T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

$\overline{H}(\sqrt{2})$ VE $\overline{H}(\sqrt{3})$ GENİŞLETİLMİŞ HECKE GRUPLARI İLE POZİTİF TANIMLI KUADRATİK FORMLAR ARASINDAKİ İLİŞKİLER

DOKTORA TEZİ

Meryem ÇILDIR

Balıkesir, Haziran-2011

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

$\overline{H}(\sqrt{2})$ VE $\overline{H}(\sqrt{3})$ GENİŞLETİLMİŞ HECKE GRUPLARI İLE POZİTİF TANIMLI KUADRATİK FORMLAR ARASINDAKİ İLİŞKİLER

DOKTORA TEZİ

Meryem ÇILDIR

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Özden KORUOĞLU

Sınav Tarihi: 23.06.2011

Jüri Üyeleri: Doç. Dr. Özden KORUOĞLU (Danışman-BAÜ)
Doç. Dr. Recep ŞAHİN (BAÜ)
Doç. Dr. Ahmet TEKCAN (UÜ)
Doç. Dr. Fırat ATEŞ (BAÜ)
Yrd. Doç. Dr. Musa DEMİRCİ (UÜ)

Enstitü Yönetim Kurulunun …………….. tarih ………. sayılı oturumunun ….. nolu kararı ile ………………………… Mezun olmuştur.

Balıkesir, Haziran-2011

ÖZET

$\overline{H}(\sqrt{2})$ VE $\overline{H}(\sqrt{3})$ GENİŞLETİLMİŞ HECKE GRUPLARI İLE POZİTİF TANIMLI KUADRATİK FORMLAR ARASINDAKİ İLİŞKİLER

Meryem ÇILDIR
Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,
Matematik Anabilim Dalı

(Doktora Tezi / Tez Danışmanı: Doç. Dr. Özden KORUOĞLU)

Balıkesir, 2011

Bu çalışmada, katsayıları sırasıyla $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ ile $\mathbf{Z}[\sqrt{3}]$ halkalarından alınan ve taban noktası da sırasıyla $x=\frac{-\sqrt{2}}{m}$ doğrusu ile $x=\frac{-\sqrt{3}}{m}$ doğrusu üzerinde olan pozitif tanımlı kuadratik formların varlığı gösterilmiş, bu pozitif tanımlı kuadratik formlar ile $\overline{H}(\sqrt{2})$ ve $\overline{H}(\sqrt{3})$ genişletilmiş Hecke grupları arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, çalışma tanıtılmıştır.

İkinci bölümde, tezin diğer bölümlerinde kullanılacak tanımlar, teoremler, örnekler ve metodlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde, genişletilmiş modüler grup ile tamsayı katsayılı pozitif tanımlı kuadratik formlar arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Dördüncü bölüm tezin ana kısmıdır. Bu bölümde, üçüncü bölümde verilen genişletilmiş modüler grup ile tamsayı katsayılı pozitif tanımlı kuadratik formlar arasındaki ilişkiler, $\overline{H}(\sqrt{2})$ ve $\overline{H}(\sqrt{3})$ genişletilmiş Hecke grupları ile sırasıyla katsayıları $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ ve $\mathbf{Z}[\sqrt{3}]$ halkalarından alınan pozitif tanımlı kuadratik formlar arasında incelenmiştir. Ayrıca bu pozitif tanımlı kuadratik formların indirgenebilirliği ile ilgili sonuçlar elde edilmiştir.

Beşinci bölümde, tezde elde edilen sonuçlar ve ileride yapılacak çalışmalar için açık problemler verilmiştir.

ANAHTAR SÖZCÜKLER: Genişletilmiş Hecke grup, pozitif tanımlı kuadratik form, taban noktası.

ABSTRACT

RELATIONSHIPS BETWEEN $\overline{H}(\sqrt{2})$ AND $\overline{H}(\sqrt{3})$ EXTENDED HECKE GROUPS AND POSITIVE DEFINITE QUADRATIC FORMS

Meryem ÇILDIR
Balıkesir University, Institute of Science,
Department of Mathematics

(Ph. D. Thesis / Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Özden KORUOĞLU)

Balıkesir, 2011

In this study presence of positive definite quadratic forms of which coefficients taken from the rings of $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ and $\mathbf{Z}[\sqrt{3}]$ and base points are on $x = \dfrac{-\sqrt{2}}{m}$ and $x = \dfrac{-\sqrt{3}}{m}$ lines respectively have been shown and the relationships between these positive definite quadratic forms and $\overline{H}(\sqrt{2})$ and $\overline{H}(\sqrt{3})$ extended Hecke groups are investigated.

This thesis consists of five chapters. In the first chapter the study is introduced.

In the second chapter, it is given that the definitions, theorems, examples and methods which are used in the other chapters are briefly recalled.

In the third chapter relationships between extended modular group and positive definite quadratic forms with integer coefficients have been examined.

The forth chapter is the main part of the thesis. In this chapter the relationships, given in the third chapter, between extended modular group and positive definite quadratic forms with integer coefficients are investigated between $\overline{H}(\sqrt{2})$ and $\overline{H}(\sqrt{3})$ extended Hecke groups and positive definite quadratic forms of which coefficients taken respectively from $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ and $\mathbf{Z}[\sqrt{3}]$ rings. Furthermore, findings on reducibility of these positive definite quadratic forms have been revealed.

In the fifth chapter, the results obtained from the thesis are summarized and some open problems for future studies are given.

KEY WORDS: Extended Hecke groups, positive definite quadratic form, base point.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

Simge	Adı
$\mathbf{Z}$	Tamsayılar kümesi
$\mathbf{Z}^+$	Pozitif tamsayılar kümesi
$\mathbf{C}$	Karmaşık sayılar kümesi
$\mathbf{C}_\infty$	Genişletilmiş karmaşık sayılar kümesi
$\mathbf{R}$	Reel sayılar kümesi
$Aut(\mathbf{C}_\infty)$	$\mathbf{C}_\infty$ kümesinin tüm otomorfizmlerinin kümesi
GL(2, $\mathbf{C}$)	$\mathbf{C}$ de genel lineer grup
PGL(2, $\mathbf{C}$)	Projektif lineer grup
SL(2, $\mathbf{C}$)	Özel lineer grup
PSL(2, $\mathbf{C}$)	Determinantı 1 olan projektif lineer grup
PSL(2, $\mathbf{R}$)	$\{ V(z) : V(z)= \dfrac{az+b}{cz+d}; a, b, c, d\in \mathbf{R}, ad\text{-}bc = 1 \}$
$\mathbf{U}$	Üst yarı-düzlem
G'	$\{ U(z): U(z)= \dfrac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}; a, b, c, d\in \mathbf{R}, ad\text{-}bc = -1 \}$
$H(\lambda)$	$\lambda \geq 2$ olması durumunda elde edilen Hecke grupları
$H(\lambda_q)$	$\lambda = \lambda_q = 2\cos\dfrac{\pi}{q}, 1 \leq \lambda < 2$ için elde edilen Hecke grupları
F_λ	$H(\lambda)$ Hecke gruplarının temel bölgesi
$\overline{H}(\lambda)$	$\lambda \geq 2$ için genişletilmiş Hecke grupları
$\overline{H}(\lambda_q)$	$\lambda = \lambda_q = 2\cos\dfrac{\pi}{q}, 1 \leq \lambda < 2$ için genişletilmiş Hecke grupları
$\overline{H}(\sqrt{2})$	$q = 4$ için genişletilmiş Hecke grubu
$\overline{H}(\sqrt{3})$	$q = 6$ için genişletilmiş Hecke grubu
Γ	Fuchsian gruplar
C_n	Devirli grup
D_n	Dihedral grup
S_n	Simetrik grup
A_n	Alterne grup
$P = < X \mid R^* >$	Grup sunuşu
$F(X)$	X tabanlı serbest grup
$A \times B$	Direkt çarpım grubu
$A * B$	Serbest çarpım grubu
$A *_C B$	Karışımlı serbest çarpım grubu

Simge	**Adı**
$\mathbf{Z}(\sqrt{D})$	$\mathbf{Z}$ halkasının $\sqrt{D}$ ile genişlemesi
$\mathbf{Q}(\sqrt{D})$	$\mathbf{Q}$ cisminin $\sqrt{D}$ ile genişlemesi
$F=(a,b,c)$	Kuadratik form
$\Delta(F)$	F kuadratik formunun diskriminantı
z(F)	F kuadratik formunun taban noktası
$\overline{\Gamma}$	Genişletilmiş modüler grup
F_R	Pozitif tanımlı indirgenebilir kuadratik form
F_j	Taban form
$\tilde{C}$	C çemberi ile üst yarı-düzlemin arakesiti
$\mathbf{Z}[\lambda_q]$	$\mathbf{Z}$ halkasının λ_q ile genişlemesi
$\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$	$\mathbf{Z}$ halkasının $\sqrt{2}$ ile genişlemesi
$\mathbf{Z}[\sqrt{3}]$	$\mathbf{Z}$ halkasının $\sqrt{3}$ ile genişlemesi

ŞEKİL LİSTESİ

ÖNSÖZ

Çalışmam sırasında bana yol gösteren, bilgi birikimi ve tavsiyeleri ile beni yönlendiren, her sendelememde mutlaka bir çıkış ışığı bulan danışman hocam Doç. Dr. Özden KORUOĞLU'na emeği için çok teşekkür ederim.

Lisans eğitimimden itibaren öğrencisi olmaktan büyük gurur duyduğum saygıdeğer hocam Doç. Dr. Recep ŞAHİN'e tüm katkılarından dolayı teşekkürlerimi sunarım. Çalışmamın yürütülmesi ve tamamlanması aşamalarında hoşgörüsüyle, bilgi ve bilimsel tecrübesiyle desteği için Doç. Dr. Ahmet TEKCAN hocama teşekkürü bir borç bilirim.

Akademik çalışmamın ilk adımı olan Yüksek Lisans danışman hocam Prof. Dr. Hasan Basri ÖZDEMİR'e, halen manevi desteğini hissettiğimi belirterek teşekkür ederim.

Ayrıca beni eğiten, başta BAÜ Necatibey Eğitim Fakültesi ve Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü olmak üzere, öğrencilik serüvenimde bana katkıda bulunan tüm hocalarıma teşekkür ederim.

Çalışmalarım boyunca desteğini esirgemeyen Gökçeyazı Şehit Rıdvan Çetinkaya İlköğretim Okulu idaresine, onlarla çalışmaktan gurur duyduğum çalışma arkadaşlarıma ve her gülüşlerinde yeniden başlama gücü katan sevgili öğrencilerime de ayrıca teşekkür ederim.

Doktora çalışmam süresince, Doktora Öğrencileri için 2211 kodlu Yurt İçi Doktora Burs Programı ile beni destekleyen Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu'na teşekkür ederim.

Hayatta bulunma sebeplerim, ilk öğretmenlerim, bir tanelerim; annem Cavide ÇILDIR ve babam Mehmet ÇILDIR ile 2π'm ablam Fatma ÇILDIR PELİTOĞLU'na, eniştem Abdülcelil PELİTOĞLU'na ve ailemize yeni katılan stres dökücü biricik yeğenim Salih PELİTOĞLU'na sonsuz teşekkürler…

Balıkesir, 2011 Meryem ÇILDIR

1. GİRİŞ

Bu çalışmanın amacı, katsayıları sırasıyla $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ ve $\mathbf{Z}[\sqrt{3}]$ halkalarından alınan ve taban noktası da sırasıyla $x=\dfrac{-\sqrt{2}}{m}$ doğrusu ile $x=\dfrac{-\sqrt{3}}{m}$ doğrusu üzerinde olan herhangi bir pozitif tanımlı kuadratik formun varlığını göstermektir. Ayrıca bu kuadratik formların denkliğini sağlayan $\overline{H}(\sqrt{2})$ ve $\overline{H}(\sqrt{3})$ genişletilmiş Hecke gruplarının elemanları ile arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Hecke grupları literatürde, E. Hecke'nin 1936 yılında yaptığı "Über die Bestimmung Dirichleter Reichen durch ihre Funktionalgleichungen" isimli çalışması ile ilk defa yer almıştır [1].

$\lambda=\lambda_q=2\cos\dfrac{\pi}{q}$, ($q\geq 3$ tek tamsayı ve $q=4,6$) değerlerine karşılık gelen $H(\lambda_q)$ Hecke grupları ile bunların normal alt grupları Cangül tarafından çalışılmıştır [2]. Hecke gruplarıyla ilgili bazı çalışmalar için Bkz. Cangül ve Singerman [3], İkikardeş, Şahin ve Koruoğlu [4], Yılmaz, Şahin ve Cangül [5-7]. $H(\lambda_q)$ Hecke gruplarında, $q=3$ değerine karşılık gelen $H(\lambda_3)$ Hecke grubu daha çok modüler grup olarak adlandırılır ve PSL(2, $\mathbf{Z}$) ile gösterilir. Modüler grup matematikçiler tarafından çok çalışılan bir gruptur.

1980'li yıllardan itibaren modüler gruptan yararlanarak tanımlanan, genişletilmiş modüler grup $\overline{\Gamma}$=PGL(2, $\mathbf{Z}$) ve onun alt gruplarının cebirsel, geometrik ve fonksiyonel özellikleri Sibner, Jones, Thornton, Singerman, Kulkarni, Schoeneberg, Mushtaq ve Bizim tarafından çalışılmıştır.

$R(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ yansıma dönüşümünü $H(\lambda_q)$ Hecke gruplarına katarak elde edilen genişletilmiş Hecke grupları, Şahin, Bizim ve Cangül tarafından [8] numaralı çalışma ile tanıtılmıştır. Bazı genişletilmiş Hecke gruplarının kuvvet, kamutatör, çift, temel denklik, serbest alt grupları ve aralarındaki ilişkiler de Şahin, Bizim, Cangül, İkikardeş, Koruoğlu tarafından verilmiştir [8-13].

Kuadratik (ikinci dereceden) formlar literatürde; a, b, c birer reel sayı olmak üzere $F(X,Y) = aX^2 + bXY + cY^2$ şeklindeki polinomlara denilmektedir. M.S. 628 yılında Hintli matematikçi Brahmagupta, yazmış olduğu "Brahmasphutasiddhanta" isimli eserinde, $x^2 - ny^2 = c$ formundaki eşitlikler hakkında çalışmıştır. Özellikle günümüzde Pell denklemleri olarak bilinen $x^2 - ny^2 = 1$ tipindeki denklemlerin çözümü için bir de metot bulmuştur. Avrupa'da ise bu problem Brouncker, Euler, Lagrange ve Gauss tarafından çalışılmıştır [14].

C. F. Gauss'un kuadratik formların indirgeme teoremi kapsamında temel bölgeyi ele aldığı bilinmektedir. Ayrıca Humbert, Dirichlet'in yöntemiyle temel bölgeyi çalışmış ve özellikle pozitif formlar için temel bölgede yer alan bir noktanın sunuşunu yapılandırmıştır [15].

Euler (1761), $6n+1$ ve $8n+1$ formundaki her asalın sırasıyla $x^2 + 3y^2$ ve $x^2 + 2y^2$ kuadratik formları ile temsil edildiğini yayınlayan ilk kişidir. Buna benzer teoremlerin 1654'te Fermat tarafından ifade edildiği bilinmektedir.

Kuadratik formlarla ilgili ilk kapsamlı çalışmanın J. L. Lagrange (1773) tarafından yapıldığı bilinmektedir. Lagrange, kuadratik formlarla ilgili birçok gerçeği kendi teorisi olan indirgeme ve iki değişkenli kuadratik formların denkliğini kullanarak ispatlamıştır. Fakat has denklik ve has olmayan denklik arasında bir ayrım yapmamıştır. İndirgeme ve denklik dışında da yeni terimler eklememiştir. A. M. Legendre (1798) Lagrange'ın indirgeme metodunu ve tablolarını (kuadratik kalanlar için olan) karşılıklı kalanlar teoreminden faydalanarak indirgenmiş formlarda kullanıp büyük ölçüde ispatlamış olmakla birlikte, tamamen bitirememiştir. Detayları sadece aradaki katsayılar çift olduğunda vermiştir.

