T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BAZI FONKSİYON UZAYLARINDA MAKSİMAL YAKINSAKLIK PROBLEMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ESRA AYDIN

BALIKESİR, OCAK - 2018

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BAZI FONKSİYON UZAYLARINDA MAKSİMAL YAKINSAKLIK PROBLEMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ESRA AYDIN

Jüri Üyeleri : Doç. Dr. Burçin OKTAY YÖNET (Tez Danışmanı)
Prof. Dr. Daniyal İSRAFİLZADE
Prof. Dr. Fatma AYAZ

BALIKESİR, OCAK - 2018

KABUL VE ONAY SAYFASI

ESRA AYDIN tarafından hazırlanan "**BAZI FONKSİYON UZAYLARINDA MAKSİMAL YAKINSAKLIK PROBLEMLERİ**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 15.01.2018 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Doç. Dr. Burçin OKTAY YÖNET	....
Üye Prof. Dr. Daniyal İSRAFİLZADE	....
Üye Prof. Dr. Fatma AYAZ	....

Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Doç. Dr. Necati ÖZDEMİR ....

Bu tez çalışması *TUBİTAK* tarafından 1001 kodlu 114F422 nolu proje ile desteklenmiştir.

ÖZET

BAZI FONKSİYON UZAYLARINDA MAKSİMAL YAKINSAKLIK PROBLEMLERİ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
ESRA AYDIN
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. BURÇİN OKTAY YÖNET)

BALIKESİR, OCAK - 2018

Bu çalışmanın amacı; analitik fonksiyonların Smirnov Orlicz ve değişken üslü Smirnov sınıflarında yaklaşım teorisinin bazı problemlerini incelemektir.

Tez, altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde; yaklaşım teorisinde araştırılan problemler ve kompleks düzlemde yaklaşım teorisinin gelişimi ile ilgili kronolojik bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde; önce ileriki bölümlerde kullanılacak olan temel tanımlar ve teoremler verilmiş, daha sonra bazı fonksiyon uzayları tanımlanmıştır.

Üçüncü bölümde; N fonksiyonlar ve Orlicz uzayları tanımları yer almaktadır. Daha sonra yaklaşımın incelendiği Smirnov Orlicz sınıfları ve bu sınıflardaki yaklaşım teoremleri incelenmiştir.

Dördüncü bölümde; değişken üslü Lebesgue uzayları ve yaklaşımın incelendiği değişken üslü Smirnov sınıfları tanımlanmıştır.

Beşinci bölümde; önce yaklaşım teorisinde yaklaşan polinomların inşası için önemli olan Faber polinomları araştırılmıştır. Daha sonra Faber serileri ve analitik fonksiyonların Faber serileri, karmaşık düzlemin basit bağlantılı bölgelerinde incelenmiştir.

Altıncı bölümde; karmaşık düzlemin basit bağlantılı bölgelerinde Bernstein & Walsh düz ve ters teoremleri araştırlmıştır. Daha sonra Suetin [25] Smirnov sınıflarında ve Israfilov, Daniyal M, Oktay, Burçin, Akgün, Ramazan [19] Smirnov Orlicz sınıflarında Faber serilerinin yaklaşım hatası ile ilgili sonuçlar incelenmiştir. Ayrıca değişken üslü Smirnov sınıflarında da maksimal yakınsaklık ile ilgili sonuçlar elde edilmiştir.

Son bölümde ise, altıncı bölümde elde edilen sonuçların bir özeti verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Faber polinomları, Faber serileri, Riemann konform dönüşüm, maksimal yakınsaklık teoremi, Smirnov Orlicz sınıfı, değişken üslü Lebesgue uzayı, değişken üslü Smirnov sınıfı.

ABSTRACT

MAXIMAL CONVERGENCE PROBLEMS IN SOME FUNCTION SPACES
MSC THESIS
ESRA AYDIN
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATİCS

(SUPERVISOR: ASSOC. PROF. DR. BURCIN OKTAY YONET)

BALIKESİR, JANUARY 2018

The purpose of this work is to investigate some problems of approximation theory of analytic functions in Smirnov Orlicz and Smirnov classes with variable exponent of analytic functions.

This thesis consists of six chapters.

In the first chapter; investigated problems in the approximation theory and some chronological information about approximation theory and its progress are given in the complex plane.

In the second chapter; basic definitions and theorems which are used in the following chapters are given. After that, some function spaces and are defined.

In the third chapter; definitions of N functions and Orlicz spaces are studied. After that, Smirnov Orlicz classes which are approximation are investigated and approximation theorems in these classes are investigated.

In the forth chapter; Lebesgue spaces with variable exponent and Smirnov classes with variable exponent which are approximation are investigated are defined.

In the fifth chapter; firstly, Faber polynomials which have been important in the construction of approximant polynomials in approximation theory are investigated. Secondly, Faber series and Faber series of analytic functions are investigated on the simply connected domains of the complex plane.

In the sixth chapter; the direct and the inverse theorems of Bernstein & Walsh are investigated. Results of approximation error in Smirnov classes of Suetin [25] and Smirnov Orlicz classes of Israfilov, Daniyal M, Oktay, Burçin, Akgün, Ramazan [19] are generalized to more general domains. Morever, results of maximal convergence in Smirnov classes with variable exponent are obtained.

In the last chapter the results which obtained are summarized in sixth chapter.

KEYWORDS: Faber polynomials, Faber series, Riemann conformal mapping, theorem of maximal convergence, Smirnov Orlicz class, Lebesgue space with variable exponent, Smirnov class with variable exponent.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbb{C}$	Kompleks düzlem
$\boldsymbol{\Gamma}$	Kompleks düzlemde sonlu uzunluklu eğri
$\boldsymbol{G}$	Sınırı Γ olan sınırlı basit bağlantılı bölge
$\boldsymbol{G^-}$	$\bar{G}$ nin tümleyeni
$\mathbb{D}$	Kompleks düzlemde birim disk
$\mathbb{T}$	Birim diskin sınırı
$\mathbb{D}^-$	Birim diskin kapanışının tümleyeni
$\boldsymbol{\varphi}$	G^- den $\mathbb{D}^-$ üzerine konform dönüşüm
$\boldsymbol{\psi}$	φ nin tersi
$\boldsymbol{\Phi_k(z)}$	$\bar{G}$ için k.dereceden Faber polinomları
$\boldsymbol{L_p(\Gamma)}$	Γ üzerinde Lebesgue Uzayı
$\boldsymbol{E_p(G)}$	G üzerinde Smirnov Sınıfı
$\boldsymbol{\Gamma_R}$	Seviye Eğrisi
$\boldsymbol{G_R^-}$	Γ_R eğrisinin dışı
$\boldsymbol{\mathcal{P}_n}$	Derecesi $\leq n$ olan cebirsel polinomların kümesi
$\mathbf{A(G_R)}$	G_R'de analitik olan fonksiyonların kümesi
K	$G \cup \Gamma$
$\mathbf{E_M(G)}$	Smirnov Orlicz Sınıfı
$\mathbb{C}\mathbf{G}$	$\bar{\mathbb{C}}$-G (G kümesinin tümleyeni)
$\boldsymbol{L^{p(\cdot)}(\Gamma)}$	Γ üzerinde Değişken üslü Lebesgue Uzayı
$\boldsymbol{E^{p(\cdot)}(G)}$	G üzerinde Değişken üslü Smirnov Sınıfı

ÖNSÖZ

İleride devam etmesini istediğim, Faber polinomları ve Faber serilerini konu alan bu çalışmam boyunca bana ışık tutan, ilgisini ve desteğini her zaman yanımda hissettiğim saygı değer danışman hocam **Doç. Dr. Burçin OKTAY YÖNET'**e teşekkürlerimi sunarım.

Matematiği bana sevdiren, bilgi ve tecrübelerini her zaman paylaşan, yetişmemde büyük emeği olan değerli hocalarım **Prof. Dr. Daniyal M. İSRAFİLZADE** ve **Prof. Dr. Ali GÜVEN'**e teşekkürlerimi sunarım.

Tüm öğrenim yaşantım süresince, maddi ve manevi destekleriyle bugünlere gelmemde büyük katkıları olan başta babam ve annem olmak üzere aileme ve tanıştığımız günden itibaren sonsuz anlayış ve desteğiyle her zaman yanımda olan sevgili eşim Burak'a sonsuz teşekkürler…

1. GİRİŞ

Yaklaşım teorisinde problemleri araştırırken, matematikte ve uygulamalı bilimlerde aradığımız fonksiyonların analitik ifadelerini bulmak zor olabilir veya bu fonksiyonların sadece belirli özellikleri verilebilir. Bu gibi durumlarda, aranılan fonksiyonların yaklaşık ifadelerinin bulunabilmesi, problemin çözümü için yeterli olabilir. Aranan fonksiyonlar genellikle belli fonksiyon uzaylarında yer alır. Belli özelliklere sahip fonksiyon uzaylarının elemanlarına, bu uzayın bir alt uzayından olup daha iyi özelliklere sahip olan fonksiyonlarla yaklaşım problemleri incelenir. Bu problemler genellikle nitelik problemleri ve nicelik problemleri olarak incelenmektedir.

X normlu bir uzay, Y ise onun bir alt uzayı olsun. Bir $x \in$ X verildiğinde her $\varepsilon > 0$ için $\|x-y\|_X < \varepsilon$ olacak şekilde bir $y \in$ Y elemanı bulunabiliyorsa (X,Y) çiftinde yaklaşımın nitelik problemi pozitif çözümlenmiştir denir. Yaklaşım teorisinin nicelik problemleri, X uzayından alınan elemanlara Y alt uzayının elemanları ile mümkün olan yaklaşım hızının araştırıldığı problemlerdir. Örneğin; bir X uzayı ve onun iki farklı Y_1 ve Y_2 alt uzayı verilmiş olsun. $x \in$ X aldığımızda varsayalım ki öyle $(y_n^{(1)})_{n=1}^{\infty} \subset Y_1$ ve $(y_n^{(2)})_{n=1}^{\infty} \subset Y_2$ dizileri bulunabilir ki

$$\left\| x - y_n^{(1)} \right\|_X \leq \frac{1}{n^2} \tag{1.1}$$

$$\left\| x - y_n^{(2)} \right\|_X \leq \frac{1}{n^3} \tag{1.2}$$

eşitsizlikleri sağlansın. Burada (1.2) eşitsizliğinin yaklaşım hızının daha yüksek hıza sahip olduğu görülür. Ayrıca yaklaşım teorisinde bu problemler incelenirken, iki önemli kavram olan en iyi yaklaşım sayısı ve en iyi yaklaşan polinom kullanılır.

En iyi yaklaşım sayısının üstten değerlendirilmesi ile ilgili problemlere yaklaşım teorisinin düz problemleri, elde edilen teoremlere ise düz teoremler denir. Bunun tam zıttı olan yani en iyi yaklaşım sayısına göre fonksiyonun yapısal özelliklerinin araştırıldığı problemlere yaklaşım teorisinin ters problemleri denir.

1885 yılında ilk defa Weierstrass [a,b]$\subset \mathbb{R}$'de sürekli fonksiyonlara cebirsel polinomlarla yaklaşımın mümkünlüğünü ispatlamıştır. 1912 yılında [0,2π] aralığında sürekli ve 2π periyotlu fonksiyonlar uzayında düz teoremler Jackson tarafından elde edilmiştir. Aynı yıl Bernstein aynı uzayda ters teoremleri vermiştir.

$E^p(G)$, $1 < p < \infty$, Smirnov sınıflarında yaklaşım hızının değerlendirilmesi problemi 1959 yılında Walsh ve Russel [1] tarafından çalışılmıştır. Bu çalışmada kompleks düzlemde sınırı analitik eğri olan, basit bağlantılı, sınırlı G bölgesi göz önüne alınmış, polinomlarla yaklaşımın hızı değerlendirilmiştir. 1960 yılında S. Ya. Al'per [2] bölgenin sınırını Dini-düzgün eğri alıp polinomlarla yaklaşımın düz ve ters teoremlerini elde etmiştir. Daha sonra 1967 yılında V. M. Kokilashvili [3] , Al'per'in sonuçlarını geliştirmiş ve bölgenin sınırının Dini-düzgün eğri olduğu durumda düz ve ters yaklaşım teoremlerinin bazı iyileştirmelerini ispatlamıştır.

Kompleks düzlemde yaklaşım problemleri daha genel uzaylar için de incelenmiştir. 1968 yılında V. M. Kokilashvili [4] tarafından Smirnov sınıflarının bir genellemesi olan $E_M(G)$ Smirnov Orlicz sınıfı tanımlanmış ve bölge sınırı Dini-düzgün eğri iken bazı ters yaklaşım teoremlerini ispatlamıştır. Bu uzayda düz teoremler son yıllarda D. M. Israfilov ve A. Güven [5] tarafından Carleson eğrisi ile sınırlı bölgede tanımlı fonksiyonların Smirnov Orlicz sınıfının belirli bir alt uzayında ispatlanmıştır.

Matematiğin bir çok uygulama problemleri ve mekanik problemlerinin çözümünde belli süreçleri ifade eden fonksiyonlar klasik Lebesgue uzaylarına ve bunların analitik genişlemeleri olan uzaylara ait olmayabilir. Örneğin; mekanikte bazı sıvılar elektrik alanına veya diğer etkenlere maruz kaldıklarında davranışları dramatik şekilde değişebilir. Bu gibi durumlarda, süreci ifade eden fonksiyonlar da hızlı değişime uğramış olur ve bu fonksiyonların klasik uzaylarda incelenmesi de zorlaşır. Bunun dışında bir çok fizik problemlerinin çözümünde (örneğin; sinyallerin alınması ve yeniden işlenmesi, termistör, magnetoistatistik ve diğer problemlerin çözümünde) incelenmesi gereken sürecin matematik modellenmesinde klasik uzayların yeterli olmadığı görülmektedir. Değişken üslü uzayların ortaya çıkmasının başlıca nedenleri de yukarıda söz konusu olan süreçlerin matematik modellenmesinin bu uzaylarda mümkünlüğüdür. Bu uzaylar, matematik literatüre Orlicz tarafından 1930 yıllarında dahil edilse de bunların sistematik şekilde araştırılmasına 1990 yıllarından sonra başlanılmıştır. Bunun nedeni, bilim ve teknolojinin gelişimi ile bağlantılı olarak matematik modellenme problemlerinin yükselen bir şekilde artması ve değişken üslü uzayların bu modellenmeler için iyi bir alternatif oluşturmasıdır.

Bu tezde, Smirnov Orlicz sınıfları ve değişken üslü Smirnov sınıfları göz önüne alınıp, bir K kontinyumunda Faber serilerinin kısmı toplamları ile yaklaşım problemleri araştırılmış ve yaklaşım hızı değerlendirilmiştir.

Bilindiği gibi, birim diskte analitik olan bir fonksiyon diskte yakınsak kuvvet serisine açılabilir. Diğer yandan, diskten farklı basit bağlantılı bir bölgede tanımlı analitik fonksiyonun bir kuvvet serisine açılabileceğini iddia edemeyiz. Bu tip bölgelerde fonksiyonun kuvvet serisinden farklı seri açılımlarının elde edilmesi gerekir. Bu seri açılımlarından bir tanesi de Faber seri açılımı olarak bilinmektedir. Bu seriler, Faber polinomları olarak bilinen polinomlar ile ifade edilirler.

Faber polinomları, kompleks değişkenli fonksiyonlar için yaklaşım teorisinde önemli bir rol oynar. Faber polinomlarının serisi, basit bağlantılı bölgelerde analitik fonksiyonların gösterimi için kullanılır ve analitik fonksiyonların yaklaşımı üzerine pek çok teorem bu serilerin yardımıyla ispatlanır.

1885 yılında C. Runge sınırlı, basit bağlantılı bir G bölgesinde analitik olan $f(z)$ fonksiyonuna bir $\{\Phi_n(z)\}$ polinom dizisiyle düzgün yakınsamayı ispatlamıştır. Bu teorem, polinomlarla analitik fonksiyonlara yaklaşım durumunda en basit K. Weierstrass teoremi olarak düşünülebilir. 1903'de G. Faber, $f(z)$ fonksiyonu için Runge'nin tanımını kullanarak keyfi basit bağlantılı G bölgesi durumunda Taylor serilerinin genelleştirilmesinin inşa edilmesine dayanan bir problemi araştırmıştır. Herhangi $|z - z_0| < R$ diski olmak üzere, bu diskte analitik olan $f(z)$ fonksiyonu, $\{(z - z_0)^n\}$ polinomlar sistemi yardımıyla bir seriye açılabilir. Buna göre, Faber makalesinde keyfi sınırlı basit bağlantılı G bölgesi için bu bölgede analitik olan $f(z)$ fonksiyonunun

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(z), \qquad z \in G \tag{1.3}$$

serisine açılabilecek şekilde bir $\{\Phi_n(z)\}$ polinomlar sistemini incelemiştir. Burada $\{a_n\}$ katsayıları G bölgesine bağlı ve $f(z)$ fonksiyonu yardımıyla tanımlanır. Bu çalışmada Faber, G bölgesinin Γ sınırının regüler analitik eğri olma durumunu incelemiştir. Buradaki $\{\Phi_n(z)\}$ polinomları daha sonra Faber polinomları olarak adlandırılmıştır.

Faber, bir K kontinyumu için $\{\Phi_n(z)\}$ Faber polinomları dizisini tanımlamıştır. İlk makalesinde K kontinyumunun Γ analitik sınırına sahip basit bağlantılı G bölgesinin kapanışı olduğu durumda G'de analitik herhangi bir $f(z)$ fonksiyonunun G'de mutlak ve düzgün yakınsak olan bir Faber serisine açılabileceğini göstermiştir. Bir başka makalesinde ise $f(z)$'in bağlantılı tümleyene sahip sınırlı bir kontinyum üzerinde analitik olduğu durumda fonksiyonun K'da mutlak ve düzgün yakınsak olan bir Faber serisine açılabileceğini ispatlamıştır.

Faber'den sonra W. Sewell, A.I, Markushevich, S. Y. Alper, S. N. Mergelyan, V. K. Dzyadyk, V. S. Rogozhin, G. M. Goluzin, V. I. Smirnov ve N. A. Lebedev gibi bir çok matematikçi G bölgesinin çeşitli geometrik koşulları altında Faber serilerinin yardımıyla düz ve ters yaklaşım teoremleri elde etmişlerdir. Faber serileriyle yaklaşım problemleri günümüzde de pek çok matematikçi tarafından çalışılmaktadır.

f fonksiyonunun G_R, $R > 1$, kanonik bölgesinde analitik fonksiyon olması durumunda Bernstein & Walsh, polinomlar ile yaklaşımın düz teoremlerini elde etmişlerdir. Bernstein & Walsh, f fonksiyonunun K kontinyumunda sürekli ve kontinyumun iç noktalarında analitik olması durumunda belli koşullar altında, f'in G_R, $1 < R$, kanonik bölgesinde analitik olduğunu ifade eden yaklaşımın ters teoremlerini elde etmişlerdir. Ayrıca, cebirsel polinomun K kontinyumundaki maksimal değerine göre polinomun daha geniş bölgedeki artış hızını belirlemişlerdir.

Bu tez çalışmasında, $E_p(G_R)$ Smirnov, $E_M(G_R)$ Smirnov Orlicz ve $E^{p(\cdot)}(G_R)$ değişken üslü Smirnov sınıflarında maksimal yakınsaklığı karakterize eden teoremler araştırılmıştır. $1 < \rho < R$ olmak üzere z'nin K 'dan daha geniş olduğu $\overline{G_\rho}$ bölgesinde olduğu durumda Smirnov Orlicz sınıflarında Faber serilerinin maksimal yakınsaklık özelliğini karakterize eden teorem elde edilmiştir. Ayrıca $z \in K$ olduğunda değişken üslü Smirnov sınıflarında Faber serilerinin maksimal yakınsaklık özelliğini karakterize eden teorem elde edilmiştir.

