T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DEĞİŞKEN ÜSLÜ LEBESGUE UZAYLARINDA YAKLAŞIM PROBLEMLERİ

DOKTORA TEZİ

AHMET TESTİCİ

BALIKESİR, MART - 2018

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DEĞİŞKEN ÜSLÜ LEBESGUE UZAYLARINDA YAKLAŞIM PROBLEMLERİ

DOKTORA TEZİ

AHMET TESTİCİ

Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Daniyal İSRAFİLZADE (Tez Danışmanı)
Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL
Prof. Dr. İsmail EKİNCİOĞLU
Prof. Dr. Ali GÜVEN
Doç. Dr. Yunus Emre YILDIRIR

BALIKESİR, MART - 2018

KABUL VE ONAY SAYFASI

AHMET TESTİCİ tarafından hazırlanan "**DEĞİŞKEN ÜSLÜ LEBESGUE UZAYLARINDA YAKLAŞIM PROBEMLERİ**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 15.03.2018 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Prof. Dr. Daniyal İSRAFİLZADE	....
Üye Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL	....
Üye Prof. Dr. İsmail EKİNCİOĞLU	....
Üye Prof. Dr. Ali GÜVEN	....
Üye Doç. Dr. Yunus Emre YILDIRIR	....

Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Prof. Dr. Necati ÖZDEMİR ....

Bu tez çalışması TÜBİTAK tarafından 114F422 nolu "Değişken Üslü Lebesgue Uzaylarında Yaklaşım Problemleri" adlı proje ile desteklenmiştir. Desteklerinden dolayı TÜBİTAK'a teşekkür ederiz.

ÖZET

DEĞİŞKEN ÜSLÜ LEBESGUE UZAYLARINDA
YAKLAŞIM PROBLEMLERİ
DOKTORA TEZİ
AHMET TESTİCİ
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. DANİYAL İSRAFİLZADE)
BALIKESİR, MART - 2018

Bu tez çalışmasında değişken üslü Lebesgue uzaylarında yaklaşım problemleri incelenmiştir.

Birinci bölüm giriş kısmından oluşur.

İkinci bölümde temel kavramlara yer verilmiş, değişken üslü Lebesgue uzayları tanıtılmış ve bu uzayların bazı temel özelliklerine değinilmiştir.

Üçüncü bölümde değişken üslü Lebesgue uzaylarında yüksek mertebeden bir düzgünlük modülü tanımlanarak gereken özellikleri elde edilmiştir. Ayrıca, bu düzgünlük modülü yardımı ile yaklaşım teorisinin düz-ters teoremleri ispatlanmış ve genelleşmiş Lipschitz sınıflarının konstrüktif karakterizasyonu elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde değişken üslü Lebesgue uzaylarında yaklaşım teorisinin eş zamanlı yaklaşım teoremleri ispatlanmıştır.

Beşinci bölümde değişken üslü Smirmov sınıflarında yaklaşım teorisinin düz-ters teoremleri ispatlanmış ve genelleştirilmiş Lipschitz sınıflarının konstrüktif karakterizasyonu elde edilmiştir. Değişken üslü Smirnov sınıflarında Marcinkiewicz çarpan tipi ve Littlewood-Paley tipi teoremler ispatlanmıştır. Bu uzaylarda Faber serileri yardımıyla de la Vallée-Poussin ve Jackson ortalamaları tanımlanmış ve bu ortalamaların verilen fonksiyona yaklaşım hızı değerlendirilmiştir. Ayrıca, eğri üzerinde tanımlanan değişken üslü Lebesgue uzaylarında Faber-Laurent rasyonel fonksiyonu ile yaklaşımın hızı da değerlendirilmiştir.

Altıncı bölümde tezde elde edilen sonuçlar tanıtılmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Değişken üslü Lebesgue uzayı, düz teorem, ters teorem, Lipschitz sınıfı, Littlewood-Paley tipi teorem, Marcinkiewicz çarpan tipi teorem, Faber-Laurent rasyonel fonksiyonu.

ABSTRACT

APPROXIMATION PROBLEMS IN LEBESGUE SPACE WITH VARIABLE EXPONENT
PH.D THESIS
AHMET TESTICI
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS
(SUPERVISOR: PROF. DR. DANIYAL ISRAFILZADE)
BALIKESİR, MARCH 2018

In this thesis study, approximation problems in variable exponent Lebesgue spaces are investigated.

The first section comprises of introduction part.

In the second section, basic concepts have been given, Lebesgue spaces with variable exponent have been introduced and some basic properties of these spaces have been mentioned.

In the third section, by defining a modulus of smoothness with the higher order in the Lebesgue spaces with variable exponent, its necessary properties have been given. Furthermore, by means of the defined modulus of smoothness, direct and inverse theorems of approximation theory have been proved and constructive characterization of generalized Lipschitz classes have been obtained.

In the fourth section, the simultaneous approximation theorem of approximation theory in the Lebesgue spaces with variable exponent have been proved.

In the fifth section, in the Smirnov classes with variable exponent the direct and inverse theorems of approximation theory have been proved and constructive characterization of the generalized Lipschitz classes have been obtained. In the Smirnov calsses with variable exponent the Marcinkiewicz and Littlewood-Paley type theorems have been proved. In this spaces, de la Valée-Poussin and Jackson means have been defined by means of the Faber series and the rate of approximation to given function of these means have been estimated. Furthermore, the rate of approximation by Faber-Laurent rational function in the Lebesgue spaces with variable exponent defined on a curve has been estimated.

In the sixth section, the results of this thesis have been discussed.

KEYWORDS: Lebesgue space with variable exponent, direct theorem, inverse theorem, Lipschitz class, Littlewood-Paley type theorem, Marcinkiewicz multiplier type theorem, Faber-Laurent rational function.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbb{C}$	: Kompleks düzlem
$\mathbb{D}$	: Birim disk
$\mathbb{T}$	: Birim çember
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^{+}$	: Pozitif reel sayılar kümesi
$L^{p}([0,2\pi])$	: $[0,2\pi]$ üzerinde Lebesgue uzayı
$W_{k}^{p}([0,2\pi])$	: $[0,2\pi]$ üzerinde Sobolev uzayı
$\mathcal{M}(f)$	: $[0,2\pi]$ üzerinde Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu
$T_{n}(x)$	: n dereceli trigonometrik polinom
Π_{n}	: derecesi n'yi geçmeyen trigonometrik polinomlar ailesi
$P_{n}(z)$	: n dereceli cebirsel polinom
$D_{n}(t)$	: Dirichlet çekirdeği
$F_{n}(t)$	: Fejér çekirdeği
$S_{n}(f)$	: f'in Fourier seri açılımının n. kısmi toplamı
$V_{n}(f)$	: f'in de la Vallée-Poussin ortalaması
$\mathcal{K}_{n}(t)$	: de la Vallée-Poussin çekirdeği
$J_{n}(f)$	: f'in Jackson ortalaması
$\Lambda_{n}(t)$	: Jackson çekirdeği
$\sigma_{n}(f)$	: f'in Cesàro ortalaması
$\mathscr{K}_{\lambda}(f)$	: Konvolüsyon operatörü
$L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$	: $[0,2\pi]$ üzerinde değişken üslü Lebesgue uzayı
$W_{k}^{p(\cdot)}([0,2\pi])$	: $[0,2\pi]$ üzerinde değişken üslü Sobolev uzayı
$\Omega_{r}(f,\delta)_{p(\cdot)}$	: $L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$'de düzgünlük modülü
$E_{n}(f)_{p(\cdot)}$	: $L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$'de en iyi yaklaşım hatası
$T_{n}^{0}(f)$	: f'e en iyi yaklaşan trigonometrik polinom
$T_{n}^{*}(f)$	: f'e hemen hemen en iyi yaklaşan trigonometrik polinom
$Lip^{p(\cdot),\alpha}$	: $L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$'de genelleşmiş Lipschitz sınıfı
$Lip_{k}^{p(\cdot),\alpha}$	: $W_{k}^{p(\cdot)}([0,2\pi])$'de genelleşmiş Lipschitz sınıfı

$K(f,\delta)_{p(\cdot),r}$	: $L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$'de Peetre K-fonksiyoneli
Γ	: Sonlu uzunluklu Jordan eğrisi
$L^{p}(\Gamma)$	: Γ üzerinde Lebesgue uzayı
$L^{p}_{\omega}(\Gamma)$	: ω ağırlıklı $L^{p}(\Gamma)$ uzayı
$\mathfrak{C}$	: Carleson eğri ailesi
$\mathfrak{D}$	: Dini düzgün eğri ailesi
G	: Basit bağlantılı ve sınırlı bölge
$\overline{G}$	: G bölgesinin kapanışı
G^{-}	: $\mathbb{C}\setminus\overline{G}$
$E^{p}(G)$	: G bölgesinde Smirnov sınıfı
$E^{p}(G^{-})$	: G^{-} bölgesinde Smirnov sınıfı
$S_{\Gamma}(f)$	: Cauchy singüler integrali
$\mathcal{M}_{\Gamma}(f)$	: Γ üzerinde Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu
$A_{p}(\Gamma)$	: Γ üzerinde Muckenhoupt şartı
$F_{k}(z)$	: G bölgesinin Faber polinomu
$\widetilde{F_{k}}(1/z)$	: $\overline{G^{-}}$ bölgesinin Faber rasyonel fonksiyonu
$R_{n}(f,z)$	: f'in Faber-Laurent rasyonel fonksiyonu
$L^{p(\cdot)}(\Gamma)$	: Γ üzerinde değişken üslü Lebesgue uzayı
$E^{p(\cdot)}(G)$	: G bölgesinde değişken üslü Smirnov sınıfı
$E^{p(\cdot)}(G^{-})$	: G^{-} bölgesinde değişken üslü Smirnov sınıfı
$\Omega_{r}(f,\delta)_{G,p(\cdot)}$	: $E^{p(\cdot)}(G)$'de düzgünlük modülü
$\Omega_{r}(f,\delta)_{G^{-},p(\cdot)}$	: $E^{p(\cdot)}(G^{-})$'de düzgünlük modülü
$\wp_{n}$	: derecesi n'yi geçmeyen z'e göre cebirsel polinomlar ailesi
$\widetilde{\wp_{n}}$	: derecesi n'yi geçmeyen $\frac{1}{z}$'e göre cebirsel polinomlar ailesi
$E_{n}(f)_{G,p(\cdot)}$	: $E^{p(\cdot)}(G)$'de en iyi yaklaşım hatası
$E_{n}(f)_{G^{-},p(\cdot)}$	: $E^{p(\cdot)}(G^{-})$'de en iyi yaklaşım hatası
$S_{n}^{G}(f,z)$	: $E^{p(\cdot)}(G)$'de f'in Faber seri açılımının n. kısmi toplamı
$J_{n}^{G}(f,z)$	: $E^{p(\cdot)}(G)$'de f'in Jackson ortalaması
$V_{n}^{G}(f,z)$	: $E^{p(\cdot)}(G)$'de f'in de la Vallée-Poussin ortalaması
$S_{n}^{G^{-}}(f,z)$	: $E^{p(\cdot)}(G^{-})$'de f'in Faber seri açılımının n. kısmi toplamı

$\boldsymbol{J_n^{G^-}(f,z)}$: $E^{p(\cdot)}(G^-)$’de f ’in Jackson ortalaması

$\boldsymbol{V_n^{G^-}(f,z)}$: $E^{p(\cdot)}(G^-)$’de f ’in de la Vallée-Poussin ortalaması

$\boldsymbol{\Delta_k(f)(z)}$: $E^{p(\cdot)}(G)$’de Faber seri açılımın Lacunary kısmi toplamı

$\boldsymbol{\widetilde{\Delta_k}(f)(z)}$: $E^{p(\cdot)}(G^-)$’de Faber seri açılımın Lacunary kısmi toplamı

$\boldsymbol{Lip^{p(\cdot),\alpha}(G)}$: $E^{p(\cdot)}(G)$’de genelleşmiş Lipschitz sınıfı

$\boldsymbol{Lip^{p(\cdot),\alpha}(G^-)}$: $E^{p(\cdot)}(G^-)$ ’de genelleşmiş Lipschitz sınıfı

ÖNSÖZ

Danışmanım Prof. Dr. Daniyal İsrafilzade bu çalışmanın ortaya çıkması için geçen sürede engin bilgi ve tecrübesini benimle her daim paylaşmakla kalmamış, kıymetli vakitlerini nitelikli bir sonuca ulaşmak pahasına cömertçe sarf etmiş ve bu süreci neticelendirmek için benimle devamlı irtibat halinde olmuştur. Kendisine ne kadar teşekkür etsem az kalacaktır. Bu tezin ortaya çıkma sürecinde gerek akademik gerekse akademi dışı konularda ortaya çıkan zorluklarda ortaya koyduğu dostane ve yapıcı tavsiyeleri, titiz takibi, değerli yönlendirmeleri için kendisine her zaman müteşekkir kalacağım.

Çalışmalarım boyunca yapıcı eleştirileri ve olumlu yaklaşımları için Prof. Dr. Ali Güven'e, Prof. Dr. Ramazan Akgün'e ve Doç. Dr. Yunus Emre Yıldırır'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

En başından en sonuna kadar çalışmalarımın başarılı şekilde sonuçlanması için gayret gösteren, karşıma çıkan her türlü güçlükte arkamda duran ve bu süreçlerde edindikleri bilgi birikimi ile beni gururlandıran bir aileye sahip olduğum için kendimi her an şanslı sayıyorum. Ortaya koydukları anlayış ve özveriden dolayı sevgili babacığım Varol Testici'ye ve sevgili anneciğim Türkan Testici'ye çok teşekkür ederim. Sizlere ömrüm boyunca minnettar kalacağım.

Hayatımın her alanında kıymetli fikirleri ile ufkumu açmaya özen gösteren değerli dostum, şair ve sosyolog Seyhan Kurt çalışmalarım esnasında desteğini ve ilgisini her zaman hissettirmiştir, açık ve cömert yüreklilikle ortaya güzel neticelerin çıkacağına inanmış, yardımlarını hiçbir zaman benden esirgememiştir. Bu sebeplerden ötürü kendisine çok teşekkür ederim.

Bir sonuca ulaşana kadar karşıma çıkan bilimsel zorluklar ufkumu açmış ve bilgilerimin daha sağlam temellere oturmasını sağlamıştır. Bu zorlukların yanında hayatın akışında ortaya çıkan bazı aksaklıkların üstesinden gelmek, gayret ve deneyim kazanmama vesile olmuştur. Mevlânâ Celâleddîn-i Rûmî "Hamdım, piştim, yandım." demiş. Ben ise diyorum ki, hamdım, piştim ve yanarak yaşadığımı idrak ediyorum:

yaşamak yanmaktır, yanasın gerek,
hayatın mânâsı yalnız ondadır;
mum eğer yanmazsa, yaşamır demek,
onun da hayatı yanmağındadır.

Bahtiyar Vahabzade.

1. GİRİŞ

Yaklaşım teorisinde genellikle belirli bir sınıftan olan fonksiyonlara daha iyi özellikli fonksiyonlarla yaklaşım problemleri araştırılmaktadır. Çoğunlukla, bu daha iyi özellikli fonksiyonlar kümesi olarak araştırılan fonksiyonlar uzayının bir alt uzayı alınır. Yaklaşım teorisinde polinomlar ve rasyonel fonksiyonlar kümesi bu tip alt uzaylar olarak düşünülebilir.

Yaklaşım teorisinin temel problemlerinden biri, verilen fonksiyonlar uzayının herhangi bir elemanına alt uzaydan en iyi yaklaşan elemanın var olup olmadığının araştırılması problemidir. Özel halde alt uzay sonlu boyutlu olarak alındığında normlu uzaylarda en iyi yaklaşım elemanının varlığı bilinmektedir. Yaklaşım teorisinin nitelik problemlerinin pozitif çözümü alt uzayın verilen uzayda yoğunluğu durumunda gerçekleşmiş olur. Nitelik problemlerinin pozitif çözümü nicelik problemlerinin çözümü için ön koşuldur.

Nicelik problemleri iki kısıma ayrılır. Birinci kısımda yaklaşım teorisinin düz problemleri, ikinci kısımda ise yaklaşım teorisinin ters problemleri incelenir. Temel uzaydaki fonksiyonların özelliklerine göre yaklaşım hızının üstten değerlendirildiği problemlere yaklaşım teorisinin düz problemleri, bunun tersi olan yani fonksiyona yaklaşım hızına göre bu fonksiyonun özelliklerinin araştırıldığı problemlere ise yaklaşım teorisinin ters problemleri denir. İlk olarak 1912 yılında $[0,2\pi]$ aralığında sürekli ve 2π periyotlu fonksiyonlar uzayında düz teoremler *Jackson* tarafından elde edilmiştir. 1913 yılında ise *Bernstein* aynı uzayda ters teoremleri vermiştir. Daha sonra yaklaşım problemleri *Lebesgue* uzaylarına taşınmıştır.

$\mathcal{T}_n$, derecesi n 'yi aşmayan trigonometrik polinomların ailesi olduğunda $f \in L^p([0,2\pi])$ fonksiyonu için en iyi yaklaşım hatası

$$E_n(f)_p := \inf_{T_n \in \mathcal{T}_n} \|f - T_n\|_{L^p([0,2\pi])}$$

ve alışılmış düzgünlük modülü

$$\Omega_r(f,\delta)_p := \sup_{|h|\le\delta} \left\| \sum_{\nu=0}^{r} (-1)^{r-\nu} \binom{r}{\nu} f(x+\nu h) \right\|_{L^p([0,2\pi])}$$

olarak tanımlanır. $L^p([0,2\pi])$ Lebesgue uzaylarında düz teorem aşağıdaki şekilde ifade edilir:

Eğer $f \in L^p([0,2\pi])$ ve $r = 1,2,3,...$ ise öyle bir $c > 0$ sabiti vardır ki, her $n = 1,2,3,...$ için

$$E_n(f)_p \le c\,\Omega_r\left(f, \frac{1}{n+1}\right)_p$$

eşitsizliği sağlanır.

Yukarıda ifade edilen düz teorem $r = 1$ ve $p = \infty$ için *Jackson* [1], $r = 2$ ve $1 \le p < \infty$ için *Akhiezer* [2], $r \ge 1$ ve $p = \infty$ için ise 1951 yılında *Stechkin* [3] tarafından ispatlanmıştır.

$L^p([0,2\pi])$ *Lebesgue* uzaylarında yaklaşım teorisinin ters teoremi $r \ge 1$ ve $1 \le p < \infty$ için 1950 yılında *A. F. Timan* ve *M. F. Timan* [4] tarafından; $r \ge 1$ ve $p = \infty$ için 1951 yılında *Stechkin* [3] tarafından ispat edilmiştir. *Lebesgue* uzaylarında yaklaşım teorisinin ters teoremi aşağıdaki şekilde ifade edilir:

Eğer $f \in L^p([0,2\pi])$ ve $r = 1,2,3,...$ ise öyle bir $c > 0$ sabiti vardır ki, $n = 1,2,3,...$ için

$$\Omega_r\left(f, \frac{1}{n}\right)_p \le \frac{c}{n^r} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{r-1} E_{\nu-1}(f)_p$$

eşitsizliği sağlanır.

T_n , belirli bir mertebeye kadar türevlenebilen 2π periyodlu bir f fonksiyonuna en iyi yaklaşan n dereceli trigonometrik polinom olduğunda, $f^{(k)}$, $k = 1,2,3,...$ türevine T_n polinomunun aynı mertebeden türevi alınarak oluşturulan trigonometrik $T_n^{(k)}$ polinomu ile yaklaşım hızının araştırıldığı teoremlere yaklaşım teorisinin eş zamanlı yaklaşım teoremleri denir. Ağırlıksız ve ağırlıklı *Lebesgue* uzaylarında yaklaşım teorisinin bazı eş zamanlı yaklaşım teoremleri [5] ve [6] çalışmalarında ispatlanmıştır.

Klasik *Lebesgue* uzayları, matematiğin birçok alanında, örneğin diferansiyel denklemlerin çözüm süreçlerinde kritik bir rol oynar. Bununla birlikte belirli süreçleri ifade eden bazı fonksiyonlar *Lebesgue* uzaylarına dâhil olmaz veya klasik *Lebesgue* uzayları bu fonksiyonların bazı özelliklerini incelemek için yetersiz kalır. Örneğin;

$$f(x) = |x|^{-1/3}$$

fonksiyonunu düşünelim. Bu fonksiyon oldukça iyi özelliklere sahip olmasına rağmen $[1,\infty]$ aralığındaki hiçbir p için $L^p(\mathbb{R})$ sınıfına giremez. Fakat $\mathbb{R}$ 'yi parçalara ayırırsak görülebilir ki

$$f \in L^2([-2,2]) \text{ ve } f \in L^4(\mathbb{R} \setminus [-2,2])$$

olur. Bu yöntemle hareket edilirse daha karmaşık fonksiyonların incelenmesi durumunda daha fazla parça ve daha fazla fonksiyon sınıflarına ihtiyaç duyulur.

Gerçekten;

$$g(x) = |x|^{-1/3} + |x-1|^{-1/4}$$

fonksiyonu için $g \in L^2([-1,1/2])$, $g \in L^3([1/2,2])$ ve $g \in L^{9/2}(\mathbb{R} \setminus [-1,2])$ dir. Bunun çok iyi bir yaklaşım olmadığı kolayca görülmektedir. Bu gibi durumlarda bölgeleri ayırmak yerine üssü, yani p sabitini bir fonksiyon olarak kabul ederek kümede tanımlı fonksiyonların yeniden sınıflandırılmaları elde edilebilir. Mesela yukarıdaki fonksiyonlar için

$$p(x) = \frac{9|x|+2}{2|x|+1} = \frac{9}{2} - \frac{5/2}{2|x|+1}$$

fonksiyonunu üs olarak düşünürsek

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^{p(x)}\, dx < \infty \text{ ve } \int_{\mathbb{R}} |g(x)|^{p(x)}\, dx < \infty$$

olduğu görülür. Başka bir deyişle; parçalı aralıklar üzerinde farklı mertebeden *Lebesgue* uzaylarını incelemek yerine bir fonksiyonu üs olarak düşünmek bazı önemli fonksiyonların davranışlarını daha detaylı araştırmamıza olanak sağlar [7, sayfa 3]. Böylece, yeni bir takım fonksiyon uzayları tanımlanarak özellikleri araştırılmaya başlanmıştır. Bu fonksiyon uzaylarına örnek vermek gerekirse ilk akla gelenler L^{Φ} *Musileak-Orlicz* uzayı ve bunun bir özel durumu olan $L^{p(\cdot)}$ değişken üslü *Lebesgue* uzaylarıdır.

Konveks ve soldan sürekli bir $N:[0,\infty) \to [0,\infty]$ fonksiyonu eğer $N(0)=0$, $\lim_{t\to 0^+} N(t) = 0$ ve $\lim_{t\to\infty} N(t) = \infty$ koşullarını sağlıyorsa bu fonksiyona *Young* fonksiyonu denir. Şimdi $x \in E$ için $\Phi(x,\cdot)$ bir *Young* fonksiyonu olacak biçimde $\Phi : E \times [0,\infty) \to [0,\infty]$ fonksiyonunu ele alalım.

En az bir $\lambda > 0$ reel sayısı için

$$\rho_{\Phi}(f) = \int_E \Phi\left(x, \frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dx < \infty$$

şartını sağlayan fonksiyonlar sınıfına *Musielak-Orlicz* uzayı denir ve $L^{\Phi}(E)$ ile gösterilir. $L^{\Phi}(E)$ uzayı, $\|f\|_{L^{\Phi(\cdot,\cdot)}(E)} = \inf\{\lambda > 0 : \rho_{\Phi}(f) \leq 1\}$ biçiminde tanımlanan norm ile bir *Banach* fonksiyon uzayıdır. Özel durumda $1 \leq p < \infty$ için $\Phi(x,t) = t^p$ seçilirse $L^p(E)$ klasik *Lebesgue* uzayı; $\Phi(x,t) = \Phi(t)$ olarak seçildiğinde ise *Orlicz* uzayı elde edilir. Ayrıca, $\Phi(x,t) = t^{p(x)}$ olarak seçilirse yeni bir fonksiyon uzayı elde edilir. Bu uzaya $L^{p(\cdot)}(E)$ değişken üslü *Lebesgue* uzayı adı verilir.

Değişken üslü uzaylar ilk olarak *Orlicz* tarafından tanımlanmıştır. Bu uzayların matematiğin bir çok alanında hızla artan uygulamaları, özellikle diferansiyel denklemler ve matematiksel modelleme problemlerinde kullanılması, 1990'lı yıllardan sonra bu fonksiyon uzaylarının araştırılmasına olan ilgiyi iyice arttırmıştır. Aynı zamanda bu uzaylarda yaklaşım problemleri de araştırılmaya başlanmış ve bir dizi temel sonuç elde edilmiştir. Reel eksende ve kompleks düzlemde tanımlı değişken üslü *Lebesgue* uzaylarında *Hardy-Littlewood* maksimal fonksiyonu, *Calderon-Zygmund* ve *Cauchy* singüler operatörlerinin sınırlılığının araştırıldığı [8-14] gibi çalışmalar bu uzaylarda yaklaşım teorisi ile ilgili araştırmaların daha düzenli bir şekilde yapılmasına imkan sağlamıştır.

Kompleks düzlemde düzgün normda yaklaşım problemlerine benzer şekilde integrallenebilir fonksiyonların oluşturduğu fonksiyonlar uzayında da yaklaşım problemleri incelenir. Geleneksel olarak bu problemler kompleks düzlemin belirli kümelerinde tanımlı *Smirnov* ve ağırlıklı *Smirnov* sınıfı; *Lebesgue* ve ağırlıklı *Lebesgue* fonksiyonlar uzayında araştırılır.

Vurgulayalım ki, G bölgesinin sınırının sonlu uzunluklu bir *Jordan* eğrisi olması bu uzaydaki fonksiyonlara polinomlarla yaklaşabilmek için yeterli değildir. Bunun için bölge sınırının bir ek koşulu daha sağlaması gerekir.

Birim diski sınırlı bir G bölgesine resmeden konform dönüşüm ω ve $0<r<1$ için $\varsigma = re^{i\varphi}$ olsun. *Poisson* çekirdek fonksiyonu

$$P(r,\theta-\varphi)=\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2},\ 0<r<1$$

için $\log\left|\omega'(\zeta)\right| = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\log\left|\omega'\left(e^{i\theta}\right)\right|P(r,\theta-\varphi)\,d\theta$ koşulu sağlandığı takdirde G bölgesine *Smirnov* bölgesi ve bu bölgenin sınırına *Smirnov* eğrisi denir. Yukarıda yazılmış *Smirnov* bölgesi olma şartı daha basit şekilde $\log\left|\omega'(0)\right| = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\log\left|\omega'\left(e^{i\theta}\right)\right|d\theta$ olarak da ifade edilebilir [15, sayfa 444]. *Smirnov* bölgelerine örnek olarak yıldızsı bölgeler, *Carleson* bölgeleri ve *Dini*-düzgün bölgeler verilebilir.

Kompleks düzlemde sınırı sonlu uzunluklu bir Γ *Jordan* eğrisi olan sınırlı G bölgesinde analitik fonksiyonların bir sınıfı $E^p(G)$ ile gösterilir. $E^p(G)$'ye *Smirnov* sınıfı denir.

Eğer, $f\in E^p(G)$, $1\le p<\infty$ verildiğinde her $\varepsilon>0$ için $\displaystyle\int_\Gamma \left|f(z)-P(z)\right|^p |dz|<\varepsilon$ şartını sağlayan bir $P(z)$ cebirsel polinomu varsa $E^p(G)$ sınıfında polinomlar ailesi tamdır denir. Şimdi sınırı sonlu uzunluklu *Jordan* eğrisi olan bir bölgede polinomların tamlığını karakterize eden aşağıdaki teoremi ifade edelim:

Teorem 1.1 *G kompleks düzlemde sınırı sonlu uzunluklu* Γ *Jordan eğrisi olan sınırlı bir bölge olsun. Cebirsel polinomlar ailesinin* $E^p(G)$, $1 \le p < \infty$ *sınıfında tam olması için gerek ve yeter koşul* Γ *eğrisinin Smirnov eğrisi olmasıdır* [15, sayfa 448].

$[0, 2\pi]$ aralığında tanımlı *Lebesgue* ve ağırlıklı *Lebesgue* uzaylarında çözülen problemler ve yardımcı unsurlar benzer problemlerin ağırlıksız veya ağırlıklı *Smirnov* sınıflarında araştırılmasına da imkan sağlamıştır.

Γ, s yay uzunluğuna göre parametrelendirilmiş düzgün bir *Jordan* eğrisi ve $\theta(s)$, Γ eğrisinde s yay uzunluğuna karşılık gelen noktadaki teğet ile pozitif reel eksen arasındaki açı olsun. Sınırı düzgün bir *Jordan* eğrisi olan G bölgesi için $\Omega(\theta, s)$ süreklilik modülü

$$\int_0^\delta \frac{\Omega(\theta, s)}{s} ds < \infty, \ \delta > 0 \tag{1.1}$$

olarak bilinen *Dini* düzgünlük şartını sağladığında $p > 1$ için $E^p(G)$ sınıflarında düz ve ters teoremler S. *Y. Alper* tarafından 1960 yılında elde edilmiştir [16]. Daha sonra bu sonuçlar *V. M. Kokilashvili*'nin $p > 1$ için düz teoremi verdiği [17] ve *J. E. Andersson*'ın $p \ge 1$ olduğu durumda düz ve ters teoremi verdiği [18] çalışmalarıyla regüler sınırlı bölgelere genelleştirilmiştir. 1968 yılında *V. M. Kokilashvili* tarafından *Smirnov* uzaylarının bir genellemesi olan $E_M(G)$ *Smirnov-Orlicz* uzayı tanımlanmış ve G bölgesinin sınırı (1.1) şartını sağladığında yani yeterince düzgün bir *Jordan* eğrisi olduğunda bazı ters teoremler ispatlanmıştır [19]. Yine ağırlıklı *Smirnov* uzaylarının bazı alt uzaylarında konstrüktif karakterizasyon problemleri G bölgesinin sınırının *Radon* eğrisi olduğu durumda *Dynkin* [20], bölge sınırının *Carleson* eğrisi olduğu durumda ise *Israfilov* [21], *Israfilov* ve *Guven* [22] tarafından elde edilmiştir.

Tezin temel araştırma konularından biri olan değişken üslü $L^{p(\cdot)}(\Gamma)$ uzayı, $\int_{\Gamma} |f(z)|^{p(z)} |dz| < \infty$ koşulunu sağlayan sonlu uzunluklu Γ *Jordan* eğrisi üzerinde tanımlı ölçülebilir f fonksiyonlarından oluşur. Değişken üslü *Smirnov* sınıfı $E^{p(\cdot)}(G)$ ise sınırı sonlu uzunluklu Γ *Jordan* eğrisi olan sınırlı G bölgesi için $E^{p(\cdot)}(G) := \left\{ f \in E^1(G) : f \in L^{p(\cdot)}(\Gamma) \right\}$ biçiminde tanımlanır.

Sonlu uzunluklu Γ eğrisinin (1.1) koşulunu sağladığı durumda ağırlıklı $E^{p(\cdot)}(G)$ sınıflarında yaklaşım teorisinin düz ve ters teoremleri ispatsız olarak [23] ve [24] çalışmalarında verilmiştir. Daha sonra farklı bir düzgünlük modülü kullanılarak [25] çalışmasında $E^{p(\cdot)}(G)$ sınıflarında yaklaşım teorisinin düz ve ters teoremleri ispatlanmıştır.

$L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ uzaylarında ilk olarak $p_- := \operatorname*{ess\,inf}_{x \in [0,2\pi]} p(x) > 1$ ve maksimal operatörün sınırlı olduğu durumda $\Omega_{p(\cdot)}(f,\delta) := \sup_{0<h\le\delta} \left\| \frac{1}{h} \int_0^h |f(\cdot) - f(\cdot + t)| dt \right\|_{p(\cdot)}$ biçiminde bir düzgünlük modülü *Guven* ve *Israfilov* tarafından [26] çalışmasında tanımlanmış, bu modül yardımı ile yaklaşım teorisinin düz teoremi ispat edilmiş ve *Fourier* serilerinin *Nörlund* ortalamalarının yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Benzer sonuçlar $p_- > 1$ olduğu durumda diğer düzgünlük modülleri kullanılarak [23], [24], [27] çalışmalarında verilmiştir. $p_- \ge 1$ olduğu daha genel durumda ise $\Omega_{p(\cdot)}(f,\delta)$ modülünden daha hassas olan $\Omega(f,\delta)_{p(\cdot)} := \sup_{0<h\le\delta} \left\| \frac{1}{h} \int_0^h (f(\cdot) - f(\cdot + t)) dt \right\|_{p(\cdot)}$ biçimindeki düzgünlük modülü [28] çalışmasında *Sharapudinov* tarafından tanımlanmış, yaklaşım teorisinin düz ve ters teoremleri bu modül yardımı ile ispatlanmıştır.

Tez çalışmasının üçüncü bölümünde [28] çalışmasında $L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ değişken üslü Lebesgue uzaylarında tanımlanan birinci mertebeden $\Omega(f,\delta)_{p(\cdot)}$ düzgünlük modülü, yüksek mertebeden modüllere genelleştirilmiş, $p(\cdot)$ üs fonksiyonunun $p_{-} \geq 1$ koşulunu sağladığı durumda yaklaşım teorisinin düz ve ters teoremleri ispatlanmıştır. Bu sonuçlar yardımı ile bu uzayın alt uzayı olan genelleşmiş *Lipschitz* sınıflarının konstrüktif karakterizasyonu elde edilmiştir. Dördüncü bölümde değişken üslü *Sobolev* uzaylarında bazı eş zamanlı yaklaşım teoremleri ispatlanmıştır.