Gauss (1801), A nın bir kare çarpana sahip olmaması şartıyla $x^2 - A$ nın bölenlerinin lineer formlarını bulmak için karşılıklı kalanlar teoremini uygulamıştır ve çalışmalarını $F = ax^2 + 2bxy + cy^2$ formundaki, ortadaki katsayısı çift olan ve (a,b,c) ile gösterdiği iki değişkenli kuadratik formlarla sınırlandırmıştır.

A. Tekcan ve O. Bizim [16] numaralı kaynakta, kuadratik formlar ile genişletilmiş modüler grup arasındaki ilişkileri elde etmişler, taban noktaları modüler grubun temel bölgesinde olan pozitif tanımlı formlar ile ilgili sonuçlar vermişlerdir. Bununla birlikte Tekcan, kuadratik formların [17]'de eliptik eğrilerle, [18]'de Pell ve [19-20]'de Diophantine denklemleri ile olan ilişkilerine de değinmiştir. Ayrıca Tekcan [21] numaralı çalışmasında, kuadratik formlar teorisinin çok önemli bir bölümünü kapsayan indefinite formlar ile kuadratik idealler arasındaki bağıntıyı ele almış ve bununla ilgili sonuçlar vermiştir. İdeallerin devri ile bu ideallere karşılık elen formların devirleri arasında ilişki kurmuştur. [22] numaralı kaynakta ise Tekcan, Hermityan formlar ve bu formların Picard grubu ile ilişkisinden ve tamsayıların Hermityan formlar ile gösterilmesi probleminden bahsetmiştir. Kuadratik formlarla ilgili daha fazla bilgi için [23]'teki Buchmann ve Vollmer, [24]'teki Buell ve [25]'teki Flath kaynaklarına bakılabilir.

Bu çalışmada yapılanları, bölümlere ayırarak kısaca tanıtalım.

Çalışmanın ilk bölümü tezin gelişimini anlatan, tezin bölümlerinin tanıtıldığı ve kaynak araştırmasının yer aldığı giriş bölümüdür.

Çalışmanın ikinci bölümünde, tezin diğer bölümlerinde kullanılacak tanımlar, metotlar, yöntemler, teoremler önbilgiler adı altında verilmiştir.

Çalışmanın üçüncü bölümünde, genişletilmiş modüler grup ile pozitif tanımlı tamsayı katsayılı kuadratik formlar arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Dördüncü bölümde ise üçüncü bölümde verilen genişletilmiş modüler grup ile tamsayı katsayılı pozitif tanımlı kuadratik formlar arasındaki ilişkiler, $\overline{H}(\sqrt{2})$ ve $\overline{H}(\sqrt{3})$ genişletilmiş Hecke grupları ile katsayıları $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ ve $\mathbf{Z}[\sqrt{3}]$ halkalarından alınan pozitif tanımlı kuadratik formlar arasında incelenmiştir. Bunlara ek olarak, bu pozitif tanımlı kuadratik formların indirgenebilirliği ile ilgili sonuçlar elde edilmiştir.

Çalışmanın beşinci bölümünde, çalışmamızda elde edilen sonuçlardan bahsedilmiştir. Ayrıca, bundan sonra yapılabilecek bazı çalışmalar için açık problemler verilmiştir.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde; tezin ilerleyen bölümlerinde kullanılacak olan tanım, teorem, sonuç, metot ve yöntemler verilmiştir.

2.1 Möbiüs Dönüşümleri

Hecke gruplarının elemanları birer möbiüs dönüşümüdür. Bu alt bölümde, bu dönüşümleri tanıyıp, bu dönüşümler ile 2×2 matrisler arasındaki ilişkileri vereceğiz. $\mathbf{C}_\infty = \mathbf{C}\cup\{\infty\}$ olmak üzere şu tanımı verelim:

2.1.1 Tanım: $f:\ \mathbf{C}_\infty \to \mathbf{C}_\infty$ birebir, örten ve meromorf fonksiyonlara $\mathbf{C}_\infty$ kümesinin bir *otomorfizmi* denir [26].

$\mathbf{C}_\infty$ kümesinin tüm otomorfizmlerinin kümesi $Aut(\mathbf{C}_\infty)$ ile gösterilir. Yani,

$$Aut(\mathbf{C}_\infty)=\{\, f \mid f: \mathbf{C}_\infty \to \mathbf{C}_\infty \text{ birebir, örten, meromorf fonksiyon}\}$$

şeklindedir [26].

2.1.2 Teorem: $\mathbf{C}_\infty$ kümesinin, tüm otomorfizmlerinin kümesi aşağıdaki gibidir:

$$Aut(\mathbf{C}_\infty)=\left\{\, V(z) : V(z)=\frac{az+b}{cz+d};\ a,b,c,d\in\mathbf{C},\ ad-bc\neq 0 \right\} \text{ [26].}$$

2.1.2 Teorem'de dikkat edilirse $ad-bc\neq 0$ verilmiştir. Eğer $ad-bc=0$ olsa, $V(z)$ sabit fonksiyon olur ve birebirlik şartı bozulur.

2.1.3 Tanım: $V(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ $(a,b,c,d\in\mathbf{C},\quad ad-bc\neq 0)$ biçimindeki dönüşümlere, *möbiüs dönüşümleri* (kesirli doğrusal dönüşüm) denir [26].

2.1.4 Teorem: Möbiüs dönüşümleri, fonksiyonların bileşke işlemine göre bir gruptur [27].

2.1.3 Tanım'daki $ad-bc$ değerine *V*(z) dönüşümünün determinantı denir ve Δ ile gösterilir. Möbiüs dönüşümleri için verilen $\Delta=ad-bc\neq 0$ koşulu yerine $\Delta=ad-bc=1$ kullanılabilir. Çünkü pay ve payda $\pm\sqrt{\Delta}$ ile bölünürse, $\Delta=1$ sonucu bulunur.

Matrislerde çarpma işlemi yapmak, fonksiyonların bileşke işlemine göre daha kolaydır. Bunun için, möbiüs dönüşümleri ile matrisler arasında birebir ilişkiyi inceleyelim. Bu ilişki, $V(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ yerine $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrisini kullanmak olacaktır. Bunun için bazı teoremler verelim.

2.1.5 Tanım: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ biçiminde $a,b,c,d\in\mathbf{C}$, $\Delta=ad-bc\neq 0$ koşullarını sağlayan 2×2 matrislerin kümesine **C**'de *genel lineer grup* denir ve GL(2, **C**) ile gösterilir [26].

2.1.6 Teorem: θ **:** GL(2, **C**) $\to$ $Aut(\mathbf{C}_\infty)$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm bir epimorfizmdir [26].

Dikkat edilirse 2.1.6 Teorem'deki dönüşüm birebir değildir. Çünkü $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrisi $\dfrac{az+b}{cz+d}$ dönüşümünün yanında, bu dönüşümün, k katına da gidebilir.

Dolayısıyla birebirlik yoktur. θ dönüşümünün çekirdeğini, $K = çek\theta$ olmak üzere K ile gösterelim. Gerekli işlemler yapılırsa $çek\theta$ kümesinin $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ koşulu altında $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ biçimindeki matrislerden oluştuğu görülür. Bu elemanları

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \lambda I$$

olarak da ifade edebiliriz. Birinci izomorfizma teoreminden aşağıdaki teoremi verebiliriz.

2.1.7 Teorem: $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) / K \cong Aut(\mathbb{C}_\infty)$ [26].

$\mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) / K$ bölüm grubu için $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$ simgesi kullanılır ve bu grup *projektif lineer grup* olarak isimlendirilir. $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$ nin elemanları, $\Delta = ad - bc \neq 0$ koşulunu sağlar ve de bu matrislerin k katı da aynı dönüşümü belirler.

Şimdi $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ kümesinden $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ kümesine

$$\det: \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$$

dönüşümü tanımlansın. Bu durumda $M, N \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ olmak üzere,

$$\det(M.N) = \det(M).\det(N)$$

olduğundan bu dönüşüm bir homomorfizmadır. Üstelik dönüşüm örten olduğundan bir epimorfizmdir. Bu epimorfizmin çekirdeği, determinantı 1 olan matrislerin $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ kümesidir. Bu küme, matrislerin çarpma işlemine göre bir grup oluşturup bu gruba *özel lineer grup* denir. Yine birinci izomorfizma teoreminden aşağıdaki teoremleri verebiliriz.

2.1.8 Teorem: $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) / \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}\backslash\{0\}$ [26].

2.1.9 Teorem: $Aut(\mathbf{C}_\infty) \cong$ PGL(2, **C**) = PSL(2, **C**) [26].

PSL(2, **C**) nin elemanları, $\Delta = ad - bc = 1$ koşulunu sağlar ve de bu matrislerin negatifleri de aynı dönüşümü belirler.

Hecke grupları,

$$\text{PSL}(2, \mathbf{R}) = \{\ V(z) : V(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad a,b,c,d \in \mathbf{R},\ ad - bc = 1\ \}$$

şeklinde reel katsayılı doğrusal dönüşümlerin alt kümesidir. Şimdi **U**, üst yarı düzlemi göstermek üzere, PSL(2, **R**) ile ilgili şu teoremi verelim.

2.1.10 Teorem: $Aut(\mathbf{U}) \cong$ PSL(2, **R**) [26].

2.1.11 Tanım: $G' = \{\ U(z) : U(z) = \dfrac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d};\ a,b,c,d \in \mathbf{R},\ ad - bc = -1\ \}$

kümesinin elemanlarına **U** üst yarı düzlemin *anti-otomorfizmleri* denir [13].

2.1.12 Teorem: $G =$ PSL(2, **R**) $\cup\ G'$ bileşke işlemine göre bir gruptur [26].

2.1.13 Teorem: Hecke grupları, PSL(2, **R**) nin alt grubudur. Genişletilmiş Hecke grupları ise G nin bir alt grubudur [13].

İspat: Giriş bölümünde verilen, Hecke ile genişletilmiş Hecke gruplarının üreteç kümelerinin elemanlarından sonuç açıktır.

2.2 Hecke Grupları

Erich Hecke, 1936 yılında "Über die Bestimmung Dirichleter Reichen durch ihre Funktionalgleichungen" adlı çalışmasında Hecke gruplarını aşağıdaki gibi tanımlamıştır [1].

2.2.1 Tanım: λ sabit bir pozitif sayı olmak üzere,

$$T(z) = -\frac{1}{z} \text{ ve } U(z) = z + \lambda$$

kesirli doğrusal dönüşümleri ile üretilen gruplara *Hecke grupları* denir ve $H(\lambda)$ ile gösterilir [1].

Tanımlanan $T(z)$ ve $U(z)$ dönüşümleri yardımıyla $S = T.U$ alınırsa

$$S(z) = -\frac{1}{z+\lambda}$$

elde edilir.

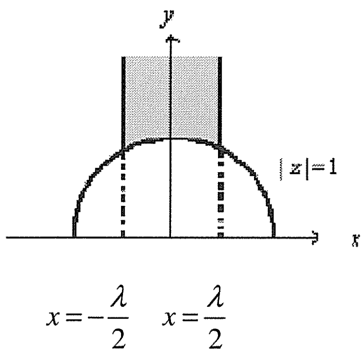
2.2.2 Teorem: $\lambda \geq 2$ veya $q \geq 3$ bir tamsayı olmak üzere,

$$\lambda = \lambda_q = 2\cos\frac{\pi}{q},\ 1 \leq \lambda < 2$$

ise $H(\lambda)$ grubunun bir temel bölgesi,

$$F_\lambda = \left\{ z \in U : |\mathrm{Re}\, z| \leq \frac{\lambda}{2}, |z| \geq 1 \right\}$$

kümesidir [1].



Şekil 1.1: $H(\lambda)$ Hecke Grubunun Temel Bölgesi.

E. Hecke diğer $\lambda > 0$ değerleri için F_λ kümesinin bir temel bölge olmadığını da göstermiştir. $\lambda = \lambda_q$ veya $\lambda \geq 2$ olması durumunda $H(\lambda)$ grubunun sonlu üreteçli bir grup olduğu görülür. Ayrıca $H(\lambda)$ grubu, PSL(2, $\mathbb{R}$) nin ayrık bir alt grubu olduğundan $H(\lambda)$ grubu Fuchsian bir grup olur. Ayrık gruplar ve Fuchsian gruplar için ayrıntılı bilgiler [28, 29] numaralı kaynaklarda bulunabilir.

2.2.3 Teorem: $H(\lambda)$ Hecke gruplarının Fuchsian olması için gerekli ve yeterli koşul $\lambda \geq 2$ veya $\lambda = \lambda_q = 2\cos\frac{\pi}{q}$, $(q \geq 3$ bir tamsayı) olmasıdır [1].

$\lambda = \lambda_q = 2\cos\frac{\pi}{q}$, $1 \leq \lambda < 2$, durumuna karşılık gelen Hecke grupları $H(\lambda_q)$ ile gösterilir. Bazı $H(\lambda_q)$ Hecke grupları ve bunların normal alt grupları [2] numaralı referansta çalışılmıştır. $\lambda \geq 2$ değerleri ile elde edilen Hecke grupları için $H(\lambda)$ gösterimi kullanılır. Bu grupların sunuşları ile ilgili iki teorem aşağıdadır.

2.2.4 Teorem: $H(\lambda_q)$ Hecke grubunun sunuşu,

$$H(\lambda_q) = < T, S \mid T^2 = S^q = I > \cong C_2 * C_q \tag{2.1}$$

şeklindedir. Buna göre bu grup, 2 mertebeli devirli grup ile q mertebeli devirli grubun serbest çarpımıdır [2].

2.2.5 Teorem: Eğer $\lambda \geq 2$ ise bu grubun sunuşu,

$$H(\lambda_q) = < T, S \mid T^2 = S^\infty = I > \cong C_2 * C_\infty \tag{2.2}$$

biçimindedir. Buna göre bu grup, 2 mertebeli devirli grup ve sonsuz mertebeli devirli grubun serbest çarpımıdır [30].

2.3 Genişletilmiş Hecke Grupları

Burada 2.2 Bölüm'de verilen Hecke gruplarından, $R_1(z)=\frac{1}{\overline{z}}$ yansıma dönüşümü yardımıyla (ki bu dönüşüm birim çembere göre yansıma dönüşümüdür) elde ettiğimiz genişletilmiş Hecke gruplarından kısaca bahsedeceğiz. Genişletilmiş modüler ve genişletilmiş Hecke grupları ile ilgili temel bilgilere [9, 31, 32] kaynaklarından ulaşılabilir.

$\lambda \geq 2$ veya $q \geq 3$ bir tamsayı olmak üzere $\lambda=\lambda_q=2\cos\frac{\pi}{q}$, $1 \leq \lambda < 2$ değerleri için $H(\lambda)$ ile gösterilen Hecke gruplarından yararlanarak şu tanımı verelim.

2.3.1 Tanım: Hecke gruplarına, $R_1(z)=\frac{1}{\overline{z}}$ anti-otomorfizmini ekleyerek elde edilen gruplara *genişletilmiş Hecke grupları* denir [9].

Genişletilmiş Hecke grupları $\overline{H}(\lambda)$ ile gösterilir ve otomorfizmler ile anti-otomorfizmleri bulundurur.

Şimdi de genişletilmiş Hecke gruplarının aşağıda vereceğimiz yansımalar yardımıyla grup sunuşunu bulalım. $\lambda=\lambda_q=2\cos\frac{\pi}{q}$, $1 \leq \lambda < 2$ olmak üzere,

$$R_1(z)=\frac{1}{\overline{z}},\ R_2(z)=-\overline{z},\ R_3(z)=\frac{-\overline{z}}{\lambda\overline{z}+1}$$

yansımaları yardımıyla, genişletilmiş Hecke gruplarının sunuşu

$$\overline{H}(\lambda_q)=\langle R_1,R_2,R_3 \mid R_1^2=R_2^2=R_3^2=(R_1R_2)^2=(R_3R_1)^q=I\rangle \qquad (2.3)$$

şeklindedir [9, 32]. Eğer $R=R_1$, $T=R_1R_2=R_2R_1$, $S=R_3R_1$ olarak alınırsa $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke gruplarının sunuşu,

$$\overline{H}(\lambda_q) = < T, S, R \mid T^2 = R^2 = S^q = (TR)^2 = (RS)^2 = I > \qquad (2.4)$$

olur.