2. ÖN BİLGİLER

2.1 Temel Tanımlar ve Teoremler

2.1.1 Tanım: [a,b]⊂ℝ olmak üzere, sürekli bir

$$\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{C}$$

fonksiyonuna ℂ düzleminde bir ***eğri*** denir. γ (a) = γ (b) ise γ'ya ***kapalı eğri;*** γ eğrisi sadece $t_1 = t_2$ için γ (t_1) = γ (t_2) oluyorsa, γ'ya ***Jordan eğrisi;*** γ' türevi var ve sürekli ise γ'ya ***diferansiyellenebilir eğri;*** diferansiyellenebilir γ eğrisi için eğer , ∀ t ∈ [a,b] için $\gamma'(t) \neq 0$ oluyorsa γ'ya ***düzgün eğri*** denir. [6, s.120]

2.1.2 Tanım: Γ: $\varphi(t)$, a $\leq t \leq$ b, kompleks düzlemde bir eğri olsun.
Γ'nın uzunluğu

$$V(\Gamma) := \sup \sum_{k=1}^{n} | \varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1}) |, \; n \in \mathbb{N}$$

olarak tanımlanır. Burada supremum tüm a = $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$= b parçalanmalarının üzerinden alınır.

Buna göre, $V(\Gamma) < \infty$ ise Γ eğrisine ***sonlu uzunluklu eğri*** denir. [7, s.2]

2.1.3 Tanım: ℂ içinde bir S kümesi verilsin. Eğer

$$S_1 = S \cap A_1 \neq \emptyset, \; S_2 = S \cap A_2 \neq \emptyset \text{ ve } S = S_1 \cup S_2$$

olacak şekilde ℂ içinde ayrık ve açık A_1 ve A_2 kümeleri bulunamıyorsa S kümesine ***bağlantılı küme*** denir. [6, s.25]

2.1.4 Tanım: Kompleks düzlemde, bağlantılı ve kapalı bir kümeye ***kontinyum,*** bağlantılı ve açık kümeye de ***bölge*** denir. [7, s.1]

2.1.5 Tanım: A, ℂ'de bir bölge olsun. Eğer, A bağlantılı ve A içindeki her γ eğrisi yine A içinde sabit bir z_0 noktasına homotop ise A'ya ***basit bağlantılı bölge*** denir. [6, s.143]

2.1.6 Tanım: Bir f karmaşık fonksiyonu bir z_0 noktasının belli bir D(z_0, δ), δ > 0 komşuluğundaki bütün noktalarda diferansiyellenebiliyorsa f, $z_0{'}$da ***analitiktir*** denir. [6, s.97]

2.1.7 Teorem (Maksimum Kuralı) : B sınırlı bir bölge olsun. f, B'de analitik ve $\overline{B}\,{'}$da sürekli ise $|f|$, ∂B'deki bir noktada maksimum değer alır. [6, s.154]

2.1.8 Tanım: B, ℂ'de bir bölge olmak üzere $f\colon B \longrightarrow \mathbb{C}$ sürekli dönüşümü verilsin. Eğer, bir $z_0 \in B$ noktasından geçen ve aralarında α açısı yapan herhangi iki düzgün γ_1 ve γ_2 eğrilerinin $f(\gamma_1)$ ve $f(\gamma_2)$ resim eğrileri de w_0=$f(z_0)'$da aralarında yön ve büyüklük bakımından α açısı yapıyorlarsa f fonksiyonuna z_0'da bir ***konform dönüşümdür*** denir. Eğer her $z_0 \in B$ noktasında f konform ise f, B'de ***konformdur*** denir. [6, s.295]

2.1.9 Teorem: (Riemann Dönüşüm Teoremi): $G \subset \mathbb{C}$ sınırı en az iki noktadan oluşan basit bağlantılı bir bölge ve $z_0 \in G$ olsun. Bu durumda, G bölgesini 𝔻'ye, $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ koşulları altında resmeden bir tek f konform dönüşümü vardır. [8, s.8]

2.1.10 Teorem: $G \subset \mathbb{C}$ sınırı en az iki noktadan oluşan, bağlantılı tümleyene sahip sınırlı bir kontinyum olsun. Bu durumda, $\mathbb{C}\overline{G}$ bölgesini $\mathbb{C}\overline{\mathbb{D}}$ 'ye

$$\varphi(\infty) = \infty \text{ ve } \lim_{z\to\infty} \frac{\varphi(z)}{z} = \gamma > 0$$

koşulları altında resmeden bir tek φ konform dönüşümü vardır. [8, 104]

2.1.11 Tanım: γ karmaşık düzlemde bir eğri olsun. Eğer bir $\mathbb{U}$ çemberini γ'ya resmeden ve $\mathbb{U}$ çemberinin bir komşuluğunda konform olan bir dönüşüm varsa γ eğrisine ***analitik eğri*** denir. Her analitik eğri bir Jordan eğrisidir. [9, s.20]

2.1.12 Teorem: Eğer bir G bölgesinin sınırı analitik bir eğri ise, G bölgesinin $\mathbb{D}$ bölgesine her konform dönüşümü, $\bar{G}$ 'yi kapsayan belirli bir bölgeye birebir ve analitik olarak genişletilebilir. Aynı şekilde G 'nin sınırı analitik eğri ise, $\mathbb{C}\,\bar{G}$ bölgesinin $\mathbb{C}\overline{\mathbb{D}}$'ye olan her konform dönüşümü $\mathbb{C}G$'yi kapsayan bir bölgeye birebir ve analitik olarak genişletilebilir. [7, s.41]

2.1.13 Teorem: Eğer bir G bölgesinin sınırı Jordan eğrisi ise, G bölgesinin $\mathbb{D}$ bölgesine her konform dönüşümü, $\overline{G}$ 'ye birebir ve sürekli olarak genişletilebilir. Aynı şekilde G'nin sınırı Jordan eğrisi ise, $\mathbb{C}\overline{G}$ bölgesinin $\mathbb{C}\overline{\mathbb{D}}$'ye olan her konform dönüşümü $\mathbb{C}G$'ye birebir ve sürekli olarak genişletilebilir. [7, s.24]

2.1.14 Tanım: h, $[0,2\pi]$ üzerinde sürekli bir fonksiyon olsun. h'nin ***süreklilik modülü;***

$$\omega(t,h) := \sup\{\, | h(t_1) - h(t_2) | : \ t_1, t_2 \in [0,2\pi] \,, | t_1 - t_2 | \leq t\}, \ \ t \geq 0$$

ile tanımlıdır.

$\int_0^{2\pi} t^{-1}\,\omega(t,h)dt < \infty$ ise, h fonksiyonuna ***Dini-süreklidir*** denir. [7, s.46]

2.1.15 Tanım: Γ eğrisi $\varphi_0'(\tau) \neq 0$ ve $\varphi_0'(\tau)$ Dini-süreklilik koşullarını sağlayan $\varphi_0(\tau)$, $0 \leq \tau \leq 2\pi$ parametrizasyonuna sahip ise Γ eğrisine ***Dini-düzgün eğri*** denir. [7, s.2]

Eğer Γ Dini-düzgün ise

$$0 < c_1 \leq |\varphi'(z)| \leq c_2 < \infty \,, \qquad z \in \Gamma \tag{2.1}$$

eşitsizliği vardır. [10]

2.1.16 Tanım: G, Γ düzgün sınırına sahip bir bölge olsun. $\theta(s)$, s yay uzunluğunun bir fonksiyonu olarak x-ekseni ve teğet arasındaki açıyı göstersin. Eğer $\theta(s)$,

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{\omega(t,\theta)}{t} dt < \infty$$

koşulunu sağlıyorsa, bu durumda Γ eğrisine ***Lyapunov eğrisi,*** G bölgesine de ***Lyapunov bölgesi*** denir. [4, s.44]

2.1.17 Tanım: Γ, boyu L olan sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi ve $z = z(t)$, $t \in$ [0,L], Γ'nın yay uzunluğuna göre parametrik gösterimi olsun. Eğer $\beta(t)$ ≔arg $z'(t)$, [0,L] üzerinde sınırlı varyasyonlu bir fonksiyon ise Γ'ya ***sınırlı rotasyonlu eğri*** denir ve burada $\int_\Gamma \ d\beta(t)$ değerine Γ'nın ***toplam rotasyonu*** denir. [7, s.67]

2.1.18 Tanım: $\Gamma(z,\varepsilon) := \{t \in \Gamma: |t - z| < \varepsilon\}$ tanımlansın.

$\Gamma(z,\varepsilon)$'nin uzunluğunu $|\Gamma(z,\varepsilon)|$ ile gösterelim.

$$\sup_{z \in \Gamma} \sup_{\varepsilon > 0} \frac{1}{\varepsilon} |\Gamma(z,\varepsilon)| < \infty \text{ ise}$$

Γ düzgün Jordan eğrisine bir ***Carleson eğri*** denir. [11, s.2]

2.1.19 Tanım: $f_n: A \rightarrow \mathbb{C}$ olarak tanımlanan (f_n) dizisi verilsin. Herhangi bir ε > 0 sayısı verildiğinde bütün $z \in A$ noktaları ve her $n \geq n_0$ için $|f_n(z) - f(z)|$ < ε olacak biçimde bir n_0 doğal sayısı bulunabilirse, (f_n) fonksiyon dizisi A üzerinde f fonksiyonuna ***düzgün yakınsıyor*** denir. [6, s.176]

2.1.20 Teorem (Weierstrass M-Testi): $A \subset \mathbb{C}$ ve g_k, A üzerinde tanımlı fonksiyonların bir dizisi olsun. Gerçel sayıların aşağıdaki özelliklerini sağlayan bir M_n dizisi var ise $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ A üzerinde mutlak ve düzgün yakınsaktır.

i) $M_n \geq 0$ için $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ yakınsak,

ii) Her $z \in A$ için, $|g_k| \leq M_k$, k=1,2,........

olur. [6, s.180]

2.1.21 Teorem: A, $\mathbb{C}$'de bir bölge ve (f_n) ise A üzerinde analitik olan f_n fonksiyonlarının bir dizisi olsun. Eğer A'da bulunan her kapalı disk üzerinde $f_n \to f$ yakınsaması düzgün ise f, A'da analitiktir. [6, s.181]

2.1.22 Teorem (Cauchy İntegral Teoremi): f fonksiyonu bir G bölgesinin kapanışında analitik ise,

$$\int_{\partial G} f(z)dz = 0$$

olur. [6, s.137]

2.1.23 Teorem (Cauchy İntegral Formülü): G bir bölge ve γ bu bölge içinde kapalı bir çevre olsun. Eğer a, γ içinde bir nokta ve $f(z)$, G'de analitik ise,

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz$$

olur. [6, s.148]

2.1.24 Teorem (Sınırsız Bölgeler için Cauchy İntegral Formülü) : G sonlu uzunluklu Jordan eğrisiyle sınırlanmış bir bölge ve Γ bunun pozitif yönlendirilmiş sınırı olsun. Eğer f, $\mathbb{C}G$ bölgesinde analitik bir fonksiyon ise

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \begin{cases} f(\infty) - f(z) & ; \quad z \in \mathbb{C}\overline{G} \\ f(\infty) & ; \quad z \in G \end{cases}$$

olur. [12, 435]

2.1.25 Tanım: X bir küme olsun. X'in bir $\mathcal{A}$ sınıfı için aşağıdaki özellikler sağlanırsa, bu $\mathcal{A}$ sınıfına X üzerinde bir ***cebir***dir denir.

- $X \in \mathcal{A}$
- Her $E \in \mathcal{A}$ için $E^c = X/E \in \mathcal{A}$
- $k = 1,2, \dots ,n$ için $E_k \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{A}$ **(*)**

Eğer (*) yerine

- Her $n \in \mathbb{N}$ için $E_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$

şartı alınırsa $\mathcal{A}$ cebirine bir ***σ-cebiri*** denir. [13, s.15]

2.1.26 Tanım: X bir küme ve $\mathcal{A}$ da X üzerinde bir σ-cebiri olsun. $(X,\mathcal{A})$ ikilisine bir ***ölçülebilir uzay,*** $\mathcal{A}$'daki her bir kümeye de ***ölçülebilir küme*** denir. [13, s.19]

2.1.27 Tanım: X bir küme ve $P(X)$ de X'in kuvvet kümesi olsun. $P(X)$ üzerinde tanımlı, genişletilmiş reel değerli bir μ^* fonksiyonu

(a) $\mu^*(\emptyset) = 0$

(b) Her $E \in P(X)$ için $\mu^*(E) \geq 0$

(c) $A \subset B \subset X$ için $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

(d) Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \in P(X)$ ise $\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$

şartlarını sağlarsa bu μ^* fonksiyonuna X üzerinde bir ***dış ölçü*** denir. [13, s.30]

Bir μ^* dış ölçüsüne göre ölçülebilen $A \subset X$ kümelerinin sınıfı $\boldsymbol{\mathcal{M}(X,\mu^*)}$ ile gösterilir. [13, s.38]

2.1.28 Tanım: (I_k) , $\mathbb{R}$'nin sınırlı ve açık alt aralıklarının bir dizisi

$$\tau_A = \{(I_k) : A \subset \cup I_k\}$$

olsun. $P(\mathbb{R})$ üzerinde

$$\lambda^*(A) = \inf \{ \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) : (I_k) \in \tau_A\}$$

biçiminde tanımlanan λ^* dış ölçüsüne ***Lebesgue dış ölçüsü*** denir. [13, s.32]

2.1.29 Tanım: $(X,\mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay olsun.

$f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ***ölçülebilirdir*** $\Leftrightarrow$ $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ için

$$f^{-1}((\alpha,+\infty)) = \{ x \in X : f(x) > \alpha \} \in \mathcal{A}$$

olmasıdır. [13, s.44]

2.1.30 Tanım: $\mathcal{M}(\mathbb{R},\lambda^*)$ σ- cebirine göre ölçülebilen bir fonksiyona ***Lebesgue ölçülebilir fonksiyon*** denir. [13, s.49]

2.2 Bazı Fonksiyonel Uzaylar

2.2.1 Tanım: G sonlu uzunluklu bir Γ Jordan eğrisiyle sınırlı bir bölge ve $1 < p < \infty$ olsun. Γ'da Lebesgue ölçülebilir ve $|f|^{p}$ ' nin yay uzunluğuna göre Lebegue integrallenebilir olduğu kompleks değerli f fonksiyonların kümesine ***Lebesgue uzayı*** denir ve $\boldsymbol{L_p(\Gamma)}$ ile gösterilir. [14, s.18]

2.2.2 Tanım: Γ sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi olsun. Her Jordan eğrisi, kompleks düzlemi biri sınırlı diğeri sınırsız olan ve bir eğriyi ortak sınır kabul eden iki basit bağlantılı bölgeye ayırır. G ile Γ eğrisinin iç bölgesini ve G^- ile Γ eğrisinin dış bölgesini gösterelim. Ayrıca $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ olsun.

Γ_r, $0 < r < 1$, $\mathbb{D}$ diskinin G bölgesi üzerine bir konform dönüşümü altında $\{w : |w| = r,\ 0 < r < 1\}$ çemberinin görüntüsü olsun. G bölgesinde analitik olan ve

$$\sup_{0<r<1} \int_{\Gamma_r} |f(z)|^p \, | dz | < \infty , \quad 1 \leq p < \infty$$

koşulunu sağlayan , f fonksiyonların kümesini $E_p(G)$ ile gösterelim. $E_p(G)$ 'ye ***Smirnov sınıfı*** denir. [15, s.169]

Her $f \in E_p(G)$ fonksiyonu Γ üzerinde hemen her yerde açısal limite sahiptir ve eğer f'nin açısal limiti için aynı notasyonu kullanırsak $f \in L_p(\Gamma)$'dir. [15]

2.2.3 Uyarı: $L_p(\Gamma)$ ve $E_p(G)$ uzayları $p \geq 1$ olduğunda,

$$\|f\|_{E_p(G)} = \|f\|_{L_p(\Gamma)} := \left(\int_\Gamma |f(z)|^p |dz|\right)^{\frac{1}{p}}$$

normuna göre Banach uzayıdırlar.

2.2.4 Tanım (En İyi Yaklaşım Sayısı) : Kompleks düzlemde derecesi $\leq n$ olan cebirsel polinomların kümesini $\wp_n$ ile gösterelim. $p > 1$ olmak üzere $f \in E_p(G)$ olsun. $n \in \mathbb{N}$ için

$$E_n^{(p)}(f;G) := \inf_{P_n \in \wp_n} \|f - P_n\|_{E_p(G)}$$

sayısına $\wp_n$ sınıfından olan polinomlar ile $f(z) \in E_p(G)$ fonksiyonuna ***en iyi yaklaşım sayısı*** denir. [14, s.59]

Burada en iyi yaklaşım sayısını veren P_0 polinomuna ***en iyi yaklaşan polinom*** denir.

2.2.5 Tanım: Γ bir düzgün Jordan eğri ve $f \in L_1(\Gamma)$ olsun.

$$f^+(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta, \qquad z \in G$$

$$f^-(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta, \qquad z \in G^- \tag{2.2}$$

f^+ ve f^- fonksiyonları sırasıyla G ve G^- 'de analitiktir.

Ayrıca $f^-(\infty) = 0$ olur.

$$S_\Gamma f(z_0) := \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma \cap \{\zeta : |\zeta - z_0| \geq \varepsilon\}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta, \qquad z_0 \in \Gamma$$

integraline $f \in L_1(\Gamma)'$nin ***Cauchy Singular İntegrali*** denir.

f^+ ve f^- fonksiyonlarından biri Γ üzerinde hemen her yerde açısal yollar üzerinden açısal limite sahipse, Γ'de $S_\Gamma f(z)$ vardır ve Γ üzerinde hemen her yerde açısal limite sahiptir. Tersine, Γ üzerinde $S_\Gamma f(z)$ var ise, f^+ ve f^- fonksiyonlarının ikisi de Γ'de hemen her yerde açısal yollar üzerinde limitlere sahiptir. Bu iki durumda,

$$f^+(z) = S_\Gamma f(z) - \frac{1}{2}f(z)$$

$$f^-(z) = S_\Gamma f(z) + \frac{1}{2}f(z) \tag{2.3}$$

Buradan hemen her yerde $f = f^+ - f^-$ olur. [12]

$S_\Gamma : f \longrightarrow S_\Gamma f$ lineer operatörüne ***Cauchy Singular Operatörü*** denir.

3. SMİRNOV ORLİCZ SINIFLARI

3.1 N-Fonksiyonlar

3.1.1 Tanım: $t \geq 0$ olduğunda sağdan sürekli, $t > 0$ olduğunda $(0,\infty)$'da pozitif, azalmayan ve $p(0) = 0$, $p(\infty) = \lim_{t\to\infty} p(t) = \infty$ koşullarını sağlayan $p(t)$ fonksiyonu için

$M(u) = \int_0^{|u|} p(t)dt$ olarak tanımlanan reel değişkenli bu

fonksiyona ***N-fonksiyon*** denir. [16, s.6]

3.1.2 Örnek: $\propto > 1$ için $M(u) = \frac{|u|^{\propto}}{\propto}$ fonksiyonu N- fonksiyonuna örnek gösterilebilir.

Çözüm: $t > 0$ olduğunda $p(t) = M'(t) = t^{\alpha-1}$ olarak seçersek

$M(u) = \int_0^{|u|} t^{\alpha-1}\, dt = \frac{|u|^{\alpha}}{\alpha}$ bulunur.

3.1.3 Örnek: $M(u) = e^{u^2} - 1$ fonksiyonu N-fonksiyonuna örnek gösterilebilir.

Çözüm: $p(t) = M'(t) = 2te^{t^2}$ olarak seçersek

$M(u) = \int_0^{|u|} 2te^{t^2} dt = e^{u^2} - 1$ bulunur.

3.1.4 Tanım: $t > 0$ iken pozitif $p(t)$ fonksiyonu verilsin. $p(t)$'nin $t \geq 0$ değerlerinde sağdan sürekli, azalmayan ve $p(0) = 0$, $p(\infty) = \lim_{t\to\infty} p(t) = \infty$ koşullarını sağladığını varsayalım.

$s \geq 0$ için $q(s) := \sup\limits_{p(t) \leq s} t$ olmak üzere

$N(v) := \int_0^{|v|} q(s)ds$ fonksiyonuna ***M(u)'nun tamamlayıcı fonksiyonu*** denir. [16, s.11]

3.1.5 Örnek: $M(u) = \frac{|u|^\alpha}{\alpha}$, $\alpha, \beta > 1$ fonksiyonunun tamamlayıcı fonksiyonu $N(v) = \frac{|v|^\beta}{\beta}$ dir.

