =$ $2i\, sinh\, z$ elde edilir.

$$\alpha(x) = \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2} \text{ ve } \beta(x) = \frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2} \text{ idi.}$$

$$\alpha(x) = \frac{2i\, cosh\, z + 2i\, sinh\, z}{2} = i(cosh\, z + i\, sinh\, z) = i\left(\frac{e^z+e^{-z}}{2} + \frac{e^z-e^{-z}}{2}\right) = ie^z$$

$$\beta(x) = \frac{2i\, cosh\, z - 2i\, sinh\, z}{2} = i(cosh\, z - i\, sinh\, z) = i\left(\frac{e^z+e^{-z}}{2} - \frac{e^z-e^{-z}}{2}\right) = ie^{-z} \text{olur.}$$

$x = 2i\, cosh\, z$ değişken değişimi ile elde ettiklerimizi Fibonacci ve Lucas polinomlarının Binet formüllerinde yazdığımızda ve karmaşık hiperbolik trigonometrik fonksiyon tanımlarını kullandığımızda;

$$F_n(x) = \frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} = \frac{i^n e^{nz} - i^n e^{-nz}}{ie^z - ie^{-z}} = i^{n-1} \cdot \frac{e^{nz} - e^{-nz}}{e^z - e^{-z}} = i^{n-1} \cdot \frac{sinh\, nz}{sinh\, z}$$

$$L_n(x) = \alpha^n(x) + \beta^n(x) = i^n e^{nz} + i^n e^{-nz} = 2i^n \cosh nz$$

elde edilir. Böylece çift ve tek indise göre bir sınıflama olmaksızın Fibonacci ve Lucas polinomlarının hiperbolik temsilleri elde edilmiş olur.□

V. E. Hoggatt ve M. Bicknell, Fibonacci ve Lucas polinomlarını yukarıdaki biçimiyle karmaşık hiperbolik fonksiyonlar cinsinden ifade etmenin yanı sıra, bu polinom sınıfları için genel kök formülünü vermişlerdir. Biz de bunun farklı bir yaklaşımla ispatını sunacağız.

3.1.6 Teorem [11] :

$$F_n(x) = 0 \quad : \quad x = 2i\cos\frac{k\pi}{n} \qquad ; \; k = 1, 2, \dots, n-1$$

$$L_n(x) = 0 \quad : \; x = 2i\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n} \qquad ; \; k = 0, 1, \dots, n-1$$

İspat : Öncelikle $F_n(x) = 0$ için kök formülünü ispatlayalım. $x = 2i\cosh z$ değişken değişimi uygulanırsa, $F_n(x) = i^{n-1} \cdot \frac{\sinh nz}{\sinh z}$ elde edildiğini Teorem 3.1.5'ten biliyoruz.

$F_n(x) = i^{n-1} \cdot \frac{\sinh nz}{\sinh z} = 0$ olması için $\sinh nz = 0$ ve $\sinh z \neq 0$ olmalıdır.

$a, b \in R$, $z = a + ib$ bir karmaşık sayı olmak üzere;

$$\sinh z = \sinh a \cos b + i \cosh a \sin b$$

eşitliği bilinmektedir. Bu eşitlikliği $F_n(x) = i^{n-1} \cdot \frac{\sinh nz}{\sinh z} = 0$ olması için, yani; $\sinh nz = 0$ ve $\sinh z \neq 0$ durumu için incelediğimizde;

$$\sinh nz = \sinh(na + inb) = \sinh na \cos nb + i \cosh nb \sin nb = 0$$

$$\sinh z = \sinh(a + ib) = \sinh a \cos b + i \cosh a \sin b \neq 0$$

özelliklerini sağlayan a ve b'yi bulmalıyız. Bunun için;

$\sinh na \cos nb = 0 \;\wedge \cosh na \sin nb = 0$ ve

$\sinh a \cos b \neq 0 \;\vee \cosh a \sin b \neq 0$ olmalıdır. Bu istenenleri,

$$\cosh a = \frac{e^a + e^{-a}}{2} \geq 1$$

$$sinh\, a = \frac{e^{a} - e^{-a}}{2}$$

fonksiyonlarının tanım ve özellikleri ile birlikte düşündüğümüzde,

$cosh\, na\, sin\, nb = 0$ ifadesinde $\sin nb = 0$ olmak zorundadır. Çünkü $cosh\, na \geq 1$'dir. Böylece $k \in \mathbb{Z}$ için, $nb = k\pi$ ve $b = \frac{k\pi}{n}$ elde edilir.

$sinh\, na\, cos\, nb = sinh\, na\, cos\, k\pi = 0$ ifadesi için; $k \in \mathbb{Z}$ ve kosinüs fonksiyonunun özelliğinden $cos\, k\pi \neq 0$ olduğundan $\sinh na = 0$ olmalıdır. Dolayısıyla $\sinh na = \frac{e^{na} - e^{-na}}{2} = 0$ ise $a = 0$ olmalıdır. Gerçekten $b = \frac{k\pi}{n}$ ve $a = 0$ değerleri ile $\cosh a \sin b \neq 0$ sonucunu beraberinde getirir. Böylece amaçladığımız $sinh\, z \neq 0$ olduğu görülür. Teorem 3.1.3'ün ispatında yaptığımız gibi, gereken koşulları fonksiyon özellikleri ile birlikte incelediğimizde $k = 1, 2, \dots, n-1$ biçiminde olduğu görülür. Böylece Fibonacci polinomlarının kökleri için genel formül aşağıdaki biçimiyle elde edilir.

$k = 1, 2, \dots, n-1$ olmak üzere,

$$F_n(x) = 0 \quad : \quad x = 2i\, cosh\, z = 2i\, cosh(a + ib) = 2i\, cosh\, i\frac{k\pi}{n} = 2i\, cos\frac{k\pi}{n}$$

Benzer yaklaşımla, $x = 2i\, cosh\, z$ değişken değişimininden yararlanarak, Lucas polinomlarının genel kök formülünün,

$$L_n(x) = 0 \quad : \quad x = 2i\, cos\frac{(2k+1)}{2n} \cdot \frac{\pi}{2} \quad ; \; k = 0, 1, \dots, n-1$$

olduğu ispatlanır.□

Fibonacci ve Lucas polinomlarının karmaşık hiperbolik fonksiyonlar cinsinden temsillerini inceledik. Benzer biçimde Pell polinomlarının da karmaşık hiperbolik fonksiyonlar cinsinden temsili mevcuttur. Bu durumu P.F.Byrd [10] aşağıdaki biçimiyle ifade etmiştir.

3.1.7 Teorem [10] : $x = sinh\, z$ olmak üzere,

$$P_{2n}(x) = \frac{e^{2nz} - (-1)^{2n} e^{-2nz}}{e^{z} + e^{-z}} = \frac{sinh\, 2nz}{cosh\, z}$$

$$P_{2n+1}(x) = \frac{e^{(2n+1)z} - (-1)^{2n+1} e^{-(2n+1)z}}{e^{z} + e^{-z}} = \frac{cosh(2n+1)z}{cosh\, z}$$

İspat :

$\gamma(x) = x + \sqrt{x^2+1}$ ve $\delta(x) = x - \sqrt{x^2+1}$ olmak üzere,

$$P_n(x) = \frac{\gamma^n(x) - \delta^n(x)}{\gamma(x) - \delta(x)}$$

olduğunu biliyoruz. Teorem 3.1.2'nin ispatında yaptığımız gibi, 2.8 kısmındaki tanım, özdeşliklerden yararlanak ve değişken değişimini kullanarak Pell polinomunun farklı bir temsil biçimini ispatlayacağız. Bunun için $x = sinh\, z$ olsun. Böylece,

$\sqrt{x^2+1} = \sqrt{(sinh\, z)^2 + 1} = \sqrt{(cosh\, z)^2} = cosh\, z$ elde edilir.

$$\gamma(x) = x + \sqrt{x^2+1} \text{ ve } \delta(x) = x - \sqrt{x^2+1} \text{ idi.}$$

$\gamma(x) = sinh\, z + cosh\, z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} + \frac{e^z + e^{-z}}{2} = e^z$

$\delta(x) = sinh\, z - cosh\, z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} - \frac{e^z + e^{-z}}{2} = -e^{-z}$ olur.

$x = sinh\, z$ değişken değişimi ile elde edilenleri Pell polinomunun Binet formülünde yazdığımızda,

$$P_n(x) = \frac{\gamma^n(x) - \delta^n(x)}{\gamma(x) - \delta(x)} = \frac{e^{nz} - (-1)^n e^{-nz}}{e^z + e^{-z}}$$

elde edilir. Burada çift ve tek indise göre bir sınıflama yapıldığında;

$$P_{2n}(x) = \frac{e^{2nz} - (-1)^{2n} e^{-2nz}}{e^z + e^{-z}} = \frac{sinh\, 2nz}{cosh\, z}$$

$$P_{2n+1}(x) = \frac{e^{(2n+1)z} - (-1)^{2n+1} e^{-(2n+1)z}}{e^z + e^{-z}} = \frac{cosh(2n+1)z}{cosh\, z}$$

olduğu karmaşık hiperbolik trigonometrik fonksiyon tanımlarından kolayca görülür.□

Ayrıca Pell polinomları için bu farklı temsil biçiminin yanı sıra, genel kök formüllerini aşağıdaki biçimi ile elde etmek mümkündür.

3.1.8 Teorem :

$$P_{2n}(x) = 0 \quad : \quad x = \pm i\, sin \frac{k\pi}{2n} \qquad ; k = 0, 1, \dots, n-1$$

$$P_{2n+1}(x) = 0 \quad : \quad x = \pm i\, sin \frac{(2k+1)}{(2n+1)} \cdot \frac{\pi}{2} \qquad ; k = 0, 1, \dots, n-1$$

İspat : Bu teoremi, Teorem 3.1.6 ve Teorem 3.1.3'te kullandığımız ispat tekniği ile ispatlayabileceğimiz gibi aşağıdaki şekliyle de ispatlamak mümkündür.

Teorem 3.1.3'ten, $x = 2\,sinh\,z$ değişken değişimi yapıldığı takdirde çift ve tek indisli Fibonacci polinomlarının aşağıdaki biçimiyle genel kök formülüne sahip olduğunu biliyoruz.

$$F_{2n}(x) = 0 \quad : \quad x = \pm 2i \sin\frac{k\pi}{2n} \qquad ; k = 0, 1, \dots, n-1$$

$$F_{2n+1}(x) = 0 \quad : \quad x = \pm 2i \sin\frac{(2k+1)}{(2n+1)} \cdot \frac{\pi}{2} \qquad ; k = 0, 1, \dots, n-1$$

Ayrıca [6] çalışmasından, Fibonacci ve Pell polinomları arasında geçişe imkan sağlayan önemli bir eşitlik olan $P_n\left(\frac{x}{2}\right) = F_n(x)$ bilinmektedir. Bu ikisini birlikte değerlendirirsek: $x = sinh\,z$ için,

$F_{2n}(2x) = P_{2n}(x) = 0$ ve $F_{2n+1}(2x) = P_{2n+1}(x) = 0$ durumlarından hareketle Pell polinomlarının çift ve tek indise bağlı olarak genel kök formüllerinin aşağıdaki biçimiyle elde edileceği açıktır.

$$P_{2n}(x) = 0 \quad : \quad x = \pm i\, sin\frac{k\pi}{2n} \qquad ; k = 0, 1, \dots, n-1$$

$$P_{2n+1}(x) = 0 \quad : \quad x = \pm i\, sin\frac{(2k+1)}{(2n+1)} \cdot \frac{\pi}{2} \qquad ; k = 0, 1, \dots, n-1$$

Böylece çok geniş bir polinom sınıfı olan Pell polinomları için de genel kök formülüne ulaşmış olduk.□

Pell polinomları için özgün olacak başka bir temsili $x = i\,cosh\,z$ değişken değişimi ile aşağıdaki biçimiyle elde ederiz.

3.1.9 Teorem : $x = i\,cosh\,z$ olmak üzere,

$$P_n(x) = i^{n-1} \cdot \frac{sinh\,nz}{sinh\,z}$$

İspat : $\gamma(x) = x + \sqrt{x^2+1}$ ve $\delta(x) = x - \sqrt{x^2+1}$ olmak üzere,

$$P_n(x) = \frac{\gamma^n(x) - \delta^n(x)}{\gamma(x) - \delta(x)}$$

olduğunu biliyoruz. 2.8 kısmındaki tanım, özdeşliklerden yararlanak ve değişken değişimini kullanarak Pell polinomlarının farklı bir temsiline ulaşmak mümkün olacaktır. Bunun için $x = i\,cosh\,z$ olsun. Böylece,

$\sqrt{x^2+1} = \sqrt{-(cosh\,z)^2+1} = \sqrt{-(sinh\,z)^2} = i\,sinh\,z$ elde edilir.

$\gamma(x) = x + \sqrt{x^2+1}$ ve $\delta(x) = x - \sqrt{x^2+1}$ idi.

$\gamma(x) = i\,cosh\,z + i\,sinh\,z = i(cosh\,z + sinh\,z) = i\left(\frac{e^z+e^{-z}}{2} + \frac{e^z-e^{-z}}{2}\right) = ie^z$

$\delta(x) = i\,cosh\,z - i\,sinh\,z = i(cosh\,z - sinh\,z) = i\left(\frac{e^z+e^{-z}}{2} - \frac{e^z-e^{-z}}{2}\right) = ie^{-z}$ olur.

$x = i\,cosh\,z$ değişken değişimi ile elde etiklerimizi Pell polinomlarının Binet formülünde yazdığımızda ve karmaşık hiperbolik trigonometrik fonksiyon tanımlarını kullandığımızda,

$$P_n(x) = \frac{\gamma^n(x) - \delta^n(x)}{\gamma(x) - \delta(x)} = \frac{i^n e^{nz} - i^n e^{-nz}}{ie^z - ie^{-z}} = i^{n-1} \cdot \frac{e^{nz} - e^{-nz}}{e^z - e^{-z}} = i^{n-1} \cdot \frac{sinh\,nz}{sinh\,z}$$

elde edilir. Böylece çift ve tek indise göre bir sınıflama olmaksızın Pell polinomlarının karmaşık hiperbolik temsili elde edilmiş olur. Bu temsilden hareketle Pell polinomlarının genel kök formülünü indis sınıflaması olmadan aşağıdaki biçimiyle elde ederiz.□

3.1.10 Teorem :

$$P_n(x) = 0 \quad : \quad x = i\cos\frac{k\pi}{n} \qquad ; \ k = 1, 2, \dots, n-1$$

İspat : Teorem 3.1.6'dan $x = 2i\,cosh\,z$ değişken değişimi yapıldığı takdirde Fibonacci polinomunun aşağıdaki biçimde genel kök formülüne sahip olduğunu biliyoruz.

$$F_n(x) = 0 \quad : \quad x = 2i\,cos\frac{k\pi}{n} \qquad ; \ k = 1, 2, \dots, n-1$$

Ayrıca [6] çalışmasından, $P_n\left(\frac{x}{2}\right) = F_n(x)$ bilinmektedir. Bu ikisini birlikte değerlendirirsek: $x = i\,cosh\,z$ için, $F_n(2x) = P_n(x) = 0$ eşitliğinden hareketle Pell polinomunun genel kök formülünün aşağıdaki biçimiyle elde edileceği açıktır.

$$P_n(x) = 0 \quad : \quad x = i\cos\frac{k\pi}{n} \qquad ; \ k = 1, 2, \dots, n-1 \quad \square$$

3.2 Fibonacci, Lucas ve Pell Polinomlarının Köklerinin Aynı Polinom Sınıfı İçerisindeki Başka Polinom Üyeleri Altındaki Görüntüleri

Bu kısımda, sonraki bölümde elde edeceğimiz birtakım yeni matris formları için gerekli olan, birçoğu özgün teorem ve sonuçları ortaya koyacağız. Literatürde, bir polinom sınıfındaki herhangi bir polinomun kök değerlerinin aynı polinom sınıfı içerisindeki başka polinomlardaki görüntüleri ile ilgili olan çalışma, Piotr Slanina'nın [13] numaralı çalışmasıdır. Bu çalışma sadece Fibonacci polinomları ile sınırlıdır. Bizim bu kısımda elde ettiğimiz bulgular Fibonacci, Lucas ve Pell polinomları ile ilgili olacaktır.

3.2.1 Teorem : $F_{2n}(a) = 0$ ise, $F_{2n+1}(a) = F_{2n-1}(a) = \pm 1$ olur [13].

İspat : Bu ifade görüldüğü üzere ardışık üç Fibonacci polinomu ile ilgilidir. Ardışık üç Fibonacci polinomu ile ilgili olarak tekrarlama bağıntısı ve Cassini benzeri özdeşlik bilinmektedir. İspatı tekrarlama bağıntısını ve Cassini benzeri özdeşliği kullanarak yapacağız. Öncelikle tekrarlama bağıntısını kullanalım:

$$F_n(x) = xF_{n-1}(x) + F_{n-2}(x) \ \ , n \geq 3$$

biçiminde Fibonacci polinomları için tekrarlama bağıntısının olduğunu biliyoruz. Bu tekrarlama bağıntısından hareketle ardışık üç Fibonacci polinomu olan $F_{2n+1}(x), F_{2n}(x)$ ve $F_{2n-1}(x)$ arasında aşağıdaki biçimiyle bir eşitliğin olacağı açıktır:

$$F_{2n+1}(x) = xF_{2n}(x) + F_{2n-1}(x)$$

Burada $x = a$ 'yı $F_{2n}(x)$ polinomunun kökü olarak seçtiğimizde yani; $x = a$ ve $F_{2n}(a) = 0$ durumunda tekrarlama bağıntısı gereğince,

$$F_{2n+1}(a) = F_{2n-1}(a)$$

elde edilir. Ayrıca Cassini benzeri özdeşliğin,

$$F_{n+1}(x)F_{n-1}(x) - F_n^2(x) = (-1)^n \ \ , n \geq 1$$

biçiminde olduğunu biliyoruz. Bu eşitliği $F_n(x)$ 'in indisini çift olacak biçimde düzenlediğimizde;

$$F_{2n+1}(x)F_{2n-1}(x)-F_{2n}^2(x)=(-1)^{2n}$$

eşitliği elde edilir. Burada $x=a$'yı $F_{2n}(x)$ polinomunun kökü olarak seçtiğimizde yani; $x=a$ ve $F_{2n}(a)=0$ durumunda Cassini benzeri özdeşlik gereğince,

$$F_{2n+1}(a)F_{2n-1}(a)=1$$

elde edilir. Böylece tekrarlama bağıntısı ve Cassini benzeri özdeşlikten yararlanarak,

$$F_{2n+1}(a)=F_{2n-1}(a) \text{ ve } F_{2n+1}(a)F_{2n-1}(a)=1$$

biçiminde iki eşitlik elde etmiş oluruz. Bu eşitlikleri birlikte değerlendirdiğimizde;

$$F_{2n+1}^2\,(a)=F_{2n-1}^2\,(a)=1$$

elde edilir.

Böylece $F_{2n}(a)=0$ iken, $F_{2n+1}(a)=F_{2n-1}(a)=\pm 1$ olduğu görülür.□

3.2.2 Sonuç : $F_{2n}(a)=0$ iken, $F_{2n+1}(a)F_{2n-1}(a)=1$'dir.

İspat : $F_{2n}(a)=0$ iken, $F_{2n+1}(a)=F_{2n-1}(a)=\pm 1$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla bu koşulda, $F_{2n+1}(a)F_{2n-1}(a)=1$ olduğu kolayca görülür.□

3.2.3 Teorem : $F_{2n-1}(a)=0$ ise, $F_{2n}(a)=\pm i$ ve $F_{2n+1}(a)=\pm ai$ olur.

İspat : İspatı Cassini benzeri özdeşliği ve Fibonacci polinomunun tekrarlama bağıntısını kullanarak yapacağız. Öncelikle Cassini benzeri özdeşliği kullanalım: Cassini benzeri özdeşliğin,

$$F_{n+1}(x)F_{n-1}(x)-F_n^2(x)=(-1)^n \;, n\geq 1$$

biçiminde olduğunu biliyoruz. Bu eşitliği $F_n(x)$ 'in indisini çift olacak biçimde düzenlediğimizde;

$$F_{2n+1}(x)F_{2n-1}(x)-F_{2n}^2(x)=(-1)^{2n}\;=1$$

biçimini alır. Burada $x=a$'yı $F_{2n-1}(x)$ polinomunun kökü olarak seçtiğimizde yani; $x=a$ ve $F_{2n-1}(a)=0$ durumunda Cassini benzeri özdeşlik gereğince,

$$F_{2n}^2(a)=-1$$

elde edilir. Böylece,

$$F_{2n}(a) = \pm i$$

biçiminde bulunur. Bununla birlikte $F_{2n-1}(a) = 0$ için elde ettiğimiz $F_{2n}(a) = \pm i$ bulgusunu Fibonacci polinomunun tekrarlama bağıntısında uygulayıp, $F_{2n+1}(a)$'yı bulalım.

$$F_n(x) = xF_{n-1}(x) + F_{n-2}(x) \quad , n \geq 3$$

biçiminde Fibonacci polinomları için tekrarlama bağıntısının olduğunu biliyoruz. Bu tekrarlama bağıntısından hareketle ardışık üç Fibonacci polinomu olan $F_{2n+1}(x), F_{2n}(x)$ ve $F_{2n-1}(x)$ arasında aşağıdaki biçimiyle bir eşitliğin olacağı açıktır:

$$F_{2n+1}(x) = xF_{2n}(x) + F_{2n-1}(x)$$

Burada $x = a$'yı $F_{2n-1}(x)$ polinomunun kökü olarak seçtiğimizde yani; $x = a$ ve $F_{2n-1}(a) = 0$ durumunda tekrarlama bağıntısı gereğince,

$$F_{2n+1}(a) = aF_{2n}(a)$$

elde edilir. Cassini benzeri özdeşlikten yararlanarak $F_{2n-1}(a) = 0$ iken, $F_{2n}(a) = \pm i$ elde etmiştik. Bu bulgumuzu tekrarlama bağıntısından elde ettiğimiz eşitlik olan $F_{2n+1}(a) = aF_{2n}(a)$ ifadesinde yazdığımızda,

$$F_{2n+1}(a) = \pm ai$$

elde edilir. Böylece Cassini benzeri özdeşlikten ve Fibonacci polinomunun tekrarlama bağıntısından yararlanarak,

$F_{2n-1}(a) = 0$ iken, $F_{2n}(a) = \pm i$ ve $F_{2n+1}(a) = \pm ai$ olarak bulunur.□

3.2.4 Sonuç : $F_{2n-1}(a) = 0$ iken, $F_{2n}(a)F_{2n+1}(a) = -a$ olur.

İspat : $F_{2n-1}(a) = 0$ iken, $F_{2n}(a) = \pm i$ ve $F_{2n+1}(a) = \pm ai$ olduğunu elde etmiştik. Dolayısıyla;

$F_{2n}(a)F_{2n+1}(a) = (\pm i)(\pm ai) = -a$ olduğu kolayca görülür.□

3.2.5 Teorem : $F_{2n-1}(a) = 0$ iken, $F_{2n}(a)F_{2n+1}(a) \neq 0$'dır.

İspat : $F_{2n-1}(a) = 0$ iken, $F_{2n}(a) = \pm i$ ve $F_{2n+1}(a) = \pm ai$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla araştırdığımız $F_{2n}(a)F_{2n+1}(a) = 0$ olup olmadığına, $F_{2n}(a)F_{2n+1}(a) = (\pm i)(\pm ai) = -a = 0$ olup olmadığını inceleyerek karar vereceğiz.

Fibonacci polinomunun kök formülünün aşağıdaki gibi olduğunu biliyoruz:

$$F_n(x) = 0 \ : x = 2i\cos\frac{k\pi}{n}\ , k = 1, 2, \dots, n-1$$

Bu kök formülünün $F_{2n-1}(x)$ polinomu için,

$$F_{2n-1}(x) = 0 \ : x = 2i\cos\frac{k\pi}{2n-1}\ , k = 1, 2, \dots, 2n-2$$

biçiminde olacağı açıktır. $F_{2n-1}(a) = 0$ için,

$a = 2i\cos\frac{k\pi}{2n-1}\ , k = 1, 2, \dots, 2n-2$ olacağı görülür.

İncelediğimiz $-a = 0$ olup olmadığını cos fonksiyonun özelliğinden yararlanarak çelişki bulma yöntemi ile yapalım.

Varsayalım ki $-a = 0$ olsun. Bu durumda $a = 0$'dır. Kök formülünden;

$a = 2i\,cos\frac{k\pi}{2n-1} = 0$ biçimindedir. Dolayısıyla $a = 0$ olması, $cos\frac{k\pi}{2n-1} = 0$ iken, mümkündür. Kök formülündeki belirtilen aralık ve cos fonksiyonun özelliğinden dolayı $cos\frac{k\pi}{2n-1} = 0$ eşitliği, $cos\frac{k\pi}{2n-1} = cos\frac{\pi}{2} = 0$ durumunda mümkündür. Dolayısıyla $\frac{k\pi}{2n-1} = \frac{\pi}{2}$ olur. Böylece $2k\pi = (2n-1)\pi$ elde edilir. $2k\pi = (2n-1)\pi$ eşitliğinden,

$$2\pi(n-k) - \pi = 0$$

$$\pi[2(n-k) - 1] = 0$$

$$2(n-k) - 1 = 0$$

bulunur. Bu eşitlikten $(n-k) = \frac{1}{2}$ elde edilir. Ancak $n, k \in N$ olduğundan bu mümkün değildir, bu bir çelişkidir. Dolayısıyla çelişki bulma yöntemi gereğince varsayım yanlıştır. Sonuç olarak $F_{2n-1}(a) = 0$ iken, $-a \neq 0$'dır. Böylece,

$F_{2n-1}(a) = 0$ iken, $F_{2n}(a)F_{2n+1}(a) \neq 0$ ispatlanmış olur.□

3.2.6 Sonuç : $F_{2n-1}(a) = 0$ iken, $aF_{2n}(a)F_{2n+1}(a) \neq 0$'dır.

İspat : $F_{2n-1}(a) = 0$ iken, $F_{2n}(a) = \pm i$ ve $F_{2n+1}(a) = \pm ai$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla araştırdığımız $aF_{2n}(a)F_{2n+1}(a) = 0$ olup olmadığına $aF_{2n}(a)F_{2n+1}(a) = a(\pm i)(\pm ai) = -a^2 = 0$ olup olmadığını inceleyerek karar vereceğiz. Çelişki bulma yönteminden yararlanarak ispatı yapalım. Varsayalım ki $-a^2 = 0$ olsun. Bu durumda $a = 0$ 'dır. Ancak bunun mümkün olmadığı Teorem 3.2.5'te elde ettiğimiz, $F_{2n-1}(a) = 0$ iken, $F_{2n}(a)F_{2n+1}(a) = -a \neq 0$ ifadesinden görülür. Dolayısıyla çelişki bulma yöntemi gereğince varsayım yanlıştır. Sonuç olarak $F_{2n-1}(a) = 0$ iken, $-a^2 \neq 0$'dır. Böylece;

$F_{2n-1}(a) = 0$ iken, $aF_{2n}(a)F_{2n+1}(a) \neq 0$ ispatlanmış olur.□

3.2.7 Teorem : $F_{2n+1}(a) = 0$ ise, $F_{2n}(a) = \pm i$ ve $F_{2n-1}(a) = \mp ai$ olur.

İspat : İspatı Cassini benzeri özdeşliği ve Fibonacci polinomunun tekrarlama bağıntısını kullanarak yapacağız. Öncelikle Cassini benzeri özdeşliği kullanalım: Cassini benzeri özdeşliğin;

$$F_{n+1}(x)F_{n-1}(x) - F_n^2(x) = (-1)^n \ , n \geq 1$$

biçiminde olduğunu biliyoruz. Bu eşitliği $F_n(x)$'i çift indis olarak düzenlediğimizde;

$$F_{2n+1}(x)F_{2n-1}(x) - F_{2n}^2(x) = (-1)^{2n} \ , n \geq 1$$

biçimini alır. Burada $x = a$'yı $F_{2n+1}(x)$ polinomunun kökü olarak seçtiğimizde yani; $x = a$ ve $F_{2n+1}(a) = 0$ durumunda Cassini benzeri özdeşlik gereğince,

$$F_{2n}^2(a) = -1$$

elde edilir. Böylece,

$$F_{2n}(a) = \pm i$$

biçiminde bulunur. Bununla birlikte $F_{2n+1}(a) = 0$ için elde ettiğimiz $F_{2n}(a) = \pm i$ bulgusunu Fibonacci polinomunun tekrarlama bağıntısında uygulayıp, $F_{2n-1}(a)$'i bulalım.

$$F_n(x) = xF_{n-1}(x) + F_{n-2}(x) \ \ , n \geq 3$$

biçiminde Fibonacci polinomları için tekrarlama bağıntısının olduğunu biliyoruz. Bu tekrarlama bağıntısından hareketle ardışık üç Fibonacci polinomu olan $F_{2n+1}(x), F_{2n}(x)$ ve $F_{2n-1}(x)$ arasında aşağıdaki biçimiyle bir eşitliğin olacağı açıktır:

$$F_{2n+1}(x) = xF_{2n}(x) + F_{2n-1}(x)$$

Burada $x = a$'yı $F_{2n+1}(x)$ polinomunun kökü olarak seçtiğimizde yani; $x = a$ ve $F_{2n+1}(a) = 0$ durumunda tekrarlama bağıntısı gereğince,

$$F_{2n-1}(a) = -aF_{2n}(a)$$

elde edilir. Cassini benzeri özdeşlikten yararlanarak $F_{2n+1}(a) = 0$ iken, $F_{2n}(a) = \pm i$ elde etmiştik. Bu bulgumuzu tekrarlama bağıntısından elde ettiğimiz eşitlik olan $F_{2n-1}(a) = -aF_{2n}(a)$ ifadesinde yazdığımızda,

$$F_{2n-1}(a) = \mp ai$$

elde edilir. Böylece Cassini benzeri özdeşlikten ve Fibonacci polinomunun tekrarlama bağıntısından yararlanarak;

$F_{2n+1}(a) = 0$ iken, $F_{2n}(a) = \pm i$ ve $F_{2n-1}(a) = \mp ai$ olarak bulunur.□

3.2.8 Sonuç : $F_{2n+1}(a) = 0$ iken, $F_{2n}(a)F_{2n-1}(a) = a$ olur.

İspat : $F_{2n+1}(a) = 0$ iken, $F_{2n}(a) = \pm i$ ve $F_{2n-1}(a) = \mp ai$ olduğunu elde etmiştik. Dolayısıyla bu koşulda, $F_{2n}(a)F_{2n-1}(a) = (\pm i)(\mp ai) = a$ olduğu kolayca görülür.□

3.2.9 Teorem : $F_{2n+1}(a) = 0$ iken, $F_{2n-1}(a)F_{2n}(a) \neq 0$'dır.

İspat : $F_{2n+1}(a) = 0$ iken, $F_{2n}(a) = \pm i$ ve $F_{2n-1}(a) = \mp ai$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla araştırdığımız $F_{2n-1}(a)F_{2n}(a) = 0$ olup olmadığına, $F_{2n-1}(a)F_{2n}(a) = (\mp ai)(\pm i) = a = 0$ olup olmadığını inceleyerek karar vereceğiz.

Fibonacci polinomunun, kök formülünün aşağıdaki gibi olduğunu biliyoruz.

$$F_n(x) = 0 \ : x = 2i\cos\frac{k\pi}{n} \ , k = 1, 2 \ldots, n-1$$

Bu kök formülünün $F_{2n+1}(x)$ polinomu için,

$$F_{2n+1}(x) = 0 \ : x = 2i\cos\frac{k\pi}{2n+1} \ , k = 1,2,\dots,2n$$

biçiminde olacağı açıktır. $F_{2n+1}(a) = 0$ için,

$a = 2i\cos\frac{k\pi}{2n+1}$, $k = 1,2,\dots,2n$ olacağı görülür.

İncelediğimiz $a = 0$ olup olmadığını cos fonksiyonun özelliğinden yararlanarak çelişki bulma yöntemi ile yapalım.
Varsayalım ki $a = 0$ olsun. Kök formülünden;

$a = 2i\,cos\frac{k\pi}{2n+1} = 0$ biçimindedir. Dolayısıyla $a = 0$ olması, $cos\frac{k\pi}{2n+1} = 0$ iken mümkündür. Kök formülündeki belirtilen aralık ve cos fonksiyonun özelliğinden dolayı $\cos\frac{k\pi}{2n+1} = 0$ eşitliği, $\cos\frac{k\pi}{2n+1} = \cos\frac{\pi}{2} = 0$ durumunda mümkündür.