Çalışacağımız $\overline{H}(\sqrt{2})$ ve $\overline{H}(\sqrt{3})$ genişletilmiş Hecke gruplarının sunuşunu bulmak için (2. 4)'te $q = 4$ ve $q = 6$ yazıldığında sunuşlar şu şekilde elde edilir:

$q = 4$ için genişletilmiş Hecke grubunun sunuşu,

$$\overline{H}(\sqrt{2}) = < T, S, R \mid T^2 = R^2 = S^4 = (TR)^2 = (RS)^2 = I > \qquad (2.5)$$

ve $q = 6$ için genişletilmiş Hecke grubunun sunuşu ise,

$$\overline{H}(\sqrt{3}) = < T, S, R \mid T^2 = R^2 = S^6 = (TR)^2 = (RS)^2 = I > \qquad (2.6)$$

olarak gösterilir.

$\lambda \geq 2$ değerleri için, yansımalar yardımıyla,

$$\overline{H}(\lambda) = < R_1, R_2, R_3 \mid R_1^{\ 2} = R_2^{\ 2} = R_3^{\ 2} = (R_1 R_2)^2 = I > \qquad (2.7)$$

ve $R = R_1$, $T = R_1 R_2 = R_2 R_1$, $S = R_3 R_1$ eşitliklerinden, $\overline{H}(\lambda)$ genişletilmiş Hecke gruplarının sunuşu,

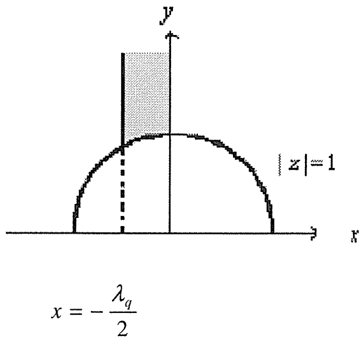
$$\overline{H}(\lambda) = < T, S, R \mid T^2 = R^2 = S^\infty = (TR)^2 = (RS)^2 = I > \qquad (2.8)$$

biçiminde yazılır.

2.3.2 Teorem: $\overline{H}(\lambda)$ genişletilmiş Hecke grupları için temel bölge,

$$\overline{F}_\lambda = \left\{ z \in U : -\frac{\lambda}{2} \leq \mathrm{Re}(z) \leq 0, \ |z| \geq 1 \right\}$$

kümesidir [9].

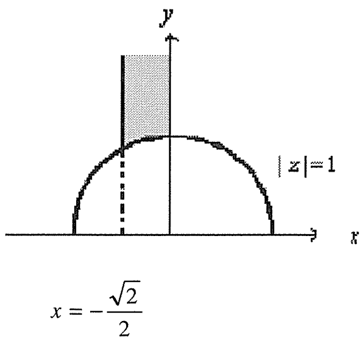


Şekil 1.2: $\overline{H}(\lambda_q)$ Genişletilmiş Hecke Grubunun Temel Bölgesi.

2.3.3 Teorem: $\overline{H}(\sqrt{2})$ genişletilmiş Hecke grubu için temel bölge,

$$\overline{F}_{\sqrt{2}} = \left\{ z \in U : -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \operatorname{Re}(z) \leq 0, \ |z| \geq 1 \right\}$$

kümesidir.

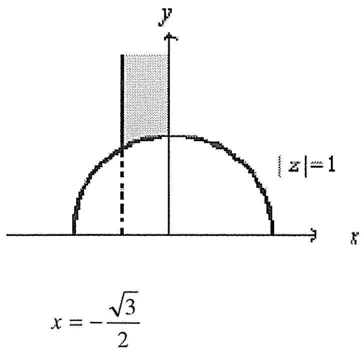


Şekil 1.3: $\overline{H}(\sqrt{2})$ Genişletilmiş Hecke Grubunun Temel Bölgesi.

2.3.4 Teorem: $\overline{H}(\sqrt{3})$ genişletilmiş Hecke grubu için temel bölge,

$$\overline{F}_{\sqrt{3}} = \left\{ z \in U : -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \operatorname{Re}(z) \leq 0, \ |z| \geq 1 \right\}$$

kümesidir.



Şekil 1.4: $\overline{H}(\sqrt{3})$ Genişletilmiş Hecke Grubunun Temel Bölgesi.

2.4 Grup Sunuşları

2.4.1 Tanım: X bir küme (üreteç sembollerinin kümesi) ve X kümesi üzerinde devirsel indirgenmiş kelimelerden oluşan R^* (bağıntı kelimelerinin kümesi) olsun. Bu durumda,

$$P = < X \mid R^* > \tag{2.9}$$

ikilisine bir *grup sunuşu* denir. X ve R^* kümelerinin her ikisi de sonlu ise P sunuşunun sonlu olduğu söylenir [33].

(i) C_n **Devirli Grupları:** C_n grup sunuşları,

$$C_n \cong < \alpha \mid \alpha^n = I >$$

şeklindedir. Bunların üçgen grup gösterimleri $(1,n,n)$ veya $(n,1,n)$ biçimindedir.

(ii) D_n **Dihedral Grupları:** D_n gruplarının sunuşları,

$$D_n \cong < \alpha,\ \beta \mid \alpha^2 = \beta^2 = (\alpha\beta)^n = I >,\ D_n \cong < \alpha,\ \beta \mid \alpha^2 = \beta^n = (\alpha\beta)^2 = I >$$

veya

$$D_n \cong < \alpha,\ \beta \mid \alpha^n = \beta^2 = (\alpha\beta)^2 = I >$$

şeklindedir ve $|D_n| = 2n$ dir. D_n grubunun üçgen grubu olarak gösterimi $(2,2,n)$ veya $(2,n,2)$ ya da $(n,2,2)$ biçimindedir.

(iii) Simetrik ve Alterne Gruplar: n elemanlı bir kümenin bütün permütasyonlarının kümesi, fonksiyonların bileşke işlemine göre bir grup oluşturur. Bu gruba *simetrik grup* denir ve S_n ile gösterilir. Çift permütasyonların kümesi de bu grubun bir alt grubunu oluşturur. Bu gruba *alterne grup* denir ve A_n ile gösterilir. $|S_n| = n!$ ve $|A_n| = n!/2$ dir. Çok karşılaşılan simetrik ve alterne gruplar $D_3 \cong S_3 \cong (2,2,3)$, $A_4 \cong (2,3,3)$, $S_4 \cong (2,3,4)$ ve $A_5 \cong (2,3,5)$ gruplarıdır [34-36].

2.5 Çarpım Grupları

2.5.1 Direkt Çarpım Grubu

A ve B iki grup olmak üzere direkt çarpım $G = A \times B$ ile gösterilir. Sonuç olarak kartezyen çarpımdan dolayı

$$|G| = |A||B|$$

dir. Bu grupla ilgili ayrıntılı bilgilere [33, 36] numaralı kaynaklardan bakılabilir. Biz direkt çarpımın grup sunuşunu verelim.

2.5.1.1 Teorem: A ve B grupları sırasıyla

$$P_A = \langle X \mid R_1^* \rangle \text{ ve } P_B = \langle Y \mid R_2^* \rangle$$

sunuşlarıyla verilsin. Bu iki grubun direkt çarpım grubu olan G nin sunuşu

$$P_G = \langle X, Y \mid R_1^*, R_2^*, R^* \rangle \tag{2.10}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $R^* = \{xyx^{-1}y^{-1} : x \in X, y \in Y\}$ dir [33].

2.5.2 Serbest Çarpım Grubu

A ve B herhangi iki grup olmak üzere bu iki grubun serbest çarpım grubunun sunuşu aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

2.5.2.1 Teorem: A ve B grupları sırasıyla

$P_A = < X \mid R_1^* >$ ve $P_B = < Y \mid R_2^* >$

sunuşlarına sahip olsun. Bu durumda A ve B gruplarının serbest çarpımı olan $G = A * B$ grubunun sunuşu,

$$P_G = < X, Y \mid R_1^*, R_2^* > \tag{2.11}$$

şeklinde tanımlanır [33].

2.5.3 Karışımlı Serbest Çarpım Grubu

A ve B herhangi iki grup olsun. $C \leq A$ alt grubu verilsin. $\phi : C \to B$ birebir homomorfizması için A ve B gruplarının C alt grubu ile tanımladıkları karışımlı serbest çarpım grubu ile ilgili ayrıntılı bilgilere [33, 36] kaynaklarından ulaşılabilir. Bu grup $G = A *_C B$ ile gösterilir ve sunuşu aşağıdaki gibidir.

2.5.3.1 Teorem: A ve B grupları sırasıyla

$P_A = < X \mid R_1^* >$ ve $P_B = < Y \mid R_2^* >$

sunuşlarıyla verilsin. $C \leq A$ alt grubunun üreteç kümesi Z olmak üzere $G = A *_C B$ grubunun sunuşu

$$P_G = < X, Y \mid R_1^*, R_2^*, \{\phi(z) z^{-1} : z \in Z\} > \tag{2.12}$$

şeklinde tanımlanır [33].

2.5.3.2 Örnek: $A=<a\mid a^4=I>$ ve $B=<b\mid b^6=I>$ devirli gruplarını alalım. A ile B nin serbest çarpımı

$$A*B=<a,b\mid a^4=b^6=I>$$

biçimindedir. $C=<a^2>$ olmak üzere A nın alt grubudur.

$$\begin{aligned}\phi &: C\rightarrow B\\ a^2 &\mapsto b^3\end{aligned}$$

birebir homomorfizması yardımıyla $A*_C B$ grubunun sunuşu,

$$A*_C B=<a,b\mid a^4=b^6=\phi(a^2)(a^2)^{-1}=I>$$

bulunur. Bu sunuşun kısaltılmış hali

$$A*_C B=<a,b\mid a^4=I,\ a^2=b^3>$$

şeklindedir.

2.6 Z[$\sqrt{2}$] ve Z[$\sqrt{3}$] Halkaları

Bu bölümde kısaca **Z**[$\sqrt{2}$] ve **Z**[$\sqrt{3}$] halkalarından bahsedeceğiz. Tezimizde çalışacağımız pozitif tanımlı kuadratik formların katsayıları bu halkalardan alınacaktır. Bu konuyla ilgili ayrıntılı bilgilere [34, 37] kaynaklarından ulaşılabilir.

2.6.1 Tanım: *F* cismi, *K* cisminin alt cismi ise *K*' ya *F*' nin *cisim genişlemesi* denir.

2.6.2 Örnek: **R**, **Q**' nun ve **C** ise **R**'nin cisim genişlemesidir.

2.6.3 Tanım: K, F cisminin bir genişlemesi ve $\alpha \in K$ olsun. K' nın F'yi ve α'yı bulunduran en küçük alt cismi $F(\alpha)$ ile gösterilirse, bu cisme α'nın F cismine ilavesi ile elde edilmiş F cisminin *basit genişlemesi* denir.

K' nın bütün alt cisimlerinin arakesiti bir alt cisim olacağından en küçük alt cisim vardır. $F(\alpha)$ K'nın, F ve α'yı içeren tüm alt cisimlerin arakesitidir.

2.6.4 Örnek: D, pozitif tam kare olmayan bir tamsayı olmak üzere $\mathbf{Q}(\sqrt{D})$ cismi, $\mathbf{R}$'nin

$$F=\{\, a+b\sqrt{D} : a,b \in \mathbf{Q}\} \tag{2.13}$$

alt cismine eşittir.

2.6.5 Tanım: $\mathbf{Q}(\sqrt{D})$ üzerindeki işlemler

$$\begin{aligned}(a+b\sqrt{D}) \pm (c+d\sqrt{D}) &= (a \pm c)+(b \pm d)\sqrt{D},\\ (a+b\sqrt{D})(c+d\sqrt{D}) &= (ac+bdD)+(ad+bc)\sqrt{D}\end{aligned} \tag{2.14}$$

şeklindedir.

$\mathbf{Z}[\sqrt{2}\,]$ ve $\mathbf{Z}[\sqrt{3}\,]$ halkaları, $\mathbf{Z}$ halkasına sırasıyla $\sqrt{2}$ ve $\sqrt{3}$ katılarak elde edilen halkalardır. Bu halkalar,

$$\mathbf{Z}[\sqrt{2}\,] = \{a+b\sqrt{2} : a,b \in \mathrm{Z}\} \tag{2.15}$$

ve

$$\mathbf{Z}[\sqrt{3}\,] = \{a+b\sqrt{3} : a,b \in \mathrm{Z}\} \tag{2.16}$$

biçimindedir.

Tanımlara dikkat edilirse, $(3+\sqrt{2}) \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}\,]$ ve $(5+\sqrt{3}) \in \mathbf{Z}[\sqrt{3}\,]$ olur. Ayrıca, $\mathbf{Z}[\sqrt{2}\,]$ ve $\mathbf{Z}[\sqrt{3}\,]$ birer tamlık bölgesidir.

3. POZİTİF TANIMLI KUADRATİK FORMLAR İLE GENİŞLETİLMİŞ MODÜLER GRUP ARASINDAKİ İLİŞKİLER

Bu bölümde çalışmamızın önemli bir bölümünü oluşturan kuadratik formlarla ilgili bazı tanımlar, terimler ve notasyonlar verilecektir. Ayrıca pozitif tanımlı kuadratik formlarla genişletilmiş modüler grup arasındaki ilişkiler incelenecektir. Bu konuyla ilgili ayrıntılı bilgilere [16, 23-25, 38] numaralı kaynaklardan ulaşılabilir.

3.1 Kuadratik Formlar

3.1.1 Tanım: $a, b, c \in \mathbf{R}$ olmak üzere

$$F(X,Y) = aX^2 + bXY + cY^2 \tag{3.1}$$

şeklindeki polinomlara *kuadratik (ikinci dereceden) form* denir ve bu form kısaca katsayıları yardımıyla $F = (a,b,c)$ ile belirtilir. F nin *determinantı* da $\Delta = \Delta(F)$ ile gösterilir ve $\Delta = b^2 - 4ac$ olarak tanımlanır. Üstelik $F = (a, b, c)$ formu için,

i) "F tamdır $\Leftrightarrow$ $a,b,c \in \mathrm{Z}$ dir."

ii) "F pozitif tanımlıdır $\Leftrightarrow \Delta(F) < 0,\ a,c > 0$ dır".

iii) "F indefinitedir $\Leftrightarrow \Delta(F) > 0$ dır".

iv) "F ilkeldir $\Leftrightarrow obeb(a,b,c) = 1$ dir".

Formların bir çok önemli özelliği, modüler veya genişletilmiş modüler grup yardımıyla verilir. $\overline{\Gamma}$ genişletilmiş modüler grup olmak üzere, $F = (a,b,c)$ herhangi bir form ve $g = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \in \overline{\Gamma}$ dönüşümü için F nin g altındaki gF resmi

$$\begin{aligned} gF(X,Y) = {} & (ar^2 + brs + cs^2)X^2 + (2art + bru + bts + 2csu)XY \\ & + (at^2 + btu + cu^2)Y^2 \end{aligned} \tag{3.2}$$

olarak tanımlanır. Bu tanıma göre, gF de ikinci dereceden bir formdur. Üstelik gF formu, F formunda $X \to rX + tY$, $Y \to sX + uY$ değişken değişimi yapılarak elde edilmiştir ve $gF = F(rX + tY, sX + uY)$ dir. Buna göre, F ile gF aynı özelliklere sahiptirler. O halde F pozitif tanımlı, indefinite veya ilkel ise; gF de pozitif tanımlı, indefinite veya ilkeldir. Ayrıca F ile gF aynı determinantlıdır, yani $\Delta(F) = \Delta(gF)$ dir. gF nin bu şekildeki tanımı genişletilmiş modüler grubun formlar kümesi üzerinde bir grup etkisidir öyle ki her $g, h \in \overline{\Gamma}$ için $g(hF) = (gh)F$ ve $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} F = F$ dir [25].