Çözüm: $t > 0$ olduğunda $p(t) = M'(t) = t^{\alpha-1}$ ise

$s \geq 0$ için $q(s) := \sup\limits_{p(t) \leq s} t = \sup\limits_{t^{\alpha-1} \leq s} t \leq s^{\frac{1}{\alpha-1}} =: s^{\beta-1}$

Eğer,

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1 \text{ ise } \frac{1}{\beta} = 1 - \frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha-1}{\alpha}$$

$$\beta = \frac{\alpha}{\alpha-1}, \beta - 1 = \frac{\alpha}{\alpha-1} - 1 = \frac{1}{\alpha-1}$$

$N(v) = \int_0^{|v|} q(s)ds = \int_0^{|v|} s^{\beta-1}ds = \frac{|v|^\beta}{\beta}$ fonksiyonu $M(u)$'nun tamamlayıcı fonksiyonudur.

3.2 Orlicz Uzayları

3.2.1 Tanım: Γ sonlu uzunluklu Jordan eğrisi olsun ve Γ üzerinde Lebesque uzunluk ölçümünü düşünelim. $\exists\, \alpha > 0$ için

$$\int_\Gamma M[\alpha \,|\, f(z) \,|] \,|\, dz \,| < \infty$$

koşulunu sağlayan $f : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}$ Lebesgue ölçülebilir fonksiyonların lineer uzayı $\mathbf{L_M(\Gamma)}$ ile gösterilir. [17, s.349]

$\rho(g, N) := \int_\Gamma N[| g(z) |] \,|\, dz \,|$ olmak üzere

$L_M(\Gamma)$ uzayı,

$$\| f \|_{L_{M(\Gamma)}} := \sup\left\{\int_\Gamma | f(z)g(z) || dz | : \quad g \in L_N(\Gamma), \quad \rho(g, N) \leq 1\right\}$$

normlu bir Banach uzayı olur.

$\|.\|_{L_M(\Gamma)}$ normuna ***Orlicz normu*** denir. [18]

$L_M(\Gamma)$ Banach uzayına ***Orlicz uzayı*** denir.

$L_M(\Gamma)'$ daki her fonksiyon Γ üzerinde integrallenebilirdir. Yani;

$$L_M(\Gamma) \subset L_1(\Gamma) \tag{3.1}$$

olur.

$\limsup\limits_{x\to\infty} \frac{M(2x)}{M(x)} < \infty$ ise M, N- fonksiyonu Δ_2 ***koşulunu sağlar*** denir.[18]

$L_M(\Gamma)$ Orlicz uzayı **yansımalı**dır $\Leftrightarrow$ M, N- fonksiyonu ve tamamlayıcısı N fonksiyonlarının ikisi de Δ_2 koşulunu sağlar. [18]

3.2.2 Teorem: Γ sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi ve $L_M(\Gamma)$, Γ üzerinde yansımalı Orlicz uzayı olsun. O halde, S_Γ singular operatörünün sınırlı olması için yani ; $\exists$ c > 0 sabiti için

$$\|S_\Gamma f\|_{L_M(\Gamma)} \leq c.\|f\|_{L_M(\Gamma)}\ ,\ \ \forall f \in L_M(\Gamma) \tag{3.2}$$

koşulunun sağlanması için gerek ve yeter koşul Γ'nın bir Carleson eğri olmasıdır. [17, s.351]

3.2.3 Teorem: Her $u(z) \in L_M(\Gamma)$ ve her $v(z) \in L_N(\Gamma)$ reel değerli fonksiyonları için

$$\int_\Gamma u(z)v(z)dz \leq \rho(u\,;M) + \rho(v\,;N)$$

olur. [16, s.67] (3.3)

3.2.4 Teorem: Her $u(z) \in L_M(\Gamma)$ ve her $v(z) \in L_N(\Gamma)$ reel değerli fonksiyonları için

$$\left|\int_\Gamma u(z)v(z)dz\right| \leq \|u\|_{L_M(\Gamma)}\ \|v\|_{L_N(\Gamma)}$$

olur. [16, s.74] (3.4)

3.3 Smirnov Orlicz Sınıfları

3.3.1 Tanım: Γ_r , $\mathbb{D}$'nin G'ye bir konform dönüşüm altında

$$\gamma_r := \{ \mathrm{w} \in \mathbb{C} : |w| = r \} , r \in (0,1)$$

çemberinin görüntüsü ve M , bir N-fonksiyon olsun.

G'de analitik ve her $r \in (0,1)$ için

$$\int_{\Gamma_r} \mathrm{M}\,[|\,f(\mathrm{z})\,|]\,|\,\mathrm{dz}\,| \leq c$$

koşulunu sağlayan r'den bağımsız bir $c > 0$ sabitinin var olduğu $f : \mathrm{G} \to \mathbb{C}$ fonksiyonlarının sınıfı $\boldsymbol{E_M(G)}$ ile gösterilir ve bu sınıfa ***Smirnov Orlicz sınıfı*** denir. [4, s. 44]

$E_M(G)$ Smirnov Orlicz sınıfı, bilinen $E^p(G)$ Smirnov sınıfının bir genellemesidir.

Özel halde, $M(x) = M(x, p) := x^p,\ 1 < p < \infty$, ise E_M(G) Smirnov Orlicz sınıfı, E_p(G) Smirnov sınıfına denktir.

E_M(G) sınıfındaki her fonksiyon Γ üzerinde hemen her yerde açısal limit değerlere sahiptir ve bu sınır değer fonksiyonu $L_M(\Gamma)$' ya ait olur. Buradan

$f \in E_M$(G) için

$\|f\|_{E_M(G)} := \|f\|_{L_M(\Gamma)}$ olarak $\boldsymbol{E_M}$***(G) normu*** tanımlanabilir.

3.3.2 Tanım (En İyi Yaklaşım Sayısı): Kompleks düzlemde derecesi $\leq n$ olan cebirsel polinomların kümesini $\wp_n$ ile gösterelim.

Her $f \in E_M(G)$ için

$$E_n^M(f, G) := \inf_{P_n \in \wp_n} \|f - P_n\|_{L_M(\Gamma)}$$

$$= \inf_{P_n \in \wp_n} \{ \sup \{ \int_\Gamma |(f(\zeta) - P_n(\zeta))g(\zeta)||d\zeta|; g \in L_N(\Gamma), \rho(g;N) \leq 1\}\} \quad (3.5)$$

sayısına $\wp_n$ sınıfından olan polinomlar ile $f \in E_M(G)$ fonksiyonuna ***en iyi yaklaşım sayısı*** denir.

3.3.3 Tanım: $\zeta \in \Gamma$ için $\zeta_h := \psi(\varphi(\zeta)e^{ih})$, $h \in [0,2\pi]$ ile tanımlansın.

$f \in L_M(\Gamma)$ için $T_h f(\zeta) := f(\zeta_h)$, $\zeta \in \Gamma$

olarak $T_h f$ ötelemesi tanımlansın.

$f \in L_M(\Gamma)$ için $\omega_M(\delta, f) := \sup_{|h| \leq \delta} \| f - T_h f \|_{L_M(\Gamma)}$, $\delta \geq 0$ olarak

tanımlanan ***süreklilik modülü*** aşağıdaki koşulları sağlar:

$\omega_M(0, f) = 0$

$\omega_M(\delta, f) \geq 0$, $\delta > 0$

$\lim_{\delta \to 0} \omega_M(\delta, f) = 0$

f, g $\in E_M(G)$ için $\omega_M(\delta, f+g) \leq \omega_M(\delta, f) + \omega_M(\delta, g)$.

3.4 Smirnov Orlicz Sınıflarında Bazı Yaklaşım Teoremleri

Bu bölümde, Smirnov Orlicz sınıflarında yaklaşım problemleri için elde edilen sonuçları kronolojik sırada vereceğiz.

1968 yılında V. Kokilashvili [4] Smirnov Orlicz sınıflarında Lyapunov tipli sınıra sahip bölgeler durumunda aşağıdaki sonucu elde etmiştir.

3.4.1 Lemma: G, Lyapunov tipli Γ sınırına sahip bir bölge ve $f(z) \in E_M(G)$ ise

$$\|f(z) - S_n(f, z)\|_{L_M(\Gamma)} \leq cE_n^M(f, \Gamma)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $S_n(f, z)$ Faber serisinin n. kısmi toplamı ve c sabiti sadece sınıra ve uzaya bağlı bir sabittir. [4, s.54]

(**Not:** Faber serileri 5. Bölümde ayrıntılı olarak işlenecektir.)

Bölgenin Γ sınırı Carleson eğrisi olması durumunda A. Güven ve D. M. Israfilov [19] aşağıda tanımı verilen $H_\Gamma^{\omega^*} E_M(G)$ uzayını tanımlamışlar ve bu uzaydaki fonksiyonlara yaklaşımı araştırmışlardır.

3.4.2 Tanım: $\omega^*(\delta)$ negatif olmayan, sürekli, azalmayan reel fonksiyon olsun. $\omega^*(0) = 0$, $\delta > 0$ için $\omega^*(\delta) > 0$, her $n \in \mathbb{N}$ ve bir $c_1 > 0$ sabiti için $\omega^*(n\delta) \leq c_1 n\omega^*(\delta)$ ve c_2 sabiti f ve δ'dan bağımsız olmak üzere

$$\omega_M(\delta, f) \leq c_2\omega^*(\delta), \quad \delta > 0$$

koşullarını sağlayan $f \in E_M(G)$ fonksiyon sınıfını $\boldsymbol{H_\Gamma^{\omega^*} E_M(G)}$ ile gösterelim.

Bu sınıftaki her f fonksiyonu için $T_h(f) \in L_M(\Gamma)$ olur.

f , g $\in H_\Gamma^{\omega^*} E_M(G)$ ise

$$\omega_M(0, f) = 0$$

$$\omega_M(\delta, f) \geq 0, \quad \delta \geq 0$$

$$\lim_{\delta \to 0} \omega_M(\delta, f) = 0$$

$$\omega_M(\delta, f + g) \leq \omega_M(\delta, f) + \omega_M(\delta, g)$$

olur.

3.4.3 Teorem: Γ bir Carleson eğri, $L_M(\Gamma)$, Γ üzerinde yansımalı Orlicz uzayı ve $f \in H_\Gamma^{\omega^*} E_M(G)$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\|f - P_n(\cdot, f)\|_{L_M(\Gamma)} \leq c^*\omega^*\left(\frac{1}{n}\right)$$

olacak şekilde derecesi n'yi aşmayan bir $P_n(z, f)$ cebirsel polinomu vardır. Burada c^* sabiti n'den bağımsızdır. [5, s.512]

Smirnov Orlicz sınıflarında bölgenin Γ sınırının Dini-düzgün eğri olması durumunda D. M. Israfilov, B. Oktay ve R. Akgün tarafından [19] aşağıdaki teorem elde edilmiştir.

3.4.4 Teorem: G, Dini-düzgün Γ sınırına sahip sınırlı, basit bağlantılı bir bölge ve $E_M(G)$, G üzerinde bir yansımalı Smirnov Orlicz sınıfı olsun. Bu durumda, her $f \in E_M(G)$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için n'den bağımsız c sabiti olmak üzere

$$\|f - P_n(.,f)\|_{L_M(\Gamma)} \leq \text{c.}\, \omega_M(\frac{1}{n}, f\ )$$

koşulunu sağlayan, derecesi n'yi aşmayan bir $P_n(.,f\ )$ cebirsel polinomu vardır. [19, s.90]

Smirnov Orlicz sınıflarında elde edilen yaklaşım teoremlerinden biri de sınırlı rotasyonlu eğriler durumunda R. Akgün ve D. M. Israfilov [20]'in elde ettiği aşağıdaki sonuçtur.

3.4.5 Teorem: Γ, sivri açılara sahip olmayan sınırlı rotasyonlu eğri olsun. Yeterince büyük seçilen n doğal sayısı için Faber polinomların kökleri G'dedir ve $E_M(G)$ yansımalı Smirnov Orlicz sınıfına ait olan her f fonksiyonu için

$$\|f - L_N(f,.)\|_{E_M(G)} \ \leq c\ E_{n-1}^M(G)$$

olur. Burada $L_N(f,z)$, F_n Faber polinomlarının sıfırlarıyla elde edilen interpolasyon polinomudur ve c sabiti sadece eğrinin sınırına ve uzaya bağlıdır. [20, s.417]

4. DEĞİŞKEN ÜSLÜ SMİRNOV SINIFLARI

4.1 Değişken Üslü Lebesgue Uzayları

4.1.1 Tanım: $p = p(\cdot)$ Lebesgue ölçülebilir bir $E \subset \mathbb{R}$ kümesinde tanımlı Lebesgue ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Belirli bir pozitif $\lambda > 0$ sabiti için

$$\int_{E} \left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} dx < \infty$$

koşulunu sağlayan ölçülebilir f fonksiyonları kümesine ***değişken üslü Lebesgue uzayı*** denir ve $\boldsymbol{L^{p(\cdot)}(E)}$ ile gösterilir. [21, s.17]

$$p_- := \operatorname*{ess\,inf}_{x \in E} p(x) \qquad p_+ := \operatorname*{ess\,sup}_{x \in E} p(x)$$

fonksiyonlarını dahil edelim.

Matematik literatürde [22, s.13-30] gösterilmiştir ki,

$1 < p_- \leq p_+ < \infty$ ise yukarıda tanımlı $L^{p(\cdot)}(E)$ kümesi normlu bir uzay olur ve bu uzayda denk normlardan biri

$$\|f\|_{p(.)} := \inf\left\{\lambda > 0 : \int_E \left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} dx \leq 1\right\}$$

olarak tanımlanabilir.

Değişken üslü uzayların yaklaşım teorisi açısından incelenebilmesi için $p(\cdot)$ fonksiyonu üzerine belirli koşulların konulması gerekir.

4.1.2 Tanım:

$$|p(x) - p(y)|\, ln\left(\frac{1}{|x-y|}\right) \leq c, \quad x, y \in E,\ x \neq y,\ |x-y| \leq \frac{1}{2}$$

koşulu ve buna ek olarak $1 < p_- \leq p_+ < \infty$ koşulunu da sağlayan $p(\cdot)$ fonksiyonlarının kümesini $\wp_0(E)$ ile göstereceğiz.

$p(\cdot) \in \wp_0(\mathrm{E})$ koşulu $L^{p(\cdot)}(E)$ uzaylarında yaklaşım teorisinin nitelik ve nicelik problemlerinin nitelik çözümü için gereklidir.

Bu uzaylarda, yaklaşım teorisinin temel problemleri Sharapudinov'un [22] monogrofisinde detaylı bir şekilde incelenmiştir. Özel halde, bu uzaylarda yaklaşım teorisinin düz ve ters teoremleri, değişik toplanabilme yöntemlerinin yaklaşım özellikleri incelenmiş ve klasik uzaylarda elde edilen sonuçların bu uzaylarda da geçerli olabileceği koşullar araştırılmıştır. Bunun dışında, klasik Smirnov analitik fonksiyon sınıflarının değişken üslü benzerleri tanımlanmış ve böylece değişken üslü Smirnov sınıflarında da yaklaşım teorisinin problemleri araştırılmaya başlanmıştır.

4.2 Değişken Üslü Smirnov Sınıfları

$G \subset \mathbb{C}$ sonlu kompleks düzlemde sonlu uzunluklu Γ Jordan eğrisi ile sınırlı bir bölge, $G^{-} := Ext\,\Gamma$, $\mathbb{T} := \{w \in \mathbb{C}: |w| = 1\}$, $\mathbb{D} := \dot{I}nt\,\mathbb{T}$ ve $\mathbb{D}^{-} := Ext\,\mathbb{T}$ olsun.

4.2.1 Tanım: $p(\cdot) : \Gamma \longrightarrow [1,\infty)$ Lebesgue ölçülebilir bir fonksiyon ve

$$p_{-} := \operatorname*{essinf}_{z\in\Gamma} p(z) \qquad p_{+} := \operatorname*{esssup}_{z\in\Gamma} p(z)$$

olsun. Reel değişkenli fonksiyonlarda olduğu gibi $1 < p_{-} \leq p_{+} < \infty$ koşulu ve bu koşula ek olarak

$$|p(z_1) - p(z_2)|\, ln\frac{1}{|z_1 - z_2|} \leq c, \quad z_1, z_2 \in \Gamma, z_1 \neq z_2\,, \quad |z_1 - z_2| \leq \frac{1}{2}$$

koşulunu da sağlayan $p(\cdot)$ fonksiyonlarının kümesini $\wp_0(\Gamma)$ ile gösterelim.

Γ üzerinde tanımlı kompleks değişkenli fonksiyonların değişken üslü $L^{p(\cdot)}(\Gamma)$ Lebesgue uzayını ve bu uzayda normu tanımlayalım:

4.2.2 Tanım: $p(\cdot) \in \wp_0(\Gamma)$ olsun. Γ üzerinde ölçülebilir olup bir pozitif $\lambda > 0$ için

$$\rho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\lambda}\right) := \int_\Gamma \left|\frac{f(z)}{\lambda}\right|^{p(z)} |dz| < \infty$$

koşulunu sağlayan ölçülebilir f fonksiyonlarının kümesine Γ üzerinde tanımlı ***değişken üslü Lebesgue uzayı*** denir ve $\boldsymbol{L^{p(\cdot)}(\Gamma)}$ ile gösterilir.

Bu durumda

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)} := \inf\left\{\lambda > 0 : \ \rho_{p(\cdot)}(f/\lambda) \le 1\right\}$$

fonksiyoneli bir norm tanımlar ve bu norm altında $L^{p(\cdot)}(\Gamma)$ uzayı bir Banach uzayı olur. Özel halde, $\Gamma := \mathbb{T}$ durumunda bilinen $L^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$ değişken üslü Lebesgue uzayı elde edilir.

$E^p(G)$, $0 < p < \infty$, analitik fonksiyonların bilinen Smirnov sınıfı olsun.

4.2.3 Tanım: $p(\cdot) \in \wp_0(\Gamma)$ olsun.

$$E^{p(\cdot)}(G) := \left\{f \in E^1(G) : \ f \in L^{p(\cdot)}(\Gamma)\right\}$$

kümesine G'de analitik fonksiyonların ***değişken üslü Smirnov sınıfı*** denir.

$f \in E^{p(\cdot)}(G)$ için normu;

$\|f\|_{E^{p(\cdot)}(G)} := \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)}$

olarak tanımlarsak $E^{p(\cdot)}(G)$ bir Banach uzayı olur.

Genellikle yaklaşım problemlerinde yaklaşım hızının değerlendirilmesi için düzgünlük modülü olarak bilinen karakteristik kullanılır. Bu karakteristik, belli koşulları sağlamakla birlikte verilen fonksiyondan öteleme sonucu elde edilen fonksiyon yardımı ile tanımlanır. Fakat, değişken üslü uzaylar ötelemeye göre invaryant olmadıklarından dolayı bu uzaylarda düzgünlük modülleri ortalama fonksiyonu yardımı ile tanımlanır.

4.2.4 Tanım: $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$ için

$$\sigma_h f(w) := \frac{1}{h}\int_0^h f(we^{it})dt, \ w \in \mathbb{T}, \ 0 < h < \pi$$

olarak tanımlanan fonksiyona ***ortalama değer fonksiyonu*** denir. Bu fonksiyon yardımı ile 1. düzgünlük modülü aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

4.2.5 Tanım: $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$ ve $p(\cdot) \in \wp_0(\mathbb{T})$ olsun.

$$\Omega(f,\delta)_{p(.)} := \sup_{0<h\leq\delta} \|f - \sigma_h f(\cdot)\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{T})}$$

fonksiyonuna f'in $L^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$'de ***1.düzgünlük modülü*** denir.

Ana sonucun ispatında kullanılacak iki ek bilgiye daha ihtiyaç duyulmaktadır. Bunlardan biri değişken üslü Lebesgue uzaylarında Hölder eşitsizliği olarak bilinmekte olup aşağıdaki şekilde ifade edilir:

4.2.6 Teorem: $f \in L^{p(\cdot)}(\Gamma)$ ve $g \in L^{p'(\cdot)}(\Gamma)$, $\frac{1}{p(\cdot)} + \frac{1}{p'(\cdot)} = 1$, ise belli bir $c_{p(\cdot)}$ sabiti için

$$\int_\Gamma |f(z)g(z)|dz \leq c_{p(\cdot)}\|f\|_{p(\cdot)}\|g\|_{p'(\cdot)} \tag{4.1}$$

eşitsizliği sağlanır. [23, s.27]

Ayrıca,

$f_0(w) := f(\psi(w))$ ve $p_0(w) := p(\psi(w))$
tanımlansın.