Beşinci bölümde Γ eğrisinin *Dini* düzgün eğri olduğu durumda $E^{p(\cdot)}(G)$ ve $E^{p(\cdot)}(G^{-})$ değişken *Smirnov* sınıflarında yüksek mertebeden düzgünlük modülleri yardımı ile yaklaşım teorisinin düz-ters teoremleri ispatlanmış ve bu uzayların bazı alt uzaylarının konstrüktif karakterizasyonu elde edilmiştir. Ayrıca bu uzaylarda *Marcinkiewicz* çarpan ve *Littlewood-Paley* tipi teoremler ispatlanmıştır. Beşinci bölümde, aynı zamanda, $E^{p(\cdot)}(G)$ ve $E^{p(\cdot)}(G^{-})$ sınıflarında sırasıyla fonksiyonların *Faber* serilerinin ve *Faber* rasyonel fonksiyonlarının kısmi toplamı yardımı ile *de la Vallée-Poussin* ve *Jackson* ortalamaları tanımlanmış ve bu ortalamalar ile yaklaşım hızları değerlendirilmiştir. Bu bölümün sonunda $L^{p(\cdot)}(\Gamma)$ uzayında *Faber-Laurent* rasyonel fonksiyonlarının yaklaşım özellikleri incelenmiş olup uygun değerlendirmeler elde edilmiştir.

Belirtmek gerekir ki bu tez çalışmasında elde edilen yeni bulgular tezin yazılma sürecinde çeşitli dergilere sunulmuştur. Bu bulgulardan bir kısmı yayınlanmış ve bir kısmı da uluslararası konferanslar ve sempozyumlarda ifade edilip bildiri kitaplarında basılmışlardır.

2. ÖN BİLGİLER

2.1 Bazı Temel Kavramlar ve Teoremler

2.1.1 Tanım $(V,\|\cdot\|)$ *normlu uzay olsun.* V *üzerinde* $d(x,y)=\|x-y\|$ *olarak tanımlanan metriğe* $\|\cdot\|$ ***normu ile ilişkili metrik*** *ve* (V,d) *uzayına* $\|\cdot\|$ ***normu ile ilişkili metrik uzay*** *denir* [29, sayfa 36].

2.1.2 Tanım $(V,\|\cdot\|)$ *normlu uzay olsun. Eğer* $\|\cdot\|$ *normu ile ilişkili metrik uzay* (V,d) *bir tam metrik uzay ise* $(V,\|\cdot\|)$ *uzayına* ***Banach uzayı*** *denir* [29, sayfa 48].

2.1.3 Tanım V,W $\mathbb{R}$ (*veya* $\mathbb{C}$) *üzerinde tanımlı iki vektör uzay ve* $T:V\to W$ *bir dönüşüm olsun. Eğer* T *dönüşümü her* $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ (*veya* $\mathbb{C}$) *ve her* $x,y\in V$ *için* $T(\alpha x+\beta y)=\alpha T(x)+\beta T(y)$ *şartını sağlıyorsa bu dönüşüme* ***lineer operatör*** **(*lineer dönüşüm*)** *denir* [30, sayfa 220].

2.1.4 Teorem $(V,\|\cdot\|)$ *normlu uzay,* W *onun yoğun bir alt uzayı ve* Y *bir Banach uzayı olsun.* $S:W\to Y$ *sınırlı bir lineer operatör olduğunda her* $x\in W$ *için* $T(x)=S(x)$ *ve* $\|T\|=\|S\|$ *olacak şekilde bir tek* $T:V\to Y$ *sınırlı lineer operatörü vardır* [29, sayfa 99].

2.1.5 Tanım *V, $\mathbb{R}$ (veya $\mathbb{C}$) üzerinde bir vektör uzay olsun. V vektör uzayında tanımlı skaler değerli fonksiyona* ***fonksiyonel*** *denir. Bir $T: V \to \mathbb{R}$ fonksiyoneli her $x, y \in V$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$ özelliğini sağlıyorsa bu fonksiyonele* ***lineer fonksiyonel*** *denir* [29, sayfa 105].

2.1.6 Tanım *f Lebesgue ölçülebilir bir fonksiyon ve $a, b \in \mathbb{R}$ olsun.*

$$\underset{x}{ess\sup}\ f(x) = \inf\{b : f(x) \le b \text{ hemen her yerde}\}$$

ifadesine f ***fonksiyonunun esaslı supremumu*** *denir. Benzer şekilde*

$$\underset{x}{ess\inf}\ f(x) = \sup\{a : f(x) \ge a \text{ hemen her yerde}\}$$

ifadesine f ***fonksiyonunun esaslı infimumu*** *denir* [29, sayfa 26].

2.1.7 Tanım $1 \le p \le \infty$ *için*

$$\left.\begin{array}{l} \int_A |f(x)|^p\, dx < \infty,\ 1 \le p < \infty \\ \underset{x \in A}{ess\sup} |f(x)| < \infty, \quad p = \infty \end{array}\right\}$$

koşulunu sağlayan, A üzerinde tanımlı Lebesgue ölçülebilir f fonksiyonlarının oluşturduğu küme $L^p(A)$ ile gösterilir. *$L^p(A)$ kümesine* ***Lebesgue uzayı*** *denir* [29, sayfa 27].

2.1.8 Tanım $1 \le p < \infty$ *için 2π periyodik ve Lebesgue ölçülebilir tüm f fonksiyonlarının Lebesgue uzayı $L^p([0, 2\pi])$ ile gösterilir.*

2.1.9 Tanım *$I \subset [0,2\pi]$ bir aralık olsun. $f \in L^1([0,2\pi])$ fonksiyonu için x elemanını içeren tüm I aralıkları üzerinden supremum alınarak*

$$\mathcal{M}(f)(x) = \sup_{I \ni x} \frac{1}{|I|} \int_I |f(y)| dy, \quad x \in [0,2\pi]$$

*biçiminde tanımlanan ortalamaya f 'in **Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu** ve $\mathcal{M}: f \to \mathcal{M}(f)$ biçiminde tanımlanan lineer operatöre **Hardy-Littlewood maksimal operatörü** denir* [31, sayfa 84].

2.1.10 Teorem *G sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisiyle sınırlanmış sınırlı bir bölge ve Γ bunun pozitif yönlendirilmiş sınırı olsun. f, $\mathbb{C} - G$ bölgesinde analitik bir fonksiyon ise*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} f(\infty) - f(z) & , \quad z \in \mathbb{C} - \overline{G} \\ f(\infty) & , \quad z \in G \end{cases}$$

olur [32, sayfa 486].

2.1.11 Tanım *Γ sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi olsun. $1 \le p < \infty$ için*

$$\|f\|_{L^p(\Gamma)} = \left(\int_\Gamma |f(z)|^p |dz| \right)^{1/p} < \infty$$

*koşulunu sağlayan Γ üzerinde tanımlı bütün Lebesgue ölçülebilir kompleks değerli fonksiyonların kümesine **Lebesgue uzayı** denir ve $L^p(\Gamma)$ ile gösterilir. $L^p(\Gamma)$ uzayı $\|\cdot\|_{L^p(\Gamma)}$ normu ile bir **Banach uzayıdır*** [33].

2.1.12 Teorem (Riemann Dönüşüm Teoremi) *$G \subset \mathbb{C}$ sınırı en az iki noktadan oluşan basit bağlantılı bir bölge ve $z_0 \in G$ olsun. Bu durumda G bölgesini birim disk $\mathbb{D}$ 'ye $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ koşulları altında resmeden bir tek konform dönüşüm vardır* [34, sayfa 2].

2.1.13 Teorem *$E \subset \mathbb{C}$ en az iki noktadan oluşan basit bağlantılı tümleyene sahip sınırlı bir kontiniyum olsun. Bu durumda $\mathbb{C} - E$ bölgesini $\mathbb{C} - \overline{\mathbb{D}}$'ye*

$$\varphi(\infty) = \infty \text{ ve } \lim_{z \to \infty} \frac{\varphi(z)}{z} > 0$$

koşulları altında resmeden φ konform dönüşümü tektir [34, sayfa 13].

2.1.14 Teorem *Eğer G bölgesinin sınırı bir Jordan eğrisi ise G bölgesinden $\mathbb{D}$ birim diske her konform dönüşüm $\overline{G}$'ye bire bir ve sürekli olarak genişletilebilir* [35, sayfa 24].

2.1.15 Tanım *f, G içerisinde analitik ve $p > 0$ olsun. G içindeki $\Gamma_n \to \Gamma$ özelliğine sahip sonlu uzunluklu kapalı Jordan eğrilerinin bir $\{\Gamma_n\}$ dizisi için*

$$\int_{\Gamma_n} |f(z)|^p |dz| \leq M$$

koşulunu n'den bağımsız bir M sabiti ile sağlayan f fonksiyonlarının sınıfına ***Smirnov sınıfı*** *denir ve $E^p(G)$ ile gösterilir. Özel halde $G := \mathbb{D}$ ise $H^p(\mathbb{D})$* ***Hardy uzayı*** *elde edilir* [15, sayfa 438].

2.1.1 Toerem *Eğer $f(z) \in E^1(G)$ ise $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$ eşitliği sağalanır* [15, sayfa 439].

2.1.17 Tanım *Γ sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi, $f \in L^1(\Gamma)$ olsun.*

$$\Gamma_\varepsilon := \Gamma \cap \{\xi : |\xi - z_0| \geq \varepsilon,\ z_0 \in \Gamma\}$$

olduğunda

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{f(z')}{z' - z_0} dz' = \frac{1}{2\pi i} (P.V) \int_{\Gamma} \frac{f(z')}{z' - z_0} dz'$$

limiti varsa bu limite f ***fonksiyonunun Cauchy singüler integrali*** *denir ve* $S_\Gamma(f)(z_0)$ *ile gösterilir.* $S_\Gamma : f \to S_\Gamma(f)$ *biçiminde tanımlanan lineer operatöre* ***Cauchy singüler operatörü*** *denir* [15, sayfa 431].

2.1.18 Önerme (Privalov Önermesi) *Eğer Cauchy integrali* Γ *üzerinde hemen her yerde* Γ *'nın bir tarafı üzerinde bulunan bütün açısal yollar boyunca belirli bir limit değerine sahip ise Cauchy singüler integrali* Γ *üzerinde hemen her yerde mevcuttur ve Cauchy integrali* Γ *'nın diğer tarafı üzerinden* Γ *üzerinde hemen her yerde açısal limit değerine sahiptir. Tersine Cauchy singüler integrali* Γ *üzerinde hemen her yerde mevcutsa Cauchy integrali* Γ *'nın her iki tarafı üzerinden de* Γ *üzerinde hemen her yerde açısal limit değerine sahiptir. Burada* Γ *üzerinde hemen her yerde*

$$\lim_{z \to z_0} \int_\Gamma \frac{f(z')}{z'-z} dz' = (P.V) \int_\Gamma \frac{f(z')}{z'-z_0} dz' \pm \pi i f(z_0)$$

formülü sağlanır. Bu formülde sol taraftaki limit açısal yollar boyunca alınır. Sağ taraftaki işaret, açısal yol $z_0 \in \Gamma$ *noktasındaki teğetin solunda kalırsa pozitif, açısal yıl teğetin sağında kalırsa negatiftir* [15, sayfa 431].

G, sınırı Γ olan sınırlı bir bölge olsun. Genelliği bozmadan orjin noktasının G bölgesi içinde olduğunu kabul edelim. Eğer $f \in L^p(\Gamma)$ ise

$$f^+(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad z \in G \tag{2.1}$$

$$f^-(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad z \in G^- \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlanan $f^+ : G \to \mathbb{C}$ ve $f^- : G^- \to \mathbb{C}$ fonksiyonları sırasıyla G ve G^- içinde analitiktiler ve $f^-(\infty) = 0$ dır.

Böylece, Γ 'nın her iki tarafı üzerinde bulunan açısal yollar boyunca limit alınarak Γ üzerinde hemen her yerde geçerli olan

$$f^{+}(z)=S_{\Gamma}(f)(z)+\frac{1}{2}f(z) \tag{2.3}$$

$$f^{-}(z)=S_{\Gamma}(f)(z)-\frac{1}{2}f(z) \tag{2.4}$$

eşitsilizliklerine ulaşılır ve bu eşitsizliklerden

$$f(z)=f^{+}(z)-f^{-}(z) \tag{2.5}$$

formülü elde edilir [15, sayfa 437].

2.1.19 Tanım Γ *sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi;* $z\in\Gamma$ *ve* $\varepsilon>0$ *için* $\Gamma(z,\varepsilon):=\Gamma\cap\left\{t\in\mathbb{C}: z\in\Gamma \text{ ve } |t-z|<\varepsilon\right\}$ *olsun. Eğer* $\sup\limits_{\varepsilon>0}\sup\limits_{z\in\Gamma}\frac{|\Gamma(z,\varepsilon)|}{\varepsilon}<\infty$ *ise* Γ *'ya* ***Carleson eğrisi*** *denir. Kompleks düzlemdeki tüm Carleson eğrilerinin kümesi* $\mathfrak{C}$ *ile gösterilir* [36, sayfa 2].

2.1.20 Tanım *g fonksiyonu* $[0,2\pi]\subset\mathbb{R}$ *üzerinde sürekli bir fonksiyon olsun. g fonksiyonunun* ***süreklilik modülü*** $t_1,t_2\in[0,2\pi]$ *ve* $\delta>0$ *için* $\omega(g,\delta):=\sup\limits_{|t_1-t_2|<\delta}\left\{|g(t_1)-g(t_2)|\right\}$ *olarak tanımlanr.* $\int\limits_0^{\pi}\frac{\omega(g,t)}{t}dt<\infty$ *koşulunu sağlayan g fonksiyonuna* ***Dini-sürekli fonksiyon*** *denir* [35, sayfa 46].

Şimdi $\mathfrak{C}$ eğri ailesinin bir alt ailesini tanımlayalım.

2.1.21 Tanım $\Gamma := \gamma_0(t),\ 0 \le t \le 2\pi$ *bir Jordan eğrisi olsun. Eğer* Γ *düzgün eğri ve* $\gamma_0'(t)$ *fonksiyonu dini-sürekli ise* Γ *eğrisine* ***Dini düzgün eğri*** *denir. Kompleks düzlemde tüm Dini düzgün eğrilerin ailesi* $\mathfrak{D}$ *ile gösterilir* [35, sayfa 48].

2.1.22 Tanım $a_k, b_k \in \mathbb{R},\ k = 1,2,...,n$ *ve* $|a_n| + |b_n| \ne 0$ *için*

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \left(\cos kx + b_k \sin kx\right)$$

olarak tanımlanan ifadeye n ***dereceli trigonometrik polinom*** *denir ve* $n = 0,1,2,...$ *için derecesi* n *'yi aşmayan trigonometrik polinomların kümesi* Π_n *ile gösterilir* [37, sayfa 2].

Herhangi bir $T_n(x)$ tigonometrik polinomu kompleks biçimde de ifade edilebilir. Tanım 2.1.22'de ifade edilen $T_n(x)$ trigonometrik polinomu

$$c_0 = \frac{a_0}{2},\ c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k) \text{ ve } c_{-k} = \overline{c_k},\ k = 1,2,...,n$$

olduğunda $c_k \in \mathbb{C}$ ve $|k| \le n$ için $T_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$ biçiminde bir gösterime sahiptir.

2.1.23 Tanım $\alpha_k \in \mathbb{C},\ k = 0,1,2,...,n$ *ve* $|\alpha_n| \ne 0$ *için* $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k z^k$

olarak tanımlanan ifadeye n ***dereceli cebirsel polinom*** *denir* [37, sayfa 2].

2.1.24 Tanım $f \in L^1([0,2\pi])$ *olsun.* $k = 0,1,2,3,...$ *için*

$$a_k(f) = a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos ktdt \quad ve \quad b_k(f) = b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin ktdt$$

olmak üzere $\dfrac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right)$ *serisine* f ***fonksiyonunun Fourier serisi,*** $a_k\left(f\right)$, $b_k\left(f\right)$ *katsayılarına da* f ***fonksiyonunun Fourier katsayıları*** *denir ve* $f\left(x\right)\sim \dfrac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right)$ *yazılır* [38, sayfa 46].

2.1.25 Tanım $f\in L^1\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ *olsun.* $k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$ *için*

$$c_k\left(f\right)=c_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(t\right)e^{kt}dt$$

olmak üzere $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$ *serisine* f ***fonksiyonunun kompleks biçimli Fourier serisi,*** $c_k\left(f\right)$ *katsayılarına da* f ***fonksiyonunun kompleks Fourier katsayıları*** *denir* [38, sayfa 47].

2.1.26 Tanım $f\in L^1\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ *ve* $a_k\left(f\right)$, $b_k\left(f\right)$ *onun Fourier katsayıları olsun.* $S_n\left(f\right):=S_n\left(f\right)\left(x\right)=\dfrac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right)$ *ifadesine* f ***fonksiyonunun n'inci Fourier kısmi toplamı*** *denir* [37, sayfa 31].

$D_n\left(t\right)$ *Dirichlet* çekirdeği ve $F_n\left(t\right)$ *Fejér* çekirdeği

$$D_n\left(t\right)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt=\frac{\sin\left(\left(2n+1\right)t/2\right)}{2\sin\left(t/2\right)}$$

$$F_n\left(t\right)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}D_k\left(t\right)=\frac{1}{2\left(n+1\right)}\left(\frac{\sin\left(\left(n+1\right)t/2\right)}{\sin\left(t/2\right)}\right)^2$$

olarak tanımlıdır [37, sayfa 24].

2.1.27 Tanım *$f \in L^1([0,2\pi])$ ve $S_n(f)(x)$ onun n'inci Fourier kısmi toplamı olsun. $V_n(f) := V_n(f)(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1} S_k(f)(x)$ ifadesine f fonksiyonunun* ***de la Vallée-Poussin ortalaması*** *denir* [37, sayfa 32].

2.1.28 Tanım *$n = 1,2,3,\ldots$ için $\mathcal{K}_n(t) = \frac{\sin(3nt/2)\sin(nt/2)}{2n\sin^2(t/2)}$ olarak tanımlanan ifadeye* ***de la Vallée-Poussin çekirdeği*** *denir* [5].

De la Vallée-Poussin çekirdeğinin, *Dirichlet* ve *Fejér* çekirdeklerinin tanımları dikkate alınarak *de la Vallée-Poussin* ortalamasının integral gösterimi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$V_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathcal{K}_n(x-t)\,dt. \tag{2.6}$$

$T_n \in \Pi_n$ trigonometrik polinomu göz önüne alınırsa $S_n(T_n) = T_n$ ve $V_n(T_n) = T_n$ eşitlikleri geçerli olur [37, sayfa 196].

2.1.29 Tanım *$f \in L^1([0,2\pi])$ ve $n = 1,2,3,\ldots$ için*

$$\Lambda_n(t) = \frac{3}{2n(2n^2+1)}\left(\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right)^4$$

ifadesine ***Jackson çekirdeği*** *ve $J_n(f) = J_n(f)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\Lambda_n(t)\,dt$ integraline* ***Jackson singüler integrali*** *denir* [39, sayfa 202].

2.1.30 Tanım $f \in L^1([0,2\pi])$; $a_k(f)$, $b_k(f)$ f *'in Fourier katsayıları ve*

$$\left(\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right)^4 = \sum_{k=0}^{2n-2} c_k^{(n)} \cos kt \qquad \text{olduğunda} \qquad \lambda_k^{(n)} = \frac{3c_k^{(n)}}{2n(2n^2+1)},\ k = 0,1,2,\ldots,2n-2$$

olsun. $J_n(f) = \sum_{k=0}^{2n-2} \lambda_k^{(n)} \left[a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\right]$ *ifadesine* f *fonksiyonunun* ***Jackson ortalaması*** *denir* [40, sayfa 17].

2.1.31 Tanım $1 \le p < \infty$ *ve* $r = 0,1,2,\ldots$ *olsun.*

$$W_r^p([0,2\pi]) := \left\{ f : f^{(r-1)} \text{ mutlak sürekli ve } f^{(r)} \in L^p([0,2\pi]) \right\}$$

kümesine r ***. mertebeden Sobolev uzayı*** *denir.*

2.1.32 Tanım $A := [0,2\pi]$ *veya* Γ *sonlu uzunluklu Jordan eğrisi olduğunda Lebesgue ölçülebilir bir* $\omega : A \to [0,\infty]$ *fonksiyonu için* $\omega^{-1}(\{0,\infty\})$ *kümesinin Lebesgue ölçümü sıfır ise* ω *fonksiyonuna* A *üzerinde bir* ***ağırlık fonksiyonu*** *denir* [36, sayfa 27].

2.1.33 Tanım Γ *sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi ve* ω, Γ *üzerinde bir ağırlık fonksiyonu olsun.* $1 < p < \infty$ *için* $\left(\frac{1}{|\Gamma|}\int_\Gamma |f(z)|^p |\omega(z)||dz|\right)^{1/p} < \infty$ *koşulunu sağlayan* Γ *üzerinde tanımlı bütün Lebesgue ölçülebilir kompleks değerli* f *fonksiyonlarının kümesine* ***ağırlıklı Lebesgue uzayı*** *denir ve* $L_\omega^p(\Gamma)$ *ile gösterilir* [21].

2.1.34 Tanım Γ *sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi ve* ω, Γ *üzerinde bir ağırlık fonksiyonu, ayrıca* $1 < p < \infty$ *olsun. Eğer* ω *fonksiyonu* $\Gamma(z,\varepsilon) := \Gamma \cap \{t \in \mathbb{C} : z \in \Gamma \text{ ve } |t-z| < \varepsilon\}$ *olduğunda*

$$\sup_{z\in\Gamma}\sup_{\varepsilon>0}\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\Gamma(z,\varepsilon)}\omega(\zeta)|d\zeta|\right)\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\Gamma(z,\varepsilon)}\left[\omega(\zeta)\right]^{-1/(p-1)}|d\zeta|\right)^{p-1} < \infty$$

koşulunu sağlıyorsa Γ ***üzerinde*** $A_p -$ ***Muckenhoupt*** *şartını sağlar denir ve* Γ *üzerinde* $A_p -$ *Muckenhoupt şartını sağlayan tüm ağırlık fonksiyonlarının kümesi* $A_p(\Gamma)$ *ile gösterilir* [21].

2.1.35 Tanım Γ *sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi olsun.* $f \in L^1(\Gamma)$ *fonksiyonu için* z *elemanını içeren tüm sonlu uzunluklu* $\gamma \subset \Gamma$ *yayları üzerinden supremum alınarak* $\mathcal{M}_\Gamma(f)(z) = \sup_{\gamma \ni z}\left(\frac{1}{|\gamma|}\int_\gamma |f(z)||dz|\right)$ *biçiminde tanımlanan ortalamaya* f *'in* ***Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu*** *denir ve* $\mathcal{M}_\Gamma : f \to \mathcal{M}_\Gamma(f)$ *biçiminde tanımlanan lineer operatöre* ***Hardy-Littlewood maksimal operatörü*** *denir* [36, sayfa 44].

2.1.36 Tanım ω, Γ *üzerinde tanımlı bir ağırlık fonksiyonu olsun.* $1 < p < \infty$ *için* $E^p_\omega(G) := \{f \in E^1(G) : f \in L^p_\omega(\Gamma)\}$ *olarak tanımlanan kümeye* G *bölgesinde analitik fonksiyonların* ***ağırlıklı Smirnov sınıfı*** *denir* [21].

2.1.37 Tanım ($\mathcal{O}$ gösterimi) f *ve* g *bir* $A \subset \mathbb{C}$ *kümesi üzerinde tanımlı iki fonksiyon olsun. Eğer hemen her* $z \in A$ *için* $|f(z)| \le M|g(z)|$ *olacak şekilde bir* $M > 0$ *sayısı varsa bu durum* $f = \mathcal{O}(g)$ *ile gösterilir.*

2.2 $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ Değişken Üslü Lebesgue Uzayı ve Bazı Temel Özellikleri

2.2.1 Tanım *$\Omega \subset \mathbb{R}$ Lebesgue ölçülebilir bir küme ve $p(\cdot):\Omega \to [1,\infty)$ Lebesgue ölçülebilir bir üs fonksiyonu için $\int\limits_{\Omega} |f(x)|^{p(x)} dx < \infty$ koşulunu sağlayan tüm Lebesgue ölçülebilir f fonksiyonlarının kümesine* ***değişken üslü Lebesgue uzayı*** *denir ve $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ ile gösterilir* [41, sayfa 13].

Değişken üslü *Lebesgue* uzaylarında üs fonksiyonu uzayın bir takım fonksiyonel özelliklerini belirlemekte önemli rol oynamaktadır. $p(\cdot)$ fonksiyonu Ω üzerinde tanımlı bir üs fonksiyonu olduğunda $p_- := \underset{x\in\Omega}{ess\inf}\, p(x)$ ve $p_+ := \underset{x\in\Omega}{ess\sup}\, p(x)$ olsun.

2.2.2 Önerme *$p(\cdot):\Omega \to [1,\infty)$ Lebesgue ölçülebilir fonksiyon olsun. $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayının bir vektör uzay olabilmesi için gerek ve yeter koşul $p(\cdot)$ üs fonksiyonunu için $p_+ < \infty$ olmasıdır* [41, sayfa 15].

2.2.3 Tanım *$p(\cdot):\Omega \to [1,\infty]$ ve f Lebesgue ölçülebilir fonksiyonlar olsun. $\Omega_\infty := \{x \in \Omega : p(x) = \infty\}$ kümesi için $\rho_{p(\cdot)}(f) := \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\infty} |f(x)|^{p(x)} dx + \underset{x\in\Omega_\infty}{ess\sup} |f(x)|$ fonksiyoneline* ***modüler fonksiyonel*** *denir* [7, sayfa 17].

2.2.4 Tanım *$p(\cdot):\Omega \to [1,\infty)$ Lebesgue ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere $p_+ < \infty$ için $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayı $\|f\|_{p(\cdot)} := \inf\{\lambda > 0 : \rho_{p(\cdot)}(f/\lambda) \le 1\}$ normu ile bir Banach uzayıdır* [7, sayfa 55].

$L^{p(\cdot)}(\Omega)$ değişken üslü *Lebesgue* uzayında üs fonksiyonu olan $p(\cdot)$, $1 \leq p < \infty$ sonlu sayısı için $p(x) = p$ biçiminde bir sabit olarak alındığında bu uzay klasik *Lebesgue* uzayı $L^p(\Omega)$ ile çakışır. Bu durumda $\|\cdot\|_{p(\cdot)} = \|\cdot\|_p$ halini alır. Bu durum $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayının $L^p(\Omega)$'nın bir genelleşmesi olduğunu ortaya koyar.

Klasik uzaylarda bildiğimiz *Hölder* eşitsizliği, genelleştirilmiş *Minkowski* eşitsizliği gibi bazı eşitsizlikler değişken üslü uzaylarda da geçerli olur. $L^p(\Omega)$ uzaylarında iyi bilinen bazı teoremler $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzaylarında aşağıdaki gibi ifade edilirler.

2.2.5 Teorem (Hölder Eşitsizliği) $p(\cdot): \Omega \to [1,\infty)$ *Lebesgue ölçülebilir bir fonksiyon ve* $1/p + 1/p' = 1$ *olsun. Her* $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ *ve* $g \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$ *için* $fg \in L^1(\Omega)$ *olup* $p(\cdot)$ *fonksiyonuna bağlı pozitif öyle bir* $K(p)$ *sabiti vardır ki*

$$\int_{\Omega} |f(x) g(x)| dx \leq K(p) \|f\|_{p(\cdot)} \|g\|_{p'(\cdot)}$$

eşitsizliği sağlanır [7, sayfa 27].

2.2.6 Teorem (Genelleştirilmiş Minkowski Eşitsizliği) $p(\cdot): \Omega \to [1,\infty)$ *ve* $f: \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ *Lebesgue ölçülebilir fonksiyonlar ve hemen her* $y \in \Omega$ *için* $f(\cdot, y) \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ *olsun. Bu durumda* $p(\cdot)$ *fonksiyonuna bağlı pozitif öyle bir* $K^*(p)$ *sabiti vardır ki*

$$\left\| \int_{\Omega} f(\cdot, y) dy \right\|_{p(\cdot)} \leq K^*(p) \int_{\Omega} \|f(\cdot, y)\|_{p(\cdot)} dy$$

eşitsizliği sağlanır [7, sayfa 38].

2.2.7 Teorem (Gömülme Teoremi) $p(\cdot), q(\cdot): \Omega \to [1,\infty)$ *Lebesgue ölçülebilir iki fonksiyon ve* $|\Omega \setminus \Omega_\infty| < \infty$ *olsun.* $L^{q(\cdot)}(\Omega) \subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$ *olması için gerek ve yeter koşul hemen her yerde* $p(x) \le q(x)$ *olmasıdır. Ayrıca bu durumda* $\|f\|_{p(\cdot)} \le (1 + |\Omega \setminus \Omega_\infty|)\|f\|_{q(\cdot)}$ *eşitsizliği geçerli olur* [7, sayfa 41].

Böylece $|\Omega| < \infty$ olduğu varsayılırsa Teorem 2.2.7 dikkate alınarak $c_* \|f\|_{p_-} \le \|f\|_{p(\cdot)} \le c^* \|f\|_{p_+}$ olacak şekilde c_*, c^* katsayılarının bulunduğu ve $p_+ < \infty$ ek koşulu altında $\|f\|_{p(\cdot)} \le (1 + |\Omega|)\|f\|_{q(\cdot)}$ ifadesinin geçerli olduğu görülür.

2.2.8 Teorem $p(\cdot): \Omega \to [1,\infty)$ *Lebesgue ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Eğer* $p_+ < \infty$ *ise* Ω *üzerindeki tüm sınırlı fonksiyonların oluşturduğu küme* $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ *uzayında yoğundur* [42].

2.3 $L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ Değişken Üslü Lebesgue Uzayında Bazı Teoremler

Bu bölümde ölçülebilir bir $\Omega \subset \mathbb{R}$ kümesi üzerinde tanımlı değişken üslü $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayının $[0,2\pi]$ aralığına kısıtlanması ile elde edilen $L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ uzayında yaklaşım teorisi ve operatörler teorisinin bazı önemli teoremleri ifade edilecektir.

2.3.1 Tanım $p(\cdot): [0,2\pi] \to [1,\infty)$ *ve* $1 \le p_- \le p(x) \le p_+ < \infty$ *olmak üzere pozitif bir* d *sabiti için* $|p(x) - p(y)| \ln \frac{2\pi}{|x-y|} \le d$; $x, y \in [0,2\pi]$ *ve* $x \ne y$, *koşulunu sağlayan tüm Lebesgue ölçülebilir,* 2π *periyodik* p *üs fonksiyonlarının kümesi* $\mathcal{P}([0,2\pi])$ *ile gösterilir.* $\mathcal{P}([0,2\pi])$ *kümesinin* $p_- > 1$ *koşulunu sağlayan alt kümesi* $\mathcal{P}^0([0,2\pi])$ *ile gösterilir* [41].

Tanım 2.3.1 ile verilen bu koşulun benzeri ilk olarak *I. Sharapudinov* tarafından $L^{p(\cdot)}([0,1])$ uzayında düşünülmüş ve bu koşulu sağlayan üs fonksiyonları için tanımlanan $L^{p(\cdot)}([0,1])$ uzayında *Haar* sisteminin bir baz oluşturduğu ispatlanmıştır [43].

2.3.2 Teorem *$f \in L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ olsun. Eğer her $0<|x-y|\leq 1/2$ için $p \in \mathcal{P}^0([0,2\pi])$ ise pozitif bir $c(p)$ sabiti vardır öyle ki $\|\mathcal{M}(f)\|_{p(\cdot)} \leq c(p)\|f\|_{p(\cdot)}$ eşitisizliği sağlanır* [10].

2.3.3 Teorem *Eğer $f \in L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ ve $p \in \mathcal{P}^0([0,2\pi])$ ise pozitif bir $c(p)$ sabiti vardir öyle ki $\|S_n(f)\|_{p(\cdot)} \leq c(p)\|f\|_{p(\cdot)}$ olur* [44].

Böylece *Haar* sisteminin $L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ uzayı için sağladığı özelliğin bir benzerinin $L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ uzayında $\{e^{ikx}\}$, $k=0,\pm1,\pm2,...$ sistemi içinde geçerli olduğu sonucu görülebilir.

2.3.4 Sonuç *$p \in \mathcal{P}^0([0,2\pi])$ ise $\{e^{ikx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ trigonometrik sistemi $L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ uzayı için bir baz oluşturur* [41, sayfa 95].

Teorem 2.3.3 kullanılarak $L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ uzaylarında yaklaşım teorisinin bir takım teoremleri [26-27] ve [45-46] çalışmalarında ispatlanmıştır. Bu çalışmalarda $p \in \mathcal{P}^0([0,2\pi])$ koşulu altında yaklaşım teorisinin düz ve ters teoremleri çeşitli düzgünlük modülleri kullanılarak ağırlıklı ve ağırlıksız değişken üslü *Lebesgue* uzaylarında verilmiştir. $p \in \mathcal{P}^0([0,2\pi])$ olduğu durumda $\mathcal{M}(f)$, *Hardy Littlewood* maksimal operatörünün sınırlılığı $L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ uzayında değişik şekillerde düzgünlük modülleri tanımlanmasına imkan tanımıştır. $p_- = 1$ olduğu durumda maksimal operatörün sınırlı olmadığı gerçeğinden hareketle bir düzgünlük modülü tanımlayabilmek için yeni bir yaklaşıma gereksinim duyulur.