Dolayısıyla $\frac{k\pi}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$ olur. Böylece $2k\pi = (2n+1)\pi$ elde edilir. Bu eşitlikten,

$$2\pi(n-k) + \pi = 0$$

$$\pi[2(n-k)+1] = 0$$

$$2(n-k) + 1 = 0$$

bulunur. Bu eşitlikten $(n-k) = -\frac{1}{2}$ elde edilir. Ancak $n, k \in N$ olduğundan bu mümkün değildir, bu bir çelişkidir. Dolayısıyla çelişki bulma yöntemi gereğince varsayım yanlıştır. Sonuç olarak $F_{2n+1}(a) = 0$ iken, $a \neq 0$ 'dır. Böylece, $F_{2n+1}(a) = 0$ iken, $F_{2n-1}(a)F_{2n}(a) \neq 0$ ispatlanmış olur.□

3.2.10 Sonuç : $F_{2n+1}(a) = 0$ iken, $aF_{2n-1}(a)F_{2n}(a) \neq 0$'dır.

İspat : $F_{2n+1}(a) = 0$ iken, $F_{2n}(a) = \pm i$ ve $F_{2n-1}(a) = \mp ai$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla araştırdığımız $aF_{2n-1}(a)F_{2n}(a) = 0$ olup olmadığına $aF_{2n-1}(a)F_{2n}(a) = a(\mp ai)(\pm i) = a^2 = 0$ olup olmadığını inceleyerek karar vereceğiz. Çelişki bulma yönteminden yararlanarak ispatı yapalım. Varsayalım ki $a^2 = 0$ olsun. Bu durumda $a = 0$'dır. Ancak bunun mümkün olmadığı Teorem 3.2.9'da çelişki bulma yöntemi ile ispatladığımız $F_{2n+1}(a) = 0$ iken,

$F_{2n-1}(a)F_{2n}(a) = a \neq 0$ ifadesinden görülür. Dolayısıyla çelişki bulma yöntemi gereğince varsayım yanlıştır. Sonuç olarak $F_{2n+1}(a) = 0$ iken, $a^2 \neq 0$'dır. Böylece, $F_{2n+1}(a) = 0$ iken, $aF_{2n-1}(a)F_{2n}(a) \neq 0$ ispatlanmış olur.□

3.2.11 Teorem : $L_{2n}(a) = 0$ ise, $L_{2n+1}(a) = L_{2n-1}(a) = \pm\sqrt{-a^2 - 4}$ olur.

İspat: Bu ifade görüldüğü üzere ardışık üç Lucas polinomu ile ilgilidir. Ardışık üç Lucas polinomu ile ilgili olarak tekrarlama bağıntısı ve Cassini benzeri özdeşlik bilinmektedir. İspatı tekrarlama bağıntısını ve Cassini benzeri özdeşliği kullanarak yapacağız. Öncelikle tekrarlama bağıntısını kullanalım:

$$L_n(x) = xL_{n-1}(x) + L_{n-2}(x) \ , n \geq 2$$

biçiminde Lucas polinomları için tekrarlama bağıntısının olduğunu biliyoruz. Bu tekrarlama bağıntısından hareketle ardışık üç Lucas polinomu olan $L_{2n+1}(x), L_{2n}(x)$ ve $L_{2n-1}(x)$ arasında aşağıdaki biçimiyle bir eşitliğin olacağı açıktır:

$$L_{2n+1}(x) = xL_{2n}(x) + L_{2n-1}(x)$$

Burada $x = a$ 'yı $L_{2n}(x)$ polinomunun kökü olarak seçtiğimizde yani; $x = a$ ve $L_{2n}(a) = 0$ durumunda tekrarlama bağıntısı gereğince,

$$L_{2n+1}(a) = L_{2n-1}(a)$$

elde edilir. Ayrıca Lucas polinomları için Cassini benzeri özdeşliğin,

$$L_{n+1}(x)L_{n-1}(x) - L_n^2(x) = (-1)^{n-1}\,(x^2 + 4)$$

biçiminde olduğunu biliyoruz. Bu eşitliği $L_n(x)$ 'in indisini çift olacak biçimde düzenlediğimizde;

$$L_{2n+1}(x)L_{2n-1}(x) - L_{2n}^2(x) = (-1)^{2n-1}\,(x^2 + 4)$$

eşitliği elde edilir. Burada $x = a$'yı $L_{2n}(x)$ polinomunun kökü olarak seçtiğimizde yani; $x = a$ ve $L_{2n}(a) = 0$ durumunda Cassini benzeri özdeşlik gereğince,

$$L_{2n+1}(a)L_{2n-1}(a) = -a^2 - 4$$

elde edilir. Böylece tekrarlama bağıntısı ve Cassini benzeri özdeşlikten yararlanarak,

$$L_{2n+1}(a) = L_{2n-1}(a) \ \text{ ve } L_{2n+1}(a)L_{2n-1}(a) = -a^2 - 4$$

biçiminde iki eşitlik elde etmiş oluruz. Bu eşitlikleri birlikte değerlendirdiğimizde;

$$L_{2n+1}^2(a) = L_{2n-1}^2(a) = -a^2 - 4$$

elde edilir. Böylece $L_{2n}(a) = 0$ iken,

$$L_{2n+1}(a) = L_{2n-1}(a) = \pm\sqrt{-a^2 - 4} \text{ olduğu görülür.}\square$$

3.2.12 Sonuç : $L_{2n}(a) = 0$ iken, $L_{2n+1}(a)L_{2n-1}(a) = -a^2 - 4$'dir.

İspat : $L_{2n}(a) = 0$ iken, $L_{2n+1}(a) = L_{2n-1}(a) = \pm\sqrt{-a^2 - 4}$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla bu koşulda, $L_{2n+1}(a)L_{2n-1}(a) = -a^2 - 4$ olduğu kolayca görülür.□

3.2.13 Teorem :

$L_{2n-1}(a) = 0$ ise, $L_{2n}(a) = \pm\sqrt{a^2 + 4}$ ve $L_{2n+1}(a) = \pm a\sqrt{a^2 + 4}$ olur.

İspat : İspatı Cassini benzeri özdeşliği ve Lucas polinomunun tekrarlama bağıntısını kullanarak yapacağız. Öncelikle Cassini benzeri özdeşliği kullanalım: Cassini benzeri özdeşliğin,

$$L_{n+1}(x)L_{n-1}(x) - L_n^2(x) = (-1)^{n-1}(x^2 + 4)$$

biçiminde olduğunu biliyoruz. Bu eşitliği $L_n(x)$'in indisini çift olacak biçimde düzenlediğimizde;

$$L_{2n+1}(x)L_{2n-1}(x) - L_{2n}^2(x) = (-1)^{2n-1}(x^2 + 4)$$

biçimini alır. Burada $x = a$'yı $L_{2n-1}(a)$ polinomunun kökü olarak seçtiğimizde yani; $x = a$ ve $L_{2n-1}(a) = 0$ durumunda Cassini benzeri özdeşlik gereğince,

$$L_{2n}^2(a) = a^2 + 4$$

elde edilir. Böylece,

$$L_{2n}(a) = \pm\sqrt{a^2 + 4}$$

biçiminde bulunur. Bununla birlikte $L_{2n-1}(a) = 0$ için elde ettiğimiz $L_{2n}(a) = \pm\sqrt{a^2 + 4}$ bulgusunu Lucas polinomunun tekrarlama bağıntısında uygulayıp, $L_{2n+1}(a)$'i bulalım.

$$L_n(x) = xL_{n-1}(x) + L_{n-2}(x) \ ,n \geq 2$$

biçiminde Lucas polinomları için tekrarlama bağıntısının olduğunu biliyoruz. Bu tekrarlama bağıntısından hareketle ardışık üç Lucas polinomu olan $L_{2n+1}(x), L_{2n}(x)$ ve $L_{2n-1}(x)$ arasında aşağıdaki biçimiyle bir eşitliğin olacağı açıktır:

$$L_{2n+1}(x) = xL_{2n}(x) + L_{2n-1}(x)$$

Burada $x = a$'yı $L_{2n-1}(x)$ polinomunun kökü olarak seçtiğimizde yani; $x = a$ ve $L_{2n-1}(a) = 0$ durumunda tekrarlama bağıntısı gereğince,

$$L_{2n+1}(a) = aL_{2n}(a)$$

elde edilir. Cassini benzeri özdeşlikten yararlanarak $L_{2n-1}(a) = 0$ iken, $L_{2n}(a) = \pm\sqrt{a^2+4}$ elde etmiştik. Bu bulgumuzu tekrarlama bağıntısından elde ettiğimiz eşitlik olan $L_{2n+1}(a) = aL_{2n}(a)$ ifadesinde yazdığımızda,

$$L_{2n+1}(a) = \pm a\sqrt{a^2+4}$$

elde edilir. Böylece Cassini benzeri özdeşlikten ve Lucas polinomunun tekrarlama bağıntısından yararlanarak,

$L_{2n-1}(a) = 0$ iken, $L_{2n}(a) = \pm\sqrt{a^2+4}$ ve $L_{2n+1}(a) = \pm a\sqrt{a^2+4}$ olarak bulunur.

3.2.14 Sonuç : $L_{2n-1}(a) = 0$ iken, $L_{2n}(a)L_{2n+1}(a) = a^3 + 4a$ olur.

İspat : $L_{2n-1}(a) = 0$ iken, $L_{2n}(a) = \pm\sqrt{a^2+4}$ ve $L_{2n+1}(a) = \pm a\sqrt{a^2+4}$ olduğunu elde etmiştik. Dolayısıyla;
$L_{2n}(a)L_{2n+1}(a) = \left(\pm\sqrt{a^2+4}\right)\left(\pm a\sqrt{a^2+4}\right) = a^3 + 4a$ olduğu kolayca görülür.□

3.2.15 Teorem : $a \neq 0$ ve $L_{2n-1}(a) = 0$ iken, $L_{2n}(a)L_{2n+1}(a) \neq 0$'dır.

İspat : $L_{2n-1}(a) = 0$ iken, $L_{2n}(a) = \pm\sqrt{a^2+4}$ ve $L_{2n+1}(a) = \pm a\sqrt{a^2+4}$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla araştırdığımız $L_{2n}(a)L_{2n+1}(a) = 0$ olup olmadığına, $L_{2n}(a)L_{2n+1}(a) = \left(\pm\sqrt{a^2+4}\right)\left(\pm a\sqrt{a^2+4}\right) = a^3 + 4a = 0$ olup olmadığını inceleyerek karar vereceğiz. Lucas polinomunun, kök formülünün aşağıdaki gibi olduğunu biliyoruz.

$$L_n(x) = 0 \ : x = 2i\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n} \ , k = 0, 1, \dots, n-1$$

Bu kök formülünün $L_{2n-1}(x)$ polinomu için,

$$L_{2n-1}(x) = 0 \ : x = 2i\cos\frac{(2k+1)\pi}{4n-2} \ , k = 0, 1, \dots, 2n-2$$

biçiminde olacağı açıktır. $L_{2n-1}(a) = 0$ için,

$a = 2i\cos\frac{(2k+1)\pi}{4n-2}$, $k = 0, 1, \dots, 2n-2$ olacağı görülür.

İncelediğimiz $a^3 + 4a = a(a^2 + 4) = 0$ olup olmadığını cos fonksiyonun özelliğinden yararlanarak çelişki bulma yöntemi ile yapalım. Varsayalım ki $a(a^2 + 4) = 0$ olsun. Bu durumda $a = 0$ veya $(a^2 + 4) = 0$'dır. Ancak önermenin hipotezi gereğince $a \neq 0$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $a^2 + 4 = 0$ olmalıdır. Bu durumda $a = \pm 2i$ 'dir. Böylece iki durum elde edilir. Bu durumları sırasıyla inceleyelim.

1. **Durum:** Varsayalım ki $a = 2i$ olsun.

Kök formülünden $a = 2i\cos\frac{(2k+1)\pi}{4n-2} = 2i$ biçimindedir. Dolayısıyla $a = 2i$ olması, $\cos\frac{(2k+1)\pi}{4n-2} = 1$ iken mümkündür. Kök formülündeki belirtilen aralık ve cos fonksiyonun özelliğinden dolayı $\cos\frac{(2k+1)\pi}{4n-2} = 1$ eşitliği, $(2k+1) = 0$ durumunda mümkündür. Bu eşitlikten $k = -\frac{1}{2}$ elde edilir. Ancak, kök formülünde $k \in N$ olduğundan $k = -\frac{1}{2}$ olması mümkün değildir, bu bir çelişkidir. Dolayısıyla çelişki bulma yöntemi gereğince varsayım yanlıştır. Böylece, $a \neq 2i$'dir.

2. **Durum:** Varsayalım ki $a = -2i$ olsun.

Kök formülünden, $a = 2i\cos\frac{(2k+1)\pi}{4n-2} = -2i$ biçimindedir. Dolayısıyla $a = -2i$ olması, $\cos\frac{(2k+1)\pi}{4n-2} = -1$ iken mümkündür. Kök formülündeki belirtilen aralık ve cos fonksiyonun özelliğinden dolayı $\cos\frac{(2k+1)\pi}{4n-2} = -1$ eşitliğini gerçekleyen herhangi bir $k \in N$ varlığı mümkün değildir. Dolayısıyla bir çelişki elde ederiz. Böylece çelişki bulma yöntemi gereğince varsayım yanlıştır. Yani, $a \neq -2i$ 'dir. Sonuç olarak $L_{2n-1}(a) = 0$ iken, 1. ve 2. durumlardan, iddiamız olan $a(a^2 + 4) = 0$

eşitliğinin çelişki bulma yöntemi gereğince mümkün olmadığını elde ederiz. Yani, $a \neq 0$ ve $L_{2n-1}(a) = 0$ iken,

$$a(a^2+4) = a^3 + 4a = \left(\pm\sqrt{a^2+4}\right)\left(\pm a\sqrt{a^2+4}\right) = L_{2n}(a)L_{2n+1}(a) \neq 0$$

olduğu ispatlanmış olur.□

3.2.16 Sonuç : $a \neq 0$ ve $L_{2n-1}(a) = 0$ iken, $aL_{2n}(a)L_{2n+1}(a) \neq 0$'dır.

İspat : $a \neq 0$ ve $L_{2n-1}(a) = 0$ iken, $L_{2n}(a)L_{2n+1}(a) \neq 0$ olduğunu Teorem 3.2.15'ten biliyoruz. Ayrıca hipotezden $a \neq 0$ olduğu da biliniyor. Lucas polinomlarında çalıştığımız için, $(\mathbb{C}, +, .)$ cisminde dolayısıyla da bir tamlık bölgesinde çalışıyoruz. Yani $(\mathbb{C}, +, .)$'nın sıfır bölensiz bir halka olduğunu biliyoruz. Sıfır bölensizlik gereğince,
$a \neq 0$ ve $L_{2n}(a)L_{2n+1}(a) \neq 0$ iken, $aL_{2n}(a)L_{2n+1}(a) \neq 0$ olacağı açıktır.□

3.2.17 Teorem :

$L_{2n+1}(a) = 0$ ise, $L_{2n}(a) = \pm\sqrt{a^2+4}$ ve $L_{2n-1}(a) = \mp a\sqrt{a^2+4}$ olur.

İspat : İspatı Cassini benzeri özdeşliği ve Lucas polinomunun tekrarlama bağıntısını kullanarak yapacağız. Öncelikle Cassini benzeri özdeşliği kullanalım: Cassini benzeri özdeşliğin,

$$L_{n+1}(x)L_{n-1}(x) - L_n^2(x) = (-1)^{n-1}\,(x^2+4)$$

biçiminde olduğunu biliyoruz. Bu eşitliği $L_n(x)$'in indisini çift olacak biçimde düzenlediğimizde;

$$L_{2n+1}(x)L_{2n-1}(x) - L_{2n}^2(x) = (-1)^{2n-1}\,(x^2+4)$$

biçimini alır. Burada $x = a$'yı $L_{2n+1}(a)$ polinomunun kökü olarak seçtiğimizde yani; $x = a$ ve $L_{2n+1}(a) = 0$ durumunda Cassini benzeri özdeşlik gereğince,

$$L_{2n}^2(a) = a^2 + 4$$

elde edilir. Böylece,

$$L_{2n}(a) = \pm\sqrt{a^2+4}$$

biçiminde bulunur. Bununla birlikte $L_{2n+1}(a) = 0$ için elde ettiğimiz $L_{2n}(a) = \pm\sqrt{a^2+4}$ bulgusunu Lucas polinomunun tekrarlama bağıntısında uygulayıp, $L_{2n-1}(a)$'i bulalım.

$$L_n(x) = xL_{n-1}(x) + L_{n-2}(x)\ \ ,n \geq 2$$

biçiminde Lucas polinomları için tekrarlama bağıntısının olduğunu biliyoruz. Bu tekrarlama bağıntısından hareketle ardışık üç Lucas polinomu olan $L_{2n+1}(x), L_{2n}(x)$ ve $L_{2n-1}(x)$ arasında aşağıdaki biçimiyle bir eşitliğin olacağı açıktır:

$$L_{2n+1}(x) = xL_{2n}(x) + L_{2n-1}(x)$$

Burada $x = a$'yı $L_{2n+1}(x)$ polinomunun kökü olarak seçtiğimizde yani; $x = a$ ve $L_{2n+1}(a) = 0$ durumunda tekrarlama bağıntısı gereğince,

$$L_{2n-1}(a) = -aL_{2n}(a)$$

elde edilir. Cassini benzeri özdeşlikten yararlanarak $L_{2n+1}(a) = 0$ iken, $L_{2n}(a) = \pm\sqrt{a^2+4}$ elde etmiştik. Bu bulgumuzu tekrarlama bağıntısından elde ettiğimiz eşitlik olan $L_{2n-1}(a) = -aL_{2n}(a)$ ifadesinde yazdığımızda,

$$L_{2n-1}(a) = \mp a\sqrt{a^2+4}$$

elde edilir. Böylece Cassini benzeri özdeşliken ve Lucas polinomunun tekrarlama bağıntısından yararlanarak, $L_{2n+1}(a) = 0$ iken,
$L_{2n}(a) = \pm\sqrt{a^2+4}$ ve $L_{2n-1}(a) = \mp a\sqrt{a^2+4}$ olarak bulunur.□

3.2.18 Sonuç : $L_{2n+1}(a) = 0$ iken, $L_{2n}(a)L_{2n-1}(a) = -a^3 - 4a$ olur.

İspat : $L_{2n+1}(a) = 0$ iken, $L_{2n}(a) = \pm\sqrt{a^2+4}$ ve $L_{2n-1}(a) = \mp a\sqrt{a^2+4}$ olduğunu elde etmiştik. Dolayısıyla,
$L_{2n}(a)L_{2n-1}(a) = \left(\pm\sqrt{a^2+4}\right)\left(\mp a\sqrt{a^2+4}\right) = -a^3 - 4a$ olduğu kolayca görülür.
□

3.2.19 Teorem : $a \neq 0$ ve $L_{2n+1}(a) = 0$ iken, $L_{2n}(a)L_{2n-1}(a) \neq 0$'dır.

İspat : $L_{2n+1}(a) = 0$ iken, $L_{2n}(a) = \pm\sqrt{a^2+4}$ ve $L_{2n-1}(a) = \mp a\sqrt{a^2+4}$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla araştırdığımız $L_{2n}(a)L_{2n-1}(a) = 0$ olup olmadığına, $L_{2n}(a)L_{2n-1}(a) = \left(\pm\sqrt{a^2+4}\right)\left(\mp a\sqrt{a^2+4}\right) = -a^3 - 4a = 0$ olup olmadığını inceleyerek karar vereceğiz. Lucas polinomunun, kök formülünün aşağıdaki gibi olduğunu biliyoruz.

$$L_n(x) = 0 \ : x = 2i\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n} \ , k = 0, 1, \dots, n-1$$

Bu kök formülünün $L_{2n+1}(x)$ polinomu için,

$$L_{2n+1}(x) = 0 \ : x = 2i\cos\frac{(2k+1)\pi}{4n+2} \ , k = 0, 1, \dots, 2n$$

biçiminde olacağı açıktır. $L_{2n+1}(a) = 0$ için,

$a = 2i\cos\frac{(2k+1)\pi}{4n+2}$, $k = 0, 1, \dots, 2n$ olacağı görülür.

İncelediğimiz $-a^3 - 4a = -a(a^2+4)$ olup olmadığını kosinüs fonksiyonun özelliğinden yararlanarak çelişki bulma yöntemi ile yapalım. Varsayalım ki $-a(a^2+4) = 0$ olsun. Bu durumda $a = 0$ veya $(a^2+4) = 0$'dır. Ancak önermenin hipotezi gereğince $a \neq 0$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $a^2 + 4 = 0$ olmalıdır. Bu durumda $a = \pm 2i$ 'dir. Böylece iki durum elde edilir. Bu durumları sırasıyla inceleyelim.

1. **Durum:** Varsayalım ki $a = 2i$ olsun.

Kök formülünden $a = 2i\cos\frac{(2k+1)\pi}{4n+2} = 2i$ biçimindedir. Dolayısıyla $a = 2i$ olması, $\cos\frac{(2k+1)\pi}{4n+2} = 1$ iken mümkündür. Kök formülündeki belirtilen aralık ve cos fonksiyonun özelliğinden dolayı $\cos\frac{(2k+1)\pi}{4n+2} = 1$ eşitliği, $(2k+1) = 0$ durumunda mümkündür. Bu eşitlikten $k = -\frac{1}{2}$ elde edilir. Ancak kök formülünde $k \in N$ olduğundan $k = -\frac{1}{2}$ olması mümkün değildir, bu bir çelişkidir. Dolayısıyla çelişki bulma yöntemi gereğince varsayım yanlıştır. Böylece, $a \neq 2i$'dir.

2. Durum: Varsayalım ki $a = -2i$ olsun.

Kök formülünden $a = 2i\cos\frac{(2k+1)\pi}{4n+2} = -2i$ biçimindedir. Dolayısıyla $a = -2i$ olması, $\cos\frac{(2k+1)\pi}{4n+2} = -1$ iken mümkündür. Kök formülündeki belirtilen aralık ve cos fonksiyonun özelliğinden dolayı $\cos\frac{(2k+1)\pi}{4n+2} = -1$ eşitliğini gerçekleyen herhangi bir $k \in N$ varlığı mümkün değildir, bu bir çelişkidir. Dolayısıyla çelişki bulma yöntemi gereğince varsayım yanlıştır. Böylece, $a \neq -2i$'dir.

Sonuç olarak $L_{2n+1}(a) = 0$ iken, 1. ve 2. durumlardan, iddiamız olan $-a(a^2+4) = 0$ eşitliğinin çelişki bulma yöntemi gereğince mümkün olmadığını elde ederiz. Yani, $a \neq 0$ ve $L_{2n+1}(a) = 0$ iken,

$$-a(a^2+4) = -a^3 - 4a = \left(\pm\sqrt{a^2+4}\right)\left(\mp a\sqrt{a^2+4}\right) = L_{2n}(a)L_{2n-1}(a) \neq 0$$

olduğu ispatlanmış olur.□

3.2.20 Sonuç : $a \neq 0$ ve $L_{2n+1}(a) = 0$ iken, $aL_{2n}(a)L_{2n-1}(a) \neq 0$'dır.

İspat : $a \neq 0$ ve $L_{2n+1}(a) = 0$ iken, $L_{2n}(a)L_{2n-1}(a) \neq 0$ olduğunu Teorem 3.2.19'dan biliyoruz. Ayrıca hipotezden $a \neq 0$ olduğu da biliniyor. Lucas polinomlarında çalıştığımız için, $(\mathbb{C},+,.)$ cisminde, dolayısıyla da bir tamlık bölgesinde çalışıyoruz. Yani $(\mathbb{C},+,.)$'nın sıfır bölensiz bir halka olduğunu biliyoruz. Sıfır bölensizlik gereğince,
$a \neq 0$ ve $L_{2n}(a)L_{2n+1}(a) \neq 0$ iken $aL_{2n}(a)L_{2n-1}(a) \neq 0$ olacağı açıktır.□

3.2.21 Teorem : $P_{2n}(a) = 0$ ise, $P_{2n+1}(a) = P_{2n-1}(a) = \pm 1$ olur.

İspat : Bu ifade görüldüğü üzere ardışık üç Pell polinomu ile ilgilidir. Ardışık üç Pell polinomu ile ilgili olarak tekrarlama bağıntısı ve Cassini benzeri özdeşlik bilinmektedir. İspatı tekrarlama bağıntısını ve Cassini benzeri özdeşliği kullanarak yapacağız. Öncelikle tekrarlama bağıntısını kullanalım:

$$P_n(x) = 2xP_{n-1}(x) + P_{n-2}(x)\ ,n \geq 3$$

biçiminde Pell polinomları için tekrarlama bağıntısı olduğunu biliyoruz. Bu tekrarlama bağıntısından hareketle ardışık üç Pell polinomu olan $P_{2n+1}(x), P_{2n}(x)$ ve $P_{2n-1}(x)$ arasında aşağıdaki biçimiyle bir eşitliğin olacağı açıktır:

$$P_{2n+1}(x) = 2xP_{2n}(x) + P_{2n-1}(x)$$

Burada $x = a$ 'yı $P_{2n}(x)$ polinomunun kökü olarak seçtiğimizde yani; $x = a$ ve $P_{2n}(a) = 0$ durumunda tekrarlama bağıntısı gereğince,

$$P_{2n+1}(a) = P_{2n-1}(a)$$

elde edilir. Ayrıca Cassini benzeri özdeşliğin,

$$P_{n+1}(x)P_{n-1}(x) - P_n^2(x) = (-1)^n \ , n \geq 1$$

biçiminde olduğunu biliyoruz. Bu eşitliği $P_n(x)$ 'in indisini çift olacak biçimde düzenlediğimizde;

$$P_{2n+1}(x)P_{2n-1}(x) - P_{2n}^2(x) = (-1)^{2n}$$

eşitliği elde edilir. Burada $x = a$'yı $P_{2n}(x)$ polinomunun kökü olarak seçtiğimizde yani; $x = a$ ve $P_{2n}(a) = 0$ durumunda Cassini benzeri özdeşlik gereğince,

$$P_{2n+1}(a)P_{2n-1}(a) = 1$$

elde edilir. Böylece tekrarlama bağıntısı ve Cassini benzeri özdeşlikten yararlanarak,

$$P_{2n+1}(a) = P_{2n-1}(a) \ \text{ ve } P_{2n+1}(a)P_{2n-1}(a) = 1$$

biçiminde iki eşitlik elde etmiş oluruz. Bu eşitlikleri birlikte değerlendirdiğimizde;

$$P_{2n+1}^2(a) = P_{2n-1}^2(a) = 1$$

elde edilir. Böylece $P_{2n}(a) = 0$ iken, $P_{2n+1}(a) = P_{2n-1}(a) = \pm 1$ olduğu görülür.□

3.2.22 Sonuç : $P_{2n}(a) = 0$ iken, $P_{2n+1}(a)P_{2n-1}(a) = 1$'dir.

İspat : $P_{2n}(a) = 0$ iken, $P_{2n+1}(a) = P_{2n-1}(a) = \pm 1$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla bu koşulda, $P_{2n+1}(a)P_{2n-1}(a) = 1$ olduğu kolayca görülür.□

3.2.23 Teorem : $P_{2n-1}(a) = 0$ ise, $P_{2n}(a) = \pm i$ ve $P_{2n+1}(a) = \pm 2ai$ olur.

İspat : İspatı Cassini benzeri özdeşliği ve Pell polinomunun tekrarlama bağıntısını kullanarak yapacağız. Öncelikle Cassini benzeri özdeşliği kullanalım: Cassini benzeri özdeşliğin,

$$P_{n+1}(x)P_{n-1}(x) - P_n^2(x) = (-1)^n \ , n \geq 1$$

biçiminde olduğunu biliyoruz. Bu eşitliği $P_{2n}(x)$'in indisini çift olacak biçimde düzenlediğimizde;

$$P_{2n+1}(x)P_{2n-1}(x) - P_{2n}^2(x) = (-1)^{2n}$$

biçimini alır. Burada $x = a$'yı $P_{2n-1}(x)$ polinomunun kökü olarak seçtiğimizde yani; $x = a$ ve $P_{2n-1}(a) = 0$ durumunda Cassini benzeri özdeşlik gereğince,

$$P_{2n}^2(a) = -1$$

elde edilir. Böylece,

$$P_{2n}(a) = \pm i$$

biçiminde bulunur. Bununla birlikte $P_{2n-1}(a) = 0$ için elde ettiğimiz $P_{2n}(a) = \pm i$ bulgusunu Pell polinomunun tekrarlama bağıntısında uygulayıp, $P_{2n+1}(a)$'i bulalım.

$$P_n(x) = 2xP_{n-1}(x) + P_{n-2}(x) \ \ , n \geq 3$$

biçiminde Pell polinomları için tekrarlama bağıntısının olduğunu biliyoruz. Bu tekrarlama bağıntısından hareketle ardışık üç Pell polinomu olan $P_{2n+1}(x), P_{2n}(x)$ ve $P_{2n-1}(x)$ arasında aşağıdaki biçimiyle bir eşitliğin olacağı açıktır:

$$P_{2n+1}(x) = 2xP_{2n}(x) + P_{2n-1}(x)$$

Burada $x = a$'yı $P_{2n-1}(x)$ polinomunun kökü olarak seçtiğimizde yani; $x = a$ ve $P_{2n-1}(a) = 0$ durumunda tekrarlama bağıntısı gereğince,

$$P_{2n+1}(a) = 2aP_{2n}(a)$$

elde edilir. Cassini benzeri özdeşlikten yararlanarak $P_{2n-1}(a) = 0$ iken, $P_{2n}(a) = \pm i$ elde etmiştik. Bu bulgumuzu tekrarlama bağıntısından elde ettiğimiz eşitlik olan $P_{2n+1}(a) = 2aP_{2n}(a)$ ifadesinde yazdığımızda,

$$P_{2n+1}(a) = \pm 2ai$$

elde edilir. Böylece Cassini benzeri özdeşlikten ve Pell polinomunun tekrarlama bağıntısından yararlanarak,
$P_{2n-1}(a) = 0$ iken, $P_{2n}(a) = \pm i$ ve $P_{2n+1}(a) = \pm 2ai$ olarak bulunur.□

3.2.24 Sonuç : $P_{2n-1}(a) = 0$ iken, $P_{2n}(a)P_{2n+1}(a) = -2a$ olur.

İspat : $P_{2n-1}(a) = 0$ iken, $P_{2n}(a) = \pm i$ ve $P_{2n+1}(a) = \pm 2ai$ olduğunu elde etmiştik. Dolayısıyla; $P_{2n}(a)P_{2n+1}(a) = (\pm i)(\pm 2ai) = -2a$ olduğu kolayca görülür.□

3.2.25 Teorem : $P_{2n-1}(a) = 0$ iken, $P_{2n}(a)P_{2n+1}(a) \neq 0$'dır.

İspat : $P_{2n-1}(a) = 0$ iken, $P_{2n}(a) = \pm i$ ve $P_{2n+1}(a) = \pm 2ai$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla araştırdığımız $P_{2n}(a)P_{2n+1}(a) = 0$ olup olmadığına, $P_{2n}(a)P_{2n+1}(a) = (\pm i)(\pm 2ai) = -2a = 0$ olup olmadığını inceleyerek karar vereceğiz. Pell polinomunun, kök formülünün aşağıdaki gibi olduğunu biliyoruz.

$$P_n(x) = 0 \ : x = i\cos\frac{k\pi}{n} \quad , k = 1, 2, \dots, n-1$$

Bu kök formülünün $P_{2n-1}(x)$ polinomu için,

$$P_{2n-1}(x) = 0 \ : x = i\cos\frac{k\pi}{2n-1} \quad , k = 1, 2, \dots, 2n-2$$

biçiminde olacağı açıktır. $P_{2n-1}(a) = 0$ için,

$a = i\cos\frac{k\pi}{2n-1}$, $k = 1, 2, \dots, 2n-2$ olacağı görülür.

İncelediğimiz $-2a = 0$ olup olmadığını cos fonksiyonun özelliğinden yararlanarak çelişki bulma yöntemi ile yapalım.

Varsayalım ki $-2a = 0$ olsun. Pell polinomlarında çalıştığımız için, $(\mathbb{C}, +, .)$ cisminde dolayısıyla da bir tamlık bölgesinde çalışıyoruz. Yani $(\mathbb{C}, +, .)$'nın sıfır bölensiz bir halka olduğunu biliyoruz. Sıfır bölensizlik gereğince, $-2a = 0$ iken, $a = 0$'dır. Kök formülünden, $a = i\,cos\frac{k\pi}{2n-1} = 0$ biçimindedir. Dolayısıyla $a = 0$ olması, $cos\frac{k\pi}{2n-1} = 0$ iken mümkündür. Kök formülündeki belirtilen aralık ve cos fonksiyonun özelliğinden dolayı $\cos\frac{k\pi}{2n-1} = 0$ eşitliği, $\cos\frac{k\pi}{2n-1} = \cos\frac{\pi}{2} = 0$ durumunda mümkündür. Dolayısıyla $\frac{k\pi}{2n-1} = \frac{\pi}{2}$ olur. Böylece $2k\pi = (2n-1)\pi$ elde edilir. $2k\pi = (2n-1)\pi$ eşitliğinden,

$$2\pi(n-k) - \pi = 0$$

$$\pi[2(n-k) - 1] = 0$$

$$2(n-k)-1=0$$

bulunur. Bu eşitlikten $(n-k)=\frac{1}{2}$ elde edilir. Ancak $n,k \in N$ olduğundan bu mümkün değildir, bu bir çelişkidir. Dolayısıyla çelişki bulma yöntemi gereğince varsayım yanlıştır. Sonuç olarak $P_{2n-1}(a)=0$ iken, $a \neq 0$ dolayısıyla $-2a \neq 0$'dır. Böylece, $P_{2n-1}(a)=0$ iken, $P_{2n}(a)P_{2n+1}(a) \neq 0$ ispatlanmış olur.□

3.2.26 Sonuç : $P_{2n-1}(a)=0$ iken, $aP_{2n}(a)P_{2n+1}(a) \neq 0$'dır.

İspat : $P_{2n-1}(a)=0$ iken, $P_{2n}(a)=\pm i$ ve $P_{2n+1}(a)=\pm 2ai$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla araştırdığımız $aP_{2n}(a)P_{2n+1}(a)=0$ olup olmadığına $aP_{2n}(a)P_{2n+1}(a)=a(\pm i)(\pm 2ai)=-2a^2=0$ olup olmadığını inceleyerek karar vereceğiz. Çelişki bulma yönteminden yararlanarak ispatı yapalım. Varsayalım ki $-2a^2=0$ olsun. Bu durumda sıfır bölensizlik gereğince $a^2=0$ dolayısıyla, $a=0$ 'dır. Ancak bunun mümkün olmadığı Teorem 3.2.25'de ispatladığımız $P_{2n-1}(a)=0$ iken, $P_{2n}(a)P_{2n+1}(a)=-2a \neq 0$ önermesinden görülür. Dolayısıyla çelişki bulma yöntemi gereğince varsayım yanlıştır. Sonuç olarak $P_{2n-1}(a)=0$ iken, $-2a^2 \neq 0$'dır. Böylece,

$P_{2n-1}(a)=0$ iken, $aP_{2n}(a)P_{2n+1}(a) \neq 0$ ispatlanmış olur.□

3.2.27 Teorem : $P_{2n+1}(a)=0$ ise, $P_{2n}(a)=\pm i$ ve $P_{2n-1}(a)=\mp 2ai$ olur.

İspat : İspatı Cassini benzeri özdeşliği ve Pell polinomunun tekrarlama bağıntısını kullanarak yapacağız. Öncelikle Cassini benzeri özdeşliği kullanalım: Cassini benzeri özdeşliğin;

$$P_{n+1}(x)P_{n-1}(x)-P_n^2(x)=(-1)^n \ , n \geq 1$$

biçiminde olduğunu biliyoruz. Bu eşitliği $P_n(x)$'i çift indis olarak düzenlediğimizde;

$$P_{2n+1}(x)P_{2n-1}(x)-P_{2n}^2(x)=(-1)^{2n} \ , n \geq 1$$

biçimini alır. Burada $x=a$'yı $P_{2n+1}(x)$ polinomunun kökü olarak seçtiğimizde yani; $x=a$ ve $P_{2n+1}(a)=0$ durumunda Cassini benzeri özdeşlik gereğince,

$$P_{2n}^2(a)=-1$$

elde edilir. Böylece,

$$P_{2n}(a) = \pm i$$

biçiminde bulunur. Bununla birlikte $P_{2n+1}(a) = 0$ için elde ettiğimiz $P_{2n}(a) = \pm i$ bulgusunu Pell polinomunun tekrarlama bağıntısında uygulayıp, $P_{2n-1}(a)$'i bulalım.

$$P_n(x) = 2xP_{n-1}(x) + P_{n-2}(x) \quad , n \geq 3$$

biçiminde Pell polinomları için tekrarlama bağıntısının olduğunu biliyoruz. Bu tekrarlama bağıntısından hareketle ardışık üç Pell polinomu olan $P_{2n+1}(x), P_{2n}(x)$ ve $P_{2n-1}(x)$ arasında aşağıdaki biçimiyle bir eşitliğin olacağı açıktır:

$$P_{2n+1}(x) = 2xP_{2n}(x) + P_{2n-1}(x)$$

Burada $x = a$'yı $P_{2n+1}(x)$ polinomunun kökü olarak seçtiğimizde yani; $x = a$ ve $P_{2n+1}(a) = 0$ durumunda tekrarlama bağıntısı gereğince,

$$P_{2n-1}(a) = -2aP_{2n}(a)$$

elde edilir. Cassini benzeri özdeşlikten yararlanarak $P_{2n+1}(a) = 0$ iken, $P_{2n}(a) = \pm i$ elde etmiştik. Bu bulgumuzu tekrarlama bağıntısından elde ettiğimiz eşitlik olan $P_{2n-1}(a) = -2aP_{2n}(a)$ ifadesinde yazdığımızda,

$$P_{2n-1}(a) = \mp 2ai$$

elde edilir. Böylece Cassini benzeri özdeşlikten ve Pell polinomunun tekrarlama bağıntısından yararlanarak,

$P_{2n+1}(a) = 0$ iken, $P_{2n}(a) = \pm i$ ve$P_{2n-1}(a) = \mp 2ai$ olarak bulunur.□

3.2.28 Sonuç : $P_{2n+1}(a) = 0$ iken, $P_{2n}(a)P_{2n-1}(a) = 2a$ olur.

İspat : $P_{2n+1}(a) = 0$ iken, $P_{2n}(a) = \pm i$ ve $P_{2n-1}(a) = \mp 2ai$ olduğunu elde etmiştik. Dolayısıyla $P_{2n}(a)P_{2n-1}(a) = (\pm i)(\mp 2ai) = 2a$ olduğu kolayca görülür.□

3.2.29 Teorem : $P_{2n+1}(a) = 0$ iken, $P_{2n-1}(a)P_{2n}(a) \neq 0$'dır.

İspat : $P_{2n+1}(a) = 0$ iken, $P_{2n}(a) = \pm i$ ve $P_{2n-1}(a) = \mp 2ai$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla araştırdığımız $P_{2n-1}(a)P_{2n}(a) = 0$ olup olmadığına, $P_{2n-1}(a)P_{2n}(a) = (\mp 2ai)(\pm i) = 2a = 0$ olup olmadığını inceleyerek karar vereceğiz. Pell polinomunun, kök formülünün aşağıdaki gibi olduğunu biliyoruz.

$$P_n(x) = 0 \ : x = i\cos\frac{k\pi}{n} \ , k = 1, 2, \dots, n-1$$

Bu kök formülünün $P_{2n+1}(x)$ polinomu için,

$$P_{2n+1}(x) = 0 \ : x = i\cos\frac{k\pi}{2n+1} \ , k = 1, 2, \dots, 2n$$

biçiminde olacağı açıktır. $P_{2n+1}(a) = 0$ için,

$a = i\cos\frac{k\pi}{2n+1} \ , k = 1, 2, \dots, 2n$ olacağı görülür.