3.1.2 Tanım: F ve G herhangi iki kuadratik form olsun. Eğer $gF = G$ olacak şekilde en az bir $g \in \overline{\Gamma}$ varsa F ve G formlarına *denktir* denir. Eğer $\det(g) = 1$ ise bu formlara *has denk*, $\det(g) = -1$ ise bu formlara *has olmayan denk formlar* denir. Eğer F formu kendisine has olmayan denk ise bu forma *ambiguous form* denir [25].

3.1.3 Örnek: $F = (1, 7, -6)$ ve $G = (2, 7, -3)$ formları ve $g = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ dönüşümü için,

$$gF = F(X + 3Y, X + 4Y) = 2X^2 + 7XY - 3Y^2 = G$$

dir. Diğer yandan $\det(g) = 1$ olduğundan bu iki form birbirine has denktir.

3.1.4 Örnek: $F = (7, -2, 1)$ ve $G = (1, 0, 6)$ kuadratik formları ve $g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ dönüşümü için,

$$gF = F(Y,\ X+Y) = X^2 + 6Y^2 = G$$

ve $\det(g) = -1$ olduğundan bu iki form birbirine has olmayan denktir.

3.1.5 Uyarı: Denk formlar aynı determinantlıdır. Ancak aynı determinantlı formların denk olması gerekmez.

3.2 Pozitif Tanımlı Kuadratik Formlar

Bu bölümde, pozitif tanımlı kuadratik formların daha sonraki bölümlerde değinilecek olan bazı özellikleri incelenecektir.

3.2.1 Tanım: $F = (a,b,c)$ pozitif tanımlı bir kuadratik form olsun. Bu takdirde **U** üst-yarı düzlemindeki bir z noktası için bu form

$$F = a(X + zY)(X + \bar{z}Y) \tag{3.3}$$

şeklinde yazılabilir. Bu şekildeki z sayısına *F formunun taban noktası* denir ve $z = z(F)$ ile gösterilir [16].

Yukarıdaki tanımda $z = x + iy$ olarak alınırsa;

$$z = \frac{b + i\sqrt{-\Delta(F)}}{2a} \in \mathbf{U} \tag{3.4}$$

bulunur. Tersine üst-yarı düzlemde keyfi bir z noktası verildiğinde taban noktası z olacak şekilde pozitif tanımlı tamsayı katsayılı bir kuadratik form vardır ve bu form,

$$F = (a,b,c) = \left(\frac{1}{|z|^2}, \frac{2x}{|z|^2}, 1\right) \tag{3.5}$$

dir. Dolayısıyla da üst-yarı düzlemin noktaları ile pozitif tanımlı tamsayı katsayılı kuadratik formlar arasında birebir bir eşleme vardır [16].

3.2.2 Tanım: Pozitif tanımlı $F=(a,b,c)$ formu için $|b|\leq a\leq c$ şartı sağlanıyorsa bu forma *indirgenebilir form* denir [25].

3.2.3 Teorem: Pozitif tanımlı indirgenemeyen her bir form aynı determinantlı

$$F_R=\begin{cases}\left(1,0,\dfrac{-\Delta}{4}\right); & \Delta\equiv 0(\bmod 4)\\ \left(1,1,\dfrac{1-\Delta}{4}\right); & \Delta\equiv 1(\bmod 4)\end{cases}$$

indirgenebilir forma resmedilebilir [16].

3.3 Pozitif Tanımlı Tam Kuadratik Formlar ile Genişletilmiş Modüler Grup Arasındaki İlişkiler

Bu bölümde [16] numaralı kaynakta, Tekcan ve Bizim tarafından, pozitif tanımlı formların taban noktaları ve genişletilmiş modüler grubun temel bölgesi ile ilgili elde edilen sonuçlar verilmiştir.

3.3.1 Teorem: $m\geq 2$ bir tamsayı ve $0<D<m^2$ olmak üzere, taban noktası $x=-\dfrac{1}{m}$ doğrusu üzerinde olan $-D$ determinantlı pozitif tanımlı bir $F=(a,b,c)$ formu vardır [16].

Yukarıda elde edilen pozitif tanımlı formlarla ilgili olarak aşağıdaki sonuç verilebilir.

3.3.2 Sonuç: Taban noktaları $x=-\dfrac{1}{m}$ doğrusu üzerinde olan pozitif tanımlı kuadratik formlar için,

- m tek ise pozitif tanımlı tam formlar $1 \le j \le k$ için $F_j = (mj, -2j, 1)$,
- m çift ise pozitif tanımlı tam formlar $1 \le j \le m-1$ için $F_j = (kj, -j, 1)$

şeklindedir [16].

Yukarıda elde edilen tam formlardan sadece $F = (1, -1, 1)$ ve $F = (1, 0, 1)$ indirgenebilir, diğerleri indirgenemezdir. İndirgenemeyen diğer tüm pozitif tanımlı tam formların indirgenebilir formlara resmedilmesi ile ilgili olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

3.3.3 Teorem: F formu için,

- m tek ise indirgenemeyen $F_j = (mj, -2j, 1)$ formunu aynı

determinantlı indirgenebilir $F_j = (1, 0, \frac{D_j}{4})$ formuna resmeden dönüşüm

$$g_j^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -j \end{pmatrix} \text{ veya } g_j^- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & j \end{pmatrix}$$

dir.

- m çift ise pozitif tanımlı indirgenemeyen $F_j = (kj, -j, 1)$ formunu

i) j tek iken aynı determinantlı $F_j = (1, 1, \frac{1+D_j}{4})$ formuna resmeden dönüşüm

$$g_j^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \frac{1-j}{2} \end{pmatrix} \text{ veya } g_j^- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{1+j}{2} \end{pmatrix}$$

dir.

ii) j çift iken aynı determinantlı $F_j = (1, 0, \frac{D_j}{4})$ formuna resmeden dönüşüm

$$g_j^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \frac{-j}{2} \end{pmatrix} \text{ veya } g_j^- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{j}{2} \end{pmatrix}$$

dir [16].

Tekcan ve Bizim, daha sonra taban noktaları orijin merkezli çemberler üzerindeki pozitif tanımlı kuadratik formları ele almışlar ve aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir.

3.3.4 Teorem: $m \geq 1$ tamsayı ve $0 < D < 4m^2$ olsun. $C : x^2 + y^2 = \dfrac{1}{m^2}$ çemberinin üst-yarı düzlem ile arakesitini $\tilde{C}$ ile gösterelim. Bu takdirde $-D$ determinantlı ve taban noktaları $\tilde{C}$ çemberi üzerinde olan iki tip form vardır ve bu formlar

$$F = (a, -b, c) \text{ ve } G = (a, b, c)$$

şeklindedir [16].

Ayrıca, Tekcan ve Bizim, bu formların sayıları ile ilgili olarak aşağıdaki sonucu elde etmişlerdir.

3.3.5 Sonuç: $m \geq 1$ olmak üzere taban noktaları $\tilde{C}$ çemberi üzerinde olan $1 \leq j \leq 2m-1$ için $j^2 - 4m^2$ determinantlı $2m-1$ tane pozitif tanımlı

$$F_j = (m^2, -j, 1) \text{ ve } G_j = (m^2, j, 1)$$

formu vardır [16].

Yukarıda elde edilen formlardan sadece $F_1 = (1, -1, 1)$ ve $G_1 = (1, 1, 1)$ indirgenebilir, diğerleri indirgenemezdir. İndirgenemeyen diğer tüm formların indirgenebilir formlara resmedilmesi ile ilgili olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

3.3.6 Teorem: F_j formu için,

- j tek ise F_j formunu indirgenebilir $F_j = (1, 1, \dfrac{1 + D_j}{4})$ formuna

resmeden dönüşüm

$$g_j^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \dfrac{1-j}{2} \end{pmatrix} \text{ veya } g_j^- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \dfrac{1+j}{2} \end{pmatrix}$$

dir.

- j çift ise F_j formunu indirgenebilir $F_j = (1, 0, \frac{D_j}{4})$ formuna resmeden

dönüşüm

$$g_j^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \dfrac{-j}{2} \end{pmatrix} \text{ veya } g_j^- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \dfrac{j}{2} \end{pmatrix}$$

dir [16].

4. $\overline{H}(\sqrt{2})$ VE $\overline{H}(\sqrt{3})$ GENİŞLETİLMİŞ HECKE GRUPLARI İLE POZİTİF TANIMLI KUADRATİK FORMLAR ARASINDAKİ İLİŞKİLER

Bu bölümde, 3.3 Bölümde verilen pozitif tanımlı tam kuadratik formlar ve genişletilmiş modüler grup arasındaki bazı ilişkilerin benzerlerinin, katsayıları $\mathbf{Z}[\sqrt{2}\,]$ ve $\mathbf{Z}[\sqrt{3}\,]$ halkalarından alınan pozitif tanımlı kuadratik formlar ile sırasıyla $\overline{H}(\sqrt{2})$ ve $\overline{H}(\sqrt{3})$ genişletilmiş Hecke grubu arasında da olup olmadığı incelenmiştir.

4.1 Pozitif Tanımlı Kuadratik Formlar ile $\overline{\mathrm{H}}(\lambda_q)$ Genişletilmiş Hecke Grupları

Burada, katsayıları $\mathbf{Z}[\lambda_q]$ halkasından alınan pozitif tanımlı kuadratik formlar ile $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grubu arasındaki bazı ilişkiler incelenmiştir.

Aşağıdaki tanım, katsayıları $\mathbf{Z}[\lambda_q] = \{X + Y\lambda_q : X, Y \in \mathrm{Z}\}$ halkasından alınan kuadratik formlarla, $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke gruplarının elemanları altındaki resimleriyle ilgilidir. Burada genişletilmiş Hecke gruplarının elemanlarının matris gösterimi kullanılmıştır.

4.1.1 Tanım: $g = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbf{Z}[\lambda_q])$

matrisi ve $F(X, Y) \in \mathbf{Z}[\lambda_q](a,b,c)$ olmak üzere, $F(X,Y) = aX^2 + bXY + cY^2$ pozitif tanımlı kuadratik formunda

$$X \mapsto rX + tY$$
$$Y \mapsto sX + uY$$

değişken değişimi yapıldığında

$$gF = a(rX + tY)^2 + b(rX + tY)(sX + uY) + c(sX + uY)^2$$

kuadratik formu elde edilir. Burada

$$A = ar^2 + brs + cs^2$$
$$B = 2art + bru + bts + 2csu$$
$$C = at^2 + btu + cu^2$$

olmak üzere,

$$gF = AX^2 + BXY + CY^2$$

şeklindedir.

4.1.2 Teorem: Katsayıları $\mathbf{Z}[\lambda_q]$ halkasından alınan pozitif tanımlı F formu ve $g_1, g_2 \in \mathrm{GL}(2,\ \mathbf{Z}[\lambda_q])$ için

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} F = F \text{ ve } g_1(g_2F) = (g_1g_2)F$$

dir. Böylece $\mathrm{GL}(2,\ \mathbf{Z}[\lambda_q])$ grubu katsayıları $\mathbf{Z}[\lambda_q]$ halkasından alınan pozitif kuadratik formlar üzerinde soldan etkilidir.

4.1.3 Tanım: $F, G \in \mathbf{Z}[\lambda_q](a,b,c)$ için $gF = G$ olacak şekilde en az bir $g \in \mathrm{GL}(2,\ \mathbf{Z}[\lambda_q])$ varsa bu iki forma *denk form* denir.

4.2 $\overline{H}(\sqrt{2})$ Genişletilmiş Hecke Grupları ile Pozitif Tanımlı Kuadratik Formlar Arasındaki İlişkiler

Bu bölümde, taban noktası $x = \dfrac{-\sqrt{2}}{m}$ doğrusunda bulunan ve katsayıları $\mathbf{Z}[\sqrt{2}\,]$ halkasından alınan pozitif tanımlı kuadratik formlar ile ilgili özellikler verilmiştir. Ayrıca elde edilen indirgenemeyen pozitif tanımlı formların $\overline{H}(\sqrt{2})$ genişletilmiş Hecke grubunun elemanları tarafından indirgenebilir formlara resmedilmesi gösterilmiştir.

4.2.1 Teorem: $m \geq 3$ tamsayı, $0 < 2D < m^2$ olmak üzere taban noktası $x = \dfrac{-\sqrt{2}}{m}$ doğrusu üzerinde *–D* determinantlı bir *F*∈ $\mathbf{Z}[\sqrt{2}\,](a,b,c)$ pozitif tanımlı kuadratik formu vardır.

İspat: Üst-yarı düzlemdeki herhangi bir $z = x + iy$ noktası için, taban noktası z ve determinantı $\Delta(F) = \dfrac{-4y^2}{|z|^4}$ olan pozitif tanımlı formun

$$F = \left(\frac{1}{|z|^2}, \frac{2x}{|z|^2}, 1 \right)$$

şeklinde olduğu dikkate alınırsa, $\Delta(F) = -D$ eşitliğinden;

$$\Delta(F) = \frac{-4y^2}{|z|^4} \Leftrightarrow -D = \frac{-4y^2}{|z|^4} \Leftrightarrow \frac{D}{4} = \frac{y^2}{|z|^4} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{D}}{2} = \frac{y}{|z|^2}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1 \mp \sqrt{1 - Dx^2}}{\sqrt{D}} \Leftrightarrow y = \frac{1 + \sqrt{1 - Dx^2}}{\sqrt{D}}$$

elde edilir. $x = \dfrac{-\sqrt{2}}{m}$ olduğundan yukarıdaki y değeri

$$y=\frac{1+\sqrt{1-D\frac{2}{m^2}}}{\sqrt{D}}=\frac{1+\sqrt{\frac{m^2-2D}{m^2}}}{\sqrt{D}}=\frac{m+\sqrt{m^2-2D}}{m\sqrt{D}}$$

olur. x ve y nin bu değerleri için

$$z=\left(-\frac{1}{m}\right)\sqrt{2}+i\left(\frac{m+\sqrt{m^2-2D}}{m\sqrt{D}}\right)$$

elde edilir. O halde

$$|z|^2=\frac{2(m+\sqrt{m^2-2D})}{mD}$$

dir. Dolayısıyla

$$F=\left(\frac{1}{|z|^2},\frac{2x}{|z|^2},1\right)=\left(\frac{mD}{2(m+\sqrt{m^2-2D})},\frac{-D\sqrt{2}}{m+\sqrt{m^2-2D}},1\right)$$

pozitif tanımlı formu elde edilir.

Şimdi bu formu tam hale getirelim. Bunun için

$$\frac{mD}{2(m+\sqrt{m^2-2D})},\frac{-D}{m+\sqrt{m^2-2D}}\in \mathbf{Z}$$

olmalıdır. Burada iki durum söz konusudur.

1. Durum: m tek, yani $m=2k+1$, $k\in \mathbf{Z}^+$ olsun. Bu takdirde D çift olup

$$F(X,Y)\in \mathbf{Z}[\sqrt{2}\,](a,b,c) \Leftrightarrow 2D=m^2-(2l-1)^2,\ |l|\le k$$

dir.