Diğer ek bilgi ise değişken üslü Smirnov sınıflarında elde edilen aşağıdaki düz teoremdir.

4.2.7 Teorem: G, Γ Dini-düzgün eğrisiyle sınırlı bir basit bağlantılı bölge ve $p(\cdot) \in \wp_0(\Gamma)$ için $f \in E^{p(\cdot)}(G)$ olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\|f - P_n\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)} \leq c_{p(\cdot)} \Omega\left(f_0, \frac{1}{n}\right)_{p(\cdot)}$$

olacak şekilde $c_{p(\cdot)}$ sabiti vardır. [24, s.40]

5. FABER POLİNOMLARI VE FABER SERİLERİ

Bilindiği gibi $|z - z_0| < R, R > 0$ diskinde analitik bir fonksiyon

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \,(z - z_0)^n$$

Taylor serisine açılabilir. Bu seri disk üzerinde mutlak ve bu diskin her kompakt alt kümesi üzerinde düzgün yakınsar. Faber serileri, birim disk durumunda ifade edilen Taylor serilerinin basit bağlantılı bölgeler durumuna genelleştirilmesidir.

5.1 Faber Polinomları ve Örnekleri

Kompleks düzlemde Γ ile sınırlı, basit bağlantılı G bölgesi verilsin. G^-, $z = \infty$ noktasını içeren, $\overline{G} = G \cup \Gamma$ kapalı bölgesinin tümleyeni olan basit bağlantılı bir bölge, $\mathbb{D} := (0,1)$, $\mathbb{T} := \partial\mathbb{D}$ ve $\mathbb{D}^- := \mathbb{C}\overline{\mathbb{D}}$ olsun.

Riemann konform dönüşüm teoremine göre G^- bölgesini $\mathbb{D}^-$ bölgesine,

$$\varphi(\infty) = \infty \text{ ve } \varphi'(\infty) := \lim_{z\to\infty} \frac{\varphi(z)}{z} = \gamma > 0 \qquad (5.1)$$

koşulları altında resmeden bir tek φ konform dönüşümü vardır.

(5.1)'deki bağıntılardan $\varphi(z) = w$ fonksiyonu G^- bölgesinde ∞ noktası dışında analitik ve $w = \varphi(z)$ fonksiyonu ∞ noktasında bir basit kutba sahiptir. Bu nedenle, φ fonksiyonunun ∞ noktasının çıkarılmış komşuluğundaki Laurent açılımı,

$$w = \varphi(z) = \gamma z + \gamma_0 + \frac{\gamma_1}{z} + \frac{\gamma_2}{z^2} + \cdots + \frac{\gamma_k}{z^k} + \cdots$$

şeklindedir.

$n = 0,1,2\ldots\ldots$ için

$$[\varphi(z)]^n = \left(\gamma z + \gamma_0 + \frac{\gamma_1}{z} + \frac{\gamma_2}{z^2} + \cdots + \frac{\gamma_k}{z^k} + \cdots \right)^n$$

$$= \gamma^n z^n + a_{n-1}^{(n)} z^{n-1} + a_{n-2}^{(n)} z^{n-2} + \cdots + a_1^{(n)} z + a_0^{(n)}$$

$$+ \frac{b_1^{(n)}}{z} + \frac{b_2^{(n)}}{z^2} + \cdots + \frac{b_k^{(n)}}{z^k} + \cdots$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte z'nin pozitif kuvvetlerinden oluşan ve n+1 tane terim içeren grup,

$$\Phi_n(z) := \gamma^n z^n + a_{n-1}^{(n)} z^{n-1} + a_{n-2}^{(n)} z^{n-2} + \dots \dots + a_1^{(n)} z + a_0^{(n)}$$

ile, z'nin negatif kuvvetlerinden oluşan ve sonsuz terim içeren grup da

$$-E_n(z) := \frac{b_1^{(n)}}{z} + \frac{b_2^{(n)}}{z^2} + \dots + \frac{b_k^{(n)}}{z^k} + \cdots$$

ile gösterilirse,

$$[\varphi(z)]^n = \Phi_n(z) - E_n(z)\,, \qquad z \in G^- \qquad (5.2)$$

eşitliği elde edilir. $[\varphi(z)]^n$ fonksiyonu G^- bölgesinde ∞ noktası dışında analitiktir ve ∞ noktasında n dereceli bir kutba sahiptir. Bu nedenle, (5.2) eşitliğinde $\Phi_n(z)$, n dereceli bir polinom, $E_n(z)$ fonksiyonu ise G^- bölgesinde analitik olup $E_n(\infty) = 0$ dır.

5.1.1 Tanım: $\Phi_n(z)$ (n=0,1,2….) polinomlarına G bölgesinin n.dereceden ***Faber polinomları*** denir.

$z \in G^-$ için (5.2) eşitliğinden,

$$\Phi_n(z) = [\varphi(z)]^n + E_n(z)$$

$$E_n(z) = \Phi_n(z) - [\varphi(z)]^n$$

eşitlikleri elde edilir.

$\Gamma_R := \{ z \in G^- : |\varphi(z)| = R > 1 \}$ olsun.

Γ_R eğrilerine G^- bölgesinin ***seviye eğrileri*** denir. $w = \varphi(z)$ dönüşümü konform ve univalent (bire-bir ve analitik) olduğundan, Γ_R kapalı analitik bir eğridir. Bu nedenle Γ_R seviye eğrisi $\mathbb{C}$ düzlemini iki bölgeye ayırır. Bu bölgelerden biri Γ_R ile sınırlı olan sınırlı bölgedir. Bu bölgeyi G_R ile gösterelim. Diğer bölge ise sınırı Γ_R olan sonsuzluğu içeren bir bölgedir. Bunu ise G_R^- ile gösterelim. G_R ve G_R^- bölgelerine ***kanonik veya doğal bölgeler*** denir.

$z \in G_R$ için (5.2) eşitliğinin her iki tarafının Γ_R boyunca integralini alırsak,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{[\varphi(\zeta)]^n}{\zeta-z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{\Phi_n(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{E_n(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

eşitliği elde edilir.

Burada $z \in G_R$ olduğundan sınırsız bölgeler için Cauchy integral formülünden,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{E_n(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta = 0$$

Dolayısıyla $z \in G_R$ için ,

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{[\varphi(\zeta)]^n}{\zeta-z}d\zeta \tag{5.3}$$

eşitliği elde edilir.

$z = \psi$ (w) fonksiyonu $w = \varphi(z)$ fonksiyonunun ters fonksiyonu olsun. Bu durumda, ψ fonksiyonu $\mathbb{D}^-$ bölgesini G^- bölgesine konform ve univalent olarak resmeder.

$$\varphi(\infty) = \infty \quad \text{ve} \quad \varphi'(\infty) = \lim_{z\to\infty}\frac{\varphi(z)}{z} = \gamma > 0$$

olduğu göz önüne alınırsa,

$$\psi(\infty) = \infty \quad \text{ve} \quad \psi'(\infty) = \frac{1}{\varphi'(\infty)} = \frac{1}{\gamma} = \beta > 0$$

dır. O halde, ψ fonksiyonu $\mathbb{D}^-$ bölgesinde ∞ noktası dışında analitiktir ve ∞ noktasında bir basit kutba sahiptir. Bu durumda ψ fonksiyonunun ∞ noktasındaki Laurent açılımı,

$$z = \psi(w) = \beta w + \beta_0 + \frac{\beta_1}{w} + \frac{\beta_2}{w^2} + \cdots + \frac{\beta_k}{w^k} + \cdots, \quad |w| > 1$$

şeklindedir. (5.3) integralinde $\zeta = \psi(t)$ dönüşümü yapılırsa,

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R}\frac{t^n\psi'(t)}{\psi(t)-z}dt, \qquad z \in G_R$$

eşitliği elde edilir. Son eşitlikten görüldüğü gibi $\{\Phi_n(z)\}$ Faber polinomları , $\frac{\psi'(t)}{\psi(t)-z}$ fonksiyonunun ∞ noktasının çıkarılmış komşuluğundaki Laurent açılımının Laurent katsayılarıdır. O halde ,

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)-z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Phi_n(z)}{t^{n+1}}, \qquad z \in G_R \text{ ve } |t| > R$$

elde edilir.

5.1.2 Tanım: $\frac{\psi'(t)}{\psi(t)-z}$ fonksiyonuna $\{\phi_n(z)\}$ Faber polinomlarının ***üreteç fonksiyonu*** denir.

5.1.3 Örnek: Eğer G bölgesi $|z - z_0| < R_0$ diski ise bu diskin dışını birim diskin dışına, $\varphi(\infty) = \infty$ ve $\varphi'(\infty) = \lim\limits_{z\to\infty} \frac{\varphi(z)}{z} = \gamma > 0$ koşulları altında resmeden konform dönüşüm

$$w = \varphi(z) = \frac{z-z_0}{R_0}$$

dır. Bu durumda her n doğal sayısı için,

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{R_0^n}(z - z_0)^n$$

olur. Görüldüğü gibi $|\ z-z_0\ | < R_0$ diski için Faber polinomları, konform dönüşüm fonksiyonunun negatif olmayan tam kuvvetleridir ve $E_n(z) \equiv 0$' dır.

5.1.4 Örnek: $G := \{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ olması durumunda, diskin dışını birim diskin dışına $\varphi(\infty) = \infty$ ve $\varphi'(\infty) = \lim\limits_{z\to\infty} \frac{\varphi(z)}{z} = \gamma > 0$ koşulları altında resmeden konform dönüşüm $\varphi(z) = z$ şeklindedir. O halde $\psi(t) = t$ olduğundan

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)-z} = \frac{1}{t-z} = \frac{1}{t}\frac{1}{1-\frac{z}{t}} = \frac{1}{t}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{t}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{t^{n+1}}$$

eşitliği elde edilir. Öyleyse G bölgesinin birim disk olması durumunda $\Phi_n(z) = z^n$ dir.

Faber polinomlarının tanımından görüldüğü gibi G bölgesi ile G^- bölgesinin Faber polinomları aynıdır. Buna göre çoğu zaman G bölgesinin Faber polinomları yerine $\overline{G}$ kompaktlığının ifadesi kullanılır.

5.2 Faber Polinomlarının Asimptotik Özellikleri

Önceki bölümlerde belirtildiği gibi $|\varphi(z)| = R > 1$ için her Γ_R seviye eğrisi, bu eğrinin içi G_R ve dışı G_R^- olmak üzere iki doğal bölge tanımlar. $E_n(z)$ fonksiyonu $\overline{G_R^-}$ kapalı bölgesinde analitik ve $E_n(\infty) = 0$ olduğundan Γ_R pozitif yönlü olmak üzere sınırsız bölgeler için Cauchy integral formülüne göre, her $z \in G^-$ için

$$E_n(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{E_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \,, \qquad z \in G_R^-$$

yazılabilir.

$$E_n(z) = \Phi_n(z) - [\varphi(z)]^n$$

olduğundan,

$$E_n(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{\Phi_n(\zeta) - [\varphi(\zeta)]^n}{\zeta - z} d\zeta, \qquad z \in G_R^-$$

olur. $\Phi_n(z)$, G_R bölgesinde analitik olduğundan Cauchy integral teoreminden,

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{\Phi_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0$$

dır. Bu durumda ,

$$E_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{[\varphi(\zeta)]^n}{\zeta - z} d\zeta \,, \qquad z \in G_R^- \qquad (5.4)$$

eşitliği bulunur.

Böylece,

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{[\varphi(\zeta)]^n}{\zeta - z} d\zeta \,, \qquad z \in G_R$$

ve

$$E_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{[\varphi(\zeta)]^n}{\zeta - z} d\zeta \,, \qquad z \in G_R^-$$

şeklinde benzer iki bağıntıya sahip olmuş oluruz.

K bağlantılı tümleyene sahip sınırlı kontinyum olsun. Amacımız Faber polinomlarını K kontinyumunda değerlendirmektir.

Bunun için, eğer $z \in K$ ise yeteri kadar küçük sabit $\varepsilon > 0$ sayısı için (5.3) ifadesinde $R = 1 + \varepsilon$ alınabilir. Bu durumda,

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{1+\varepsilon}} \frac{[\varphi(\zeta)]^n}{\zeta - z} d\zeta , \qquad z \in G_R$$

integralinden,

$$\begin{aligned} |\Phi_n(z)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{1+\varepsilon} \frac{[\varphi(\zeta)]^n}{\zeta - z} d\zeta \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{1+\varepsilon}} \frac{|\varphi(\zeta)|^n}{|\zeta - z|} |d\zeta| \\ &= \frac{(1+\varepsilon)^n}{2\pi} \int_{1+\varepsilon} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|} \end{aligned}$$

elde edilir.

Burada, K kontinyumunun $\Gamma_{1+\varepsilon}$ seviye eğrisine olan uzaklığını $\rho(K, \Gamma_{1+\varepsilon})$ olarak ve $\Gamma_{1+\varepsilon}$ eğrisinin uzunluğunu da $\ell(\Gamma_{1+\varepsilon})$ olarak işaretleyelim. $\Gamma_{1+\varepsilon}$ kapalı ve K kümesi kompakt olduğundan aralarındaki $\rho(K, \Gamma_{1+\varepsilon})$ uzaklığı sıfırdan büyüktür. Ayrıca $\zeta \in \Gamma_{1+\varepsilon}$ ve $z \in K$ olduğundan $\rho(K, \Gamma_{1+\varepsilon}) < |\zeta - z|$ olur. O halde,

$$|\Phi_n(z)| \leq \frac{(1+\varepsilon)^n}{2\pi\rho(K,\Gamma_{1+\varepsilon})} \int_{\Gamma_{1+\varepsilon}} |d\zeta| = \frac{(1+\varepsilon)^n}{2\pi\rho(K,\Gamma_{1+\varepsilon})} \ell(\Gamma_{1+\varepsilon}) \tag{5.5}$$

eşitsizliği elde edilir. $c_1(\varepsilon) := \frac{\ell(\Gamma_{1+\varepsilon})}{2\pi\rho(K,\Gamma_{1+\varepsilon})}$ olsun. $c_1(\varepsilon)$ sayısı, yalnızca ε sayısına bağlı ve $\varepsilon \to 0$ için artan bir sabit olmak üzere (5.5) eşitsizliğini,

$$|\Phi_n(z)| \leq c_1(\varepsilon)(1+\varepsilon)^n , \qquad z \in K \tag{5.6}$$

şeklinde yazabiliriz. (5.6) ifadesinin her iki tarafının n.dereceden kökü alınırsa, $n \to \infty$ için limit durumunda

$$\lim_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{|\Phi_n(z)|} \leq 1+\varepsilon , \quad z \in K$$

ifadesi elde edilir. Bu eşitsizlikte ε yeteri kadar küçük keyfi bir sabit ve sol taraf ε'a bağlı olmadığından,

$$\lim_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{|\Phi_n(z)|} \leq 1 , \qquad z \in K \tag{5.7}$$

limit bağıntısı elde edilir.

R ve r, $1 < r < R$ olacak şekilde iki sayı olsun. Bu durumda $\overline{G_R^-}$ kapalı kümesi üzerinde $E_n(z)$ fonksiyonunu belirleyebiliriz. (5.4) ifadesinden tüm $z \in \overline{G_R^-}$ için,

$$|E_n(z)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r}\frac{[\varphi(\zeta)]^n}{\zeta - z}d\zeta\right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_r}\frac{|\varphi(\zeta)|^n}{|\zeta - z|}|d\zeta|$$

$$= \frac{r^n}{2\pi}\int_{\Gamma_r}\frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|}$$

olur. Γ_r ve Γ_R seviye eğrileri arasındaki $\rho\,(\Gamma_r, \Gamma_R)$ uzaklığını δ ile işaretleyelim. $\overline{G_R^-}$ kapalı ve Γ_r kompakt olduğundan aralarındaki uzaklık sıfırdan büyüktür. Ayrıca $z \in G_R^-$ ve $\zeta \in \Gamma_r$ olduğundan $\delta \leq |\zeta - z|$ olur. Buradan,

$$|E_n(z)| \leq \frac{r^n}{2\pi\delta}\,\ell(\Gamma_r) \tag{5.8}$$

değerlendirilmesi elde edilir. $c_2(R, r) := \frac{\ell(\Gamma_r)}{2\pi\rho(\Gamma_r, \Gamma_R)}$ alınırsa,

$$|E_n(z)| \leq c_2(R, r)r^n$$

elde edilir. Böylece ,

$$\Phi_n(z) = [\varphi(z)]^n + E_n(z)\,, \qquad z \in G^-$$

bağıntısından, Faber polinomları için en basit asimptotik formülü,

$$\Phi_n(z) = [\varphi(z)]^n + O(r^n)\,, \qquad z \in \overline{G_R^-}\,, \quad 1 < r < R \tag{5.9}$$

şeklindedir.

(5.9) ifadesinin sağ tarafının hızı $z \in \Gamma_R$ ise $|\varphi(z)|^n = R^n$ dir. Fakat sağ taraftaki ikinci terimin sonsuza gitme hızı r^n değerinin sonsuza gitme hızından büyük değildir.

Hemen belirtelim ki, (5.8) ifadesinde $\delta(z) = \rho\,(z, \Gamma_r)$ alırsak $z \to \infty$ için, (5.8) ifadesinin sağ tarafı sıfıra yakınsar.

$R > 1$ olmak üzere bir $z \in \Gamma_R$ alalım. Bu durumda, $1 < r < R$ olmak üzere,

$$\Phi_n(z) = [\varphi(z)]^n + O(r^n)$$

olduğunu biliyoruz. Buradan,

$$\Phi_n(z) = [\varphi(z)]^n + O(r^n) = [\varphi(z)]^n \left[1 + \frac{O(r^n)}{[\varphi(z)]^n}\right]$$

$$= [\varphi(z)]^n \left[1 + \frac{O(r^n)}{O(R^n)}\right] = [\varphi(z)]^n \left[1 + \ O\left(\frac{r^n}{R^n}\right)\right]$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten,

$$\frac{\Phi_n(z)}{[\varphi(z)]^n} - 1 = O\left(\frac{r^n}{R^n}\right)$$

eşitliği elde edilir. Buradan da,

$$\left|\frac{\Phi_n(z)}{[\varphi(z)]^n} \ - \ 1\right| \leq c_3 \frac{r^n}{R^n}$$

ve dolayısıyla ,

$$1 - \ c_3 \frac{r^n}{R^n} \leq \frac{|\Phi_n(z)|}{|\varphi(z)|^n} \leq 1 + c_3 \frac{r^n}{R^n}$$

bağıntısı elde edilir. $c_4(R) : = 1 - c_3 \frac{r^n}{R^n}$ ve $c_5(R) := 1 + c_3 \frac{r^n}{R^n}$ alınırsa,

$$c_4(R) \leq \frac{|\Phi_n(z)|}{|\varphi(z)|^n} \leq c_5(R) \, , \qquad z \in \Gamma_R$$

$$c_4(R)|\varphi(z)|^n \leq |\Phi_n(z)| \leq c_5(R)|\varphi(z)|^n$$

$$c_4(R)R^n \leq |\Phi_n(z)| \leq c_5(R)R^n \, , \qquad z \in \Gamma_R \tag{5.10}$$

olur. (5.10) eşitsizliğinin n.dereceden kökü alınıp, $n \to \infty$ için limit alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\Phi_n(z)|} \ = |\varphi(z)| \, , \qquad z \in G^- \tag{5.11}$$

eşitsizliğini buluruz ki, burada yakınsama G^-deki her kompakt küme üzerinde düzgündür. Yani, G^- bölgesinde kapsanan her sınırlı kapalı F kümesi üzerinde yakınsama düzgün olur.