İncelediğimiz $2a = 0$ olup olmadığını cos fonksiyonun özelliğinden yararlanarak çelişki bulma yöntemi ile yapalım. Varsayalım ki $2a = 0$ olsun. Bu durumda sıfır bölensizlik gereğince $a = 0$'dır. Kök formülünden $a = i\,cos\frac{k\pi}{2n+1} = 0$ biçimindedir. Dolayısıyla $a = 0$ olması, $cos\frac{k\pi}{2n+1} = 0$ iken mümkündür. Kök formülündeki belirtilen aralık ve cos fonksiyonun özelliğinden dolayı $\cos\frac{k\pi}{2n+1} = 0$ eşitliği, $\cos\frac{k\pi}{2n+1} = \cos\frac{\pi}{2} = 0$ durumunda mümkündür. Dolayısıyla $\frac{k\pi}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$ olur. Böylece $2k\pi = (2n+1)\pi$ elde edilir. $2k\pi = (2n+1)\pi$ eşitliğinden,

$$2\pi(n-k) + \pi = 0$$

$$\pi[2(n-k) + 1] = 0$$

$$2(n-k) + 1 = 0$$

bulunur.Bu eşitlikten $(n-k) = -\frac{1}{2}$ elde edilir. Ancak $n, k \in N$ olduğundan bu mümkün değildir, bu bir çelişkidir. Dolayısıyla çelişki bulma yöntemi gereğince varsayım yanlıştır. Sonuç olarak $P_{2n+1}(a) = 0$ iken, $a \neq 0$ dolayısıyla $2a \neq 0$'dır. Böylece, $P_{2n+1}(a) = 0$ iken, $P_{2n-1}(a)P_{2n}(a) \neq 0$ ispatlanmış olur.□

3.2.30 Sonuç : $P_{2n+1}(a) = 0$ iken, $aP_{2n-1}(a)P_{2n}(a) \neq 0$'dır.

İspat : $P_{2n+1}(a) = 0$ iken, $a \neq 0$ ve $P_{2n}(a)P_{2n-1}(a) \neq 0$ olduğunu Teorem 3.2.29'dan biliyoruz. Pell polinomlarında çalıştığımız için, $(\mathbb{C}, +, .)$ cisminde, dolayısıyla da bir tamlık bölgesinde çalışıyoruz. Yani $(\mathbb{C}, +, .)$'nın sıfır bölensiz bir halka olduğunu biliyoruz. Sıfır bölensizlik gereğince, $a \neq 0$ ve $P_{2n}(a)P_{2n-1}(a) \neq 0$ iken, $aP_{2n-1}(a)P_{2n}(a) \neq 0$ olacağı açıktır.□

Böylece bu kısımda Fibonacci, Lucas ve Pell polinomlarının kök değerlerinin, kendi polinom sınıfı içerisindeki başka birtakım polinom üyeleri altındaki görüntülerini elde ettik. Elde ettiğimiz bu özgün bulguların tamamından, dördüncü bölümde yeni matris formları elde ederken yararlanacağız.

4. FİBONACCİ, LUCAS, VE PELL POLİNOMLARININ KÖKLERİ İLE; LİNEER GRUPLAR VE MATRİSLER ARASINDAKİ İLİŞKİLER

Çalışmamızın bu bölümünde Fibonacci ve Pell polinomlarının kökleri ile ilişkili olan lineer grupların üreteçleri, üreteçlerinin matris temsilleri, bazı elemanları ve grup yapıları hakkında elde ettiğimiz özgün bulguları sunacağız. Ayrıca, belirli lineer grup sınıflarının hangi koşullarda serbest grup olmadığını Fibonacci ve Pell polinomlarının kökleri perspektifinden ele alacağız. Bununla birlikte bu bölümün kapsamı içerisinde Lucas polinomlarının kökleri ile yeni elde ettiğimiz üreteç matrisler arasındaki ilişkilere yönelik bulgularımız da yer almaktadır.

Literatürde lineer grupların ya da yarı grupların üreteçleri olan lineer dönüşümlerinin matris temsillerinden yararlanılarak, bu grup ya da yarı grupların hangi koşullarda serbest grup (yarı grup) olduğunu ya da serbest grup (yarı grup) olmadığını belirten çok sayıda çalışma bulunmaktadır. Bunların başlıcaları [13,23-32] olarak verilebilir.

Yukarıda belirttiğimiz çalışmalarda iki ya da daha çok üretece sahip olan lineer grupların (yarı grupların) serbestliği hakkında farklı koşullara ait hükümler benzer yaklaşımlarla elde edilmiştir. Daha detaylı bilgi için bu kaynaklara bakılabilir. Bu çalışmaların bazılarını kısaca özetleyelim:

Bu çalışmalardan [28] numaralı çalışmada;

$a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0$, $d - a \geq 2$, $\delta - \alpha \geq 2$ olmak üzere,

$A = \begin{bmatrix} -a & b \\ -c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -\alpha & -\beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$ iken,

A ve B elemanları ile üretilen grubun serbest olduğu belirtilmiştir.

[23] numaralı çalışmada;

$x, y, z \in \mathbb{C}$ $|x|, |y|, |z| \geq 4{,}45$ iken, üç üreteçli lineer grubun üreteçlerinin matris temsilleri, $A = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix}$ ve $C = \begin{bmatrix} 1 - z & -z \\ z & 1 - z \end{bmatrix}$ biçiminde olması durumunda bu grubun serbest grup olduğu ortaya konulmuştur.

Bu çalışmalardan Sanov, Brenner, Chang ve Slanina'nın [13,29-31] çalışmalarında bir lineer grubun aşağıdaki biçimiyle tanımlanan üreteçlerinin matris temsilleri aynı formda olup, bu kaynaklarda bu formun farklı koşullarına yönelik birbirini tamamlayan çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmaları aşağıdaki biçimiyle kısaca özetleyelim:

$A_a = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}$ $a, b \in \mathbb{C}$ için;

Sanov [29], $a = b = 2$ olması halinde A_2 ve B_2 üreteçleri ile üretilen grubun, serbest grup olduğunu ispatlamıştır.

Brenner [30], $a = b$ ve $|a| \geq 2$ iken, A_a ve B_a üreteçleri ile üretilen grubun, serbest grup olduğunu ispatlamıştır.

Chang [31], $|ab| \geq 2$, $|ab - 2| \geq 2$ ve $|ab + 2| \geq 2$ koşullarının üçünü birden sağlayan a ve b değeri için A_a ve B_b üreteçleri ile üretilen grubun, serbest grup olduğunu ispatlamıştır.

Slanina [13] ise, aynı matris formu için hangi $a = b$ değerinde A_a ve B_a üreteçleri ile üretilen grubun serbest grup olmadığını Fibonacci polinomlarının kökleri perspektifinden incelemiştir.

Biz de Slanina'nın bu çalışmasından hareketle ilgili çalışmada ele alınmayan grup elemanlarının bazı özelliklerini inceleyeceğiz. Ayrıca çalışmamız sadece Fibonacci polinomları ile sınırlı değildir. Fibonacci ve Pell polinomlarının kökleri ile ilişkili olan lineer grupların üreteçleri, üreteçlerinin matris temsilleri, bazı elemanları ve grup yapıları hakkındaki özgün bulgularımızı içermektedir. Bunun yanı sıra, çalışmamızın önceki bölümünde elde ettiğimiz bazı teoremlerden yararlanarak Fibonacci, Lucas ve Pell polinomlarının kök değerleriyle ilişkili olan yeni matris formlarını da elde edeceğiz.

Tezimizin bu bölümünün hareket noktası Piotr Slanina'nın yukarıda değindiğimiz [13] çalışmasıdır. Piotr Slanina bu çalışmasında literatürde de çok çalışılan $A_a = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ve $B_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}$ biçiminde genel gösterime sahip olan lineer grubun üreteçlerini ele almıştır. Çalışmasında, $a = b$ olarak almış ve bu değeri

Fibonacci polinomunun kökü olarak seçmiştir. Böylece elde ettiği A_a ve B_a biçimindeki iki üreteçle üretilen grubun serbest grup olmadığını çalışmasında belirtmiştir. Biz de Piotr Slanina'nın bu çalışmasından hareketle bazı özgün bulgular elde edeceğiz.

Lineer gruplarla ilgili yaygın olarak kullanılan ve bizim de çalışmamızda kullanacağımız notasyon şu şekildedir:

$A_a = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ve $B_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}$ $a, b \in \mathbb{C}$ olmak üzere; A_a ve B_b üreteçleri ile üretilen grup, $gp\ (A_a, B_b)$ biçiminde gösterilir.

Bu genel açıklamalardan sonra özel polinom sınıflarının kökleri ile ilişkili olarak elde ettiğimiz lineer grupların özelliklerini detaylı bir biçimde ortaya koyalım. Öncelikle Slanina'nın da çalışmasında bazı yönlerden incelediği Fibonacci polinomunun kökleri ile ilişkili olan lineer grupları ele alalım.

4.1 Fibonacci Polinomlarının Kökleri ile Lineer Gruplar ve Matrisler Arasındaki İlişkiler

Bu kısımda, Fibonacci polinomunun kökleri ile; bazı lineer grupların üreteçleri, üreteçlerinin matris temsilleri, bazı elemanları ve grup yapıları arasındaki ilişkileri ortaya koyacağız. Bu ilişkileri elde etmeden önce bu kısım için gerekli olan ve daha önceki bölümlerde detaylı bir biçimde açıkladığımız Fibonacci polinomunu ve Fibonacci polinomunun kök formülünü hatırlatalım: Fibonacci polinomları,

$$F_1(x) = 1\,, F_2(x) = x$$
$$F_n(x) = xF_{n-1}(x) + F_{n-2}(x)\,; n \geq 3$$

başlangıç koşulları ve tekrarlama bağıntısı ile tanımlanır. Ayrıca tekrarlama bağıntısından elde edilen ve bu kısımda çalışmamız için oldukça önemli olan eşitliği ortaya koyalım. Bu eşitlik yukarıdaki tekrarlama bağıntısından yararlanarak aşağıdaki biçimiyle elde edilir. $F_{n+2}(x)$ ve $F_{n+1}(x)$ yukarıdaki tekrarlama bağıntısından hareketle;

$F_{n+2}(x) = xF_{n+1}(x) + F_n(x)$ ve $F_{n+1}(x) = xF_n(x) + F_{n-1}(x)$ biçimindedir. Yukarıdaki $F_{n+2}(x)$ eşitliğinde $F_{n+1}(x)$ değerini yazarsak;

$$F_{n+2}(x) = x[xF_n(x) + F_{n-1}(x)] + F_n(x)$$

$$F_{n+2}(x) = (1 + x^2)F_n(x) + xF_{n-1}(x)$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca, Fibonacci polinomunun, karmaşık hiperbolik fonksiyonlar cinsinden temsilinin ve Fibonacci polinomunun kökü için genel formülün aşağıdaki biçimde olduğu bilinmektedir [11].

$$F_n(x) = i^{n-1}\frac{\sinh nz}{\sinh z}$$

$$F_n(x) = 0 \ : x = 2i \cos\frac{k\pi}{n} \ , k = 1, 2 \ldots , n - 1$$

Slanina [13], çalışmasında literatürde çok çalışılan $gp\ (A_a, B_b)$ grubunda $a = b$ olarak seçerek, bu değeri Fibonacci polinomunun kökü olarak belirlemiş ve $gp\ (A_a, B_a)$ grubunun serbest grup olmadığını ifade etmiştir.

Biz de çalışmamızın bu kısmında $a = b$ alıp, bu değeri Fibonacci polinomunun kökü olarak seçeceğiz. Böylece A_a ve B_a biçiminde iki üreteçle üretilen grubun bazı özelliklerini, bu grubun bazı elemanlarının genel yapısını ve grup özelliklerini sunacağız. Çalışmamızda kullandığımız grubun sembolü $gp\ (A_a, B_a)$ olup, üreteçlerinin matris temsili;

$$A_a = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } B_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$$

biçimindedir.

4.1.1 Teorem : $a \in \mathbb{C}$ iken, $A_a = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ve $B_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$ olmak üzere,

$$(A_aB_a)^n = \begin{bmatrix} F_{2n+1}(a) & F_{2n}(a) \\ F_{2n}(a) & F_{2n-1}(a) \end{bmatrix}$$

biçimindedir [13].

İspat : İspatı matamatiksel tümevarım yöntemi ile yapacağız.

$n = 1$ için;

$$(A_aB_a)^1 = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + a^2 & a \\ a & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_3(a) & F_2(a) \\ F_2(a) & F_1(a) \end{bmatrix}$$

olduğu görülür. Herhangi bir keyfi $n - 1 \in \mathbb{Z}^+$ için;

$$(A_aB_a)^{n-1} = \begin{bmatrix} F_{2n-1}(a) & F_{2n-2}(a) \\ F_{2n-2}(a) & F_{2n-3}(a) \end{bmatrix}$$

olduğunu varsayalım. $n \in \mathbb{Z}^+$ için;

$$(A_aB_a)^n = \begin{bmatrix} F_{2n+1}(a) & F_{2n}(a) \\ F_{2n}(a) & F_{2n-1}(a) \end{bmatrix}$$

olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}(A_aB_a)^n &= (A_aB_a)^{n-1}(A_aB_a) \\ &= \begin{bmatrix} F_{2n-1}(a) & F_{2n-2}(a) \\ F_{2n-2}(a) & F_{2n-3}(a) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1+a^2 & a \\ a & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (1+a^2)F_{2n-1}(a) + aF_{2n-2}(a) & aF_{2n-1}(a) + F_{2n-2}(a) \\ (1+a^2)F_{2n-2}(a) + aF_{2n-3}(a) & aF_{2n-2}(a) + F_{2n-3}(a) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_{2n+1}(a) & F_{2n}(a) \\ F_{2n}(a) & F_{2n-1}(a) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece matematiksel tümevarım yöntemi gereğince $\forall n \in Z^+$ için;

$(A_aB_a)^n = \begin{bmatrix} F_{2n+1}(a) & F_{2n}(a) \\ F_{2n}(a) & F_{2n-1}(a) \end{bmatrix}$ olduğu görülür.□

4.1.2 Teorem : $a \in \mathbb{C}$ iken, $A_a = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ve $B_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$ olmak üzere,

$$(B_aA_a)^n = \begin{bmatrix} F_{2n-1}(a) & F_{2n}(a) \\ F_{2n}(a) & F_{2n+1}(a) \end{bmatrix}$$

biçimindedir.

İspat : İspatı matematiksel tümevarım yöntemi ile yapacağız.

$n = 1$ için;

$$(B_aA_a)^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1+a^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(a) & F_2(a) \\ F_2(a) & F_3(a) \end{bmatrix}$$

olduğu görülür. Herhangi bir keyfi $n-1 \in \mathbb{Z}^+$ için;

$$(B_aA_a)^{n-1} = \begin{bmatrix} F_{2n-3}(a) & F_{2n-2}(a) \\ F_{2n-2}(a) & F_{2n-1}(a) \end{bmatrix}$$

olduğunu varsayalım. $n \in \mathbb{Z}^+$ için;

$$(B_aA_a)^n = \begin{bmatrix} F_{2n-1}(a) & F_{2n}(a) \\ F_{2n}(a) & F_{2n+1}(a) \end{bmatrix}$$

olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}(B_aA_a)^n &= (B_aA_a)^{n-1}(B_aA_a) \\ &= \begin{bmatrix} F_{2n-3}(a) & F_{2n-2}(a) \\ F_{2n-2}(a) & F_{2n-1}(a) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1+a^2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} aF_{2n-2}(a) + F_{2n-3}(a) & (1 + a^2)F_{2n-2}(a) + aF_{2n-3}(a) \\ aF_{2n-1}(a) + F_{2n-2}(a) & (1 + a^2)F_{2n-1}(a) + aF_{2n-2}(a) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F_{2n-1}(a) & F_{2n}(a) \\ F_{2n}(a) & F_{2n+1}(a) \end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece matematikel tümevarım yöntemi gereğince $\forall\, n \in Z^+$ için;

$(B_aA_a)^n = \begin{bmatrix} F_{2n-1}(a) & F_{2n}(a) \\ F_{2n}(a) & F_{2n+1}(a) \end{bmatrix}$ olduğu görülür.□

4.1.3 Teorem : $a \in \mathbb{C}$ iken, $A_a = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ve $B_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$ olmak üzere,

$$(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n = \begin{bmatrix} F_{2n-1}(a)F_{2n+1}(a) + F_{2n}^2(a) & 2F_{2n}(a)F_{2n+1}(a) \\ 2F_{2n-1}(a)F_{2n}(a) & F_{2n}^2(a) + F_{2n-1}(a)F_{2n+1}(a) \end{bmatrix}$$

biçimindedir.

İspat : $(A_aB_a)^n\ ve\ (B_aA_a)^n$ matrislerinin genel formlarından yararlanıldığında,

$$(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n = \begin{bmatrix} F_{2n+1}(a) & F_{2n}(a) \\ F_{2n}(a) & F_{2n-1}(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{2n-1}(a) & F_{2n}(a) \\ F_{2n}(a) & F_{2n+1}(a) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F_{2n-1}(a)F_{2n+1}(a) + F_{2n}^2(a) & 2F_{2n}(a)F_{2n+1}(a) \\ 2F_{2n-1}(a)F_{2n}(a) & F_{2n}^2(a) + F_{2n-1}(a)F_{2n+1}(a) \end{bmatrix}$$

biçiminde $(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n$ matrisinin genel formu elde edilir.□

Elde edilen $(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n$ matrisinin genel formuyla, Fibonacci polinomların kökleri arasındaki ilişkiyi sırasıyla; $F_{2n+1}(a) = 0$, $F_{2n}(a) = 0$ ve $F_{2n-1}(a) = 0$ durumları için inceleyeceğiz.

4.1.4 Sonuç : $F_{2n+1}(a) = 0$ iken,

i) $(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n$ alt üçgen matristir [13].

ii) $(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n$ matrisi ile A_a değişmeli değildir.

iii) $(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n$ matrisi ile B_a değişmelidir [13].

İspat :

i) $(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n$ için genel formu olan;

$\begin{bmatrix} F_{2n-1}(a)F_{2n+1}(a) + F_{2n}^2(a) & 2F_{2n}(a)F_{2n+1}(a) \\ 2F_{2n-1}(a)F_{2n}(a) & F_{2n}^2(a) + F_{2n-1}(a)F_{2n+1}(a) \end{bmatrix}$ ifadesinde;

$F_{2n+1}(a) = 0$ alındığında,

$$(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n = \begin{bmatrix} F_{2n}^2(a) & 0 \\ 2F_{2n-1}(a)F_{2n}(a) & F_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece $(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n$ matrisinin alt üçgen matris olduğu görülür.

ii) $F_{2n+1}(a) = 0$ iken,

$(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n = \begin{bmatrix} F_{2n}^2(a) & 0 \\ 2F_{2n-1}(a)F_{2n}(a) & F_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$ olduğunu biliyoruz. Bu durumda,

$$(A_aB_a)^n(B_aA_a)^nA_a = \begin{bmatrix} F_{2n}^2(a) & 0 \\ 2F_{2n-1}(a)F_{2n}(a) & F_{2n}^2(a) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F_{2n}^2(a) & aF_{2n}^2(a) \\ 2F_{2n-1}(a)F_{2n}(a) & 2aF_{2n-1}(a)F_{2n}(a) + F_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$$

olur.

$A_a(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n$ ise $F_{2n+1}(a) = 0$ koşulu ile,

$$A_a(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_{2n}^2(a) & 0 \\ 2F_{2n-1}(a)F_{2n}(a) & F_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2aF_{2n-1}(a)F_{2n}(a) + F_{2n}^2(a) & aF_{2n}^2(a) \\ 2F_{2n-1}(a)F_{2n}(a) & F_{2n}^2(a) \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

Böylece, $F_{2n+1}(a) = 0$ iken, $(A_aB_a)^n(B_aA_a)^nA_a = A_a(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n$ olması için; $2aF_{2n-1}(a)F_{2n}(a) = 0$ olması gerekir. Ancak Sonuç 3.2.10'dan $F_{2n+1}(a)$ iken, $aF_{2n-1}(a)F_{2n}(a) \neq 0$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla bu koşulda $2aF_{2n-1}(a)F_{2n}(a) \neq 0$ olacağı açıkça görülür. Böylece $F_{2n+1}(a) = 0$ iken, $(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n$ ile A_a değişmeli değildir.

iii) $F_{2n+1}(a) = 0$ iken, $(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n$ matrisi ile B_a 'nın değişmeli olduğunu ispatlamak için; $(A_aB_a)^n(B_aA_a)^nB_a = B_a(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n$ olduğunu göstermemiz gerekir. Bunun için öncelikle $(A_aB_a)^n(B_aA_a)^nB_a$ matrisinin eşitini bulalım. $F_{2n+1}(a) = 0$ iken,

$(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n = \begin{bmatrix} F_{2n}^2(a) & 0 \\ 2F_{2n-1}(a)F_{2n}(a) & F_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$ olduğunu biliyoruz. Bu durumda,

$$(A_aB_a)^n(B_aA_a)^nB_a = \begin{bmatrix} F_{2n}^2(a) & 0 \\ 2F_{2n-1}(a)F_{2n}(a) & F_{2n}^2(a) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F_{2n}^2(a) & 0 \\ 2F_{2n-1}(a)F_{2n}(a) + aF_{2n}^2(a) & F_{2n}^2(a) \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

$B_a(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n$ ise $F_{2n+1}(a) = 0$ koşulu ile,

$$B_a(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{2n}^2(a) & 0 \\ 2F_{2n-1}(a)F_{2n}(a) & F_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F_{2n}^2(a) & 0 \\ 2F_{2n-1}(a)F_{2n}(a) + aF_{2n}^2(a) & F_{2n}^2(a) \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

Böylece, $F_{2n+1}(a) = 0$ iken;

$(A_aB_a)^n(B_aA_a)^nB_a = B_a(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n$ olduğu görülür. Yani bu koşulda, $(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n$ ile B_a değişmelidir.

4.1.5 Sonuç : $F_{2n}(a) = 0$ iken,

i) $(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n$ matrisi birim matristir.

ii) $(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n$ ile A_a değişmelidir.

iii) $(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n$ ile B_a değişmelidir.

İspat:

i) $(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n$ matrisinin genel formu olan;

$$\begin{bmatrix} F_{2n-1}(a)F_{2n+1}(a) + F_{2n}^2(a) & 2F_{2n}(a)F_{2n+1}(a) \\ 2F_{2n-1}(a)F_{2n}(a) & F_{2n}^2(a) + F_{2n-1}(a)F_{2n+1}(a) \end{bmatrix} \text{ifadesinde,}$$

$F_{2n}(a) = 0$ alındığında;

$$(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n = \begin{bmatrix} F_{2n-1}(a)F_{2n+1}(a) & 0 \\ 0 & F_{2n-1}(a)F_{2n+1}(a) \end{bmatrix} \text{elde edilir.}$$

Sonuç 3.2.2'den $F_{2n}(a) = 0$ iken, $F_{2n-1}(a)F_{2n+1}(a) = 1$ olduğunu biliyoruz. Böylece, $F_{2n}(a) = 0$ iken,

$$(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{I} \text{ olduğu görülür.}$$

ii) $F_{2n}(a) = 0$ iken, $(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n = \mathrm{I}$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $F_{2n}(a) = 0$ koşulunda $(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n$ ile A_a 'nın değişmeli olduğu açıktır.

iii) $F_{2n}(a) = 0$ iken,$(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n =$ I olduğundan $(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n$ ile B_a'nın değişmeli olduğu açıkça görülür.

4.1.6 Sonuç : $F_{2n-1}(a) = 0$ iken,

i) $(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n$ üst üçgen matristir.

ii) $(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n$ ile A_a değişmelidir.

iii) $(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n$ ile B_a değişmeli değildir.

İspat :

i) $(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n$ matrisinin genel formu olan;

$$\begin{bmatrix} F_{2n-1}(a)F_{2n+1}(a) + F_{2n}^2(a) & 2F_{2n}(a)F_{2n+1}(a) \\ 2F_{2n-1}(a)F_{2n}(a) & F_{2n}^2(a) + F_{2n-1}(a)F_{2n+1}(a) \end{bmatrix} \text{ifadesinde,}$$

$F_{2n-1}(a) = 0$ alındığında;

$$(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n = \begin{bmatrix} F_{2n}^2(a) & 2F_{2n}(a)F_{2n+1}(a) \\ 0 & F_{2n}^2(a) \end{bmatrix} \text{elde edilir.}$$

Böylece $(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n$ matrisinin üst üçgen matris olduğu görülür.

ii) $F_{2n-1}(a) = 0$ iken, $(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n$ matrisi ile A_a 'nın değişmeli olduğunu ispatlamak için; $(A_aB_a)^n(B_aA_a)^nA_a = A_a(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n$ olduğunu göstermemiz gerekir. Bunun için öncelikle $(A_aB_a)^n(B_aA_a)^nA_a$ matrisinin eşitini bulalım.

$F_{2n-1}(a) = 0$ iken,

$$(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n = \begin{bmatrix} F_{2n}^2(a) & 2F_{2n}(a)F_{2n+1}(a) \\ 0 & F_{2n}^2(a) \end{bmatrix} \text{olduğunu biliyoruz. Bu koşulda,}$$

$$(A_aB_a)^n(B_aA_a)^nA_a = \begin{bmatrix} F_{2n}^2(a) & 2F_{2n}(a)F_{2n+1}(a) \\ 0 & F_{2n}^2(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F_{2n}^2(a) & 2F_{2n}(a)F_{2n+1}(a) + aF_{2n}^2(a) \\ 0 & F_{2n}^2(a) \end{bmatrix} \text{olur.}$$

$A_a(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n$ ise $F_{2n-1}(a) = 0$ koşulu ile,

$$A_a(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{2n}^2(a) & 2F_{2n}(a)F_{2n+1}(a) \\ 0 & F_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F_{2n}^2(a) & 2F_{2n}(a)F_{2n+1}(a) + aF_{2n}^2(a) \\ 0 & F_{2n}^2(a) \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

Böylece, $F_{2n-1}(a) = 0$ iken,

$(A_aB_a)^n(B_aA_a)^nA_a = A_a(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n$ olduğu görülür. Yani bu koşulda, $(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n$ ile A_a değişmelidir.

iii) $F_{2n-1}(a) = 0$ iken,

$(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n = \begin{bmatrix} F_{2n}^2(a) & 2F_{2n}(a)F_{2n+1}(a) \\ 0 & F_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$ olduğunu biliyoruz. Bu durumda,

$$(A_aB_a)^n(B_aA_a)^nB_a = \begin{bmatrix} F_{2n}^2(a) & 2F_{2n}(a)F_{2n+1}(a) \\ 0 & F_{2n}^2(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} F_{2n}^2(a) + 2aF_{2n}(a)F_{2n+1}(a) & 2F_{2n}(a)F_{2n+1}(a) \\ aF_{2n}^2(a) & F_{2n}^2(a) \end{bmatrix} \text{olur.}$$

$B_a(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n$ ise $F_{2n-1}(a) = 0$ koşulu ile,

$$B_a\,(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{2n}^2(a) & 2F_{2n}(a)F_{2n+1}(a) \\ 0 & F_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} F_{2n}^2(a) & 2F_{2n}(a)F_{2n+1}(a) \\ aF_{2n}^2(a) & 2aF_{2n}(a)F_{2n+1}(a) + F_{2n}^2(a) \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

Böylece, $F_{2n-1}(a) = 0$ iken;

$(A_aB_a)^n(B_aA_a)^nB_a = B_a(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n$ olması için; $2aF_{2n}(a)F_{2n+1}(a) = 0$ olması gerekir. Ancak Sonuç 3.2.6'dan $F_{2n-1}(a) = 0$iken, $aF_{2n}(a)F_{2n+1}(a) \neq 0$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla bu koşulda $2aF_{2n}(a)F_{2n+1}(a) \neq 0$ olacağı açıkça görülür. Böylece $F_{2n-1}(a) = 0$ iken, $(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n$ ile B_a değişmeli değildir.

4.1.7 Teorem : $a \in \mathbb{C}$ iken, $A_a = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ve $B_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$ olmak üzere,

$$(B_aA_a)^n(A_aB_a)^n = \begin{bmatrix} F_{2n-1}(a)F_{2n+1}(a) + F_{2n}^2(a) & 2F_{2n-1}(a)F_{2n}(a) \\ 2F_{2n}(a)F_{2n+1}(a) & F_{2n}^2(a) + F_{2n-1}(a)F_{2n+1}(a) \end{bmatrix}$$

biçimindedir.

İspat : $(B_aA_a)^n$ ve $(A_aB_a)^n$ matrislerinin genel formlarından yararlanıldığında,

$$(B_aA_a)^n(A_aB_a)^n = \begin{bmatrix} F_{2n-1}(a) & F_{2n}(a) \\ F_{2n}(a) & F_{2n+1}(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{2n+1}(a) & F_{2n}(a) \\ F_{2n}(a) & F_{2n-1}(a) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F_{2n-1}(a)F_{2n+1}(a) + F_{2n}^2(a) & 2F_{2n-1}(a)F_{2n}(a) \\ 2F_{2n}(a)F_{2n+1}(a) & F_{2n}^2(a) + F_{2n-1}(a)F_{2n+1}(a) \end{bmatrix}$$

biçiminde $(B_aA_a)^n(A_aB_a)^n$ matrisinin genel formu elde edilir.□

Elde edilen $(B_aA_a)^n(A_aB_a)^n$ matrisinin genel formuyla, Fibonacci polinomların kökleri arasındaki ilişkiyi sırasıyla; $F_{2n+1}(a) = 0$, $F_{2n}(a) = 0$ ve $F_{2n-1}(a) = 0$ durumları için inceleyeceğiz.

4.1.8 Sonuç : $F_{2n+1}(a) = 0$ iken,

i) $(B_aA_a)^n(A_aB_a)^n$ üst üçgen matristir.

ii) $(B_aA_a)^n(A_aB_a)^n$ ile A_a değişmelidir.

iii) $(B_aA_a)^n(A_aB_a)^n$ ile B_a değişmeli değildir.

İspat :

i) $(B_aA_a)^n(A_aB_a)^n$ matrisinin genel formu olan;

$$\begin{bmatrix} F_{2n-1}(a)F_{2n+1}(a) + F_{2n}^2(a) & 2F_{2n-1}(a)F_{2n}(a) \\ 2F_{2n}(a)F_{2n+1}(a) & F_{2n}^2(a) + F_{2n-1}(a)F_{2n+1}(a) \end{bmatrix} \text{ ifadesinde,}$$

$F_{2n+1}(a) = 0$ alındığında;

$$(B_aA_a)^n(A_aB_a)^n = \begin{bmatrix} F_{2n}^2(a) & 2F_{2n-1}(a)F_{2n}(a) \\ 0 & F_{2n}^2(a) \end{bmatrix} \text{ elde edilir.}$$

Böylece $(B_aA_a)^n(A_aB_a)^n$ matrisinin üst üçgen matris olduğu görülür.

ii) $F_{2n+1}(a) = 0$ iken, $(B_aA_a)^n(A_aB_a)^n$ matrisi ile A_a 'nın değişmeli olduğunu ispatlamak için; $(B_aA_a)^n(A_aB_a)^nA_a = A_a(B_aA_a)^n(A_aB_a)^n$ olduğunu göstermemiz gerekir. Bunun için öncelikle $(B_aA_a)^n(A_aB_a)^nA_a$ matrisinin eşitini bulalım. $F_{2n+1}(a) = 0$ iken,

$$(B_aA_a)^n(A_aB_a)^n = \begin{bmatrix} F_{2n}^2(a) & 2F_{2n-1}(a)F_{2n}(a) \\ 0 & F_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$$

olduğunu biliyoruz. Bu durumda,

$$(B_aA_a)^n(A_aB_a)^nA_a = \begin{bmatrix} F_{2n}^2(a) & 2F_{2n-1}(a)F_{2n}(a) \\ 0 & F_{2n}^2(a) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F_{2n}^2(a) & aF_{2n}^2(a) + 2F_{2n-1}(a)F_{2n}(a) \\ 0 & F_{2n}^2(a) \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

$A_a(B_aA_a)^n(A_aB_a)^n$ ise $F_{2n+1}(a) = 0$ koşulu ile,

$$A_a(B_aA_a)^n(A_aB_a)^n = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_{2n}^2(a) & 2F_{2n-1}(a)F_{2n}(a) \\ 0 & F_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F_{2n}^2(a) & aF_{2n}^2(a) + 2F_{2n-1}(a)F_{2n}(a) \\ 0 & F_{2n}^2(a) \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

Böylece, $F_{2n+1}(a) = 0$ iken,

$(B_aA_a)^n(A_aB_a)^nA_a = A_a(B_aA_a)^n(A_aB_a)^n$ olduğu görülür. Yani bu koşulda,

$(B_aA_a)^n(A_aB_a)^n$ ile A_a değişmelidir.

iii) $F_{2n+1}(a) = 0$ iken,

$(B_aA_a)^n(A_aB_a)^n = \begin{bmatrix} F_{2n}^2(a) & 2F_{2n-1}(a)F_{2n}(a) \\ 0 & F_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$ olduğunu biliyoruz. Bu durumda,

$$(B_aA_a)^n(A_aB_a)^nB_a = \begin{bmatrix} F_{2n}^2(a) & 2F_{2n-1}(a)F_{2n}(a) \\ 0 & F_{2n}^2(a) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F_{2n}^2(a) + 2aF_{2n-1}(a)F_{2n}(a) & 2F_{2n-1}(a)F_{2n}(a) \\ aF_{2n}^2(a) & F_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$$

olur. $B_a(B_aA_a)^n(A_aB_a)^n$ ise $F_{2n+1}(a) = 0$ koşulu ile,

$$B_a(B_aA_a)^n(A_aB_a)^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_{2n}^2(a) & 2F_{2n-1}(a)F_{2n}(a) \\ 0 & F_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F_{2n}^2(a) & 2F_{2n-1}(a)F_{2n}(a) \\ aF_{2n}^2(a) & 2aF_{2n-1}(a)F_{2n}(a) + F_{2n}^2(a) \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

Böylece, $F_{2n+1}(a) = 0$ iken,

$(B_aA_a)^n(A_aB_a)^nB_a = B_a(B_aA_a)^n(A_aB_a)^n$ olması için; $2aF_{2n-1}(a)F_{2n}(a) = 0$ olması gerekir. Ancak Sonuç 3.2.10'dan $F_{2n+1}(a)$ iken, $aF_{2n-1}(a)F_{2n}(a) \neq 0$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla bu koşulda $2aF_{2n-1}(a)F_{2n}(a) \neq 0$ olacağı açıkça görülür. Böylece $F_{2n+1}(a) = 0$ iken, $(B_aA_a)^n(A_aB_a)^n$ ile B_a değişmeli değildir.