$\Rightarrow$: $F(X,Y) \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}\,](a,b,c)$ olsun. m tek ve D çift olduğundan $\sqrt{m^2-2D}$ tektir. $\sqrt{m^2-2D} = |2l-1|$, $(l \in \mathbf{Z})$ denilirse

$$m^2-2D=(2l-1)^2 \Rightarrow 2D=m^2-(2l-1)^2$$

olur. D pozitif olduğundan

$$m^2-(2l-1)^2=(m-(2l-1))(m+(2l-1)) \in \mathbf{Z}^+$$

olmak zorundadır. $l \in \mathbf{Z}$ ve $m=2k+1$, $(k \in \mathbf{Z}^+)$ olduğundan

$$\begin{aligned} m^2-(2l-1)^2 &= (2k+1)^2-(2l-1)^2 \\ &= (2k+1+2l-1)(2k+1-2l+1) \\ &= 2(k+l)2(k-l+1) > 0 \end{aligned}$$

dır. Bu ise

$$(k+l).(k-l+1) \in \mathbf{Z}^+ \tag{4.1}$$

olması demektir. Burada $l \geq 0$ ya da $l<0$ dır. Eğer $l \geq 0$ ise $k \in \mathbf{Z}^+$ olduğundan $(k+l) \in \mathbf{Z}^+$ olur. Diğer yandan $(k+l)(k-l+1) \in \mathbf{Z}^+$ olduğundan $k-l+1>0$ olmalıdır. Buradan da $k+1>l$ elde edilir ki bu ise $k \geq l$ olması demektir. $l<0$ olsun. (4.1) de $k+l<0$ olarak kabul edilirse, $(k+l)(k-l+1) \in \mathbf{Z}^+$ olup $k-l+1<0$ olmalıdır. Buradan $k+1<l$ olur ki bu da $k \in \mathbf{Z}^+$ oluşu ile çelişir,. O halde $l<0$ iken $k+l>0$ olmalıdır. Böylece (4.1) den $k-l+1>0$ sonucu çıkar. Burada $-k>l$ olsun. Bu ise $0>k+l$ olması demektir. $k+l>0$ oluşundan bu bir çelişkidir. Yani $-k \leq l$ dir. Bu iki durumdan $-k \leq l \leq k \Rightarrow |l| \leq k$ olur. O halde $2D=m^2-(2l-1)^2$ ve $|l| \leq k$ dır.

$\Leftarrow$: $|l| \leq k$ için $2D=m^2-(2l-1)^2$ olsun. Bu takdirde

$$2D=(m-(2l-1))(m+(2l-1))$$

olur. Buradan $m-(2l-1)$ çift olduğundan

$$a=\frac{mD}{2(m+\sqrt{m^2-2D})}=\frac{m(m^2-(2l-1)^2)}{2.2.(m+\sqrt{m^2-(m^2-(2l-1)^2)})}$$

$$=\frac{m(m-(2l-1))(m+(2l-1))}{4(m+(2l-1))}=\frac{(2k+1)(k-l+1)}{2}$$

olur ki $(k-l)$ tek ve $|l|\leq k$ olduğundan a tamsayıdır. Diğer yandan

$$b=\frac{-D}{m+\sqrt{m^2-2D}}=\frac{-m+(2l-1)}{2}=\frac{-(2k+1)+(2l-1)}{2}=l-k-1\in\mathbf{Z}$$

elde edilir. Böylece $m\geq 3$ tek tamsayısı için böyle bir $F(X,Y)\in\mathbf{Z}[\sqrt{2}\,](a,b,c)$ pozitif tanımlı kuadratik formu vardır.

<u>2. Durum</u>: m çift, yani $m=2k$, ($k\in\mathbf{Z}^+$) olsun. Bu takdirde

$$F(X,Y)\in\mathbf{Z}[\sqrt{2}\,](a,b,c)\Leftrightarrow 2D=m^2-t^2,\ |t|\leq m-1,\ (t\neq 0)$$

dir.

$\Rightarrow$: $F(X,Y)\in\mathbf{Z}[\sqrt{2}\,](a,b,c)$ olsun.

$$0<2D<m^2\Rightarrow m^2-2D>0\Rightarrow\sqrt{m^2-2D}=|t|,\ t\in\mathbf{Z}$$

denilirse $2D=m^2-t^2$ olur. Ayrıca $D\in\mathbf{Z}^+$ olduğundan

$$(m-t)(m+t)\in\mathbf{Z}^+ \tag{4.2}$$

dir. Burada $t\geq 0$ olsun. O halde (4.2)'de $(m+t)\in\mathbf{Z}^+$ ve $(m-t)\in\mathbf{Z}^+$ olacağından

$$m-t>0\Rightarrow m>t\Rightarrow m-1\geq t \tag{4.3}$$

olur. $t<0$ olsun. (4.2)'den $(m-t)\in\mathbf{Z}^+$ dır. O halde $m+t>0$ olacağından

$$t>-m\Rightarrow t\geq -m+1 \tag{4.4}$$

elde edilir. (4.3) ve (4.4)'ten $-m+1\leq t\leq m-1\Rightarrow|t|\leq m-1$ bulunur.

$\Leftarrow$: $|t| \leq m-1$ için $2D = m^2 - t^2$ olsun. m çift olduğundan

$$a = \frac{mD}{2(m+\sqrt{m^2-2D})} = \frac{m(m^2-t^2)}{2.2(m+t)} = \frac{m(m-t)}{4} = \frac{k(m-t)}{2} \in \mathbf{Z}$$

ve

$$b = \frac{-D}{m+\sqrt{m^2-2D}} = -\frac{(m-t)}{2} \in \mathbf{Z}.$$

olur ki bu durumun $|t| \leq m-1$ ve $m \geq 3$ koşulları göz önüne alındığında, $(m-t)$ nin çift olması durumunda sağlanacağı açıktır. Böylece en az bir pozitif tanımlı kuadratik formun varlığı gösterilmiş olur.

4.2.1 Teorem'den şu teoreme ulaşabiliriz:

4.2.2 Teorem: Eğer m tek tamsayı ($m = 2k+1$, $k \in \mathbf{Z}^+$) ise taban noktası $x = \frac{-\sqrt{2}}{m}$ doğrusunda olan ve katsayıları $\mathbf{Z}[\sqrt{2}\,]$ halkasından alınan pozitif tanımlı bir kuadratik form vardır. Bu formlar için $j = \frac{D}{2(m+\sqrt{m^2-2D})}$ denilirse

$$F_j = (mj, -2\sqrt{2}j, 1),\ 1 \leq j \leq k$$

şeklindedir. Bu formların determinantı ise

$$\Delta(F_j) = (-2\sqrt{2}j)^2 - 4mj = 8j^2 - 4mj = 4j(4j-m)$$

olur. Eğer m çift, yani $m = 2k$, $k \in \mathbf{Z}^+$ ise taban noktası $x = \frac{-\sqrt{2}}{m}$ doğrusunda olan ve katsayıları $\mathbf{Z}[\sqrt{2}\,]$ halkasından alınan pozitif tanımlı bir kuadratik form vardır ve bu formlar $j = \frac{D}{(m+\sqrt{m^2-2D})}$ için

$$F_j = (kj, -\sqrt{2}j, 1),\ 1 \leq j \leq m-1$$

şeklindedir. Bu formun determinantı da

$$\Delta(F_j) = 2j^2 - 4kj = 2j(j-2k)$$

dır.

4.2.3 Örnek: 4.2.1 Teorem'deki $0 < 2D < m^2$ şartını sağlamadığı için $m = 2$ durumunu ayrıca inceleyelim. Bunun için $m = 2 = 2k \Rightarrow k = 1$ olduğundan taban noktası $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ doğrusu üzerinde olan ve diskriminantı -2 olan sadece bir tane pozitif tanımlı $F = (1, -\sqrt{2}, 1) \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}\,]$ kuadratik formu vardır. Bu kuadratik form aynı zamanda $F = (1, -\sqrt{2}, 1) = X^2 - \sqrt{2}XY + Y^2$ şeklinde de ifade edilebilir. Dikkat edilirse bu kuadratik formun taban noktası, $\overline{H}(\lambda_4)$ genişletilmiş Hecke grubunun temel bölgesinin sınırındadır.

4.2.4 Örnek: $m = 3$ için taban noktası $x = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ doğrusu üzerinde olan pozitif tanımlı kuadratik formun varlığını inceleyelim. $m = 3 = 2k + 1 \Rightarrow k = 1$ olur. O halde 4.2.1 Teorem'den $|l| \le k$ koşulu gereği $l = 0$ alındığında, $k - l = 1$ dir. Yine aynı teoremden m tek ise

$$a = \frac{(2k+1)(k-l+1)}{2} \text{ ile } b = l - k - 1$$

oluşundan k ve l değerleri yerine yazıldığında, $a = 3$ ve $b = -2$ bulunur. Dolayısıyla taban noktası $x = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ doğrusu üzerinde olan ve diskriminantı -4 olan sadece bir tane pozitif tanımlı $F = (3, -2\sqrt{2}, 1) \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}\,]$ kuadratik formu vardır. Bu kuadratik form aynı zamanda $F = (3, -2\sqrt{2}, 1) = 3X^2 - 2\sqrt{2}XY + Y^2$ şeklinde de ifade edilebilir. Dikkat edilirse bu kuadratik formun taban noktası, $x = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ doğrusu üzerindedir.

4.2.5 Örnek: $m=4$ için ($m=4=2k \Rightarrow k=2$ olduğundan) taban noktası $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ doğrusunda olan iki tane pozitif tanımlı kuadratik form vardır ve bu formları bulmak için 4.2.1 Teorem'e göre,

$$a == \frac{k(m-t)}{2} = \frac{2(4-t)}{2} = 4-t \text{ ve } b = -\frac{(m-t)}{2} = -\frac{(4-t)}{2}$$

koşulları ile $t \neq 0$, $-3 \leq t \leq 3$ ve $(4-t)$ çift şartlarını sağlayan $t=-2$, 2 değerleri a ve b de yerine yazılırsa,

$$F_1 = (2, -\sqrt{2}, 1),\ F_3 = (6, -3\sqrt{2}, 1)$$

pozitif tanımlı kuadratik formaları elde edilir. Burada dikkat edilirse elde edilen pozitif tanımlı kuadratik formlar, bahsedilen şartların yanında $1 \leq j \leq 3$ koşulunu da sağlayan $F_j = (kj, -\sqrt{2}j, 1)$ şeklindedir. F_1 pozitif tanımlı formunun taban noktasını kontrol edelim. Bunun için F_1 formunu

$$F_1 = (2, -\sqrt{2}, 1) = 2X^2 - \sqrt{2}XY + Y^2$$

biçiminde yazabiliriz. F_1 formunun determinantı $\Delta = b^2 - 4ac = 2 - 4.2.1 = -6$ dır ve taban noktası da

$$z = \frac{b + i\sqrt{-\Delta(F)}}{2a} = \frac{-\sqrt{2} + i\sqrt{6}}{2.2} = -\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}i$$

olur.

4.2.6 Örnek: $m=9$ için ($m=9=2k+1 \Rightarrow k=4$ olduğundan) taban noktası $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{9}$ doğrusu üzerinde olan dört tane pozitif tanımlı kuadratik form vardır ve bu formları bulmak için 4.2.1 Teorem'e göre,

$$a = \frac{(2k+1)(k-l+1)}{2} = \frac{9(5-l)}{2} \text{ ve } b = l - k - 1 = l - 5$$

koşulları ile $-4 \le l \le 4$ ve $(4-l)$ tek şartlarını sağlayan $l=-3,-1,1,3$ değerleri a ve b de yerine yazılırsa,

$$F_1=(9,-2\sqrt{2},1),\ F_2=(18,-4\sqrt{2},1),\ F_3=(27,-6\sqrt{2},1),\ F_4=(36,-8\sqrt{2},1)$$

pozitif tanımlı kuadratik formaları elde edilir. Burada dikkat edilirse elde edilen bu formlar, bahsedilen şartlara ilave olarak $1 \le j \le 4$ koşulunu da sağlayan $F_j=(9j,-2\sqrt{2}j,1)$ biçimindedir. F_1 pozitif tanımlı formunun taban noktasını kontrol edelim. Bunun için F_1 formunu

$$F_1=(9,-2\sqrt{2},1)=9X^2-2\sqrt{2}XY+1$$

şeklinde yazabiliriz. F_1 formunun determinantı $\Delta=b^2-4ac=8-4.9.1=-28$ dir ve taban noktası da

$$z=\frac{b+i\sqrt{-\Delta(F)}}{2a}=\frac{-2\sqrt{2}+i\sqrt{28}}{2.9}=-\frac{\sqrt{2}}{9}+\frac{\sqrt{7}}{9}i$$

olur.

Şimdi katsayıları $\mathbf{Z}[\sqrt{2}\,]$ den alınan pozitif tanımlı indirgenebilir kuadratik formun tanımını verelim.

4.2.7 Tanım: $F=(a,-b\sqrt{2},c)\in \mathbf{Z}[\sqrt{2}\,](a,b,c)$ olacak şekilde taban noktası $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{m}$ doğrusu üzerinde olan pozitif tanımlı bir form olsun. Eğer $|b| \le a \le c$ ise bu forma *indirgenebilirdir* denir.

4.2.8 Teorem: Katsayıları $\mathbf{Z}[\sqrt{2}\,]$ halkasında olan ve $m \ge 2$ olacak şekilde taban noktası $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{m}$ doğrusu üzerinde olan Δ diskriminantlı, pozitif tanımlı kuadratik formların resmedildiği indirgenebilir F_R kuadratik formu

$$F_R = \begin{cases} \left(1, 0, -\dfrac{\Delta}{4}\right); & \Delta \equiv 0 (\operatorname{mod} 4) \\ \left(1, -\sqrt{2}, \dfrac{2-\Delta}{4}\right); & \Delta \equiv 2 (\operatorname{mod} 4) \end{cases}$$

biçimindedir.

İspat: $F = (a, -b\sqrt{2}, c)$ pozitif tanımlı kuadratik formunun diskriminantı

$$\Delta = (-b\sqrt{2})^2 - 4ac = 2b^2 - 4ac$$

dir. Burada iki durum söz konusudur.

i) b tek olsun. O halde $b = 2r + 1$, ($r \in \mathbb{Z}$) yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} \Delta = 2b^2 - 4ac &= 2(2r+1)^2 - 4ac \\ &= 2(4r^2 + 4r + 1) - 4ac \\ &= 8r^2 + 8r + 2 - 4ac \\ &\equiv 2 (\operatorname{mod} 4) \end{aligned}$$

elde edilir.

ii) b çift olsun. O halde $b = 2s$, ($s \in \mathbb{Z}$) yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} \Delta = 2b^2 - 4ac &= 2(2s)^2 - 4ac \\ &= 2.4s^2 - 4ac \\ &= 8s^2 - 4ac \\ &\equiv 0 (\operatorname{mod} 4) \end{aligned}$$

olur.

i) ve *ii)* den diskriminant mod4'e göre ya 0 ya da 2 dir. 3.2.3 Teorem gereğince ispat tamamlanmış olur.

Genişletilmiş Hecke grubunun elemanları ile katsayıları $\mathbf{Z}[\sqrt{2}\,]$ halkasından alınan pozitif tanımlı kuadratik formların indirgenebilir forma resmedilebilmesi aşağıda verilmiştir.

4.2.9 Teorem: $F=(a,-b\sqrt{2},c)$ formu 4.2.1 Teorem'de elde edilen indirgenemeyen bir form ve F_R de F ile aynı determinantlı indirgenebilir form olmak üzere belirli bir $g\in \overline{H}(\sqrt{2})$ için $gF=F_R$ dir.

Tekcan ve Bizim'in [16] numaralı kaynakta verdiği 3.3.3 Teorem'in benzerini, katsayıları $\mathbf{Z}[\sqrt{2}\,]$ den alınan pozitif tanımlı kuadratik formlar için aşağıdaki şekilde verebiliriz.

4.2.10 Teorem: Taban noktaları $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{m}$ doğrusu üzerinde olan pozitif tanımlı kuadratik formlar için

- m tek ise, taban noktası $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{m}$ doğrusu üzerinde olan pozitif tanımlı kuadratik form $F_j=(mj,-2\sqrt{2}j,1)$, $1\le j\le k$ tipindedir. Bu formları indirgenmiş forma resmeden $g\in \mathrm{GL}(2,\mathbf{Z}[\sqrt{2}\,])$ matrisi $g=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & \sqrt{2}j\end{pmatrix}$ dir.

- m çift ise, taban noktası $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{m}$ doğrusu üzerinde olan pozitif tanımlı kuadratik form $F_j=(kj,-\sqrt{2}j,1)$, $1\le j\le m-1$ tipindedir. Bu formları indirgenmiş forma resmeden $\mathrm{GL}(2,\mathbf{Z}[\sqrt{2}\,])$ matrisleri ise, j çift iken $g=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & \dfrac{\sqrt{2}j}{2}\end{pmatrix}$

ve j tek ise $g=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & \left(\dfrac{j+1}{2}\right)\sqrt{2}\end{pmatrix}$ şeklindedir.