Eğer $z \in \Gamma_R$ ise bu durumda $n+1$ ve n için (5.9) ifadesi,

$$\frac{\Phi_{n+1}(z)}{\Phi_n(z)} = \frac{[\varphi(z)]^{n+1} + O(r^{n+1})}{[\varphi(z)]^n + O(r^n)}$$

$$= \varphi(z) \left[\frac{1 + O\left(\frac{r^{n+1}}{R^{n+1}}\right)}{1 + O\left(\frac{r^n}{R^n}\right)}\right]$$

$$= \varphi(z)\left[1 + \frac{O\left(\frac{r^{n+1}}{R^{n+1}}\right) - O\left(\frac{r^n}{R^n}\right)}{1 + O\left(\frac{r^n}{R^n}\right)}\right]$$

$$= \varphi(z) + O\left(\frac{r^n}{R^n}\right)$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda G^- bölgesindeki her F kompakt kümesi üzerinde düzgün yakınsayan ve

$$\frac{\Phi_{n+1}(z)}{\Phi_n(z)} = \varphi(z) + O\left(\frac{r^n}{R^n}\right), \qquad z \in \Gamma_R, \qquad n \to \infty$$

asimptotik bağıntısını yazabiliriz.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Phi_{n+1}(z)}{\Phi_n(z)} = \varphi(z), \qquad z \in G^- \tag{5.12}$$

olur.

5.3 Faber Serileri

5.3.1 Tanım: $\phi_n(z)$'ler K kontinyumunun Faber polinomları olsun. (c_n) bir karmaşık sayı dizisi olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \Phi_n(z)$$

biçimindeki serilere K kontinyumuna göre ***Faber serileri*** denir.

5.3.2 Teorem: (c_n) bir karmaşık sayı dizisi ve $\phi_n(z)$'ler K kontinyumunun Faber polinomları olsun. Eğer,

$$\lim_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R} < 1$$

ise $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \Phi_n(z)$ Faber serisi, G_R bölgesinde mutlak yakınsak, G_R bölgesinin kompakt alt kümelerinde düzgün yakınsak ve $\overline{G_R^-}$ bölgesinde ıraksaktır.

İspat: $\lim_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R}$ olduğundan, her ε > 0 için öyle bir N doğal sayısı vardır ki, $n \geq$ N için,

$$|c_n|^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{R} + \varepsilon = \frac{1+\varepsilon R}{R}$$

olur. $\varepsilon_0 := \frac{\varepsilon R^2}{1+\varepsilon R}$ alınırsa, $n \geq$ N için,

$$|c_n|^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{R-\varepsilon_0}$$

eşitsizliği elde edilir. $1 < r < R$ olmak üzere, (5.10) bağıntısından her $z \in \Gamma_r$ için,

$$a_1(r)r^n \leq |\Phi_n(z)| \leq a_2(r)r^n$$

olduğunu biliyoruz. ε sayısını $r < R - \varepsilon_0$ olacak şekilde alalım. Bu durumda, $n \geq$ N için,

$$|c_n\Phi_n(z)| \leq a_2(r)\frac{r^n}{(R-\varepsilon_0)^n}$$

olur. $q := \frac{r}{R-\varepsilon_0}$ alınırsa, $0 < q < 1$ ve $\forall\, z \in \Gamma_r$ için,

$$|c_n\Phi_n(z)| \leq a_2(r)q^n$$

elde edilir. $\forall$ z $\in G_R - K$ için $z \in \Gamma_r$ olacak şekilde $r \in (1, R)$ sayısı bulanabileceğinden bu eşitsizlik $\forall\, z \in G_R - K$ için geçerli olur.

K kompakt olduğundan $K \subset \overline{G_r}$ olacak şekilde bir $r \in (1, R)$ sayısı vardır ki $\forall\, z \in K$ için,

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r}\frac{[\varphi(\zeta)]^n}{\zeta - z}d\zeta$$

olduğunu biliyoruz. Buradan,

$$|\Phi_n(z)| = \frac{r^n}{2\pi\rho(\Gamma_r, K)}\ell(\Gamma_r) = c(r)r^n$$

elde edilir. ε sayısını $r < R - \varepsilon_0$ olacak şekilde seçelim. $p := \frac{r}{R-\varepsilon_0}$ alınırsa $0 < p < 1$ ve $\forall\, z \in K$ için,

$$|c_n\Phi_n(z)| \leq c(r)\,p^n$$

olur. $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n\Phi_n(z)|$ serisi, $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ serisi yakınsak olduğundan her $z \in G_R - K$ için, $\sum_{n=0}^{\infty} p^n$ serisi yakınsak olduğu için de her $z \in K$ için yakınsaktır. O halde $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\Phi_n(z)$ serisi G_R üzerinde mutlak yakınsaktır.

F, G_R'nin kompakt bir alt kümesi olsun. Bu durumda $F \in \overline{G_{r_0}}$ olacak şekilde bir $1 < r_0 < R$ sayısı vardır. $r_0 < r < R$ olmak üzere, her $z \in F$ için

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r}\frac{[\varphi(\zeta)]^n}{\zeta - z}\,d\zeta$$

olduğunu biliyoruz. F ve Γ_r kapalı olduklarından $\forall\ z \in F$ ve $\forall\ \zeta \in \Gamma_r$ için

$$|\zeta - z| \geq \rho\ (\Gamma_r, F) > 0$$

olur. Buradan, $\forall\ z \in F$ için

$$|\Phi_n(z)| = \frac{r^n}{2\pi\rho(\Gamma_r,F)}\ \ell(\Gamma_r)\ =\ c(r)r^n$$

elde edilir. Bir $\varepsilon > 0$ için $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon R^2}{1+\varepsilon R}$ diyelim ve ε sayısını $r < R - \varepsilon_0$ olacak şekilde alalım. $\lim\limits_{n\to\infty} sup\ \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R}$ olduğundan, $n \geq \mathrm{N}$ için $|c_n|^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{R-\varepsilon_0}$ olacak şekilde bir N doğal sayısı vardır. O halde, $n \geq \mathrm{N}$ için ve her $z \in F$ için

$$|c_n\Phi_n(z)| \leq c(r)\,\frac{r^n}{(R-\varepsilon_0)^n}$$

olur. $M_n = c(r)\,\frac{r^n}{(R-\varepsilon_0)^n}$ alınırsa $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ serisi yakınsak olacağından Weierstrass-M testi gereğince

$$\sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty} c_n\Phi_{\mathrm{n}}(\mathrm{z})$$

serisi F üzerinde düzgün yakınsak olur.

$z \in G_R^{\ -}$ olsun. $R_0 = |\varphi(z)|$ alınırsa, $R_0 > R$ ve $z \in \Gamma_{R_0}$ olur. Bu durumda,

$$b_1(R_0)R_0^n \leq |\Phi_n(z)| \leq b_2(R_0)R_0^n$$

olduğu bilinmektedir.

$$\lim_{n\to\infty} sup\ \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R}$$

olduğundan, $\forall\ \varepsilon > 0$ için (c_n) dizisinin $\left|c_{n_k}\right|^{\frac{1}{n_k}} > \frac{1}{R} - \varepsilon = \frac{1-\varepsilon R}{R}$ olacak şekilde bir (c_{n_k}) alt dizisi vardır. $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon R^2}{1-\varepsilon R}$ alınırsa,

$$\left|c_{n_k}\right|^{\frac{1}{n_k}} > \frac{1-\varepsilon R}{R} = \frac{1}{R+\varepsilon_1}$$

olur. ε sayısını, $R + \varepsilon_1 < R_0$ olacak şekilde seçelim. Bu durumda,

$$\left|c_{n_k}\Phi_{n_k}(z)\right|\ > \frac{b_1(R_0)R_0^{n_k}}{(R+\varepsilon_1)^{n_k}} = b_1(R_0)\left(\frac{R_0}{R+\varepsilon_1}\right)^{n_k}$$

elde edilir. $\frac{R_0}{R+\varepsilon_1} > 1$ olduğundan $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R_0}{R+\varepsilon_1}\right)^{n_k}$ serisi ıraksak olur. Buradan $\sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty} c_n \Phi_{\mathrm{n}}(\mathrm{z})$ serisinin ıraksak olduğu çıkar.■

5.4 Analitik Fonksiyonların Faber Serileri

Bu bölümde analitik olan bir $f(\mathrm{z})$ fonksiyonunun Faber serisine açılabileceği durumu inceleyeceğiz.

5.4.1 Teorem: $G \subset \mathbb{C}$ sınırlı, basit bağlantılı ve $\Gamma = \partial G$ sınırı analitik olan bir bölge olsun. f fonksiyonu G bölgesinde analitik ve $K = G \cup \Gamma$ kontinyumunda sürekli olsun. Bu durumda K kontinyumunun Faber polinomlarının bir serisine açılabilir ve bu seri G'nin her kompakt alt kümesinde f fonksiyonuna mutlak ve düzgün yakınsaktır.

İspat: Γ analitik bir eğri olduğundan $w = \varphi(z)$ konform dönüşümü Γ sınırından G'nin içine belirli bir yere kadar analitik ve birebir olarak genişletilebilir. φ konform dönüşümü belirli bir $0 < \rho_0 < 1$ için $G_{\rho_0}^{-}$ bölgesinde birebir ve analitik olur. Bu durumda, $z = \psi(\mathrm{w})$ fonksiyonu $|w| > \rho_0$ bölgesinde ∞ noktası dışında analitiktir ve ∞ noktasında basit kutbu vardır.

$z \in G$ olsun. Bu durumda $\rho_0 < \rho < 1$ olacak şekilde bir ρ sayısı seçebiliriz ve $z \in G_\rho$ olur. f , G'de analitik bir fonksiyon ve $\overline{G_\rho} \subset G$ olduğundan $f,\ \overline{G_\rho}$ 'da analitikir. Cauchy formülünden,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\Gamma_\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta - \mathrm{z}}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=\rho} f(\psi(t))\frac{\psi'(t)}{\psi(t)-z}dt \tag{5.13}$$

olur.

$z \in G_\rho$ ve $|t| \geq \rho$ için ψ fonksiyonu analitik olduğundan, $\frac{\psi'(t)}{\psi(t)-z}$ fonksiyonu $|t| \geq \rho$ için analitik olur. Ayrıca,

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=\rho}\frac{t^n\psi'(t)}{\psi(t)-z}dt$$

olduğundan $|t| \geq \rho$ için,

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi_n(z)}{t^{n+1}}, \qquad z \in G_\rho \tag{5.14}$$

olur. F, G_ρ bölgesinin kapalı alt kümesi olmak üzere (5.14) açılımı $|t| \geq \rho$ koşulunu sağlayan t 'ler için ve F kompakt kümesine ait olan z noktaları için düzgün yakınsaktır. Gerçekten, $F \subset G_\rho$ bir kompakt kümesi olmak üzere $z \in F$ olsun. Bu durumda $\rho_0 < r < \rho$ ve $F \subset \overline{G_r}$ olacak şekilde bir r sayısı vardır. Bu durumda $\Phi_k(z)$ Faber polinomları için,

$$c_1(r)r^n \leq |\Phi_n(z)| \leq c_2(r)r^n, \qquad z \in \Gamma_r$$

dir. Bundan dolayı, $|t| \geq \rho$ ve $z \in F$ için,

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi_n(z)}{t^{n+1}}\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\Phi_n(z)|}{|t|^{n+1}} \leq \sum_{n=0}^{\infty} c_2(r) \frac{r^n}{\rho^{n+1}}$$

$$= \frac{c_2(r)}{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{\rho}\right)^n < \infty$$

olduğundan Weierstrass-M testi gereğince $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi_n(z)}{t^{n+1}}$ serisi $|t| \geq \rho$ olduğunda $\forall f \subset G_\rho$ kompakt alt kümesinde düzgün yakınsaktır.

$$a_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\rho} \frac{f(\psi(t))}{t^{n+1}} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\varphi^{n+1}(\zeta)} \varphi'(\zeta) d\zeta \tag{5.15}$$

olmak üzere, (5.14) açılımını (5.13) de dikkate alırsak ,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\rho} f(\psi(t)) \frac{\psi'(t)}{\psi(t)-z} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\rho} f(\psi(t)) \left\{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi_n(z)}{t^{n+1}}\right\} dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(z) \left\{\frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\rho} \frac{f(\psi(t))}{t^{n+1}} dt\right\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(z), \qquad z \in G \tag{5.16}$$

açılımı elde edilir.

Şimdi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(z)$ yakınsamasının G'nin kompakt alt kümeleri üzerinde mutlak ve düzgün yakınsama olduğunu gösterelim.

F, G'nin kompakt bir alt kümesi olsun. Bu durumda $F \subset G_{r_0}$ olacak şekilde bir $r_0 < 1$ sayısı vardır. $r_0 < r < 1$ olmak üzere

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r} \frac{[\varphi(\zeta)]^n}{\zeta - z}\, d\zeta$$

ve F ile Γ_r kapalı olduklarından, $\forall\, z \in F$ için

$$|\Phi_n(z)| \leq d(r)\, r^n$$

elde edilir.

$r < R_1 < 1$ biçiminde bir R_1 sayısı seçelim. $\forall\, z \in F$ için $z \in G_{R_1}$ olur. Bu durumda $\forall\, z \in F$ için,

$$f(\mathrm{z}) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\Gamma_{\mathrm{R}_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \mathrm{z}}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R_1} f(\psi(t))\, \frac{\psi'(t)}{\psi(t) - z}\, dt$$

ve

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t) - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi_n(z)}{t^{n+1}}, \qquad |t| = R_1, \qquad z \in F$$

açılımı düzgün yakınsak olduğundan $\forall\, z \in F$ için,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=\rho} \frac{f(\psi(t))}{t^{n+1}}\, dt$$

olmak üzere

$$f\,(\mathrm{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(z)$$

olur. M := $max\left\{|f(z)| : z \in \overline{G_{R_1}}\right\}$ olarak alınırsa

$$|a_n| \leq \frac{\mathrm{M}}{R^n}$$

olacağından $\forall\, n \in \mathbb{N}$ ve $\forall\, z \in F$ için

$$|a_n \Phi_n(z)| \leq d(r)\mathrm{M}\left(\frac{r}{R}\right)^n$$

olur. $\sum_{n=0}^{\infty} d(r)\mathrm{M}\left(\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{R}}\right)^{\mathrm{n}}$ serisi yakınsak olduğundan Weierstrass-M testi gereğince $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(z)$ serisi F üzerinde mutlak ve düzgün yakınsak olur. ■

5.4.2 Tanım: $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \phi_n(z)$ Faber serisindeki $\{\alpha_n\}$ katsayılarına, K kontinyumunda analitik olan f fonksiyonunun ***Faber katsayıları*** denir ve $a_n := \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=\rho} \frac{f(\psi(t))}{t^{n+1}}\, dt$ formülü ile ifade edilir.

5.4.3 Teorem: K kontinyumunda analitik olan her $f(z)$ fonksiyonu K kontinyumunda düzgün yakınsayan bir Faber serisine açılabilir.

İspat: Bu teoremde K, sınırlı ve bağlantılı tümleyene sahip olup sınırı için herhangi bir koşul yoktur. $R = 1 + \varepsilon > 1$ olmak üzere, f fonksiyonu K'da analitik ve K kapalı olduğundan f fonksiyonu analitik olarak belirli bir G_R bölgesine genişletilebilir. $1 < \rho < R$ olacak şekilde bir ρ sayısı alalım. $\forall\, z \in K$ için,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=\rho} f(\psi(t))\, \frac{\psi'(t)}{\psi(t) - z}\, dt \tag{5.17}$$

dir. Diğer yandan $z \in K$ ve $|t| = \rho$ için,

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t) - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi_n(z)}{t^{n+1}}$$

açılımı özel olarak $|t| = \rho$ çemberi üzerinde yakınsak olduğundan bunu (5.17) eşitliğinde dikkate alırsak $n = 1,2,\ldots$ için a_n Faber katsayıları olmak üzere,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(z)\ , \qquad z \in K$$

açılımı elde edilir. ■

6. FABER SERİLERİNİN MAKSİMAL YAKINSAKLIK ÖZELLİKLERİ

6.1 Bernstein & Walsh Düz Teoremler

K basit bağlantılı G^- tümleyenine sahip sınırlı kontinyum olsun. f fonksiyonu K kontinyumunda analitik ise bir $R > 1$ için G_R kanonik bölgesine analitik olarak genişletilebilir. Şimdi f fonksiyonunun K kontinyumundaki cebirsel polinomlarla düzgün yaklaşımı araştıralım.

Bir $P_n(z)$ cebirsel polinomunun K kontinyumunda analitik olan $f(z)$ fonksiyonuna yaklaşımını,

$$\|f - P_n(z)\| = \max_{z\in K}|f(z) - P_n(z)| \tag{6.1}$$

olarak tanımlayalım. Bu norma ***düzgün norm*** denir.

$$E_n(f,K) = \inf_{P_n\in\wp_n}\|f - P_n\| \tag{6.2}$$

sayısını tanımlayalım. Burada infimum $P_n \in \wp_n$ polinomları üzerinden alınır. $E_n(f,K)$ sayısına , f fonksiyonunun ***düzgün normda en iyi yaklaşım sayısı*** denir. $\wp_n$ sınıfında

$$\|f - Q_n\| = \max_{z\in K}|f(z) - Q_n(z)| = E_n(f,K) \tag{6.3}$$

koşulunu sağlayan bir tek $Q_n(z)$ cebirsel polinomu vardır. Bu $Q_n(z)$ polinomuna, K kontinyumunda f(z) fonksiyonuna ***düzgün normda en iyi yaklaşan polinom*** denir. Yaklaşım teorisinde gösterilir ki $\{E_n(f)\}$ dizisi n'ye göre monoton azalandır ve

$$\lim_{n\to\infty} E_n(f,K) = 0 \tag{6.4}$$

dir. Bu dizinin monoton azalan olduğu açıktır. Limitin sıfıra eşitliği ise yaklaşım teorisinde yapılmış olan bir dizi araştırmaların sonucudur. (6.4) koşulunun sağlanması için f fonksiyonu ve yaklaşımın gerçekleştirildiği K kontinyumu üzerine konulan koşullar aşağıdaki teoremlerde ifade edilmiştir.

6.1.1 Teorem (M.A. Lavrentiev, 1934): Sınırlı, kapalı bir B kümesi üzerinde sürekli herhangi bir $f(z)$ kompleks fonksiyonunun B kümesi üzerinde düzgün yakınsayan $f(z) = P_0(z) + [P_1(z) - P_0(z)] + \cdots$ polinom serilerine genişletilebilmesi için gerek ve yeter koşul B kümesinin iç noktaları kümesinin boş küme olması ve düzlemi bölmemesidir. [25, s.29]

6.1.2 Teorem (M.V. Keldysh, 1945): Kapalı bir $\bar{G}$ bölgesinde sürekli ve $\bar{G}$'nin iç noktaları olan G kümesinde analitik herhangi bir $f(z)$ fonksiyonuna keyfi düzgün polinomlarla yaklaşılabilmesi için gerek ve yeter koşul $\bar{G}$'nin tümleyeni olan G^{-}nin, sonsuzluğu içeren basit bağlantılı bir bölge olmasıdır. [25, s.31]

6.1.3 Teorem (S.N. Mergelyan, 1951): Sınırlı, kapalı bir B kümesi üzerinde sürekli ve B'nin iç noktalarında analitik herhangi bir $f(z)$ fonksiyonuna keyfi düzgün polinomlarla yaklaşılabilmesi için gerek ve yeter koşul B kümesinin düzlemi bölmemesidir. [25, s.31]

Bu durumda, Mergelyan teoremi kullanılarak

$$\lim_{n\to\infty} E_n(f,K) = 0$$

elde edilir.

f(z) fonksiyonu G_R bölgesinde analitik ise $\{E_n(f,K)\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin sıfıra yaklaşım hızının R ile doğru orantılı şekilde arttığını gösteren, S.N. Bernstein ve J.Walsh tarafından ispatlanan aşağıdaki düz teoremi verelim.

6.1.4 Teorem (S.N. Bernstein, J.Walsh): f(z) fonksiyonu $R > 1$ için G_R kanonik bölgesinde analitik ise her $\varepsilon > 0$ için $\exists\, c_1(\varepsilon)$ sabiti vardır ki her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$E_n(f,K) \leq \frac{c_1(\varepsilon)}{(R-\varepsilon)^n}, \qquad (R-\varepsilon > 1) \tag{6.5}$$

olur.