4.1.9 Sonuç : $F_{2n}(a) = 0$ iken,

i) $(B_a A_a)^n (A_a B_a)^n$ birim matristir.

ii) $(B_a A_a)^n (A_a B_a)^n$ ile A_a değişmelidir.

iii) $(B_a A_a)^n (A_a B_a)^n$ ile B_a değişmelidir.

İspat:

i) $(B_a A_a)^n (A_a B_a)^n$ matrisinin genel formu olan;

$$\begin{bmatrix} F_{2n-1}(a)F_{2n+1}(a) + F_{2n}^2(a) & 2F_{2n-1}(a)F_{2n}(a) \\ 2F_{2n}(a)F_{2n+1}(a) & F_{2n}^2(a) + F_{2n-1}(a)F_{2n+1}(a) \end{bmatrix}$$ ifadesinde,

$F_{2n}(a) = 0$ alındığında;

$$(B_a A_a)^n (A_a B_a)^n = \begin{bmatrix} F_{2n-1}(a)F_{2n+1}(a) & 0 \\ 0 & F_{2n-1}(a)F_{2n+1}(a) \end{bmatrix}$$ elde edilir.

Sonuç 3.2.2'den $F_{2n}(a) = 0$ iken, $F_{2n-1}(a)F_{2n+1}(a) = 1$ olduğunu biliyoruz. Böylece, $F_{2n}(a) = 0$ iken,

$$(B_a A_a)^n (A_a B_a)^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \text{ I}$$ olduğu görülür.

ii) $F_{2n}(a) = 0$ iken, $(B_a A_a)^n (A_a B_a)^n = \text{ I}$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $F_{2n}(a) = 0$ koşulunda $(B_a A_a)^n (A_a B_a)^n$ ile A_a 'nın değişmeli olduğu açıktır.

iii) $F_{2n}(a) = 0$ iken, $(B_a A_a)^n (A_a B_a)^n = \text{ I}$ olduğundan $(B_a A_a)^n (A_a B_a)^n$ ile B_a'nın değişmeli olduğu açıkça görülür.

4.1.10 Sonuç : $F_{2n-1}(a) = 0$ iken,

i) $(B_a A_a)^n (A_a B_a)^n$ alt üçgen matristir.

ii) $(B_a A_a)^n (A_a B_a)^n$ ile A_a değişmeli değildir.

iii) $(B_a A_a)^n (A_a B_a)^n$ ile B_a değişmelidir.

İspat:

i) $(B_a A_a)^n (A_a B_a)^n$ matrisinin genel formu olan;

$$\begin{bmatrix} F_{2n-1}(a)F_{2n+1}(a) + F_{2n}^2(a) & 2F_{2n-1}(a)F_{2n}(a) \\ 2F_{2n}(a)F_{2n+1}(a) & F_{2n}^2(a) + F_{2n-1}(a)F_{2n+1}(a) \end{bmatrix}$$ ifadesinde,

$F_{2n-1}(a) = 0$ alındığında,

$$(B_aA_a)^n(A_aB_a)^n = \begin{bmatrix} F_{2n}^2(a) & 0 \\ 2F_{2n+1}(a)F_{2n}(a) & F_{2n}^2(a) \end{bmatrix} \text{elde edilir.}$$

Böylece $(B_aA_a)^n(A_aB_a)^n$ matrisinin alt üçgen matris olduğu görülür.

ii) $F_{2n-1}(a) = 0$ iken,

$(B_aA_a)^n(A_aB_a)^n = \begin{bmatrix} F_{2n}^2\ (a) & 0 \\ 2F_{2n+1}(a)F_{2n}(a) & F_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$ olduğunu biliyoruz. Bu durumda,

$$(B_aA_a)^n(A_aB_a)^nA_a = \begin{bmatrix} F_{2n}^2(a) & 0 \\ 2F_{2n+1}(a)F_{2n}(a) & F_{2n}^2(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F_{2n}^2(a) & aF_{2n}^2(a) \\ 2F_{2n+1}(a)F_{2n}(a) & 2aF_{2n+1}(a)F_{2n}(a) + F_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$$

olur. $A_a(B_aA_a)^n(A_aB_a)^n$ ise $F_{2n-1}(a) = 0$ koşulu ile,

$$A_a(B_aA_a)^n(A_aB_a)^n = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{2n}^2(a) & 0 \\ 2F_{2n+1}(a)F_{2n}(a) & F_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2aF_{2n+1}(a)F_{2n}(a) + F_{2n}^2(a) & aF_{2n}^2(a) \\ 2F_{2n+1}(a)F_{2n}(a) & F_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$$

olur. Böylece, $F_{2n-1}(a) = 0$ iken,

$(B_aA_a)^n(A_aB_a)^nA_a = A_a(B_aA_a)^n(A_aB_a)^n$ olması için; $2aF_{2n+1}(a)F_{2n}(a) = 0$ olması gerekir. Ancak Sonuç 3.2.6'dan $F_{2n-1}(a) = 0$ iken, $aF_{2n+1}(a)F_{2n}(a) \neq 0$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla bu koşulda $2aF_{2n-1}(a)F_{2n}(a) \neq 0$ olacağı açıkça görülür. Böylece $F_{2n-1}(a) = 0$ iken, $(B_aA_a)^n(A_aB_a)^n$ ile A_a değişmeli değildir.

iii) $F_{2n-1}(a) = 0$ iken, $(B_aA_a)^n(A_aB_a)^n$ matrisi ile B_a 'nın değişmeli olduğunu ispatlamak için; $(B_aA_a)^n(A_aB_a)^nB_a = B_a(B_aA_a)^n(A_aB_a)^n$ olduğunu göstermemiz gerekir. Bunun için öncelikle $(B_aA_a)^n(A_aB_a)^nB_a$ matrisinin eşitini bulalım. $F_{2n-1}(a) = 0$ iken,

$$(B_aA_a)^n(A_aB_a)^n = \begin{bmatrix} F_{2n}^2(a) & 0 \\ 2F_{2n+1}(a)F_{2n}(a) & F_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$$

olduğunu biliyoruz. Bu durumda,

$$(B_aA_a)^n(A_aB_a)^nB_a = \begin{bmatrix} F_{2n}^2(a) & 0 \\ 2F_{2n+1}(a)F_{2n}(a) & F_{2n}^2(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F_2^2(a) & 0 \\ 2F_{2n}(a)F_{2n+1}(a) + aF_{2n}^2(a) & F_{2n}^2(a) \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

$B_a(B_aA_a)^n(A_aB_a)^n$ ise $F_{2n-1}(a) = 0$ koşulu ile,

$$B_a(B_aA_a)^n(A_aB_a)^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{2n}^2(a) & 0 \\ 2F_{2n+1}(a)F_{2n}(a) & F_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F_{2n}^2(a) & 0 \\ 2F_{2n}(a)F_{2n+1}(a) + aF_{2n}^2(a) & F_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$$

olur. Böylece, $F_{2n-1}(a) = 0$ iken, $(B_aA_a)^n(A_aB_a)^nB_a = B_a(B_aA_a)^n(A_aB_a)^n$ olduğu görülür. Yani bu koşulda $(B_aA_a)^n(A_aB_a)^n$ ile B_a değişmelidir.

$gp\ (A_a, B_a)$ grubunun üreteçleri ve bazı elemanları hakkında matris temsillerinden yararlanarak elde ettiğimiz bu özellik ve bulguların yanı sıra; $F_{2n-1}(a) = 0, F_{2n}(a) = 0$ ve $F_{2n+1}(a) = 0$ durumları için başka farklı sonuçlar da elde edebiliyoruz. $F_{2n}(a) = 0$ iken, elde edilen bazı özellikleri aşağıdaki biçimiyle belirtmek mümkündür.

4.1.11 Sonuç : $F_{2n}(a) = 0$ iken,

i) $(A_aB_a)^n = \pm \mathrm{I}$ [13]

ii) $(B_aA_a)^n = \pm \mathrm{I}$

iii) $(A_aB_a)^n(B_aA_a)^nA_a = A_a$

iv) $(A_aB_a)^n(B_aA_a)^nB_a = B_a$

v) $(B_aA_a)^n(A_aB_a)^nA_a = A_a$

vi) $(B_aA_a)^n(A_aB_a)^nB_a = B_a$

İspat :

$F_{2n}(a) = 0$ iken, $F_{2n+1}(a) = F_{2n-1}(a) = \pm 1$ olduğunu Teorem 3.2.1'den biliyoruz. Dolayısıyla bu sonuçta yer alan matris formlarında $F_{2n}(a) = 0$ iken, $F_{2n+1}(a) = F_{2n-1}(a) = \pm 1$ eşitliğinden yararlanıldığında sonuçlar açıkça görülür.

4.1.12 Uyarı : $F_{2n}(a) = 0$ iken,

$(A_aB_a)^n = \pm \mathrm{I}$ [13]

$(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n = \mathrm{I}$

$(B_aA_a)^n = \pm \mathrm{I}$

$(B_a A_a)^n (A_a B_a)^n = \mathrm{I}$

elde edilmiş olur.

Bu bölümde kullandığımız yaklaşım ile, kombinatoryal grup teorisi ve matris teorisi ile ilişkili olarak daha birçok farklı sonuç ve özelliğe ulaşmak mümkündür. Ancak bu kısmı daha fazla detaylandırmayacağız. Buna yönelik bir sonucu daha belirtip buraya kadar olan kısımda elde ettiğimiz bazı bulguları tablo halinde özetleyeceğiz.

4.1.13 Sonuç : $F_{2n+1}(a) = 0$ iken,

i) $(A_a B_a)^n A_a = B_a (A_a B_a)^n$ biçimindedir.

ii) $(B_a A_a)^n B_a = A_a (B_a A_a)^n$ biçimindedir.

İspat : $F_{2n+1}(a) = 0$ iken, $F_{2n}(a) = \pm i$ ve $F_{2n-1}(a) = \mp ai$ olduğunu Teorem 3.2.7 'de ispatlamıştık. Bu sonuçta yer alan elemanların matris formlarında $F_{2n+1}(a) = 0$ iken, $F_{2n}(a) = \pm i$ ve $F_{2n-1}(a) = \mp ai$ eşitliklerinden yararlanıldığında sonuçlar açıkça görülür.

$F_{2n+1}(a) = 0, F_{2n}(a) = 0$ ya da $F_{2n-1}(a) = 0$ koşullarında $gp\,(A_a, B_a)$ grubunun bazı elemanları hakkında elde ettiğimiz birtakım önemli özellikleri tablo halinde topluca görelim.

Tablo 4.1: Fibonacci polinomlarının kökleri ile ilişkili gruplarda üreteçlerin bazı özellikleri.

	$(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n$ $matris\ çeşidi$	$(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n$ ile A_a'$nın$ $değişmeliliği$	$(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n$ ile B_a'$nın$ $değişmeliliği$	$(B_aA_a)^n(A_aB_a)^n$ $matris\ çeşidi$	$(B_aA_a)^n(A_aB_a)^n$ ile A_a'$nın$ $değişmeliliği$	$(B_aA_a)^n(A_aB_a)^n$ ile B_a'$nın$ $değişmeliliği$
$F_{2n+1}(a) = 0$ iken,	Alt üç$gen\ matris$	$-$	$+$	Üst üç$gen\ matris$	$+$	$-$
$F_{2n}(a) = 0$ iken,	$Birim\ matris$	$+$	$+$	$Birim\ matris$	$+$	$+$
$F_{2n-1}(a) = 0$ iken,	Üst üç$gen\ matris$	$+$	$-$	Alt üç$gen\ matris$	$-$	$+$

Tablo 4.2: Fibonacci polinomlarının kökleri ile ilişkili gruplarda bazı elemanların matris temsilleri.

	$(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n$	$(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n$ *ile* A_a	$(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n$ *ile* B_a	$(B_aA_a)^n(A_aB_a)^n$	$(B_aA_a)^n(A_aB_a)^n$ *ile* A_a	$(B_aA_a)^n(A_aB_a)^n$ *ile* B_a
$F_{2n+1}(a)=0$ iken,	$\begin{bmatrix} F_{2n}^2(a) & 0 \\ 2F_{2n-1}(a)F_{2n}(a) & F_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} F_{2n}^2(a) & aF_{2n}^2(a) \\ 2F_{2n-1}(a)F_{2n}(a) & 2aF_{2n-1}(a)F_{2n}(a)+F_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2aF_{2n-1}(a)F_{2n}(a)+F_{2n}^2(a) & aF_{2n}^2(a) \\ 2F_{2n-1}(a)F_{2n}(a) & F_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} F_{2n}^2(a) & 0 \\ 2F_{2n-1}(a)F_{2n}(a)+aF_{2n}^2(a) & F_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} F_{2n}^2(a) & 2F_{2n-1}(a)F_{2n}(a) \\ 0 & F_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} F_{2n}^2(a) & aF_{2n}^2(a)+2F_{2n-1}(a)F_{2n}(a) \\ 0 & F_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} F_{2n}^2(a)+2aF_{2n-1}(a)F_{2n}(a) & 2F_{2n-1}(a)F_{2n}(a) \\ aF_{2n}^2(a) & F_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} F_{2n}^2(a) & 2F_{2n-1}(a)F_{2n}(a) \\ aF_{2n}^2(a) & 2aF_{2n-1}(a)F_{2n}(a)+F_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$
$F_{2n}(a)=0$ iken,	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$
$F_{2n-1}(a)=0$ iken,	$\begin{bmatrix} F_{2n}^2(a) & 2F_{2n}(a)F_{2n+1}(a) \\ 0 & F_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} F_{2n}^2(a) & 2F_{2n}(a)F_{2n+1}(a)+aF_{2n}^2(a) \\ 0 & F_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} F_{2n}^2(a)+2aF_{2n}(a)F_{2n+1}(a) & 2F_{2n}(a)F_{2n+1}(a) \\ aF_{2n}^2(a) & F_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} F_{2n}^2(a) & 2F_{2n}(a)F_{2n+1}(a) \\ aF_{2n}^2(a) & 2aF_{2n}(a)F_{2n+1}(a)+F_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} F_{2n}^2(a) & 0 \\ 2F_{2n+1}(a)F_{2n}(a) & F_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} F_{2n}^2(a) & aF_{2n}^2(a) \\ 2F_{2n+1}(a)F_{2n}(a) & 2aF_{2n+1}(a)F_{2n}(a)+F_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2aF_{2n+1}(a)F_{2n}(a)+F_{2n}^2(a) & aF_{2n}^2(a) \\ 2F_{2n+1}(a)F_{2n}(a) & F_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} F_{2n}^2(a) & 0 \\ 2F_{2n}(a)F_{2n+1}(a)+aF_{2n}^2(a) & F_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$

4.1.14 Uyarı : Bu tabloda iki satıra ayrılmış olan kısımlarda ilgili elemanlar arasında değişme özelliği bulunmamaktadır. Dolayısıyla bu oluşan iki yeni satırdan üstteki, o ilgili hücredeki elemanlardan üreteç olanın diğer eleman ile sağdan çarpımının sonucunu göstermektedir. Alttaki ise, ilgili hücredeki elemanlardan üreteç olanın diğer eleman ile soldan çarpımının sonucunu göstermektedir.

Ayrıca, Teorem 3.2.1, Teorem 3.2.3 ve Teorem 3.2.7'den;

$$F_{2n}(a) = 0 \text{ iken, } F_{2n+1}(a) = F_{2n-1}(a) = \pm 1$$

$$F_{2n-1}(a) = 0 \text{ iken, } F_{2n}(a) = \pm i \text{ ve } F_{2n+1}(a) = \pm ai$$

$$F_{2n+1}(a) = 0 \text{ iken, } F_{2n}(a) = \pm i \text{ ve } F_{2n-1}(a) = \mp ai$$

olduğunu biliyoruz. Bu bölümün buraya kadar olan kısmında elde ettiğimiz matris formlarını önceki bölümdeki bu teoremlerle birlikte ele aldığımızda matris formlarını daha sade bir biçimde ifade etmek mümkün hale gelecektir. Bununla birlikte elde ettiğimiz bu önermeler, matris formlarındaki matris ögelerinin Fibonacci polinomunun kökü ile olan ilişkisini de ilginç bir biçimde ortaya koyacaktır. Sırasıyla; $F_{2n+1}(x), F_{2n}(x)$ ve $F_{2n-1}(x)$ polinomlarının köklerinin, bu bölümde belirttiğimiz matris formlarındaki durumlarını inceleyelim.

4.1.15 Sonuç : $F_{2n+1}(a) = 0$ iken,

i) $(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2a & -1 \end{bmatrix}$

ii) $(A_aB_a)^n(B_aA_a)^nA_a = \begin{bmatrix} -1 & -a \\ 2a & 2a^2-1 \end{bmatrix}$

iii) $A_a(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n = \begin{bmatrix} 2a^2-1 & -a \\ 2a & -1 \end{bmatrix}$

iv) $(A_aB_a)^n(B_aA_a)^nB_a = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ a & -1 \end{bmatrix}$

v) $(B_aA_a)^n(A_aB_a)^n = \begin{bmatrix} -1 & 2a \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

vi) $(B_aA_a)^n(A_aB_a)^nA_a = \begin{bmatrix} -1 & a \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

vii) $(B_aA_a)^n(A_aB_a)^nB_a = \begin{bmatrix} 2a^2-1 & 2a \\ -a & -1 \end{bmatrix}$

viii) $B_a(B_aA_a)^n(A_aB_a)^n = \begin{bmatrix} -1 & 2a \\ -a & 2a^2-1 \end{bmatrix}$

4.1.16 Sonuç : $F_{2n}(a) = 0$ iken,

i) $(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

ii) $(A_aB_a)^n(B_aA_a)^nA_a = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

iii) $(A_aB_a)^n(B_aA_a)^nB_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$

iv) $(B_aA_a)^n(A_aB_a)^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

v) $(B_aA_a)^n(A_aB_a)^nA_a = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

vi) $(B_aA_a)^n(A_aB_a)^nB_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$

4.1.17 Sonuç : $F_{2n-1}(a) = 0$ iken,

i) $(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n = \begin{bmatrix} -1 & -2a \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

ii) $(A_aB_a)^n(B_aA_a)^nA_a = \begin{bmatrix} -1 & -3a \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

iii) $(A_aB_a)^n(B_aA_a)^nB_a = \begin{bmatrix} -2a^2 - 1 & -2a \\ -a & -1 \end{bmatrix}$

iv) $B_a\,(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n = \begin{bmatrix} -1 & -2a \\ -a & -2a^2 - 1 \end{bmatrix}$

v) $(B_aA_a)^n(A_aB_a)^n = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2a & -1 \end{bmatrix}$

vi) $(B_aA_a)^n(A_aB_a)^nA_a = \begin{bmatrix} -1 & -a \\ -2a & -2a^2 - 1 \end{bmatrix}$

vii) $A_a(B_aA_a)^n(A_aB_a)^n = \begin{bmatrix} -2a^2 - 1 & -a \\ -2a & -1 \end{bmatrix}$

viii) $(B_aA_a)^n(A_aB_a)^nB_a = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -3a & -1 \end{bmatrix}$

Yukarıdaki 4.1.15, 4.1.16 ve 4.1.17 sonuçlarındaki bulguları aşağıdaki tablo yardımıyla topluca görelim.

Tablo 4.3: Fibonacci polinomlarının kökleri ile ilişkili gruplarda bazı elemanların genel formu.

	$(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n$	$(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n$ *ile* A_a	$(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n$ *ile* B_a	$(B_aA_a)^n(A_aB_a)^n$	$(B_aA_a)^n(A_aB_a)^n$ *ile* A_a	$(B_aA_a)^n(A_aB_a)^n$ *ile* B_a
$F_{2n+1}(a)=0$ iken,	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2a & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -a \\ 2a & 2a^2-1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2a^2-1 & -a \\ 2a & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ a & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 2a \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & a \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2a^2-1 & 2a \\ -a & -1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -1 & 2a \\ -a & 2a^2-1 \end{bmatrix}$
$F_{2n}(a)=0$ iken,	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$
$F_{2n-1}(a)=0$ iken,	$\begin{bmatrix} -1 & -2a \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -3a \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2a^2-1 & -2a \\ -a & -1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -1 & -2a \\ -a & -2a^2-1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2a & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -a \\ -2a & -2a^2-1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -2a^2-1 & -a \\ -2a & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -3a & -1 \end{bmatrix}$

4.1.18 Uyarı : Bu tabloda iki satıra ayrılmış olan kısımlarda ilgili elemanlar arasında değişme özelliği bulunmamaktadır. Dolayısıyla bu oluşan iki yeni satırdan üstteki, o ilgili hücredeki elemanlardan üreteç olanın diğer eleman ile sağdan çarpımının sonucunu göstermektedir. Alttaki ise, ilgili hücredeki elemanlardan üreteç olanın diğer eleman ile soldan çarpımının sonucunu göstermektedir.

Elde ettiğimiz 4.1.15, 4.1.16 ve 4.1.17 sonuçlarından yararlanarak $gp\ (A_a, B_a)$ grubunun bazı elemanlarının matris temsillerine ilişkin, iz, transpoze, ters… gibi daha birçok özellik ile ilgili bulgu elde etmek mümkündür. Ancak bu kısmı daha fazla detaylandırmayacağız. Sadece birkaç özellik ile ilgili sonucu verip bu bölümün diğer kısmına geçeceğiz.

4.1.19 Sonuç : $a \in \mathbb{C}$ iken, $[(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n]^t = (B_aA_a)^n(A_aB_a)^n$

4.1.20 Sonuç :

i) $F_{2n+1}(a) = 0$ iken,

$$[(A_aB_a)^n(B_aA_a)^nB_a]^t = [B_a(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n]^t = A_a(B_aA_a)^n(A_aB_a)^n = (B_aA_a)^n(A_aB_a)^nA_a$$

ii) $F_{2n}(a) = 0$ iken,

$$[(A_aB_a)^n(B_aA_a)^nB_a]^t = [B_a(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n]^t = A_a(B_aA_a)^n(A_aB_a)^n = (B_aA_a)^n(A_aB_a)^nA_a$$

iii) $F_{2n-1}(a) = 0$

$$[(A_aB_a)^n(B_aA_a)^nB_a]^t = A_a(B_aA_a)^n(A_aB_a)^n$$

$$[B_a(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n]^t = (B_aA_a)^n(A_aB_a)^nA_a$$

4.1.21 Sonuç :

i) $F_{2n-1}(a) = 0$ iken,

$$[(A_aB_a)^n(B_aA_a)^nA_a]^t = [A_a(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n]^t = B_a(B_aA_a)^n(A_aB_a)^n = (B_aA_a)^n(A_aB_a)^nB_a$$

ii) $F_{2n}(a) = 0$ iken,

$$[(A_aB_a)^n(B_aA_a)^nA_a]^t = [A_a(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n]^t = B_a(B_aA_a)^n(A_aB_a)^n = (B_aA_a)^n(A_aB_a)^nB_a$$

iii) $F_{2n+1}(a) = 0$ iken,

$$[(A_aB_a)^n(B_aA_a)^nA_a]^t = B_a(B_aA_a)^n(A_aB_a)^n$$

$$[A_a(A_aB_a)^n(B_aA_a)^n]^t = (B_aA_a)^n(A_aB_a)^nB_a$$

4.1.22 Sonuç : Bu kısımda a, Fibonacci polinomunun kökü olmak üzere, $gp\ (A_a, B_a)$ grubunun bazı elemanlarının sahip olduğu özellikleri ve grubun elemanları arasındaki birtakım ilişkileri elemanların matris temsillerinden yararlanarak ortaya koyduk. Dolayısıyla $gp\ (A_a, B_a)$ grubunun serbest grup olmadığı, grubun elemanları arasında elde edilen bu bağıntılar gereğince açıkça görülür.

4.2 Lucas Polinomlarının Kökleri ile Bazı Üreteç Matrisler Arasındaki İlişkiler

Çalışmamızın bu kısmında Lucas polinomları ile ilişkili olarak elde ettiğimiz yeni üreteç matrisleri tanıtacağız. Bu üreteç matrisleri Lucas polinomlarının kökleri ile ilişkilendirip bazı matrisler hakkında elde ettiğimiz birtakım özgün bulguları sunacağız. Bununla birlikte, 3. bölümde elde ettiğimiz bazı teoremlerden yararlanarak Lucas polinomlarının kökleri ile ilişkili olan yeni matris formlarını daha sade bir biçimde elde edeceğiz. Lucas polinomları ile matrisler arasındaki ilişkileri kurabilmek için ilk kez tanımlanan birçok açıklamaya yer verdik. Dolayısıyla bu kısım tamamen özgün çalışmaları içermektedir. Ayrıca elde ettiğimiz bu orijinal bulgular [53] yayına sunulmuştur.

Bu kısım için gerekli olan ve daha önceki bölümlerde detaylı bir biçimde açıkladığımız Lucas polinomunu ve Lucas polinomunun kök formülünü hatırlatalım. Lucas polinomları;

$$L_0(x) = 2\ , L_1(x) = x$$
$$L_n(x) = xL_{n-1}(x) + L_{n-2}(x)\ \ ; n \geq 2$$

biçimindeki başlangıç koşulları ve tekrarlama bağıntısı ile tanımlanır.

Ayrıca bu kısımda çalışmamız için gerekli olan, Koshy'nin [3] numaralı çalışmasında yer alan iki eşitliği aşağıda biçimiyle belirtelim ve çalışmamız için elde ettiğimiz önemli bir eşitliği ifade edelim.

$$L_n(x) = F_{n+1}(x) + F_{n-1}(x)$$

Bu eşitliğin ispatı matematiksel tümevarım yöntemi ile yapılabilir. Bununla birlikte bu eşitlikte Fibonacci polinomunun tekrarlama bağıntısı $F_{n+1}(x)$ için uygulandığında,

$$L_n(x) = xF_n(x) + 2F_{n-1}(x)$$

elde edileceği görülür. Önceki kısımda Fibonacci polinomlarında yaptığımız incelemeleri Lucas polinomlarında da yapabilmek için, Fibonacci polinomlarında elde edilen yapılardan Lucas polinomlarına geçişi sağlayacak önemli bir eşitliği elde ettik. Bu eşitlik şu şekildedir:

$$2F_{2n+1}(x) - xF_{2n}(x) = F_{2n+1}(x) + F_{2n-1}(x) = L_{2n}(x)$$

Bu eşitliği, Fibonacci polinomunun tekrarlama bağıntısını ve $L_n(x) = F_{n+1}(x) + F_{n-1}(x)$ eşitliğini kullanarak ispatlamak mümkündür.

Ayrıca; Lucas polinomunlarının, karmaşık hiperbolik fonksiyonlar cinsinden temsilinin ve genel kök formülünün aşağıdaki biçimde olduğu bilinmektedir:

$$L_n(x) = 2i^n \cosh nz$$

$$L_n(x) = 0 \ : x = 2i \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n} \ , k = 0, 1, \dots, n-1$$

Fibonacci polinomları ile ilgili olan önceki kısımda;

$$A_x = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } B_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix}$$

biçiminde genel matris temsiline sahip iki üreteçli lineer gruplarla çalıştık. Lucas polinomları ile ilgili çalışmalar yapacağımız bu kısımda ise önceki kısımda elde ettiğimiz matris yapılarındaki bulguların benzerlerini elde edebilmek için, birtakım yeni matrislere gereksinim duyulmuştur. Burada kullandığımız üreteç matrisler tamamen orijinaldir.

4.2.1 Teorem : $A_x = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix}$ ve $C_x = \begin{bmatrix} x & 2 \\ 2 & -x \end{bmatrix}$ olmak üzere,

$$C_x(A_xB_x)^n = \begin{bmatrix} L_{2n+1}(x) & L_{2n}(x) \\ L_{2n}(x) & L_{2n-1}(x) \end{bmatrix}$$

biçimindedir.

İspat : $(A_xB_x)^n = \begin{bmatrix} F_{2n+1}(x) & F_{2n}(x) \\ F_{2n}(x) & F_{2n-1}(x) \end{bmatrix}$ olduğunu Teorem 4.1.1'den biliyoruz. Dolayısıyla,

$$C_x(A_xB_x)^n = \begin{bmatrix} x & 2 \\ 2 & -x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{2n+1}(x) & F_{2n}(x) \\ F_{2n}(x) & F_{2n-1}(x) \end{bmatrix}$$

$$C_x(A_xB_x)^n = \begin{bmatrix} xF_{2n+1}(x) + 2F_{2n}(x) & xF_{2n}(x) + 2F_{2n-1}(x) \\ 2F_{2n+1}(x) - xF_{2n}(x) & 2F_{2n}(x) - xF_{2n-1}(x) \end{bmatrix}$$

$$C_x(A_xB_x)^n = \begin{bmatrix} F_{2n+2}(x) + F_{2n}(x) & F_{2n+1}(x) + F_{2n-1}(x) \\ F_{2n+1}(x) + F_{2n-1}(x) & F_{2n}(x) + F_{2n-2}(x) \end{bmatrix}$$

$$C_x(A_xB_x)^n = \begin{bmatrix} L_{2n+1}(x) & L_{2n}(x) \\ L_{2n}(x) & L_{2n-1}(x) \end{bmatrix}$$

elde edilir.□

4.2.2 Sonuç : $(A_xB_x)^n$ ile C_x değişmelidir. Yani;

$$(A_xB_x)^n C_x = C_x(A_xB_x)^n$$

4.2.3 Teorem : $A_x = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix}$ ve $C_x{}^* = \begin{bmatrix} -x & 2 \\ 2 & x \end{bmatrix}$ olmak üzere,

$$(B_xA_x)^n C_x{}^* = \begin{bmatrix} L_{2n-1}(x) & L_{2n}(x) \\ L_{2n}(x) & L_{2n+1}(x) \end{bmatrix}$$

biçimindedir.

İspat : $(\boldsymbol{B_xA_x})^{\boldsymbol{n}} = \begin{bmatrix} F_{2n-1}(x) & F_{2n}(x) \\ F_{2n}(x) & F_{2n+1}(x) \end{bmatrix}$ olduğunu Teorem 4.1.2'den biliyoruz. Dolayısıyla,

$$(B_xA_x)^n C_x{}^* = \begin{bmatrix} F_{2n-1}(x) & F_{2n}(x) \\ F_{2n}(x) & F_{2n+1}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x & 2 \\ 2 & x \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -xF_{2n-1}(x) + 2F_{2n}(x) & 2F_{2n-1}(x) + xF_{2n}(x) \\ -xF_{2n}(x) + 2F_{2n+1}(x) & 2F_{2n}(x) + xF_{2n+1}(x) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} xF_{2n-1}(x) + 2F_{2n-2}(x) & F_{2n+1}(x) + F_{2n-1}(x) \\ xF_{2n}(x) + 2F_{2n-1}(x) & F_{2n+2}(x) + F_{2n}(x) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} L_{2n-1}(x) & L_{2n}(x) \\ L_{2n}(x) & L_{2n+1}(x) \end{bmatrix}$$

elde edilir.□

4.2.4 Sonuç : $(B_xA_x)^n$ ile $C_x{}^*$ değişmelidir. Yani;

$$(B_xA_x)^n C_x{}^* = C_x{}^*(B_xA_x)^n$$

4.2.5 Teorem: $A_x = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix}$, $C_x = \begin{bmatrix} x & 2 \\ 2 & -x \end{bmatrix}$ ve $C_x{}^* = \begin{bmatrix} -x & 2 \\ 2 & x \end{bmatrix}$ olmak üzere,

$$C_x(A_xB_x)^n(B_xA_x)^n C_x{}^* = \begin{bmatrix} L_{2n-1}(x)L_{2n+1}(x) + L_{2n}^2(x) & 2L_{2n}(x)L_{2n+1}(x) \\ 2L_{2n-1}(x)L_{2n}(x) & L_{2n}^2(x) + L_{2n-1}(x)L_{2n+1}(x) \end{bmatrix}$$

biçimindedir.

İspat : $C_x(A_xB_x)^n = \begin{bmatrix} L_{2n+1}(x) & L_{2n}(x) \\ L_{2n}(x) & L_{2n-1}(x) \end{bmatrix}$ ve

$(B_xA_x)^n C_x{}^* = \begin{bmatrix} L_{2n-1}(x) & L_{2n}(x) \\ L_{2n}(x) & L_{2n+1}(x) \end{bmatrix}$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla,

$$C_x(A_xB_x)^n(B_xA_x)^n C_x{}^* = \begin{bmatrix} L_{2n+1}(x) & L_{2n}(x) \\ L_{2n}(x) & L_{2n-1}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{2n-1}(x) & L_{2n}(x) \\ L_{2n}(x) & L_{2n+1}(x) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} L_{2n-1}(x)L_{2n+1}(x) + L_{2n}^2(x) & 2L_{2n}(x)L_{2n+1}(x) \\ 2L_{2n-1}(x)L_{2n}(x) & L_{2n}^2(x) + L_{2n-1}(x)L_{2n+1}(x) \end{bmatrix}$$

elde edilir.□

4.2.6 Uyarı : Çalışmamızda $C_x(A_xB_x)^n(B_xA_x)^n C_x{}^*$matrisini,

$$C_x(A_xB_x)^n(B_xA_x)^n C_x{}^* = D_x$$

biçiminde ifade edeceğiz.