$\left\{\mathscr{K}_\lambda(f)\right\}_{1\le\lambda<\infty}$ ile $k_\lambda(x)$ ölçülebilir, 2π periyodik ve esaslı sınırlı bir çekirdek fonksiyonu olmak üzere $f \in L^1([0,2\pi])$ için

$$\mathscr{K}_\lambda(f) = \mathscr{K}_\lambda(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, k_\lambda(t-x)\, dt$$

biçiminde tanımalanan konvolüsyon operatörleri ailesi gösterilsin.

Eğer $k_\lambda(x)$, $1 \le \lambda < \infty$, çekirdek fonksiyonları λ ’dan bağımsız $\nu, \gamma, c_j^*\,(j = 1,2,3) > 0$ sabitleri için

$$A)\quad \int_{-\pi}^{\pi} \left|k_\lambda(x)\right| dx < c_1^*,\ \ B)\quad \sup_{x\in[-\pi,\pi]} \left|k_\lambda(x)\right| \le c_2^* \lambda^{\nu},\ \ C)\quad \lambda^{-\gamma} \le |x| < \pi \text{ için } \left|k_\lambda(x)\right| \le c_3^*$$

özelliklerini sağlıyorsa $\left\{k_\lambda(x)\right\}_{1\le\lambda<\infty}$ çekirdek fonksiyonları ailesi $A), B), C)$ şartlarını sağlar denir.

2.3.5 Teorem $\left\{k_\lambda(f)\right\}$, $1 \le \lambda < \infty$, *çekirdek fonksiyonları ailesi* $A), B), C)$ *şartlarını sağlasın. Eğer* $f \in L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ *ve* $p \in \mathcal{P}([0,2\pi])$ *ise* $\left\{\mathscr{K}_\lambda(f)\right\}_{1\le\lambda<\infty}$ *operatörleri ailesi* $L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ *uzayında düzgün sınırlıdır; pozitif bir* $c(p,\lambda,\nu,\gamma)$ *sabiti vardır öyle ki*

$$\left\|\mathscr{K}_\lambda(f)\right\|_{p(\cdot)} \le c(p,\lambda,\nu,\gamma) \left\|f\right\|_{p(\cdot)}$$

eşitsizliği geçerli olur [41, sayfa 65].

2.3.6 Teorem $f \in L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$, $p \in \mathcal{P}([0,2\pi])$ *ve* $1 \le \lambda < \infty$, $0 < \gamma \le 1$ *olmak üzere* $|\tau| \le \dfrac{\pi}{2\lambda^{\gamma}}$ *için* $S_{\lambda,\tau}(f) = \lambda \displaystyle\int_{x+\tau-\frac{1}{2\lambda}}^{x+\tau+\frac{1}{2\lambda}} f(t)dt$ *olsun. O zaman* $\left\{S_{\lambda,\tau}(f)\right\}_{1\le\lambda<\infty,\ |\tau|\le\frac{\pi}{2\lambda^{\gamma}}}$ *operatörler ailesi* $L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ *uzayında düzgün sınırlıdır; öyle bir* $c(p)$ *sabiti vardır ki*

$$\left\|S_{\lambda,\tau}(f)\right\|_{p(\cdot)} \le c(p)(2\pi+1)^{p+}\|f\|_{p(\cdot)}$$

eşitsizliği geçerlidir [44].

$p \in \mathcal{P}([0,2\pi])$ olduğunda Teorem 2.3.6 kullanılarak $f \in L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ ve $\delta > 0$ için

$$\Omega(f,\delta)_{p(\cdot)} := \sup_{0<h\le\delta}\left\|\frac{1}{h}\int_0^h (f(\cdot)-f(\cdot+t))dt\right\|_{p(\cdot)}$$

olarak tanımlanan düzgünlük modülünün

$$\lim_{\delta\to 0}\Omega(f,\delta)_{p(\cdot)} = 0 \ \text{ ve } \ \Omega(f,\delta)_{p(\cdot)} \le c(p)\|f\|_{p(\cdot)} \tag{2.7}$$

özelliklerini sağladığı gösterilmiştir [28].

2.3.7 Tanım $p \in \mathcal{P}([0,2\pi])$ *olsun.* $f \in L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ *için*

$$E_n(f)_{p(\cdot)} := \inf_{T_n\in\Pi_n}\|f-T_n\|_{p(\cdot)}, \ n = 0,1,2,...$$

sayısına f *fonksiyonunun* ***en iyi yaklaşım hatası*** *veya* ***en iyi yaklaşım sayısı*** *ve* $T_n(f) := T_n$ *trigonometrik polinomuna da* f ***fonksiyonuna en iyi yaklaşan*** n ***dereceli trigonometrik polinom*** *denir.*

2.3.8 Tanım *$p \in \mathcal{P}([0,2\pi])$ olsun. $f \in L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ ve n 'den bağımsız pozitif bir $c \geq 1$ sabiti için*

$$\left\| f - T_n^* \right\|_{p(\cdot)} \leq c E_n(f)_{p(\cdot)}, \ n = 0,1,2,...$$

eşitsizliğini sağlayan, derecesi n 'yi aşmayan $T_n^*(f) = T_n^* \in \Pi_n$ trigonometrik polinomuna f ***fonksiyonuna hemen hemen en iyi yaklaşan*** *n* ***dereceli trigonometrik polinom*** *denir.*

$f \in L^1([0,2\pi])$ ve $S_n(f)(x)$ onun n 'inci *Fourier* kısmi toplamı olsun.

$$\sigma_n(f) := \sigma_n(f)(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k(f)(x)$$

ifadesine f fonksiyonunun *Cesàro ortalaması* denir. $\sigma_n(f)$ *Cesàro* ortalaması *Fejér* çekirdeği yardımı ile $\sigma_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) F_n(t-x) dt$ olarak ifade edilen bir integral gösterime sahiptir [47, sayfa 89]. Teorem 2.3.5 uygulanarak $p \in \mathcal{P}([0,2\pi])$ şartı altında $\sigma_n(f)$ 'in integral gösteriminin $L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ uzayında sınırlı olacağı sonucuna varılır ve her $f \in L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ ve $n = 1,2,...$ için görülür ki

$$E_n(f)_{p(\cdot)} \leq \left\| f - \sigma_n(f) \right\|_{p(\cdot)} \leq c(p) \|f\|_{p(\cdot)}. \tag{2.8}$$

$L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ değişken üslü *Lebesgue* uzaylarında $p \in \mathcal{P}([0,2\pi])$ koşulu altında yaklaşım teorisinin bir düz teoremi [28] çalışmasında ispatlanmıştır. Aynı çalışmada *Bernstein* tipi bir eşitsizlik ispatlanmış ve $L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ uzayının alt sınıfı olan

$$Lip_{p(\cdot)}(\alpha) := \left\{ f \in L^{p(\cdot)}([0,2\pi]) : \ \Omega(f,\delta)_{p(\cdot)} \leq c\delta^{\alpha} \text{ ve } 0 < \alpha < 1 \right\}$$

Lipschitz sınıfları için bir ters değerlendirme verilmiştir. Bu değerlendirmenin $L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ uzayına genelleştirilmesi [25] çalışmasında elde edilmiştir.

2.3.9 Teorem *Eğer* $p \in \mathcal{P}([0,2\pi])$ *ve* $f \in L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ *ise pozitif bir* $c(p)$ *sabiti vardır öyle ki* $n = 1,2,...$ *için* $E_n(f)_{p(\cdot)} \le c(p)\Omega\left(f, \frac{1}{n}\right)_{p(\cdot)}$ *eşitsizliği sağlanır* [28].

2.3.10 Teorem (Bernstein Eşitsizliği) $p \in \mathcal{P}([0,2\pi])$ *olsun.* $T_n(x)$ *n dereceli trigonometrik polinomu için pozitif bir* $c(p)$ *sabiti vardir öyle ki* $\|T_n'(x)\|_{p(\cdot)} \le c(p)n\|T_n(x)\|_{p(\cdot)}$ *eşitsizliği geçerlidir* [28].

$\mathcal{K}_n(t)$ *de la Vallée-Poussin* çekirdeği için $c_j^* > 0$ $(j = 4,5,6)$ sabitleri ile

$a)$ $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\mathcal{K}_n(t)|dt \le c_4^* \log(3/2)$, $b)$ $\sup_{t\in[-\pi,\pi]}|\mathcal{K}_n(t)| \le c_5^* n$, $c)$ $n^{-1/2} \le t \le 2\pi - n^{-1/2}$ için $|\mathcal{K}_n(t)| \le c_6^*$,

özellikleri geçerli olup, $\mathcal{K}_n(t)$ çekirdeği $A), B), C)$ şartlarını sağlar [48]. Böylece eğer $p \in \mathcal{P}([0,2\pi])$ ise (2.6) gösterimi dikkate alındığında Teorem 2.3.5 sonucunda her $f \in L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ ve $n = 1,2,...$ için pozitif bir $c(p)$ sabiti ile

$$\|V_n(f)\|_{p(\cdot)} \le c(p)\|f\|_{p(\cdot)} \tag{2.9}$$

eşitsizliği sağlanır. Benzer şekilde $\Lambda_n(t)$ *Jackson* çekirdeği,

$a)$ $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Lambda_n(t)dt = 1$, $b)$ $\sup_{t\in[-\pi,\pi]}|\Lambda_n(t)| \le c_7^* n$, $c)$ $n^{-3/4} \le t \le 2\pi - n^{-3/4}$ için $|\Lambda_n(t)| \le c_8^*$,

biçimindeki $c_j^* > 0$ $(j = 7,8)$ sabitleri ile $A), B), C)$ şartlarını sağlar [28]. Böylece $p \in \mathcal{P}([0,2\pi])$ ve $f \in L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ olduğunda $J_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\Lambda_n(t)\,dt$ singüler integrali için pozitif bir $c(p)$ sabiti vardır öyle ki $n = 1,2,...$ için $\|J_n(f)\|_{p(\cdot)} \le c(p)\|f\|_{p(\cdot)}$ olur.

2.3.11 Teorem *Eğer* $p \in \mathcal{P}([0,2\pi])$ *ve* $f \in L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ *ise pozitif bir* $c(p)$ *sabiti vardır öyle ki* $n = 1,2,...$ *için* $\|f - J_n(f)\|_{p(\cdot)} \le c(p)\Omega\left(f, \frac{1}{n}\right)_{p(\cdot)}$ *eşitsizliği sağlanır* [28].

2.3.12 Tanım $p(\cdot):[0,2\pi] \to [1,\infty)$ *Lebesgue ölçülebilir ,* 2π *periyodik bir fonksiyon ve* $k = 1,2,...$ *olsun.*

$$W_k^{p(\cdot)}([0,2\pi]) := \left\{ f : f^{(k-1)} \text{ mutlak sürekli ve } f^{(k)} \in L^{p(\cdot)}([0,2\pi]) \right\}$$

kümesine k. ***mertebeden değişken üslü Sobolev uzayı*** *denir ve* $W_k^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ *değişken üslü Sobolev uzayı* $p_+ < \infty$ *olduğunda* $\|f\|_{W_k^{p(\cdot)}} = \|f\|_{p(\cdot)} + \left\|f^{(k)}\right\|_{p(\cdot)}$ *biçiminde tanımlanan norm ile bir Banach uzayıdır.*

2.3.13 Teorem *Eğer* $p \in \mathcal{P}([0,2\pi])$ *ve* $f \in W_r^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ *ise* $r = 0,1,2,3,...$ *için pozitif bir* $c(p)$ *sabiti vardır öyle ki* $n = 1,2,...$ *için*

$$\|f - V_n(f)\|_{p(\cdot)} \le \frac{c(p)}{n^r} E_n\left(f^{(r)}\right)_{p(\cdot)}$$

eşitsizliği sağlanır [48].

Teorem 2.3.9 ve Teorem 2.3.13' ten Teorem 2.3.14 elde edilir.

2.3.14 Teorem *Eğer* $p \in \mathcal{P}([0,2\pi])$ *ve* $f \in W_r^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ *ise* $r = 1,2,3,...$ *için pozitif bir* $c(p)$ *sabiti vardır öyle ki* $n = 1,2,...$ *için*

$$\|f - V_n(f)\|_{p(\cdot)} \le \frac{c(p)}{n^r} \Omega\left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right)_{p(\cdot)}$$

eşitsizliği sağlanır [48].

Teorem 2.3.14 ile (2.7) eşitsizliği veya Teorem 2.3.13 ile (2.8) eşitsizliği bir araya getirilerek aşağıdaki sonuç elde edilir.

2.3.15 Sonuç *Eğer* $p \in \mathcal{P}([0,2\pi])$ *ve* $f \in W_r^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ *ise* $r = 1,2,3,...$ *için pozitif bir* $c(p)$ *sabiti vardır öyle ki* $n = 1,2,...$ *için*

$$E_n(f)_{p(\cdot)} \le \frac{c(p,r)}{n^r}\left\| f^{(r)} \right\|_{p(\cdot)}$$

eşitsizliği sağlanır.

$\{\lambda_j\}$, $j = 0,1,2,...$ bir M sabiti ile

$$\left|\lambda_j\right| \le M \quad , \quad \sum_{\nu=2^j}^{2^{j+1}-1}\left|\lambda_j - \lambda_{j+1}\right| \le M \tag{2.10}$$

koşullarını sağlayan reel veya kompleks sayıların bir dizisi olsun.

2.3.16 Teorem $\{\lambda_j\}$, $j = 0,1,2,...$ *reel sayıların* (2.10) *şartını sağlayan bir dizisi olsun. Eğer* $p \in \mathcal{P}([0,2\pi])$ *ve* $k = 1,2,...$ *için* $f \in L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ *fonksiyonunun Fourier katsayıları* $a_k(f)$, $b_k(f)$ *ise* $\frac{a_0\lambda_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right)$ *serisi bir* $F \in L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ *fonksiyonunun Fourier serisidir ve* f *fonksiyonundan bağımsız pozitif bir* $c(p)$ *sabiti ile* $\|F\|_{p(\cdot)} \le c(p)\|f\|_{p(\cdot)}$ *eşitsizliği geçerli olur* [49].

3. DEĞİŞKEN ÜSLÜ LEBESGUE UZAYLARINDA TRİGONOMETRİK POLİNOMLAR İLE YAKLAŞIM

3.1 $\Omega_r(f,\delta)_{p(\cdot)}$ Düzgünlük Modülü ve Yardımcı Sonuçlar

3.1.1 Tanım *$f \in L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$, $p \in \mathcal{P}([0,2\pi])$ ve*

$$\Delta_t^r f(x) := \sum_{s=0}^{r} (-1)^{r+s} \binom{r}{s} f(x+st), \quad r = 1,2,3,...$$

olsun. Bu durumda

$$\Omega_r(f,\delta)_{p(\cdot)} := \sup_{|h|\le\delta} \left\| \frac{1}{h} \int_0^h \Delta_t^r f dt \right\|_{p(\cdot)}, \quad \delta > 0$$

ifadesine r ***-inci mertebeden düzgünlük modülü*** *denir.*

Bu modül $r=1$ için ilk olarak Sharapudinov tarafından [28] makalesinde tanımlanmış, [51] çalışmasında ise $r>1$ durumlarına genelleştirilmiştir ve bu durum [50] çalışmasında ifade edilmiştir. Bu modüle denk bir modül [52] çalışmasında tanımlanmıştır. Bu bölümde $\Omega_r(f,\delta)_{p(\cdot)}$ düzgünlük modülünün bazı temel özelliklerine yer verilecektir.

Kolayca göstermek mümkündür ki $f,g \in L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ fonksiyonları için

$$\Omega_r(f+g,\delta)_{p(\cdot)} \le \Omega_r(f,\delta)_{p(\cdot)} + \Omega_r(g,\delta)_{p(\cdot)} \tag{3.1}$$

eşitsizliği geçerlidir.

3.1.2 Önerme $p \in \mathcal{P}([0,2\pi])$, $r = 1,2,3,...$ *olsun. Pozitif bir* $c(p,r)$ *sabiti vardır öyle ki her* $f \in L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ *ve* $\delta > 0$ *için* $\Omega_r(f,\delta)_{p(\cdot)} \le c(p,r)\|f\|_{p(\cdot)}$ *eşitsizliği sağlanır.*

İspat $0 < sh \le 1$ eşitsizliğini sağlayan her pozitif s tam sayısı için

$$\frac{1}{h}\int_0^h f(x+st)\,dt = \frac{1}{sh}\int_x^{x+h} f(u)\,du = \frac{1}{sh}\int_{x+\frac{sh}{2}-\frac{sh}{2}}^{x+\frac{sh}{2}+\frac{sh}{2}} f(u)\,du = S_{\frac{1}{sh},\frac{sh}{2}}(f)$$

olur. Burada $\lambda := 1/(sh)$, $\tau := sh/2$ gösterimi ve Teorem 2.3.6 uygulanarak

$$\left\|\frac{1}{h}\int_0^h f(\cdot+st)\,dt\right\|_{p(\cdot)} = \left\|S_{\frac{1}{sh},\frac{sh}{2}}(f)\right\|_{p(\cdot)} \le c(p)\|f\|_{p(\cdot)}$$

elde edilir. Böylece

$$\left\|\frac{1}{h}\int_0^h \Delta_t^r f\,dt\right\|_{p(\cdot)} = \left\|\frac{1}{h}\int_0^h \sum_{s=0}^{r}(-1)^{r+s}\binom{r}{s} f(\cdot+st)\,dt\right\|_{p(\cdot)}$$

$$\le c_1(r)\sum_{s=0}^{r}\left\|\frac{1}{h}\int_0^h f(\cdot+st)\,dt\right\|_{p(\cdot)} \le c(p,r)\|f\|_{p(\cdot)}$$

olduğu görülür. Bu son eşitsizlikte $|h| \le \delta$ üzerinden supremum alınarak Tanım 3.1.1' den $\Omega_r(f,\delta)_{p(\cdot)} \le c(p,r)\|f\|_{p(\cdot)}$ eşitsizliğine ulaşılır. ■

3.1.3 Önerme *Eğer* $f \in L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$, $p \in \mathcal{P}([0,2\pi])$, *ise* $\delta \to 0$ *iken her pozitif* r *tamsayısı için* $\lim_{\delta\to 0}\Omega_r(f,\delta)_{p(\cdot)} = 0$ *olur.*

İspat İlk önce genelliği bozmadan $f \in L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ fonksiyonunun $[0,2\pi]$ aralığında sürekli olduğunu kabul edelim. O zaman her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta(\varepsilon)$ sayısı vardır öyle ki $0 < t \le h \le \delta$ ve $m = 0,1,2,...,r$ için

$$|f(x+mt) - f(x+(m+1)t)| \le \varepsilon \Big/ \left\{(2\pi)^{1/p_-}\, 2^{r-1}\right\}$$

olur. Böylece

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{1}{h}\int_{0}^{h}\Delta_t^r f(x)dt \Big/ \varepsilon\right|^{p(x)} = \int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{1}{h}\int_{0}^{h}\frac{\sum_{s=0}^{r}(-1)^{r+s}\binom{r}{s}f(\cdot+st)}{\varepsilon}dt\right|^{p(x)}dx$$

$$\leq \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{h}\int_{0}^{h}\frac{\left|\sum_{s=0}^{r}(-1)^{r+s}\binom{r}{s}f(\cdot+st)\right|}{\varepsilon}dt\right)^{p(x)}dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{h}\int_{0}^{h}\frac{\left|\sum_{m=0}^{r-1}(-1)^{r+m}\binom{r-1}{m}\right|\left[f(x+mt)-f(x+(m+1)t)\right]}{\varepsilon}dt\right)^{p(x)}dx$$

$$\leq \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{h}\int_{0}^{h}\frac{\sum_{m=0}^{r-1}\binom{r-1}{m}\left|f(x+mt)-f(x+(m+1)t)\right|}{\varepsilon}dt\right)^{p(x)}dx$$

$$\leq \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{h}\int_{0}^{h}\frac{\varepsilon\sum_{m=0}^{r-1}\binom{r-1}{m}}{(2\pi)^{1/p_-}2^{r-1}\varepsilon}\right)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{h}\int_{0}^{h}\frac{2^{r-1}}{(2\pi)^{1/p_-}2^{r-1}}dt\right)dx$$

$$\leq \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{h}\int_{0}^{h}\frac{dt}{(2\pi)^{1/p_-}}\right)^{p(x)}dx = 1.$$

Burada Tanım 2.2.4 dikkate alınırsa $\left\|\frac{1}{h}\int_{0}^{h}\Delta_t^r f(x)dt\right\|_{p(\cdot)} \leq \varepsilon$ olduğu görülür. Bu eşitsizlikte $|h| \leq \delta$ üzerinden supremum alınırsa Tanım 3.1.1'den $\Omega_r(f,\delta)_{p(\cdot)} \leq \varepsilon$ eşitsizliği elde edilir. Eğer $f \in L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ fonksiyonu $[0,2\pi]$ aralığında sürekli değil ise Teorem 2.2.8'den her $\varepsilon > 0$ için $[0,2\pi]$ aralığında sürekli olup $\|f-g\|_{p(\cdot)} \leq \varepsilon$

şartını sağlayan bir g fonksiyonu ve her $\delta<\delta(\varepsilon)$ için $\Omega_r(g,\delta)_{p(\cdot)}\leq\varepsilon$ eşitsizliğinin sağlandığı bir $\delta(\varepsilon)$ sayısı vardır. Böylece (3.1) eşitsizliği ve Önerme 3.1.2 uygulanarak elde edilen

$$\Omega_r(f,\delta)_{p(\cdot)}\leq\Omega_r(f-g,\delta)_{p(\cdot)}+\Omega_r(g,\delta)_{p(\cdot)}$$

$$\leq c(p,r)\|f-g\|_{p(\cdot)}+\varepsilon\leq[c(p,r)+1]\varepsilon$$

eşitsizliği $\lim\limits_{\delta\to0}\Omega_r(f,\delta)_{p(\cdot)}=0$ olmasını gerektirir. ■

3.1.4 Önerme *$p\in\mathcal{P}([0,2\pi])$ olsun. Pozitif bir $c(p,r)$ sabiti vardır öyle ki her $f\in W_r^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ fonksiyonu, $\delta>0$ ve $r=1,2,3,...$ için $\Omega_r(f,\delta)_{p(\cdot)}\leq c(p,r)\delta^r\left\|f^{(r)}\right\|_{p(\cdot)}$ eşitsizliği sağlanır.*

İspat $f\in W_r^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ olsun. Bu durumda

$$\Delta_t^r f(x)=\int_0^t\cdots\int_0^t f^{(r)}(x+t_1+\cdots+t_r)\,dt_1\cdots dt_r$$

eşitiği sağlanacağından ard arda r kere Teorem 2.2.6 uygulanırsa

$$\left\|\frac{1}{h}\int_0^h\Delta_t^r f\,dt\right\|_{p(\cdot)}\leq c_1(p)\frac{1}{h}\int_0^h\left\|\Delta_t^r f\right\|_{p(\cdot)}dt$$

$$\leq c_1(p)h^r\frac{1}{h^{r+1}}\int_0^h\left\|\int_0^t\cdots\int_0^t f^{(r)}(\cdot+t_1+\cdots+t_r)\,dt_1\cdots dt_r\right\|_{p(\cdot)}dt$$

$$\leq c_1(p)h^r\frac{1}{h}\int_0^h\left\|\frac{1}{h}\int_0^t\left|\frac{1}{h^{r-1}}\int_0^t\cdots\int_0^t f^{(r)}(\cdot+t_1+\cdots+t_r)\,dt_1\cdots dt_{r-1}\right|dt_r\right\|_{p(\cdot)}dt$$

$$\leq c_1(p)h^r\frac{1}{h}\int_0^h\left\|\frac{1}{h}\int_0^h\left|\frac{1}{h^{r-1}}\int_0^t\cdots\int_0^t f^{(r)}(\cdot+t_1+\cdots+t_r)\,dt_1\cdots dt_{r-1}\right|dt_r\right\|_{p(\cdot)}dt$$

$$\leq c_2(p,r)h^r \frac{1}{h}\int_0^h \left\| \frac{1}{h^{r-1}} \int_0^t \cdots \int_0^t f^{(r)}(\cdot + t_1 + \cdots + t_r)\, dt_1 \cdots dt_{r-1} \right\|_{p(\cdot)} dt$$

$$\leq \cdots \leq c_3(p,r)h^r \frac{1}{h}\int_0^h \left\| \frac{1}{h}\int_0^h \left| f^{(r)}(\cdot + t_1) \right| dt_1 \right\|_{p(\cdot)} dt$$

$$\leq c_4(p,r)h^r \left\| f^{(r)} \right\|_{p(\cdot)} \frac{1}{h}\int_0^h dt = c_4(p,r)h^r \left\| f^{(r)} \right\|_{p(\cdot)}$$

olur ve $|h| \leq \delta$ üzerinden supremum alınırsa Tanım 3.1.1'den istenen $\Omega_r(f,\delta)_{p(\cdot)} \leq c(p,r)\delta^r \left\| f^{(r)} \right\|_{p(\cdot)}$ eşitsizliğine ulaşılır. ■

3.1.5 Tanım *$f \in L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ olsun. $r = 1,2,3,...$ ve $\delta > 0$ için*

$$f_{r,\delta}(x) := \frac{2}{\delta}\int_{\delta/2}^{\delta} \left\{ \frac{1}{h^r}\int_0^h \cdots \int_0^h \sum_{s=0}^{r-1} (-1)^{r+s+1} \binom{r}{s} f\left(x + \frac{r-s}{r}[t_1 + \cdots + t_r]\right) dt_1 \cdots dt_r \right\} dh$$

olarak tanımlanan fonksiyona $f_{r,\delta}$ ***Steklov ortalama değer fonksiyonu*** *denir.*

3.1.6 Önerme *$f \in L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$, $p \in \mathcal{P}([0,2\pi])$ olsun. O zaman $\delta > 0$ ve $r = 1,2,3,...$ için $f_{r,\delta} \in W_r^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ olur.*

İspat İlk olarak $t := \frac{r-s}{r} t_r$ olsun. Basit hesaplamalar sonucunda

$$\left\{ \int_0^h \cdots \int_0^h f\left(x + \frac{r-s}{r}[t_1 + \cdots + t_r]\right) dt_1 \cdots dt_r \right\}^{(r-1)} =$$

$$= \left\{ \int_0^h \left(\frac{r}{r-s}\right)^{r-1} \sum_{m=0}^{r-1} \binom{r-1}{m} (-1)^{r+m} f\left(x + \frac{r-s}{r}t_r + m\frac{r-s}{r}h\right) dt_r \right\}$$

$$= \int_0^h \left(\frac{r}{r-s}\right)^{r-1} \Delta^{r-1}_{\frac{r-s}{r}h} f\left(x + \frac{r-s}{r}t_r\right) dt_r$$

$$= \int_0^{\frac{r-s}{r}h} \left(\frac{r}{r-s}\right)^{r-1} \Delta^{r-1}_{\frac{r-s}{r}h} f(x+t)\,dt$$

bulunur. Bu eşitlik ve Tanım 3.1.5 göz önüne alınırsa

$$f^{(r-1)}_{r,\delta}(x) = \frac{2}{\delta}\int_{\delta/2}^{\delta} \frac{1}{h^r}\left\{\sum_{s=0}^{r-1}(-1)^{r+s+1}\binom{r}{s}\int_0^{\frac{r-s}{r}h}\left(\frac{r}{r-s}\right)^{r}\Delta^{r-1}_{\frac{r-s}{r}h} f(x+t)\,dt\right\}dh$$

$$= \frac{2}{\delta}\int_{\delta/2}^{\delta} \frac{1}{h^r}\left\{\sum_{s=0}^{r-1}\int_0^{\frac{r-s}{r}h}(-1)^{r+s+1}\binom{r}{s}\left(\frac{r}{r-s}\right)^{r}\Delta^{r-1}_{\frac{r-s}{r}h} f(t)\,dt\right\}dh. \tag{3.2}$$

Elde edilen (3.2) eşitliğinin her iki tarafında birinci mertebeden türev alındığında

$$f^{(r)}_{r,\delta}(x) = \frac{2}{\delta}\int_{\delta/2}^{\delta} \frac{1}{h^r}\left\{\sum_{s=0}^{r-1}(-1)^{r+s+1}\binom{r}{s}\left(\frac{r}{r-s}\right)^{r}\Delta^{r}_{\frac{r-s}{r}h} f(x)\right\}dh$$

bulunur. Bu eşitlikte $t := \frac{r-s}{r}h$ dönüşümü yapıldığında

$$\left|f^{(r)}_{r,\delta}(x)\right| \le \frac{2^{r+1}}{\delta^r}\sum_{s=0}^{r-1}\binom{r}{s}\left(\frac{r}{r-s}\right)^{r}\left|\frac{1}{\delta}\int_{\delta/2}^{\delta}\Delta^{r}_{\frac{r-s}{r}h} f(x)\,dh\right|$$

$$= \frac{2^{r+1}}{\delta^r}\sum_{s=0}^{r-1}\binom{r}{s}\left(\frac{r}{r-s}\right)^{r}\left|\frac{1}{\frac{r-s}{r}\delta}\int_{\frac{r-s}{r}(\delta/2)}^{\frac{r-s}{r}\delta}\Delta^{r}_{t} f(x)\,dt\right|$$

$$\le \frac{2^{r+1}}{\delta^r}\sum_{s=0}^{r-1}\binom{r}{s}\left(\frac{r}{r-s}\right)^{r}\left\{\left|\frac{1}{\frac{r-s}{r}\delta}\int_0^{\frac{r-s}{r}\delta}\Delta^{r}_{t} f(x)\,dt\right| + \left|\frac{1}{\frac{r-s}{r}\delta}\int_0^{\frac{r-s}{r}(\delta/2)}\Delta^{r}_{t} f(x)\,dt\right|\right\}$$

olduğundan Önerme 3.1.2 uygulanarak

$$\left\|f^{(r)}_{r,\delta}\right\|_{p(\cdot)} \le 2c(r)\delta^{-r}\Omega_r(f,\delta)_{p(\cdot)} \tag{3.3}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik vurgular ki $f^{(r)}_{r,\delta} \in L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ dir.

$f_{r,\delta}^{(r-1)}$ Steklov ortalama değer fonksiyonu $[0,2\pi]$ aralığında mutlak sürekli bir fonksiyondur. Gerçekten Teorem 2.2.7 göz önüne alınarak $f\in L^{p(\cdot)}([0,2\pi])\subset L^{1}([0,2\pi])$ ve $L^{1}([0,2\pi])$ uzayı ötelemeye göre invaryant olduğundan

$$\Delta^{*}(t):=(-1)^{r+s}\binom{r}{s}\left(\frac{r}{r-s}\right)^{r}\Delta_{\frac{r-s}{r}h}^{r}f(t)\in L^{1}([0,2\pi])$$

olur ve böylece

$$\mathcal{F}_{r,h}(x):=\sum_{s=0}^{r-1}\int_{x}^{x+\frac{r-s}{r}h}\Delta^{*}(t)dt,\quad \frac{\delta}{2}\leq h\leq\delta \tag{3.4}$$

fonksiyonu $[0,2\pi]$ aralığında mutlak süreklidir. Yani her $\varepsilon>0$ için bir $\delta(\varepsilon)$ sayısı vardır öyle ki $[a_k,b_k]\subset[0,2\pi]$, $k=1,2,...,n$ olacak şekilde ayrık her alt aile için $\sum_{k=1}^{n}|b_k-a_k|\leq\delta(\varepsilon)$ olduğunda $\sum_{k=1}^{n}\left|\mathcal{F}_{r,h}(b)_k-\mathcal{F}_{r,h}(a_k)\right|\leq\varepsilon$ olur. Özel durumda Tanım 3.1.5 dikkate alınarak $\varepsilon\delta^{r}/2^{r}$ seçilirse (3.2) ve (3.4) eşitliklerinden

$$\sum_{k=1}^{n}\left|f_{r,\delta}^{(r-1)}(b_k)-f_{r,\delta}^{(r-1)}(a_k)\right|\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{\delta}\int_{\delta/2}^{\delta}\frac{1}{h^{r}}\left|\mathcal{F}_{r,h}(b_k)-\mathcal{F}_{r,h}(a_k)\right|dh$$

$$\leq\frac{2}{\delta}\int_{\delta/2}^{\delta}\frac{1}{h^{r}}\sum_{k=1}^{n}\left|\mathcal{F}_{r,h}(b_k)-\mathcal{F}_{r,h}(a_k)\right|dh\leq\varepsilon\frac{\delta^{r}}{2^{r}}\frac{2}{\delta}\int_{\delta/2}^{\delta}\frac{1}{h^{r}}dh\leq\varepsilon\frac{\delta^{r-1}}{2^{r-1}}\frac{2^{r}}{\delta^{r}}\int_{\delta/2}^{\delta}dh=\varepsilon$$

elde edilir ki böylece $f_{r,\delta}^{(r-1)}$ fonksiyonunun mutlak sürekli olduğu görülür. Ayrıca $f_{r,\delta}^{(r)}\in L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ olduğundan $f_{r,\delta}\in W_{r}^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ ispatlanır. ■

3.1.7 Önerme *Eğer* $f\in W_{k}^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ *ve* $p\in\mathcal{P}([0,2\pi])$ *ise pozitif bir* $c(p,k)$ *sabiti vardır öyle ki her* $n=1,2,3,...$ *ve* $k=1,2,3,...$ *için* $E_n(f)_{p(\cdot)}\leq\frac{c(p)}{n^{k}}E_n\left(f^{(k)}\right)_{p(\cdot)}$ *eşitsizliği sağlanır.*

İspat $T_n^0 \in \Pi_n$, f' fonksiyonuna en iyi yaklaşan trigonometrik polinom olsun. $T_n^0 = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx = a_0 + r(x)$ yazılabilir. $r(x)$, n dereceli bir trigonometrik polinom olduğundan $s(x) = \int_{-\pi}^{x} r(t)dt$ ifadesi n dereceli bir trigonometrik polinom belirtir. Böylece herhangi bir n dereceli T_n trigonometrik polinomu için geçerli olan $E_n(f)_{p(\cdot)} \leq \|f - (T_n + s)\|_{p(\cdot)} = \|(f - s) - T_n\|_{p(\cdot)}$ eşitsizliği ve Sonuç 2.3.15 kullanılarak

$$E_n(f)_{p(\cdot)} \leq E_n(f - s)_{p(\cdot)} = \frac{c}{n}\|f' - r\|_{p(\cdot)}$$

$$\leq \frac{c}{n}\left(\|f' - T_n^0\|_{p(\cdot)} + \|a_0\|_{p(\cdot)}\right) = \frac{c}{n}\left(E_n(f')_{p(\cdot)} + \|a_0\|_{p(\cdot)}\right) \tag{3.5}$$

elde edilir. f, 2π periyodik fonksiyonu için $\int_{-\pi}^{\pi} f'(\tau)d\tau = f(\pi) - f(-\pi) = 0$ olduğu dikkate alınırsa

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi}(f' - r)d\tau = \int_{-\pi}^{\pi}(f' - T_n^0 + a_0)d\tau = \int_{-\pi}^{\pi}(f' - T_n^0)d\tau + a_0\int_{-\pi}^{\pi} d\tau$$

eşitliğinin geçerli olduğu görülür. Bu son eşitlikten elde edilir ki

$$\|a_0\|_{p(\cdot)} \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\|T_n^0 - f'\|_{p(\cdot)} d\tau = E_n(f')_{p(\cdot)}. \tag{3.6}$$

(3.5) ve (3.6) eşitsizlikleri bir araya getirilerek $E_n(f)_{p(\cdot)} \leq \frac{c(p)}{n} E_n(f')_{p(\cdot)}$ bulunur.