İspat: $f(z)$ fonksiyonu K kontinyumunda analitik olduğundan $\forall z \in K$ için

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Phi_k(z), \qquad z \in K$$

Faber serisine açılabilir. (6.1) formülüne göre $f(z)$ fonksiyonuna yaklaşan $P_n(z)$ polinomu olarak bu fonksiyonun Faber serisinin,

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k \Phi_k(z)$$

biçimindeki kısmi toplamını alalım. O halde K kontinyumunda,

$$R_n(z,f) := \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \Phi_k(z), \qquad z \in K \tag{6.6}$$

Faber serilerinin kalan terimini değerlendirmemiz ispat için yeterlidir.

$\varepsilon_1 > 1$ sayısını yeterince küçük seçtiğimizde (5.6) bağıntısından

$$|\Phi_k(z)| \leq c_2(\varepsilon_1)(1+\varepsilon_1)^k, \qquad z \in K \tag{6.7}$$

olduğunu biliyoruz. Diğer taraftan $\varepsilon_2 > 0$ ise $c_3(\varepsilon_2)$, $\Gamma_{R-\varepsilon_2}$ eğrisi üzerinde tanımlı olan $f(z)$ fonksiyonunun modülünün en büyük değeri olmak üzere a_k Faber katsayıları için,

$$|a_k| \leq \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=R-\varepsilon_2} \frac{f(\psi(t))}{t^{k+1}} dt \right| \leq \frac{c_3(\varepsilon_2)}{(R-\varepsilon_2)^k} \tag{6.8}$$

bağıntısı yazılabilir. ε_1 ve ε_2 sayıları yeterince küçük seçildiğinden $1+\varepsilon_1 < R-\varepsilon_2$ eşitsizliğinin her zaman sağlandığı görülür. Bu durumda (6.6), (6.7) ve (6.8)'den,

$$\begin{aligned} |R_n(z,f)| &= \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \Phi_k(z)\right| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{c_3(\varepsilon_2)}{(R-\varepsilon_2)^k} c_2(\varepsilon_1)(1+\varepsilon_1)^k \\ &\leq c_4 \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(1+\varepsilon_1)^k}{(R-\varepsilon_2)^k} = c_4 \frac{\left(\frac{1+\varepsilon_1}{R-\varepsilon_2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1+\varepsilon_1}{R-\varepsilon_2}} \\ &\leq c_5 \left(\frac{1+\varepsilon_1}{R-\varepsilon_2}\right)^n \end{aligned} \tag{6.9}$$

eşitsizliği elde edilir. ε_1 ve ε_2 sayıları yeterince küçük seçilebildiğinden,

$$\frac{1+\varepsilon_1}{R-\varepsilon_2}=\frac{1}{R-\varepsilon}, \qquad \varepsilon=\frac{\varepsilon_2+\varepsilon_1 R}{1+\varepsilon_1} \tag{6.10}$$

eşitliklerindeki ε değeri yeterince küçük sabitlenmiş değer olarak alınabilir. O halde (6.9) bağıntısından,

$$|R_n(z,f)| \leq \frac{c_6(\varepsilon)}{(R-\varepsilon)^n}, \qquad z \in K$$

eşitsizliği elde edilir.■

Benzer şekilde, $\frac{1+\varepsilon_1}{R-\varepsilon_2}=\frac{1}{R}+\varepsilon_0$, $\varepsilon_0=\frac{\varepsilon_1 R+\varepsilon_2}{R^2-\varepsilon_2 R}$ alınırsa (6.5) eşitsizliğini,

$$E_n(f,K) \leq c_7\left(\frac{1}{R}+\varepsilon_0\right)^n, \qquad \frac{1}{R}+\varepsilon_0<1 \tag{6.11}$$

şeklinde de ifade edebiliriz. (6.5) ve (6.11) eşitsizlikleri G_R de analitik olan f (z) fonksiyonu için $\{E_n(f,K)\}$ dizisinin genel terimi $q:=\frac{1}{R}$ sayısına çok yakın bir oranla sıfıra gittiğini gösterir. (6.11) bağıntısında,

$$\lim_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{E_n(f,K)} \leq \frac{1}{R}+\varepsilon_0$$

eşitsizliği elde edilir. $\varepsilon_0>0$ sayısı yeterince küçük olduğundan ve bu eşitsizliğin sol tarafı ε_0'a bağlı olmadığından, $\varepsilon_0 \to 0$ için limit alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{E_n(f,K)} \leq \frac{1}{R} \tag{6.12}$$

eşitsizliği elde edilir. (Bu tip değerlendirmelere asimptotik değerlendirmeler denir.)

Sonuç olarak; f(z) fonksiyonu, $R>1$ olmak üzere G_R bölgesinde analitik ise f fonksiyonunun K kontinyumu üzerinde en iyi düzgün yaklaşımları için (6.12) bağıntısı sağlanır. K = [-1,1] olduğunda (6.12) eşitsizliği Bernstein tarafından 1911 yılında ispatlanmıştır. Teoremin genel durumu ise 1926 yılında Walsh tarafından araştırılmıştır.

6.2 Bernstein & Walsh Ters Teoremler

Bir önceki bölümde f(z) ∈ A(G_R) olduğunda,

$$\lim_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{E_n(f,K)} \leq \frac{1}{R}$$

olduğu ispatlandı. Bu bölümde de ,

$$\lim_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{E_n(f,K)} \leq \frac{1}{R}$$

olduğunda $f(z) \in$ A(G_R) olduğunu gösterelim. Bunun için öncelikle Bernstein & Walsh lemması olarak bilinen lemmayı verelim.

6.2.1 Lemma (S.N. Bernstein, J.Walsh): Derecesi $\leq n$ olan $P_n(z)$ cebirsel polinomu K kontinyumunda

$$\max_{z\in K}|P_n(z)| \leq M \tag{6.13}$$

koşulunu sağlıyorsa bu polinom $\forall\ R > 1$ için,

$$|P_n(z)| \leq MR^n\ , \qquad z \in \overline{G_R}\ ,\ \ R > 1 \tag{6.14}$$

eşitsizliğini sağlar.

Görüldüğü gibi bu lemmada cebirsel polinomun K kontinyumundaki maksimal değerine göre polinomun daha geniş bölgede artış hızı, R 'ye ve n derecesine bağlı olarak değerlendirilmektedir.

İspat:

$$\text{F(z)} = \frac{P_n(z)}{\varphi^n(z)}\ , \qquad z \in G^- \tag{6.15}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. F(z) fonksiyonu G^- bölgesinde analitiktir ve a_n , $P_n(z)$ polinomunun başkatsayısı ve γ, (5.1) bağıntısında tanımlanan değer olmak üzere

$$\lim_{z\to\infty} F(z) = \lim_{z\to\infty}\left(\frac{z}{\varphi(z)}\right)^n\left(\frac{P_n(z)}{z^n}\right) = \frac{a_n}{\gamma^n}$$

dir. $1 < \rho <$ R olmak üzere Γ_ρ eğrisi üzerinde,

$$\max_{\zeta\epsilon\Gamma_\rho}|F(\zeta)| = \frac{1}{\rho^n}\max_{\zeta\epsilon\Gamma_\rho}|P_n(\zeta)| = \frac{1}{\rho^n}\left|P_n(\zeta_\rho)\right|$$

eşitliğini yazabiliriz. F(z) fonksiyonu G_ρ bölgesinde analitiktir. (6.15) bağıntısından

$$|F(z)| = \left|\frac{P_n(z)}{\varphi^n(z)}\right| \leq \max_{\zeta\epsilon\Gamma_\rho}|F(\zeta)| = \frac{1}{\rho^n}\left|P_n(\zeta_\rho)\right| \tag{6.16}$$

eşitsizliğini elde ederiz. $z \in \Gamma_R$ ve $\zeta_\rho \in \Gamma_\rho$ noktaları için

$$|P_n(z)| \leq \frac{R^n}{\rho^n} |P_n(\zeta_\rho)| \tag{6.17}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Bu eşitsizliğin sol tarafı ρ'dan bağımsızdır. Şimdi monoton azalarak 1'e yaklaşan (ρ_k) dizisini alalım. Bu diziye uygun olarak (ζ_{ρ_k}) noktalar dizisini alalım. (ζ_{ρ_k}) dizisi sınırlı olduğundan (ζ_{ρ_k}) dizisinin yakınsak (ζ_m) alt dizisi vardır. Bu alt dizinin limiti ζ_0 olsun. Bu limit noktası $\partial K = \Gamma$ sınırı üzerinde olmak zorundadır. $|P_n(\zeta)|$ fonksiyonu sürekli olduğundan,

$$\lim_{m\to\infty} |P_n(\zeta_m)| = |P_n(\zeta_0)| , \qquad \zeta_0 \in \Gamma \subset K \tag{6.18}$$

dir. Diğer taraftan (6.13) bağıntısından $|P_n(\zeta_0)| \leq M$ dir. (6.17) bağıntısını (ζ_m) dizisi için tekrar yazarsak,

$$|P_n(z)| \leq \frac{R^n}{\rho_m^n} |P_n(\zeta_m)| , \qquad |\varphi(\zeta_m)| = \rho_m$$

eşitsizliğini elde ederiz. $m \to \infty$ için bu eşitsizliğin limitini alırsak (6.17) bağıntısından,

$$|P_n(z)| \leq M\, R^n , \qquad \forall\, z \in \Gamma_R$$

eşitsizliği elde edilir. ■

Şimdi Bernstein & Walsh ters teoremini verelim.

6.2.2 Teorem (S.N. Bernstein, J. Walsh): $f(z)$ fonksiyonu K kontinyumunda sürekli ve K kontinyumunun iç noktalarında analitik bir fonksiyon olsun.

$$\lim_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{E_n(f,K)} \leq \frac{1}{R} < 1 \tag{6.19}$$

ise f(z) fonksiyonu G_R bölgesinde analitiktir.

İspat: (6.19) koşuluna göre ε > 0 için $\exists\, n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı vardır ki $n > n_0$ olduğunda,

$$E_n(f,K) \leq \left(\frac{1}{R} + \varepsilon\right)^n , \qquad n > n_0$$

eşitsizliğinden $c_1(\varepsilon)$ sabiti ve $\forall\, n$ için

$$E_n(f,K) \leq c_1\left(\frac{1}{R}+\varepsilon\right)^n, \qquad n \geq 1$$

olur. Bu eşitsizliğe göre öyle bir $\{P_n(z)\}$ polinomlar dizisi vardır ki bu dizi için,

$$|f(z)-P_n(z)| \leq E_n(f,K) \leq c_1\left(\frac{1}{R}+\varepsilon\right)^n, \qquad z \in K \tag{6.20}$$

eşitsizliği sağlanır.

Şimdi $\{P_n(z)\}$ dizisinin G_R bölgesinde düzgün yakınsak olduğunu gösterelim. Yani $\{P_n(z)\}$ dizisinin G_R bölgesinin her kompakt alt kümesinde düzgün yakınsadığını gösterelim. Bunun için,

$$P_0(z)+[P_1(z)-P_0(z)]+\cdots+[P_n(z)-P_{n-1}(z)]+\cdots \tag{6.21}$$

serisinin G_R bölgesinde düzgün yakınsadığını göstermek yeterli olacaktır. $F \subset G_R$ kompakt kümesini alalım. Buna göre, $F \subset \overline{G_\rho}$ olacak şekilde $\rho < R$ vardır. Öte yandan (6.20) bağıntısından $\forall\, z \in K$ için,

$$\begin{aligned}|P_n(z)-P_{n-1}(z)| &\leq |P_n(z)-f(z)|+|f(z)-P_{n-1}(z)| \\ &\leq c_1(\varepsilon)\left[\left(\frac{1}{R}+\varepsilon\right)^n+\left(\frac{1}{R}+\varepsilon\right)^{n-1}\right] \\ &\leq c_2(\varepsilon)\left(\frac{1}{R}+\varepsilon\right)^n \end{aligned} \tag{6.22}$$

dir. Şimdi $P_n(z)-P_{n-1}(z)$ polinomuna Bernstein & Walsh lemmasını uygulayalım. Bu polinom (6.22) eşitsizliğini sağladığından $\forall\, z \in \overline{G_\rho}$ için,

$$|P_n(z)-P_{n-1}(z)| \leq c_2(\varepsilon)\left(\frac{1}{R}+\varepsilon\right)^n \rho^n \tag{6.23}$$

ifadesini yazabiliriz. $\rho <$ R olduğundan $q=\left(\frac{1}{R}+\varepsilon\right)\rho=\frac{\rho}{R}+\varepsilon\rho<1$ olacak şekilde yeterince küçük $\varepsilon > 0$ sayısını alalım. Biliyoruz ki $q < 1$ olduğundan $c_2\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ geometrik serisi yakınsaktır. Böylece Weierstrass-M testine göre (6.21) serisi G_R bölgesinin iç noktalarında düzgün yakınsaktır. $\{P_n(z)\}$ dizisi (6.23) eşitsizliğinden ve düzgün yakınsaklık tanımı gereğince K kontinyumunda f(z) fonksiyonuna düzgün yakınsaktır. Böylece 2.1.21 teorem gereği K kontinyumundan G_R bölgesine kadar f(z) fonksiyonu analitik olarak genişletilebilir. ■

Bernstein & Walsh Ters ve Düz Teoremlerini aşağıdaki gibi ifade etmek mümkündür.

$f(z)$ fonksiyonunun G_R kanonik bölgesinde analitik olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{E_n(f,K)} \leq \frac{1}{R}$$

olmasıdır.

Şimdi bu sonuncu eşitsizlikteki eşitlik durumunu inceleyelim.

6.2.3 Tanım: K basit bağlantılı tümleyene sahip bir kontinyum olsun. $f(z)$ fonksiyonu G_R kanonik bölgesinde analitik ve G_R kanonik bölgesinin sınırının en az bir noktasında $f(z)$ fonksiyonu aykırı noktaya sahip ise bu durumda bu koşulu sağlayan G_R bölgelerinin en küçüğüne $f(z)$ fonksiyonunun ***en büyük kanonik analitiklik bölgesi*** denir. [25, s.59]

6.2.4 Teorem: $R > 1$ olmak üzere G_R kanonik bölgesinin $f(z)$ fonksiyonunun en büyük kanonik analitiklik bölgesi olması için gerek ve yeter koşul

$$\lim_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{E_n(f,K)} = \frac{1}{R}$$

olmasıdır.

İspat:

$$\lim_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{E_n(f,K)} = \frac{1}{R}$$

ise (6.12) eşitsizliği sağlanır. Bernstein & Walsh ters teoremine göre $f(z)$ fonksiyonu G_R bölgesinde analitiktir.

Kabul edelim ki $f(z)$ fonksiyonu Γ_R eğrisi üzerinde aykırı noktası olmasın. O halde $R_1 > R$ olmak üzere $f(z)$ fonksiyonu G_{R_1} bölgesinde analitiktir. Bernstein & Walsh düz teoreminden,

$$\lim_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{E_n(f,K)} \leq \frac{1}{R_1} < \frac{1}{R} \tag{6.24}$$

olur. Fakat bu eşitsizlik $\lim_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{E_n(f,K)} = \frac{1}{R}$ eşitliği ile çelişir. O halde $f(z)$ fonksiyonu Γ_R eğrisi üzerinde aykırı noktaya sahiptir. Bundan dolayı G_R bölgesi $f(z)$ fonksiyonunun en büyük analitiklik bölgesi olur. Teoremin yeterlilik koşulu ispatlanmış olur.

$f(z)$ fonksiyonu G_R bölgesinde analitik ve Γ_R üzerinde en az bir aykırı noktaya sahip olsun. Bernstein & Walsh düz teoreminden,

$$\lim_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{E_n(f,K)} \leq \frac{1}{R}$$

eşitsizliğini yazabiliriz.

Şimdi, $\lim_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{E_n(f,K)} = \frac{1}{R}$ olmadığını varsayalım. Bu durumda

$\lim_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{E_n(f,K)} < \frac{1}{R}$ olur. O halde (6.24)'de olacak şekilde $R_1 > R$ vardır. Buradan Bernstein- Walsh ters teoremine göre f, G_{R_1}'de analitiktir. Bu da Γ_R üzerinde en az bir aykırı noktaya sahip olması ile çelişir. O halde

$\lim_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{E_n(f,K)} = \frac{1}{R}$ dir.■

6.3 Smirnov Sınıflarında Maksimal Yakınsaklık Teoremleri

Bu bölümde $f(z) \in E_p(G_R)$, $p > 1$ fonksiyonunun Faber serilerinin kısmi toplamlarının yaklaşım hızını veren teoremler incelenecektir.

Biliyoruz ki K, bağlantılı tümleyene sahip sınırlı bir kontinyum ve Φ_k , K kontinyumunun Faber polinomu olmak üzere $f(z)$, K' da analitik bir fonksiyon olduğundan bu fonksiyon

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Phi_k(z), \quad z \in K \tag{6.25}$$

biçiminde Faber serisine açılabilir. Bu Faber seri açılımı K kontinyumunda mutlak ve düzgün yakınsaktır.

φ, K^- yı (K'nın dışını) $\mathbb{D}^-$ ye resmeden ve (5.1) koşullarını sağlayan bir konform dönüşüm olmak üzere,

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{f(\zeta)\varphi'(\zeta)}{\varphi^{k+1}(\zeta)}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R}\frac{f(\psi(t))}{t^{k+1}}dt \qquad k = 0,1,.. \tag{6.26}$$

Faber katsayıları için

$$R_n(z,f) = f\,(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k\Phi_k(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty}\alpha_k\Phi_k(z) \tag{6.27}$$

olarak tanımlanırsa $f(z)$ Faber serisinin $n.$ kalan terimi elde edilir. (6.26) ve (6.27) eşitliklerinden,

$$R_n(z,f) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R} f(\psi(t))\left\{\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\Phi_k(z)}{t^{k+1}}\right\}dt \tag{6.28}$$

olur. Diğer yandan,

$$\Phi_k(z) = [\varphi(z)]^k + E_k(z)\,, \qquad z \in K$$

olduğundan

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\Phi_k(z)}{t^{k+1}} = \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{[\varphi(z)]^k}{t^{k+1}} + \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{E_k(z)}{t^{k+1}} \tag{6.29}$$

olur. (6.28) eşitliğinde (6.29) eşitliği yerine yazılırsa

$$R_n(z,f) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R} f(\psi(t))\left[\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{[\varphi(z)]^k}{t^{k+1}} + \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{E_k(z)}{t^{k+1}}\right]dt$$

olur. Burada da $\varphi(z) = w$ dönüşümü yapılırsa

$$R_n(z,f) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R} f(\psi(t))\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{w^k}{t^{k+1}}dt$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R} f(\psi(t))\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{E_k(\psi(w))}{t^{k+1}}dt \tag{6.30}$$

olur.

$P_n(z)$, $\overline{G_R}$ bölgesinde $f(z)$ fonksiyonuna düzgün normda en iyi yaklaşan polinom olmak üzere

$$R_n(z,f) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R} f(\psi(t)) - P_n(\psi(t))\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{w^k}{t^{k+1}}dt$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R} f(\psi(t)) - P_n(\psi(t))\ \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{E_k(\psi(w))}{t^{k+1}}dt \tag{6.31}$$

eşitliğini de yazabiliriz.

Çünkü,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R} P_n(\psi(t))\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{w^k}{t^{k+1}}dt = 0 \tag{6.32}$$

ve benzer şekilde

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R} P_n(\psi(t))\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{E_k(\psi(w))}{t^{k+1}}dt = 0 \tag{6.33}$$

olur.

Gerçekten;

$P_n(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0$ olsun.

Burada

$$z = \psi(t) = \gamma t + \gamma_0 + \frac{\alpha_{-1}}{t} + \frac{\alpha_{-2}}{t^2} + \cdots + \frac{a_{-k}}{t^k} + \cdots, \ |t| < 1$$

dönüşümü yapıldığında $P_n(\psi(t))$ polinomunun en yüksek mertebeli terimi βt^n biçiminde olduğu görülür.

Bu polinomun en yüksek mertebeli βt^n terimini aldığımızda

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R}\beta t^n\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{w^k}{t^{k+1}}dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\beta w^k}{t^{k+1-n}}dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R}\frac{\beta w^{n+1}}{t^{n+1+1-n}}dt$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R}\sum_{k=n+2}^{\infty}\frac{\beta w^k}{t^{k+1-n}}dt \tag{6.34}$$

olur. Burada Cauchy türev formülü ile

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R}\frac{dt}{t^2} = 0$$

olduğundan

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R}\frac{\beta w^{n+1}dt}{t^{n+1+1-n}} = 0$$

olur. Aynı şekilde

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R}\frac{dt}{t^{k-n+1}} = 0$$

olduğundan

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R}\sum_{k=n+2}^{\infty}\frac{\beta w^k}{t^{k-n+1}}dt = 0$$

olur. Böylece

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R}\beta t^n \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{w^k}{t^{k+1}}dt = 0$$

olur.