Elde ettiğimiz $C_x(A_xB_x)^n(B_xA_x)^n C_x{}^* = D_x$ matrisinin genel formuyla, Lucas polinomların kökleri arasındaki ilişkiyi $x = a$ olarak alıp sırasıyla; $L_{2n+1}(a) = 0$, $L_{2n}(a) = 0$ ve $L_{2n-1}(a) = 0$ durumları için inceleyeceğiz.

4.2.7 Sonuç : $L_{2n+1}(a) = 0$ iken,

i) D_a alt üçgen matristir.

ii) D_a ile A_a değişmeli değildir. $(a \neq 0)$

iii) D_a ile B_a değişmelidir.

İspat :

i) D_a'nın genel formu olan;

$$\begin{bmatrix} L_{2n-1}(a)L_{2n+1}(a)+L_{2n}^2(a) & 2L_{2n}(a)L_{2n+1}(a) \\ 2L_{2n-1}(a)L_{2n}(a) & L_{2n}^2(a)+L_{2n-1}(a)L_{2n+1}(a) \end{bmatrix}$$ ifadesinde;

$L_{2n+1}(a)=0$ alındığında,

$$D_a=\begin{bmatrix} L_{2n}^2(a) & 0 \\ 2L_{2n-1}(a)L_{2n}(a) & L_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece D_a matrisinin alt üçgen matris olduğu görülür.

ii) $L_{2n+1}(a)=0$ iken,

$D_a=\begin{bmatrix} L_{2n}^2(a) & 0 \\ 2L_{2n-1}(a)L_{2n}(a) & L_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$ olduğunu biliyoruz. Bu durumda,

$$D_aA_a=\begin{bmatrix} L_{2n}^2(a) & 0 \\ 2L_{2n-1}(a)L_{2n}(a) & L_{2n}^2(a) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} L_{2n}^2(a) & aL_{2n}^2(a) \\ 2L_{2n-1}(a)L_{2n}(a) & 2aL_{2n-1}(a)L_{2n}(a)+L_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$$ olur.

A_aD_a ise $L_{2n+1}(a)=0$ koşulu ile,

$$A_aD_a=\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} L_{2n}^2(a) & 0 \\ 2L_{2n-1}(a)L_{2n}(a) & L_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2aL_{2n-1}(a)L_{2n}(a)+L_{2n}^2(a) & aL_{2n}^2(a) \\ 2L_{2n-1}(a)L_{2n}(a) & L_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$$

olur. Böylece, $L_{2n+1}(a)=0$ iken, $D_aA_a=A_aD_a$ olması için, $2aL_{2n-1}(a)L_{2n}(a)=0$ olması gerekir. Ancak Sonuç 3.2.20'den $a\neq 0$ ve $L_{2n+1}(a)$ iken, $aL_{2n-1}(a)L_{2n}(a)\neq 0$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla bu koşulda $2aL_{2n-1}(a)L_{2n}(a)\neq 0$ olacağı sıfır bölensizlik gereğince görülür. Böylece $a\neq 0$ ve $L_{2n+1}(a)=0$ iken, D_a ile A_a değişmeli değildir.

iii) $L_{2n+1}(a)=0$ iken, D_a matrisi ile B_a'nın değişmeli olduğunu ispatlamak için, $D_aB_a=B_aD_a$ olduğunu göstermemiz gerekir. Bunun için öncelikle D_aB_a matrisinin eşitini bulalım. $L_{2n+1}(a)=0$ iken,

$D_a=\begin{bmatrix} L_{2n}^2(a) & 0 \\ 2L_{2n-1}(a)L_{2n}(a) & L_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$ olduğunu biliyoruz. Bu durumda,

$$D_aB_a = \begin{bmatrix} L_{2n}^2(a) & 0 \\ 2L_{2n-1}(a)L_{2n}(a) & L_{2n}^2(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} L_{2n}^2(a) & 0 \\ 2L_{2n-1}(a)L_{2n}(a) + aL_{2n}^2(a) & L_{2n}^2(a) \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

B_aD_a ise $L_{2n+1}(a) = 0$ koşulu ile,

$$B_aD_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{2n}^2(a) & 0 \\ 2L_{2n-1}(a)L_{2n}(a) & L_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} L_{2n}^2(a) & 0 \\ 2L_{2n-1}(a)L_{2n}(a) + aL_{2n}^2(a) & L_{2n}^2(a) \end{bmatrix} \text{olur.}$$

Böylece, $L_{2n+1}(a) = 0$ iken, $D_aB_a = B_aD_a$ olduğu görülür. Yani bu koşulda, D_a ile B_a değişmelidir.

4.2.8 Sonuç : $L_{2n}(a) = 0$ iken,

i) D_a skaler matristir.

ii) D_a ile A_a değişmelidir.

iii) D_a ile B_a değişmelidir.

İspat :

i) D_a'nın genel formu olan;

$$\begin{bmatrix} L_{2n-1}(a)L_{2n+1}(a) + L_{2n}^2(a) & 2L_{2n}(a)L_{2n+1}(a) \\ 2L_{2n-1}(a)L_{2n}(a) & L_{2n}^2(a) + L_{2n-1}(a)L_{2n+1}(a) \end{bmatrix}$$

ifadesinde $L_{2n}(a) = 0$ alındığında;

$$D_a = \begin{bmatrix} L_{2n-1}(a)L_{2n+1}(a) & 0 \\ 0 & L_{2n-1}(a)L_{2n+1}(a) \end{bmatrix}$$

elde edilir. Sonuç 3.2.12'den $L_{2n}(a) = 0$ iken, $L_{2n-1}(a)L_{2n+1}(a) = -a^2 - 4$ olduğunu biliyoruz. Böylece,

$$D_a = \begin{bmatrix} -a^2 - 4 & 0 \\ 0 & -a^2 - 4 \end{bmatrix} = (-a^2 - 4) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

biçiminde skaler matrisi elde edilir.

ii) $L_{2n}(a) = 0$ iken $D_a = (-a^2 - 4)\mathrm{I}$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla D_a skaler matrisi ile A_a'nın değişmeli olduğu açıktır.

iii) $L_{2n}(a) = 0$ iken $D_a = (-a^2 - 4)\mathrm{I}$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $L_{2n}(a) = 0$ koşulunda D_a ile B_a'nın değişmeli olduğu açıkça görülür.

4.2.9 Sonuç : $L_{2n-1}(a) = 0$ iken,

i) D_a üst üçgen matristir.

ii) D_a ile A_a değişmelidir.

iii) D_a ile B_a değişmeli değildir. $(a \neq 0)$

İspat :

i) D_a'nın genel formu olan;

$$\begin{bmatrix} L_{2n-1}(a)L_{2n+1}(a) + L_{2n}^2(a) & 2L_{2n}(a)L_{2n+1}(a) \\ 2L_{2n-1}(a)L_{2n}(a) & L_{2n}^2(a) + L_{2n-1}(a)L_{2n+1}(a) \end{bmatrix}$$

ifadesinde, $L_{2n-1}(a) = 0$ alındığında;

$$D_a = \begin{bmatrix} L_{2n}^2(a) & 2L_{2n}(a)L_{2n+1}(a) \\ 0 & L_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece D_a matrisinin üst üçgen matris olduğu görülür.

ii) $L_{2n-1}(a) = 0$ iken, D_a matrisi ile A_a'nın değişmeli olduğunu ispatlamak için; $D_aA_a = A_aD_a$ olduğunu göstermemiz gerekir. Bunun için öncelikle D_aA_a matrisinin eşitini bulalım. $L_{2n-1}(a) = 0$ iken,

$$D_a = \begin{bmatrix} L_{2n}^2(a) & 2L_{2n}(a)L_{2n+1}(a) \\ 0 & L_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$$

olduğunu biliyoruz. Bu koşulda,

$$D_aA_a = \begin{bmatrix} L_{2n}^2(a) & 2L_{2n}(a)L_{2n+1}(a) \\ 0 & L_{2n}^2(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} L_{2n}^2(a) & 2L_{2n}(a)L_{2n+1}(a) + aL_{2n}^2(a) \\ 0 & L_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$$

olur. A_aD_a ise $L_{2n-1}(a) = 0$ koşulu ile,

$$A_aD_a = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{2n}^2(a) & 2L_{2n}(a)L_{2n+1}(a) \\ 0 & L_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} L_{2n}^2(a) & 2L_{2n}(a)L_{2n+1}(a) + aL_{2n}^2(a) \\ 0 & L_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$$

olur. Böylece, $L_{2n-1}(a) = 0$ iken; $D_a A_a = A_a D_a$ olduğu görülür. Yani bu koşulda D_a ile A_a değişmelidir.

iii) $L_{2n-1}(a) = 0$ iken,

$$D_a = \begin{bmatrix} L_{2n}^2(a) & 2L_{2n}(a)L_{2n+1}(a) \\ 0 & L_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$$

olduğunu biliyoruz. Bu durumda,

$$\begin{aligned} D_a B_a &= \begin{bmatrix} L_{2n}^2(a) & 2L_{2n}(a)L_{2n+1}(a) \\ 0 & L_{2n}^2(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} L_{2n}^2(a) + 2aL_{2n}(a)L_{2n+1}(a) & 2L_{2n}(a)L_{2n+1}(a) \\ aL_{2n}^2(a) & L_{2n}^2(a) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olur. $B_a D_a$ ise $L_{2n-1}(a) = 0$ koşulu ile,

$$\begin{aligned} B_a D_a &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{2n}^2(a) & 2L_{2n}(a)L_{2n+1}(a) \\ 0 & L_{2n}^2(a) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} L_{2n}^2(a) & 2L_{2n}(a)L_{2n+1}(a) \\ aL_{2n}^2(a) & 2aL_{2n}(a)L_{2n+1}(a) + L_{2n}^2(a) \end{bmatrix} \text{ olur.} \end{aligned}$$

Böylece, $L_{2n-1}(a) = 0$ iken, $D_a B_a = B_a D_a$ olması için; $2aL_{2n}(a)L_{2n+1}(a) = 0$ olması gerekir. Sonuç 3.2.16'dan $a \neq 0$ ve $L_{2n-1}(a) = 0$ iken, $aL_{2n+1}(a)L_{2n}(a) \neq 0$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla bu koşulda $2aL_{2n}(a)L_{2n+1}(a) \neq 0$ olacağı sıfır bölensizlik gereğince görülür. Böylece $L_{2n-1}(a) = 0$ iken, D_a ile B_a değişmeli değildir.

4.2.10 Teorem : $A_x = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix}$, $C_x = \begin{bmatrix} x & 2 \\ 2 & -x \end{bmatrix}$ ve $C_x^* = \begin{bmatrix} -x & 2 \\ 2 & x \end{bmatrix}$ olmak üzere,

$$(B_x A_x)^n C_x^* \, C_x (A_x B_x)^n = \begin{bmatrix} L_{2n-1}(x)L_{2n+1}(x) + L_{2n}^2(x) & 2L_{2n-1}(x)L_{2n}(x) \\ 2L_{2n}(x)L_{2n+1}(x) & L_{2n}^2(x) + L_{2n-1}(x)L_{2n+1}(x) \end{bmatrix}$$

biçimindedir.

İspat : $(B_x A_x)^n C_x^* = \begin{bmatrix} L_{2n-1}(x) & L_{2n}(x) \\ L_{2n}(x) & L_{2n+1}(x) \end{bmatrix}$ ve

$C_x (A_x B_x)^n = \begin{bmatrix} L_{2n+1}(x) & L_{2n}(x) \\ L_{2n}(x) & L_{2n-1}(x) \end{bmatrix}$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla;

$$(B_x A_x)^n C_x^* \, C_x (A_x B_x)^n = \begin{bmatrix} L_{2n-1}(x) & L_{2n}(x) \\ L_{2n}(x) & L_{2n+1}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{2n+1}(x) & L_{2n}(x) \\ L_{2n}(x) & L_{2n-1}(x) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} L_{2n-1}(x)L_{2n+1}(x) + L_{2n}^2(x) & 2L_{2n-1}(x)L_{2n}(x) \\ 2L_{2n}(x)L_{2n+1}(x) & L_{2n}^2(x) + L_{2n-1}(x)L_{2n+1}(x) \end{bmatrix}$$

elde edilir.□

4.2.11 Uyarı : $(B_xA_x)^n{C_x}^* C_x(A_xB_x)^n$ matrisini

$$(B_xA_x)^n{C_x}^* C_x(A_xB_x)^n = F_x$$

biçiminde ifade edeceğiz.

Elde ettiğimiz $(B_xA_x)^n{C_x}^* C_x(A_xB_x)^n = F_x$ matrisinin genel formuyla, Lucas polinomların kökleri arasındaki ilişkiyi sırasıyla; $L_{2n+1}(a) = 0$, $L_{2n}(a) = 0$ ve $L_{2n-1}(a) = 0$ durumları için inceleyeceğiz.

4.2.12 Sonuç : $L_{2n+1}(a) = 0$ iken,

i) F_a üst üçgen matristir.

ii) F_a ile A_a değişmelidir.

iii) F_a ile B_a değişmeli değildir. $(a \neq 0)$

İspat :

i) F_a matrisinin genel formu olan;

$\begin{bmatrix} L_{2n-1}(a)L_{2n+1}(a) + L_{2n}^2(a) & 2L_{2n-1}(a)L_{2n}(a) \\ 2L_{2n}(a)L_{2n+1}(a) & L_{2n}^2(a) + L_{2n-1}(a)L_{2n+1}(a) \end{bmatrix}$ ifadesinde,

$L_{2n+1}(a) = 0$ alındığında,

$$F_a = \begin{bmatrix} L_{2n}^2(a) & 2L_{2n-1}(a)L_{2n}(a) \\ 0 & L_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece F_a matrisinin üst üçgen matris olduğu görülür.

ii) $L_{2n+1}(a) = 0$ iken, F_a matrisi ile A_a'nın değişmeli olduğunu ispatlamak için, $F_aA_a = A_aF_a$ olduğunu göstermemiz gerekir. Bunun için öncelikle F_aA_a matrisinin eşitini bulalım. $L_{2n+1}(a) = 0$ iken,

$F_a = \begin{bmatrix} L_{2n}^2(a) & 2L_{2n-1}(a)L_{2n}(a) \\ 0 & L_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$ olduğunu biliyoruz. Bu durumda,

$$F_aA_a = \begin{bmatrix} L_{2n}^2(a) & 2L_{2n-1}(a)L_{2n}(a) \\ 0 & L_{2n}^2(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} L_{2n}^2(a) & aL_{2n}^2(a) + 2L_{2n-1}(a)L_{2n}(a) \\ 0 & L_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$$

olur. A_aF_a ise $L_{2n+1}(a) = 0$ koşulu ile,

$$A_aF_a = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{2n}^2(a) & 2L_{2n-1}(a)L_{2n}(a) \\ 0 & L_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} L_{2n}^2(a) & aL_{2n}^2(a) + 2L_{2n-1}(a)L_{2n}(a) \\ 0 & L_{2n}^2(a) \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

Böylece, $L_{2n+1}(a) = 0$ iken, $F_aA_a = A_aF_a$ olduğu görülür. Yani bu koşulda F_a ile A_a değişmelidir.

iii) $L_{2n+1}(a) = 0$ iken,

$F_a = \begin{bmatrix} L_{2n}^2(a) & 2L_{2n-1}(a)L_{2n}(a) \\ 0 & L_{2n}^2\,(a) \end{bmatrix}$ olduğunu biliyoruz. Bu durumda,

$$F_aB_a = \begin{bmatrix} L_{2n}^2(a) & 2L_{2n-1}(a)L_{2n}(a) \\ 0 & L_{2n}^2(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} L_{2n}^2(a) + 2aL_{2n-1}(a)L_{2n}(a) & 2L_{2n-1}(a)L_{2n}(a) \\ aL_{2n}^2(a) & L_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$$

olur. B_aF_a ise $L_{2n+1}(a) = 0$ koşulu ile,

$$B_aF_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{2n}^2(a) & 2L_{2n-1}(a)L_{2n}(a) \\ 0 & L_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} L_{2n}^2(a) & 2L_{2n-1}(a)L_{2n}(a) \\ aL_{2n}^2(a) & 2aL_{2n-1}(a)L_{2n}(a) + L_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$$

olur. Böylece, $L_{2n+1}(a) = 0$ iken,

$F_aB_a = B_aF_a$ olması için; $2aL_{2n-1}(a)L_{2n}(a) = 0$ olması gerekir. Ancak Sonuç 3.2.20'den $a \neq 0$ ve $L_{2n+1}(a)$ iken, $aL_{2n-1}(a)L_{2n}(a) \neq 0$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla bu koşulda $2aL_{2n-1}(a)L_{2n}(a) \neq 0$ olacağı sıfır bölensizlik gereğince, görülür. Böylece $a \neq 0$ ve $L_{2n+1}(a) = 0$ iken, F_a ile B_a değişmeli değildir.

4.2.13 Sonuç : $L_{2n}(a) = 0$ iken,

i) F_a skaler matristir.

ii) F_a ile A_a değişmelidir.

iii) F_a ile B_a değişmelidir.

İspat:

i) F_a matrisinin genel formu olan;

$$\begin{bmatrix} L_{2n-1}(a)L_{2n+1}(a)+L_{2n}^2(a) & 2L_{2n-1}(a)L_{2n}(a) \\ 2L_{2n}(a)L_{2n+1}(a) & L_{2n}^2(a)+L_{2n-1}(a)L_{2n+1}(a) \end{bmatrix}$$ ifadesinde,

$L_{2n}(a)=0$ alındığında,

$$F_a=\begin{bmatrix} L_{2n-1}(a)L_{2n+1}(a) & 0 \\ 0 & L_{2n-1}(a)L_{2n+1}(a) \end{bmatrix}$$

elde edilir. Sonuç 3.2.12'den $L_{2n}(a)=0$ iken, $L_{2n-1}(a)L_{2n+1}(a)=-a^2-4$ olduğunu biliyoruz. Böylece,

$F_a=\begin{bmatrix} -a^2-4 & 0 \\ 0 & -a^2-4 \end{bmatrix}=(-a^2-4)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ biçiminde skaler matrisi elde edilir.

ii) $L_{2n}(a)=0$ iken $F_a=(-a^2-4)\mathrm{I}$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla F_a skaler matrisi ile A_a'nın değişmeli olduğu açıktır.

iii) $L_{2n}(a)=0$ iken $F_a=(-a^2-4)\mathrm{I}$ olduğundan, F_a skaler matrisi ile B_a'nın değişmeli olduğu açıktır.

4.2.14 Sonuç : $L_{2n-1}(a)=0$ iken,

i) F_a alt üçgen matristir.

ii) F_a ile A_a değişmeli değildir.$(a\neq 0)$

iii) F_a ile B_a değişmelidir.

İspat :

i) F_a matrisinin genel formu olan;

$$\begin{bmatrix} L_{2n-1}(a)L_{2n+1}(a)+L_{2n}^2(a) & 2L_{2n-1}(a)L_{2n}(a) \\ 2L_{2n}(a)L_{2n+1}(a) & L_{2n}^2(a)+L_{2n-1}(a)L_{2n+1}(a) \end{bmatrix}$$ ifadesinde,

$L_{2n-1}(a)=0$ alındığında,

$$F_a=\begin{bmatrix} L_{2n}^2(a) & 0 \\ 2L_{2n+1}(a)L_{2n}(a) & L_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece F_a matrisinin alt üçgen matris olduğu görülür.

ii) $L_{2n-1}(a)=0$ iken,

$F_a = \begin{bmatrix} L_{2n}^2(a) & 0 \\ 2L_{2n+1}(a)L_{2n}(a) & L_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$ olduğunu biliyoruz. Bu durumda,

$$F_aA_a = \begin{bmatrix} L_{2n}^2\,(a) & 0 \\ 2L_{2n+1}(a)L_{2n}(a) & L_{2n}^2(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} L_{2n}^2(a) & aL_{2n}^2(a) \\ 2L_{2n+1}(a)L_{2n}(a) & 2aL_{2n+1}(a)L_{2n}(a) + L_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$$

olur. A_aF_a ise $L_{2n-1}(a) = 0$ koşulu ile,

$$A_aF_a = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{2n}^2(a) & 0 \\ 2L_{2n+1}(a)L_{2n}(a) & L_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2aL_{2n+1}(a)L_{2n}(a) + L_{2n}^2(a) & aL_{2n}^2(a) \\ 2L_{2n+1}(a)L_{2n}(a) & L_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$$

olur. Böylece, $L_{2n-1}(a) = 0$ iken, $F_aA_a = A_aF_a$ olması için; $2aL_{2n+1}(a)L_{2n}(a) = 0$ olması gerekir. Ancak Sonuç 3.2.16'dan $a \neq 0$ ve $L_{2n-1}(a) = 0$ iken, $aL_{2n+1}(a)L_{2n}(a) \neq 0$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla bu koşulda $2aL_{2n+1}(a)L_{2n}(a) \neq 0$ olacağı sıfır bölensizlik gereğince görülür. Böylece $L_{2n-1}(a) = 0$ ve $a \neq 0$ iken, F_a ile A_a değişmeli değildir.

iii) $L_{2n-1}(a) = 0$ iken, F_a matrisi ile B_a'nın değişmeli olduğunu ispatlamak için; $F_aB_a = B_aF_a$ olduğunu göstermemiz gerekir. Bunun için öncelikle F_aB_a matrisinin eşitini bulalım. $L_{2n-1}(a) = 0$ iken,

$$F_a = \begin{bmatrix} L_{2n}^2(a) & 0 \\ 2L_{2n+1}(a)L_{2n}(a) & L_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$$

olduğunu biliyoruz. Bu durumda,

$$F_aB_a = \begin{bmatrix} L_{2n}^2(a) & 0 \\ 2L_{2n+1}(a)L_{2n}(a) & L_{2n}^2(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} L_{2n}^2(a) & 0 \\ 2L_{2n}(a)L_{2n+1}(a) + aL_{2n}^2(a) & L_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$$

olur. B_aF_a ise $L_{2n-1}(a) = 0$ koşulu ile,

$$B_aF_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{2n}^2(a) & 0 \\ 2L_{2n+1}(a)L_{2n}(a) & L_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} L_{2n}^2(a) & 0 \\ 2L_{2n}(a)L_{2n+1}(a) + aL_{2n}^2(a) & L_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$$

olur. Böylece, $L_{2n-1}(a) = 0$ iken, $F_a B_a = B_a F_a$ olduğu görülür. Yani bu koşulda F_a ile B_a değişmelidir.

Lucas polinomlarının kökleri ile ilişkili olan matrisler hakkında elde ettiğimiz bu özellik ve bulguların yanı sıra; $L_{2n-1}(a) = 0, L_{2n}(a) = 0$ ve $L_{2n+1}(a) = 0$ durumları için başka farklı sonuçlar da elde edebiliyoruz. $L_{2n}(a) = 0$ iken, elde edilen bazı özellikleri aşağıdaki biçimiyle belirtmek mümkündür.

4.2.15 Sonuç : $L_{2n}(a) = 0$ iken,

i) $C_a(A_a B_a)^n = \pm(\sqrt{-a^2 - 4})\mathrm{I}$

ii) $(B_a A_a)^n C_a^{\,*} = \pm(\sqrt{-a^2 - 4})\mathrm{I}$

iii) $D_a A_a = (-a^2 - 4)A_a$

iv) $D_a B_a = (-a^2 - 4)B_a$

v) $F_a A_a = (-a^2 - 4)A_a$

vi) $F_a B_a = (-a^2 - 4)B_a$

İspat: $L_{2n}(a) = 0$ iken, $L_{2n+1}(a) = L_{2n-1}(a) = \pm(\sqrt{-a^2 - 4})$ olduğunu Teorem 3.2.11'den biliyoruz. Dolayısıyla bu sonuçta yer alan matris formlarında $L_{2n}(a) = 0$ iken, $L_{2n+1}(a) = L_{2n-1}(a) = \pm(\sqrt{-a^2 - 4})$ eşitliğinden yararlanıldığında sonuçlar açıkça görülür.

4.2.16 Uyarı : $L_{2n}(a) = 0$ iken,

$C_a(A_a B_a)^n = \pm(\sqrt{-a^2 - 4})\mathrm{I}$

$D_a = (-a^2 - 4)\mathrm{I}$

$(B_a A_a)^n C_a^{\,*} = \pm(\sqrt{-a^2 - 4})\mathrm{I}$

$F_a = (-a^2 - 4)\mathrm{I}$

elde edilmiş olur.

Bu bölümde kullandığımız yaklaşımla matris teorisi ile ilişkili olarak daha birçok farklı sonuç ve özelliğe ulaşmak mümkündür. Ancak bu kısmı daha fazla detaylandırmayacağız. Buna yönelik bir sonucu daha belirtip buraya kadar olan kısımda elde ettiğimiz bazı bulguları tablo halinde özetleyeceğiz.

4.2.17 Sonuç : $L_{2n+1}(a) = 0$ iken,

i) $C_a(A_aB_a)^nA_a = B_aC_a(A_aB_a)^n$ biçimindedir.

ii) $(B_aA_a)^nC_a{}^*B_a = A_a(B_aA_a)^nC_a{}^*$ biçimindedir.

İspat : Bu sonuçta yer alan elemanların matris temsillerinin matris ögelerinde, $L_{2n+1}(a) = 0$ alınıp Teorem 3.2.17'den yararlanıldığında eşitlikler açıkça görülür.

$L_{2n+1}(a) = 0, L_{2n}(a) = 0$ veya $L_{2n-1}(a) = 0$ koşullarında Lucas polinomunun kökleri ile ilişkili olan matrisler hakkında elde ettiğimiz birtakım önemli özellikleri tablo halinde topluca görelim.

Tablo 4.4: Lucas polinomlarının kökleri ile ilişkili olan üreteç matrislerin bazı özellikleri.

	D_a *matris çeşidi*	D_a ile A_a*'nın değişmeliliği*	D_a ile B_a*'nın değişmeliliği*	F_a *matris çeşidi*	F_a ile A_a*'nın değişmeliliği*	F_a ile B_a*'nın değişmeliliği*
$L_{2n+1}(a) = 0$ iken,	*Alt üçgen matris*	$-$ ($a \neq 0$ *iken*)	$+$	*Üst üçgen matris*	$+$	$-$ ($a \neq 0$ *iken*)
$L_{2n}(a) = 0$ iken,	*Skaler matris*	$+$	$+$	*Skaler matris*	$+$	$+$
$L_{2n-1}(a) = 0$ iken,	*Üst üçgen matris*	$+$	$-$ ($a \neq 0$ *iken*)	*Alt üçgen matris*	$-$ ($a \neq 0$ *iken*)	$+$

Tablo 4.5: Lucas polinomlarının kökleri ile ilişkili olan bazı matrislerin temsilleri.

	D_a	$D_a\ ile\ A_a$	$D_a\ ile\ B_a$	F_a	$F_a\ ile\ A_a$	$F_a\ ile\ B_a$
$L_{2n+1}(a)=0$ iken,	$\begin{bmatrix} L_{2n}^2(a) & 0 \\ 2L_{2n-1}(a)L_{2n}(a) & L_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} L_{2n}^2(a) & aL_{2n}^2(a) \\ 2L_{2n-1}(a)L_{2n}(a) & 2aL_{2n-1}(a)L_{2n}(a)+L_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2aL_{2n-1}(a)L_{2n}(a)+L_{2n}^2(a) & aL_{2n}^2(a) \\ 2L_{2n-1}(a)L_{2n}(a) & L_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} L_{2n}^2(a) & 0 \\ 2L_{2n-1}(a)L_{2n}(a)+aL_{2n}^2(a) & L_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} L_{2n}^2(a) & 2L_{2n-1}(a)L_{2n}(a) \\ 0 & L_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} L_{2n}^2(a) & aL_{2n}^2(a)+2L_{2n-1}(a)L_{2n}(a) \\ 0 & L_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} L_{2n}^2(a)+2aL_{2n-1}(a)L_{2n}(a) & 2L_{2n-1}(a)L_{2n}(a) \\ aL_{2n}^2(a) & L_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} L_{2n}^2(a) & 2L_{2n-1}(a)L_{2n}(a) \\ aL_{2n}^2(a) & 2aL_{2n-1}(a)L_{2n}(a)+L_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$
$L_{2n}(a)=0$ iken,	$(-a^2-4)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$(-a^2-4)\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$(-a^2-4)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$	$(-a^2-4)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$(-a^2-4)\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$(-a^2-4)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$
$L_{2n-1}(a)=0$ iken,	$\begin{bmatrix} L_{2n}^2(a) & 2L_{2n}(a)L_{2n+1}(a) \\ 0 & L_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} L_{2n}^2(a) & 2L_{2n}(a)L_{2n+1}(a)+aL_{2n}^2(a) \\ 0 & L_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} L_{2n}^2(a)+2aL_{2n}(a)L_{2n+1}(a) & 2L_{2n}(a)L_{2n+1}(a) \\ aL_{2n}^2(a) & L_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} L_{2n}^2(a) & 2L_{2n}(a)L_{2n+1}(a) \\ aL_{2n}^2(a) & 2aL_{2n}(a)L_{2n+1}(a)+L_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} L_{2n}^2(a) & 0 \\ 2L_{2n+1}(a)L_{2n}(a) & L_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} L_{2n}^2(a) & aL_{2n}^2(a) \\ 2L_{2n+1}(a)L_{2n}(a) & 2aL_{2n+1}(a)L_{2n}(a)+L_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2aL_{2n+1}(a)L_{2n}(a)+L_{2n}^2(a) & aL_{2n}^2(a) \\ 2L_{2n+1}(a)L_{2n}(a) & L_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} L_{2n}^2(a) & 0 \\ 2L_{2n}(a)L_{2n+1}(a)+aL_{2n}^2(a) & L_{2n}^2(a) \end{bmatrix}$

4.2.18 Uyarı : Bu tabloda iki satıra ayrılmış olan kısımlarda ilgili matrisler arasında değişme özelliği bulunmamaktadır. Dolayısıyla bu oluşan iki yeni satırdan üstteki, o ilgili hücredeki matrislerden A_a (ya da B_a)'nın diğer matris ile sağdan çarpımının sonucunu göstermektedir. Alttaki ise, ilgili hücredeki matrislerden A_a (ya da B_a)'nın diğer matris ile soldan çarpımının sonucunu göstermektedir.

Ayrıca 3.2.11, 3.2.13 ve 3.2.17 teoremlerinden,

$$L_{2n}(a) = 0 \text{ iken, } L_{2n+1}(a) = L_{2n-1}(a) = \pm\sqrt{-a^2-4}$$

$$L_{2n-1}(a) = 0 \text{ iken, } L_{2n}(a) = \pm\sqrt{a^2+4} \text{ ve } L_{2n+1}(a) = \pm a\sqrt{a^2+4}$$

$$L_{2n+1}(a) = 0 \text{ iken, } L_{2n}(a) = \pm\sqrt{a^2+4} \text{ ve } L_{2n-1}(a) = \mp a\sqrt{a^2+4}$$

olduğunu biliyoruz. Bu bölümün buraya kadar olan kısmında elde ettiğimiz matris formlarını önceki bölümdeki bu teoremlerle birlikte ele aldığımızda matris formlarını daha sade bir biçimde ifade etmek mümkün hale gelecektir. Bununla birlikte elde ettiğimiz bu teoremler, matris formlarındaki matris ögelerinin Lucas polinomunun kökü ile olan ilişkisini de ilginç bir biçimde ortaya koyacaktır. Sırasıyla; $L_{2n+1}(x), L_{2n}(x)$ ve $L_{2n-1}(x)$ polinomlarının köklerinin, bu bölümde belirttiğimiz matris formlarındaki durumlarını inceleyelim.

4.2.19 Sonuç : $L_{2n+1}(a) = 0$ iken,

i) $D_a = \begin{bmatrix} a^2+4 & 0 \\ -2a^3-8a & a^2+4 \end{bmatrix}$

ii) $D_aA_a = \begin{bmatrix} a^2+4 & a^3+4a \\ -2a^3-8a & -2a^4-7a^2+4 \end{bmatrix}$

iii) $A_aD_a = \begin{bmatrix} -2a^4-7a^2+4 & a^3+4a \\ -2a^3-8a & a^2+4 \end{bmatrix}$

iv) $D_aB_a = \begin{bmatrix} a^2+4 & 0 \\ -a^3-4a & a^2+4 \end{bmatrix}$

v) $F_a = \begin{bmatrix} a^2+4 & -2a^3-8a \\ 0 & a^2+4 \end{bmatrix}$

vi) $F_aA_a = \begin{bmatrix} a^2+4 & -a^3-4a \\ 0 & a^2+4 \end{bmatrix}$

vii) $F_aB_a = \begin{bmatrix} -2a^4-7a^2+4 & -2a^3-8a \\ a^3+4a & a^2+4 \end{bmatrix}$

viii) $B_aF_a = \begin{bmatrix} a^2+4 & -2a^3-8a \\ a^3+4a & -2a^4-7a^2+4 \end{bmatrix}$

4.2.20 Sonuç : $L_{2n}(a) = 0$ iken,

i) $D_a = \begin{bmatrix} -a^2-4 & 0 \\ 0 & -a^2-4 \end{bmatrix} = (-a^2-4)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

ii) $D_aA_a = (-a^2-4)\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

iii) $D_aB_a = (-a^2-4)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$

iv) $F_a = \begin{bmatrix} -a^2-4 & 0 \\ 0 & -a^2-4 \end{bmatrix} = (-a^2-4)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

v) $F_aA_a = (-a^2-4)\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

vi) $F_aB_a = (-a^2-4)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$

4.2.21 Sonuç : $L_{2n-1}(a) = 0$ iken,

i) $D_a = \begin{bmatrix} a^2+4 & 2a^3+8a \\ 0 & a^2+4 \end{bmatrix}$

ii) $D_aA_a = \begin{bmatrix} a^2+4 & 3a^3+12a \\ 0 & a^2+4 \end{bmatrix}$

iii) $D_aB_a = \begin{bmatrix} 2a^4+9a^2+4 & 2a^3+8a \\ a^3+4a & a^2+4 \end{bmatrix}$

iv) $B_a\,D_a = \begin{bmatrix} a^2+4 & 2a^3+8a \\ a^3+4a & 2a^4+9a^2+4 \end{bmatrix}$

v) $F_a = \begin{bmatrix} a^2+4 & 0 \\ 2a^3+8a & a^2+4 \end{bmatrix}$

vi) $F_aA_a = \begin{bmatrix} a^2+4 & a^3+4a \\ 2a^3+8a & 2a^4+9a^2+4 \end{bmatrix}$

vii) $A_aF_a = \begin{bmatrix} 2a^4+9a^2+4 & a^3+4a \\ 2a^3+8a & a^2+4 \end{bmatrix}$

viii) $F_aB_a = \begin{bmatrix} a^2+4 & 0 \\ 3a^3+12a & a^2+4 \end{bmatrix}$

Yukarıdaki 4.2.19, 4.2.20 ve 4.2.21 sonuçlarındaki bulguları aşağıdaki tablo yardımıyla topluca görelim.

Tablo 4.6 : Lucas polinomlarının kökleri ile ilişkili olan bazı matrislerin genel formu.