İspat: Taban noktaları $x = -\dfrac{\sqrt{2}}{m}$ doğrusu üzerinde olan pozitif tanımlı kuadratik formlar için; $m \geq 3$ tamsayısına göre aşağıdaki durumlar ortaya çıkar:

1) m tek ise indirgenemeyen pozitif tanımlı kuadratik formlar; $F_j = (mj, -2\sqrt{2}j, 1)$, $1 \leq j \leq k$ dır. Bu formların determinantı

$$\Delta(F_j) = b^2 - 4ac = (-2\sqrt{2}j)^2 - 4.mj.1 = 8j^2 - 4mj = 4(2j^2 - mj) \equiv 0(\bmod 4)$$

olduğundan Teorem 4.2.8 gereğince, indirgenmiş form $F_R = (1, 0, -\dfrac{\Delta}{4})$ olup yukarıdaki Δ değeri bu indirgenmiş formda yerine yazılırsa

$$F_{R_j} = (1, 0, \frac{4mj - 8j^2}{4}) = (1, 0, mj - 2j^2)$$

indirgenmiş formu elde edilir. $g = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \in \overline{H}(\sqrt{2})$ için aşağıdaki denklem sistemini elde ederiz.

$$\begin{aligned} mjr^2 - 2\sqrt{2}jrs + s^2 &= 1 \\ 2mjrt - 2\sqrt{2}jru - 2\sqrt{2}jts + 2su &= 0 \\ mjt^2 - 2\sqrt{2}jtu + u^2 &= mj - 2j^2 \end{aligned}$$

Bu denklem sisteminin bir çözümü; $r = 0$, $s = 1$, $t = 1$ ve $u = \sqrt{2}j$ dir. O halde $g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \sqrt{2}j \end{pmatrix} \in \overline{H}(\sqrt{2})$ için $gF_j = F_{R_j}$ dir.

2) m çift olsun. Bu takdirde indirgenemeyen kuadratik formlar $F_j = (kj, -\sqrt{2}j, 1)$, $1 \leq j \leq m-1$ dir. Bu formun determinantı

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-\sqrt{2}j)^2 - 4 \cdot kj \cdot 1 = 2j^2 - 4kj$$

dir. Öyleyse iki durum söz konusudur:

i)) j çift, yani $j = 2h$, ($h \in \mathbf{Z}$) olarak alınırsa yukarıdaki determinant

$$\Delta = 2(2h)^2 - 4k2h = 8h^2 - 8hk \equiv 0(\mathrm{mod}\, 4)$$

olacağından Teorem 4.2.8 gereğince, indirgenmiş form $F_R = (1, 0, -\frac{\Delta}{4})$ olup yukarıdaki Δ değeri bu indirgenmiş formda yerine yazılırsa

$$F_{R_j} = (1,0,\frac{4kj - 2j^2}{4}) = (1,0,kj - \frac{j^2}{2})$$

indirgenmiş formu elde edilir. $g = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \in \overline{H}(\sqrt{2})$ için

$$kjr^2 - \sqrt{2}jrs + s^2 = 1$$

$$2kjrt - \sqrt{2}jru - \sqrt{2}jts + 2su = 0$$

$$kjt^2 - \sqrt{2}jtu + u^2 = kj - \frac{j^2}{2}$$

denklem sisteminin bir çözümü $r = 0$, $s = 1$, $t = 1$ ve $u = \frac{\sqrt{2}j}{2}$ dir. O halde $g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{\sqrt{2}j}{2} \end{pmatrix} \in \overline{H}(\sqrt{2})$ için $gF_j = F_{R_j}$ dir.

ii) j tek, yani $j = 2e + 1$, ($e \in \mathbf{Z}$) olsun. Bu durumda $F_j = (k(2e+1), -\sqrt{2}(2e+1), 1)$ olup bu formun determinantı

$$\begin{aligned}\Delta = b^2 - 4ac &= (-\sqrt{2}j)^2 - 4.kj.1 \\ &= 2j^2 - 4kj \\ &= 2(2e+1)^2 - 4k(2e+1) \\ &= 8e^2 + 8e + 2 - 8ke - 4k \\ &\equiv 2(\mathrm{mod}\, 4)\end{aligned}$$

olduğundan 4.2.8 Teorem gereğince, indirgenmiş form $F_R = (1, -\sqrt{2}, \frac{2-\Delta}{4})$ şeklinde olup Δ değeri bu indirgenmiş formda yerine yazılırsa

$$F_{R_j}=\left(1,-\sqrt{2},\frac{-8e^2-8e+8ke+4k}{4}\right)=\left(1,-\sqrt{2},-2e^2-2e+2ke+k\right)$$

elde edilir. Buna göre $g=\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}\in \overline{H}(\sqrt{2})$ için

$$k(2e+1)r^2-\sqrt{2}(2e+1)rs+s^2=1$$

$$2k(2e+1)rt-\sqrt{2}(2e+1)ru-\sqrt{2}(2e+1)ts+2su=-\sqrt{2}$$

$$k(2e+1)t^2-\sqrt{2}(2e+1)tu+u^2=-2e^2-2e+2ke+k$$

denklem sisteminin bir çözümü $r=0$, $s=1$, $t=1$ ve $u=e\sqrt{2}$ olup $g=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \left(\frac{j+1}{2}\right)\sqrt{2} \end{pmatrix}\in \overline{H}(\sqrt{2})$ için $gF_j=F_{R_j}$ dir.

Aşağıdaki iki örnek katsayıları $\mathbf{Z}[\sqrt{2}\,]$ den alınan ve taban noktası sırasıyla $x=-\frac{\sqrt{2}}{5}$ ve $x=-\frac{\sqrt{2}}{6}$ doğruları üzerinde olan pozitif tanımlı kuadratik formlarla ilgilidir.

4.2.11 Örnek: 4.2.10 Teorem'inde $m=5$ için indirgenemeyen kuadratik formlar $F_1=(5,-2\sqrt{2},1)$ ile $F_2=(10,-4\sqrt{2},1)$ ve aynı determinantlı indirgenmiş formlar $F_{R_1}=(1,0,3)$ ile $F_{R_2}=(1,0,2)$ olup

$$g_1=[0;1;1;\sqrt{2}] \text{ için } g_1F_1=F_{R_1}$$

$$g_2=[0;1;1;2\sqrt{2}] \text{ için } g_2F_2=F_{R_2}$$

dir.

4.2.12 Örnek: 4.2.10 Teorem'inde $m=6$ ve j tek iken indirgenemeyen kuadratik formlar $F_1=(3,-\sqrt{2},1)$ ile $F_5=(15,-5\sqrt{2},1)$ ve aynı determinantlı indirgenmiş formlar $F_{R_1}=(1,\sqrt{2},3)$ ile $F_{R_5}=(1,\sqrt{2},3)$ olup

$$g_1 = [0;1;1;\sqrt{2}] \text{ için } g_1 F_1 = F_{R_1}$$

$$g_5 = [0;1;1;3\sqrt{2}] \text{ için } g_5 F_5 = F_{R_5}$$

dir. j çift iken indirgemeyen kuadratik formlar $F_2 = (6, -2\sqrt{2}, 1)$ ile $F_4 = (12, -4\sqrt{2}, 1)$ ve aynı determinantlı indirgenmiş formlar $F_{R_2} = (1,0,4)$, $F_{R_4} = (1,0,4)$ olup

$$g_2 = [0;1;1;\sqrt{2}] \text{ için } g_2 F_2 = F_{R_2}$$

$$g_4 = [0;1;1;2\sqrt{2}] \text{ için } g_4 F_4 = F_{R_4}$$

olur.

4.3 $\overline{H}(\sqrt{3})$ Genişletilmiş Hecke Grupları ile Pozitif Tanımlı Kuadratik Formlar Arasındaki İlişkiler

Bir önceki bölümde yer alan sonuçlar burada $\overline{H}(\sqrt{3})$ genişletilmiş Hecke grubu ve katsayıları $\mathbf{Z}[\sqrt{3}\,]$ den alınan pozitif tanımlı kuadratik formlar için verilmiştir.

Öncelikle taban noktası $x = \dfrac{-\sqrt{3}}{m}$ doğrusunda bulunan ve katsayıları $\mathbf{Z}[\sqrt{3}\,]$ halkasından alınan herhangi bir pozitif tanımlı kuadratik formun varlığı gösterilmiş, daha sonra da indirgenebilir forma nasıl resmedilebileceği ile ilgili sonuçlar elde edilmiştir.

4.3.1 Teorem: $m \geq 2$ $(m \neq 3)$ tamsayı ve $0 < 3D < m^2$ olmak üzere, taban noktası $x = \dfrac{-\sqrt{3}}{m}$ doğrusu üzerinde $-D$ determinantlı $F \in \mathbf{Z}[\sqrt{3}\,](a,b,c)$ olan bir pozitif tanımlı kuadratik form vardır.

İspat: Üst-yarı düzlemdeki herhangi bir $z = x + iy$ noktası için taban noktası z ve determinantı $\Delta(F) = \dfrac{-4y^2}{|z|^4}$ olan pozitif tanımlı form $F = \left(\dfrac{1}{|z|^2}, \dfrac{2x}{|z|^2}, 1\right)$ olduğundan $x = \dfrac{-\sqrt{3}}{m}$ değeri $y = \dfrac{1+\sqrt{1-Dx^2}}{\sqrt{D}}$ de yerine yazılırsa

$$y = \frac{1+\sqrt{1-D\dfrac{3}{m^2}}}{\sqrt{D}} = \frac{1+\sqrt{\dfrac{m^2-3D}{m^2}}}{\sqrt{D}} = \frac{m+\sqrt{m^2-3D}}{m\sqrt{D}}$$

elde edilir. x ve y nin bu değerleri z de yerine yazılırsa

$$z = \left(-\frac{1}{m}\right)\sqrt{3} + i\left(\frac{m+\sqrt{m^2-3D}}{m\sqrt{D}}\right)$$

olur. Buna göre

$$|z|^2 = \frac{2(m+\sqrt{m^2-3D})}{mD}$$

olur. O halde

$$F = \left(\frac{1}{|z|^2}, \frac{2x}{|z|^2}, 1\right) = \left(\frac{mD}{2(m+\sqrt{m^2-3D})}, \frac{-D\sqrt{3}}{m+\sqrt{m^2-3D}}, 1\right)$$

formu elde edilir. Elde edilen bu formun katsayılarını $\mathbf{Z}[\sqrt{3}\,]$ te bulmaya çalışalım. Bu durumda

$$\frac{mD}{2(m+\sqrt{m^2-3D})}, \frac{-D}{m+\sqrt{m^2-3D}} \in \mathbf{Z}$$

olmalıdır. Bunun için de iki durum söz konusudur.

<u>**1. Durum:**</u> m tek, yani $m = 2n+1$, ($n \in \mathbf{Z}^+$) olsun. Bu takdirde D çift olup

$F(X,Y) \in \mathbf{Z}[\sqrt{3}\,](a,b,c) \Leftrightarrow 3D = m^2 - (2p-1)^2$, $|p| \le n$

dir.

$\Rightarrow$: $F \in \mathbf{Z}[\sqrt{3}\,](a,b,c)$ olsun. m tek ve D çift olduğundan $\sqrt{m^2-3D}$ tektir. Eğer $\sqrt{m^2-3D} = |2p-1|$, $(p \in \mathbf{Z})$ denilirse $m^2-3D=(2p-1)^2 \Rightarrow 3D = m^2-(2p-1)^2$ ve böylece D pozitif olduğundan $m^2-(2p-1)^2 = (m-(2p-1))(m+(2p-1)) \in \mathbf{Z}^+$ olur. $p \in \mathbf{Z}$ ve $m = 2n+1$, ($n \in \mathbf{Z}^+$) olduğundan yukarıdaki eşitlik

$$\begin{aligned} m^2-(2p-1)^2 &= (2n+1)^2-(2p-1)^2 \\ &= (2n+1+2p-1)(2n+1-2p+1) \\ &= 2(n+p)2(n-p+1) > 0 \end{aligned}$$

haline gelir. Bu ise

$$(n+p)(n-p+1) \in \mathbf{Z}^+ \tag{4.5}$$

olması demektir. Burada $p \geq 0$ ya da $p < 0$ dır. $p \geq 0$ olsun. $n \in \mathbf{Z}^+$ olduğundan $(n+p) \in \mathbf{Z}^+$ dir. $(n+p).(n-p+1) \in \mathbf{Z}^+$ olduğundan $n-p+1>0$ olmalıdır. Buradan da $n+1>p$ elde edilir ki bu da $n \geq p$ demektir. $p<0$ olsun. (4.5)'te $n+p<0$ olarak kabul edelim. Bu durumda $(n+p).(n-p+1) \in \mathbf{Z}^+$ olduğundan $n-p+1<0$ olmalıdır. Buradan $n+1<p$ olur ki bu da $n \in \mathbf{Z}^+$ oluşu ile çelişir. O halde $p<0$ iken $n+p>0$ olmalıdır. Böylece (4.5)'ten $n-p+1>0$ sonucu da çıkar. Burada $-n>p$ olsun. Bu da $0>n+p$ demektir. $n+p>0$ oluşundan bu bir çelişkidir. Yani $-n \leq p$ dir. Bu iki durumdan $-n \leq p \leq n \Rightarrow |p| \leq n$ elde edilir. O halde $3D = m^2-(2p-1)^2$ ve $|p| \leq n$ dir.

$\Leftarrow$: $|p| \leq n$ için $3D = m^2-(2p-1)^2$ ise

$$3D = (m-(2p-1))(m+(2p-1))$$

dir. Buradan $m-(2p-1)$ çift olmak zorundadır. O halde

$$a = \frac{mD}{2(m+\sqrt{m^2-3D})} = \frac{m(m^2-(2p-1)^2)}{2.3.(m+\sqrt{m^2-(m^2-(2p-1)^2)})}$$

$$= \frac{m(m-(2p-1))(m+(2p-1))}{6(m+(2p-1))} = \frac{(2n+1)(n-p+1)}{3} \in \mathbf{Z}$$

ve

$$b = \frac{-D}{m+\sqrt{m^2-3D}} = \frac{-m+(2p-1)}{3} = \frac{-2(n-p+1)}{3} \in \mathbf{Z}$$

olur ki bu durum $(n-p+1)=3x$, $x\in \mathbf{Z}$ için sağlanır. Yani $n-p \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 3)$ ve $m \geq 2$ $(m \neq 3)$ tamsayı olmak üzere bu koşul, en az bir pozitif tanımlı kuadratik form için gerçekleşmektedir. (Burada $n-p \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 3)$ ve $n+p=0$ olduğu durumlarda $3D = m^2-(2p-1)^2$ eşitliğinde $D=0$ olacağından bu özel durum için pozitif tanımlı kuadratik form yoktur.) Böylece m tek ise böyle bir $F\in \mathbf{Z}[\sqrt{3}\,](a,b,c)$ varlığı ortadadır.

<u>2. Durum:</u> m çift, yani $m=2k$, $(k\in \mathbf{Z}^+)$ olarak alınsın. Bu takdirde

$$F\in \mathbf{Z}[\sqrt{3}\,](a,b,c) \Leftrightarrow 3D = m^2-t^2,\ |t| \leq m-1 \ (t\neq 0)$$

dir.

$\Rightarrow$: $F\in \mathbf{Z}[\sqrt{3}\,]$ için $0<3D<m^2 \Rightarrow m^2-3D>0 \Rightarrow \sqrt{m^2-3D}=|t|$, $t\in \mathbf{Z}$ denilirse, $3D=m^2-t^2$ olur. Ayrıca $D\in \mathbf{Z}^+$ olduğundan

$$(m-t)(m+t)\in \mathbf{Z}^+ \tag{4.6}$$

dir. Burada $t\geq 0$ olsun. O halde (4.2)'de $(m+t)\in \mathbf{Z}^+$ ve $(m-t)\in \mathbf{Z}^+$ olur. Buradan

$$m-t>0 \Rightarrow m>t \Rightarrow m-1\geq t \tag{4.7}$$

olur. $t<0$ olsun. (4.2) den $(m-t)\in \mathbf{Z}^+$ dır. O halde $m+t>0$ olur. Buradan

$$t>-m \Rightarrow t\geq -m+1 \tag{4.8}$$

elde edilir. (4.7) ve (4.8) den $-m+1\leq t\leq m-1 \Rightarrow |t|\leq m-1$ bulunur.