Bu son eşitsizlik kullanılarak $E_n(f)_{p(\cdot)} \leq \frac{c(p)}{n^k} E_n\left(f^{(k)}\right)_{p(\cdot)}$ ifadesine ulaşılır. ■

Önerme 3.1.7, [52] çalışmasında ve ayrıca $\mathcal{P}^0([0, 2\pi])$ koşulu altında $k \in \mathbb{R}^+$ olduğu durumda [27] çalışmasında verilmiştir.

3.2 $L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ Değişken Üslü Lebesgue Uzaylarında Yaklaşım Teorisinin Düz ve Ters Teoremleri

3.2.1 Teorem $p\in\mathcal{P}([0,2\pi])$, $r=1,2,3,...$ *olsun. Pozitif bir* $c(p,r)$ *sabiti vardır öyle ki her* $f\in L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ *ve* $n=1,2,3,...$ *için*

$$E_n(f)_{p(\cdot)}\le c(p,r)\Omega_r(f,1/n)_{p(\cdot)}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat $f\in L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ ve $p\in\mathcal{P}([0,2\pi])$ olsun. $h>0$ ve $r=1,2,3,...$ için Tanım 3.1.5 kullanılarak

$$\left|f_{r,\delta}(x)-f(x)\right|=\frac{2}{\delta}\left|\int_{\delta/2}^{\delta}\left\{\frac{1}{h^r}\int_0^h\cdots\int_0^h\Delta^r_{\frac{t_1+\cdots+t_r}{r}}f(x)\,dt_1\cdots dt_r\right\}dh\right|$$

elde edilir ve genelleştirilmiş *Minkowski* eşitsizliği kullanılarak

$$\left\|f_{r,\delta}-f\right\|_{p(\cdot)}\le c_5(p,r)\frac{2}{\delta}\int_{\delta/2}^{\delta}\left\{\frac{1}{h^{r-1}}\int_0^h\cdots\int_0^h\left\|\frac{1}{h}\int_0^h\Delta^r_{\frac{t_1+\cdots+t_r}{r}}fdt_1\right\|_{p(\cdot)}dt_2\cdots dt_r\right\}dh$$

$$=c_5(p,r)\frac{2}{\delta}\int_{\delta/2}^{\delta}\left\{\frac{1}{h^{r-1}}\int_0^h\cdots\int_0^h\left\|\frac{1}{h}\int_{t_2+\cdots+t_r}^{h+t_2+\cdots+t_r}\Delta^r_{\frac{t}{r}}fdt\right\|_{p(\cdot)}dt_2\cdots dt_r\right\}dh \qquad (3.7)$$

olduğu görülür.

$$\left\|\frac{1}{h}\int_{t_2+\cdots+t_r}^{h+t_2+\cdots+t_r}\Delta^r_{\frac{t}{r}}fdt\right\|_{p(\cdot)}=\left\|\frac{1}{h}\left(\int_0^{h+t_2+\cdots+t_r}\Delta^r_{\frac{t}{r}}fdt-\int_0^{t_2+\cdots+t_r}\Delta^r_{\frac{t}{r}}fdt\right)\right\|_{p(\cdot)}$$

$$\le\left\|\frac{1}{(h+t_2+\cdots+t_r/r)}\int_0^{(h+t_2+\cdots+t_r/r)}\Delta^r_t fdt\right\|_{p(\cdot)}+\left\|\frac{1}{(t_2+\cdots+t_r/r)}\int_0^{(t_2+\cdots+t_r/r)}\Delta^r_t fdt\right\|_{p(\cdot)}$$

$$\leq \sup_{(h+t_2+\cdots+t_r/r)\leq\delta}\left\|\frac{1}{(h+t_2+\cdots+t_r/r)}\int_0^{(h+t_2+\cdots+t_r/r)}\Delta_t^r f dt\right\|_{p(\cdot)}$$

$$+\sup_{(t_2+\cdots+t_r/r)\leq\delta}\left\|\frac{1}{(t_2+\cdots+t_r/r)}\int_0^{(t_2+\cdots+t_r/r)}\Delta_t^r f dt\right\|_{p(\cdot)}$$

$$=\Omega_r(f,\delta)_{p(\cdot)}+\Omega_r(f,\delta)_{p(\cdot)}=2\Omega_r(f,\delta)_{p(\cdot)} \tag{3.8}$$

olduğundan (3.8) değerlendirmesi (3.7) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\left\|f_{r,\delta}-f\right\|_{p(\cdot)}\leq c_6(p,r)\frac{2}{\delta}\int_{\delta/2}^{\delta}\left\{\frac{1}{h^{r-1}}\int_0^h\cdots\int_0^h\Omega_r(f,\delta)_{p(\cdot)}\,dt_2\cdots dt_r\right\}dh$$

$$\leq c_6(p,r)\Omega_r(f,\delta)_{p(\cdot)}\frac{2}{\delta}\int_{\delta/2}^{\delta}dh= c_6(p,r)\Omega_r(f,\delta)_{p(\cdot)}. \tag{3.9}$$

(2.8) eşitziliği, $n=1,2,3,...$ için $\delta:=1/n$ alındığında (3.9) eşitsizliği ve (3.3) eşitsizliği, Sonuç 2.3.15 kullanılarak hesaplanabilir ki

$$E_n(f)_{p(\cdot)}\leq E_n\left(f-f_{r,1/n}\right)_{p(\cdot)}+E_n\left(f_{r,1/n}\right)_{p(\cdot)}$$

$$\leq\left\|f-f_{r,1/n}\right\|_{p(\cdot)}+\frac{c_7(p)}{n^r}\left\|f_{r,1/n}^{(r)}\right\|_{p(\cdot)}$$

$$\leq c_8(p,r)\Omega_r(f,1/n)_{p(\cdot)}+\frac{c_9(p,r)}{n^r}n^r\Omega_r(f,1/n)_{p(\cdot)}$$

$$\leq c(p,r)\Omega_r(f,1/n)_{p(\cdot)}. \qquad \blacksquare$$

Bu teorem, ilk olarak [50]'de ifade edilmiş, [51] çalışmasında ispatlanmıştır, $\Omega_r(f,\cdot)_{p(\cdot)}$'ye denk olan farklı bir düzgünlük modülü kullanılarak [52] çalışmasında, $r=1$ olduğu durumda ise [28] çalışmasında ispatlanmıştır. Ayrıca bu teorem $p\in\mathcal{P}^0([0,2\pi])$ koşulu altında farklı biçimde tanımlanan kesirli mertebeden düzgünlük modülleri kullanılarak ağırlıksız ve ağırlıklı değişken üslü *Lebesgue* uzaylarında sırasıyla [27] ve [24] çalışmalarında elde edilmiştir.

3.2.2 Teorem *$p \in \mathcal{P}([0,2\pi])$, $r = 1,2,3,...$ olsun. Pozitif bir $c(p,r)$ sabiti vardır öyle ki her $f \in L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ ve $n = 1,2,3,...$ için*

$$\Omega_r(f,1/n)_{p(\cdot)} \leq \frac{c(p,r)}{n^r}\sum_{k=0}^{n}(k+1)^{r-1}E_k(f)_{p(\cdot)}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat $f \in L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$, $p \in \mathcal{P}([0,2\pi])$ ve T_n ,f fonksiyonuna en iyi yaklaşan n dereceli trigonometrik polinom olsun. Verilen bir n için m, $2^m \leq n < 2^{m+1}$ koşulunu sağlayan bir tamsayı olsun. (3.1) eşitsizliğinden

$$\Omega_r(f,1/n)_{p(\cdot)} \leq \Omega_r\left(f - T_{2^{m+1}},1/n\right)_{p(\cdot)} + \Omega_r\left(T_{2^{m+1}},1/n\right)_{p(\cdot)} \tag{3.10}$$

yazılır. Ayrıca en iyi yaklaşım sayısı için [39, sayfa 209] ’dan bilinen

$$2^{(i+1)j}E_{2^i}(f)_{p(\cdot)} \leq 2^{2j}\sum_{\mu=2^{i-1}+1}^{2^i}\mu^{j-1}E_\mu(f)_{p(\cdot)} \tag{3.11}$$

eşitsizliği kullanılarak elde edilir ki

$$\begin{aligned}\Omega_r\left(f - T_{2^{m+1}},1/n\right)_{p(\cdot)} &\leq c(p,r)\left\|f - T_{2^{m+1}}\right\|_{p(\cdot)} = c(p,r)E_{2^{m+1}}(f)_{p(\cdot)} \\ &\leq c(p,r)\frac{2^{(m+1)r}}{n^r}E_{2^m}(f)_{p(\cdot)} \leq \frac{c(p,r)}{n^r}2^{2r}\sum_{k=2^{m-1}+1}^{2^m}k^{r-1}E_k(f)_{p(\cdot)}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Diğer yandan Önerme 3.1.4 , Teorem 2.3.10 ve (3.11) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}\Omega_r\left(T_{2^{m+1}},1/n\right)_{p(\cdot)} &\leq \frac{c(p,r)}{n^r}\left\|T_{2^{m+1}}^{(r)}\right\|_{p(\cdot)} \\ &= \frac{c(p,r)}{n^r}\left\|T_1^{(r)} + \sum_{\nu=0}^{m}\left(T_{2^{\nu+1}}^{(r)} - T_{2^\nu}^{(r)}\right)\right\|_{p(\cdot)} \\ &\leq \frac{c(p,r)}{n^r}\left(\left\|T_1^{(r)}\right\|_{p(\cdot)} + \left\|\sum_{\nu=0}^{m}\left(T_{2^{\nu+1}}^{(r)} - T_{2^\nu}^{(r)}\right)\right\|_{p(\cdot)}\right) \\ &\leq \frac{c_{10}(p,r)}{n^r}\left(\left\|T_1^{(r)}\right\|_{p(\cdot)} + \sum_{\nu=0}^{m}2^{(\nu+1)}\left\|T_{2^{\nu+1}}^{(r)} - T_{2^\nu}^{(r)}\right\|_{p(\cdot)}\right)\end{aligned}$$

$$\leq \frac{c_{11}(p,r)}{n^r}\left(E_0(f)_{p(\cdot)} + \sum_{\nu=0}^{m} 2^{(\nu+1)} E_{2^\nu}(f)_{p(\cdot)}\right)$$

$$= \frac{c_{11}(p,r)}{n^r}\left(E_0(f)_{p(\cdot)} + 2^r E_1(f)_{p(\cdot)} + \sum_{\nu=1}^{m} 2^{(\nu+1)} E_{2^\nu}(f)_{p(\cdot)}\right)$$

$$\leq \frac{c_{11}(p,r)}{n^r}\left(E_0(f)_{p(\cdot)} + 2^r E_1(f)_{p(\cdot)} + 2^{2r}\sum_{\nu=1}^{m}\sum_{k=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} k^{r-1} E_k(f)_{p(\cdot)}\right)$$

$$\leq \frac{c_{12}(p,r)}{n^r}\left(E_0(f)_{p(\cdot)} + \sum_{k=1}^{2^m} k^{r-1} E_k(f)_{p(\cdot)}\right) \tag{3.13}$$

olduğu görülür. Son olarak (3.10) , (3.12) ve (3.13) eşitsizlikleri bir araya getirilerek

$$\Omega_r(f,1/n)_{p(\cdot)} \leq \frac{c_{13}(p,r)}{n^r}\left\{\sum_{k=2^{m-1}+1}^{2^m} k^{r-1} E_k(f)_{p(\cdot)} + E_0(f)_{p(\cdot)} + \sum_{k=1}^{2^m} k^{r-1} E_k(f)_{p(\cdot)}\right\}$$

$$\leq \frac{c_{14}(p,r)}{n^r}\left\{\sum_{k=1}^{2^m} k^{r-1} E_k(f)_{p(\cdot)} + E_0(f)_{p(\cdot)}\right\}$$

$$\leq \frac{c(p,r)}{n^r}\sum_{k=0}^{n}(k+1)^{r-1} E_k(f)_{p(\cdot)}. \quad \blacksquare$$

Bu teorem, ilk olarak [50] çalışmasında ifade edilmiş, [51] çalışmasında ispatlanmıştır ve $\Omega_r(f,\cdot)_{p(\cdot)}$'ye denk olan farklı bir düzgünlük modülü kullanılarak [52] çalışmasında, $r=1$ olduğu durumda ise [25] çalışmasında ispatlanmıştır. Ayrıca bu teoremin benzeri $p \in \mathcal{P}^0([0,2\pi])$ koşulu altında farklı biçimde tanımlanan kesirli mertebeden düzgünlük modülleri kullanılarak ağırlıksız ve ağırlıklı değişken üslü *Lebesgue* uzaylarında sırasıyla [27] ve [24] çalışmalarında elde edilmiştir.

Önerme 3.1.7 ile Teorem 3.2.1 birleştirilerek Sonuç 3.2.3 ve Teorem 2.3.13 ile Teorem 3.2.1 birleştirilerek Sonuç 3.2.4 elde edilir.

3.2.3 Sonuç *$p \in \mathcal{P}([0,2\pi])$ ve $k=1,2,3,...$ olsun. Pozitif bir $c(p,r)$ sabiti vardır öyle ki her $f \in W_k^{p(\cdot)}([0,2\pi])$, $n=1,2,3,...$ ve $r=1,2,3,...$ için*

$$E_n(f)_{p(\cdot)} \leq \frac{c(p,r)}{n^k}\Omega_r\left(f^{(k)},1/n\right)_{p(\cdot)}$$

eşitsizliği sağlanır.

Bu sonuç $r=1$ olduğu özel durumda [48] çalışmasında, farklı bir düzgünlük modülü yardımı ile [52] çalışmasında ispatlanmış ve $p \in \mathcal{P}^0([0,2\pi])$ koşulu altında ağırlıklı değişken üslü *Lebesgue* uzaylarında [23] çalışmasında ifade edilmiştir.

3.2.4 Sonuç *Eğer $f \in W_k^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ ve $p \in \mathcal{P}([0,2\pi])$ ise pozitif bir $c(p,k)$ sabiti vardır öyle ki her $n=1,2,3,...$ ve $r=1,2,3,...$ için*

$$\left\|f - V_n(f)\right\|_{p(\cdot)} \leq \frac{c(p,k)}{n^k}\Omega_r\left(f^{(k)},1/n\right)_{p(\cdot)}$$

eşitsizliği sağlanır.

3.3 $Lip^{p(\cdot),\alpha}$ Genelleşmiş Değişken Üslü Lipschitz Sınıflarının Konstrüktif Karakterizasyonu

En iyi yaklaşım hatasının bir düzgünlük modülü ile üstten değerlendirildiği ifadeler yaklaşım teorisinin düz teoremleridir. Bu tarz teoremler belirli bir sınıfa ait f fonksiyonun düzgünlüğü arttıkça bu fonksiyona polinomlar ile yaklaşım hatasının sıfıra gitme hızının artması gerektiğini vurgular. Bu durumun tersi olarak bir f fonksiyonuna polinomlar ile en iyi yaklaşımın hatası yeterince büyük bir hızla sıfıra gidiyorsa bu fonksiyonun ait olduğu sınıfın belirlendiği teoremler yaklaşım teorisin ters teoremleridir. Yaklaşım teorisinde en ideal sonuç düz ve ters teoremlerin eşlenerek fonksiyonun ait olduğu sınıfın, en iyi yaklaşım hatasının sıfıra gitme hızı ile karakterize edilmesidir. Bahsedilen bu ideal durum yaklaşım teorisinde *konstrüktif karakterizasyon* olarak isimlendirilir. Bu bölümde değişken üslü *Lebesgue* uzaylarına ait fonksiyonların *Lipschitz* sınıfı tanımlanmış, Teorem 3.2.1 ve Teorem 3.2.2 yardımı ile bu sınıfın konstrüktif karaterizasyonu oluşturulmuştur. Teorem 3.2.2 yardımı ile aşağıdaki sonuç elde edilir.

3.3.1 Sonuç $p \in \mathcal{P}([0,2\pi])$ *ve* $r = 1,2,3,...$ *olsun. Eğer* $f \in L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ *ve* $n = 1,2,3,...$ *için* $E_n(f)_{p(\cdot)} = \mathcal{O}(n^{-\alpha})$, $\alpha>0$, *ise*

$$\Omega_r(f,\delta)_{p(\cdot)} = \begin{cases} \mathcal{O}(\delta^{\alpha}) & , r > \alpha \\ \mathcal{O}(\delta^{\alpha} \log(1/\delta)), & r = \alpha \\ \mathcal{O}(\delta^{r}) & , r < \alpha. \end{cases}$$

3.3.2 Tanım $\alpha > 0$ *ve* $r := [\![\alpha]\!] + 1$ *için*

$$Lip^{p(\cdot),\alpha} := \left\{ f \in L^{p(\cdot)}([0,2\pi]) : \Omega_r(f,\delta)_{p(\cdot)} = \mathcal{O}(\delta^{\alpha}),\ \delta>0 \right\}$$

ifadesine $L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ ***uzayındaki genelleşmiş değişken üslü Lipschitz sınıfı*** *denir.*

3.3.3 Sonuç $p \in \mathcal{P}([0,2\pi])$ *ve* $r = 1,2,3,...$ *olsun. Eğer* $f \in L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ *ve* $n = 1,2,3,...$ *için* $E_n(f)_{p(\cdot)} = \mathcal{O}(n^{-\alpha})$, $\alpha>0$ *ise* $f \in Lip^{p(\cdot),\alpha}$.

Teorem 3.2.1 yardımı ile aşağıdaki sonuç elde edilir.

3.3.4 Sonuç *Eğer* $f \in Lip^{p(\cdot),\alpha}$, $\alpha > 0$ *ve* $p \in \mathcal{P}([0,2\pi])$ *ise o zaman* $E_n(f)_{p(\cdot)} = \mathcal{O}(n^{-\alpha})$, $n = 1,2,3,....$ *olur.*

Sonuç 3.3.3 ve Sonuç 3.3.4 bir araya getirilerek aşağıdaki sonuç elde edilir.

3.3.5 Sonuç $f \in L^{p(\cdot)}\left([0,2\pi]\right)$, $p \in \mathcal{P}\left([0,2\pi]\right)$ *ve* $\alpha > 0$ *olsun. O zaman*

$$i)\ f \in Lip^{p(\cdot),\alpha},$$
$$ii)\ E_n\left(f\right)_{p(\cdot)} = \mathcal{O}\left(n^{-\alpha}\right),\ n = 1,2,3,...$$

ifadeleri denktir.

4. DEĞİŞKEN ÜSLÜ LEBESGUE UZAYLARINDA TRİGONOMETRİK POLİNOMLAR İLE EŞ ZAMANLI YAKLAŞIM

4.1 Bazı Yardımcı Sonuçlar

4.1.1 Önerme *$f \in L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$, $p \in \mathcal{P}([0,2\pi])$ ve T_n, n dereceli trigonometrik polinom olsun. Eğer $\|f - T_n\|_{p(\cdot)} \le M_n$ ve $r = 1,2,...$ için $\left\|T_n^{(r)}\right\|_{p(\cdot)} \le N_n$ koşullarını sağlayan $\{M_n\}$ ve $\{N_n\}$ reel sayı dizileri varsa, bir $c(p) > 0$ sabiti vardır öyle ki $n = 1,2,...$ için $\Omega_r(f,1/n)_{p(\cdot)} \le c(p)\{M_n + n^r N_n\}$ eşitsizliği sağlanır.*

İspat (3.1) eşitsizliği, Önerme 3.1.4 ve Önerme 3.1.2 'den görülür ki

$$\Omega_r(f,1/n)_{p(\cdot)} \le c_{14}(p)\|f - T_n\|_{p(\cdot)} + c(p)n^r\|T_n\|_{p(\cdot)} \le c(p)\{M_n + n^r N_n\}. \ \blacksquare$$

4.1.2 Önerme *$f \in L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ ve $p \in \mathcal{P}([0,2\pi])$ olsun. Eğer T_n^0, f fonksiyonuna en iyi yaklaşan n dereceli trigonometrik polinom ise pozitif bir $c(p,k)$ sabiti vardır öyle ki her $n,k = 1,2,3,...$ için $\left\|\left(T_n^0\right)^{(k)}\right\|_{p(\cdot)} \le c(p,k)\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} E_\nu(f)_{p(\cdot)}$ eşitsizliği sağlanır.*

İspat T_n^0 , f fonksiyonuna en iyi yaklaşan n dereceli trigonometrik polinom olsun. $2^{m-1} \le n < 2^m$ şartını sağlayan m tamsayısı için $\{n_j\}$, $j = 1,2,...,m-1$

dizisini $n_0=0$, $n_j=2^j$ ve $n_m=n$ olacak şekilde oluşturalım. Teorem 2.3.10 ve (3.11) eşitsizliğinden görülür ki

$$\left\|\left(T_n^0\right)^{(k)}\right\|_{p(\cdot)}=\left\|\left\{\sum_{j=1}^{m}\left(T_{n_j}^0\right)-\left(T_{n_{j-1}}^0\right)\right\}^{(k)}\right\|_{p(\cdot)}$$

$$\leq\sum_{j=1}^{m}\left\|\left(T_{n_j}^0\right)^{(k)}-\left(T_{n_{j-1}}^0\right)^{(k)}\right\|_{p(\cdot)}$$

$$\leq 2\sum_{j=1}^{m}n_j^k E_{n_{j-1}}\left(f\right)_{p(\cdot)}$$

$$\leq c\left(p\right)\left\{2^k E_0\left(f\right)_{p(\cdot)}+\sum_{j=2}^{m-1}2^{jk}E_{n_{j-1}}\left(f\right)_{p(\cdot)}+n_m^k E_{n_{m-1}}\left(f\right)_{p(\cdot)}\right\}$$

$$\leq c\left(p\right)\left\{2^k E_0\left(f\right)_{p(\cdot)}+\sum_{j=2}^{m-1}2^{jk}E_{n_{j-1}}\left(f\right)_{p(\cdot)}+2^{mk}E_{n_{m-1}}\left(f\right)_{p(\cdot)}\right\}$$

$$\leq c\left(p\right)\left\{2^k E_0\left(f\right)_{p(\cdot)}+\sum_{j=1}^{m-1}2^{(j+1)k}E_{2^j}\left(f\right)_{p(\cdot)}\right\}$$

$$\leq c\left(p\right)\left\{2^k E_0\left(f\right)_{p(\cdot)}+\sum_{j=1}^{m-1}2^{2k}\sum_{\nu=2^{j-1}+1}^{2^j}\nu^{k-1}E_{\nu}\left(f\right)_{p(\cdot)}\right\}$$

$$\leq c\left(p\right)\left\{2^{2k}E_0\left(f\right)_{p(\cdot)}+2^{2k}\sum_{\nu=1}^{2^{m-1}}\nu^{k-1}E_{\nu}\left(f\right)_{p(\cdot)}\right\}$$

$$\leq c\left(p,k\right)\left\{E_0\left(f\right)_{p(\cdot)}+\sum_{\nu=1}^{2^{m-1}}\nu^{k-1}E_{\nu}\left(f\right)_{p(\cdot)}\right\}$$

$$\leq c\left(p,k\right)\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k-1}E_{\nu}\left(f\right)_{p(\cdot)}. \qquad \blacksquare$$

4.2 $L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ Değişken Üslü Lebesgue Uzaylarında Eş Zamanlı Yaklaşım Teoremleri

4.2.1 Teorem *$p \in \mathcal{P}([0,2\pi])$ olsun. Eğer T_n^*, f fonksiyonuna hemen hemen en iyi yaklaşan n dereceli trigonometrik polinom ise pozitif bir $c(p,k)$ sabiti vardır öyle ki her $f \in W_k^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ ve $n=1,2,3,...$ için*

$$\left\| f^{(k)} - \left(T_n^*\right)^{(k)} \right\|_{p(\cdot)} \le c(p,k) E_n\left(f^{(k)}\right)_{p(\cdot)}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat $f \in W_k^{p(\cdot)}([0,2\pi])$, $p \in \mathcal{P}([0,2\pi])$ olsun. $T_n^0(f)$, $T_n^*(f) \in \Pi_n$ sırasıyla f fonksiyonuna en iyi yaklaşan ve hemen hemen en iyi yaklaşan trigonometrik polinomlar olsun. *Minkowski* eşitsizliğine göre

$$\left\| f^{(k)} - \left(T_n^*\right)^{(k)} \right\|_{p(\cdot)} \le \left\| f^{(k)} - V_n\left(f^{(k)}\right) \right\|_{p(\cdot)} + \left\| \left(T_n^*\right)^{(k)}\left(V_n(f)\right) - \left(T_n^*\right)^{(k)}(f) \right\|_{p(\cdot)}$$

$$+ \left\| V_n\left(f^{(k)}\right) - \left(T_n^*\right)^{(k)}\left(V_n(f)\right) \right\|_{p(\cdot)} := I_1 + I_2 + I_3.$$

(2.9) eşitsizliği kullanılarak

$$I_1 = \left\| f^{(k)} - V_n\left(f^{(k)}\right) \right\|_{p(\cdot)}$$

$$\le \left\| f^{(k)} - T_n^0\left(f^{(k)}\right) \right\|_{p(\cdot)} + \left\| T_n^0\left(f^{(k)}\right) - V_n\left(f^{(k)}\right) \right\|_{p(\cdot)}$$

$$= E_n\left(f^{(k)}\right)_{p(\cdot)} + \left\| V_n\left(T_n^0\left(f^{(k)}\right)\right) - V_n\left(f^{(k)}\right) \right\|_{p(\cdot)}$$

$$= E_n\left(f^{(k)}\right)_{p(\cdot)} + \left\| V_n\left(T_n^0\left(f^{(k)}\right) - f^{(k)}\right) \right\|_{p(\cdot)}$$

$$\le E_n\left(f^{(k)}\right)_{p(\cdot)} + c_{15}(p) \left\| T_n^0\left(f^{(k)}\right) - f^{(k)} \right\|_{p(\cdot)} \le c_{16}(p) E_n\left(f^{(k)}\right)_{p(\cdot)}$$

olup Teorem 2.3.10, Teorem 2.3.3 ve Önerme 3.1.7'den

$$I_2=\left\|\left(T_n^*\right)^{(k)}\left(V_n(f)\right)-\left(T_n^*\right)^{(k)}(f)\right\|_{p(\cdot)}$$

$$\leq c_{17}(p)n^k\left\|\left(T_n^*\right)\left(V_n(f)\right)-\left(T_n^*\right)(f)\right\|_{p(\cdot)}$$

$$\leq c_{17}(p)n^k\left\{\left\|\left(T_n^*\right)\left(V_n(f)\right)-V_n(f)\right\|_{p(\cdot)}+\left\|V_n(f)-f\right\|_{p(\cdot)}+\left\|f-\left(T_n^*\right)(f)\right\|_{p(\cdot)}\right\}$$

$$\leq c_{17}(p)n^k\left\{c(p)E_n\left(V_n(f)\right)_{p(\cdot)}+\left\|V_n(f)-f\right\|_{p(\cdot)}+c(p)E_n(f)_{p(\cdot)}\right\}$$

$$\leq c_{17}(p)n^k\left\{c(p)E_n\left(V_n(f)\right)_{p(\cdot)}+\frac{c(p)}{n^k}E_n\left(f^{(k)}\right)_{p(\cdot)}+\frac{c(p)}{n^k}E_n\left(f^{(k)}\right)_{p(\cdot)}\right\}$$

ifadesine ulaşılır. Ayrıca Önerme 3.1.7 ve Teorem 2.3.13 uygulandığında

$$E_n\left(V_n(f)\right)_{p(\cdot)}\leq\left\|V_n(f)-T_n^0(f)\right\|_{p(\cdot)}$$

$$\leq\left\|V_n(f)-f\right\|_{p(\cdot)}+\left\|f-T_n^0(f)\right\|_{p(\cdot)}$$

$$\leq\frac{c_{18}(p,k)}{n^k}E_n\left(f^{(k)}\right)_{p(\cdot)} \tag{4.1}$$

olduğu görülür ki böylece $I_2\leq c(p,k)E_n\left(f^{(k)}\right)_{p(\cdot)}$ elde edilir. Son olarak *de la Vallée-Poussin* ortalamasının $2n-1$ dereceli bir trigonometrik polinom olduğu dikkate alınıp I_3 ifadesine Teorem 2.3.10 ve ardından (4.1) eşitsizliği uygulandığında

$$I_3=\left\|V_n\left(f^{(k)}\right)-\left(T_n^*\right)^{(k)}\left(V_n(f)\right)\right\|_{p(\cdot)}$$

$$=\left\|\left(V_n(f)\right)^{(k)}-\left(T_n^*\right)^{(k)}\left(V_n(f)\right)\right\|_{p(\cdot)}$$

$$\leq c(p)(2n-1)^k\left\|\left(V_n(f)\right)-T_n^*\left(V_n(f)\right)\right\|_{p(\cdot)}$$

$$\leq c_{19}(p)(2n-1)^k E_n\left(V_n(f)\right)_{p(\cdot)}$$

$$\leq c_{19}(p,k)\frac{(2n-1)^k}{n^k}E_n\left(f^{(k)}\right)_{p(\cdot)}\leq c_{20}(p,k)E_n\left(f^{(k)}\right)_{p(\cdot)}$$

olur. Böylece $\left\| f^{(k)} - \left(T_n^*\right)^{(k)} \right\|_{p(\cdot)} \le I_1 + I_2 + I_3 \le c(p,k) E_n\left(f^{(k)}\right)_{p(\cdot)}$ elde edilir. ■

Teorem 4.2.1 ilk olarak [53] çalışmasında ifade edilmiştir ve detaylı ispatı [54] çalışmasında bulunmaktadır. Bu teorem bağımsız olarak [52] çalışmasında da ispatlanmıştır. Bu teorem $k \in \mathbb{R}^+$ ve $p \in \mathcal{P}^0([0,2\pi])$ koşulu altında ağırlıksız ve ağırlıklı değişken üslü *Lebesgue* uzaylarında, sırasıyla [27] ve [24] çalışmalarında ispatlanmıştır.