	D_a	$D_a\ ile\ A_a$	$D_a\ ile\ B_a$	F_a	$F_a\ ile\ A_a$	$F_a\ ile\ B_a$
$L_{2n+1}(a) = 0$ iken,	$\begin{bmatrix} a^2+4 & 0 \\ -2a^3-8a & a^2+4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a^2+4 & a^3+4a \\ -2a^3-8a & -2a^4-7a^2+4 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -2a^4-7a^2+4 & a^3+4a \\ -2a^3-8a & a^2+4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a^2+4 & 0 \\ -a^3-4a & a^2+4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a^2+4 & -2a^3-8a \\ 0 & a^2+4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a^2+4 & -a^3-4a \\ 0 & a^2+4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2a^4-7a^2+4 & -2a^3-8a \\ a^3+4a & a^2+4 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} a^2+4 & -2a^3-8a \\ a^3+4a & -2a^4-7a^2+4 \end{bmatrix}$
$L_{2n}(a) = 0$ iken,	$(-a^2-4)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$(-a^2-4)\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$(-a^2-4)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$	$(-a^2-4)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$(-a^2-4)\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$(-a^2-4)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$
$L_{2n-1}(a) = 0$ iken,	$\begin{bmatrix} a^2+4 & 2a^3+8a \\ 0 & a^2+4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a^2+4 & 3a^3+12a \\ 0 & a^2+4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2a^4+9a^2+4 & 2a^3+8a \\ a^3+4a & a^2+4 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} a^2+4 & 2a^3+8a \\ a^3+4a & 2a^4+9a^2+4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a^2+4 & 0 \\ 2a^3+8a & a^2+4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a^2+4 & a^3+4a \\ 2a^3+8a & 2a^4+9a^2+4 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2a^4+9a^2+4 & a^3+4a \\ 2a^3+8a & a^2+4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a^2+4 & 0 \\ 3a^3+12a & a^2+4 \end{bmatrix}$

4.2.22 Uyarı : Bu tabloda iki satıra ayrılmış olan kısımlarda ilgili matrisler arasında değişme özelliği bulunmamaktadır. Dolayısıyla bu oluşan iki yeni satırdan üstteki, o ilgili hücredeki matrislerden A_a (ya da B_a)'nın diğer matris ile sağdan çarpımının sonucunu göstermektedir. Alttaki ise, ilgili hücredeki matrislerden A_a (ya da B_a)'nın diğer matris ile soldan çarpımının sonucunu göstermektedir.

Elde ettiğimiz 4.2.19, 4.2.20 ve 4.2.21 sonuçlarından yararlanarak Lucas polinomlarının kökleri ile ilişkili olan matrislerin; iz, transpoze, ters… gibi daha birçok özelliğine yönelik bulgular elde etmek mümkündür. Ancak bu kısmı daha fazla detaylandırmayacağız. Sadece birkaç özellik ile ilgili sonucu verip bu bölümün diğer kısmına geçeceğiz.

4.2.23 Sonuç : $a \in \mathbb{C}$ iken, $(F_a)^t = D_a$

4.2.24 Sonuç :

i) $L_{2n+1}(a) = 0$ iken, $(D_a B_a)^t = (B_a D_a)^t = A_a F_a = F_a A_a$

ii) $L_{2n}(a) = 0$ iken, $(D_a B_a)^t = (B_a D_a)^t = A_a F_a = F_a A_a$

iii) $L_{2n-1}(a) = 0$ iken, $(D_a B_a)^t = A_a F_a$ ve $(B_a D_a)^t = F_a A_a$

4.2.25 Sonuç :

i) $L_{2n-1}(a) = 0$ iken, $(D_a A_a)^t = (A_a D_a)^t = B_a F_a = F_a B_a$

ii) $L_{2n}(a) = 0$ iken, $(D_a A_a)^t = (A_a D_a)^t = B_a F_a = F_a B_a$

iii) $L_{2n+1}(a) = 0$ iken, $(D_a A_a)^t = B_a F_a$ ve $(A_a D_a)^t = F_a B_a$

4.3 Pell Polinomlarının Kökleri ile Lineer Gruplar ve Matrisler Arasındaki İlişkiler

Çalışmamızın bu kısmında Pell polinomların kökleri ile ilişkili olan lineer grupların üreteçleri, üreteçlerinin matris temsilleri, bazı elemanları ve grup yapıları hakkında elde ettiğimiz birtakım özgün bulguları sunacağız. Ayrıca, önceki bölümde elde ettiğimiz bazı önermelerden yararlanarak Pell polinomlarının kök değerleriyle ilişkili olan yeni matris formları elde edeceğiz. Bu kısımda kullanacağımız yaklaşım bu bölümün önceki kısımlarında yaptıklarımızla benzerlik gösterecektir. Fibonacci polinomlarında yaptığımız çalışmaları ve elde ettiğimiz bulguları, Fibonacci polinomları ile Pell polinomları arasında geçişe imkan sağlayan $P_n\left(\frac{x}{2}\right) = F_n(x)$ eşitliğinden yararlanarak, Pell polinomlarına aktaracağız.

Bu kısım için gerekli olan ve daha önceki bölümlerde detaylı bir biçimde açıkladığımız Pell polinomunu ve Pell polinomunun kök formülünü hatırlatalım: Pell polinomları;

$$P_0(x) = 0\,, P_1(x) = 1$$

$$P_n(x) = 2xP_{n-1}(x) + P_{n-2}(x)\,; n \geq 2$$

biçiminde tanımlıdır.

Ayrıca bu kısımda çalışmamız için oldukça önemli olan eşitliği ortaya koyalım. Bu eşitlik yukarıdaki tekrarlama bağıntısından yararlanarak aşağıdaki biçimiyle elde edilir. $P_{n+2}(x)$ ve $P_{n+1}(x)$ yukarıdaki tekrarlama bağıntısından hareketle,

$$P_{n+2}(x) = 2xP_{n+1}(x) + P_n(x)$$

$$P_{n+1}(x) = 2xP_n(x) + P_{n-1}(x)$$

biçimindedir. Yukarıdaki $P_{n+2}(x)$ eşitliğinde $P_{n+1}(x)$'in eşitini yazdığımızda;

$$P_{n+2}(x) = 2x[2xP_n(x) + P_{n-1}(x)] + P_n(x)$$

$$P_{n+2}(x) = (1 + 4x^2)P_n(x) + 2xP_{n-1}(x)$$

eşitliği elde edilir. Bununla birlikte Fibonacci polinomunun genel kök formülünün aşağıdaki biçimde olduğu bilinmektedir.

$$F_n(x) = 0 \ : x = 2i\cos\frac{k\pi}{n}\,, k = 1, 2 \ldots, n-1$$

Ayrıca, $P_n\left(\frac{x}{2}\right) = F_n(x)$ eşitliğinden yararlanarak Pell polinomları için genel kök formülünün aşağıdaki biçimde olduğunu biliyoruz.

$$P_n(x) = 0 \ : x = i\cos\frac{k\pi}{n}\,, n = 1, 2 \ldots, n-1$$

4.1 kısmında Fibonacci polinomları ile ilişkili olarak elde ettiğimiz tüm bulguları, $P_n\left(\frac{x}{2}\right) = F_n(x)$ eşitliğinden yararlanarak Pell polinomları perspektifinden ifade edeceğiz. Dolayısıyla bu kısımda da 4.1 kısmındaki gibi iki üreteçli bazı lineer gruplara ilişkin açıklamalarda bulunacağız.

Bu kısımda çalıştığımız matrislerin genel formu;

$$A_{2x} = \begin{bmatrix} 1 & 2x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } B_{2x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2x & 1 \end{bmatrix}$$

biçiminde olacaktır. Ayrıca aşağıdaki teoremde belirttiğimiz gibi Pell polinomlarına yönelik yeni üreteç matrisler elde ettik.

4.3.1 Teorem : $A_{2x} = \begin{bmatrix} 1 & 2x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ve $\mathrm{B}_{2x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2x & 1 \end{bmatrix}$ olmak üzere,

i) $(A_{2x}B_{2x})^n = \begin{bmatrix} P_{2n+1}(x) & P_{2n}(x) \\ P_{2n}(x) & P_{2n-1}(x) \end{bmatrix}$

ii) $(B_{2x}A_{2x})^n = \begin{bmatrix} P_{2n-1}(x) & P_{2n}(x) \\ P_{2n}(x) & P_{2n+1}(x) \end{bmatrix}$

iii) $(A_{2x}B_{2x})^n(B_{2x}A_{2x})^n = \begin{bmatrix} P_{2n-1}(x)P_{2n+1}(x) + P_{2n}^2(x) & 2P_{2n}(x)P_{2n+1}(x) \\ 2P_{2n-1}(x)P_{2n}(x) & P_{2n}^2(x) + P_{2n-1}(x)P_{2n+1}(x) \end{bmatrix}$

iv) $(B_{2x}A_{2x})^n(A_{2x}B_{2x})^n = \begin{bmatrix} P_{2n-1}(x)P_{2n+1}(x) + P_{2n}^2(x) & 2P_{2n-1}(x)P_{2n}(x) \\ 2P_{2n}(x)P_{2n+1}(x) & P_{2n}^2(x) + P_{2n-1}(x)P_{2n+1}(x) \end{bmatrix}$

İspat : Matematiksel tümevarım yöntemi ile Pell polinomunun tekrarlama bağıntısından yararlanarak elde ettiğimiz $P_{n+2}(x) = (1+4x^2)P_n(x) + 2xP_{n-1}(x)$ eşitliğinden yararlanıldığında teorem ispatlanır.□

Böylece elde ettiğimiz bu matris formlarında $x = \lambda$ ve bu λ değerini Pell polinomunun kökü olarak seçerek $gp\,(A_{2\lambda}, B_{2\lambda})$ grubu hakkında birçok bilgiye ulaşacağız. Elde ettiğimiz matrislerin genel formuyla, Pell polinomların kökleri arasındaki ilişkiyi sırasıyla; $P_{2n+1}(\lambda) = 0, P_{2n}(\lambda) = 0$ ve $P_{2n-1}(\lambda) = 0$ durumları için inceleyeceğiz.

4.3.2 Sonuç : $P_{2n+1}(\lambda) = 0$ iken,

i) $(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n$ alt üçgen matristir.

ii) $(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n$ ile $A_{2\lambda}$ değişmeli değildir.

iii) $(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n$ ile $B_{2\lambda}$ değişmelidir.

iv) $(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n$ üst üçgen matristir.

v) $(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n$ ile $A_{2\lambda}$ değişmelidir.

vi) $(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n$ ile $B_{2\lambda}$ değişmeli değildir.

İspat : Teorem 4.3.1'de yer alan, $(A_{2x}B_{2x})^n(B_{2x}A_{2x})^n$ ve $(B_{2x}A_{2x})^n(A_{2x}B_{2x})^n$ matris formlarında $x=\lambda$ ve $P_{2n+1}(\lambda)=0$ koşulunu uyguladığımızda sırasıyla;

$$(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n=\begin{bmatrix}P_{2n}^2(\lambda) & 0\\ 2P_{2n-1}(\lambda)P_{2n}(\lambda) & P_{2n}^2(\lambda)\end{bmatrix}$$

$$(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n=\begin{bmatrix}P_{2n}^2(\lambda) & 2P_{2n-1}(\lambda)P_{2n}(\lambda)\\ 0 & P_{2n}^2(\lambda)\end{bmatrix}$$

alt üçgen ve üst üçgen matrisleri elde edilir. Bu matris formlarından yararlanarak bu sonuçta yer alan $A_{2\lambda}$ ve $B_{2\lambda}$'ya yönelik değişmeye ilişkin özellikler, bu bölümün önceki kısımlarında değişme özelliğine yönelik yaptığımız yaklaşımlara benzer bir biçimde ispatlanır. Ayrıca ii) ve vi) ispatlanırken; Sonuç 3.2.30'da elde ettiğimiz $P_{2n+1}(\lambda)=0$ iken, $\lambda P_{2n-1}(\lambda)P_{2n}(\lambda)\neq 0$ ifadesinden yararlanılması gerekir.□

4.3.3 Sonuç : $P_{2n}(\lambda)=0$ iken,

i) $(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n$ birim matristir.

ii) $(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n$ ile $A_{2\lambda}$ değişmelidir.

iii) $(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n$ ile $B_{2\lambda}$ değişmelidir.

iv) $(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n$ birim matristir.

v) $(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n$ ile $A_{2\lambda}$ değişmelidir.

vi) $(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n$ ile $B_{2\lambda}$ değişmelidir.

İspat : Teorem 4.3.1'de yer alan, $(A_{2x}B_{2x})^n(B_{2x}A_{2x})^n$ ve $(B_{2x}A_{2x})^n(A_{2x}B_{2x})^n$ matris formlarında $x=\lambda$ ve $P_{2n}(\lambda)=0$ koşulunu uyguladığımızda;

$$(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n=\begin{bmatrix}P_{2n-1}(\lambda)P_{2n+1}(\lambda) & 0\\ 0 & P_{2n-1}(\lambda)P_{2n+1}(\lambda)\end{bmatrix}$$

$$(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n=\begin{bmatrix}P_{2n-1}(\lambda)P_{2n+1}(\lambda) & 0\\ 0 & P_{2n-1}(\lambda)P_{2n+1}(\lambda)\end{bmatrix}$$

elde edilir. Ayrıca Sonuç 3.2.22'den, $P_{2n}(\lambda)=0$ iken, $P_{2n+1}(\lambda)P_{2n-1}(\lambda)=1$ olduğunu biliyoruz. Böylece $P_{2n}(\lambda)=0$ iken,

$$(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n=(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n(A_2B_{2\lambda})^n=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\mathrm{I}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla bu sonuçta yer alan $A_{2\lambda}$ ve $B_{2\lambda}$'ya yönelik değişmeye ilişkin özelliklerin olduğu açıkça görülür.

4.3.4 Sonuç : $P_{2n-1}(\lambda) = 0$ iken,

i) $(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n$ üst üçgen matristir.

ii) $(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n$ ile $A_{2\lambda}$ değişmelidir.

iii) $(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n$ ile $B_{2\lambda}$ değişmeli değildir.

iv) $(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n$ alt üçgen matristir.

v) $(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n$ ile $A_{2\lambda}$ değişmeli değildir.

vi) $(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n$ ile $B_{2\lambda}$ değişmelidir.

İspat : Teorem 4.3.1'de yer alan $(A_{2x}B_{2x})^n(B_{2x}A_{2x})^n$ ve $(B_{2x}A_{2x})^n(A_{2x}B_{2x})^n$ matris formlarında $x = \lambda$ ve $P_{2n-1}(\lambda) = 0$ koşulunu uyguladığımızda sırasıyla;

$$(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n = \begin{bmatrix} P_{2n}^2(\lambda) & 2P_{2n}(\lambda)P_{2n+1}(\lambda) \\ 0 & P_{2n}^2(\lambda) \end{bmatrix}$$

$$(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n = \begin{bmatrix} P_{2n}^2(\lambda) & 0 \\ 2P_{2n}(\lambda)P_{2n+1}(\lambda) & P_{2n}^2(\lambda) \end{bmatrix}$$

üst üçgen ve alt üçgen matrisleri elde edilir. Bu matris formlarından yararlanarak bu sonuçta yer alan $A_{2\lambda}$ ve $B_{2\lambda}$'ya yönelik değişmeye ilişkin özellikler, bu bölümün önceki kısımlarında değişme özelliğine yönelik yaptığımız yaklaşımlara benzer bir biçimde ispatlanır. Ayrıca iii) ve v) ispatlanırken; Sonuç 3.2.26'da ortaya koyduğumuz $P_{2n-1}(\lambda) = 0$ iken**,** $\lambda P_{2n}(\lambda)P_{2n+1}(\lambda) \neq 0$ ifadesinden yararlanılması gerekir.

$gp\,(A_{2\lambda}, B_{2\lambda})$ grubunun üreteçleri ve bazı elemanları hakkında matris temsillerinden yararlanarak elde ettiğimiz bu özellik ve bulguların yanı sıra; $P_{2n-1}(\lambda) = 0, P_{2n}(\lambda) = 0$ ve $P_{2n+1}(\lambda) = 0$ durumları için başka farklı sonuçlar da elde edebiliyoruz. $P_{2n}(\lambda) = 0$ iken, elde edilen bazı özellikleri aşağıdaki biçimiyle belirtmek mümkündür.

4.3.5 Sonuç : $P_{2n}(\lambda) = 0$ iken,

i) $(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n = \pm \mathrm{I}$

ii) $(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n = \pm \mathrm{I}$

iii) $(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n A_{2\lambda} = A_{2\lambda}$

iv) $(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^nB_{2\lambda} = B_{2\lambda}$

v) $(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^nA_{2\lambda} = A_{2\lambda}$

vi) $(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^nB_{2\lambda} = B_{2\lambda}$

İspat : $P_{2n}(\lambda) = 0$ iken, $P_{2n+1}(\lambda) = P_{2n-1}(\lambda) = \pm 1$ olduğunu Teorem 3.2.21'den biliyoruz. Dolayısıyla bu sonuçta yer alan matris formlarında $P_{2n}(\lambda) = 0$ iken, $P_{2n+1}(\lambda) = P_{2n-1}(\lambda) = \pm 1$ eşitliğinden yararlanıldığında sonuçlar açıkça görülür.

4.3.6 Uyarı : $P_{2n}(\lambda) = 0$ iken,

$(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n = \pm \mathrm{I}$

$(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n = \mathrm{I}$

$(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n = \pm \mathrm{I}$

$(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n = \mathrm{I}$

elde edilmiş olur.

Bu bölümde kullandığımız yaklaşım ile, Pell polinomları perspektifinden; kombinatoryal grup teorisi ve matris teorisi ile ilişkili olarak daha birçok farklı sonuç ve özelliğe ulaşmak mümkündür. Ancak bu kısmı daha fazla detaylandırmayacağız. Buna yönelik bir sonucu daha belirtip buraya kadar olan kısımda elde ettiğimiz bazı bulguları tablo halinde özetleyeceğiz.

4.3.7 Sonuç : $P_{2n+1}(\lambda) = 0$ iken,

i) $(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^nA_{2\lambda} = B_{2\lambda}(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n$ biçimindedir.

ii) $(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^nB_{2\lambda} = A_{2\lambda}(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n$ biçimindedir.

İspat : $P_{2n+1}(\lambda) = 0$ iken, $P_{2n}(\lambda) = \pm i$ ve $P_{2n-1}(\lambda) = \mp 2\lambda i$ olduğunu Teorem 3.2.27'den biliyoruz. Bu sonuçta yer alan elemanların matris formlarında $P_{2n+1}(\lambda) = 0$ iken, $P_{2n}(\lambda) = \pm i$ ve $P_{2n-1}(\lambda) = \mp 2\lambda i$ eşitliklerinden yararlanıldığında sonuçlar açıkça görülür.□

$P_{2n+1}(\lambda) = 0, P_{2n}(\lambda) = 0$ ya da $P_{2n-1}(\lambda) = 0$ koşullarında $gp\ (A_{2\lambda}, B_{2\lambda})$ grubunun bazı elemanları hakkında elde ettiğimiz birtakım önemli özellikleri tablo halinde topluca görelim.

Tablo 4.7: Pell polinomlarının kökleri ile ilişkili gruplarda üreteçlerin bazı özellikleri.

	$(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n$ *matris çeşidi*	$(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n$ ile A_a'*nın değişmeliliği*	$(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n$ ile B_a'*nın değişmeliliği*	$(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n$ *matris çeşidi*	$(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n$ ile A_a'*nın değişmeliliği*	$(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n$ ile B_a'*nın değişmeliliği*
$P_{2n+1}(\lambda) = 0$ iken,	*Alt* üç*gen matris*	$-$	$+$	Ü*st* üç*gen matris*	$+$	$-$
$P_{2n}(\lambda) = 0$ iken,	*Birim matris*	$+$	$+$	*Birim matris*	$+$	$+$
$P_{2n-1}(\lambda) = 0$ iken,	Ü*st* üç*gen matris*	$+$	$-$	*Alt* üç*gen matris*	$-$	$+$

Tablo 4.8: Pell polinomlarının kökleri ile ilişkili gruplarda bazı elemanların matris temsilleri.

	$(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n$	$(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n$ *ile* $A_{2\lambda}$	$(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n$ *ile* $B_{2\lambda}$	$(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n$	$(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n$*ile* $A_{2\lambda}$	$(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n$ *ile* $B_{2\lambda}$
$P_{2n+1}(\lambda)=0$ iken,	$\begin{bmatrix} P_{2n}^2(\lambda) & 0 \\ 2P_{2n-1}(\lambda)P_{2n}(\lambda) & P_{2n}^2(\lambda) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} P_{2n}^2(\lambda) & 2\lambda P_{2n}^2(\lambda) \\ 2P_{2n-1}(\lambda)P_{2n}(\lambda) & 4\lambda P_{2n-1}(\lambda)P_{2n}(\lambda)+P_{2n}^2(\lambda) \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 4\lambda P_{2n-1}(\lambda)P_{2n}(\lambda)+P_{2n}^2(\lambda) & 2\lambda P_{2n}^2(\lambda) \\ 2P_{2n-1}(\lambda)P_{2n}(\lambda) & P_{2n}^2(\lambda) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} P_{2n}^2(\lambda) & 0 \\ 2P_{2n-1}(\lambda)P_{2n}(\lambda)+2\lambda P_{2n}^2(\lambda) & P_{2n}^2(\lambda) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} P_{2n}^2(\lambda) & 2P_{2n-1}(\lambda)P_{2n}(\lambda) \\ 0 & P_{2n}^2(\lambda) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} P_{2n}^2(\lambda) & 2\lambda P_{2n}^2(\lambda)+2P_{2n-1}(\lambda)P_{2n}(\lambda) \\ 0 & P_{2n}^2(\lambda) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} P_{2n}^2(\lambda)+4\lambda P_{2n-1}(\lambda)P_{2n}(\lambda) & 2P_{2n-1}(\lambda)P_{2n}(\lambda) \\ 2\lambda P_{2n}^2(\lambda) & P_{2n}^2(\lambda) \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} P_{2n}^2(\lambda) & 2P_{2n-1}(\lambda)P_{2n}(\lambda) \\ 2\lambda P_{2n}^2(\lambda) & 4\lambda P_{2n-1}(\lambda)P_{2n}(\lambda)+P_{2n}^2(\lambda) \end{bmatrix}$
$P_{2n}(\lambda)=0$ iken,	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2\lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2\lambda & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2\lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2\lambda & 1 \end{bmatrix}$
$P_{2n-1}(\lambda)=0$ iken,	$\begin{bmatrix} P_{2n}^2(\lambda) & 2P_{2n}(\lambda)P_{2n+1}(\lambda) \\ 0 & P_{2n}^2(\lambda) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} P_{2n}^2(\lambda) & 2P_{2n}(\lambda)P_{2n+1}(\lambda)+2\lambda P_{2n}^2(\lambda) \\ 0 & P_{2n}^2(\lambda) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} P_{2n}^2(\lambda)+4\lambda P_{2n}(\lambda)P_{2n+1}(\lambda) & 2P_{2n}(\lambda)P_{2n+1}(\lambda) \\ 2\lambda P_{2n}^2(\lambda) & P_{2n}^2(\lambda) \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} P_{2n}^2(\lambda) & 2P_{2n}(\lambda)P_{2n+1}(\lambda) \\ 2\lambda P_{2n}^2(\lambda) & 4\lambda P_{2n}(\lambda)P_{2n+1}(\lambda)+P_{2n}^2(\lambda) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} P_{2n}^2(\lambda) & 0 \\ 2P_{2n+1}(\lambda)P_{2n}(\lambda) & P_{2n}^2(\lambda) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} P_{2n}^2(\lambda) & 2\lambda P_{2n}^2(\lambda) \\ 2P_{2n+1}(\lambda)P_{2n}(\lambda) & 4\lambda P_{2n+1}(\lambda)P_{2n}(\lambda)+P_{2n}^2(\lambda) \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 4\lambda P_{2n+1}(\lambda)P_{2n}(\lambda)+P_{2n}^2(\lambda) & 2\lambda P_{2n}^2(\lambda) \\ 2P_{2n+1}(\lambda)P_{2n}(\lambda) & P_{2n}^2(\lambda) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} P_{2n}^2(\lambda) & 0 \\ 2P_{2n}(\lambda)P_{2n+1}(\lambda)+2\lambda P_{2n}^2(\lambda) & P_{2n}^2(\lambda) \end{bmatrix}$

4.3.8 Uyarı : Bu tabloda iki satıra ayrılmış olan kısımlarda ilgili elemanlar arasında değişme özelliği bulunmamaktadır. Dolayısıyla bu oluşan iki yeni satırdan üstteki, o ilgili hücredeki elemanlardan üreteç olanın diğer eleman ile sağdan çarpımının sonucunu göstermektedir. Alttaki ise, ilgili hücredeki elemanlardan üreteç olanın diğer eleman ile soldan çarpımının sonucunu göstermektedir.

Ayrıca 3.2.21, 3.2.23 ve 3.2.27 teoremlerinde,

$$P_{2n}(\lambda) = 0 \text{ iken, } P_{2n+1}(\lambda) = P_{2n-1}(\lambda) = \pm 1$$

$$P_{2n-1}(\lambda) = 0 \text{ iken, } P_{2n}(\lambda) = \pm i \text{ ve } P_{2n+1}(\lambda) = \pm 2\lambda i$$

$$P_{2n+1}(\lambda) = 0 \text{ iken, } P_{2n}(\lambda) = \pm i \text{ ve } P_{2n-1}(\lambda) = \mp 2\lambda i$$

olduğunu ispatladık. Bu bölümün buraya kadar olan kısmında elde ettiğimiz matris formlarını önceki bölümdeki bu teoremlerle birlikte ele aldığımızda, matris formlarını daha sade bir biçimde ifade etmek mümkün hale gelecektir. Bununla birlikte elde ettiğimiz bu teoremler, matris formlarındaki matris ögelerinin Pell polinomunun kökü ile olan ilişkisini de ilginç bir biçimde ortaya koyacaktır. Sırasıyla $P_{2n+1}(x), P_{2n}(x)$ ve $P_{2n-1}(x)$ polinomlarının köklerinin, bu bölümde belirttiğimiz matris formlarındaki durumlarını inceleyelim.

4.3.9 Sonuç : $P_{2n+1}(\lambda) = 0$ iken,

i) $(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 4\lambda & -1 \end{bmatrix}$

ii) $(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n A_{2\lambda} = \begin{bmatrix} -1 & -2\lambda \\ 4\lambda & 8\lambda^2 - 1 \end{bmatrix}$

iii) $A_{2\lambda}(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n = \begin{bmatrix} 8\lambda^2 - 1 & -2\lambda \\ 4\lambda & -1 \end{bmatrix}$

iv) $(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n B_{2\lambda} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2\lambda & -1 \end{bmatrix}$

v) $(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n = \begin{bmatrix} -1 & 4\lambda \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

vi) $(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n A_{2\lambda} = \begin{bmatrix} -1 & 2\lambda \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

vii) $(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n B_{2\lambda} = \begin{bmatrix} 8\lambda^2 - 1 & 4\lambda \\ -2\lambda & -1 \end{bmatrix}$

viii) $B_{2\lambda}(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n = \begin{bmatrix} -1 & 4\lambda \\ -2\lambda & 8\lambda^2 - 1 \end{bmatrix}$

4.3.10 Sonuç : $P_{2n}(\lambda) = 0$ iken,

i) $(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

ii) $(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n A_{2\lambda} = \begin{bmatrix} 1 & 2\lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

iii) $(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n B_{2\lambda} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2\lambda & 1 \end{bmatrix}$

iv) $(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

v) $(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n A_{2\lambda} = \begin{bmatrix} 1 & 2\lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

vi) $(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n B_{2\lambda} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2\lambda & 1 \end{bmatrix}$

4.3.11 Sonuç : $P_{2n-1}(\lambda) = 0$ iken,

i) $(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n = \begin{bmatrix} -1 & -4\lambda \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

ii) $(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n A_{2\lambda} = \begin{bmatrix} -1 & -6\lambda \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

iii) $(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n B_{2\lambda} = \begin{bmatrix} -1-8\lambda^2 & -4\lambda \\ -2\lambda & -1 \end{bmatrix}$

iv) $B_{2\lambda}(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n = \begin{bmatrix} -1 & -4\lambda \\ -2\lambda & -1-8\lambda^2 \end{bmatrix}$

v) $(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -4\lambda & -1 \end{bmatrix}$

vi) $(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n A_{2\lambda} = \begin{bmatrix} -1 & -2\lambda \\ -4\lambda & -1-8\lambda^2 \end{bmatrix}$

vii) $A_{2\lambda}(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n = \begin{bmatrix} -1-8\lambda^2 & -2\lambda \\ -4\lambda & -1 \end{bmatrix}$

viii) $(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n B_{2\lambda} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -6\lambda & -1 \end{bmatrix}$

Yukarıdaki 4.3.9, 4.3.10 ve 4.3.11 sonuçlarındaki bulguları aşağıdaki tablo yardımıyla topluca görelim.

Tablo 4.9: Pell polinomlarının kökleri ile ilişkili gruplarda bazı elemanların genel formu.

	$(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n$	$(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n$ *ile* $A_{2\lambda}$	$(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n$ *ile* $B_{2\lambda}$	$(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n$	$(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n$ *ile* $A_{2\lambda}$	$(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n$ *ile* $B_{2\lambda}$
$P_{2n+1}(\lambda)=0$ iken,	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 4\lambda & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -2\lambda \\ 4\lambda & 8\lambda^2-1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 8\lambda^2-1 & -2\lambda \\ 4\lambda & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2\lambda & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 4\lambda \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 2\lambda \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8\lambda^2-1 & 4\lambda \\ -2\lambda & -1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -1 & 4\lambda \\ -2\lambda & 8\lambda^2-1 \end{bmatrix}$
$P_{2n}(\lambda)=0$ iken,	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2\lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2\lambda & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2\lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2\lambda & 1 \end{bmatrix}$
$P_{2n-1}(\lambda)=0$ iken,	$\begin{bmatrix} -1 & -4\lambda \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -6\lambda \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1-8\lambda^2 & -4\lambda \\ -2\lambda & -1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -1 & -4\lambda \\ -2\lambda & -1-8\lambda^2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -4\lambda & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -2\lambda \\ -4\lambda & -1-8\lambda^2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -1-8\lambda^2 & -2\lambda \\ -4\lambda & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -6\lambda & -1 \end{bmatrix}$

4.3.12 Uyarı : Bu tabloda iki satıra ayrılmış olan kısımlarda elemanlar arasında değişme özelliği bulunmamaktadır. Dolayısıyla bu oluşan iki yeni satırdan üstteki, o ilgili hücredeki elemanlardan üreteç olanın diğer eleman ile sağdan çarpımının sonucunu göstermektedir. Alttaki ise, ilgili hücredeki elemanlardan üreteç olanın diğer eleman ile soldan çarpımının sonucunu göstermektedir.

Elde ettiğimiz 4.3.9, 4.3.10 ve 4.3.11 sonuçlarından yararlanarak $gp\ (A_{2\lambda}, B_{2\lambda})$ grubunun bazı elemanlarının matris temsillerine ilişkin; iz, transpoze, ters… gibi daha birçok özellik ile ilgili bulgular elde etmek mümkündür. Ancak bu kısmı daha fazla detaylandırmayacağız. Sadece birkaç özellik ile ilgili sonucu verip bu bölümü sonlandıracağız.

4.3.13 Sonuç : $\lambda \in \mathbb{C}$ iken, $[(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n]^t = (B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n$

4.3.14 Sonuç :

i) $P_{2n+1}(\lambda) = 0$ iken,

$$[(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^nB_{2\lambda}]^t = [B_{2\lambda}(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n(B_{2\lambda}\mathrm{A}_{2\lambda})^n]^t = A_{2\lambda}(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n = (B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^nA_{2\lambda}$$

ii) $P_{2n}(\lambda) = 0$ iken,

$$[(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^nB_{2\lambda}]^t = [B_{2\lambda}(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n]^t = A_{2\lambda}(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n = (B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^nA_{2\lambda}$$

iii) $P_{2n-1}(\lambda) = 0$ iken,

$$[(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^nB_{2\lambda}]^t = A_{2\lambda}(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n$$

$$[B_{2\lambda}(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n]^t = (B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^nA_{2\lambda}$$

4.3.15 Sonuç :

i) $P_{2n-1}(\lambda) = 0$ iken,

$$[(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^nA_{2\lambda}]^t = [A_{2\lambda}(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n]^t = B_{2\lambda}(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n = (B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^nB_{2\lambda}$$

ii) $P_{2n}(\lambda) = 0$ iken,

$$[(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^nA_{2\lambda}]^t = [A_{2\lambda}(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n]^t = B_{2\lambda}(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n = (B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^nB_{2\lambda}$$

iii) $P_{2n+1}(\lambda) = 0$ iken,

$$[(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^nA_{2\lambda}]^t = B_{2\lambda}(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n$$

$$[A_{2\lambda}(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^n(B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n]^t = (B_{2\lambda}A_{2\lambda})^n(A_{2\lambda}B_{2\lambda})^nB_{2\lambda}$$

4.3.16 Sonuç : Bu kısımda λ Pell polinomunun kökü olmak üzere, $gp\ (A_{2\lambda}, B_{2\lambda})$ grubunun bazı elemanlarının sahip olduğu özellikleri ve grubun elemanları arasındaki birtakım ilişkileri elemanların matris temsillerinden yararlanarak ortaya koyduk. Dolayısıyla $gp\ (A_{2\lambda}, B_{2\lambda})$ grubunun serbest grup olmadığı, grubun elemanları arasında elde edilen bu bağıntılar gereğince açıkça görülür.

5. GENİŞLETİLMİŞ GENEL HECKE GRUPLARININ FİBONACCİ, LUCAS, PELL, PELL-LUCAS, MODIFIED PELL VE GENELLEŞTİRİLMİŞ PELL SAYI DİZİLERİ İLE İLİŞKİSİ

Bu bölümde grup teorisi ile sayılar teorisi arasındaki ilişkileri; genişletilmiş genel Hecke grupları ile genelleştirilmiş Pell sayı dizisi ve klasik Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas ve modified Pell sayı dizileri ile bağlantılı olacak biçimde elde ettiğimiz özgün bulgularımızla sunacağız. Ayrıca elde ettiğimiz bu orijinal bulgular, [33,34] yayına sunulmuştur.