Benzer şekilde $P_n(\psi(t))$ polinomunun diğer mertebeden terimleri için de aynı işlemler uygulanırsa

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R}P_n(\psi(t))\left[\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{w^k}{t^{k+1}}\right]dt = 0$$

olur.

Aynı şekilde (6.33) eşitliği de görülür.

Sonuç olarak (6.31)'deki eşitliğe üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$|R_n(z,f)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}|f(\psi(t)) - P_n(\psi(t))|\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{w^k}{t^{k+1}}\right||dt|$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}|f(\psi(t)) - P_n(\psi(t))|\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{E_k(\psi(w))}{t^{k+1}}\right||dt| \qquad (6.35)$$

olur.

Şimdi aşağıdaki teoremlerde kullanılacak olan ve Lebedev sonucu olarak bilinen bir teoremi ifade edelim:

$$F(\tau,w) := \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)-\psi(w)} - \frac{1}{\tau-w}, \qquad |\tau| > 1, \quad |w| > 1$$

olmak üzere, eğer $|\tau| > 1$ ve $|w| \geq \rho > 1$ ise

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|\tau|=\rho}|F(\tau,w)||d\tau| \leq \sqrt{\frac{\rho^2}{\rho^4-1}\,ln\frac{\rho^2}{\rho^2-1}} \qquad (6.36)$$

elde edilir. [25-p.174]

Diğer yandan [25]'den

$$E_k(\psi(w)) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=\rho}\tau^k F(\tau,w)\,d\tau, \qquad |w| \geq \rho > 1 \qquad (6.37)$$

eşitliği de bilinmektedir.

Aşağıdaki teoremde $z \in K$ durumunda $f(z) \in E_p(G_R)$ fonksiyonuna, bu fonksiyonun Faber serilerinin kısmi toplamları ile yaklaşım hızı Suetin [10] tarafından elde edilmiştir.

6.3.1 Teorem: p > 1 iken $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere $f(z) \in E_p(G_R)$, R > 1 ise $z \in K$ için

$$|R_n(z;f)| \leq \frac{c_2}{R^{n+1}} E_n^{(p)}(f;\Gamma_R)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\frac{|dt|}{|t-1|^q}\right]^{\frac{1}{q}}\sqrt{n\ln n}\,, \qquad n>1$$

olur. [25, s.207]

İspat: $z \in \Gamma_\rho$, $1<\rho<R$ ve $P_n(z)$, $f(z) \in E_p(G_R)$ fonksiyonuna derecesi $\leq$ n olan polinomlar sınıfında en iyi yaklaşan polinom olsun. $|w|=1$ ve $|t|=R$ için (6.35) eşitsizliğinin sağ tarafını aşağıdaki gibi değerlendirelim:

$$I_1 := \frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}|f(\psi(t))-P_n(\psi(t))|\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{w^k}{t^{k+1}}\right||dt|$$

$$I_2 := \frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}|f(\psi(t))-P_n(\psi(t))|\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{E_k(\psi(w))}{t^{k+1}}\right||dt|$$

olarak tanımlansın. (6.35)'den

$|R_n(z,f)| \leq I_1+I_2$ olacaktır.

$$I_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}|f(\psi(t))-P_n(\psi(t))|\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{w^k}{t^{k+1}}\right||dt|$$

eşitliğine $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ için Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$I_1 \leq \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}|f(\psi(t))-P_n(\psi(t))|^p|dt|\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{w^k}{t^{k+1}}\right|^q|dt|\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq E_n^{(p)}(f,\Gamma_R)\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|\frac{w^{n+1}}{t^{n+2}}+\frac{w^{n+2}}{t^{n+3}}+\cdots\right|^q|dt|\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq E_n^{(p)}(f,\Gamma_R)\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|\frac{w^{n+1}}{t^{n+2}}\left(1+\frac{w}{t}+\left(\frac{w}{t}\right)^2+\cdots\right|^q|dt|\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq E_n^{(p)}(f,\Gamma_R)\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|\frac{w^{n+1}}{t^{n+2}}\frac{t}{t-w}\right|^q|dt|\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq E_n^{(p)}(f,\Gamma_R)\left\{\frac{1}{2\pi}\left|\frac{w^{n+1}}{t^{n+1}}\right|^q\int_{|t|=R}\frac{1}{|t-w|^q}|dt|\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \frac{c_1}{R^{n+1}}E_n^{(p)}(f,\Gamma_R)\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\frac{1}{|t-1|^q}|dt|\right\}^{\frac{1}{q}}, \qquad |t|=R\,,\,|w|\geq 1 \tag{6.38}$$

elde edilir.

$$I_2=\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}|f(\psi(t))-P_n(\psi(t))|\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{E_k(\psi(w))}{t^{k+1}}\right||dt|.$$

(6.36) ve (6.37) bağıntısından $|w|\geq\rho>1$ için

$$I_2=\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}|f(\psi(t))-P_n(\psi(t))|\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=\rho}\frac{F(\tau,w)\tau^k}{t^{k+1}}d\tau\right||dt|$$

$$\leq\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}|f(\psi(t))-P_n(\psi(t))|\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{|\tau|=\rho}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\tau^k}{t^{k+1}}\right||F(\tau,w)||d\tau|\right\}|dt|$$

$$\leq\frac{1}{2\pi}\int_{|\tau|=\rho}|F(\tau,w)|\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}|f(\psi(t))-P_n(\psi(t))|\left|\frac{\tau^{n+1}}{t^{n+1}(t-\tau)}\right||dt|\right\}|d\tau|$$

$$\leq$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|\tau|=\rho}|F(\tau,w)|\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|f\big(\psi(t)\big)-P_n\big(\psi(t)\big)\right|^p|dt|\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\left|\frac{\tau^{n+1}}{t^{n+1}(t-\tau)}\right|^q|dt|\right\}^{\frac{1}{q}}|d\tau|$$

$$\leq\frac{\rho^{n+1}}{R^{n+1}}E_n^{(p)}(f,\Gamma_R)\frac{1}{2\pi}\int_{|\tau|=\rho}|F(\tau,w)|\left[\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\frac{|dt|}{|t-\tau|^q}\right]^{\frac{1}{q}}|d\tau|$$

$$\leq\frac{\rho^{n+1}}{R^{n+1}}E_n^{(p)}(f,\Gamma_R)\sqrt{\frac{\rho^2}{\rho^4-1}\,ln\frac{\rho^2}{\rho^2-1}}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\frac{|dt|}{|t-\rho|^q}\right]^{\frac{1}{q}}. \tag{6.39}$$

Bu eşitsizlikte $z\in K$ ve $\rho=1+\frac{1}{n}$ alınırsa , (6.38) ve (6.39)'dan

$$|R_n(z,f)|\leq\frac{c_2}{R^{n+1}}E_n^{(p)}(f;\Gamma_R)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R}\frac{|dt|}{|t-1|^q}\right]^{\frac{1}{q}}\sqrt{n\ln n}$$

elde edilir.■

Aşağıdaki teoremde ise $\Gamma_\rho:=\{z\in K^-:\ |\varphi(z)|=\rho,\quad 1<\rho<R\}$ olmak üzere z'nin K'dan daha geniş olan $\overline{G_\rho}$ bölgesinde olması durumunda $f(z)\in E_p(G_R)$

fonksiyonuna, bu fonksiyonun Faber serisinin kısmi toplamları ile yaklaşım hızı değerlendirilmiştir.

6.3.2 Teorem: p > 1 iken $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere $f(z) \in E_p(G_R)$ ve $z \in \overline{G_\rho}$ olduğunda,

$$|R_n(z,f)| \leq c^* \left(\frac{\rho}{R}\right)^n E_n^{(p)}(f,\Gamma_R) \left[\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R} \frac{|dt|}{|t-\rho|^q}\right]^{\frac{1}{q}} \sqrt{n \ln n}\,, \qquad n > 1$$

olur. Burada $c^* > 0$ sabiti n ve z'den bağımsızdır. [26, s.36]

Alt bölümde ise araştıracağımız problem; $f(z) \in E_M(G_R)$ için $z \in \overline{G_\rho}$ olduğunda $f(z)$ fonksiyonuna, bu fonksiyonun Faber serisinin kısmi toplamları ile yaklaşım hızını değerlendirmektir.

6.4 Smirnov Orlicz Sınıflarında Maksimal Yakınsaklık Teoremleri

Öncelikle $z \in K$ durumunda Smirnov Orlicz sınıflarında Faber serilerinin kısmi toplamları ile yaklaşım hızının Israfilov, Daniyal M. , Oktay, Burçin, Akgün, Ramazan [19] tarafından değerlendirildiği teoremi ifade edelim:

6.4.1 Teorem: $R > 1$ için $f \in E_M(G_R)$ ve $n > 1$ ise

$$|R_n(z,f)| \leq \frac{c}{R^{n+1}(R-1)} E_n^M(f,G_R)\sqrt{n \ln n}\,, \quad z \in K$$

olur. Burada $c > 0$ sabiti n ve z'den bağımsızdır. [19, s.91]

Israfilov, Daniyal M, Oktay, Burçin, Akgün, Ramazan [19] tarafından elde edilen Teorem 3.4.4 ile yukarıdaki teoremden aşağıdaki sonuç değerlendirilmiştir.

6.4.2 Sonuç: G, Dini-düzgün Γ ile sınırlı bir sonlu basit bağlantılı bölge ve $R > 1$ için $E_M(G_R)$, G_R üzerinde bir yansımalı Smirnov Orlicz sınıfı olsun.$n > 1$ olmak üzere $f \in E_M(G_R)$ ve $z \in K$ olduğunda

$$|R_n(z,f)| \leq \frac{c}{R^{n+1}(R-1)} \omega_M(\frac{1}{n}, f)\sqrt{\mathrm{n}\, ln\, \mathrm{n}}\,, \qquad c > 0$$

elde edilir.

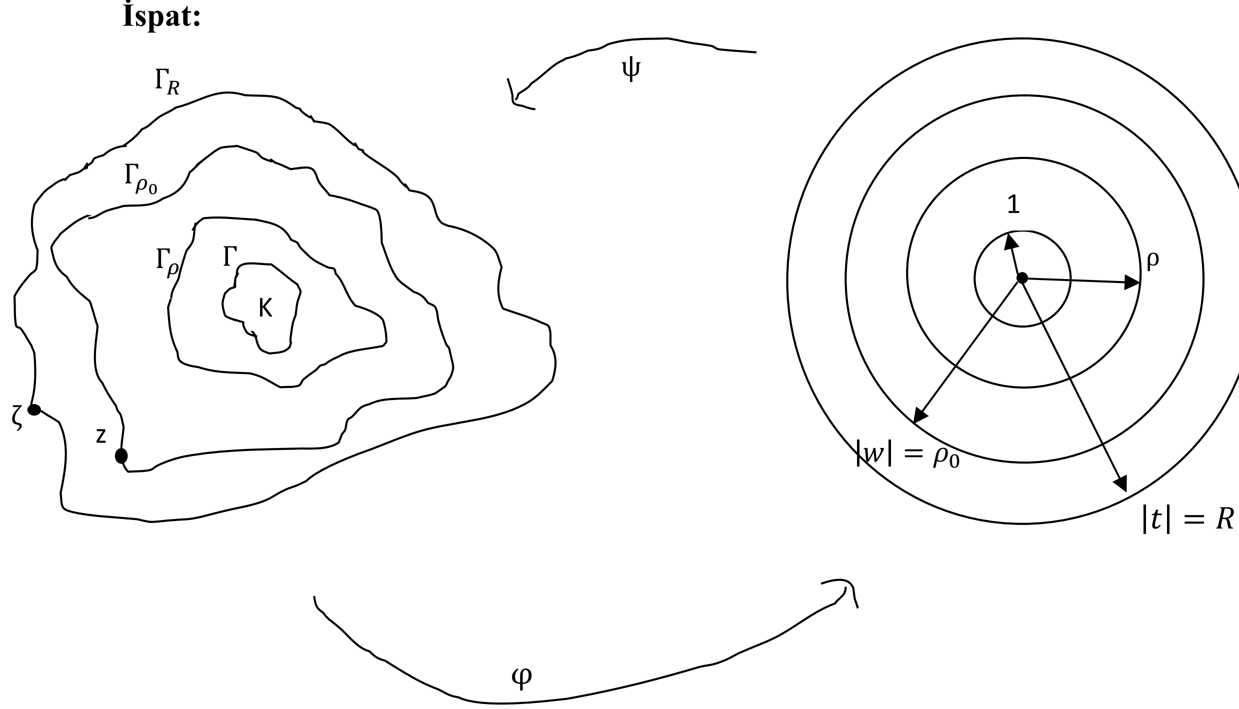
Şimdi [19] makalesinde verilen sonucu, $1 < \rho < R$ olmak üzere z'nin K'dan daha geniş olduğu $\overline{G_\rho}$ bölgesinde olduğu durumda Smirnov Orlicz sınıflarında Faber serilerinin maksimal yakınsaklık özelliğini karakterize eden asıl problemimizi araştıralım:

6.4.3 Teorem: $1 < \rho < R$ iken $f(z) \in E_M(G_R)$ ve $z \in \overline{G_\rho}$ olduğunda,

$$|R_n(z,f)| \leq c_{10} \frac{\rho^{n+1} E_n^M(f, G_R)}{R^{n+1}(R-\rho)} \sqrt{\frac{\rho^2}{\rho^4-1}\; ln \frac{\rho^2}{\rho^2-1}}$$

olur. Burada $c_{10} > 0$ sabiti, n ve z'den bağımsızdır.

İspat:



$z \in \Gamma_{\rho_0}$, $1 < \rho < \rho_0 < R$ ve $P_n(z)$, $f \in E_M(G_R)$ fonksiyonuna derecesi n'den büyük olmayan polinomlar sınıfında en iyi yaklaşan polinom olsun. (6.31) bağıntısından

$$|R_n(z,f)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R} |f(\psi(t)) - P_n(\psi(t))| \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{w^k}{t^{k+1}}\right| |dt| +$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R} |f(\psi(t)) - P_n(\psi(t))| \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{E_k(\psi(w))}{t^{k+1}}\right| |dt|$$

ve

$$I_1 := \frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R} |f(\psi(t)) - P_n(\psi(t))| \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{w^k}{t^{k+1}}\right| |dt|$$

$$I_2 := \frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R} |f(\psi(t)) - P_n(\psi(t))| \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{E_k(\psi(w))}{t^{k+1}}\right| |dt|$$

olsun.

$|R_n(z,f)| \leq I_1 + I_2$ olur.

$I_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R} |f(\psi(t)) - P_n(\psi(t))| \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{w^k}{t^{k+1}}\right| |dt|$ integralinde

$\psi(t) = \zeta$ ve $\varphi(z) = w$ dönüşümü yapılırsa,

$$I_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_R} |f(\zeta) - P_n(\zeta)| \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{[\varphi(z)]^k}{[\varphi(\zeta)]^{k+1}}\right| |\varphi'(\zeta)|\, |d\zeta|$$

olur. Burada Γ_R seviye eğrileri, Dini-düzgün eğriler kabul edilebilir. Konform dönüşümün türevi (2.1)'deki gibi değerlendirilir ve

$$I_1 \leq \frac{c_1}{2\pi}\int_{\Gamma_R} |f(\zeta) - P_n(\zeta)| \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{[\varphi(z)]^k}{[\varphi(\zeta)]^{k+1}}\right| |d\zeta|$$

olur.

Şimdi, sırasıyla $\rho(g;N) \leq 1$ olmak üzere $g \in L_N(\Gamma_R)$ fonksiyonu ve

$\rho(h; M) \leq 1$ olmak üzere $h \in L_M(\Gamma_R)$ fonksiyonu üzerinden supremum alıp, Hölder eşitsizliğini uygularsak,

$$\leq \frac{c_1}{2\pi}\left\{\sup \int_{\Gamma_R} |f(\zeta) - P_n(\zeta)||g(\zeta)||d\zeta|\right\}\left\{\sup \int_{\Gamma_R} \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{[\varphi(z)]^k}{[\varphi(\zeta)]^{k+1}}\right| |h(\zeta)||d\zeta|\right\}$$

$$\leq \frac{c_2}{2\pi} E_n^M(f, G_R) \sup\left\{\int_{\Gamma_R} \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{[\varphi(z)]^k}{[\varphi(\zeta)]^{k+1}}\right| |h(\zeta)||d\zeta|\,;\;\; \rho(h, M) \leq 1\right\}$$

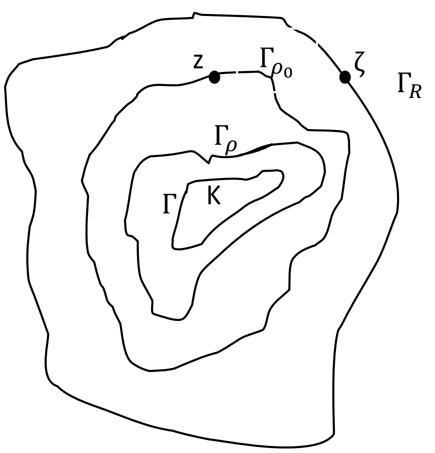
$$= \frac{c_2}{2\pi} E_n^M(f, G_R) \sup\left\{\int_{\Gamma_R} \left|\frac{[\varphi(z)]^{n+1}}{[\varphi(\zeta)]^{n+2}} + \frac{[\varphi(z)]^{n+2}}{[\varphi(\zeta)]^{n+3}} + \cdots\right| |h(\zeta)||d\zeta|\,;\;\; \rho(h, M) \leq 1\right\}$$

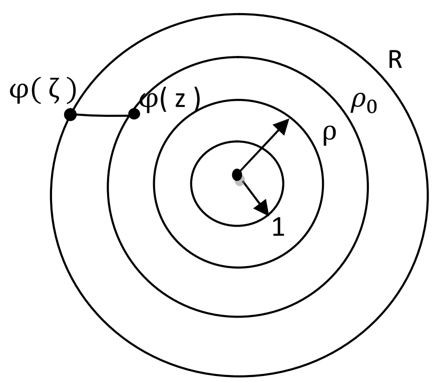
$$= \frac{c_2}{2\pi} E_n^M(f, G_R) \sup\left\{\int_{\Gamma_R} \left|\frac{[\varphi(z)]^{n+1}}{[\varphi(\zeta)]^{n+2}}\left(1 + \frac{\varphi(z)}{\varphi(\zeta)} + \left[\frac{\varphi(z)}{\varphi(\zeta)}\right]^2 + \cdots\right)\right| |h(\zeta)||d\zeta|;\;\; \rho(h, M) \leq 1\right\}$$

$$= \frac{c_2}{2\pi} E_n^M(f, G_R) \sup\left\{\int_{\Gamma_R} \left|\frac{[\varphi(z)]^{n+1}}{[\varphi(\zeta)]^{n+2}} \frac{\varphi(\zeta)}{\varphi(\zeta) - \varphi(z)}\right| |h(\zeta)||d\zeta|\,;\;\; \rho(h, M) \leq 1\right\}$$

$$= \frac{c_2}{2\pi} E_n^M(f, G_R) \sup\left\{\int_{\Gamma_R} \frac{|\varphi(z)|^{n+1}}{|\varphi(\zeta)|^{n+1}|\varphi(\zeta) - \varphi(z)|} |h(\zeta)|\,|d\zeta|;\;\; \rho(h, M) \leq 1\right\}.$$

Burada $|\varphi(\zeta) - \varphi(z)|$'yi değerlendirelim: $z \in \Gamma_{\rho_0}$ ve $\zeta \in \Gamma_R$ için





$$|\varphi(\zeta)-\varphi(z)| \geq |R-\rho_0| \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{|R-\rho_0|} \geq \frac{1}{|\varphi(\varsigma)-\varphi(z)|}$$

olur.

$$I_1 \leq \frac{c_3\, E_n^M(f,G_R)\, {\rho_0}^{n+1}}{2\pi\, R^{n+1}\,(R-\rho_0)} \sup\left\{\int_{\Gamma_R} |h(\zeta)||d\zeta|;\ \rho(h;M) \leq 1\right\}$$

ve biliyoruz ki $\sup\left\{\int_{\Gamma_R} 1.\,|h(\zeta)||d\zeta|;\ \rho(h;M) \leq 1\right\} \leq 1 + \mathrm{N}(1)\mathrm{mes}\Gamma_R \leq c_4$.