4.2.2 Teorem *$f \in W_k^{p(\cdot)}([0,2\pi])$, $p \in \mathcal{P}([0,2\pi])$ ve $r = 1,2,3,...$ olsun. Eğer bir $T_n \in \Pi_n$ trigonometrik polinomu için*

$$\left\| f - T_n \right\|_{p(\cdot)} \le \frac{c(p,r)}{n^k} \Omega_r\left(f^{(k)}, 1/n\right)_{p(\cdot)}, \quad n = 1,2,...$$

ise pozitif bir $c(p,k,r)$ sabiti vardır öyle ki $m = 0,1,2,...,k$ için

$$\left\| f^{(m)} - T_n^{(m)} \right\|_{p(\cdot)} \le \frac{c(p,k,r)}{n^{k-m}} \Omega_r\left(f^{(k)}, 1/n\right)_{p(\cdot)}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat $f \in W_k^{p(\cdot)}([0,2\pi])$, $p \in \mathcal{P}([0,2\pi])$ olsun. T_n^0, f fonksiyonuna en iyi yaklaşan n dereceli trigonometrik polinom olsun. Her $m = 1,2,...$ için

$$\left\| f^{(m)} - T_n^{(m)} \right\|_{p(\cdot)} \le \left\| f^{(m)} - \left(T_n^0\right)^{(m)} \right\|_{p(\cdot)} + \left\| \left(T_n^0\right)^{(m)} - T_n^{(m)} \right\|_{p(\cdot)} \tag{4.2}$$

olur. Teorem 4.2.2.'nin şartlarını $T_n^0 \in \Pi_n$ polinomu sağlar. Böylece Teorem 4.2.1, Önerme 3.1.7 ve Teorem 3.2.1 uygulanarak elde edilir ki

$$\left\| f^{(m)} - \left(T_n^0\right)^{(m)} \right\|_{p(\cdot)} \le c(p,k) E_n\left(f^{(m)}\right)_{p(\cdot)}$$

$$\le \frac{c(p,k)}{n^{k-m}} E_n\left(f^{(k)}\right)_{p(\cdot)} \le \frac{c(p,k)}{n^{k-m}} \Omega_r\left(f^{(k)}, 1/n\right)_{p(\cdot)}. \tag{4.3}$$

Diğer yandan, Teorem 2.3.10 ve Sonuç. 3.2.3' ten

$$\left\| \left(T_n^0\right)^{(m)} - T_n^{(m)} \right\|_{p(\cdot)} \leq c_{21}(p) n^m \left\| T_n^0 - T_n \right\|_{p(\cdot)}$$

$$\leq c_{21}(p) n^m \left\{ \left\| T_n - f \right\|_{p(\cdot)} + \left\| f - T_n^0 \right\|_{p(\cdot)} \right\}$$

$$\leq c_{21}(p) n^m \left\{ \frac{c(p,r)}{n^k} \Omega_r \left(f^{(k)}, 1/n \right)_{p(\cdot)} + E_n(f)_{p(\cdot)} \right\}$$

$$\leq \frac{c_{22}(p,r)}{n^{k-m}} \Omega_r \left(f^{(k)}, 1/n \right)_{p(\cdot)} \tag{4.4}$$

bulunur. Son olarak (4.2) , (4.3) ve (4.4) eşitsizlikleri birleştirilerek görülür ki

$$\left\| f^{(m)} - T_n^{(m)} \right\|_{p(\cdot)} \leq \frac{c(p,k,r)}{n^{k-m}} \Omega_r \left(f^{(k)}, 1/n \right)_{p(\cdot)}. \blacksquare$$

Uyarı İspatlanabilir ki Teorem 4.2.2 ifadesi ile verilen değerlendirme sadece n dereceli T_n trigonometrik polinomları için değil, derecesi n' ye denk olan yani sabitlenmiş bir a reel sayısı için $n \leq j \leq an$ koşulunu sağlayan her j dereceli T_j trigonometrik polinomu için de geçerli olur. Bu durum $j = 2n-1$ için dikkate alındığında Sonuç 3.2.4 yardımı ile aşağıdaki teorem elde edilir.

4.2.3 Teorem *$f \in W_k^{p(\cdot)}([0,2\pi])$, $p \in \mathcal{P}([0,2\pi])$ ve $r = 1,2,...$ olsun. O zaman pozitif bir $c(p,k,r)$ sabiti vardır öyle ki $m = 0,1,2,...,k$ için*

$$\left\| f^{(m)} - (V_n)^{(m)}(f) \right\|_{p(\cdot)} \leq \frac{c(p,k,r)}{n^{k-m}} \Omega_r \left(f^{(k)}, 1/n \right)_{p(\cdot)}$$

eşitsizliği sağlanır.

4.2.4 Teorem *Eğer* $f \in W_{r-k}^{p(\cdot)}([0,2\pi])$, $k \le r$ *ve* $p \in \mathcal{P}([0,2\pi])$ *ise pozitif bir* $c(p,r)$ *sabiti vardır öyle ki her* $n = 1,2,3,...$ *için*

$$\Omega_r(f,1/n)_{p(\cdot)} \le \frac{c(p,r)}{n^{r-k}} \left\| f^{(r-k)} \right\|_{p(\cdot)}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat $f \in W_{r-k}^{p(\cdot)}([0,2\pi])$, $k \le r$ ve $p \in \mathcal{P}([0,2\pi])$ olsun. f fonksiyonuna en iyi yaklaşan, n dereceli trigonometrik $T_n^0(f)$ polinomu için Önerme 3.1.4 uygulanırsa

$$\Omega_r\left(T_n^0(f),1/n\right)_{p(\cdot)} \le \frac{c(p,r)}{n^r} \left\| \left(T_n^0(f)\right)^{(r)} \right\|_{p(\cdot)}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğe Teorem 2.3.10 uygulanarak elde edilir ki

$$\Omega_r\left(T_n^0(f),1/n\right)_{p(\cdot)} \le \frac{c(p,r)}{n^r} \left\| \left(T_n^0(f)\right)^{(r)} \right\|_{p(\cdot)} \le \frac{c_{23}(p,r)}{n^{r-k}} \left\| \left(T_n^0(f)\right)^{(r-k)} \right\|_{p(\cdot)}.$$

Böylece, Önerme 3.1.2, (3.1) eşitsizliği ve Sonuç 2.3.15 kullanılarak

$$\begin{aligned} \Omega_r(f,1/n)_{p(\cdot)} &\le \Omega_r\left(f - T_n^0(f),1/n\right)_{p(\cdot)} + \Omega_r\left(T_n^0(f),1/n\right)_{p(\cdot)} \\ &\le c(p,r) E_n(f)_{p(\cdot)} + \frac{c_{23}(p,r)}{n^{r-k}} \left\| \left(T_n^0(f)\right)^{(r-k)} \right\|_{p(\cdot)} \\ &\le \frac{c_{24}(p,r)}{n^{r-k}} \left\{ \left\| f^{(r-k)} \right\|_{p(\cdot)} + \left\| \left(T_n^0(f)\right)^{(r-k)} \right\|_{p(\cdot)} \right\} \qquad (4.5) \end{aligned}$$

bulunur. Diğer yandan Teorem 4.2.1 ve Sonuç 2.3.15 kullanıldığında

$$\begin{aligned} \left\| \left(T_n^0(f)\right)^{(r-k)} \right\|_{p(\cdot)} &\le \left\| \left(T_n^0(f)\right)^{(r-k)} - f^{(r-k)} \right\|_{p(\cdot)} + \left\| f^{(r-k)} \right\|_{p(\cdot)} \\ &\le c_{24}(p,r) E_n\left(f^{(r-k)}\right)_{p(\cdot)} + \left\| f^{(r-k)} \right\|_{p(\cdot)} \le c_{25}(p,r) \left\| f^{(r-k)} \right\|_{p(\cdot)} \qquad (4.6) \end{aligned}$$

olur. Son olarak (4.5) ve (4.6) eşitsizlikleri bir araya getirilerek istenilen

$$\Omega_r\left(f,1/n\right)_{p(\cdot)} \le \frac{c(p,r)}{n^{r-k}}\left\|f^{(r-k)}\right\|_{p(\cdot)}$$

eşitsizliği elde edilir. ■

4.2.5 Teorem *$f \in L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ ve $p \in \mathcal{P}([0,2\pi])$ olsun. Eğer bir $k = 0,1,2,...$ için $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{k-1} E_\nu(f)_{p(\cdot)} < \infty$ ise $f \in W_k^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ ve pozitif bir $c(p,k)$ sabiti vardır öyle ki her $n = 1,2,3,...$ için*

$$E_n\left(f^{(k)}\right)_{p(\cdot)} \le c(p,k)\left\{n^k E_n(f)_{p(\cdot)} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{k-1} E_\nu(f)_{p(\cdot)}\right\}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat $T_n^0(f)$, f fonksiyonuna en iyi yaklaşan n dereceli trigonometrik polinom olsun. Verilen bir $n = 1,2,...$ için $2^m \le n < 2^{m+1}$ olacak şekilde bir pozitif m tamsayısı seçelim. Teorem 2.3.10 uygulanarak görülür ki

$$\left\|\left(T_{2^{m+1}}^0(f)\right)^{(k)} - \left(T_{2^m}^0(f)\right)^{(k)}\right\|_{p(\cdot)} \le c(p)2^{(m+1)k}\left\|\left(T_{2^{m+1}}^0(f)\right) - \left(T_{2^m}^0(f)\right)\right\|_{p(\cdot)}$$

$$\le c_{25}(p)2^{(m+1)k} E_n(f)_{p(\cdot)}.$$

(3.11) eşitsizliği ve Teorem 4.2.5'in hipotezi gereği

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left\|\left(T_{2^{m+1}}^0(f)\right) - \left(T_{2^m}^0(f)\right)\right\|_{W_k^{p(\cdot)}} =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\left\|\left(T_{2^{m+1}}^0(f)\right) - \left(T_{2^m}^0(f)\right)\right\|_{p(\cdot)} + \sum_{m=1}^{\infty}\left\|\left(T_{2^{m+1}}^0(f)\right)^{(k)} - \left(T_{2^m}^0(f)\right)^{(k)}\right\|_{p(\cdot)}$$

$$\le c_{25}(p)2^{(m+1)k} E_n(f)_{p(\cdot)} \le c_{26}(p,k)\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\mu=2^{i-1}+1}^{2^i} \mu^{k-1} E_\mu(f)_{p(\cdot)}$$

$$\le c_{26}(p,k)\sum_{\mu=2}^{\infty} \mu^{k-1} E_\mu(f)_{p(\cdot)} < \infty.$$

Bu eşitsizlik $\left\{T_{2^m}^0(f)\right\}$ dizisinin $W_k^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ Banach uzayında bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. Böylece $W_k^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ uzayında $m\to\infty$ iken $T_{2^m}^0(f)\to f$ olur.

$$E_n\left(f^{(k)}\right)_{p(\cdot)} \le c\left\|f^{(k)}-V_n\left(f^{(k)}\right)\right\|_{p(\cdot)}$$

$$\le \left\|V_{2^{m+1}+1}\left(f^{(k)}\right)-V_n\left(f^{(k)}\right)\right\|_{p(\cdot)}+\sum_{j=m+2}^{\infty}\left\|V_{2^j+1}\left(f^{(k)}\right)-V_{2^{j-1}+1}\left(f^{(k)}\right)\right\|_{p(\cdot)}$$

$$:= I_4 + I_5 \tag{4.7}$$

$V_n(f)$ derecesi $2n-1$ olan trigonometrik polinom olduğundan Teorem 2.3.10 ile elde edilir ki

$$I_4=\left\|V_{2^{m+1}+1}\left(f^{(k)}\right)-V_n\left(f^{(k)}\right)\right\|_{p(\cdot)}=\left\|\left(V_{2^{m+1}+1}(f)\right)^{(k)}-\left(V_n(f)\right)^{(k)}\right\|_{p(\cdot)}$$

$$\le c_{27}(p)\left(2^{m+2}+1\right)^k\left\|V_{2^{m+1}+1}(f)-V_n(f)\right\|_{p(\cdot)}\le c_{28}(p)\left(2^{m+3}\right)^k E_n(f)_{p(\cdot)}$$

$$\le c_{28}(p)8^k n^k E_n(f)_{p(\cdot)}\le c_{29}(p)n^k E_n(f)_{p(\cdot)}. \tag{4.8}$$

Diğer yandan Teorem 2.3.10, Teorem 2.3.13 ve (3.11) eşitsizliği kullanılarak

$$I_5=\sum_{j=m+2}^{\infty}\left\|V_{2^j+1}\left(f^{(k)}\right)-V_{2^{j-1}+1}\left(f^{(k)}\right)\right\|_{p(\cdot)}$$

$$\le \sum_{j=m+2}^{\infty}\left\|\left(V_{2^j+1}(f)\right)^{(k)}-\left(V_{2^{j-1}+1}(f)\right)^{(k)}\right\|_{p(\cdot)}$$

$$\le c_{30}(p,k)\sum_{j=m+2}^{\infty}\left(2^{j+1}+1\right)^k\left\|\left(V_{2^j+1}(f)\right)-\left(V_{2^{j-1}+1}(f)\right)\right\|_{p(\cdot)}$$

$$\le c_{30}(p,k)\sum_{j=m+2}^{\infty}\left(2^{j+2}\right)^k E_{2^{j-1}+1}(f)_{p(\cdot)}\le c_{31}(p,k)\sum_{j=m+2}^{\infty}2^{jk}E_{2^{j-1}}(f)_{p(\cdot)}$$

$$\le c_{31}(p,k)\sum_{j=m+1}^{\infty}2^{(j+1)k}E_{2^j}(f)_{p(\cdot)}\le c_{32}(p,k)\sum_{j=m+1}^{\infty}\sum_{\nu=2^{j-1}+1}^{2^j}\nu^{k-1}E_\nu(f)_{p(\cdot)}$$

$$\le c_{32}(p,k)\sum_{\nu=2^m+1}^{\infty}\nu^{k-1}E_\nu(f)_{p(\cdot)}\le c_{32}(p,k)\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{k-1}E_\nu(f)_{p(\cdot)}<\infty \tag{4.9}$$

elde edilir. (4.7), (4.8) ve (4.9) eşitsizlikleri bir araya getirilerek görülür ki

$$E_n\left(f^{(k)}\right)_{p(\cdot)} \le c(p,k)\left\{n^k E_n(f)_{p(\cdot)} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{k-1} E_\nu(f)_{p(\cdot)}\right\}. \blacksquare$$

Teorem 4.2.5 ilk olarak [53] çalışmasında ifade edilmiştir ve detaylı ispatı [54] çalışmasında bulunmaktadır. Bu teorem bizden bağımsız olarak [52] çalışmasında da ispatlanmıştır. Benzer sonuçlar ağırlıklı durumda [23] makalesinde ifade edilmiştir, $k \in \mathbb{R}^+$ ve $p \in \mathcal{P}^0([0,2\pi])$ koşulu altında ağırlıksız ve ağırlıklı değişken üslü *Lebesgue* uzaylarında sırasıyla [27] ve [24] çalışmalarında ispatlanmıştır.

4.2.6 Teorem *$f \in L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ ve $p \in \mathcal{P}([0,2\pi])$ olsun. Eğer bir $k = 0,1,2,\dots$ için $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{k-1} E_\nu(f)_{p(\cdot)} < \infty$ ise $f \in W_k^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ ve pozitif bir $c(p,k,r)$ sabiti vardır öyle ki her $n = 1,2,3,\dots$ için*

$$\Omega_r\left(f^{(k)}, 1/n\right)_{p(\cdot)} \le c(p,k,r)\left\{\frac{1}{n^r}\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k+r-1} E_\nu(f)_{p(\cdot)} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{k-1} E_\nu(f)_{p(\cdot)}\right\}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat $f \in L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$, $p \in \mathcal{P}([0,2\pi])$ ve T_n^0, f fonksiyonuna en iyi yaklaşan n dereceli trigonometrik polinom olsun. Teorem 4.2.1 ve Teorem 4.2.5 uygulanarak

$$\left\| f^{(k)} - \left(T_n^0\right)^{(k)} \right\|_{p(\cdot)} \le c(p,k)\left\{n^k E_n(f)_{p(\cdot)} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{k-1} E_\nu(f)_{p(\cdot)}\right\} \tag{4.10}$$

bulunur. Ayrıca, Önerme 4.1.2 yardımı ile $n = 1,2,,\dots$ için

$$\left\| \left(T_n^0\right)^{(k+r)} \right\|_{p(\cdot)} \le c(p,k,r)\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k+r-1} E_\nu(f)_{p(\cdot)} \tag{4.11}$$

eşitsizliği geçerlidir. $\delta := 1/n$ seçilerek (4.10) ve (4.11) eşitsizlikleri için Önerme 4.1.1 uygulanırsa

$$\Omega_r\left(f^{(k)},1/n\right)_{p(\cdot)} \le c_{33}\left(p,k,r\right)n^k\left\{E_n\left(f\right)_{p(\cdot)} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{k-1}E_\nu\left(f\right)_{p(\cdot)}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{n^r}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+r-1}E_\nu\left(f\right)_{p(\cdot)}\right\}$$

olduğu görülür. Bu son eşitsizlikte $n^k E_n\left(f\right)_{p(\cdot)} \le \frac{c}{n^r}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+r-1}E_\nu\left(f\right)_{p(\cdot)}$ eşitsizliği kullanılarak istenilen

$$\Omega_r\left(f^{(k)},1/n\right)_{p(\cdot)} \le c\left(p,k,r\right)\left\{\frac{1}{n^r}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+r-1}E_\nu\left(f\right)_{p(\cdot)} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{k-1}E_\nu\left(f\right)_{p(\cdot)}\right\}$$

eşitsizliğine ulaşılır. ■

Teorem 4.2.6 ilk olarak [53] çalışmasında ifade edilmiş ve detaylı ispatı [54] çalışmasında verilmiştir. Bu teorem $\Omega_r\left(f,\cdot\right)_{p(\cdot)}$'ye denk olan farklı bir düzgünlük modülü kullanılarak [52] çalışmasında ispatsız olarak ifade edilmiştir. Benzer sonuçlar $p \in \mathcal{P}^0\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ şartı ile ağırlıklı durumda [23] makalesinde ifade edilmiştir, $k \in \mathbb{R}^+$ olduğu durumda ise yine farklı bir düzgünlük modülü yardımı ile $p \in \mathcal{P}^0\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ koşulu altında ağırlıksız ve ağırlıklı değişken üslü *Lebesgue* uzaylarında sırasıyla [27] ve [24] çalışmalarında ispatlanmıştır.

Düzgünlük modülü $\Omega_r\left(f,\delta\right)_{p(\cdot)}$ gibi f fonksiyonunun bazı temel özelliklerini ifade eden ve reel $\delta > 0$ parametresine bağlı bir başka fonksiyon çeşidi de vardır. Genellikle $K\left(f,\delta\right)$ ile gösterilen bu ifade *K-fonksiyoneli* olarak adlandırılmaktadır. *K*-fonksiyonelleri bir f fonksiyonunun bazı temel yaklaşım özelliklerini incelemekte faydalı araçlar olmalarının yanı sıra operatörlerin interpolasyon teorisine temel oluşturan önemli araçlardır. Yaklaşım teorisi bakımından çoğu zaman *K*-fonksiyoneli ve düzgünlük modülü arasındaki ilişki bir denklik olarak ortaya çıkar. Bu açıdan fonksiyonların belirli yaklaşım özelliklerinin araştırılmasında bu ilişkinin ortaya konması oldukça önemlidir.

4.2.7 Tanım $f \in L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$, $p \in \mathcal{P}([0,2\pi])$ *ve* $r = 1,2,3,...$ *olsun.* $g \in W_r^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ *ve* $\delta > 0$ *için* $K(f,\delta)_{p(\cdot),r} := \inf\limits_{g \in W_r^{p(\cdot)}([0,2\pi])} \left\{ \|f-g\|_{p(\cdot)} + \delta^r \left\|g^{(r)}\right\|_{p(\cdot)} \right\}$

biçiminde tanımlanan ifadeye ***Peetre K-fonksiyoneli*** *denir* [39, sayfa 170].

(3.3) ve (3.9) eşitsizlikleri bir araya getirilir ve $f_{r,\delta} \in W_r^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ üzerinden infimum alınırsa $K(f,\delta)_{p(\cdot),r} \le c_{34}(p,r)\Omega_r(f,\delta)_{p(\cdot)}$ olduğu görülür. Öte yandan (3.1) eşitsizliği, $\delta := 1/n$ ve $k = 0$ için Teorem 4.2.4 uygulanarak $\Omega_r(f,\delta)_{p(\cdot)} \le c_{35}(p,r)K(f,\delta)_{p(\cdot),r}$ eşitsizliği geçerlidir. Bu iki eşitsizlik yardımı ile aşağıdaki sonuç elde edilir.

4.2.8 Sonuç $p \in \mathcal{P}([0,2\pi])$, $r = 1,2,3,...$ *olsun.* $f \in L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ *ve* $\delta > 0$ *için öyle pozitif* $c_{35}(p,r)$ *ve* $c_{36}(p,r)$ *katsayıları vardır ki*

$$c_{36}(p,r)K(f,\delta)_{p(\cdot),r} \le \Omega_r(f,\delta)_{p(\cdot)} \le c_{35}(p,r)K(f,\delta)_{p(\cdot),r}$$

eşitsizliği sağlanır.

Sonuç 4.2.8, $\Omega_r(f,\cdot)_{p(\cdot)}$ 'ye denk olan farklı bir düzgünlük modülü kullanılarak değişken üslü *Lebesgue* uzaylarında $p \in \mathcal{P}([0,2\pi])$ koşulu altında [52] ve $p \in \mathcal{P}^0([0,2\pi])$ koşulu altında [27] çalışmalarında ispatlanmıştır. Bu teoremler ağırlıklı değişken üslü *Lebesgue* uzaylarında ise [24] makalesinde elde edilmiştir.

4.3 $Lip_k^{p(\cdot),\alpha}$ Genelleşmiş Değişken Üslü Lipschitz Sınıflarının Konstrüktif Karakterizasyonu

Teorem 4.2.6 kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

4.3.1 Sonuç *$f \in L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ ve $p \in \mathcal{P}([0,2\pi])$ olsun. Eğer belirli $\alpha>0$ ve $k=0,1,2,....$ için $E_n(f)_{p(\cdot)} = \mathcal{O}(n^{-k-\alpha})$, $n=1,2,3,...$ ise $f \in W_k^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ ve her $\delta>0$ için*

$$\Omega_r\left(f^{(k)},\delta\right)_{p(\cdot)} = \begin{cases} \mathcal{O}\left(\delta^{\alpha}\right) & , r>\alpha \\ \mathcal{O}\left(\delta^{\alpha}\log(1/\delta)\right), & r=\alpha \\ \mathcal{O}\left(\delta^{r}\right) & , r<\alpha. \end{cases}$$

4.3.2 Tanım $\alpha>0$ ve $r := [\![\alpha]\!]+1$ *için*

$$Lip_k^{p(\cdot),\alpha} := \left\{ f \in W_k^{p(\cdot)}([0,2\pi]) : \Omega_r\left(f^{(k)},\delta\right)_{p(\cdot)} = \mathcal{O}\left(\delta^{\alpha}\right),\ \delta>0 \right\}$$

*ifadesine $W_k^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ **uzayındaki genelleşmiş değişken üslü Lipschitz sınıfı** denir.*

4.3.3 Sonuç *$f \in L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ ve $p \in \mathcal{P}([0,2\pi])$ olsun. Eğer belirli $\alpha>0$ ve $k=0,1,2,....$ için $E_n(f)_{p(\cdot)} = \mathcal{O}(n^{-k-\alpha})$, $n=0,1,2,...$ ise $f \in Lip_k^{p(\cdot),\alpha}$.*

Önerme 3.1.7 ve Teorem 3.2.1 kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

4.3.4 Sonuç *Eğer $f \in Lip_k^{p(\cdot),\alpha}$, $\alpha>0$ ve $p \in \mathcal{P}([0,2\pi])$ ise o zaman $E_n(f)_{p(\cdot)} = \mathcal{O}(n^{-k-\alpha})$, $n=1,2,3....$ olur.*

Sonuç 4.3.1 ve Sonuç 4.3.4 bir araya getirilerek aşağıdaki sonuç elde edilir.

4.3.5 Sonuç $f \in L^{p(\cdot)}\left([0,2\pi]\right)$, $p \in \mathcal{P}\left([0,2\pi]\right)$ *ve* $\alpha > 0$ *olsun. O zaman* $k = 0,1,2,....$ *için*

$$i)\ f \in Lip_k^{p(\cdot),\alpha},$$
$$ii)\ E_n(f)_{p(\cdot)} = \mathcal{O}\left(n^{-k-\alpha}\right),\ n = 0,1,2,...$$

ifadeleri denktir.

5. KOMPLEKS DÜZLEMDE TANIMLI DEĞİŞKEN ÜSLÜ SMİRNOV SINIFLARINDA VE DEĞİŞKEN ÜSLÜ LEBESGUE UZAYLARINDA YAKLAŞIM

5.1 Bazı Temel Tanımlar, Teoremler ve Yardımcı Sonuçlar

$\mathbb{D} := \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$ ve $\mathbb{D}^- := \{w \in \mathbb{C} : |w| > 1\}$ olsun. Sınırı Γ *Jordan* eğrisi olan basit bağlantılı sınırlı bir G bölgesi verilsin. $\overline{G} := G \cup \Gamma$ kapalı bölgesinin tümleyeni $G^- := \mathbb{C} - \overline{G}$ olsun. Teorem 2.1.12 yardımı ile G^- bölgesini $\mathbb{D}^-$ bölgesine birebir ve konform olarak resmeden φ dönüşümü vardır. Bu konfrom dönüşüm Teorem 2.1.13 dikkate alındığında

$$\varphi(\infty) = \infty \text{ ve } \lim_{z \to \infty} \frac{\varphi(z)}{z} > 0$$

koşulları altında bir tek olarak belirlidir. φ fonksiyonu sadece ∞ noktasında analitik değildir ayrıca bu nokta fonksiyonun birinci mertebeden bir kutup yeridir. Böylece φ fonksiyonu ∞ 'un komşuluğunda

$$\varphi(z) = \gamma z + \gamma_0 + \frac{\gamma_1}{z} + \frac{\gamma_2}{z^2} + \cdots$$

biçiminde bir *Laurent* seri açılımına sahiptir. $k = 0,1,2,3,...$ için

$$[\varphi(z)]^k = \left(\gamma z + \gamma_0 + \frac{\gamma_1}{z} + \frac{\gamma_2}{z^2} + \cdots\right)^k$$

$$= \gamma^k z^k + a_{k-1}^{(k)} z^{k-1} + a_{k-2}^{(k)} z^{k-2} + \cdots a_1^{(k)} z + a_0^{(k)} + \frac{b_1^{(k)}}{z} + \frac{b_2^{(k)}}{z^2} + \cdots + \frac{b_j^{(k)}}{z^j} + \cdots$$

olur. Bu eşitlikte z 'nin pozitif kuvvetlerinden oluşan kısmı

$$F_k(z) = \gamma^k z^k + a_{k-1}^{(k)} z^{k-1} + a_{k-2}^{(k)} z^{k-2} + \cdots a_1^{(k)} z + a_0^{(k)}$$

ile gösterelim.

5.1.1. Tanım $F_k(z)$ *cebirsel polinomuna* $\overline{G}$ ***bölgesi için*** k. ***dereceden Faber polinomu*** *denir.*

G^- bölgesinde analitik bir fonksiyon belirten

$$\frac{b_1^{(k)}}{z} + \frac{b_2^{(k)}}{z^2} + \cdots + \frac{b_j^{(k)}}{z^j} + \cdots$$

ifadesi $-E_k(z)$ ile gösterilirse

$$F_k(z) = [\varphi(z)]^k + E_k(z),\ z \in G^- \tag{5.1}$$

gösterimi elde edilir.

Genelliği bozmadan $0 \in G$ kabul edelim. Teorem 2.1.12'ye göre G bölgesini $\mathbb{D}^-$ bölgesine birebir ve konform olarak resmeden φ_1 konform dönüşümü vardır. Bu konform dönüşüm

$$\varphi_1(0) = \infty \text{ ve } \lim_{z \to 0} z\varphi_1(z) > 0$$

koşulları altında bir tek olarak belirlidir. φ_1 fonksiyonu için 0 noktası birinci mertebeden bir kutup yeridir. Böylece φ_1 fonksiyonu 0'ın bir komşuluğunda

$$\varphi_1(z) = \frac{\alpha}{z} + \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \cdots + \alpha_j z^j + \cdots$$

biçiminde bir *Laurent* seri açılımına sahiptir. $k = 1, 2, 3, ...$ için

$$[\varphi_1(z)]^k = \left(\frac{\alpha}{z} + \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \cdots + \alpha_j z^j + \cdots\right)^k$$

$$= \frac{\alpha^k}{z^k} + \frac{c_{k-1}^{(k)}}{z^{k-1}} + \frac{c_{k-2}^{(k)}}{z^{k-2}} + \cdots + \frac{c_1^{(k)}}{z} + d_0^{(k)} + d_1^{(k)} z + d_2^{(k)} z^2 + \cdots + d_j^{(k)} z^j + \cdots$$

olur. Bu eşitlikte z'nin negatif kuvvetlerinden oluşan kısmı

$$\widetilde{F_k}\left(1/z\right)=\frac{\alpha^k}{z^k}+\frac{c_{k-1}^{(k)}}{z^{k-1}}+\frac{c_{k-2}^{(k)}}{z^{k-2}}+\cdots+\frac{c_1^{(k)}}{z}$$

ile gösterelim.

5.1.2. Tanım $\widetilde{F_k}\left(1/z\right)$ *ifadesine* $\overline{G^-}$ ***bölgesi için*** k. ***dereceden Faber rasyonel fonksiyonu*** *denir.*

G bölgesinde analitik bir fonksiyon belirten

$$d_0^{(k)}+d_1^{(k)}z+d_2^{(k)}z^2+\cdots+d_j^{(k)}z^j+\cdots$$

ifadesi $-\widetilde{E}_k\left(z\right)$ ile gösterilirse

$$\widetilde{F_k}\left(1/z\right)=\left[\varphi_1\left(z\right)\right]^k+\widetilde{E}_k\left(z\right),\ z\in G\setminus\{0\} \tag{5.2}$$

gösterimi elde edilir.

φ ve φ_1 dönüşümlerinin ters dönüşümlerini sırasıyla ψ ve ψ_1 ile gösterelim.

$$\Gamma_R:=\left\{z\in G^-:\left|\varphi\left(z\right)\right|=R \text{ ve } R>1\right\}$$

sınırına sahip olan bölge G_R olduğunda (5.1) eşitliğinde *Cauchy* integral formülü ve sınırsız bölgeler için *Cauchy* integral teoremi uygulanırsa

$$F_k\left(z\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{\left[\varphi\left(\zeta\right)\right]^k}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=R}\frac{w^k\psi'\left(w\right)}{\psi\left(w\right)-z}dw,\ z\in G_R \quad ,$$

elde edilir. Bu eşitlikten görülür ki $F_k\left(z\right)$ *Faber* polinomları $\mathbb{D}^-$ bölgesinde analitik olan $\dfrac{w\psi'\left(w\right)}{\psi\left(w\right)-z}$ fonksiyonunun ∞ 'luğun komşuluğundaki *Laurent* katsayılarıdır. Benzer şekilde sınırı

$$\widetilde{\Gamma}_R:=\left\{z\in G:\left|\varphi_1\left(z\right)\right|=R \text{ ve } R>1\right\}$$

olan bölgenin kapanışının tümleyeni G_R^- olduğunda (5.2) eşitliğinden

$$\widetilde{F_k}(1/z')=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{[\varphi_1(\zeta)]^k}{\zeta-z}d\zeta=-\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=R}\frac{w^k\psi_1'(w)}{\psi_1(w)-z'}dw,\ \ z'\in G_R^-\ ,$$

olur ki bu eşitlik $\widetilde{F_k}(1/z')$ *Faber* rasyonel fonksiyonlarının, $\mathbb{D}^-$ bölgesinde analitik olan $\frac{w\psi_1'(w)}{\psi_1(w)-z'}$ fonksiyonunun 0 'ın komşuluğundaki *Laurent* katsayıları olduğunu vurgular.

Böylece $w\in\mathbb{D}^-$ için

$$\frac{\psi'(w)}{\psi(w)-z}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{F_k(z)}{w^{k+1}}\ ,z\in G, \tag{5.3}$$

$$\frac{\psi_1'(w)}{\psi_1(w)-z'}=\sum_{k=0}^{\infty}-\frac{\widetilde{F_k}(1/z')}{w^{k+1}}\ ,z'\in G^-. \tag{5.4}$$

biçiminde ifade edilen seri gösterimlerin varlığı görülür. Ayrıca bu seri gösterimlerin yanı sıra $F_k(z)$ polinomunun ve $\widetilde{F_k}(1/z)$ rasyonel fonksiyonunun integral gösterimleri de mevcuttur.

Eğer $z\in G^-$ ise

$$F_k(z)=[\varphi(z)]^k+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{[\varphi(\zeta)]^k}{\zeta-z}d\zeta\ ,\ k=0,1,2,... \tag{5.5}$$

ve eğer $z\in G$ ise

$$\widetilde{F_k}(1/z)=[\varphi_1(z)]^k-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{[\varphi_1(\zeta)]^k}{\zeta-z}d\zeta\ ,\ k=1,2,... \tag{5.6}$$

olur.

5.1.3 Tanım *Γ sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi ve $p(z):\Gamma\to[1,\infty)$ üs fonksiyonu Γ üzerinde Lebesgue ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Verilen $p(z)$ fonksiyonu için $\int_{\Gamma}|f(z)|^{p(z)}|dz|<\infty$ koşulunu sağlayan Γ üzerinde tüm Lebesgue ölçülebilir f fonksiyonlarının kümesine **değişken üslü Lebesgue uzayı** denir ve $L^{p(\cdot)}(\Gamma)$ ile gösterilir.*

$L^{p(\cdot)}(\Gamma)$ değişken üslü *Lebesgue* uzayı $\underset{z\in\Gamma}{esssup}\, p(z) =: p_+ < \infty$ için

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)} := \inf\left\{\lambda > 0 : \int_{\Gamma}\left|\frac{f(z)}{\lambda}\right|^{p(z)}|dz| \le 1\right\} < \infty$$

normu ile bir *Banach* uzayıdır. $\mathbb{T} := \{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\}$ ve $\Gamma := \mathbb{T}$ olduğu özel halde kompleks düzlemdeki $\mathbb{T}$ ve reel eksendeki $[0, 2\pi]$ aralığı özdeş olduğundan $L^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$ değişken üslü *Lebesgue* uzayında norm

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{T})} := \inf\left\{\lambda > 0 : \int_{0}^{2\pi}\left|\frac{f(e^{it})}{\lambda}\right|^{p(e^{it})}|dt| \le 1\right\} =: \|f\|_{p(\cdot)}$$

olarak elde edilir.