Literatürde Hecke grupları ya da genişletilmiş Hecke grupları ile klasik ya da genelleştirilmiş Fibonacci, Lucas, Pell ve Pell-Lucas sayı dizileri arasındaki ilişkilerin ortaya konulduğu çalışmaların başlıcaları [14-19]'dir. Bu çalışmalarda; belirli Hecke gruplarından bazı elemanlar alınmış ve bu elemanların matris temsilleri kullanılmış olup, bu temsillerin kuvvetleri alınarak elde edilen matrisin her bir ögesinin özel sayı dizileri ile olan ilişkileri gösterilmiştir. Bu çalışmaların belirli ortak özellikleri olduğu gibi kendilerine has bazı yaklaşım ve sonuçları da mevcuttur. Bu çalışmalardan Koruoğlu ve Şahin [15] genişletilmiş Hecke gruplarının bazı elemanlarının matris temsillerinin kuvvetlerini alıp, elde edilen matrisin ögelerinin genelleştirilmiş Fibonacci sayı dizisinin birer terimi olduğunu belirttiler. Özelde genişletilmiş modüler grupta çalışıldığında, bu grubun tüm elemanlarının matris temsillerindeki matris ögelerinin klasik Fibonacci sayı dizisinin birer terimi olduğunu ortaya koydular. Bu çalışmanın modüler grup ile ilgili olan kısmını kısaca aşağıdaki gibi özetleyebiliriz: Genişletilmiş Hecke gruplarının sunuşunun;

$$\overline{H}(\lambda_q) =< X, Y, R \mid X^2 = Y^q = R^2 = I\,, RX = X^{-1}R, RY = Y^{-1}R >\cong D_2 *_{\mathbb{Z}_2} D_q$$

biçiminde olduğu bilinmektedir. Eğer $q = 3$ alınırsa $\overline{H}(\lambda_3)$ genişletilmiş Hecke grubu elde edilir. Bu grubun sunuşu;

$$\overline{H}(\lambda_3) = < X, Y, R \mid X^2 = Y^3 = R^2 = I\,, RX = X^{-1}R, RY = Y^{-1}R > \cong D_2 *_{\mathbb{Z}_2} D_3$$

biçimindedir. Bu grup literatürde çok çalışılan bir grup olup, bu gruba genişletilmiş modüler grup adı verilir. Ayrıca bu grup $\overline{\Gamma}$ sembolü ile de gösterilmektedir. Bu grubun üreteçleri ve üreteçlerinin matris temsilleri:

$X(z) = -\frac{1}{z}$ üretecinin matris temsili : $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$Y(z) = -\frac{1}{z+1}$ üretecinin matris temsili : $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$R(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ üretecinin matris temsili : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

biçimdedir.

$f = RXY = XY^2R$ ve $h = XYR = RXY^2$ olsun. Böylece,

$$f = RXY = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$h = XYR = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

5.1 Lemma : $RXY = XY^2R = f \in \bar{\Gamma}$ ve F_k Fibonaci sayı dizisinin k. terimi olmak üzere,

$$f^k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} F_{k-1} & F_k \\ F_k & F_{k+1} \end{pmatrix}$$

biçimindedir [15].

5.2 Lemma : $XYR = RXY^2 = h \in \bar{\Gamma}$ ve F_k Fibonaci sayı dizisinin k. terimi olmak üzere,

$$h^k = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{pmatrix}$$

biçimindedir [15].

Ayrıca grup sunuşundan hareketle, $XY = Rf = hR$ ve $XY^2 = Rh = fR$ eşitliklerine ulaşılır.

Genişletilmiş modüler grubun her bir elamanı aşağıdaki iki formdan birine sahiptir [54,55]. Eğer verilen elamanın gösteriminde var olan *R* üretecinin kuvvetleri toplamı çift ise bu elemanın formu;

$$S^i(XY)^{m_0}(XY^2)^{n_0} \ldots (XY)^{m_k}(XY^2)^{n_k}T^j \qquad (5.1)$$

biçiminde olur. Eğer verilen elemanın gösteriminde var olan R üretecinin kuvvetleri toplamı tek ise bu elemanın formu;

$$RS^{i}(XY)^{m_0}(XY^2)^{n_0}\dots(XY)^{m_k}(XY^2)^{n_k}T^{j} \tag{5.2}$$

biçiminde olur. Böylece genişletilmiş modüler grubun herhangi bir elemanı (5.1) ya da (5.2) genel gösterimlerinden birine sahip olur. Bu iki formda da kuvvetlerle ilgili şu bilgiler geçerlidir:

$$i\ =\ 0,1,2\ ;\ j\ =\ 0,1\ ;\ n_0,\dots,m_k\in\{1,2,\dots\}\ ;\ m_0,n_k\in\{0,1,\dots\}$$

Bu formlarda var olan XY ve XY^2 blok olarak adlandırılır. $XY=Rf=hR$ ve $XY^2=Rh=fR$ eşitliklerinden yararlanarak XY ve XY^2 bloklarını f ve h 'yi kullanılarak yazmak mümkündür. Bu geçiş ile birlikte genişletilmiş modüler gruptaki herhangi bir elemanın matris temsilini, yukarıdaki lemmalar aracılığıyla Fibonacci sayılarını kullanarak yazmak mümkün hale gelir.

[15] numaralı çalışmada yapılanlardan hareketle, benzer bir yaklaşımı kullanarak genişletilmiş genel Hecke gruplarında özel sayı dizilerini inceleyeğiz. Kullanacağımız teknik ve elde edeceğimiz sonuçlar [15] çalışmasında yapılanlarla benzerlik gösterecek olsa da genişletilmiş genel Hecke gruplarının doğası gereği bazı farklılıkları da beraberinde getirecektir. Böylece bazı özgün bulguları elde etmiş olacağız.

Genişletilmiş genel Hecke gruplarında $p=3$ alıp elde ettiğimiz $\overline{H}_{3,q}$ grubunun bazı elemanlarının, genelleştirilmiş Pell sayı dizisi ile ilişkisini kuracağız. Ayrıca genişletilmiş genel Hecke gruplarında $p=q=3$ alıp elde ettiğimiz $\overline{H}_{3,3}$ grubun her bir elemanın matris temsilindeki matris ögelerinin herbirinin, özel sayı dizilerinin terimleriyle ilişkili olduğunu göstereceğiz. Burada karşımıza çıkacak sayı dizileri; Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas ve modified Pell sayı dizileridir.

Tüm bunları yapmadan önce çalışmamızda kullandığımız elemanların matris temsillerini $\overline{H}_{p,q}$ grubundan hareketle genel formda belirtelim, çalışmamızda geçen özel sayı dizilerini hatırlatalım ve bizim bu çalışmada yeni tanımladığımız genelleştirilmiş Pell sayı dizisini ortaya koyalım.

5.1 Genişletilmiş Genel Hecke Grubunun Bazı Elemanlarının Matris Temsilleri

Genişletilmiş genel Hecke gruplarından $\overline{H}_{p,q}$ gruplarındaki; parametrelerin, üreteçlerin, üreteçlerinin matris temsillerinin ve grup sunuşunun aşağıdaki biçimde olduğunu biliyoruz.

$p,q \in \mathbb{Z}$; $2 \leq p \leq q < \infty$ ve $p+q > 4$ için;

$\lambda_p = 2cos\frac{\pi}{p}$ ve $\lambda_q = 2cos\frac{\pi}{q}$ sayıları ile çalışılmaktadır.

$\overline{H}_{p,q}$ grubunun üreteçleri ve üreteçlerinin matris temsilleri;

$X(z) = -\frac{1}{z-\lambda_p}$ üretecinin matris temsili : $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\lambda_p \end{pmatrix}$

$Y(z) = -\frac{1}{z+\lambda_q}$ üretecinin matris temsili : $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \lambda_q \end{pmatrix}$

$R(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ üretecinin matris temsili : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

şeklindedir. $\overline{H}_{p,q}$ grubunun sunuşu;

$$\overline{H}_{p,q} =< X,Y,R \mid X^p = Y^q = R^2 = I\ , RX = X^{-1}R\ , RY = Y^{-1}R >\cong D_p *_{\mathbb{Z}_2} D_q$$

biçimindedir. Çalışmamızın bundan sonraki kısmında kullanacağımız elemanların matris temsillerinin aşağıdaki biçimde olacağı, $\overline{H}_{p,q}$ grubunun üreteçlerinin matris temsillerinden yararlanılarak elde edilir.

$$XY = \begin{pmatrix} -1 & -\lambda_q \\ -\lambda_p & -1-\lambda_p\lambda_q \end{pmatrix}$$

$$X^2Y = \begin{pmatrix} \lambda_p & 1+\lambda_p\lambda_q \\ -1+{\lambda_p}^2 & \lambda_p-\lambda_q+\lambda_q{\lambda_p}^2 \end{pmatrix}$$

$$XY^2 = \begin{pmatrix} -\lambda_q & 1-{\lambda_q}^2 \\ -1-\lambda_p\lambda_q & \lambda_p-\lambda_q-\lambda_p{\lambda_q}^2 \end{pmatrix}$$

$$X^2Y^2 = \begin{pmatrix} 1+\lambda_p\lambda_q & -\lambda_p+\lambda_q+\lambda_p{\lambda_q}^2 \\ \lambda_p-\lambda_q+{\lambda_p}^2\lambda_q & 1-{\lambda_p}^2+\lambda_p\lambda_q-{\lambda_q}^2+{\lambda_p}^2{\lambda_q}^2 \end{pmatrix}$$

$$XYR = \begin{pmatrix} -\lambda_q & -1 \\ -1-\lambda_p\lambda_q & -\lambda_p \end{pmatrix}$$

$$RXY = \begin{pmatrix} -\lambda_p & -1-\lambda_p\lambda_q \\ -1 & -\lambda_q \end{pmatrix}$$

$$X^2YR = \begin{pmatrix} 1+\lambda_p\lambda_q & \lambda_p \\ \lambda_p-\lambda_q+\lambda_q{\lambda_p}^2 & -1+{\lambda_p}^2 \end{pmatrix}$$

$$RX^2Y = \begin{pmatrix} -1+{\lambda_p}^2 & \lambda_p-\lambda_q+\lambda_q{\lambda_p}^2 \\ \lambda_p & 1+\lambda_p\lambda_q \end{pmatrix}$$

$$XY^2R = \begin{pmatrix} 1-{\lambda_q}^2 & -\lambda_q \\ \lambda_p-\lambda_q-\lambda_p{\lambda_q}^2 & -1-\lambda_p\lambda_q \end{pmatrix}$$

$$RXY^2 = \begin{pmatrix} -1-\lambda_p\lambda_q & \lambda_p-\lambda_q-\lambda_p{\lambda_q}^2 \\ -\lambda_q & 1-{\lambda_q}^2 \end{pmatrix}$$

$$X^2Y^2R = \begin{pmatrix} -\lambda_p+\lambda_q+\lambda_p{\lambda_q}^2 & 1+\lambda_p\lambda_q \\ 1-{\lambda_p}^2+\lambda_p\lambda_q-{\lambda_q}^2+{\lambda_p}^2{\lambda_q}^2 & \lambda_p-\lambda_q+{\lambda_p}^2\lambda_q \end{pmatrix}$$

$$RX^2Y^2 = \begin{pmatrix} \lambda_p-\lambda_q+{\lambda_p}^2\lambda_q & 1-{\lambda_p}^2+\lambda_p\lambda_q-{\lambda_q}^2+{\lambda_p}^2{\lambda_q}^2 \\ 1+\lambda_p\lambda_q & -\lambda_p+\lambda_q+\lambda_p{\lambda_q}^2 \end{pmatrix}$$

Genişletilmiş genel Hecke gruplarındaki herhangi bir elemana yansıma dönüşümünün yani R dönüşümünün etkisini aşağıdaki biçimde belirtmek mümkündür.

5.1.1 Uyarı : Genişletilmiş genel Hecke gruplarındaki bir elemanın matris temsili $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ olsun. Bu elemana R dönüşümünün sağdan etkisi aşağıdaki biçimdedir.

$$AR = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}$$

Görüldüğü üzere elde edilen elemanın matris temsili *A* matrisinin sütun değişimine uğramış halidir.

5.1.2 Uyarı : Genişletilmiş genel Hecke gruplarındaki bir elemanın matris temsili $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ olsun. Bu elemana R dönüşümünün soldan etkisi aşağıdaki biçimdedir.

$$RA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$$

Görüldüğü üzere elde edilen elemanın matris temsili A matrisinin satır değişimine uğramış halidir.

5.1.3 Sonuç : Yukarıdaki elde ettiğimiz iki uyarı incelendiğinde şu sonuca ulaşırız: AR ve RA elemanlarının matris temsilleri, birbirlerinin karşılıklı olarak asal köşegen üzerindeki elemanlarının ve yedek köşegen üzerindeki elemanlarının yer değişimine uğramış halidir.

Ayrıca genişletilmiş genel Hecke gruplarında herhangi bir elemanın matris temsili ile ilgili olarak aşağıdaki açıklama, çalışmamız için oldukça önemlidir.

5.1.4 Uyarı : Genişletilmiş genel Hecke gruplarında herhangi bir elemanının matris temsili $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ise $-\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$ matrisi de, A matrisinin temsil ettiği elemanı ifade eder [22].

5.2 Genişletilmiş Genel Hecke Grupları ile İlişkili Olan Klasik ve Genelleştirilmiş Sayı Dizileri

Genişletilmiş genel Hecke gruplarında $p = 3$ alarak elde edilen $\overline{H}_{3,q}$ grubunun bazı elemanlarının, yeni tanımladığımız genelleştirilmiş Pell sayı dizisi ile ilişkisini kuracağız. Buradaki sayı dizisini aşağıdaki biçimde tanımlıyoruz:

5.2.1 Tanım : G_n n. genelleştirilmiş Pell sayısını temsil etmek üzere; $\forall\, n \geq 2$ için,

$$G_0 = 0\,, G_1 = 1$$

$$G_n = \left(1 + \lambda_q\right) G_{n-1} + G_{n-2}$$

başlangıç koşulları ve tekrarlama bağıntısı ile tanımlıdır.

5.2.2 Uyarı : Yukarıdaki tanımda $\lambda_q = 1$ alındığı takdirde elde edilen dizinin klasik Pell sayı dizisi olduğu görülür.

Genişletilmiş genel Hecke gruplarında $p = q = 3$ alarak elde ettiğimiz $\overline{H}_{3,3}$ grubunun elemanlarının Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas ve modified Pell sayı dizisi ile ilişkisini kuracağız. 2.3 kısmında özelliklerini detaylı olarak verdiğimiz Fibonacci, Lucas, Pell ve Pell-Lucas sayılarının tanımını hatırlatıp Horadam'ın [5] çalışmasında da bahsedildiği biçimiyle modified Pell sayılarının tanımını vereceğiz. Ayrıca bu tanımlarla birlikte bu özel sayı dizilerinin birbirleriyle olan bazı ilişkilerini [5] numaralı çalışmadan ortaya koyacağız.

5.2.3 Tanım : F_n, L_n, P_n, Q_n ve q_n sırasıyla n. Fibonacci, n. Lucas, n. Pell, n. Pell-Lucas ve n. modified Pell sayısını temsil etmektedir. Bu sayı dizileri sırasıyla aşağıdaki başlangıç koşullarına ve tekrarlama bağıntısına sahiptir. $\forall\, n \geq 2$ için;

$$F_0 = 0\,, F_1 = 1 \text{ ve } F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

$$L_0 = 2\,, L_1 = 1 \text{ ve } L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$$

$$P_0 = 0\,, P_1 = 1 \text{ ve } P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$$

$$Q_0 = 2\,, Q_1 = 2 \text{ ve } Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}$$

$$q_0 = 1\,, q_1 = 1 \text{ ve } q_n = 2q_{n-1} + q_{n-2}$$

Ayrıca modified Pell sayıları ile Pell ve Pell-Lucas sayıları arasında aşağıdaki biçimiyle ifade edilen eşitliler bulunmaktadır [5].

$$Q_n = 2q_n$$
$$P_{n+1} + P_n = q_{n+1}$$

5.3 $\overline{H}_{3,q}$ Genişletilmiş Genel Hecke Gruplarının Genelleştirilmiş Pell Sayı Dizisi ile İlişkisi

Çalışmamızın bu kısmında genişletilmiş genel Hecke gruplarından $\overline{H}_{3,q}$ grubu ile önceki kısımda tanımladığımız genelleştirilmiş Pell sayı dizisi arasındaki tespit ettiğimiz ilişkileri ortaya koyacağız. $\overline{H}_{3,q}$ grubunun, X^2YR, RX^2Y, XYR ve RXY

elemanlarının matris temsillerinin her bir ögesinin genelleştirilmiş Pell sayıları ile ilgisini kurmayı, çalışmamızın 5.1 kısmında belirttiğimiz $\overline{H}_{p,q}$ grubunun bazı elemanlarının matris temsillerinden yararlanarak yapacağız. 5.1 kısmında belirtilen elemanlardan X^2YR, RX^2Y, XYR ve RXY için $p = 3$ alınarak $\lambda_p = 1$ değeri elde edilir. Böylece $\overline{H}_{3,q}$ grubundaki X^2YR, RX^2Y, XYR ve RXY elemanlarının matris temsili, Uyarı 5.1.4'ten de yararlanarak aşağıdaki biçimde gösterilir:

$$XYR = \begin{pmatrix} \lambda_q & 1 \\ 1+\lambda_q & 1 \end{pmatrix}$$

$$RXY = \begin{pmatrix} 1 & 1+\lambda_q \\ 1 & \lambda_q \end{pmatrix}$$

$$X^2YR = \begin{pmatrix} 1+\lambda_q & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$RX^2Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1+\lambda_q \end{pmatrix}$$

$\overline{H}_{3,q}$ grubundaki; X^2YR, RX^2Y, XYR ve RXY elemanların kuvvetleri alınarak elde edilen matrisin her bir ögesinin genelleştirilmiş Pell sayı dizisi ile olan ilişkilerini aşağıdaki biçimi ile elde ettik. Böylece genelleştirilmiş Pell sayı dizisinin bazı üreteç matrisleri de elde edilmiş olur.

5.3.1 Teorem : $G_0 = 0\,, G_1 = 1$ başlangıç koşulları ve $\forall\, n \geq 2$ için,

$$G_n = (1+\lambda_q)G_{n-1} + G_{n-2}$$

tekrarlama bağıntısı ile tanımlanan genelleştirilmiş Pell sayıları ile $X^2YR \in \overline{H}_{3,q}$ için;

$$(X^2YR)^k = \begin{pmatrix} G_{k+1} & G_k \\ G_k & G_{k-1} \end{pmatrix}$$

biçimindedir.

İspat : İspatı matematiksel tümevarım yönteminden yapacağız. $k = 2$ için;

$$\begin{aligned}(X^2YR)^2 &= \begin{pmatrix} 1+\lambda_q & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+\lambda_q & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1+(1+\lambda_q)^2 & 1+\lambda_q \\ 1+\lambda_q & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} G_3 & G_2 \\ G_2 & G_1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

olduğu görülür. Herhangi bir keyfi $k-1 \in Z^+$ için;

$$(X^2YR)^{k-1} = \begin{pmatrix} G_k & G_{k-1} \\ G_{k-1} & G_{k-2} \end{pmatrix}$$

olduğunu varsayalım. $k \in Z^+$ için;

$$(X^2YR)^k = \begin{pmatrix} G_{k+1} & G_k \\ G_k & G_{k-1} \end{pmatrix}$$

olduğunu gösterelim.

$$(X^2YR)^k = (X^2YR)^{k-1}(X^2YR) = \begin{pmatrix} G_k & G_{k-1} \\ G_{k-1} & G_{k-2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+\lambda_q & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (1+\lambda_q)G_k + G_{k-1} & G_k \\ (1+\lambda_q)G_{k-1} + G_{k-2} & G_{k-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} G_{k+1} & G_k \\ G_k & G_{k-1} \end{pmatrix}$$

olduğu tümevarım adımından ve genelleştirilmiş Pell sayı dizisinin tekrarlama bağıntısından yararlanılarak görülür. Böylece matematiksel tümavarım ilkesi gereğince $\forall\, k \in Z^+$ için;

$$(X^2YR)^k = \begin{pmatrix} G_{k+1} & G_k \\ G_k & G_{k-1} \end{pmatrix}$$

elde edilir.□

5.3.2 Teorem : $G_0 = 0$, $G_1 = 1$ başlangıç koşulları ve $\forall\, n \geq 2$ için,

$$G_n = (1+\lambda_q)G_{n-1} + G_{n-2}$$

tekrarlama bağıntısı ile tanımlanan genelleştirilmiş Pell sayıları ile $RX^2Y \in \overline{H}_{3,q}$ için;

$$(RX^2Y)^k = \begin{pmatrix} G_{k-1} & G_k \\ G_k & G_{k+1} \end{pmatrix}$$

biçimindedir.

İspat : İspatı matematiksel tümevarım ilkesinden yapacağız. $k = 2$ için;

$$(RX^2Y)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1+\lambda_q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1+\lambda_q \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1+\lambda_q \\ 1+\lambda_q & 1+(1+\lambda_q)^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} G_1 & G_2 \\ G_2 & G_3 \end{pmatrix}$$

olduğu görülür. Herhangi bir keyfi $k - 1 \in Z^+$ için;

$$(RX^2Y)^{k-1} = \begin{pmatrix} G_{k-2} & G_{k-1} \\ G_{k-1} & G_k \end{pmatrix}$$

olduğunu varsayalım. $k \in Z^+$ için;

$$(\mathrm{R}X^2Y)^k = \begin{pmatrix} G_{k-1} & G_k \\ G_k & G_{k+1} \end{pmatrix}$$

olduğunu gösterelim.

$$(RX^2Y)^k = (RX^2Y)^{k-1}(RX^2Y) = \begin{pmatrix} G_{k-2} & G_{k-1} \\ G_{k-1} & G_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1+\lambda_q \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} G_{k-1} & (1+\lambda_q)G_{k-1} + G_{k-2} \\ G_k & (1+\lambda_q)G_k + G_{k-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} G_{k-1} & G_k \\ G_k & G_{k+1} \end{pmatrix}$$

olduğu tümevarım adımından ve genelleştirilmiş Pell sayı dizisinin tekrarlama bağıntısından yararlanılarak görülür. Böylece matematiksel tümavarım ilkesi gereğince $\forall\, k \in Z^+$ için;

$$(RX^2Y)^k = \begin{pmatrix} G_{k-1} & G_k \\ G_k & G_{k+1} \end{pmatrix}$$

elde edilir.□

5.3.3 Teorem : $G_0 = 0\,, G_1 = 1$ başlangıç koşulları ve $\forall\, n \geq 2$ için,

$$G_n = (1+\lambda_q)G_{n-1} + G_{n-2}$$

tekrarlama bağıntısı ile tanımlanan genelleştirilmiş Pell sayıları ile $XYR \in \overline{H}_{3,q}$ için;

$$(XYR)^k = \begin{pmatrix} \lambda_q G_k + G_{k-1} & G_k \\ (1+\lambda_q)G_k & G_k + G_{k-1} \end{pmatrix}$$

biçimindedir.

İspat : İspatı matematiksel tümevarım ilkesinden yapacağız. $k = 2$ için;

$$(XYR)^2 = \begin{pmatrix} \lambda_q & 1 \\ 1+\lambda_q & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_q & 1 \\ 1+\lambda_q & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {\lambda_q}^2 + \lambda_q + 1 & 1+\lambda_q \\ (1+\lambda_q)\lambda_q + 1 + \lambda_q & 1+\lambda_q+1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_q(1+\lambda_q) + 1 & 1+\lambda_q \\ (1+\lambda_q)(1+\lambda_q) & 1+\lambda_q+1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_q G_2 + G_1 & G_2 \\ (1+\lambda_q)G_2 & G_2 + G_1 \end{pmatrix}$$

olduğu görülür. Herhangi bir keyfi $k-1 \in Z^{+}$ için;

$$(XYR)^{k-1}=\begin{pmatrix}\lambda_q G_{k-1}+G_{k-2} & G_{k-1}\\ (1+\lambda_q)G_{k-1} & G_{k-1}+G_{k-2}\end{pmatrix}$$

olduğunu varsayalım. $k \in Z^{+}$ için;

$$(XYR)^{k}=\begin{pmatrix}\lambda_q G_{k}+G_{k-1} & G_{k}\\ (1+\lambda_q)G_{k} & G_{k}+G_{k-1}\end{pmatrix}$$

olduğunu gösterelim.

$$(XYR)^{k}=(XYR)^{k-1}(XYR)=\begin{pmatrix}\lambda_q G_{k-1}+G_{k-2} & G_{k-1}\\ (1+\lambda_q)G_{k-1} & G_{k-1}+G_{k-2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_q & 1\\ 1+\lambda_q & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda_q(\lambda_q G_{k-1}+G_{k-2})+(1+\lambda_q)G_{k-1} & \lambda_q G_{k-1}+G_{k-2}+G_{k-1}\\ \lambda_q(1+\lambda_q)G_{k-1}+(1+\lambda_q)(G_{k-1}+G_{k-2}) & (1+\lambda_q)G_{k-1}+G_{k-1}+G_{k-2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda_q[(1+\lambda_q)G_{k-1}+G_{k-2}]+G_{k-1} & (1+\lambda_q)G_{k-1}+G_{k-2}\\ (1+\lambda_q)(\lambda_q G_{k-1}+G_{k-1}+G_{k-2}) & (1+\lambda_q)G_{k-1}+G_{k-1}+G_{k-2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda_q[(1+\lambda_q)G_{k-1}+G_{k-2}]+G_{k-1} & (1+\lambda_q)G_{k-1}+G_{k-2}\\ (1+\lambda_q)[(1+\lambda_q)G_{k-1}+G_{k-2}] & [(1+\lambda_q)G_{k-1}+G_{k-2}]+G_{k-1}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda_q G_{k}+G_{k-1} & G_{k}\\ (1+\lambda_q)G_{k} & G_{k}+G_{k-1}\end{pmatrix}$$

olduğu tümevarım adımından ve genelleştirilmiş Pell sayı dizisinin tekrarlama bağıntısından yararlanılarak görülür. Böylece matematiksel tümavarım ilkesi gereğince $\forall\, k \in Z^{+}$ için;

$$(XYR)^{k}=\begin{pmatrix}\lambda_q G_{k}+G_{k-1} & G_{k}\\ (1+\lambda_q)G_{k} & G_{k}+G_{k-1}\end{pmatrix}$$

elde edilir.□

5.3.4 Teorem: $G_0=0\,, G_1=1$ başlangıç koşulları ve $\forall\, n \geq 2$ için,

$$G_n=(1+\lambda_q)G_{n-1}+G_{n-2}$$

tekrarlama bağıntısı ile tanımlanan genelleştirilmiş Pell sayıları ile $RXY \in \overline{H}_{3,q}$ için;

$$(RXY)^{k}=\begin{pmatrix}G_{k}+G_{k-1} & (1+\lambda_q)G_{k}\\ G_{k} & \lambda_q G_{k}+G_{k-1}\end{pmatrix}$$

biçimindedir.

İspat : İspatı matematiksel tümevarım ilkesinden yapacağız. $k=2$ için;

$$(RXY)^2=\begin{pmatrix}1 & 1+\lambda_q\\ 1 & \lambda_q\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1+\lambda_q\\ 1 & \lambda_q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+1+\lambda_q & 1+\lambda_q+\lambda_q(1+\lambda_q)\\ 1+\lambda_q & 1+\lambda_q+{\lambda_q}^2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1+\lambda_q+1 & (1+\lambda_q)(1+\lambda_q)\\ 1+\lambda_q & \lambda_q(1+\lambda_q)+1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}G_2+G_1 & (1+\lambda_q)G_2\\ G_2 & \lambda_q G_2+G_1\end{pmatrix}$$

olduğu görülür. Herhangi bir keyfi $k-1\in Z^+$ için;

$$(RXY)^{k-1}=\begin{pmatrix}G_{k-1}+G_{k-2} & (1+\lambda_q)G_{k-1}\\ G_{k-1} & \lambda_q G_{k-1}+G_{k-2}\end{pmatrix}$$

olduğunu varsayalım. $k\in Z^+$ için;

$$(RXY)^k=\begin{pmatrix}G_k+G_{k-1} & (1+\lambda_q)G_k\\ G_k & \lambda_q G_k+G_{k-1}\end{pmatrix}$$

olduğunu gösterelim.

$$(RXY)^k=(RXY)^{k-1}(RXY)=\begin{pmatrix}G_{k-1}+G_{k-2} & (1+\lambda_q)G_{k-1}\\ G_{k-1} & \lambda_q G_{k-1}+G_{k-2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1+\lambda_q\\ 1 & \lambda_q\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}(1+\lambda_q)G_{k-1}+G_{k-1}+G_{k-2} & \lambda_q(1+\lambda_q)G_{k-1}+(1+\lambda_q)(G_{k-1}+G_{k-2})\\ \lambda_q G_{k-1}+G_{k-2}+G_{k-1} & \lambda_q(\lambda_q G_{k-1}+G_{k-2})+(1+\lambda_q)G_{k-1}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}(1+\lambda_q)G_{k-1}+G_{k-1}+G_{k-2} & (1+\lambda_q)(\lambda_q G_{k-1}+G_{k-1}+G_{k-2})\\ (1+\lambda_q)G_{k-1}+G_{k-2} & \lambda_q[(1+\lambda_q)G_{k-1}+G_{k-2}]+G_{k-1}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}[(1+\lambda_q)G_{k-1}+G_{k-2}]+G_{k-1} & (1+\lambda_q)[(1+\lambda_q)G_{k-1}+G_{k-2}]\\ (1+\lambda_q)G_{k-1}+G_{k-2} & \lambda_q[(1+\lambda_q)G_{k-1}+G_{k-2}]+G_{k-1}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}G_k+G_{k-1} & (1+\lambda_q)G_k\\ G_k & \lambda_q G_k+G_{k-1}\end{pmatrix}$$

olduğu tümevarım adımından ve genelleştirilmiş Pell sayı dizisinin tekrarlama bağıntısından yararlanılarak görülür. Böylece matematiksel tümavarım ilkesi gereğince $\forall\, k\in Z^+$ için;

$$(RXY)^k=\begin{pmatrix}G_k+G_{k-1} & (1+\lambda_q)G_k\\ G_k & \lambda_q G_k+G_{k-1}\end{pmatrix}$$

elde edilir.□

5.4 $\overline{H}_{3,3}$ Genişletilmiş Genel Hecke Grubunun Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas ve Modified Pell Sayı Dizileri ile İlişkisi

Önceki kısımda genişletilmiş genel Hecke gruplarından $\overline{H}_{3,q}$ grubunun birtakım elemanlarının matris temsillerinin genelleştirilmiş Pell sayı dizisi ile olan ilişkisini genel formda λ_q paremetresine bağlı olarak elde ettik. Bu kısımda $\overline{H}_{3,3}$ grubu ile çalışacağımız için $q = 3$ alarak $\lambda_q = 1$ değerini elde edeceğiz. Böylece $G_0 = 0$, $G_1 = 1$ için, $G_n = (1 + \lambda_q)G_{n-1} + G_{n-2}$ biçiminde tanımladığımız genelleştirilmiş Pell sayı dizisinin $\lambda_q = 1$ değeri için, klasik Pell sayı dizisi haline geldiği görülür. Böylece 5.3.1, 5.3.2, 5.3.3 ve 5.3.4 teoremlerinde $\overline{H}_{3,q}$ için birtakım grup elemanlarının matris temsilleri ile genelleştirilmiş Pell sayı dizisi arasında elde ettiğimiz ilişkiler, $\overline{H}_{3,3}$ grubu için ilgili teoremlerde $\lambda_q = 1$ seçilimi ile klasik Pell sayı dizileri ile ilişkili olacağı açıktır. Ayrıca $\overline{H}_{3,3}$ grubunun grup sunuşundan yararlanıldığında bu ilişkilerin $\overline{H}_{3,3}$ grubunun her bir elemanı için var olacağı görülecektir. Bulgularımızın herbir elemana yönelik olduğunu daha anlaşılır olması adına; genişletilmiş modüler grup ile Fibonacci sayı dizisi arasındaki ilişkilerin her bir eleman için elde edildiği [15] numaralı çalışmada geçen blok yapıları perspektifinden düşünülebilir. Bununla birlikte bu kısımda; $\overline{H}_{3,3}$ grubunun her bir elemanının matris temsilinin, klasik Pell sayı dizisi ile ilişkisini 5.3.1, 5.3.2, 5.3.3 ve 5.3.4 teoremlerinden yararlanarak elde edeceğimiz gibi, [5] numaralı çalışmada belirtilen $Q_n = 2q_n$ ve $P_{n+1} + P_n = q_{n+1}$ eşitliklerinden yararlanarak $\overline{H}_{3,3}$ grubunun elemanlarının matris temsillerinde Pell-Lucas ve modified Pell sayı dizileri ile ilişkili olan kısımları da ifade edeceğiz.

Genişletilmiş genel Hecke gruplarından $\overline{H}_{p,q}$ gruplarında $p = q = 3$ alınarak elde edilen $\overline{H}_{3,3}$ grubunun üreteçleri, üreteçlerinin matris temsilleri ve grup sunuşu şu şekildedir:

$X(z) = -\frac{1}{z-1}$ üretecinin matris temsili : $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$Y(z) = -\frac{1}{z+1}$ üretecinin matris temsili : $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$R(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ üretecinin matris temsili : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

şeklinde olup grup sunuşu;

$$\overline{H}_{3,3} =< X, Y, R \mid X^3 = Y^3 = R^2 = (XR)^2 = (YR)^2 = I >\cong D_3 *_{\mathbb{Z}_2} D_3$$

ya da

$$\overline{H}_{3,3} =< X, Y, R \mid X^3 = Y^3 = R^2 = I\ , RX = X^2R, RY = Y^2R >\cong D_3 *_{\mathbb{Z}_2} D_3$$

biçimindedir.

$\overline{H}_{3,3}$ genişletilmiş genel Hecke grubunun sunuşundan hareketle, bu gruptaki herhangi bir elemanın gösterimini; XY, X^2Y, XY^2 ve X^2Y^2 elemanlarının her birinin R üretecinin sol ya da sağ çarpan olacak biçimde çeşitli kombinasyonlarının kuvvetleri olarak yazılır. Bu yazılan temsilde bu yapının ilk terimi olarak Y, Y^2 ya da $Y^3 = I$ bulunabileceği gibi bu yapının son terimi olarak da R ile birlikte X, Y, X^2, Y^2 ya da I bulunabilir. Yani $\overline{H}_{3,3}$ genişletilmiş genel Hecke grubunun herhangi bir elemanının yazılışında $XY, X^2Y, XY^2\ ve\ X^2Y^2$ yapıları karşımıza çıkar. Örneğin; $\overline{H}_{3,3}$ grubundan $YXXYXXYXXYYYXY$ elemanını $X^3 = Y^3 = I$ eşitliğinden hareketle,

$$Y(XXY)(XXY)(XX)(YYY)XY = YX^2YX^2YY$$

biçiminde ifade ederiz. Ayrıca $R^2 = I$ oluşundan hareketle bu elemanın temsilini aşağıdaki biçimde yazabiliriz ki bu yazılışın önemi, genel formda ileriki kısımlarda detaylı bir biçimde açıklayacağımız Pell ve Pell-Lucas sayı dizileri ile ilişkinin kurulmasını sağlamak olacaktır.

$$Y(XXY)(XXY)(XX)(YYY)XY = YX^2YX^2YY = Y(X^2YR)(RX^2Y)Y$$

şeklinde göstermek mümkündür.