$\Leftarrow$: $|t| \leq m-1$ için $3D = m^2 - t^2$ $(t \neq 0)$ olsun. m çift olduğundan

$$a = \frac{mD}{2(m+\sqrt{m^2-3D})} = \frac{m(m^2-t^2)}{6(m+t)} = \frac{m(m-t)}{6} = \frac{k(m-t)}{3} \in \mathbf{Z}.$$

ve

$$b = \frac{-D}{m+\sqrt{m^2-3D}} = -\frac{(m-t)}{3} \in \mathbf{Z}.$$

olur ki bu $|t| \leq m-1$ olmak üzere $(m-t) = 3u$, $u \in \mathbf{Z}$ için sağlanır. Yani $m - t \equiv 0 \pmod 3$ ve $m \geq 2$ $(m \neq 3)$ tamsayı olmak üzere bu koşul, en az bir pozitif tanımlı kuadratik form için gerçekleşmektedir. Böylece m çift ise böyle bir $F \in \mathbf{Z}[\sqrt{3}]\,(a,b,c)$ varlığı gösterilmiş olur.

4.3.1 Teorem'den şu teoreme ulaşabiliriz:

4.3.2 Teorem: Eğer m tek tamsayı $(m = 2n+1,\ n \in \mathbf{Z}^+)$ ise taban noktası $x = \frac{-\sqrt{3}}{m}$ doğrusunda olan ve katsayıları $\mathbf{Z}[\sqrt{3}]$ halkasından alınan pozitif tanımlı bir kuadratik form vardır. Bu formlar $j = \frac{D}{2(m+\sqrt{m^2-3D})}$ için

$$F_j = (mj, -2\sqrt{3}j, 1),\ 1 \leq j \leq n$$

şeklindedir. Bu formların determinantı ise

$$\Delta(F_j) = (-2\sqrt{3}j)^2 - 4mj = 12j^2 - 4mj = 4j(3j-m)$$

olur. Eğer m çift, yani $m = 2k$, $k \in \mathbf{Z}^+$ ise taban noktası $x = \frac{-\sqrt{3}}{m}$ doğrusu üzerinde olan ve katsayıları $\mathbf{Z}[\sqrt{3}]$ halkasından alınan pozitif tanımlı bir kuadratik form vardır ve bu formlar $j = \frac{D}{2(m+\sqrt{m^2-3D})}$ için

$$F_j = (kj, -\sqrt{3}j, 1)\,,\ 1 \le j \le m-1$$

şeklindedir. Bu formun determinantı ise

$$\Delta(F_j) = 3j^2 - 4kj = j(3j - 4k)$$

olur.

4.3.3 Örnek: $m = 2$ için ($m = 2 = 2k \Rightarrow k = 1$ olduğundan) taban noktası $x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ doğrusu üzerinde olan ve diskriminantı -1 olan sadece bir tane pozitif tanımlı kuadratik form vardır ve bu kuadratik formu bulmak için 4.3.1 Teorem'e göre

$$a = \frac{k(m-t)}{3} = \frac{(2-t)}{3} \text{ ve } b = -\frac{(m-t)}{3} = -\frac{(2-t)}{3}$$

koşulları ile $-1 \le t \le 1$ ve $2 - t \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 3)$ şartlarını sağlayan $t = -1$ değeri yerine yazılırsa

$$F = (1, -\sqrt{3}, 1) \in \mathbf{Z}[\sqrt{3}\,]$$

pozitif tanımlı kuadratik formu elde edilir. Elde edilen bu form, bahsedilen şartların yanında $1 \le j \le 1$ koşulunu da sağlayan $F_j = (kj, -\sqrt{3}j, 1)$ şeklindedir. Bu pozitif tanımlı kuadratik form aynı zamanda

$$F = (1, -\sqrt{3}, 1) = X^2 - \sqrt{3}XY + Y^2$$

şeklinde de ifade edilebilir. Dikkat edilirse bu kuadratik formun taban noktası $\overline{H}(\lambda_6)$ genişletilmiş Hecke grubunun temel bölgesinin sınırındadır.

4.3.4 Örnek: $m = 4$ için ($m = 4 = 2k \Rightarrow k = 2$ olduğundan) taban noktası $x = -\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ doğrusu üzerinde olan iki tane pozitif tanımlı kuadratik form vardır ve bu formları bulmak için 4.3.1 Teorem'e göre

$$a = \frac{k(m-t)}{3} = \frac{2(4-t)}{3} \text{ ve } b = -\frac{(m-t)}{3} = -\frac{(4-t)}{3}$$

koşulları ile $-3 \leq t \leq 3$ ve $4 - t \equiv 0 \pmod 3$ şartlarını sağlayan $t = -2,1$ değerleri a ve b de yerine yazılırsa

$$F_1 = (2, -\sqrt{3}, 1), \quad F_2 = (4, -2\sqrt{3}, 1)$$

pozitif tanımlı kuadratik formaları elde edilir. Burada dikkat edilirse bu pozitif tanımlı kuadratik formlar, bahsedilen şartların yanında $1 \leq j \leq 3$ koşulunu da sağlayan $F_j = (kj, -\sqrt{3}j, 1)$ şeklindedir. F_1 pozitif tanımlı formunun taban noktasını kontrol edelim. Bunun için F_1 formunu

$$F_1 = (2, -\sqrt{3}, 1) = 2X^2 - \sqrt{3}XY + Y^2$$

biçiminde yazabiliriz. F_1 formunun determinantı $\Delta = -5$ olduğundan taban noktası da

$$z = \frac{b + i\sqrt{-\Delta(F)}}{2a} = -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4} i$$

olarak bulunur.

4.3.5 Örnek: $m = 7$ için ($m = 7 = 2n + 1 \Rightarrow n = 3$ olduğundan) taban noktası $x = -\frac{\sqrt{3}}{7}$ doğrusu üzerinde olan iki tane pozitif tanımlı kuadratik form vardır ve bu formları bulmak için 4.3.1 Teorem'e göre

$$a = \frac{(2n+1)(n-p+1)}{3} = \frac{7(4-p)}{3} \text{ ve } b = \frac{-2(n-p+1)}{3} = \frac{-2(4-p)}{3}$$

koşulları ile $-3 \leq p \leq 3$ ve $3 - p \equiv 2 \pmod 3$ şartlarını sağlayan $p = -2,1$ değerleri a ve b de yerine yazılırsa

$$F_1 = (7, -2\sqrt{3}, 1), \quad F_2 = (14, -4\sqrt{3}, 1)$$

pozitif tanımlı kuadratik formaları elde edilir. Bahsedilen şartlara ilave olarak $1 \leq j \leq 3$ koşulunu da sağlayan form $F_j = (mj, -2\sqrt{3}j, 1)$ biçimindedir. F_1 pozitif tanımlı formunun taban noktasını kontrol edelim. Bunun için F_1 formunu

$$F_1 = (7, -2\sqrt{3}, 1) = 7X^2 - 2\sqrt{3}XY + 1$$

şeklinde yazabiliriz. F_1 formunun determinantı $\Delta = -16$ ve taban noktası da

$$z = \frac{b + i\sqrt{-\Delta(F)}}{2a} = \frac{-2\sqrt{3} + i\sqrt{16}}{2.7} = -\frac{\sqrt{3}}{7} + \frac{2}{7}i$$

dir.

Katsayıları $\mathbf{Z}[\sqrt{3}]$ den alınan pozitif tanımlı indirgenebilir kuadratik formun tanımını verelim.

4.3.6 Tanım: $F = (a, -b\sqrt{3}, c) \in \mathbf{Z}[\sqrt{3}]\,(a,b,c)$ olacak şekilde taban noktası $x = -\frac{\sqrt{3}}{m}$ doğrusu üzerinde olan pozitif tanımlı bir form olsun. Eğer $|b| \leq a \leq c$ şartı sağlanıyor ise bu forma *indirgenebilirdir* denir.

4.3.7 Teorem: Katsayıları $\mathbf{Z}[\sqrt{3}]$ halkasında olan ve $m \geq 2$ için taban noktası $x = -\frac{\sqrt{3}}{m}$ doğrusu üzerinde olan pozitif tanımlı Δ diskriminantlı indirgenebilir F_R kuadratik formu

$$F_R = \begin{cases} \left(1, 0, -\dfrac{\Delta}{4}\right); & \Delta \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4) \\ \left(1, -\sqrt{3}, \dfrac{3-\Delta}{4}\right); & \Delta \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 4) \end{cases}$$

biçimindedir.

İspat: $F=(a,-b\sqrt{3},c)$ pozitif tanımlı bir form olsun. Bu formun diskriminantı

$$\Delta=(-b\sqrt{3})^2-4ac=3b^2-4ac$$

dir. Burada iki durum söz konusudur.

i) b tek olsun. O halde $b=2v+1$, ($v\in \mathbf{Z}$) yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned}\Delta=3b^2-4ac&=3(2v+1)^2-4ac\\&=3(4v^2+4v+1)-4ac\\&=12v^2+12v+3-4ac\\&\equiv 3\,(\mathrm{mod}\,4)\end{aligned}$$

elde edilir.

ii) b çift olsun. O halde $b=2h$, ($h\in \mathbf{Z}$) yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned}\Delta=3b^2-4ac&=3(2h)^2-4ac\\&=3.4h^2-4ac\\&=12h^2-4ac\\&\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,4)\end{aligned}$$

olur.

i) ve *ii)* den diskriminant mod4'e göre ya 0 ya da 3 tür. 3.2.3 Teorem gereğince ispat tamamlanmış olur.

Genişletilmiş Hecke grubunun elemanları ile katsayıları $\mathbf{Z}[\sqrt{3}]$ halkasından alınan pozitif tanımlı kuadratik formların indirgenebilir forma resmedilebilmesi aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

4.3.8 Teorem: $F=(a,-b\sqrt{3},c)$ formu 4.3.1 Teorem'de elde edilen indirgenemeyen bir form ve F_R formu, F ile aynı determinantlı indirgenebilir form olmak üzere belirli bir $g\in\overline{H}(\sqrt{3})$ için $gF=F_R$ dir.

Şimdi de benzer şekilde katsayıları $\mathbf{Z}[\sqrt{3}]$ halkasından alınan pozitif tanımlı kuadratik formların indirgenebilir kuadratik formlara nasıl resmedileceği ile ilgili teoremi verelim.

4.3.9 Teorem: Taban noktaları $x=-\dfrac{\sqrt{3}}{m}$ doğrusu üzerinde olan pozitif tanımlı kuadratik formları için

- m tek ise; taban noktası $x=-\dfrac{\sqrt{3}}{m}$ doğrusu üzerinde olan pozitif

tanımlı form $F_j=(mj,-2\sqrt{3}j,1)$, $1\le j\le k$ tipindedir. Bu formları indirgenmiş forma resmeden $g\in \mathrm{GL}(2,\mathbf{Z}[\sqrt{3}])$ matrisi $g=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & \sqrt{3}j\end{pmatrix}$ dir.

- m çift ise; taban noktası $x=-\dfrac{\sqrt{3}}{m}$ doğrusu üzerinde olan pozitif

tanımlı form $F_j=(kj,-\sqrt{3}j,1)$, $1\le j\le m-1$ tipindedir. Bu formları indirgenmiş forma resmeden $\mathrm{GL}(2,\mathbf{Z}[\sqrt{3}])$ matrisleri ise, j çift iken $g=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & \dfrac{\sqrt{3}j}{2}\end{pmatrix}$ ve j tek ise $g=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & \left(\dfrac{j+1}{2}\right)\sqrt{3}\end{pmatrix}$ şeklindedir.

İspat: Taban noktaları $x=-\dfrac{\sqrt{3}}{m}$ doğrusu üzerinde olan pozitif tanımlı kuadratik formlar için; $m\ge 2$ $(m\ne 3)$ tamsayısına göre aşağıdaki durumlar ortaya çıkar:

1) m tek iken indirgenemeyen pozitif tanımlı kuadratik formlar; $F_j=(mj,-2\sqrt{3}j,1)$, $1\le j\le k$ şeklindedir. Bu formun determinantı

$$\Delta=b^2-4ac=(-2\sqrt{3}j)^2-4.mj.1=4.3j^2-4mj=12j^2-4mj\equiv 0(\mathrm{mod}\,4)$$

olduğundan Teorem 4.3.7 gereğince, indirgenebilir form $F_R = (1, 0, -\frac{\Delta}{4})$ şeklindedir. Yukarıdaki Δ değeri bu formda yerine yazılırsa

$$F_{R_j} = (1, 0, \frac{4mj - 12j^2}{4}) = (1, 0, mj - 3j^2)$$

olur. $g = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \in \overline{H}(\sqrt{3})$ için aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.

$$mjr^2 - 2\sqrt{3}jrs + s^2 = 1$$

$$2mjrt - 2\sqrt{3}jru - 2\sqrt{3}jts + 2su = 0$$

$$mjt^2 - 2\sqrt{3}jtu + u^2 = mj - 3j^2$$

Bu denklem sisteminin bir çözümü; $r = 0$, $s = 1$, $t = 1$ ve $u = \sqrt{3}j$ olur. O halde $g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \sqrt{3}j \end{pmatrix} \in \overline{H}(\sqrt{3})$ için $gF_j = F_{R_j}$ dir.

2) m çift iken pozitif tanımlı indirgenemeyen kuadratik formlar $F_j = (kj, -\sqrt{3}j, 1)$, $1 \leq j \leq m-1$ şeklindedir. Bu formun determinantı

$$\Delta = 3j^2 - 4kj$$

olup iki durum söz konusudur:

i) j çift, yani $j = 2t$, ($t \in \mathbf{Z}$) olsun. Bu takdirde formun determinantı

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-\sqrt{3}j)^2 - 4.kj.1 = 3(2t)^2 - 4k.2t = 12t^2 - 8kt \equiv 0 (\text{mod}\, 4)$$

olduğundan Teorem 4.3.7 gereğince, indirgenebilir form $F_R = (1, 0, -\frac{\Delta}{4})$ şeklindedir. Yukarıdaki Δ değeri yerine yazılırsa indirgenebilir form

$$F_{R_j} = (1, 0, \frac{4kj - 3j^2}{4}) = (1, 0, kj - \frac{3j^2}{4})$$

olur. $g=\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}\in \overline{H}(\sqrt{3})$ için

$$kjr^2-\sqrt{3}jrs+s^2=1$$
$$2kjrt-\sqrt{3}jru-\sqrt{3}jts+2su=0$$
$$kjt^2-\sqrt{3}jtu+u^2=kj-\frac{3j^2}{4}$$

denklem sisteminin bir çözümü; $r=0$, $s=1$, $t=1$ ve $u=\dfrac{\sqrt{3}j}{2}$ olur. Dolayısıyla

$g=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \dfrac{\sqrt{3}j}{2} \end{pmatrix}\in \overline{H}(\sqrt{3})$ için $gF_j=F_{R_j}$ dir.

ii) j tek, yani $j=2f+1$ $(f\in\mathbf{Z})$ olsun. Bu durumda indirgenemeyen form $F_j=(k(2f+1),-\sqrt{3}(2f+1),1)$ dir. Bu formun determinantı

$$\begin{aligned}\Delta=b^2-4ac&=(-\sqrt{3}j)^2-4.kj.1\\&=3j^2-4kj\\&=3(2f+1)^2-4k(2f+1)\\&=3(4f^2+4f+1)-8kf-4k\\&=12f^2+12f+3-8kf-4k\\&\equiv 3(\mathrm{mod}\,4)\end{aligned}$$

olduğundan 4.3.7 Teoremi gereğince, indirgenebilir form $F_R=\left(1,-\sqrt{3},\dfrac{3-\Delta}{4}\right)$ şeklinde olup Δ değeri için bu form

$$F_{R_j}=\left(1,-\sqrt{3},\frac{-12f^2-12f+8kf+4k}{4}\right)=\left(1,-\sqrt{3},-3f^2-3f+2kf+k\right)$$

dır. $g=\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}\in \overline{H}(\sqrt{3})$ için

$$k(2e+1)r^2-\sqrt{3}(2e+1)rs+s^2=1$$
$$2k(2e+1)rt-\sqrt{3}(2e+1)ru-\sqrt{3}(2e+1)ts+2su=-\sqrt{3}$$
$$k(2e+1)t^2-\sqrt{3}(2e+1)tu+u^2=-3f^2-3f+2kf+k$$

denklem sisteminin bir çözümü; r = 0, s = 1, t = 1 ve u = $\left(\frac{j+1}{2}\right)\sqrt{3}$ olur.