5.1.4 Tanım $p(z) : \Gamma \to [1, \infty)$ *üs fonksiyonu* Γ *üzerinde Lebesgue ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Verilen* $p(z)$ *fonksiyonu için*

$$E^{p(\cdot)}(G) := \left\{f \in E^1(G) : f \in L^{p(\cdot)}(\Gamma)\right\}$$

olarak tanımlanan kümeye G *bölgesinde analitik fonksiyonların* ***değişken üslü Smirnov sınıfı*** *denir.*

5.1.5 Tanım $p(z) : \Gamma \to [1, \infty)$ *üs fonksiyonu* Γ *üzerinde Lebesgue ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Verilen* $p(z)$ *fonksiyonu için*

$$E^{p(\cdot)}(G^-) := \left\{f \in E^1(G^-) : f \in L^{p(\cdot)}(\Gamma) \text{ ve } f(\infty) = 0\right\}$$

olarak tanımlanan kümeye G^- *bölgesinde analitik fonksiyonların* ***değişken üslü Smirnov sınıfı*** *denir.*

$E^{p(\cdot)}(G)$ ve $E^{p(\cdot)}(G^{-})$ sınıflarına ait fonksiyonlar için norm $\underset{z\in\Gamma}{ess\sup}\, p(z) =: p_{+} < \infty$ olduğunda

$$\|f\|_{E^{p(\cdot)}(G)} := \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)} \text{ ve } \|f\|_{E^{p(\cdot)}(G^{-})} := \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)}$$

biçiminde tanımlanır ve böylece $E^{p(\cdot)}(G)$ ve $E^{p(\cdot)}(G^{-})$ değişken üslü Smirnov sınıflarının *Banach* uzayı olduğu görülür.

Eğer $f \in E^{p(\cdot)}(G)$ ise Tanım 5.1.4'ten $f \in E^{1}(G)$ olup $z \in G$ için

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1} \frac{\psi'(w)}{\psi(w) - z} f(\psi(w)) dw$$

yazılır, burada

$$a_k = a_k(f) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{f(\psi(w))}{w^{k+1}} dw \text{ , } k = 0,1,2,...$$

olduğunda (5.3) eşitliği kullanılarak $f(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k F_k(z)$ elde edilir.

5.1.6 Tanım *$f \in E^{p(\cdot)}(G)$ olsun. f fonksiyonuna karşılık gelen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(f) F_k(z)$ ifadesine f 'in* ***Faber seri açılımı*** *ve $a_k(f)$, $k = 0,1,2,...$ katsayılarına f 'in* ***Faber katsayıları*** *denir.*

5.1.7 Tanım *$f \in E^{p(\cdot)}(G)$ ve $a_k(f)$, $k = 0,1,2,...$ f 'in Faber katsayıları olsun. $S_n^G(f,z) := \sum_{k=0}^{n} a_k(f) F_k(z)$, $n = 0,1,2,...$ olarak tanımlanan ifadeye f 'in n. dereceden* ***Faber kısmi toplamı*** *denir.*

5.1.8 Tanım *$f \in E^{p(\cdot)}(G)$ olsun. $a_k(f)$, $k=0,1,2,\ldots$ onun Faber katsayıları ve*

$$\left(\sin\frac{nt}{2}\Big/\sin\frac{t}{2}\right)^4 = \sum_{k=0}^{2n-2} c_k^{(n)} \cos kt$$

ile belirlenen $c_k^{(n)}$ katsayıları için $\lambda_k^{(n)} := \dfrac{3c_k^{(n)}}{2n\left(2n^2+1\right)}$ olsun.

$$J_n^G(f,z) := \sum_{k=0}^{2n-2} \lambda_k^{(n)} a_k(f) F_k(z)\ ,\ n=1,2,\ldots$$

*olarak tanımlanan ifadeye f fonksiyonunun **Jackson ortalaması** denir.*

5.1.9 Tanım *$f \in E^{p(\cdot)}(G)$ olsun.*

$$V_n^G(f,z) := \frac{1}{n}\sum_{\nu=n}^{2n-1} S_n^G(f,z)\ ,\ n=1,2,\ldots$$

*olarak tanımlanan ifadeye f fonksiyonunun **de la Vallée-Poussin ortalaması** denir.*

Eğer $f \in E^{p(\cdot)}\left(G^-\right)$ ise Tanım 5.1.5'ten $f \in E^1\left(G^-\right)$ olup $z \in G^-$ için

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1} \frac{\psi_1'(w)}{\psi_1(w) - z} f\left(\psi_1(w)\right) dw$$

yazılır. Burada

$$\widetilde{a_k} = \widetilde{a_k}(f) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{f\left(\psi_1(w)\right)}{w^{k+1}} dw\ ,\ k=1,2,\ldots$$

olduğunda (5.4) eşitliği kullanılarak $f(z) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{a_k}\widetilde{F_k}(1/z)$ elde edilir.

5.1.10 Tanım *$f \in E^{p(\cdot)}\left(G^-\right)$ olsun. f fonksiyonuna karşılık gelen $\sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{a_k}(f)\widetilde{F_k}(1/z)$ ifadesine f 'in **Faber seri açılımı** ve $\widetilde{a_k}(f)$, $k=1,2,\ldots$ katsayılarına f 'in **Faber katsayıları** denir.*

5.1.11 Tanım $f \in E^{p(\cdot)}\left(G^{-}\right)$ *ve* $\widetilde{a_k}(f),\ k=1,2,...$ f *'in Faber katsayıları olsun.* $S_n^{G^-}(f,z) := \sum_{k=1}^{n} \widetilde{a_k}(f)\widetilde{F_k}(1/z)$, $n=1,2,...$ *olarak tanımlanan ifadeye* f *'in n. dereceden* ***Faber kısmi toplamı*** *denir.*

5.1.12 Tanım $f \in E^{p(\cdot)}\left(G^{-}\right)$ *olsun .* $\widetilde{a_k}(f),\ k=1,2,..$ *onun Faber katsayıları ve*

$$\left(\sin\frac{nt}{2}\Big/\sin\frac{t}{2}\right)^4 = \sum_{k=0}^{2n-2} c_k^{(n)} \cos kt$$

ile belirlenen $c_k^{(n)}$ *katsayıları için* $\lambda_k^{(n)} := \dfrac{3c_k^{(n)}}{2n\left(2n^2+1\right)}$ *olsun.*

$$J_n^{G^-}(f,z) := \sum_{k=0}^{2n-2} \lambda_k^{(n)} \widetilde{a_k}(f)\widetilde{F_k}(1/z),\ n=1,2,...$$

olarak tanımlanan ifadeye f *fonksiyonunun* ***Jackson ortalaması*** *denir.*

5.1.13 Tanım $f \in E^{p(\cdot)}\left(G^{-}\right)$ *olsun.*

$$V_n^{G^-}(f,z) := \frac{1}{n}\sum_{\nu=n}^{2n-1} S_n^{G^-}(f,z),\ n=1,2,...$$

olarak tanımlanan ifadeye f *fonksiyonunun* ***de la Vallée-Poussin ortalaması*** *denir.*

$F := [0,2\pi] \subset \mathbb{R}$ veya $F := \Gamma \subset \mathbb{C}$ sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi ve $|F|$ onun *Lebesgue ölçümü* olsun. $p(\cdot): F \to \mathbb{R}^+ := [0,\infty)$ üs fonksiyonu

$$1 \le p_- := \operatorname*{ess\,inf}_{z\in F} p(z) \le \operatorname*{ess\,sup}_{z\in F} p(z) =: p_+ < \infty$$

koşullarını sağlayan *Lebesgue* ölçülebilir bir fonksiyon olsun.

5.1.14 Tanım *Eğer* $p(\cdot)$ *üs fonksiyonu ve* $\forall z_1, z_2 \in F$, $z_1 \neq z_2$ *için*

$$\left|p(z_1) - p(z_2)\right| \ln\left(\frac{|F|}{|z_1 - z_2|}\right) \leq c$$

koşulu z_1, z_2 *'den bağımsız pozitif bir* c *sabiti ile sağlanıyorsa* $p(\cdot) \in \mathcal{P}^{\log}(F)$ *denir. Eğer* $p_- > 1$ *ve* $p(\cdot) \in \mathcal{P}^{\log}(F)$ *ise* $p(\cdot) \in \mathcal{P}_0^{\log}(F)$ *denir.*

Aşağıdaki teorem daha genel durumda, $\Gamma \in \mathfrak{C}$ olduğunda, [12] çalışmasında ispatlanmıştır.

5.1.15 Teorem $\Gamma \in \mathfrak{D}$ *ve* $p(\cdot) \in \mathcal{P}_0^{\log}(\Gamma)$ *olsun.* $S_\Gamma(f)$ *Cauchy singüler operatörü* $L^{p(\cdot)}(\Gamma)$ *uzayından* $L^{p(\cdot)}(\Gamma)$ *uzayına sınırlı bir lineer operatördür.*

5.1.16 Önerme $\Gamma \in \mathfrak{D}$ *ve* $p(\cdot) \in \mathcal{P}_0^{\log}(\Gamma)$ *olsun. Eğer* $f \in L^{p(\cdot)}(\Gamma)$ *ise o zaman* $f^+ \in E^{p(\cdot)}(G)$ *ve* $f^- \in E^{p(\cdot)}(G^-)$ *olur.*

İspat [55] çalışmasından bilinen $S_\Gamma(f): L^{p_-}(\Gamma) \to L^{p_-}(\Gamma)$ operatörünün sınırlılığı ve [56] çalışması $f^+ \in E^{p_-}(G) \subset E^1(G)$ ve $f^- \in E^{p_-}(G^-) \subset E^1(G^-)$ olmasını gerektirir. Diğer yandan Teorem 5.1.15'ten $f \in L^{p(\cdot)}(\Gamma)$ için var olan $\left\|S_\Gamma(f)\right\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)} \leq c(p)\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)}$ eşitsizliği ve (2.3) ve (2.4) eşitliklerinden $f^+, f^- \in L^{p(\cdot)}(\Gamma)$ olur. Böylece Tanım 5.1.4 ve Tanım 5.1.5 dikkate alınarak $f^+ \in E^{p(\cdot)}(G)$ ve $f^- \in E^{p(\cdot)}(G^-)$ elde edilir. ■

Hemen her yerde $z\in\Gamma$ için (2.5) eşitliği ile (5.3) ve (5.4) seri açılımları dikkate alınarak $a_k = a_k(f) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{f(\psi(w))}{w^{k+1}}dw$, $k=0,1,2,...$ ve $\widetilde{a_k} = \widetilde{a_k}(f) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{f(\psi_1(w))}{w^{k+1}}dw$, $k=1,2,...$ olduğunda $f\in L^{p(\cdot)}(\Gamma)$ için

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k F_k(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{a_k}\widetilde{F_k}(1/z)$$

biçiminde bir seri gösterim elde edilir.

5.1.17 Tanım $\Gamma\in\mathfrak{D}$ *ve* $p(\cdot)\in\mathcal{P}_0^{\log}(\Gamma)$ *olsun.* $f\in L^{p(\cdot)}(\Gamma)$ *fonksiyonuna karşılık gelen*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k F_k(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{a_k}\widetilde{F_k}(1/z)$$

*ifadesine f 'in **Faber-Laurent seri açılımı**, a_k ve $\widetilde{a_k}$ katsayılarına f 'in **Faber-Laurent katsayıları** denir.*

5.1.18 Tanım $f\in L^{p(\cdot)}(\Gamma)$, $\Gamma\in\mathfrak{D}$ *ve* $p(\cdot)\in\mathcal{P}_0^{\log}(\Gamma)$ *olsun.*

$$R_n(f,z) := \sum_{k=0}^{n} a_k F_k(z) + \sum_{k=1}^{n} \widetilde{a_k}\widetilde{F_k}(1/z)$$

*rasyonel fonksiyonuna f 'in **n. Faber-Laurent kısmi toplamı** denir.*

$\Gamma\in\mathfrak{D}$ üzerinde verilen f ve $p(\cdot)$ üs fonksiyonu için

$$f_0(w) := f[\psi(w)] \ \ ve \ \ f_1(w) := f[\psi_1(w)],$$

$$p_0(w) := p[\psi(w)] \ \ ve \ \ p_1(w) := p[\psi_1(w)]$$

fonksiyonlarını oluşturalım.

5.1.19 Önerme *Eğer* $\Gamma \in \mathfrak{D}$ *ise*

$$f \in L^{p(\cdot)}(\Gamma) \Leftrightarrow f_0 \in L^{p_0(\cdot)}(\mathbb{T}) \Leftrightarrow f_1 \in L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{T}),$$

$$p(\cdot) \in \mathcal{P}_0^{\log}(\Gamma) \Leftrightarrow p_0(\cdot) \in \mathcal{P}_0^{\log}(\mathbb{T}) \Leftrightarrow p_1(\cdot) \in \mathcal{P}_0^{\log}(\mathbb{T})$$

denklikleri sağlanır.

İspat $\Gamma \in \mathfrak{D}$ olsun. *Dini* düzgün eğriler için [57] çalışmasından

$$0 < c_{37} \le |\psi'(w)| \le c_{38} \quad , \quad 0 < c_{39} \le |\varphi'(z)| \le c_{40}$$

$$0 < c_{41} \le |\psi_1'(w)| \le c_{42} \quad , \quad 0 < c_{43} \le |\varphi_1'(z)| \le c_{44}$$

eşitsizliklerinin sağlandığı biliniyor. Bu eşitsizliklerden

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)} \le c\|f_0\|_{L^{p_0(\cdot)}(\mathbb{T})} \le c\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)}$$

geçerli olduğundan $f \in L^{p(\cdot)}(\Gamma) \Leftrightarrow f_0 \in L^{p_0(\cdot)}(\mathbb{T})$ olur. Benzer şekilde $f \in L^{p(\cdot)}(\Gamma) \Leftrightarrow f_1 \in L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{T})$ olup $f \in L^{p(\cdot)}(\Gamma) \Leftrightarrow f_0 \in L^{p_0(\cdot)}(\mathbb{T}) \Leftrightarrow f_1 \in L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{T})$ sağlanır. Diğer yandan $p(\cdot) \in \mathcal{P}_0^{\log}(\Gamma)$, $w_i \in \mathbb{T}$, $i = 1,2$ için $w_i := \varphi(z_i)$ olacak şekilde $z_i \in \Gamma$ noktaları ele alınarak ve $|\varphi'(z)| \le c_{40}$ eşitsizliği kullanılarak görülür ki

$$|p_0(w_1) - p_0(w_2)| \ln\left(\frac{2\pi}{|w_1 - w_2|}\right) \le c|p(z_1) - p(z_2)| \ln\left(\frac{|\Gamma|}{|z_1 - z_2|}\right).$$

Benzer şekilde $|\psi'(w)| \le c_{38}$ eşitsizliği kullanıldığında

$$|p(z_1) - p(z_2)| \ln\left(\frac{|\Gamma|}{|z_1 - z_2|}\right) \le c|p_0(w_1) - p_0(w_2)| \ln\left(\frac{2\pi}{|w_1 - w_2|}\right)$$

eşitsizliği geçerli olur. Böylece, $p(\cdot) \in \mathcal{P}_0^{\log}(\Gamma) \Leftrightarrow p_0(\cdot) \in \mathcal{P}_0^{\log}(\mathbb{T})$ olduğu görülür. Aynı yöntemle $p(\cdot) \in \mathcal{P}_0^{\log}(\Gamma) \Leftrightarrow p_1(\cdot) \in \mathcal{P}_0^{\log}(\mathbb{T})$ olduğu da gösterilebilir. Böylece, $p(\cdot) \in \mathcal{P}_0^{\log}(\Gamma) \Leftrightarrow p_0(\cdot) \in \mathcal{P}_0^{\log}(\mathbb{T}) \Leftrightarrow p_1(\cdot) \in \mathcal{P}_0^{\log}(\mathbb{T})$ olur. ■

Verilen bir $f \in L^{p(\cdot)}(\Gamma)$ için tanımlanan f_0 ve f_1 fonksiyonlarının (2.1) ile tanımlı *Cauchy* tipi integralleri

$$f_0^+(w) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{f_0(\zeta)}{\zeta - w} d\zeta \ , \ \zeta \in G \text{ ve } w \in \mathbb{D} \ ,$$

$$f_1^+(w) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{f_1(\zeta')}{\zeta' - w} d\zeta' \ , \ \zeta' \in G^- \text{ ve } w \in \mathbb{D} \ ,$$

olup bu fonksiyonlar $\mathbb{D}$ bölgesinde analitiktirler.

Böylece a_k ve $\widetilde{a_k}$ katsayıları tanımları gereği f_0 ve f_1 fonksiyonları yardımı ile aşağıdaki gösterime sahiptirler:

$$a_k(f) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{f_0(w)}{w^{k+1}} dw \ , \ k = 0,1,2,... \ ,$$

$$\widetilde{a_k}(f) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{f_1(w)}{w^{k+1}} dw \ , \ k = 1,2,... \ .$$

Önerme 5.1.19 ve Önerme 5.1.16'dan $f \in L^{p(\cdot)}(\Gamma)$, $p(\cdot) \in \mathcal{P}_0^{\log}(\Gamma)$ için $f_0^+ \in E^{p_0(\cdot)}(\mathbb{D}), f_0^- \in E^{p_0(\cdot)}(\mathbb{D}^-)$ ve $f_1^+ \in E^{p_1(\cdot)}(\mathbb{D}), f_1^- \in E^{p_1(\cdot)}(\mathbb{D}^-)$ olur. Ayrıca, $\mathbb{T}$ üzerinde hemen her yerde $f_0 = f_0^+ - f_0^-$ ve $f_1 = f_1^+ - f_1^-$ eşitlikleri sağlanır. Böylece,

$$a_k(f) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{f_0^+(w)}{w^{k+1}} dw \ , \ k = 0,1,2,...$$

$$\widetilde{a_k}(f) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{f_1^+(w)}{w^{k+1}} dw \ , \ k = 1,2,...$$

elde edilir. Sonuç olarak $a_k(f)$ ve $\widetilde{a_k}(f)$ katsayılarının sırasıyla $f_0^+ \in E^{p_0(\cdot)}(\mathbb{D})$ ve $f_1^+ \in E^{p_1(\cdot)}(\mathbb{D})$ fonksiyonlarının orjindeki *Taylor* katsayıları oldukları görülür.

5.1.20 Tanım $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$, $p(\cdot) \in \mathcal{P}_0^{\log}(\mathbb{T})$ *ve*

$$\Delta_t^r f(w) := \sum_{s=0}^{r} (-1)^{r+s} \binom{r}{s} f\left(we^{ist}\right), \quad r = 1, 2, 3, \ldots$$

olsun. Bu durumda

$$\Omega_r(f,\delta)_{\mathbb{T},p(\cdot)} := \sup_{|h| \le \delta} \left\| \frac{1}{h} \int_0^h \Delta_t^r f(w) dt \right\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{T})}, \quad \delta > 0$$

ifadesine f *fonksiyonunun* ***r-inci mertebeden düzgünlük modülü*** *denir.*

5.1.21 Tanım $f \in E^{p(\cdot)}(G)$ *ve* $p(\cdot) \in \mathcal{P}_0^{\log}(\Gamma)$ *olsun.* $r = 1, 2, 3, \ldots$ *için*

$$\Omega_r(f,\delta)_{G,p(\cdot)} := \Omega_r\left(f_0^+,\delta\right)_{\mathbb{T},p_0(\cdot)}, \ \delta > 0$$

ifadesine f *fonksiyonunun* ***r-inci mertebeden düzgünlük modülü*** *denir.*

5.1.22 Tanım $f \in E^{p(\cdot)}(G^-)$ *ve* $p(\cdot) \in \mathcal{P}_0^{\log}(\Gamma)$ *olsun.* $r = 1, 2, 3, \ldots$ *için*

$$\Omega_r(f,\delta)_{G^-,p(\cdot)} := \Omega_r\left(f_1^+,\delta\right)_{\mathbb{T},p_1(\cdot)}, \ \delta > 0$$

ifadesine f *fonksiyonunun* ***r-inci mertebeden düzgünlük modülü*** *denir.*

Özel halde $r = 1$ için $\Omega_1(f,\delta)_{\mathbb{T},p(\cdot)} := \Omega(f,\delta)_{\mathbb{T},p(\cdot)}$ gösterimi ile

$$\Omega_1(f,\delta)_{G,p(\cdot)} = \Omega(f,\delta)_{G,p(\cdot)} := \Omega\left(f_0^+,\delta\right)_{\mathbb{T},p_0(\cdot)},$$

$$\Omega_1(f,\delta)_{G^-,p(\cdot)} = \Omega(f,\delta)_{G^-,p(\cdot)} := \Omega\left(f_1^+,\delta\right)_{\mathbb{T},p_1(\cdot)}$$

gösterimleri geçerlidir.

Derecesi n 'yi aşmayan kompleks değişkenli cebirsel polinomlar ailesi $\wp_n$, $n=0,1,2,\ldots$, derecesi n 'yi aşmayan kompleks $1/z$ değişkenine göre cebirsel polinomlar ailesi $\widetilde{\wp}_n$, $n=1,2,\ldots$, ile gösterilsin.

5.1.23 Tanım *$G \subset \mathbb{C}$, Γ ile sınırlı bir bölge, $f \in E^{p(\cdot)}(G)$ ve $p(\cdot) \in \mathcal{P}_0^{\log}(\Gamma)$ olsun. $E_n(f)_{G,p(\cdot)} := \inf_{P_n \in \wp_n} \left\| f - P_n \right\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)}$ ifadesine f fonksiyonuna $E^{p(\cdot)}(G)$ sınıfında P_n cebirsel polinomlar ile **en iyi yaklaşım hatası** denir.*

5.1.24 Tanım *$G \subset \mathbb{C}$, Γ ile sınırlı bir bölge, $f \in E^{p(\cdot)}(G^-)$ ve $p(\cdot) \in \mathcal{P}_0^{\log}(\Gamma)$ olsun. $E_n(f)_{G^-,p(\cdot)} := \inf_{\widetilde{P}_n \in \widetilde{\wp}_n} \left\| f - \widetilde{P}_n \right\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)}$ ifadesine f fonksiyonuna $E^{p(\cdot)}(G^-)$ sınıfında $\widetilde{P}_n$, $1/z$ değişkenine göre cebirsel polinomlar ile **en iyi yaklaşım hatası** denir.*

5.1.25 Teorem *$f \in L^{p(\cdot)}(\Gamma)$ ve $\Gamma \in \mathfrak{D}$ olsun. Eğer $p(\cdot) \in \mathcal{P}_0^{\log}(\Gamma)$ ise pozitif bir $c(p)$ sabiti vardır öyle ki $\left\| \mathcal{M}_\Gamma(f) \right\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)} \le c(p) \left\| f \right\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)}$ eşitisizliği sağlanır* [14].

Aşağıdaki teorem, [7]'de 211. sayfada verilen Sonuç 5.32'nin özel halidir.

5.1.26 Teorem *Belirli bir $p_0 \ge 1$ ve tüm $\omega \in A_{p_0}(\Gamma)$ ağırlıkları için F,G fonksiyonları $\int_\Gamma |F(z)|^p |\omega(z)| |dz| \le c \int_\Gamma |G(z)|^p |\omega(z)| |dz| < \infty$ eşitsizliğini gerçekleyen iki fonksiyon olsun. $p(\cdot) : \Gamma \to [1,\infty)$ Lebesgue ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere eğer $1 < p_- \le p_+ < \infty$ ve Hardy-Littlewood maksimal operatörü $L^{p(\cdot)}(\Gamma)$ uzayı üzerinde sınırlı ise $\left\| F \right\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)} \le c(p) \left\| G \right\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)} < \infty$ eşitsizliği geçerli olur.*

Π ile derece kısıtlaması olmayan tüm cebirsel polinomların kümesi ve $\Pi(\mathbb{D})$ ile de Π kümesindeki elemanların $\mathbb{D}$ üzerindeki izi gösterilsin.

5.1.27 Tanım *Aşağıdaki biçimde tanımlanan*

$$T(P):=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}\frac{P(w)\psi'(w)}{\psi(w)-z}dw\ ,\ z\in G \quad ve \quad \widetilde{T}(P):=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}\frac{P(w)\psi_1'(w)}{\psi_1(w)-z}dw\ ,\ z\in G^-$$

$T(P):\Pi(\mathbb{D})\to E^{p(\cdot)}(G)$ *ve* $\widetilde{T}(P):\Pi(\mathbb{D})\to E^{p(\cdot)}(G^-)$ *operatörlerine* ***Faber operatörleri*** *denir.*

(5.3) ve (5.4) eşitsizlikleri kullanılarak

$$T\left(\sum_{k=0}^{n}\alpha_k w^k\right)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k F_k(z), \tag{5.7}$$

$$\widetilde{T}\left(\sum_{k=1}^{n}\beta_k w^k\right)=\sum_{k=1}^{n}\beta_k \widetilde{F_k}(1/z), \tag{5.8}$$

eşitliklerinin sağlandığı gösterilir.

5.1.28 Teorem $\Gamma\in\mathfrak{D}$ ve $p(\cdot)\in\mathcal{P}_0^{\log}(\Gamma)$ *olsun.*

$$T(P):\Pi(\mathbb{D})\subset E^{p_0(\cdot)}(\mathbb{D})\to E^{p(\cdot)}(G)$$

$$\widetilde{T}(P):\Pi(\mathbb{D})\subset E^{p_1(\cdot)}(\mathbb{D})\to E^{p(\cdot)}(G^-)$$

operatörleri lineer ve sınırlı operatörlerdir.

İspat T ve $\widetilde{T}$ operatörlerinin lineerliği açıktır. Bu operatörlerin sınırlılığı aşağıdaki şekilde gösterilir. Tanım 5.1.27'de $z'\in G$ için (2.1) eşitliği dikkate alınırsa $T(P)(z')=[(P\circ\varphi)]^+(z')$ elde edilir. Γ içerisinde tüm açısal yollar üzerinden $z'\to z\in\Gamma$ limiti alınır ve (2.3) kullanılırsa Γ üzerinde hemen her yerde

$$T(P)(z)=\frac{1}{2}[(P\circ\varphi)](z)+S_\Gamma[(P\circ\varphi)](z)$$

olduğu görülür. Bu eşitlikte norma geçilerek ve Teorem 5.1.15 kullanılarak

$$\|T(P)(z)\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)} \leq \|(P\circ\varphi)(z)/2\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)} + \|S_\Gamma[(P\circ\varphi)](z)\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)}$$

$$\leq c(p)\|(P\circ\varphi)(z)\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)} \leq c(p)\|P\|_{L^{p_0(\cdot)}(\mathbb{T})}$$

elde edilir ki bu eşitsizlik T operatörünün sınırlı olduğunu gösterir.

Benzer şekilde Tanım 5.1.27'de $z''\in G^-$ için (2.2) eşitliği dikkate alınırsa $\widetilde{T}(P)(z'')=[(P\circ\varphi_1)]^-(z'')$ elde edilir. Γ dışında tüm açısal yollar üzerinden $z''\to z\in\Gamma$ limiti alınır ve (2.4) kullanılırsa Γ üzerinde hemen her yerde

$$\widetilde{T}(P)(z)=S_\Gamma[(P\circ\varphi_1)](z)-\frac{1}{2}[(P\circ\varphi_1)](z)$$

olduğu görülür. Bu eşitlikte norma geçilerek ve Teorem 5.1.15 kullanılarak

$$\|\widetilde{T}(P)(z)\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)} \leq \|S_\Gamma[(P\circ\varphi_1)](z)\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)} + \|(P\circ\varphi_1)(z)/2\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)}$$

$$\leq c(p)\|(P\circ\varphi_1)(z)\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)} \leq c(p)\|P\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{T})}$$

olduğu görülür. Böylece, $\widetilde{T}$ operatörünün de sınırlılığı gösterilmiş olur. ■

5.1.29 Önerme $\Gamma\in\mathfrak{D}$ ve $p(\cdot)\in\mathcal{P}_0^{\log}(\Gamma)$ *olsun. Sürekli fonksiyonların kümesi* $f\in L^{p(\cdot)}(\Gamma)$ *uzayında yoğundur.*

İspat $f\in L^{p(\cdot)}(\Gamma)$ olsun. Önerme 5.1.19'dan $f_0\in L^{p_0(\cdot)}(\mathbb{T})$ olduğu biliniyor. Sonuç 2.3.4'ten bilindiği gibi $w\in\mathbb{T}$ için $\{w^n\}$, $n=0,\pm1,\pm2,...$ sistemi $L^{p_0(\cdot)}(\mathbb{T})$ uzayında bir baz üreteceğinden verilen bir $\varepsilon>0$ sayısı için $\mathbb{T}$ üzerinde öyle bir sürekli $g(w)$ fonksiyonu vardır ki $\|f_0(w)-g(w)\|_{L^{p_0(\cdot)}(\mathbb{T})}<\varepsilon$, $w\in\mathbb{T}$ olur. $z\in\Gamma$ için $w=\varphi(z)$ olduğu göz önüne alınırsa $\|f(\cdot)-(g\circ\varphi)(\cdot)\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)}<\varepsilon$ elde edilir ki bu ifade $f\in L^{p(\cdot)}(\Gamma)$ uzayında sürekli fonksiyonların yoğun olduğunu gösterir. ■

Önerme 5.1.29, [25] makalesinde ispatlanmıştır.

Önerme 5.1.19 ve Önerme 5.1.29'un bir sonucu olarak w kompleks değişkenine göre tüm cebirsel polinomların kümesi $E^{p_0(\cdot)}(\mathbb{D})$ ve $E^{p_1(\cdot)}(\mathbb{D})$ sınıflarında yoğundur. Böylece Teorem 2.1.4 uygulanarak T operatörü $\Pi(\mathbb{D})$ kümesinden $E^{p_0(\cdot)}(\mathbb{D})$ sınıfına ve benzer şekilde $\widetilde{T}$ operatörü de $\Pi(\mathbb{D})$ kümesinden $E^{p_0(\cdot)}(\mathbb{D})$ sınıfına lineer ve sınırlı olarak genişletilebilir. T ve $\widetilde{T}$ operatörleri değişken üslü *Smirnov* sınıflarına genişletildiklerinde aşağıdaki şekilde ifade edilirler:

$$T(f)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{f(w)\psi'(w)}{\psi(w)-z}dw,\ z \in G,\ f \in E^{p_0(\cdot)}(\mathbb{D}),$$

$$\widetilde{T}(f)(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{f(w)\psi_1'(w)}{\psi_1(w)-z}dw,\ z \in G^-,\ f \in E^{p_1(\cdot)}(\mathbb{D}).$$

5.1.30 Teorem $\Gamma \in \mathfrak{D}$ ve $p(\cdot) \in \mathcal{P}_0^{\log}(\Gamma)$ *olsun.* $T : E^{p_0(\cdot)}(\mathbb{D}) \to E^{p(\cdot)}(G)$ *operatörü bire bir ve üzerinedir. Ayrıca* $f \in E^{p(\cdot)}(G)$ *için* $T(f_0^+) = f$ *olur.*

İspat $g(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k w^k$, $g \in E^{p_0(\cdot)}(\mathbb{D})$ fonksiyonunun *Taylor* serisi olsun. $p(\cdot) \in \mathcal{P}_0^{\log}(\Gamma)$ olduğundan Önerme 5.1.19 dikkate alınarak ve [58] çalışması kullanılarak $g_r(w) := g(rw)$, $0<r<1$ için $\|g_r - g\|_{L^{p_0(\cdot)}(\mathbb{T})} \to 0$, $r \to 1^-$ elde edilir. T operatörünün sınırlılığı

$$\|T(g_r) - T(g)\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)} \le c(p)\|g_r - g\|_{L^{p_0(\cdot)}(\mathbb{T})} \to 0,\ r \to 1^-. \tag{5.9}$$

olmasını gerektirir. $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k r^k w^k$ serisi $\mathbb{T}$ üzerinde düzgün yakınsar. Böylece, $z \in G$ için $F_k(z)$ ifadesinin integral gösterimi dikkate alınarak

$$T(g_r)(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}\frac{g_r(w)\psi'(w)}{\psi(w)-z}dw$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k(g)r^k\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}\frac{w^k\psi'(w)}{\psi(w)-z}dw$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k(g)r^kF_k(z) \tag{5.10}$$

elde edilir. *Faber* katsayıları tanımı ve (5.1) eşitliğinden $\psi(w)\in G^-$ için

$$a_k(T(g_r))=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}\frac{T(g_r)(\psi(w))}{w^{k+1}}dw$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}\frac{\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_m(g)r^mF_m(\psi(w))}{w^{k+1}}dw$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_m(g)r^m\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}\frac{F_m(\psi(w))}{w^{k+1}}dw\right)$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_m(g)r^m\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}\frac{w^m-E_m(\psi(w))}{w^{k+1}}dw\right)$$

$$=\begin{cases}1\ ,\ k=m\\ 0\ ,\ k\neq m\end{cases}$$

olduğu görülür. Böylece $T(g_r)$'nin *Faber* katsayıları için $a_k(T(g_r))=\alpha_k(g)r^k$ ve

$$a_k(T(g_r))\to\alpha_k(g)r^k,\ r\to 1^- \tag{5.11}$$

elde edilir. $\Gamma\in\mathfrak{D}$ olduğundan [57] çalışmasında verilen $\left|\varphi'(z)\right|\leq c_{40}$ eşitsizliği ve Teorem 2.2.5 kullanılarak

$$\left|a_k(T(g_r))-a_k(T(g))\right|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}\frac{([T(g_r)-T(g)]\circ\psi)(w)}{w^{k+1}}dw\right|$$

$$\leq\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}\left|([T(g_r)-T(g)]\circ\psi)(w)\right||dw|$$

$$\leq\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\left|[T(g_r)-T(g)](z)\right||\varphi'(z)||dz|$$

$$\leq c(p)\left\|T(g_r)-T(g)\right\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)}$$

bulunur ve (5.9) eşitsizliğinden

$$a_k\left(T(g_r)\right)\to a_k\left(T(g)\right)\ ,\ r\to 1^- \tag{5.12}$$

olduğu görülür. Böylece, (5.11) ve (5.12) ifadeleri bir araya getirilerek $k=0,1,2,...$ için $a_k\left(T(g)\right)=\alpha_k(g)$ eşitliğine varılır. Eğer $T(g)=0$ ise $k=0,1,2,...$ için $\alpha_k(g)=a_k\left(T(g)\right)=0$ ve $g=0$ olur. Bu ilişki $T:E^{p_0(\cdot)}(\mathbb{D})\to E^{p(\cdot)}(G)$ operatörünün bire bir olduğunu gösterir. T operatörünün üzerine olduğunu gösterilirse ispat tamamlanmış olur.