5.4.1 Sonuç : $\overline{H}_{3,3}$ grubunda;

i) $X^2YR = RXY^2$

ii) $XY^2R = RX^2Y$

iii) $XYR = RX^2Y^2$

iv) $X^2Y^2R = RXY$

İspat : $\overline{H}_{3,3}$ grubunda; $RX = X^2R, RY = Y^2R$ eşitliklerinin varlığı grup sunuşundan bilinmektedir. $RY = Y^2R$ eşitliğinden yararlanarak $YR = RY^2$

eşitliğine ulaşırız. Ayrıca, benzer biçimde $RX = X^2R$ eşitliğinden yararlanarak $XR = RX^2$ eşitliğine ulaşırız. $\overline{H}_{3,3}$ grubunun sunuşundan yararlanarak elde edilen eşitlikler kullanıldığında ispat aşağıdaki gibi yapılır.

i) $YR = RY^2$ ve $RX = X^2R$ eşitliklerinden yararlanıldığında;

$$X^2YR = X^2(YR) = X^2(RY^2) = (X^2R)Y^2 = (RX)Y^2 = RXY^2$$

olarak elde edilir.

ii) $RY = Y^2R$ ve $XR = RX^2$ eşitliklerinden yararlanıldığında;

$$XY^2R = X(Y^2R) = X(RY) = (XR)Y = (RX^2)Y = RX^2Y$$

olarak elde edilir.

iii) $YR = RY^2$ ve $XR = RX^2$ eşitliklerinden yararlanıldığında;

$$XYR = X(YR) = X(RY^2) = (XR)Y^2 = (RX^2)Y^2 = RX^2Y^2$$

olarak elde edilir.

iv) $RY = Y^2R$ ve $RX = X^2R$ eşitliklerinden yararlanıldığında;

$$X^2Y^2R = X^2(Y^2R) = X^2(RY) = (X^2R)Y = (RX)Y = RXY$$

olarak elde edilir.

$\overline{H}_{3,3}$ grubunda;

$$m = X^2YR = RXY^2$$

$$n = XY^2R = RX^2Y$$

$$t = XYR = RX^2Y^2$$

$$l = X^2Y^2R = RXY$$

olsun. Böylece;

$$m = X^2YR = RXY^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$n = XY^2R = RX^2Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$t = XYR = RX^2Y^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$l = X^2Y^2R = RXY = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

olduğu görülür. Bu elemanların matris temsillerinin kuvvetlerini aldığımızda, elde edilen matrisin ögelerinin Pell, Pell-Lucas ve modified Pell sayı dizileri ile ilişkili olacağı görülecektir. Bunu aşağıdaki şekilde belirtelim.

5.4.2 Sonuç : $\overline{H}_{3,3}$ grubunda; $m = X^2YR = RXY^2$ olmak üzere,

$$m^k = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} P_{k+1} & P_k \\ P_k & P_{k-1} \end{pmatrix}$$

biçimindedir.

İspat : Teorem 5.3.1'de $\lambda_q = 1$ alındığında ve Sonuç 5.4.1'de $\overline{H}_{3,3}$ grubu için var olan $X^2YR = RXY^2$ eşitliğinden yararlanıldığında;

$$m^k = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} P_{k+1} & P_k \\ P_k & P_{k-1} \end{pmatrix}$$

olduğu görülür.

5.4.3 Sonuç : $\overline{H}_{3,3}$ grubunda; $n = XY^2R = RX^2Y$ olmak üzere,

$$n^k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} P_{k-1} & P_k \\ P_k & P_{k+1} \end{pmatrix}$$

biçimdedir.

İspat : Teorem 5.3.2'de $\lambda_q = 1$ alındığında ve Sonuç 5.4.1'de $\overline{H}_{3,3}$ grubu için var olan $XY^2R = RX^2Y$ eşitliğinden yararlanıldığında;

$$n^k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} P_{k-1} & P_k \\ P_k & P_{k+1} \end{pmatrix}$$

olduğu görülür.

5.4.4 Sonuç : $\overline{H}_{3,3}$ grubunda; $t = XYR = RX^2Y^2$ olmak üzere,

$$t^k = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} P_{k-1} + P_k & P_k \\ 2P_k & P_{k-1} + P_k \end{pmatrix}$$

biçimindedir.

İspat : Teorem 5.3.3'de $\lambda_q = 1$ alındığında ve Sonuç 5.4.1'de $\overline{H}_{3,3}$ grubu için var olan $XYR = RX^2Y^2$ eşitliğinden yararlanıldığında;

$$t^k = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} P_{k-1} + P_k & P_k \\ 2P_k & P_{k-1} + P_k \end{pmatrix}$$

olduğu görülür.

5.4.5 Sonuç : $\overline{H}_{3,3}$ grubunda; $l = X^2Y^2R = RXY$ olmak üzere,

$$l^k = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} P_{k-1} + P_k & 2P_k \\ P_k & P_{k-1} + P_k \end{pmatrix}$$

biçimindedir.

İspat : Teorem 5.3.4'de $\lambda_q = 1$ alındığında ve Sonuç 5.4.1'de $\overline{H}_{3,3}$ grubu için var olan $X^2Y^2R = RXY$ eşitliğinden yararlanıldığında;

$$l^k = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} P_{k-1} + P_k & 2P_k \\ P_k & P_{k-1} + P_k \end{pmatrix}$$

olduğu görülür.

Ayrıca [5] numaralı çalışmadan aşağıdaki eşitlikler bilinmektedir.

$$Q_k = 2q_k$$

$$P_k + P_{k-1} = q_k$$

Bu eşitliklerden yararlanarak;

$$P_{k-1} + P_k = q_k = \frac{Q_k}{2}$$

ifadesine ulaşırız. Böylece Sonuç 5.4.4 ve Sonuç 5.4.5'te elde ettiklerimizi aşağıdaki biçimde belirtmek mümkün hale gelir.

5.4.6 Sonuç : $\overline{H}_{3,3}$ grubunda; $t = XYR = RX^2Y^2$ olmak üzere,

$$t^k = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \frac{Q_k}{2} & P_k \\ 2P_k & \frac{Q_k}{2} \end{pmatrix}$$

biçimindedir.

İspat : Sonuç 5.4.4'ten, $t^k = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} P_{k-1} + P_k & P_k \\ 2P_k & P_{k-1} + P_k \end{pmatrix}$ olduğu bilinmektedir. Ayrıca, $P_{k-1} + P_k = \frac{Q_k}{2}$ eşitliğinden yararlanıldığında;

$$t^k = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \dfrac{Q_k}{2} & P_k \\ 2P_k & \dfrac{Q_k}{2} \end{pmatrix}$$

elde edilir.□

5.4.7 Sonuç : $\overline{H}_{3,3}$ grubunda; $t = XYR = RX^2Y^2$ olmak üzere,

$$t^k = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} q_k & P_k \\ 2P_k & q_k \end{pmatrix}$$

biçimindedir.

İspat : Sonuç 5.4.4'ten, $t^k = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} P_{k-1} + P_k & P_k \\ 2P_k & P_{k-1} + P_k \end{pmatrix}$ olduğu bilinmektedir. Ayrıca, $P_{k-1} + P_k = q_k$ eşitliğinden yararlanıldığında;

$$t^k = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} q_k & P_k \\ 2P_k & q_k \end{pmatrix}$$

elde edilir.□

5.4.8 Sonuç : $\overline{H}_{3,3}$ grubunda; $l = X^2Y^2R = RXY$ olmak üzere,

$$l^k = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \dfrac{Q_k}{2} & 2P_k \\ P_k & \dfrac{Q_k}{2} \end{pmatrix}$$

biçimindedir.

İspat : Sonuç 5.4.5'ten, $l^k = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} P_{k-1} + P_k & 2P_k \\ P_k & P_{k-1} + P_k \end{pmatrix}$ olduğu bilinmektedir. Ayrıca, $P_{k-1} + P_k = \frac{Q_k}{2}$ eşitliğinden yararlanıldığında;

$$l^k = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \dfrac{Q_k}{2} & 2P_k \\ P_k & \dfrac{Q_k}{2} \end{pmatrix}$$

elde edilir.□

5.4.9 Sonuç : $\overline{H}_{3,3}$ grubunda; $l = X^2Y^2R = RXY$ olmak üzere,

$$l^k = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} q_k & 2P_k \\ P_k & q_k \end{pmatrix}$$

biçimindedir.

İspat : Sonuç 5.4.5'ten, $l^k = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} P_{k-1} + P_k & 2P_k \\ P_k & P_{k-1} + P_k \end{pmatrix}$ olduğu bilinmektedir. Ayrıca, $P_{k-1} + P_k = q_k$ eşitliğinden yararlanıldığında;

$$l^k = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} q_k & 2P_k \\ P_k & q_k \end{pmatrix}$$

elde edilir.□

5.4.10 Uyarı : Tanımladığımız genelleştirilmiş Pell sayı dizisinden yararlanarak elde ettiğimiz ve yukarıda sonuçlar halinde ortaya koyduğumuz üreteç matrislerin bazıları, literatürdeki birtakım çalışmalarla çakışır. Örneğin; Ercolano'nun [9] numaralı çalışmasında $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} P_{k+1} & P_k \\ P_k & P_{k-1} \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \frac{Q_k}{2} & 2P_k \\ P_k & \frac{Q_k}{2} \end{pmatrix}$ olarak elde edilmiştir.

5.4.11 Örnek : $\overline{H}_{3,3}$ grubunda $XYYXXYXYYXY$ elemanının matris temsilini Pell sayıları ile ilişkili olacak biçimde yazalım.

$XY^2 = Rm = nR$, $X^2Y = Rn$, $XY = Rl$ ve $R^2 = I$ eşitlikleri ile $XYYXXYXYYXY$ elemanını aşağıdaki biçimde göstermek mümkündür:

$$\begin{aligned} XYYXXYXYYXY &= (XYY)(XXY)(XYY)(XY) \\ &= (Rm)(Rn)(Rm)(Rl) \\ &= (nR)(Rn)(nR)(Rl) \\ &= n^3 l \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P_2 & P_3 \\ P_3 & P_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 + P_1 & 2P_1 \\ P_1 & P_0 + P_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5.4.12 Örnek : $\overline{H}_{3,3}$ grubunda $XXYXYYXXYXXYXXYXY$ elemanının Pell sayıları ile bağlantısını aşağıdaki biçimi ile kurmak mümkündür.

$X^2Y = Rn = mR$, $XY^2 = Rm$, $XY = Rl$ ve $R^2 = I$ eşitlikleri ile $XXYXYYXXYXXYXXYXY$ elemanını aşağıdaki biçimde göstermek mümkündür:

$$
\begin{aligned}
XXYXYYXXYXXYXXYXY &= (XXY)(XYY)(XXY)(XXY)(XXY)(XY) \\
&= (Rn)(Rm)(Rn)(Rn)(Rn)(Rl) \\
&= (mR)(Rm)(mR)(Rn)(mR)(Rl) \\
&= m^3nml \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} P_4 & P_3 \\ P_3 & P_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 & P_1 \\ P_1 & P_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_2 & P_1 \\ P_1 & P_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 + P_1 & 2P_1 \\ P_1 & P_0 + P_1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

5.4.13 Örnek : $\overline{H}_{3,3}$ grubunda $XXYXYXYXXYXXYYXYY$ elemanının matris temsilini Pell sayıları ile ilişkili olacak biçimde yazalım.

$X^2Y = Rn = mR$, $XY = Rl = tR$, $X^2Y^2 = Rt = lR$, $XY^2 = Rm$ ve $R^2 = I$ eşitlikleri ile, $XXYXYXYXXYXXYYXYY$ elemanını aşağıdaki biçimde göstermek mümkündür:

$$
\begin{aligned}
XXYXYXYXXYXXYYXYY &= (XXY)(XY)(XY)(XXY)(XXYY)(XYY) \\
&= (Rn)(Rl)(Rl)(Rn)(Rt)(Rm) \\
&= (mR)(Rl)(tR)(Rn)(lR)(Rm) \\
&= mltnlm \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} P_2 & P_1 \\ P_1 & P_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 + P_1 & 2P_1 \\ P_1 & P_0 + P_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 + P_1 & P_1 \\ 2P_1 & P_0 + P_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 & P_1 \\ P_1 & P_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 + P_1 & 2P_1 \\ P_1 & P_0 + P_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_2 & P_1 \\ P_1 & P_0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

5.4.14 Örnek : $\overline{H}_{3,3}$ grubunda $RXRYYRXRYYXRYRXXY$ elemanının matris temsilini Pell sayıları ile ilişkili olacak biçimde yazalım.

$\overline{H}_{3,3}$ grubunun sunuşundan $RX = X^2R$, $RY = Y^2R$ olduğu bilinmektedir. Yine grup sunuşundan $R^2 = I$ eşitliğini, $RX = X^2R$, $RY = Y^2R$ eşitliklerinde kullanıdığımızda; $RXR = X^2$ ve $YR = RY^2$ olduğu kolayca görülür. Bu eşitlikleri;

$RXRYYRXRYYXRYRXXY$ elemanında kullanırsak;

$$\begin{aligned}
RXRYYRXRYYXRYRXXY &= (RXR)YY(RX)RYYXR(YR)(XXY) \\
&= (X^2)YY(X^2R)RYYXR(RY^2)(X^2Y) \\
&= (X^2)YYX^2(RR)YYX(RR)Y^2(X^2Y) \\
&= (X^2)YYX^2YYXY^2(X^2Y) \\
&= (X^2Y^2)(X^2Y^2)(XY^2)(X^2Y)
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $X^2Y^2 = Rt = lR$, $XY^2 = Rm = nR$ ve $X^2Y = Rn$ eşitlikleri ile, $RXRYYRXRYYXRYRXXY = (X^2Y^2)(X^2Y^2)(XY^2)(X^2Y)$ elemanını aşağıdaki biçimde göstermek mümkündür:

$$\begin{aligned}
(X^2Y^2)(X^2Y^2)(XY^2)(X^2Y) &= (Rt)(Rt)(Rm)(Rn) \\
&= (lR)(Rt)(nR)(Rn) \\
&= ltn^2 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^2 \\
&= \begin{pmatrix} P_0 + P_1 & 2P_1 \\ P_1 & P_0 + P_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_0 + P_1 & P_1 \\ 2P_1 & P_0 + P_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Özetle belirtirsek, bu bölümün buraya kadar olan kısmında, $\overline{H}_{3,3}$ grubundaki herhangi bir elemanın matris temsilinin Pell sayıları kullanılarak ifade edilebileceğini göstermiş olduk. Hatta, birtakım özdeşlikler yardımıyla, $\overline{H}_{3,3}$ grubundaki bir elemanın matris temsilinin Pell, Pell-Lucas ve modified Pell sayıları kullanılarak ifade edilebileceğini ortaya koyduk. Bu bölümün bundan sonraki kısmında ise $\overline{H}_{3,3}$ grubundaki bazı elemanların matris temsillerinin ve bu matris temsilinin kuvvetlerinin Fibonacci sayıları ile ilişkili olduğunu ifade edeceğiz. Ayrıca, bu matris temsillerinin izlerinin birer Lucas sayısı olduğunu ortaya koyacağız.

$\overline{H}_{3,3}$ grubunda, $a = XY$, $b = X^2Y^2$, $c = YX$ ve $d = Y^2X^2$ olsun. Böylece;

$$a = XY = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b = X^2Y^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c = YX = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$d = Y^2X^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

olduğu görülür. Bu matrislerin kuvvetlerini aldığımızda, elde edilen matrisin ögelerinin Fibonacci sayı dizisi ile ilişkili olduğu görülür.

5.4.15 Teorem : $\overline{H}_{3,3}$ grubunda $a = XY$ olmak üzere,

$$a^k = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} F_{2k-1} & F_{2k} \\ F_{2k} & F_{2k+1} \end{pmatrix}$$

biçiminde olup, bu matrisin izi L_{2k}'dır [17].

5.4.16 Teorem : $\overline{H}_{3,3}$ grubunda $b = X^2Y^2$ olmak üzere,

$$b^k = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} F_{2k+1} & F_{2k} \\ F_{2k} & F_{2k-1} \end{pmatrix}$$

biçiminde olup, bu matrisin izi L_{2k}'dır [17].

5.4.17 Teorem : $\overline{H}_{3,3}$ grubunda $c = YX$ olmak üzere,

$$c^k = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} F_{2k-1} & -F_{2k} \\ -F_{2k} & F_{2k+1} \end{pmatrix}$$

biçiminde olup, bu matrisin izi L_{2k}'dır.

5.4.18 Teorem : $\overline{H}_{3,3}$ grubunda $d = Y^2X^2$ olmak üzere,

$$d^k = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} F_{2k+1} & -F_{2k} \\ -F_{2k} & F_{2k-1} \end{pmatrix}$$

biçiminde olup, bu matrisin izi L_{2k}'dır.

5.4.19 Örnek : $\overline{H}_{3,3}$ grubunda $(X^2Y^2)^3(YX)^2(XY)^4(Y^2X^2)^2$ elemanının matris temsilini Fibonacci sayıları ile ilişkili olacak biçimde yazalım.

Yukarıdaki teoremlerden yararlanıldığında, $(X^2Y^2)^3(YX)^2(XY)^4(Y^2X^2)^2$ elemanını aşağıdaki biçimde göstermek mümkündür:

$$\begin{aligned}(X^2Y^2)^3(YX)^2(XY)^4(Y^2X^2)^2 &= b^3c^2a^4d^2 \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^4 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^2 \\ &= \begin{pmatrix} F_7 & F_6 \\ F_6 & F_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_3 & -F_4 \\ -F_4 & F_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_7 & F_8 \\ F_8 & F_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_5 & -F_4 \\ -F_4 & F_3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

5.4.20 Örnek : $\overline{H}_{3,3}$ grubunda,

$$X^2YXY^2XY^2X^2YXY^2X^2Y(XY)^3(Y^2X^2)^5XYX^2Y^2X^2Y^2XY(X^2Y^2)^4(YX)^3$$

elemanının matris temsilini Fibonacci, Pell, Pell-Lucas ve modified Pell sayıları ile ilişkili olacak şekilde yazalım.

$$m = X^2YR = RXY^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$n = XY^2R = RX^2Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$t = XYR = RX^2Y^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$l = X^2Y^2R = RXY = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a = XY = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b = X^2Y^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c = YX = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$d = Y^2X^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

biçiminde olduğu ve kuvvetlerinin de aşağıdaki şekilde olduğu bu bölümdeki bulgularımız aracılığı ile bilinmektedir.

$$m^k = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} P_{k+1} & P_k \\ P_k & P_{k-1} \end{pmatrix}$$

$$n^k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} P_{k-1} & P_k \\ P_k & P_{k+1} \end{pmatrix}$$

$$t^k = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} P_{k-1} + P_k & P_k \\ 2P_k & P_{k-1} + P_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Q_k}{2} & P_k \\ 2P_k & \frac{Q_k}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_k & P_k \\ 2P_k & q_k \end{pmatrix}$$

$$l^k = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} P_{k-1} + P_k & 2P_k \\ P_k & P_{k-1} + P_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Q_k}{2} & 2P_k \\ P_k & \frac{Q_k}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_k & 2P_k \\ P_k & q_k \end{pmatrix}$$

$$a^k = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} F_{2k-1} & F_{2k} \\ F_{2k} & F_{2k+1} \end{pmatrix}$$

$$b^k = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} F_{2k+1} & F_{2k} \\ F_{2k} & F_{2k-1} \end{pmatrix}$$

$$c^k = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} F_{2k-1} & -F_{2k} \\ -F_{2k} & F_{2k+1} \end{pmatrix}$$

$$d^k = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} F_{2k+1} & -F_{2k} \\ -F_{2k} & F_{2k-1} \end{pmatrix}$$

$\overline{\mathrm{H}}_{3,3}$ grubunun sunuşundaki $R^2 = I$ oluşunu ve yukarıdaki eşitlikleri, örnekte uyguladığımızda verilen elemanın matris temsilini bu özel sayı dizileri aracılığıyla aşağıdaki biçimde ifade etmek mümkün hale gelir.

$$X^2YXY^2XY^2X^2YXY^2X^2Y(XY)^3(Y^2X^2)^5XYX^2Y^2X^2Y^2XY(X^2Y^2)^4(YX)^3$$
$$= X^2Y(RR)XY^2XY^2(RR)X^2YXY^2(RR)X^2Y(XY)^3(Y^2X^2)^5XY(RR)X^2Y^2X^2Y^2(RR)XY(X^2Y^2)^4(YX)^3$$
$$= (X^2YR)(RXY^2)(XY^2R)(RX^2Y)(XY^2R)(RX^2Y)(XY)^3(Y^2X^2)^5(XYR)(RX^2Y^2)(X^2Y^2R)(RXY)(X^2Y^2)^4(YX)^3$$
$$= m^2n^4a^3d^5t^2l^2b^4c^3$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^4 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^5 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^4 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^3$$
$$= \begin{pmatrix} P_3 & P_2 \\ P_2 & P_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_3 & P_4 \\ P_4 & P_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_5 & F_6 \\ F_6 & F_7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{11} & -F_{10} \\ -F_{10} & F_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{Q_2}{2} & P_2 \\ 2P_2 & \frac{Q_2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_2 & 2P_2 \\ P_2 & q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_9 & F_8 \\ F_8 & F_7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_5 & -F_6 \\ -F_6 & F_7 \end{pmatrix}$$

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu bölümde çalışmada elde edilen özgün sonuçlar özetlenecek ve literatürdeki çalışmalarla tartışılacaktır.

İkinci bölümde literatürde Fibonacci polinomları için verilen üreteç matristen ve Fibonacci ile Lucas polinomları arasındaki bazı özdeşliklerden yararlanarak Lucas polinomları için farklı bir üreteç matris elde edilmiştir. Böylece Lucas polinomlarını da matris teorisindeki yaklaşımlarla çalışma konusunda bir araç elde edilmiştir. Bu üreteç matris Lucas polinomları ve Lucas polinomları ile ilişkili olan birtakım polinomlar hakkında pratik çalışma imkanı sağlar ve yeni birçok özdeşlik elde etmede yararlanılabilir. Ayrıca bu bölümde Lucas ve Pell polinomlarıyla ilgili özdeşlikler elde edilmiştir. Bu sayede ilerleyen bölümlerde yeni üreteç matrislere ulaşılmıştır.

Tezin üçüncü bölümünde, tekrarlama ilişkisi ile tanımlı Fibonacci, Lucas ve Pell polinomlarının Binet formüllerinden yararlanarak farklı temsil biçimlerinin verildiği [10,11] çalışmalarında ifade edilenler farklı yaklaşım ve tekniklerle ispatlanmıştır. Ayrıca bu çalışmalarda ele alınmayan kısımlar da çalışılmıştır. Pell polinomlarının indis sınıflamasına göre karmaşık hiperbolik fonksiyonlar cinsinden temsili verilip, Pell polinomunun farklı temsil biçimlerine yönelik genel kök formülleri elde edilmiştir. Ayrıca bu özel polinom sınıflarındaki herhangi bir polinomun köklerinin, aynı polinom sınıfındaki başka birtakım üyelerinin görüntüleri incelenip, birbirleri arasındaki ilişkiler irdelenmiştir.

Tezin dördüncü bölümünde, Lucas ve Pell polinomları için yeni üreteç matrisler elde edilmiştir. Böylece paremetrelerinde Pell polinomlarının kök değeri olan üreteçlere sahip lineer gruplara yönelik; üreteç özellikleri, eleman özellikleri ve grup yapıları hakkında elde ettiğimiz bulgular ifade edilmiştir. Ayrıca Slanina'nın [13] çalışmasında ele almadığı Fibonacci polinomların kök değeriyle ilişkili lineer gruplara yönelik; üreteç özellikleri, eleman özellikleri ve grup yapıları hakkındaki tespitlerimize yer verilmiştir. Yapılan bu incelemeler neticesinde her bir polinom sınıfı için tablolar yapılmış ve elde edilenlerin ilginç bir biçimde benzerlik gösterdiği tespit edilmiştir.

Tezin beşinci bölümünde genelleştirilmiş Pell sayı dizisi tanımlanmışır. Bu sayı dizisinin birçok üreteç matrisi elde edilmiştir. Bu tanımladığımız genelleştirilmiş sayı dizisinin parametresinde 1 alındığı takdirde klasik Pell sayı dizisinin elde edildiği görülmüştür. Elde ettiğimiz üreteç matrislerin bu özel değerde literatürdeki klasik Pell sayı dizisiyle ilişkili olarak elde edilmiş üreteç matrislerle çakıştığı görülür. Ayrıca, $\overline{H}_{3,q}$ genişletilmiş genel Hecke grubunun bazı elemanlarının matris temsilindeki ögelerinin her birinin tanımladığımız genelleştirilmiş Pell sayı dizisinin elemanlarıyla ilişkili olduğu belirtilmiştir. Özelde $\overline{H}_{3,3}$ grubu alındığında bu grubun her elemanın matris temsilindeki her bir matris ögesinin klasik Pell sayı dizisinin birer terimi olduğu tespit edilmiştir. Bununla birlikte sayılar teorisindeki birtakım özdeşliklerden yararlanarak $\overline{H}_{3,3}$ grubunda klasik Pell sayı dizisi ile ilişkili olarak elde ettiğimiz matris temsillerinin Pell-Lucas ve modified Pell sayıları ile ilişkili bir biçimde ifade edilebileceği ortaya konulmuştur. Ayrıca $\overline{H}_{3,3}$ ve $H_{3,3}$ grubunda bazı elemanların matris temsillerindeki her bir ögenin, Fibonacci sayı dizisinin bir terimi olduğu tespit edilmiştir. Bununla birlikte bu gruplardaki bu elemanların izlerinin birer Lucas sayısı olduğu görülmüştür. Böylece $\overline{H}_{3,3}$ ve $H_{3,3}$ grubundaki elemanların özel sayı dizilerinden Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas ve modifid Pell sayıları ile ilişkileri ortaya konulmuştur. Tezin bu bölümü genel Hecke grup sınıfı ve genişletilmiş genel Hecke grup sınıfı ile özel sayı dizileri arasında ilişkilerin incelendiği ilk çalışma olma özelliğine sahiptir.

7. KAYNAKLAR

[1] Crilly, T., *50 Mathematical Ideas You Really Need to Know*, London: Quercus, (2008).

[2] Güney, Z., *Doğal Sayılar, Tam Sayılar, Rasyonel Sayılar, Gerçel Sayılar Teorisi*, Muğla: Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi Yayınları, (2014).

[3] Koshy, T., *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*, ISBN: 978-0-471-39969-8, A Wiley-Interscience Publication, (2001).

[4] Bicknell, M., "A primer on the Pell Sequence and Related Sequences.", *Fibonacci Quarterly*, 13 (4), 345-349, (1975).

[5] Horadam, A. F., "Applications of Modified Pell Numbers to Representations", *Ulam Quarterly*, 3 (1), 34-53, (1994).

[6] Horadam, A. F. and Mahon, J. M., "Pell and Pell-Lucas Polynomials", *The Fibonacci Quarterly*, 23 (1), 7-20, (1985).

[7] Koshy, T., *Pell and Pell-Lucas Numbers with Applications*, ISBN: 978-1-4614-8489-9, Springer, (2014).

[8] Gould, H. W., "A history of the Fibonacci Q-matrix and a higher dimensional problem", *The Fibonacci Quarterly*, 19 (3), 250-257, (1981).

[9] Ercolano, J., "Matrix generators of Pell sequences", *Fibonacci Quart.*, 17 (1), 71-77, (1979).

[10] Byrd, P. F., "Expansion of analytic functions in polynomials associated with Fibonacci Numbers", *Fibonacci Quart.*, 1, 16-29, (1963).

[11] Hoggatt Jr, V. E. and Bicknell, M., "Roots of Fibonacci polynomials.", The *Fibonacci Quarterly*, 11 (3), 271-274, (1973).

[12] Özgür, N. Y. and Kaymak, Ö. Ö., "On the zeros of the derivatives of Fibonacci and Lucas polynomials", *Journal of New Theory*, 7, 22-28, (2015).

[13] Slanina, P., "Generalizations of Fibonacci polynomials and free linear groups", *Linear and Multilinear Algebra*, 64 (2), 187-195, (2016).

[14] Jones, G. A. and Thornton, J. S., "Automorphisms and congrunce subgroups of the extended modular group", *Journal of the London Mathematical Society*, 34 (2), 26-40, (1986).

[15] Koruoğlu, Ö. and Şahin, R., "Generalized Fibonacci sequences related to the extended Hecke groups and an application to the extended modular group", *Turkish Journal of Mathematics*, 34 (3), 325-332, (2010).

[16] Mushtaq, Q. and Hayat, U., “Pell numbers, Pell–Lucas numbers and modular group”, *Algebra Colloq.*, 14 (1), 97-102, (2007).

[17] Mushtaq, Q. and Hayat, U., “Horadam generalized Fibonacci numbers and the modular group”, *Indian J. Pure Appl. Math.*, 38 (5), 345-352, (2007).

[18] Özgür, N. Y., “Generalizations of Fibonacci and Lucas sequences”, *Note Mat.*, 21 (1), 113-125, (2002).

[19] İkikardeş, S., Demircioğlu, Z. S. and Şahin, R., “Generalized Pell in some principal congruence subgroups of the Hecke groups”, *Mathematical Reports*, 18 (1), 129-136, (2016).

[20] Lehner, J., “Uniqueness of a class of Fuchsian groups”, *Illinois Journal of Mathematics*, 19 (2), 308-315, (1975).

[21] Hecke, E., “Über die Bestimmung dirichletscher reihen durch ihre Funktionalgleichung”, *Mathematische Annalen*, 112 (1), 664-699, (1936).

[22] Demir, B., “Genişletilmiş Genel Hecke grupları”, Doktora Tezi, *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Matematik Anabilim Dalı, Balıkesir, (2015).

[23] Bachmuth, S. and Mochizuki, H., “Triples of $2x2$ matrices which generate free groups”, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 59 (1), 25-28, (1976).

[24] Lyndon, R. C. and Ullman, J. L., “Groups generated by two parabolic linear fractional transformations”, *Canad. J. Math*, 21, 1388-1403, (1969).

[25] Beardon, A. F., “Pell's equation and two generator free Möbius groups”, *Bulletin of the London Mathematical Society*, 25 (6), 527-532, (1993).

[26] Lyndon, R. C. and Ullman, J. L., “Pairs of real 2-by-2 matrices that generate free products”, *The Michigan Mathematical Journal*, 15 (2), 161-166, (1968).

[27] Evans, R. J., “Non-free groups generated by two parabolic matrices”, *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 84 (2), 179-180, (1979).

[28] Newman, M., “Pairs of matrices generating discrete free groups and free products”, *The Michigan Mathematical Journal*, 15 (2), 155-160, (1968).

[29] Sanov, I. N., “A property of a representation of a free group”, *In Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 57, 657-659, (1947).

[30] Brenner, J., “Quelques groupes libres de matrices”, *C. R. Acad. Sci.*, 241, 1689-1691, (1955).

[31] Chang, B., Jennings, S. A. and Ree, R., “On certain pairs of matrices which generate free groups”, *Canad. J. Math.*, 10, 279-284, (1958).

[32] Slanina, P., “On some free semigroups, generated by matrices”, *Czechoslovak Mathematical Journal*, 65 (2), 289-299, (2015).

[33] Birol, F., Koruoğlu, Ö., Şahin, R. and Demir B., “Generalized Pell sequences related to the extended generalized Hecke groups $\overline{H}_{3,q}$ and an application to the group $\overline{H}_{3,3}$”, *Honam Mathematical Journal*, (in press) (2018).

[34] Birol, F., Koruoğlu, Ö. and Demir, B., “Genişletilmiş modüler grubun $\overline{H}_{3,3}$ alt grubu ve Fibonacci sayıları”, *BAÜ FBE Dergisi*, 20 (2), 460-466, (2018).

[35] Yılmaz, S., “Lineer İndirgeme Dizilerine Karşılık Gelen Polinomlar ve Periyodik Sistemler”, Doktora Tezi, *Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Matematik Anabilim Dalı, Ankara, (2015).

[36] Stakhov, A. and Aranson, S., “Hyperbolic Fibonacci and Lucas Functions, “Golden” Fibonacci Goniometry, Bodnar’s Geometry, and Hilbert’s Fourth Problem. Part I.”, *Applied Mathematics*, 2, 74-84, (2011).

[37] Kuhapatanakul, K., “The Lucas p-matrix”, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 46 (8), 1228-1234, (2015).

[38] Hoggatt, V. E. and Bicknell, M., “Generalized Fibonacci polynomials”, *Fibonacci Quarterly*, 11 (5), 457-465, (1973).

[39] Başkan, T., *Kompleks Fonksiyonlar Teorisi*, Bursa: Dora Yayıncılık, (2012).

[40] Brown, J. W. and Churchill, R. V., *Complex Variables and Applications*, New York: McGraw-Hill, (2009).

[41] Aydın, S., *Analize Giriş*, İstanbul: Beta Basın Yayın Dağıtım, (1994).

[42] Öztunç, Ö., “R-Bonacci Polinomları ve Türevleri”, Doktora Tezi, *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Matematik Anabilim Dalı, Balıkesir, (2014).

[43] Demir, B., Koruoğlu, Ö. and Şahin, R., “On Normal Subgroups of Generalized Hecke Groups”, *Analele Universitatii* “*Ovidius*” *Constanta-Seria Matematica*, 24 (2), 169-184, (2016).

[44] Demir, B., Koruoğlu, Ö. and Şahin, R., “Some normal subgroups of extended generalized Hecke groups”, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 45 (4), 1023-1032, (2016).

[45] Huang, S., “Generalized Hecke groups and Hecke polygons”, *Annales-Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica*, 24, 187-214, (1999).

[46] Demir, B., Koruoğlu, Ö. and Şahin, R., “Conjugacy Classes of Extended Generalized Hecke Groups”, *Rev. Un. Mat. Argentina*, 57 (1), 49-56, (2016).

[47] Kaymak, Ş., Demir, B., Koruoğlu, Ö. and Şahin, R., "Commutator subgroups of generalized Hecke and extended generalized Hecke Groups", *Analele Universitatii "Ovidius" Constanta-Seria Matematica*, 26 (1), 159-168, (2018).

[48] Cangül, İ. N., "Normal subgroups of Hecke groups", Ph.D. Thesis, *Southampton University*, Southampton, (1993).

[49] Yılmaz, N. and Cangül, İ. N., "On the group structure and parabolic points of the Hecke group H(λ)", *Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math.*, 51, 35-46, (2002).

[50] Şahin, R. and Bizim, O., "Some subgroups of extended Hecke groups $\overline{H}(\lambda_q)$", *Acta Math. Sci.*, 23, 497-502, (2003).

[51] Koruoğlu, Ö., "$\overline{H}(\lambda_p)$ ve $\overline{H}(\lambda)$ genişletilmiş Hecke gruplarının bazı normal alt grupları ve sürekli kesirler", Doktora Tezi, *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Matematik Anabilim Dalı, Balıkesir, (2005).

[52] Wang, J., "On the *k* (th) derivative sequences of Fibonacci and Lucas polynomials", *Fibonacci Quarterly*, 33 (2), 174-178, (1995).

[53] Birol, F., Taş, N., Özgür N. Y., Koruoğlu, Ö. and Demir, B., "Some groups generated by three matrices related Lucas polynomials", Yayına Sunuldu.

[54] Fine, B., "Trace classes and quadratic forms in the modular group", *Canadian Mathematical Bulletin*, 37 (2), 202-212, (1994).

[55] Koruoğlu, Ö., Şahin, R. and İkikardeş, S., "Trace Classes and Fixed Points for the Extended Modular group $\overline{\Gamma}$", *Turkish Journal of Mathematics*., 32 (1), 11-19, (2008).