Dolayısıyla $g=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & \left(\frac{j+1}{2}\right)\sqrt{3}\end{pmatrix}\in\overline{H}(\sqrt{3})$ için $gF_j=F_{R_j}$ dir.

Aşağıdaki iki örnek katsayıları Z[$\sqrt{3}$] den alınan ve taban noktası sırasıyla $x=-\frac{\sqrt{3}}{5}$ ve $x=-\frac{\sqrt{3}}{6}$ doğruları üzerinde olan pozitif tanımlı kuadratik formlarla ilgilidir.

4.3.10 Örnek: $m=5$ için indirgenemeyen kuadratik form $F_1=(5,-2\sqrt{3},1)$ ve indirgenmiş form $F_{R_1}=(1,0,2)$ olup

$$g_1=[0;1;1;\sqrt{3}] \text{ için } g_1F_1=F_{R_1}$$

dir.

4.3.11 Örnek: $m=6$ ve j tek iken indirgenemeyen formlar

$$F_1=(3,-\sqrt{3},1) \text{ ve } F_3=(9,-3\sqrt{3},1)$$

dir. İndirgenmiş formlar ise

$$F_{R_1}=(1,-\sqrt{3},3) \text{ ve } F_{R_3}=(1,-\sqrt{3},3)$$

olup

$$g_1=[0;1;1;\sqrt{3}] \text{ için } g_1F_1=F_{R_1}$$
$$g_3=[0;1;1;2\sqrt{3}] \text{ için } g_3F_3=F_{R_3}$$

dir. j çift iken indirgenemeyen form $F_2=(6,-2\sqrt{3},1)$ ve indirgenmiş form $F_{R_2}=(1,0,3)$ olup

$$g_2=[0;1;1;\sqrt{3}] \text{ için } g_2F_2=F_{R_2}$$

olur.

$\overline{H}(\sqrt{2})$ ve $\overline{H}(\sqrt{3})$ genişletilmiş Hecke gruplarının temel bölgelerinde $|z|\geq 1$ birim çemberinin olduğunu biliyoruz. Bu nedenle şimdi de katsayıları $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ ve $\mathbf{Z}[\sqrt{3}]$ halkalarından alınan ve taban noktaları orijin merkezli çemberler üzerinde olan pozitif tanımlı kuadratik formlar için aşağıdaki teorem verilebilir. Buradaki sonuçlar, tamsayı katsayılı pozitif tanımlı kuadratik formlarda da çalışmaktadır. Ayrıntılı bilgi için [16] numaralı kaynağa bakılabilir.

4.3.12 Teorem: $m\geq 1$ tamsayı ve $0<D<4m^2$ olsun. $C: x^2+y^2=\dfrac{1}{m^2}$ çemberinin üst-yarı düzlem ile arakesitini $\widetilde{C}$ ile gösterelim. Bu takdirde $-D$ determinantlı ve taban noktaları $\widetilde{C}$ çemberi üzerinde olan iki tip form vardır ve bu formlar $F=(a,-b,c)$ ve $G=(a,b,c)$ şeklindedir.

İspat: Bu teoremin ispatı için [16] numaralı kaynağa bakılabilir.

4.3.12 Teorem'den aşağıdaki sonuç elde edilebilir.

4.3.13 Sonuç: $m\geq 1$ olmak üzere; taban noktaları $\widetilde{C}$ çemberi üzerinde olan $1\leq j\leq 2m-1$ için j^2-4m^2 determinantlı $2m-1$ tane pozitif tanımlı kuadratik form vardır ve bu formlar $F_j=(m^2,-j,1)$ ve $G_j=(m^2,j,1)$ şeklindedir.

4.3.14 Örnek: $m=1$ olsun. Bu durumda $C: x^2+y^2=1$ olup taban noktaları $\widetilde{C}$ çemberi üzerinde olan bir tane pozitif tanımlı kuadratik form çifti vardır ve bunlar $F_1=(1,\,-1,\,1)$ ve $G_1=(1,\,1,\,1)$ formlarıdır.

Bu kuadratik formların determinantları $\Delta(F_1)=\Delta(G_1)=-3$ tür. Buna göre, $F_1=(1,\,-1,\,1)$ pozitif tanımlı kuadratik formunun taban noktası

$$z(F_1)=\frac{b+i\sqrt{-\Delta(F)}}{2a}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

ve $G_1=(1,\,1,\,1)$ pozitif tanımlı kuadratik formunun taban noktası ise

$$z(G_1)=\frac{b+i\sqrt{-\Delta(F)}}{2a}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

dir. Bu formların taban noktaları, $\overline{H}(\sqrt{2})$ ve $\overline{H}(\sqrt{3})$ genişletilmiş Hecke gruplarının temel bölgesinde yer alır.

5. SONUÇLAR

Çalışmanın 4.1 kısmında $\mathbf{Z}[\lambda_q]$ halkasının tanımı verilmiştir. Buna ek olarak katsayıları $\mathbf{Z}[\lambda_q]$ halkasından alınan kuadratik formların $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke gruplarının elemanları altındaki resimleri incelenmiştir. Burada genişletilmiş Hecke gruplarının elemanlarının matris gösteriminden faydalanılmıştır.

4.2 Kısımda $\overline{H}(\sqrt{2})$ genişletilmiş Hecke grupları ile katsayıları $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ halkasından alınan pozitif tanımlı kuadratik formlar arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Bu bağlamda; taban noktası $x = \frac{-\sqrt{2}}{m}$ doğrusu üzerinde bulunan ve katsayıları $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ halkasından alınan herhangi bir pozitif tanımlı kuadratik formun, indirgenebilir forma nasıl resmedilebileceği ile ilgili sonuçlar elde edilmiştir. İlk olarak, 4.2.1 Teorem ile $m \geq 3$ tamsayı ve $0 < 2D < m^2$ olmak üzere, taban noktası $x = \frac{-\sqrt{2}}{m}$ doğrusu üzerinde olan $-D$ determinantlı $F \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}](a,b,c)$ olan pozitif tanımlı bir kuadratik formun varlığı ifade ve ispat edilmiştir.

Katsayıları $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ den alınan pozitif tanımlı indirgenebilir kuadratik formun tanımı verilmiş, indirgenebilirlik şartı ifade ve ispat edilmiştir. 4.2.8 Teorem ile katsayıları $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ halkasından alınan, pozitif tanımlı Δ diskriminantlı, indirgenebilir F_R kuadratik formunun iki tipte olabileceği ifade ve ispat edilmiştir. Genişletilmiş Hecke grubunun elemanları ile katsayıları $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ halkasından alınan pozitif tanımlı kuadratik formların indirgenebilir forma resmedilebilmesi 4.2.10 Teorem'de yer almaktadır.

4.3 Kısımda $\overline{H}(\sqrt{3})$ genişletilmiş Hecke grupları ile pozitif tanımlı kuadratik formlar arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Taban noktası $x = \frac{-\sqrt{3}}{m}$ doğrusu üzerinde bulunan ve katsayıları $\mathbf{Z}[\sqrt{3}\,]$ halkasından alınan herhangi bir pozitif tanımlı kuadratik formun, indirgenebilir forma nasıl resmedilebileceği ile ilgili sonuçlar elde edilmiştir. İlk olarak, 4.3.1 Teorem ile $m \geq 2$ $(m \neq 3)$ tamsayı ve $0 < 3D < m^2$ olmak üzere, taban noktası $x = \frac{-\sqrt{3}}{m}$ doğrusu üzerinde olan $-D$ determinantlı $F \in \mathbf{Z}[\sqrt{3}\,](a,b,c)$ olan pozitif tanımlı bir kuadratik formun varlığı ifade ve ispat edilmiştir.

Katsayıları $\mathbf{Z}[\sqrt{3}\,]$ ten alınan pozitif tanımlı indirgenebilir kuadratik formun tanımı verilmiş, indirgenebilirlik şartı ifade ve ispat edilmiştir. 4.3.7 Teorem ile katsayıları $\mathbf{Z}[\sqrt{3}\,]$ halkasından alınan, pozitif tanımlı Δ diskriminantlı, indirgenebilir F_R kuadratik formunun iki tipte olabileceği ifade ve ispat edilmiştir. Genişletilmiş Hecke grubunun elemanları ile katsayıları $\mathbf{Z}[\sqrt{3}\,]$ halkasından alınan pozitif tanımlı kuadratik formların indirgenebilir forma resmedilebilmesi 4.3.9 Teorem ile verilmiştir.

İleride yapılabilecek çalışmalar için, açık problemlerin bazılarını aşağıdaki gibi verebiliriz.

Bu çalışmada, $\overline{H}(\sqrt{2})$ ve $\overline{H}(\sqrt{3})$ genişletilmiş Hecke grupları ile sırasıyla katsayıları $\mathbf{Z}[\sqrt{2}\,]$ ve $\mathbf{Z}[\sqrt{3}\,]$ halkalarından alınan pozitif tanımlı kuadratik formlar arasında incelenen ilişkilerin benzerleri, katsayıları $\mathbf{Z}[\lambda_q]$ halkasından alınan pozitif tanımlı kuadratik formlar ile $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke gruplarının arasında incelenebilir. Ayrıca bu pozitif tanımlı kuadratik formların indirgenebilirlik şartı araştırılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Hecke, E., ”Über die Bestimmung Dirichletscher Reichen durch ihre Funktionalgleichungen”, *Math. Ann.,*112, (1936), 664-699.

[2] Cangül İ. N., Normal Subgroups of Hecke Groups, Ph.D. Thesis, Southampton University, (1993).

[3] Cangül İ. N., Singerman D., “Normal Subgroups of Hecke Groups and Regular Maps”, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, (1998), 59-74.

[4] İkikardeş S., Şahin R., Koruoğlu Ö., “Power Subgroups of Some Hecke Groups”, *Rocky Mountain J. Math.*, 36 (2), (2006), 497-508.

[5] Yılmaz N., Cangül İ. N., “Power Subgroups of Hecke Groups $H(\sqrt{n})$”, *Int. J. Math. Sci.*, 11, (2001), 703-708.

[6] Cangül İ. N., Şahin R., İkikardeş S., Koruoğlu Ö., “Power Subgroups of Some Hecke Groups II”, *Houston J. Math.*, 33 (1), (2007), 33-42.

[7] Cangül İ. N., “Normal Subgroups of the Hecke Group $H(\sqrt{2})^*$”, *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A*, 43, (1994), 129-135.

[8] Şahin R., Bizim O., Cangül İ. N., “Commutator Subgroups of the Extended Hecke Groups $\overline{H}(\lambda_q)$” *Czechoslovak Mathematical Journal*, 54, (2004), 253-259.

[9] Şahin R., Genişletilmiş Hecke Grupları, Doktora Tezi, Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Balıkesir, (2001).

[10] Şahin R., İkikardeş S., Koruoğlu Ö., “Some Normal Subgroups of The Hecke Groups $(\overline{H}(\lambda_p))$”, *Rocky Mountain J. Math.*, 36 (3), (2006), 1033-1048.

[11] Koruoğlu Ö., Şahin R., İkikardeş S., “The Normal Subgroup Structure of the Extended Hecke Groups”, *Bull. Braz. Math. Soc.* (N.S.), 38 (1), (2007), 51-65.

[12] Sahin, R., Ikikardes, S., Koruoğlu, Ö., “Extended Hecke groups $\overline{H}(\lambda_q)$ and their fundamental regions”, *Adv. Stud. Contemp. Math.* (Kyungshang), 15 (1), (2007), 87-94.

[13] Koruoğlu, Ö., $\overline{H}(\lambda)$ *İle* $\overline{H}(\lambda_p)$ Genişletilmiş Hecke Gruplarının Bazı Normal Alt Grupları ve Sürekli Kesirler, Doktora Tezi, Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Balıkesir, (2005).

[14] http://en.wikipedia.org/wiki/Quadratic_form (03.06.2011)

[15] Dickson, L. E., History of the Theory of Numbers, Chelsea Publishing Company, Vol.3, (1999), 274.

[16] Tekcan, A. ve Bizim, O., "The Connection between Quadratic Forms and the Extended Modular Group", *Mathematica Bohemica*, 128 (3), (2003), 225-236.

[17] Tekcan, A., Özkoç, A., "Positive Definite Binary Quadratic Forms, Quadratic Congruences and Singular Curves", *Comptes ren. Math-Report.* 31(2), (2009), 53-64.

[18] Tekcan, A., "Pell Equation $x^2 - Dy^2 = 2$", *II. Bulletin of the Irish Math. Soc.,*54 (2004), 73-89.

[19] Özkoç, A., Tekcan, A., "Quadratic Diophantine Equation $x^2 - (t^2 - t)y^2 - (4t-2)x + (4t^2 - 4t)y = 0$", *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society,* 33 (2), (2010), 273-280.

[20] Tekcan, A., Bizim, O., "The Pell Equation $x^2 + xy - ky^2 = \pm 1$", *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*, 4 (2), (2008), 105-112.

[21] Tekcan, A., "On Indefinite Binary Quadratic Forms and Quadratic Ideals", *Novi Sad Journal of Mathematics*, 38 (1), (2008), 83-96.

[22] Tekcan, A., "Representation of Integers by Hermitian Forms", *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, LXXIV(2) (2005), 205-209.

[23] Buchmann, J., Vollmer, U., Binary Quadratic Forms: An Algorithmic Approach. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, (2007).

[24] Buell, D. A., Binary Quadratic Forms, Clasical Theory and Modern Computations, Springer-Verlag, New York, (1989).

[25] Flath, D. E., Introduction to Number Theory, Wiley, (1989).

[26] Jones G. A., Singerman D., Complex Functions, Cambridge University Press, (1987), 17-267.

[27] Başkan T., Kompleks Fonksiyonlar Teorisi, Vipaş, Bursa (2001), 318-324.

[28] Başkan T., Ayrık Gruplar, H.Ü. Fen Fakültesi Yayınları, Beytepe, Ankara, (1980), 1-29.

[29] Ford L. R., Automorphic Functions, Chelsea Publishing Company, New York, (1951), 66-82.

[30] Yılmaz, N., Cangül, İ.N., "On The Group Structure and Parabolic Points of The Hecke Group H(λ)", *Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math.*, 51 (2002), 35-46.

[31] Jones, G. A., Thornton, J. S., "Automorphisms and Congrunce Subgroups of The Extended Modular Group", *J. London Math. Soc.,* (2), 34, (1986), 26-40.

[32] Coxeter, H. S. M., Moser W. O. J., Generators and Relations For Discrete Groups, second ed., Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg-New York, (1965), 35-38.

[33] Johnson, D. L., Presentation of Groups, Cambridge University Press, (1990), 1-45.

[34] Bayraktar, M., Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi, Uludağ Üniversitesi Yayınları, Bursa, (1998), 108-117, 256-266.

[35] Fraleigh, J. B., A First Course in Abstract Algebra, sixthed edition, Addison-Wesley Pub. Comp., (1974), 85-231.

[36] Magnus, W., Karrass, A., Solitar, D., Combinatorial Group Theory, Dover Publications, Inc. New York, (1976).

[37] Hungerford, T. W., Algebra, Springer-Verlag, New York Inc., (1974), 103-238.

[38] Edward, H. M., Fermat's Last Theorem: A Genetic Introduction to Algebraic Number Theory, Graduate Texts in Mathematics, vol. 50, Springer-Verlag, 1977.