$f\in E^{p(\cdot)}(G)$ olsun. Önerme 5.1.19 ve Önerme 5.1.16'ya göre $f_0^+\in E^{p_0(\cdot)}(\mathbb{D})$ olup (2.5) eşitliği ile $k=0,1,2,...$ için

$$a_k(f):=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}\frac{f_0^+(w)}{w^{k+1}}dw=\alpha_k\left(f_0^+\right)$$

elde edilir ki bu da f 'in *Fabe*r katsayılarının f_0^+ 'nın orjindeki *Taylor* katsayıları olduğunu gösterir. Yani $w\in\mathbb{D}$ için $f_0^+(w)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(f)w^k$ olur. (5.10) eşitliği göz önüne alınarak $z\in G$ için $T\left(f_0^+\right)(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\left(f_0^+\right)F_k(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(f)F_k(z)=f$

eşitliği elde edilir. $E^{p(\cdot)}(G)$ uzayındaki bir fonksiyonun *Faber* serisi tek olarak belirlendiğinden bu eşitlik T operatörünün üzerine olduğunu gösterir. ■

Teorem 5.1.30'un ispatı [25] çalışmasında verilmiştir. Benzer şekilde aşağıdaki teorem ispatlanabilir.

5.1.31 Teorem $\Gamma\in\mathfrak{D}$ ve $p(\cdot)\in\mathcal{P}_0^{\log}(\Gamma)$ *olsun.* $\widetilde{T}:E^{p_1(\cdot)}(\mathbb{D})\to E^{p(\cdot)}(G^-)$ *operatörü bire bir ve üzerinedir. Ayrıca* $f\in E^{p(\cdot)}(G^-)$ *için* $\widetilde{T}\left(f_1^+\right)=f$ *olur.*

5.1.32 Önerme $\Gamma \in \mathfrak{D}$ ve $p(\cdot) \in \mathcal{P}_0^{\log}(\Gamma)$ *olsun. Eğer* $f \in E^{p(\cdot)}(G)$ *ise* n *'den bağımsız pozitif* $c_{45}(p)$ *ve* $c_{46}(p)$ *sabitleri vardır öyle ki* $n = 1,2,3,\dots$ *için*

$$E_n\left(f_0^+\right)_{\mathbb{D},p_0(\cdot)} \le c_{45}(p) E_n(f)_{G,p(\cdot)} \le c_{46}(p) E_n\left(f_0^+\right)_{\mathbb{D},p_0(\cdot)}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat Teorem 5.1.28 ve Teorem 5.1.30'dan $T : E^{p_0(\cdot)}(\mathbb{D}) \to E^{p(\cdot)}\left(G^-\right)$ operatörü sınırlı, bire bir ve üzerinedir. Bu nedenle aynı özellikler $T^{-1} : E^{p(\cdot)}(G) \to E^{p_0(\cdot)}(\mathbb{D})$ operatörü için de sağlanır. Böylece, eğer $f \in E^{p(\cdot)}(G)$ ise $T^{-1}(f) = f_0^+ \in E^{p_0(\cdot)}(\mathbb{D})$ olur. $P_n^* \in \wp_n$, $(n = 1,2,\dots)$ polinomları $E^{p(\cdot)}(G)$ uzayında f fonksiyonuna en iyi yaklaşan polinomlar yani $E_n(f)_{G,p(\cdot)} := \left\| f - P_n^* \right\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)}$ ise (5.7) eşitliği dikkate alındığında $T^{-1}\left(P_n^*\right) \in \wp_n \cap \Pi(\mathbb{D})$ olur. T^{-1} operatörünün sınırlılığı kullanılarak

$$\begin{aligned} E_n\left(f_0^+\right)_{\mathbb{D},p_0(\cdot)} &\le \left\| f_0^+ - T^{-1}\left(P_n^*\right) \right\|_{L^{p_0(\cdot)}(\mathbb{T})} = \left\| T^{-1}(f) - T^{-1}\left(P_n^*\right) \right\|_{L^{p_0(\cdot)}(\mathbb{T})} \\ &\le \left\| T^{-1} \right\| \left\| f - P_n^* \right\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)} = c(p) E_n(f)_{G,p(\cdot)} \end{aligned}$$

olup ilk eşitsizlik elde edilir. İkinci eşitsizlik de benzer şekilde gösterilebilir. Teorem 5.1.30 ifadesinden $T\left(f_0^+\right) = f \in E^{p(\cdot)}(G)$ olduğu biliniyor. ${}^*P_n \in \wp_n$, $(n = 0,1,2,\dots)$ polinomları $E^{p_0(\cdot)}(\mathbb{D})$ uzayında f_0^+ fonksiyonuna en iyi yaklaşan polinomlar, yani $E_n\left(f_0^+\right)_{\mathbb{D},p_0(\cdot)} := \left\| f_0^+ - {}^*P_n \right\|_{L^{p_0(\cdot)}(\mathbb{T})}$ ise (5.7) eşitliği dikkate alındığında Teorem 5.1.28 yardımı ile

$$\begin{aligned} E_n(f)_{G,p(\cdot)} &\le \left\| f - T\left({}^*P_n\right) \right\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)} = \left\| T\left(f_0^+\right) - T\left({}^*P_n\right) \right\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)} \\ &\le \left\| T \right\| \left\| f_0^+ - {}^*P_n \right\|_{L^{p_0(\cdot)}(\mathbb{T})} = c(p) E_n\left(f_0^+\right)_{\mathbb{D},p_0(\cdot)} \end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır. ■

Önerme 5.1.32, [25] çalışmasında ispatlanmıştır. Benzer şekilde aşağıdaki önerme ispatlanır.

5.1.33 Önerme $\Gamma \in \mathfrak{D}$ ve $p(\cdot) \in \mathcal{P}_0^{\log}(\Gamma)$ *olsun. Eğer* $f \in E^{p(\cdot)}(G^-)$ *ise* n *'den bağımsız pozitif* $c_{47}(p)$ *ve* $c_{48}(p)$ *sabitleri vardır öyle ki* $n = 1,2,3,...$ *için*

$$E_n\left(f_1^+\right)_{\mathbb{D},p_1(\cdot)} \le c_{47}(p) E_n(f)_{G^-,p(\cdot)} \le c_{48}(p) E_n\left(f_1^+\right)_{\mathbb{D},p_1(\cdot)}$$

eşitsizliği sağlanır.

5.2 $E^{p(\cdot)}(G)$ ve $E^{p(\cdot)}(G^-)$ Değişken Üslü Smirnov Sınıflarında Yaklaşım Teorisinin Düz-Ters Teoremleri ve Bazı Eşitsizlikler

5.2.1 Teorem $\Gamma \in \mathfrak{D}$ *olsun. Eğer* $f \in E^{p(\cdot)}(G)$ *ve* $p(\cdot) \in \mathcal{P}_0^{\log}(\Gamma)$ *ise pozitif bir* $c(p,r)$ *sabiti vardır öyle ki* $r = 1,2,3,...$ *için*

$$E_n(f)_{G,p(\cdot)} \le c(p,r)\Omega_r(f, 1/n)_{G,p(\cdot)} \quad , n = 1,2,3,...$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat $f \in E^{p(\cdot)}(G)$ ise Önerme 5.1.16 ve Önerme 5.1.19 uygulanarak $f_0^+ \in E^{p_0(\cdot)}(\mathbb{D}) \subset E^1(\mathbb{D})$ ve f_0^+ 'nın sınır değer fonksiyonun $L^{p_0(\cdot)}(\mathbb{T})$ uzayına ait olduğu görülür. f_0^+, $\mathbb{D}$ diskinde analitik bir fonksiyon olduğundan her $w \in \mathbb{D}$ için

$$f_0^+(w) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k\left(f_0^+\right) w^k \tag{5.17}$$

biçiminde bir *Taylor* seri açılımına sahiptir. $f_0^+ \in L^{p_0(\cdot)}(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$ sınır fonksiyonunun *Fourier* seri açılımı

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\left(f_0^+\right) e^{ik\theta} \tag{5.18}$$

ve bu serinin n. kısmi toplamı $S_n\left(f_0^+\right)$ olsun. $f_0^+ \in E^1(\mathbb{D})$ olduğundan [59, sayfa 38] 'den

$$c_k\left(f_0^+\right)=\begin{cases} b_k\left(f_0^+\right) & ,k\geq 0 \\ 0 & ,k<0 \end{cases} \tag{5.19}$$

olur. $T_n^*(\cdot)$, f_0^+ sınır fonksiyonuna $L^{p_0(\cdot)}([0,2\pi])$ uzayında en iyi yaklaşan trigonometik polinom olsun. Böylece, Teorem 2.3.3 ile verilen $S_n(f)$ *Fourier* kısmi toplamının sınırlılığı ve Teorem 3.2.1 kullanılarak elde edilir ki

$$\begin{aligned} \left\| f_0^+(w)-\sum_{k=0}^{n} b_k\left(f_0^+\right)w^k \right\|_{L^{p_0(\cdot)}(\mathbb{T})} &= \left\| f_0^+ - S_n\left(f_0^+,\cdot\right)\right\|_{p_0(\cdot)} \\ &\leq \left\| f_0^+ - T_n^*(\cdot)\right\|_{p_0(\cdot)} + \left\| S_n\left(f_0^+ - T_n^*,\cdot\right)\right\|_{p_0(\cdot)} \\ &\leq c(p)\left\| f_0^+ - T_n^*(\cdot)\right\|_{p_0(\cdot)} = c(p)E_n\left(f_0^+\right)_{p_0(\cdot)} \\ &\leq c(p,r)\Omega_r\left(f_0^+,1/n\right)_{p_0(\cdot)} := c(p,r)\Omega_r\left(f_0^+,1/n\right)_{\mathbb{T},p_0(\cdot)}. \end{aligned} \tag{5.20}$$

Önerme 5.1.32, (5.20) eşitsizliği uygulanarak, Tanım 5.1.23 ve Tanım 5.1.21 dikkate alınarak

$$E_n(f)_{G,p(\cdot)} \leq c(p)E_n\left(f_0^+\right)_{\mathbb{D},p_0(\cdot)} \leq c(p,r)\Omega_r\left(f_0^+,1/n\right)_{\mathbb{T},p_0(\cdot)} = c(p,r)\Omega_r(f,\delta)_{G,p(\cdot)}$$

eşitsizlikleri elde edilir. ■

5.2.2 Teorem $\Gamma \in \mathfrak{D}$ *olsun. Eğer* $f \in E^{p(\cdot)}(G)$ *ve* $p(\cdot) \in \mathcal{P}_0^{\log}(\Gamma)$ *ise pozitif bir* $c(p,r)$ *sabiti vardır öyle ki* $r=1,2,3,...$ *için*

$$\Omega_r(f,1/n)_{G,p(\cdot)} \leq \frac{c(p,r)}{n^r}\sum_{k=0}^{n}(k+1)^{r-1}E_k(f)_{G,p(\cdot)} \quad , n=1,2,3,...$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat $f \in E^{p(\cdot)}(G)$ ise Önerme 5.1.16 ve Önerme 5.1.19 uygulanarak $f_0^+ \in E^{p_0(\cdot)}(\mathbb{D}) \subset E^1(\mathbb{D})$ ve f_0^+ 'nın sınır değer fonksiyonu $L^{p_0(\cdot)}(\mathbb{T})$ uzayına ait olduğundan, Tanım 5.1.21'den hareketle

$$\Omega_r\left(f,1/n\right)_{G,p(\cdot)} := \Omega_r\left(f_0^+,1/n\right)_{\mathbb{T},p_0(\cdot)} = \Omega_r\left(f_0^+,1/n\right)_{p_0(\cdot)}$$

elde edilir. $T_n^*(\cdot)$, f_0^+ sınır fonksiyonuna $L^{p_0(\cdot)}([0,2\pi])$ uzayında en iyi yaklaşan trigonometik polinom olsun. $S_n\left(T_n^*\right)$ *Fourier* kısmi toplamı için (5.17), (5.18) ve (5.19) eşitlikleri göz önüne alındığında

$$E_n\left(f_0^+\right)_{p_0(\cdot)} = \left\|f_0^+ - T_n^*(\cdot)\right\|_{p_0(\cdot)} = \left\|f_0^+ - S_n\left(T_n^*,\cdot\right)\right\|_{p_0(\cdot)}$$

$$= \left\|f_0^+(w) - \sum_{k=0}^{n} b_k\left(f_0^+\right)w^k\right\|_{L^{p_0(\cdot)}(\mathbb{T})}$$

olur ki bu eşitlik $E_n\left(f_0^+\right)_{p_0(\cdot)} = E_n\left(f_0^+\right)_{\mathbb{D},p_0(\cdot)}$ olmasını gerektirir. Son olarak $f_0^+ \in L^{p_0(\cdot)}([0,2\pi])$ için Teorem 3.2.2 ve Önerme 5.1.32 kullanılarak

$$\Omega_r\left(f,1/n\right)_{G,p(\cdot)} = \Omega_r\left(f_0^+,1/n\right)_{p_0(\cdot)}$$

$$\leq \frac{c(p,r)}{n^r}\sum_{k=0}^{n}(k+1)^{r-1}E_k\left(f_0^+\right)_{p_0(\cdot)}$$

$$= \frac{c(p,r)}{n^r}\sum_{k=0}^{n}(k+1)^{r-1}E_k\left(f_0^+\right)_{\mathbb{D},p_0(\cdot)}$$

$$\leq \frac{c(p,r)}{n^r}\sum_{k=0}^{n}(k+1)^{r-1}E_n\left(f\right)_{G,p(\cdot)}$$

eşitsizliği elde edildiğinden teorem ispatlanmış olur. ■

Teorem 5.2.1 ve Teorem 5.2.2 ifadeleri ağırlıklı durumda farklı tip düzgünlük modülleri için ispatsız olarak [23] çalışmasında verilmiştir. [25] çalışmasında ise $r = 1$ olduğu özel durumda Teorem 5.2.2 ispatlanmıştır.

5.2.3 Teorem $\Gamma \in \mathfrak{D}$, $p(\cdot) \in \mathcal{P}_0^{\log}(\Gamma)$ *olsun. Eğer* $f \in E^{p(\cdot)}(G)$ *fonksiyonuna karşılık gelen Faber serisi* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(f) F_k(z)$ *ve* $\{\lambda_k\}_0^{\infty}$ *, kompleks sayıların* (2.10) *şartını sağlayan bir dizisi ise öyle bir* $F \in E^{p(\cdot)}(G)$ *fonksiyonu ve pozitif bir* $c(p)$ *sabiti vardır ki* $F(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k a_k(f) F_k(z)$, $z \in G$ *ve* $\|F\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)} \leq c(p) \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)}$ *olur.*

İspat $f \in E^{p(\cdot)}(G)$ ise $f_0^+ \in E^{p_0(\cdot)}(\mathbb{D}) \subset E^1(\mathbb{D})$ olduğu biliniyor. Ayrıca, daha önce belirtildiği gibi $a_k(f)$ *Faber* katsayıları f_0^+ fonksiyonunun orjindeki *Taylor* katsayılarıdır, yani (5.17) dikkate alınarak elde edilir ki

$$f_0^+(w) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f) w^k, \ w \in \mathbb{D} .$$

Teorem 2.3.16'dan öyle bir $h \in L^{p_0(\cdot)}(\mathbb{T})$ fonksiyonu vardır ki $c_k(h) = \lambda_k c_k(f_0^+)$ ve pozitif bir $c(p)$ sabiti için $\|h\|_{L^{p_0(\cdot)}(\mathbb{T})} \leq c(p) \|f_0^+\|_{L^{p_0(\cdot)}(\mathbb{T})}$ olur.

$F_0 := h^+ \in E^{p_0(\cdot)}(\mathbb{D}) \subset E^1(\mathbb{D})$ olacak şekilde bir F_0 fonksiyonunu ele alalım. F_0'ın *Taylor* katsayıları $b_k(F_0)$, $k = 0,1,2,...$ için (2.5) ve (5.19) eşitlikleri kullanılarak

$$b_k(F_0) = b_k(h^+) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{h^+(w)}{w^{k+1}} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{h(w)}{w^{k+1}} dw + \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{h^-(w)}{w^{k+1}} dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{h(w)}{w^{k+1}} dw = c_k(h) = \lambda_k c_k(f_0^+) = \lambda_k b_k(f_0^+) = \lambda_k a_k(f)$$

eşitliği geçerlidir. Öte yandan bu son eşitlik

$$\|F_0\|_{L^{p_0(\cdot)}(\mathbb{T})} \leq \|h^+\|_{L^{p_0(\cdot)}(\mathbb{T})} \leq c(p) \|h\|_{L^{p_0(\cdot)}(\mathbb{T})} \leq c(p) \|f_0^+\|_{L^{p_0(\cdot)}(\mathbb{T})}$$

olmasını gerektirir. Böylece $f_0^+ \in E^{p_0(\cdot)}(\mathbb{D})$, *Taylor* serisi (5.17) biçiminde olan bir fonksiyon ise *Taylor* katsayıları $k = 0,1,2,...$ için $b_k(F_0) = \lambda_k b_k(f_0^+) = \lambda_k a_k(f)$ olan öyle bir $F_0 \in E^{p_0(\cdot)}(\mathbb{D})$ fonksiyonu vardır ki bu fonksiyon

$$\|F_0\|_{L^{p_0(\cdot)}(\mathbb{T})} \leq c(p) \|f_0^+\|_{L^{p_0(\cdot)}(\mathbb{T})} \tag{5.21}$$

eşitsizliğini sağlar**.** Aynı zamanda Teorem 5.1.30 yardımı ile $F := T(F_0) \in E^{p(\cdot)}(G)$ olup (5.7) eşitliği ve $k = 0,1,2,...$ için $b_k(F_0) = \lambda_k a_k(f)$ olduğu göz önüne alınarak

$$F(z) = T(F_0)(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k a_k(f) F_k(z) \;, z \in G$$

olduğu görülür. Teorem 5.1.28, (2.3) eşitliği, Teorem 5.1.15, (5.21) eşitliği ve son olarak Önerme 5.1.19 kullanılarak istenen

$$\|F\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)} = \|T(F_0)\|_{L^{p_0(\cdot)}(\mathbb{T})} \leq \|T\| \|F_0\|_{L^{p_0(\cdot)}(\mathbb{T})}$$

$$\leq c(p) \|f_0^+\|_{L^{p_0(\cdot)}(\mathbb{T})} \leq c(p) \|f_0\|_{L^{p_0(\cdot)}(\mathbb{T})} \leq c(p) \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)}$$

eşitsizliğine ulaşılır. ■

$f \in E^{p(\cdot)}(G) \subset E^1(G)$ fonksiyonunun *Faber* serisinin *Lacunary* kısmi toplamı $k = 0$ olduğunda $a_{2^{-1}}(f) F_{2^{-1}}(z) = 0$ kabul edilerek $z \in G$ için

$$\Delta_k(f)(z) := \sum_{j=2^{k-1}}^{2^k - 1} a_j(f) F_j(z) \,, k = 0,1,2,...$$

olarak alınırsa $E^{p(\cdot)}(G)$ sınıfları için aşağıdaki *Littlewood-Paley* tipi teorem geçerlidir:

5.2.4 Teorem $\Gamma \in \mathfrak{D}$ *ve* $p(\cdot) \in \mathcal{P}_0^{\log}(\Gamma)$ *olsun. Eğer* $f \in E^{p(\cdot)}(G)$ *ise öyle pozitif* $c_{49}(p)$ *ve* $c_{50}(p)$ *sabitleri vardır ki*

$$c_{49}(p) \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)} \leq \left\| \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\Delta_k(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)} \leq c_{50}(p) \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat $\mathcal{A}: f \to \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left|\Delta_k(f)\right|^2\right)^{1/2}$ operatörünü tanımlayalım. $\Gamma \in \mathfrak{D}$, $\omega \in A_p(\Gamma)$ ve $1 < p < \infty$ olsun. [60] çalışmasında ispatlanan Teorem 3 kullanılarak, $f \in E^p(G,\omega)$ ise p sabitine bağlı pozitif c_j, $j = 49,50$ sabitleri için

$$c_j \|f\|_{L^p(\Gamma,\omega)} \le \left\| \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left|\Delta_k(f)\right|^2\right)^{1/2} \right\|_{L^p(\Gamma,\omega)} \le c_j \|f\|_{L^p(\Gamma,\omega)} \tag{5.22}$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür. (5.22)'nin sağ taraftaki eşitsizlik $\mathcal{A}$ operatörünün $L_\omega^{\,p}(\Gamma)$, $\omega \in A_p(\Gamma)$, uzayında sınırlı bir operatör olmasını gerektirir. Diğer yandan Teorem 5.1.25'ten maksimal operatör $\mathcal{M}$ 'nin $L^{p(\cdot)}(\Gamma)$ uzayında $p(\cdot) \in \mathcal{P}_0^{\log}(\Gamma)$ şartı altında sınırlı olduğu biliniyor. Böylece, Teorem 5.1.26'da ifade edilen tüm koşullar sağlandığından bu teorem uygulanarak

$$\left\| \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left|\Delta_k(f)\right|^2\right)^{1/2} \right\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)} \le c_{50}(p) \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)}$$

eşitsizliği elde edilir. Eğer $\mathcal{A}^{-1}: \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left|\Delta_k(f)\right|^2\right)^{1/2} \to f$ operatörü tanımlarsak benzer şekilde (5.22) eşitsizliği, Teorem 5.1.25 ve Teorem 5.1.26 kullanılarak diğer eşitsizliğinde ispatlanabileceği görülür. ■

Teorem 5.2.1, 5.2.2, 5.2.3 ve 5.2.4' ün ispatlarında kullanılan yöntemler ile benzer süreçler tekrarlanarak sırasıyla aşağıda ifade edilen teoremler ispatlanır.

5.2.5 Teorem *$\Gamma \in \mathfrak{D}$ olsun. Eğer $f \in E^{p(\cdot)}(G^-)$ ve $p(\cdot) \in \mathcal{P}_0^{\log}(\Gamma)$ ise pozitif bir $c(p,r)$ sabiti vardır öyle ki $r = 1,2,3,...$ için*

$$E_n(f)_{G^-,p(\cdot)} \le c(p,r)\Omega_r(f,1/n)_{G^-,p(\cdot)} \;, \; n = 1,2,3,...$$

eşitsizliği sağlanır.

5.2.6 Teorem $\Gamma \in \mathfrak{D}$ *olsun. Eğer* $f \in E^{p(\cdot)}(G^-)$ *ve* $p(\cdot) \in \mathcal{P}_0^{\log}(\Gamma)$ *ise pozitif bir* $c(p,r)$ *sabiti vardır öyle ki* $r = 1,2,3,...$ *için*

$$\Omega_r(f,1/n)_{G^-,p(\cdot)} \leq \frac{c(p,r)}{n^r} \sum_{k=0}^{n} (k+1)^{r-1} E_k(f)_{G^-,p(\cdot)} \text{ , } n = 1,2,3,...$$

eşitsizliği sağlanır.

5.2.7 Teorem $\Gamma \in \mathfrak{D},\ p(\cdot) \in \mathcal{P}_0^{\log}(\Gamma)$ *olsun. Eğer* $f \in E^{p(\cdot)}(G^-)$ *fonksiyonuna karşılık gelen Faber serisi* $\sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{a_k}(f)\widetilde{F_k}(1/z)$ *ve* $\{\lambda_k\}_0^{\infty}$ *, kompleks sayıların* (2.10) *şartını sağlayan bir dizisi ise öyle bir* $F \in E^{p(\cdot)}(G^-)$ *fonksiyonu ve pozitif bir* $c(p)$ *sabiti vardır ki* $F(z) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \widetilde{a_k}(f)\widetilde{F_k}(1/z)$, $z \in G^-$ *ve* $\|F\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)} \leq c(p)\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)}$ *olur.*

$f \in E^{p(\cdot)}(G^-)$ fonksiyonunun *Faber* serisinin *Lacunary* kısmi toplamı $j = 2^{-1},0$ olduğunda $\widetilde{a_j}(f)\widetilde{F_j}(1/z) = 0$ kabul edilerek $z \in G^-$ için

$$\widetilde{\Delta_k}(f)(z) := \sum_{j=2^{k-1}}^{2^k-1} \widetilde{a_j}(f)\widetilde{F_j}(1/z) \text{ , } k = 1,2,...$$

olarak alınırsa $E^{p(\cdot)}(G^-)$ sınıfları için aşağıdaki *Littlewood-Paley* tipi teorem geçerlidir:

5.2.8 Teorem $\Gamma \in \mathfrak{D}$ *ve* $p(\cdot) \in \mathcal{P}_0^{\log}(\Gamma)$ *olsun. Eğer* $f \in E^{p(\cdot)}(G^-)$ *ise öyle pozitif* $c_{51}(p)$ *ve* $c_{52}(p)$ *sabitleri vardır ki*

$$c_{51}(p)\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)} \leq \left\| \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left| \widetilde{\Delta_k}(f) \right|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)} \leq c_{52}(p)\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

(5.20) ve (5.26) eşitsizliklerinin ispatlarında kullanılan yöntemler ile $E^{p(\cdot)}(\mathbb{D})$ sınıfından olan herhangi bir fonksiyon için aşağıdaki sonuç elde edilebilir.

5.2.9 Sonuç $g \in E^{p(\cdot)}(\mathbb{D})$ *ve* $p(\cdot) \in \mathcal{P}_0^{\log}(\mathbb{T})$ *olsun. Eğer* $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k(g) w^k$ *serisi g fonksiyonunun orjindeki Taylor serisinin n. kısmi toplamı ise o zaman n 'den bağımsız, pozitif bir* $c(p,r)$ *sabiti vardır öyle ki* $n = 1,2,3,...$ *için*

$$\left\| g(w) - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k(g) w^k \right\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{T})} \le c(p,r)\, \Omega_r(g, 1/n)_{\mathbb{T},p(\cdot)}$$

eşitsizliği sağlanır.

(5.21) ve (5.27) eşitsizliklerinin ispatında kullanılan yöntemler ile $E^{p(\cdot)}(\mathbb{D})$ sınıfından olan herhangi bir fonksiyon için Sonuç 5.2.10'un sağlanacağı kolayca gösterilebilir. Ayrıca Teorem 5.2.3 ve Teorem 5.2.7'nin ispatı için kullanılan yöntemler ile Tanım 5.1.17 dikkate alınarak Sonuç 5.2.11 elde edilebilir.

5.2.10 Sonuç $p(\cdot) \in \mathcal{P}_0^{\log}(\mathbb{T})$ *ve* $\{\lambda_k\}_0^{\infty}$, *kompleks sayıların* (2.10) *şartını sağlayan bir dizisi olsun. Eğer* $g \in E^{p(\cdot)}(\mathbb{D})$, *Taylor serisi*

$$g(w) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(g) w^k, \ w \in \mathbb{D}$$

olan bir fonksiyon ise o zaman Taylor serisi

$$g^*(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k b_k(g) w^k, \ w \in \mathbb{D}$$

biçiminde olan bir $g^* \in E^{p(\cdot)}(\mathbb{D})$ *fonksiyonu vardır ve pozitif bir* $c(p)$ *sabiti için*

$$\|g^*\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{T})} \le c(p) \|g\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{T})}$$

eşitsizliği sağlanır.

5.2.11 Sonuç $\Gamma \in \mathfrak{D}$, $p(\cdot) \in \mathcal{P}_0^{\log}(\Gamma)$ *olsun. Eğer* $f \in L^{p(\cdot)}(\Gamma)$ *fonksiyonuna karşılık gelen Faber-Laurent serisi* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k F_k(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{a_k}\widetilde{F_k}(1/z)$ *ve* $\{\lambda_k\}_0^{\infty}$, *kompleks sayıların* (2.10) *şartını sağlayan bir dizisi ise öyle bir* $F \in L^{p(\cdot)}(\Gamma)$ *fonksiyonu ve pozitif bir* $c(p)$ *sabiti vardır ki* $F(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k a_k F_k(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \widetilde{a_k}\widetilde{F_k}(1/z)$ *ve* $\|F\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)} \le c(p)\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)}$ *olur.*

5.3 $Lip^{p(\cdot),\alpha}(G)$ ve $Lip^{p(\cdot),\alpha}(G^-)$ Genelleşmiş Değişken Üslü Lipschitz Sınıflarının Konstrüktif Karakterizasyonu

Teorem 5.2.2 yardımı ile aşağıdaki sonuç elde edilir.

5.3.1 Sonuç $\Gamma \in \mathfrak{D}$, $p(\cdot) \in \mathcal{P}_0^{\log}(\Gamma)$ *ve* $r = 1,2,3,\dots$ *olsun. Eğer* $f \in E^{p(\cdot)}(G)$ *ve* $n = 1,2,3,\dots$ *için* $E_n(f)_{G,p(\cdot)} = \mathcal{O}(n^{-\alpha})$, $\alpha>0$, *ise*

$$\Omega_r(f,\delta)_{G,p(\cdot)} = \begin{cases} \mathcal{O}(\delta^{\alpha}) & , r > \alpha \\ \mathcal{O}(\delta^{\alpha}\log(1/\delta)), & r = \alpha \\ \mathcal{O}(\delta^{r}) & , r < \alpha. \end{cases}$$

5.3.2 Tanım $\alpha > 0$ *ve* $r := [\![\alpha]\!] + 1$ *için*

$$Lip^{p(\cdot),\alpha}(G) := \left\{ f \in E^{p(\cdot)}(G) : \Omega_r(f,\delta)_{G,p(\cdot)} = \mathcal{O}(\delta^{\alpha}),\ \delta>0 \right\}$$

ifadesine $E^{p(\cdot)}(G)$ ***sınıfındaki genelleşmiş değişken üslü Lipschitz sınıfı*** *denir.*

5.3.3 Sonuç $\Gamma \in \mathfrak{D}$, $p(\cdot) \in \mathcal{P}_0^{\log}(\Gamma)$ *ve* $r = 1,2,3,\dots$ *olsun. Eğer* $f \in E^{p(\cdot)}(G)$ *ve* $n = 1,2,3,\dots$ *için* $E_n(f)_{G,p(\cdot)} = \mathcal{O}(n^{-\alpha})$, $\alpha>0$, *ise* $f \in Lip^{p(\cdot),\alpha}(G)$.

Teorem 5.2.1 yardımı ile aşağıdaki sonuç elde edilir.

5.3.4 Sonuç *Eğer* $f \in Lip^{p(\cdot),\alpha}(G)$, $\alpha > 0$, $\Gamma \in \mathfrak{D}$ *ve* $p(\cdot) \in \mathcal{P}_0^{\log}(\Gamma)$ *ise o zaman* $E_n(f)_{G,p(\cdot)} = \mathcal{O}(n^{-\alpha})$, $n = 1,2,3,....$ *olur.*

Sonuç 5.3.3 ve Sonuç 5.3.4 bir araya getirilerek aşağıdaki sonuç elde edilir.

5.3.5 Sonuç $f \in E^{p(\cdot)}(G)$, $\Gamma \in \mathfrak{D}$ *ve* $p(\cdot) \in \mathcal{P}_0^{\log}(\Gamma)$ *olsun. O zaman* $\alpha > 0$ *için*

$$i)\ f \in Lip^{p(\cdot),\alpha}(G),$$
$$ii)\ E_n(f)_{G,p(\cdot)} = \mathcal{O}(n^{-\alpha}),\ n = 1,2,3,...$$

ifadeleri denktir.

Teorem 5.2.6 yardımı ile aşağıdaki sonuç elde edilir.

5.3.6 Sonuç $\Gamma \in \mathfrak{D}$, $p(\cdot) \in \mathcal{P}_0^{\log}(\Gamma)$ *ve* $r = 1,2,3,...$ *olsun. Eğer* $f \in E^{p(\cdot)}(G^-)$ *ve* $n = 1,2,3,...$ *için* $E_n(f)_{G^-,p(\cdot)} = \mathcal{O}(n^{-\alpha})$, $\alpha>0$, *ise*

$$\Omega_r(f,\delta)_{G^-,p(\cdot)} = \begin{cases} \mathcal{O}(\delta^\alpha) & , r > \alpha \\ \mathcal{O}(\delta^\alpha \log(1/\delta)), & r = \alpha \\ \mathcal{O}(\delta^r) & , r < \alpha. \end{cases}$$

5.3.7 Tanım $\alpha > 0$ *ve* $r := [\![\alpha]\!] + 1$ *için*

$$Lip^{p(\cdot),\alpha}(G^-) := \left\{ f \in E^{p(\cdot)}(G^-) : \Omega_r(f,\delta)_{G^-,p(\cdot)} = \mathcal{O}(\delta^\alpha),\ \delta>0 \right\}$$

ifadesine $E^{p(\cdot)}(G^-)$ ***sınıfındaki genelleşmiş değişken üslü Lipschitz sınıfı*** *denir.*

5.3.8 Sonuç $\Gamma \in \mathfrak{D}$, $p(\cdot) \in \mathcal{P}_0^{\log}(\Gamma)$ *ve* $r = 1,2,\ldots$ *olsun. Eğer* $f \in E^{p(\cdot)}(G^-)$ *ve* $n = 1,2,3,\ldots$ *için* $E_n(f)_{G^-,p(\cdot)} = \mathcal{O}(n^{-\alpha})$, $\alpha>0$, *ise* $f \in Lip^{p(\cdot),\alpha}(G^-)$.

Teorem 5.2.5 yardımı ile aşağıdaki sonuç elde edilir.

5.3.9 Sonuç *Eğer* $f \in Lip^{p(\cdot),\alpha}(G^-)$, $\alpha > 0$, $\Gamma \in \mathfrak{D}$ *ve* $p(\cdot) \in \mathcal{P}_0^{\log}(\Gamma)$ *ise o zaman* $E_n(f)_{G^-,p(\cdot)} = \mathcal{O}(n^{-\alpha})$, $n = 1,2,3,\ldots$. *olur.*

Sonuç 5.3.8 ve Sonuç 5.3.9 bir araya getirilerek aşağıdaki sonuç elde edilir.

5.3.10 Sonuç $f \in E^{p(\cdot)}(G^-)$, $\Gamma \in \mathfrak{D}$ *ve* $p(\cdot) \in \mathcal{P}_0^{\log}(\Gamma)$ *olsun. O zaman* $\alpha > 0$ *için*

i) $f \in Lip^{p(\cdot),\alpha}(G^-)$,

ii) $E_n(f)_{G^-,p(\cdot)} = \mathcal{O}(n^{-\alpha})$, $n = 1,2,3,\ldots$

ifadeleri denktir.

5.4 $E^{p(\cdot)}(G)$ ve $E^{p(\cdot)}(G^-)$ Değişken Üslü Smirnov Sınıflarında de la Vallée-Poussin ve Jackson Ortalamaları ile Yaklaşım

5.4.1 Teorem $\Gamma \in \mathfrak{D}$ *olsun. Eğer* $f \in E^{p(\cdot)}(G)$ *ve* $p(\cdot) \in \mathcal{P}_0^{\log}(\Gamma)$ *ise* n *'den bağımsız pozitif bir* $c(p,r)$ *sabiti vardır öyle ki*

$$\left\| f - V_n^G(f,\cdot) \right\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)} \le c(p,r)\,\Omega_r(f,1/n)_{G,p(\cdot)} \ , \ n = 1,2,\ldots$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat $f\in E^{p(\cdot)}(G)$ ise Önerme 5.1.16 ve Önerme 5.1.19 yardımı ile $f_0^+\in E^{p_0(\cdot)}(\mathbb{D})\subset E^1(\mathbb{D})$ ve f_0^+ 'nın sınır değer fonksiyonu $L^{p_0(\cdot)}(\mathbb{T})$ uzayına ait bir fonksiyon olur. $\mathbb{D}$ diskinde analitik f_0^+ fonksiyonu için (5.17) *Taylor* seri açılımı, $f_0^+\in L^{p_0(\cdot)}(\mathbb{T})\subset L^1(\mathbb{T})$ sınır fonksiyonu için (5.18) *Fourier* serisi, $f_0^+\in E^1(\mathbb{D})$ için (5.19) eşitliği dikkate alınarak

$$f_0^+(w)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\left(f_0^+\right)w^k$$

olduğu görülür. Diğer yandan $f\in E^{p(\cdot)}(G)$ fonksiyonunun $a_k(f),\ k=0,1,2,...$ *Faber* katsayılarının $f_0^+\in E^{p_0(\cdot)}(\mathbb{D})$ fonksiyonunun *Taylor* katsayıları olduğunu, Tanım 5.1.9'u ve (5.7) eşitliğini dikkate alarak $n=1,2,3,...$ için

$$T\left(\sum_{k=0}^{n}c_k\left(f_0^+\right)w^k\right)=\sum_{k=0}^{n}a_k(f)F_k(z)\quad \text{ve}\quad T\left(V_n^{\mathbb{D}}\left(f_0^+,w\right)\right)=V_n^G(f,z)$$

elde edilir. Teorem 2.3.13 ve Teorem 5.2.1 yardımı ile $n=1,2,3,...$ için

$$\left\|f_0^+-V_n^{\mathbb{D}}\left(f_0^+,\cdot\right)\right\|_{L^{p_0(\cdot)}(\mathbb{T})}\leq c(p,r)\Omega_r\left(f_0^+,1/n\right)_{\mathbb{T},p_0(\cdot)} \tag{5.29}$$

değerlendirmesi geçerlidir. Teorem 5.1.28, Teorem 5.1.30, (5.29) eşitsizliği kullanılarak ve son olarak Tanım 5.1.21 dikkate alınarak

$$\left\|f-V_n^G(f,\cdot)\right\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)}=\left\|T\left(f_0^+\right)-T\left(V_n^{\mathbb{D}}\left(f_0^+,\cdot\right)\right)\right\|_{L^{p_0(\cdot)}(\mathbb{T})}\leq\|T\|\left\|f_0^+-V_n^{\mathbb{D}}\left(f_0^+,\cdot\right)\right\|_{L^{p_0(\cdot)}(\mathbb{T})}$$

$$\leq c(p,r)\Omega_r\left(f_0^+,1/n\right)_{\mathbb{T},p_0(\cdot)}=c(p,r)\Omega_r(f,1/n)_{G,p(\cdot)}$$

eşitsizliği elde edilir. ■

5.4.2 Teorem *$\Gamma\in\mathfrak{D}$ olsun. Eğer $f\in E^{p(\cdot)}(G)$ ve $p(\cdot)\in\mathcal{P}_0^{\log}(\Gamma)$ ise n 'den bağımsız pozitif bir $c(p)$ sabiti vardır öyle ki*

$$\left\|f-J_n^G(f,\cdot)\right\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)}\leq c(p)\Omega(f,1/n)_{G,p(\cdot)}\ ,\quad n=1,2,...$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat $f \in E^{p(\cdot)}(G)$ için Teorem 5.4.1 ispatında elde edilen

$$T\left(\sum_{k=0}^{n} c_k\left(f_0^+\right)w^k\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k(f)F_k(z)$$

eşitliği ve Tanım 5.1.8 dikkate alınarak $T\left(J_n^{\mathbb{D}}\left(f_0^+, w\right)\right) = J_n^G(f, z)$ olduğu görülür. Diğer yandan Teorem 2.3.11 yardımı ile $n = 1,2,3,...$ için

$$\left\|f_0^+ - J_n^{\mathbb{D}}\left(f_0^+, \cdot\right)\right\|_{L^{p_0(\cdot)}(\mathbb{T})} \leq c(p,r)\Omega\left(f_0^+, 1/n\right)_{\mathbb{T}, p_0(\cdot)} \tag{5.30}$$

değerlendirmesi geçerlidir. Teorem 5.1.28, Teorem 5.1.30, (5.30) eşitsizliği kullanılarak ve son olarak Tanım 5.1.21 dikkate alınarak

$$\left\|f - J_n^G(f, \cdot)\right\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)} = \left\|T\left(f_0^+\right) - T\left(J_n^{\mathbb{D}}\left(f_0^+, \cdot\right)\right)\right\|_{L^{p_0(\cdot)}(\mathbb{T})} \leq \|T\| \left\|f_0^+ - J_n^{\mathbb{D}}\left(f_0^+, \cdot\right)\right\|_{L^{p_0(\cdot)}(\mathbb{T})}$$

$$\leq c(p,r)\Omega\left(f_0^+, 1/n\right)_{\mathbb{T}, p_0(\cdot)} = c(p,r)\Omega(f, 1/n)_{G, p(\cdot)}$$

eşitsizliği elde edilir. ■

Teorem 5.4.1 ve Teorem 5.4.2, [61] çalışmasında ispatlanmıştır. Benzer yöntemle aşağıdaki teoremler ispatlanır.

5.4.3 Teorem $\Gamma \in \mathfrak{D}$ *olsun. Eğer* $f \in E^{p(\cdot)}\left(G^-\right)$ *ve* $p(\cdot) \in \mathcal{P}_0^{\log}(\Gamma)$ *ise* n *'den bağımsız pozitif bir* $c(p,r)$ *sabiti vardır öyle ki*

$$\left\|f - V_n^{G^-}(f, \cdot)\right\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)} \leq c(p,r)\Omega_r(f, 1/n)_{G^-, p(\cdot)}, \quad n = 1,2,...$$

eşitsizliği sağlanır.

5.4.4 Teorem $\Gamma \in \mathfrak{D}$ *olsun. Eğer* $f \in E^{p(\cdot)}\left(G^-\right)$ *ve* $p(\cdot) \in \mathcal{P}_0^{\log}(\Gamma)$ *ise* n *'den bağımsız pozitif bir* $c(p)$ *sabiti vardır öyle ki*

$$\left\|f - J_n^{G^-}(f, \cdot)\right\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)} \leq c(p)\Omega(f, 1/n)_{G^-, p(\cdot)}, \quad n = 1,2,...$$

eşitsizliği sağlanır.

5.5 $L^{p(\cdot)}(\Gamma)$ Değişken Üslü Lebesgue Uzaylarında Faber-Laurent Rasyonel Fonksiyonu ile Yaklaşım

5.5.1 Önerme *Eğer* $g \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$ *ve* $p(\cdot) \in \mathcal{P}_0^{\log}(\mathbb{T})$ *ise öyle bir pozitif* $c(p)$ *sabiti vardır ki* $\Omega(S_{\mathbb{T}}(g),\cdot)_{\mathbb{T},p(\cdot)} \le c(p)\Omega(g,\cdot)_{\mathbb{T},p(\cdot)}$ *eşitsizliği sağlanır.*

İspat $\delta \in [0,\pi]$, $h < \delta$ ve $w \in \mathbb{T}$ olsun. *Fubini* teoremi uygulanırsa

$$\frac{1}{h}\int_0^h S_{\mathbb{T}}(g)(we^{it})dt = \frac{1}{h}\int_0^h \frac{1}{2\pi i}(P.\ V)\left(\int_{\mathbb{T}} \frac{g(\tau e^{it})d\tau}{\tau - w}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i}(P.\ V)\int_{\mathbb{T}} \frac{\frac{1}{h}\int_0^h g(\tau e^{it})dt}{\tau - w}d\tau = S_{\mathbb{T}}\left[\frac{1}{h}\int_0^h g(\tau e^{it})dt\right](w)$$

olduğu görülür. Bu eşitlik ve Teorem 5.1.15 uygulanarak

$$\left\| S_{\mathbb{T}}(g)(w) - \frac{1}{h}\int_0^h S_{\mathbb{T}}(g)(we^{it})dt \right\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{T})} = \left\| S_{\mathbb{T}}(g)(w) - S_{\mathbb{T}}\left[\frac{1}{h}\int_0^h g(\tau e^{it})dt\right](w) \right\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{T})}$$

$$= \left\| S_{\mathbb{T}}\left[g - \frac{1}{h}\int_0^h g(\tau e^{it})dt\right](w) \right\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{T})}$$

$$\le c(p)\left\| \left[g - \frac{1}{h}\int_0^h g(\tau e^{it})dt\right](w) \right\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{T})}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Burada $|h| < \delta$ üzerinden supremum alınırsa Tanım 5.1.20 kullanılarak $\Omega(S_{\mathbb{T}}(g),\cdot)_{\mathbb{T},p(\cdot)} \le c(p)\Omega(g,\cdot)_{\mathbb{T},p(\cdot)}$ eşitsizliğine ulaşılır. ■

5.5.2 Önerme *Eğer* $g \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$ *ve* $p(\cdot) \in \mathcal{P}_0^{\log}(\mathbb{T})$ *ise öyle bir pozitif* $c(p)$ *sabiti vardır ki* $\Omega(g^+,\cdot)_{\mathbb{T},p(\cdot)} \le c(p)\Omega(g,\cdot)_{\mathbb{T},p(\cdot)}$ *eşitsizliği sağlanır.*

İspat $\mathbb{T}$ üzerinde hemen her yerde $g^+ = \frac{1}{2}g + S_{\mathbb{T}}(g)$ eşitliği sağlanacağından Önerme 5.5.1 uygulanarak elde edilir ki

$$\Omega\left(g^{+},\cdot\right)_{\mathbb{T},p(\cdot)}\leq\Omega\left(\tfrac{1}{2}g,\cdot\right)_{\mathbb{T},p(\cdot)}+\Omega\left(S_{\mathbb{T}}(g),\cdot\right)_{\mathbb{T},p(\cdot)}\leq c(p)\,\Omega\left(g,\cdot\right)_{\mathbb{T},p(\cdot)}. \blacksquare$$

5.5.3 Teorem $\Gamma\in\mathfrak{D}$ ve $p(\cdot)\in\mathcal{P}_0^{\log}(\Gamma)$ *olsun. Eğer* $f\in L^{p(\cdot)}(\Gamma)$ *ise pozitif bir* $c(p)$ *sabiti vardır öyle ki* $n=1,2,3,\ldots$ *için*

$$\left\|f-R_n(f,\cdot)\right\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)}\leq c(p)\left[\Omega\left(f_0,1/n\right)_{\mathbb{T},p_0(\cdot)}+\Omega\left(f_1,1/n\right)_{\mathbb{T},p_1(\cdot)}\right]$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat (2.5) eşitliği geçerli olduğundan teoremi ispatlamak için

$$\left\|f^{-}(z)+\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\widetilde{F_k}(1/z)\right\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)}\leq c(p)\,\Omega\left(f_1,1/n\right)_{\mathbb{T},p_1(\cdot)} \tag{5.33}$$

ve

$$\left\|f^{+}(z)-\sum_{k=0}^{n}a_kF_k(z)\right\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)}\leq c(p)\,\Omega\left(f_0,1/n\right)_{\mathbb{T},p_0(\cdot)} \tag{5.34}$$

eşitsizliklerinin gösterilmesi yeterlidir.

(2.5) ile ifade edilen $f=f^{+}-f^{-}$ eşitliğinden $\mathbb{T}$ üzerinde hemen her yerde

$$f_0(w)=f_0^{+}(w)-f_0^{-}(w) \quad \text{ve} \quad f_1(w)=f_1^{+}(w)-f_1^{-}(w)$$

eşitlikleri geçerlidir. Bu eşitlikler, φ ve φ_1 dönüşümleri yardımı ile Γ üzerinde hemen her yerde aşağıdaki gibi ifade edilebilirler:

$$f(z)=\left[f_0^{+}(\varphi(z))-f_0^{-}(\varphi(z))\right], \tag{5.35}$$

$$f(z)=\left[f_1^{+}(\varphi_1(z))-f_1^{-}(\varphi_1(z))\right]. \tag{5.36}$$

(5.6) eşitliği kullanılarak $z'\in G$ için görülür ki

$$\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\widetilde{F_k}(1/z')=\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\varphi_1^k(z')-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\varphi_1^k(\zeta)}{\zeta-z'}d\zeta$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\varphi_1^k(z')-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\varphi_1^k(\zeta)-f_1^+(\varphi_1(\zeta))}{\zeta-z'}d\zeta$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f_1^-(\varphi_1(\zeta))}{\zeta-z'}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z'}d\zeta .$$

Önerme 5.1.16’dan $f_1^-(\varphi_1(\zeta))\in E^{p(\cdot)}(G)\subset E^1(G)$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f_1^-(\varphi_1(\zeta))}{\zeta-z'}d\zeta=f_1^-(\varphi_1(z'))$$

elde edilir. Böylece, (2.1) *Cauchy* tipi integral dikkate alınarak

$$\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\widetilde{F_k}(1/z')=\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\varphi_1^k(z')-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\varphi_1^k(\zeta)-f_1^+(\varphi_1(\zeta))}{\zeta-z'}d\zeta$$

$$-f_1^-(\varphi_1(z'))+f^+(z')$$

yazılabilir. (2.3) eşitliği ve Γ ’nın içerisindeki tüm açısal yollar üzerinden $z'\to z$ iken limit alınarak Γ üzerinde hemen her yerde elde edilir ki

$$\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\widetilde{F_k}(1/z)=\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\varphi_1^k(z)-\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\varphi_1^k(z)-f_1^+(\varphi_1(z))\right)$$

$$-S_{\Gamma}\left(\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\varphi_1^k(z)-f_1^+(\varphi_1(z))\right)-f_1^-(\varphi_1(z))-f^+(z).$$

Böylece, (2.5) ve (5.6) eşitliği kullanılarak

$$\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\widetilde{F_k}(1/z)+f^-(z)=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\varphi_1^k(z)-f_1^+(\varphi_1(z))\right)$$

$$-S_{\Gamma}\left(\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\varphi_1^k(z)-f_1^+(\varphi_1(z))\right)$$

olduğu görülür. Teorem 5.1.15, (5.26) eşitsizliği ve Önerme 5.5.2 uygulanarak ve fonksiyonunun $\widetilde{a_k}(f),\ k=1,2,...$ *Faber* katsayılarının $f_1^+\in E^{p_1(\cdot)}(\mathbb{D})$ fonksiyonunun *Taylor* katsayıları olduğu dikkate alınarak

$$\left\| f^{-}(z)+\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\widetilde{F_k}(1/z)\right\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)} \leq \frac{1}{2}\left\|\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\varphi_1^k(z)-f_1^{+}(\varphi_1(z))\right\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)}$$

$$+\left\| S_\Gamma\left(\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\varphi_1^k(z)-f_1^{+}(\varphi_1(z))\right)\right\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)}$$

$$\leq\left(\frac{1}{2}+c(p)\right)\left\|\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}w^k-f_1^{+}(w)\right\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{T})}$$

$$=c(p)\left\|\sum_{k=1}^{n}d_k\left(f_1^{+}\right)w^k-f_1^{+}(w)\right\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{T})}$$

$$\leq c(p)\Omega\left(f_1^{+},1/n\right)_{\mathbb{T},p_1(\cdot)}\leq c(p)\Omega\left(f_1,1/n\right)_{\mathbb{T},p_1(\cdot)}$$

bulunur. Bu şekilde (5.33) eşitsizliği gösterilmiş olur. (5.5) ve (5.35) eşitliği kullanılarak ve Γ 'nın dışında tüm açısal yollar üzerinden limit alınarak (5.33) eşitsizliğinin ispatı için kullanılan yöntemin uygulanması sonucunda (5.34) eşitsizliğine ulaşılabilir. Böylece, (5.33) ve (5.34) eşitsizliklerinin sonucunda istenen

$$\left\| f-R_n(f,\cdot)\right\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)}\leq c(p)\left[\Omega\left(f_0,1/n\right)_{\mathbb{T},p_0(\cdot)}+\Omega\left(f_1,1/n\right)_{\mathbb{T},p_1(\cdot)}\right]$$

eşitsizliği elde edilir. ■

5.5.4 Sonuç $\Gamma\in\mathfrak{D}$ ve $p(\cdot)\in\mathcal{P}_0^{\log}(\Gamma)$ *olsun. Eğer* $f\in E^{p(\cdot)}(G)$ *ise* n *'den bağımsız pozitif bir* $c(p)$ *sabiti vardır öyle ki* $n=1,2,3,...$ *için*

$$\left\| f-S_n^G(f,\cdot)\right\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)}\leq c(p)\Omega\left(f_0,1/n\right)_{\mathbb{T},p_0(\cdot)}$$

eşitsizliği sağlanır.

5.5.5 Sonuç $\Gamma\in\mathfrak{D}$ ve $p(\cdot)\in\mathcal{P}_0^{\log}(\Gamma)$ *olsun. Eğer* $f\in E^{p(\cdot)}\left(G^{-}\right)$ *ise* n *'den bağımsız pozitif bir* $c(p)$ *sabiti vardır öyle ki* $n=1,2,3,...$ *için*

$$\left\| f-S_n^{G^{-}}(f,\cdot)\right\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)}\leq c(p)\Omega\left(f_1,1/n\right)_{\mathbb{T},p_1(\cdot)}$$

eşitsizliği sağlanır.

[62] çalışmasında Teorem 5.5.3 ispatlanmış, Sonuç 5.5.4 ve 5.5.5 ifade edilmiştir. Bu sonuçlar farklı biçimde tanmlanan kesirli mertebeden düzgünlük modülleri yardımı ile ağırlıklı değişken üslü *Lebesgue* uzayı ve ağırlıklı değişken üslü *Smirnov* sınıflarında [23] çalışmasında ispatsız olarak verilmiştir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında yeni bulgular üçüncü, dördüncü ve beşinci bölümlerde yer almaktadır. Daha önce ağırlıklı ve ağırlıksız değişken üslü *Lebesgue* uzaylarında $p \in \mathcal{P}^0([0,2\pi])$ şartı ile [23], [24], [27], [45] çalışmalarında verilen sonuçlar $p \in \mathcal{P}([0,2\pi])$ şartına genelleştirilmiştir. 2π periyodlu fonksiyonlar için üçüncü ve dördüncü bölümlerde ispatlanan teoremler sırasıyla [50] ve [53] çalışmalarında ifade edilip, [51] ve [54] çalışmalarında ispatlanmıştır. Daha sonra ise farklı bir şekilde tanımlanmış $\Omega_r(f,\cdot)_{p(\cdot)}$ 'ne denk olan bir modül ile $p \in \mathcal{P}([0,2\pi])$ şartı altında yaklaşım teorisinin benzer teoremleri [52] makalesinde ispatlanmıştır.

Üçüncü ve dördüncü bölümlerde yaklaşım teorisinin daha önce periyodik fonksiyonlar için ispatlanan düz ve ters teoremleri *Hardy-Littlewood* maksimal operatörünün sınırlılığı kullanılmadan, konvolüsyon tipi ortalamalar kullanılarak değişken üslü fonksiyon uzaylarına genelleştirilmiştir. Beşinci bölümde bu sonuçlar *Faber* operatörleinin yardımı ile kompleks düzleme taşınmıştır. Değişken üslü *Smirnov* sınıflarında yaklaşım teorisinin düz ve ters teoremleri ispatlanmış ve bu uzaylardan olan analitik fonksiyonlara *de la Vallée-Poussin* ve *Jackson* ortalaması ile yaklaşımın hızı değerlendirilmiştir. *Dini* düzgün eğri ailesi üzerinde tanımlı değişken üslü *Lebesgu*e uzaylarında *Littlewood-Paley* ve *Marcinkiewicz çarpan* tipi eşitsizlikler ispatlanmış ve bu uzaydan olan fonksiyonlara *Faber-Laurent* rasyonel fonksiyonuyla yaklaşımın hızı değerlendirilmiştir.

Tez boyunca kullanılan yöntemler çalışılan uzaylardan bağımsız ve yeterince geneldir. Bu durum yöntemlerin değişken üslü uzaylardan farklı bir takım fonksiyon uzaylarında da işlevsel ve geçerli olmasını vurgulamaktadır.

7. KAYNAKLAR

[1] Jackson, D., *The Theory of Approximation*, New york: Amer. Math. Soc., Coll. Publ., 13-32, (1930).

[2] Akhiezer, N. I., *Theory of Approximation,* New york: Frederick Ungar Publishing, 1-307, (1956).

[3] Stechkin, S. B., ''On the order of approximation of continuous function'', *Izv*., 15, 219-242, (1951).

[4] Timan, A. F. and Timan, M. F., ''The generalized modulus of continuity and best mean approximation'', *Dokl. Akad. Nauk. SSSR,* 71, 1, 17-20, (1950).

[5] Czipszer, J. and Freud, G., "Sur l'approximation d'une fonction périodique et de ses dérivées successives par un polynome trigonométrique et par ses dérivées successives", *Acta Math*. 99, 33-51, (1958).

[6] Yildirir, Y. E. and Israfilov, D. M., "Simultaneous and converse approximation theorems in weighted Lebesgue spaces", *Mathematical Inequalities and Applications*, 14, 2, 359-371, (2011).

[7] Cruz-Uribe, D. V. and Fiorenza, A., *Variable Lebesgue Spaces, Foundations of Harmonic Analysis*, 1-211, Birkhäsuser, (2013).

[8] Kokilashvili, V. M., Samko, N. and Samko S., " The maximal operator in weighted variable spaces $L^{p(\cdot)}$, *Journal of Function Spaces and Applications*, 5, 3, 299-317, (2007).

[9] Karlovich, A. Y., "Maximal operators on variable Lebesgue spaces with weights related to oscillations of Carleson curves", *Math. Nachr.*, 283, 1, 85-93, (2010).

[10] Diening, L., "Maximal function on generalized spaces $L^{p(\cdot)}$", *Math. Inequal. Appl*., 7, 245-253, (2004).

[11] Kokilashvili, V. M. and Samko S., "Maximal and fractional operatos in weighted $L^{p(x)}$ spaces, *Revista Matematica Iberoamericana*, 24, 2, 493-515, (2004).

[12] Kokilashvili, V. M. and Samko, S. G., "Operators of harmonic analysis in weighted spaces with non-standard growth", *Journal of Math. Anal. and Appl.*, 352, 1, 15-34, (2009).

[13] Karlovich, A. Y., "Remark on the boundedness of the Cauchy singular integral operator on variable Lebesgue spaces with radial oscillating weights", *Journal of Function Spaces and Applications*, 7, 3, 301-311, (2009).

[14] Kokilashvili, V. and Samko, S., "Weighted Boundedness In Lebesgue Spaces With Variable Exponents Of Classical Operators On Carleson Curves", *Proc. A. Razmadze Math. Inst.*, 138, 106-110, (2005).

[15] Goluzin, G. M., *Geometric Theory of Functions of A Complex Variable* (AMS Translation of Mathematical Monographs Volume 26), Providence: American Mathematical Society, 388-453, (1969).

[16] Alper, S. Y., "Approximation in the mean of analytic functions of class E^p (Russian)", *Investigations on the modern problems of the function theory of a complex variable,* Gos. Izdat. Fiz.-Mat. Lit. Moscow, 271-286, (1960).

[17] Kokilashvili, V. M., "A direct theorem on mean approximation of analytic functions by polynomials", *Soviet Math. Dokl.,* 10, 411-414, (1969).

[18] Andersson, J. E., "On degree of polynomial approximation in $E^p(D)$", *J. Approx. Theory,* 19, 1, 61-68, (1977).

[19] Koklashvili V. M., "On analytic functions of Smirnov-Orlicz Classes", *Studia Math.,* 31, 43, (1968).

[20] Dyn'kin, E. M., "The rate of approximation in the complex domain", In book: *Complex Analysis and spectral theory* (Leningrad, 1979/1980), Berlin : Springer-Verlag, 90-142, (1981).

[21] Israfilov, D. M., “Approximation by $p-$Faber polynomials in the weighted Smirnov class $E^p(G,\omega)$ and the Bieberbach polynomials”, *Constructive Approximation*, 17, 335-351, (2001).

[22] Israfilov, D. M. and Guven, A.,“Approximation in Weighted Smirnov Classes”, *East Journal of Approximation*, 11, 91-102, (2005).

[23] Israfilov, D., Kokilashvili, V. and Samko, S., “Approximation In Weighted Lebesgue and Smirnov Spaces With Variable Exponents”, *Proceed. of A. Razmadze Math. Institute*, 143, 25-35, (2007).

[24] Akgun, R. “Polynomial approximation of functions in weighted Lebesgue and Smirnov spaces with nonstandard growth”, *Georgian Math. Journal*, 18, 203-235, (2011).

[25] Israfilov, D. M. and Testici, A., “Approximation in Smirnov Classes with Variable Exponent”, *Complex Variables and Elliptic Equations*, 60, 9, 1243-1253, (2015).

[26] Guven, A. and Israfilov, D. M., “Trigonometric Approximation in Generalized Lebesgue Spaces $L^{p(x)}$”, *Journal of Math. Inequalities*, 4, 2, 285-299, (2010).

[27] Akgun, R., “Trigonometric Approximation of Functions in Generalized Lebesgue Spaces With Variable Exponent”, *Ukrainian Math. Journal*, 63, 1, 3-23, (2011).

[28] Sharapudinov, I. I., “Approximation of functions in $L_{2\pi}^{p(x)}$ by trigonometric polynomials”, *Izvestiya Mathematics*, 77, 2, 407-434, (2013).

[29] Rynne, P. B. and Youngson, M. A., *Linear Functional Analysis*, London: Springer-Verlag, 26-101, (2008).

[30] Royden H. L., *Real analysis*, New Jersey: Prentice-Hall, 220, (1988).

[31] Katznelson, Y., *An Intoduction to Harmanic Analysis*, Newyork: Cambridge University Press, 84-95, (2004).

[32] Gonzalez, M. O., *Calssical Complex Analysis*, Marcel Dekker Inc., 486, (1992).

[33] Çavuş, A. and Israfilov, D. M., "Approximation by Faber-Laurent rational functions in the mean of functions of the class $L^p(\Gamma)$ with $1 < p < \infty$", *Approximation theory App*., 11, 1, 105-118, (1987).

[34] Markushevich, A. I., *Theory of Functions of a Complex Variable* III, New York: Chelsea Publishing Company, 8-14, (1977).

[35] Pommerenke, Ch., *Boundary Behaviour of Conformal Map*, New york: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 43-48, (1992).

[36] Böttcher, A. and Karlovich, Y. I., *Carleson Curves, Muckenhoupt Weights and Toeplitz Operators*, Basel, Boston, Berlin: Birkäuser, 1-44, (1997).

[37] Mastroianni, G. and Milovanović, G. V., *Interpolation Processes Basic Theory and Applications*, Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 4-212, (2008).

[38] Bary, N. K., *A Treatise on Trigonometric Series Volume I*, New york: Pergamon Press, 44-48, (1964).

[39] Devore, A. R. and Lorentz, G. G., *Constructive Approximation: polynomials and splines approximation*, Newyork: Springer-Verlag, 200-209, (1993).

[40] Suetin, P. K., *Series of Faber Polynomials*, Amsterdam: Gordon and Breach Science Publishers, 33-257, (1998).

[41] Sharapudinov, I. I., "*Some questions of approximation theory in the Lebesgue spaces with variable exponent*", Vladikavkaz: Itogi Nauki Yug Rossai Seria Mathematicheskaya Monografia 5, 44-178, (2012).

[42] Kovàc̆ik , O. and Ràkosník , J., "On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$", *Czechoslovak Mathematical Journal*, 41, 592-618, (1991).

[43] Sharapudinov, I. I., "The topology of the space $\mathcal{L}^{p(t)}([0,1])$", *Math. Notes*, 26 ,4, 796-806, (1979).

[44] Sharapudinov, I. I., “Some questions of approximation theory in the spaces $L^{p(x)}(E)$” , *Anal. Math.*, 33, 2, 135-153, (2007).

[45] Guven, A., “Trigonometric Approximation By Matrix Transforms in $L^{p(x)}$ Space”, *Analysis and Applications*, 10, 1, 47-65, (2012).

[46] Akgun, R. and Kokilashvili, V., “Approximation by trigonometric polynomials of functions having (α,β)-derivatives in weighted variable exponent Lebesgue space” (in Russian), *Ptoblems Math. Anal.*, 65, 3-12, (2012); translation (in English) , *J. Math. Sci.*, 186, 2, 139-152, (2012).

[47] Zygmund, A., *Trigonometric Series Voume I*, Cambridge: Cambridge University Press, 36-88, (2002).

[48] Sharapudinov, I. I., “On Direct and Inverse Theorems of Approximation Theory In Variable Lebesgue Space And Sobolev Spaces”, *Azerbaijan Journal of Math*., 4, 1, 55-72, (2014).

[49] Israfilov, D. M. and Yirtici, E., “Convolution and best approximations in variable exponent Lebesgue space”, *Romanian Academy Mathematical Reports*, 18, 4, 497-508, (2016).

[50] Israfilov, D. M. and Testici, A., “Approximation problems in the Lebesgue spaces with variable exponent”, (ed: S. Tikhonov), *Conference on Harmonic Analysis and Approximation Theory*, Barcelona, Abstract Book, 25, (2016).

[51] Israfilov, D. M. and Testici, A., “Approximation problems in the Lebesgue spaces with variable exponent”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 459, 112-113, (2018).

[52] Volosivets, S. S., “Approximation of functions and their conjugates in variable Lebesgue spaces”, *Sbornik Mathematics*, 208, 1, 44-59, (2017).

[53] Israfilov, D. M., “Simultaneous approximation in the variable exponent spaces”, (ed: L. Beznea) *International Conference on Complex Analysis and Related Topics The 14th Romanian-Finnish Seminar*, Bucharest, Abstract Book, 16, (2016).

[54] Israfilov, D. M. and Testici, Ahmet, “Simultaneous Approximation in Lebesgue Space with Variable Exponent”, *Proceeding of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Science of Azerbaijan*, (in press) (2017).

[55] David, G., “Operateurs integraux singulers sur certaines courbes du plan complexe”, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, 17, 4, 157-189, (1984).

[56] Havin, V. P., “Boundary properties of integrals of Cauchy type and conjugate harmonic functions in regions with rectifiable boundary (Russian)”, *Math. Sb. (N.S.)*, 68, 4, 499-517, (1965).

[57] Warschawski, S., “Über das Randverhalten der Ableitung der Abbildungsfunktionen bei konformer Abbildung” , *Mathematische. Zeitschrift.*, 35, 321-456, (1932).

[58] Kokilashvili, V. M. and Paatahvili, V., “On variable Hardy and Smirnov classes of analytic functions”, *Georgian Inter. J. Sci.*, 1, 181-195, (2008).

[59] Duren, P. L., *Theory of H_p Spaces*, New york: Academic Press, 38, (1970).

[60] Guven, A. and Israfilov, D. M., “Multiplier Theorems in weighted Smirnov Spaces”, *J. Korean Math. Soc.*, 45, 6, 1535-1548, (2008).

[61] Israfilov, D. M. and Testici, A., “Approximation properties of some summation methods in the Smirnov classes with variable exponent”, (eds: A. Allaberen and A. Lukashov), *International Conference on Analysis and Applied Mathematics* (*ICAAM 2016*), Almaty, *American Institute of Physics Conference Proceedings*, 1759, 0200101-0200104, doi: 10.1063/1.4959624, (2016).

[62] Israfilov, D. M. and Testici, A., “Approximation by Faber-Laurent rational functions in Lebesgue spaces with variable exponent”, *Indagationes Mathematicae*, 27, 4, 914-922, (2016).