Böylece

$$I_1 \leq \frac{c_5\, E_n^M(f,G_R)\, {\rho_0}^{n+1}}{2\pi\, R^{n+1}\,(R-\rho_0)}$$

olur.

Şimdi I_2 integralini değerlendirelim.

$z \in \Gamma_{\rho_0}$ olduğundan $|w| = \rho_0$' dır. Buna göre (6.36) ve (6.37) bağıntılarını kullanırsak

$$I_2 = \frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R} |f(\psi(t)) - P_n(\psi(t))| \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{|\tau|=\rho_0} \frac{\tau^k}{t^{k+1}} F(\tau,w)\,d\tau\right| |dt|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R} |f(\psi(t)) - P_n(\psi(t))| \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{|\tau|=\rho_0} \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\tau^k}{t^{k+1}}\right| |F(\tau,w)||d\tau|\right\} |dt|$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R} |f(\psi(t)) - P_n(\psi(t))| \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{|\tau|=\rho_0} \left|\frac{\tau^{n+1}}{t^{n+2}} + \frac{\tau^{n+2}}{t^{n+3}} + \cdots\right| |F(\tau,w)||d\tau|\right\} |dt|$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R} |f(\psi(t)) - P_n(\psi(t))| \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{|\tau|=\rho_0} \left|\frac{\tau^{n+1}}{t^{n+2}}\left(1 + \frac{\tau}{t} + \frac{\tau^2}{t^2} + \cdots\right)\right| |F(\tau,w)||d\tau|\right\} |dt|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R} |f(\psi(t)) - P_n(\psi(t))| \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{|\tau|=\rho_0} \left|\frac{\tau}{t}\right|^{n+1} \left|\frac{1}{t-\tau}\right| |F(\tau,w)||d\tau|\right\} |dt|.$$

Fubini teoreminden,

$$I_2 \leq \frac{{\rho_0}^{n+1}}{2\pi R^{n+1}} \int_{|\tau|=\rho_0} |F(\tau,w)| \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R} |f(\psi(t)) - P_n(\psi(t))| \frac{|dt|}{|t-\tau|}\right\} |d\tau|.$$

Bu sağdaki ifadede $\psi(t) = \zeta$ ve $\varphi(z) = \tau$ değişken değişimi uygulanırsa ve $\rho(\tilde{g};L_M) \leq 1$ olmak üzere $\tilde{g} \in L_M(\Gamma_R)$ fonksiyonu ve $\rho(\tilde{h};N) \leq 1$ olmak üzere $\tilde{h} \in L_N(\Gamma_R)$ fonksiyonu üzerinden supremum alıp Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$I_2 \le \frac{{\rho_0}^{n+1}}{2\pi R^{n+1}} \int_{|\tau|=\rho_0} |F(\tau,w)| \left\{\frac{1}{2\pi} \int_{|t|=R} |f(\zeta)-P_n(\zeta)| \frac{|\varphi'(\zeta)|}{|\varphi(\zeta)-\varphi(z)|} \; |d\zeta|\right\} |d\tau|$$

$$\le \frac{{\rho_0}^{n+1}}{4\pi^2 R^{n+1}} \int_{|\tau|=\rho_0} |F(\tau,w)| \left\{ \|f(\zeta)-P_n(\zeta)\|_{L_M(\Gamma_R)} \left\| \frac{\varphi'(\zeta)}{\varphi(\zeta)-\varphi(z)} \right\|_{L_N(\Gamma_R)} \right\} |d\tau|$$

$$\le$$

$$\frac{{\rho_0}^{n+1}}{4\pi^2 R^{n+1}} \int_{|\tau|=\rho_0} |F(\tau,w)| \left\{\sup \int_{\Gamma_R} |f(\zeta)-P_n(\zeta)||\tilde{g}(\zeta)||d(\zeta)|\right\} \left\{\sup \int_{\Gamma_R} \left|\frac{\varphi'(\zeta)}{\varphi(\zeta)-\varphi(z)}\right| \left|\tilde{h}(\zeta)\right||d(\zeta)|\right\} |d\tau|$$

$$\le \frac{c_6 {\rho_0}^{n+1}}{4\pi^2 R^{n+1}(R-\rho_0)} \int_{|\tau|=\rho_0} |F(\tau,w)| \left[E_n^M(f,G_R) \left\{sup \int_{\Gamma_R} 1.\left|\tilde{h}(\zeta)\right| |d\zeta|\,;\ \rho(\tilde{h};N) \le 1\right\}\right] |d\tau|.$$

Burada (3.2.3) teoremden

$$\sup \left\{\int_{\Gamma_R} 1.\left|\tilde{h}(\zeta)\right||d\zeta|\,;\ \ \rho(\tilde{h};N) \le 1\right\} \le 1 + \ M(1) mes\Gamma_R \ \le \ c_7$$

ve (6.36) gereği

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|\tau|=\rho_0} |F(\tau,w)||d\tau| \le \sqrt{\frac{{\rho_0}^2}{{\rho_0}^4-1} \; ln \frac{{\rho_0}^2}{{\rho_0}^2-1}}$$

olduğundan

$$I_2 \ \le \frac{c_8 \, E_n^M(f,G_R) \, {\rho_0}^{n+1}}{2\pi \, R^{n+1} \, (R-\rho_0)} \sqrt{\frac{{\rho_0}^2}{{\rho_0}^4-1} \; ln \frac{{\rho_0}^2}{{\rho_0}^2-1}} \qquad \text{olur.}$$

$|R_n(z,f)| \ \le \ I_1 + I_2$ 'de yerine yazalım.

$$|R_n(z,f)| \le \frac{c_5 \, E_n^M(f,G_R) \, {\rho_0}^{n+1}}{2\pi \, R^{n+1}(R-\rho_0)} + \frac{c_8 \, E_n^M(f,G_R) \, {\rho_0}^{n+1}}{2\pi R^{n+1} \, (R-\rho_0)} \sqrt{\frac{{\rho_0}^2}{{\rho_0}^4-1} \; ln \frac{{\rho_0}^2}{{\rho_0}^2-1}}$$

$$|R_n(z,f)\,| \le \frac{c_9 \, E_n^M(f,G_R) \, {\rho_0}^{n+1}}{2\pi \, R^{n+1} \, (R-\rho_0)} \sqrt{\frac{{\rho_0}^2}{{\rho_0}^4-1} \; ln \frac{{\rho_0}^2}{{\rho_0}^2-1}}$$

Burada z $\in \overline{G_\rho}$ ve $\rho_0 := \ \rho + \frac{1}{n}$ alırsak

$$|R_n(z,f)| \leq \frac{c_{10}\, E_n^M(f,G_R)\, \rho^{n+1}}{2\pi\, R^{n+1}\,(R-\rho)} \sqrt{\frac{\rho^2}{\rho^4-1}\, ln\, \frac{\rho^2}{\rho^2-1}} \quad , \quad c_{10} > 0 \tag{6.40}$$

elde edilir.■

Teorem 3.4.4'ü kullanırsak yukarıda elde ettiğimiz teoremden aşağıdaki sonuç elde edilir.

6.4.4 Sonuç: G, Dini-düzgün Γ ile sınırlı bir sonlu basit bağlantılı bölge ve $R > 1$ için $E_M(G_R)$, G_R üzerinde bir yansımalı Smirnov orlicz sınıfı olsun. $f \in E_M(G_R)$ ve $1 > \rho > R$ için $z \in \overline{G_\rho}$ olduğunda

$$|R_n(z,f)| \leq \frac{c\rho^{n+1}}{R^{n+1}(R-\rho)}\, \omega_M(\frac{1}{n}, f) \sqrt{\frac{\rho^2}{\rho^4-1}\, ln\, \frac{\rho^2}{\rho^2-1}}, \qquad c > 0 \tag{6.41}$$

elde edilir.

$z \in K$ durumunda (6.40) ve (6.41)'deki sonuçlar, D.M. Israfilov, B. Oktay ve R. Akgün tarafından [19]'da elde edilen sonuçlar ile çakışır.

Alt bölümde ise araştıracağımız problem; $f(z) \in E^{p(\cdot)}(G_R)$ için $z \in K$ olduğunda $f(z)$ fonksiyonuna, bu fonksiyonun Faber serisinin kısmi toplamları ile yaklaşım hızını değerlendirmektir.

6.5 Değişken Üslü Smirnov Sınıflarında Maksimal Yakınsaklık Teoremleri

6.5.1 Tanım: $f \in E^{p(\cdot)}(G)$ için

$$E_n{}^{p(\cdot)}(f) := \left\{ inf \|f - P_n\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)} : P_n \in \Pi_n \right\}$$

sayısına ***en iyi yaklaşım sayısı*** denir. Burada Π_n derecesi n'yi aşmayan cebirsel polinomlar kümesidir.

K, $K^- := \mathbb{C}/K$ bağlantılı tümleyenine sahip sınırlı bir kontinyum,

$R > 1$ için $\Gamma_R := \{z \in \Gamma : \ |\varphi(z) = R|\}$ ve $G_R \coloneqq \ Int\, \Gamma_R$

olduğunu biliyoruz.

6.5.2 Teorem: $p(\cdot) \in \wp_0(\Gamma_R)$ olsun. Eğer $R > 1$ için $f \in E^{p(\cdot)}(G_R)$ ise

$$|R_n(z, f)| \leq \frac{c_{p(\cdot)}}{R^{n+1}(R-1)} E_n{}^{p(\cdot)}(f, G_R)\sqrt{n \ln n}\,, \quad z \in K$$

olacak şekilde n'den bağımsız $p(\cdot)$'ye bağlı bir $c_{p(\cdot)}$ sabiti vardır.

İspat: $z \in \Gamma_\rho$, $1 < \rho < R$ ve P_n , derecesi n'yi aşmayan cebirsel polinomlar sınıfında $f \in E^{p(\cdot)}(G_R)$ fonksiyonuna en iyi yaklaşan polinom olsun. (6.31) bağıntısından

$$|R_n(z, f)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=R} |f(\psi(t)) - P_n(\psi(t))| \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{w^k}{t^{k+1}} \right| |dt| +$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|t|=R} |f(\psi(t)) - P_n(\psi(t))| \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{E_k(\psi(w))}{t^{k+1}} \right| |dt|$$

ve

$$I_1 \coloneqq \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=R} |f(\psi(t)) - P_n(\psi(t))| \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{w^k}{t^{k+1}} \right| |dt|$$

$$I_2 \coloneqq \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=R} |f(\psi(t)) - P_n(\psi(t))| \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{E_k(\psi(w))}{t^{k+1}} \right| |dt|$$

olsun.

$|R_n(z, f)| \leq I_1 + I_2$ olur. (6.42)

$I_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R} |f(\psi(t)) - P_n(\psi(t))| \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{w^k}{t^{k+1}}\right| |dt|$ integralinde

ψ(t) = ζ ve φ(z) = w dönüşümü yapılırsa,

$$I_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_R} |f(\zeta) - P_n(\zeta)| \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{[\varphi(z)]^k}{[\varphi(\zeta)]^{k+1}}\right| |\varphi'(\zeta)|\, |d\zeta|$$

olur. Burada Γ_R Dini-düzgün eğri olduğundan (2.1)'deki gibi değerlendirilebilir ve

$$I_1 \leq \frac{c_1}{2\pi}\int_{\Gamma_R} |f(\zeta) - P_n(\zeta)| \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{[\varphi(z)]^k}{[\varphi(\zeta)]^{k+1}}\right| |d\zeta|$$

olur.

Şimdi (4.1) eşitsizliğini uygulayalım.

$$I_1 \leq \frac{c_2(p)}{2\pi}\|f(\cdot) - P_n(\cdot)\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma_R)} \left\|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{[\varphi(z)]^k}{[\varphi(\cdot)]^{k+1}}\right\|_{L^{q(\cdot)}(\Gamma_R)}$$

$$= \frac{c_2(p)}{2\pi}\|f(\cdot) - P_n(\cdot)\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma_R)} \left\|\frac{[\varphi(z)]^{n+1}}{\varphi(\cdot)^{n+1}(|\varphi(\cdot)| - |\varphi(z)|)}\right\|_{L^{q(\cdot)}(\Gamma_R)}$$

$$\leq \frac{c_3(p)}{2\pi} E_n{}^{p(\cdot)}(f, G_R) \left\|\frac{r^{n+1}}{R^{n+1}(R-r)}\right\|_{L^{q(\cdot)}(\Gamma_R)}$$

$$\leq \frac{c_3(p)}{2\pi} E_n{}^{p(\cdot)}(f, G_R)\frac{r^{n+1}}{R^{n+1}(R-r)}\,.$$

Buradan

$$I_1 \leq \frac{c_3(p)}{2\pi} E_n{}^{p(\cdot)}(f, G_R)\frac{r^{n+1}}{R^{n+1}(R-r)} \qquad (6.43)$$

olur.

Şimdi I_2 integralini değerlendirelim.

(6.36) ve (6.37) bağıntılarını kullanırsak

$$I_2 = \frac{1}{2\pi}\int_{|t|=R} |f(\psi(t)) - P_n(\psi(t))| \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{E_k(\psi(w))}{t^{k+1}}\right| |dt|$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=R} |f(\psi(t)) - P_n(\psi(t))| \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\rho} \frac{F(\tau,w)\tau^k}{t^{k+1}} d\tau \right| |dt|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=R} |f(\psi(t)) - P_n(\psi(t))| \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{|\tau|=\rho} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\tau^k}{t^{k+1}} \right| |F(\tau,w)| |d\tau| |dt| \right\}$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=R} |f(\psi(t)) - P_n(\psi(t))| \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{|\tau|=\rho} \left| \frac{\tau^{n+1}}{t^{n+1}(t-\tau)} \right| |F(\tau,w)| \, |d\tau| |dt| \right\}.$$

Fubini teoreminden,

$$I_2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\tau|=\rho} |F(\tau,w)| \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=R} |f(\psi(t)) - P_n(\psi(t))| \left| \frac{\tau^{n+1}}{t^{n+1}(t-\tau)} \right| |dt| \right\} |d\tau|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\tau|=\rho} |F(\tau,w)| |\tau^{n+1}| \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=R} |f(\psi(t)) - P_n(\psi(t))| \left| \frac{1}{t^{n+1}|t-\tau|} \right| |dt| \right\} |d\tau|$$

$$\leq \frac{\rho^{n+1}}{2\pi R^{n+1}} \int_{|\tau|=\rho} |F(\tau,w)| \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{|t|=R} |f(\psi(t)) - P_n(\psi(t))| \frac{1}{|t-\tau|} |dt| \right\} |d\tau|.$$

Bu sağdaki ifadede $\psi(t) = \zeta$ ve $\varphi(z) = \tau$ değişken değişimi uygulandığında (2.1) ve (4.1) bağıntılarından

$$I_2 \leq \frac{\rho^{n+1}}{2\pi R^{n+1}} \int_{|\tau|=\rho} |F(\tau,w)| \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_R} |f(\zeta) - P_n(\zeta)| \frac{|\varphi'(\zeta)|}{|\varphi(\zeta) - \varphi(z)|} |d\zeta| \right\} |d\tau|$$

$$\leq \frac{c_4(p)\rho^{n+1}}{4\pi^2 R^{n+1}} \int_{|\tau|=\rho} |F(\tau,w)| \left\{ \|f(\zeta) - P_n(\zeta)\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma_R)} \left\| \frac{\varphi'(\cdot)}{\varphi(\cdot) - \varphi(z)} \right\|_{L^{q(\cdot)}(\Gamma_R)} |d\tau| \right\}$$

$$\leq \frac{c_5(p)\rho^{n+1}}{4\pi^2 R^{n+1}} \int_{|\tau|=\rho} |F(\tau,w)| \, E_n{}^{p(\cdot)}(f, G_R) \frac{1}{(R-\rho)} |d\tau|$$

$$= \frac{c_5(p)\rho^{n+1}}{4\pi^2 R^{n+1}(R-\rho)} E_n{}^{p(\cdot)}(f, G_R) \int_{|\tau|=\rho} |F(\tau,w)| \, |d\tau|$$

$$\leq \frac{c_5(p)\rho^{n+1}}{4\pi^2 R^{n+1}(R-\rho)} E_n{}^{p(\cdot)}(f, G_R)\sqrt{\frac{\rho^2}{\rho^4-1}\, ln\frac{\rho^2}{\rho^2-1}} \tag{6.44}$$

elde edilir.

(6.42)'da (6.43) ve (6.44) eşitsizlikleri yerine yazılarak

$$|R_n(z,f)| \leq \frac{c_3(p)}{2\pi} E_n{}^{p(\cdot)}(f, G_R)\frac{\rho^{n+1}}{R^{n+1}(R-\rho)} + \frac{c_5(p)\rho^{n+1}}{4\pi^2 R^{n+1}(R-\rho)} E_n{}^{p(\cdot)}(f, G_R)\sqrt{\frac{\rho^2}{\rho^4-1}\, ln\frac{\rho^2}{\rho^2-1}}$$

Burada $z \in K$ ve $\rho := 1+\frac{1}{n}$ alırsak

$$|R_n(z,f)| \leq \frac{c_6(p)\rho^{n+1}}{R^{n+1}(R-1)} E_n{}^{p(\cdot)}(f, G_R)\sqrt{n \ln n}$$

elde edilir.■

Bir $R > 1$ için

$$f_0(w) := f(\psi(Rw)) \text{ ve } p_0(w) := p(\psi(Rw))$$

olsun.

Teorem 4.2.7'yi kullanırsak yukarıda elde ettiğimiz teoremden aşağıdaki sonuç elde edilir.

6.5.3 Sonuç: Bir $R > 1$ için $f \in E^{p(\cdot)}(G_R)$ ve $p(\cdot) \in \wp_0(\Gamma_R)$ ise

$$|R_n(z,f)| \leq \frac{c_{p(\cdot)}}{R^{n+1}(R-1)} \Omega\left(f_0, \frac{1}{n}\right)_{p_0(\cdot)} \sqrt{n \ln n}\,, \qquad z \in K$$

olacak şekilde n'den bağımsız bir $c_{p(\cdot)}$ sabiti vardır.

7. SONUÇ

Bu tezde analitik fonksiyonların Smirnov sınıflarında Faber serilerinin kısmi toplamlarının maksimal yakınsaklığı ile ilgili elde edilmiş olan sonuçların Smirnov Orlicz ve değişken üslü Smirnov sınıflarına genelleştirilmeleri elde edilmiştir.

8. KAYNAKLAR

[1] Walsh, J.L. and Russel, H.G. , ''Integrated Contiunity Conditions and Degree of Approximation by Polynomials or by Bounded Analytic Functions'' , *Trans. Amer. Math. Soc. ,* 92 , 355 , (1959).

[2] Al'per, S.Y. , ''Approximation in the Mean of Analytic Functions of Class E^p'', *Gosudarstv. Izdat. Fiz-Mat. Lit. ,* Moscow, 273 , (1960).

[3] , V.M. , ''Approximation in the Mean of Analytic Functions of Class E_p'' , *Sov. Math. , Dokl. ,* 8 , 1393, (1967).

[4] V. Kokilashvili, ''On Analytic Functions of Smirnov-Orlicz Classes''*, Studia Mathematica* 31, 43-59 , (1968).

[5] Güven, A. ,Israfilov D. M. , ''Polynomial Approximation in Smirnov-Orlicz Classes'', *Computational Methods and Function Theory* , 2 , 509-517 , (2002).

[6] Başkan, T. , *Kompleks Fonksiyonlar Teorisi,* Vipaş A. Ş. , Bursa , 126-313, (2000).

[7] Pommerenke, Ch. , *Boundary Behaviour of Conformal Maps,* Springer-Verlag, Berlin, Heidenberg, New York, 24-41, (1992).

[8] Markushevich, A. I. , ''Theory of Functions of a Complex Variable III ''*, Prentice Hall, Inc.,* 8-104, (1967).

[9] Lehto, O. and Virtanen, K. , ''Quasiconformal Mappings in the Plane'', *Springer-Verlag*, (1973).

[10] Warschawski S.E. , ''Über das Randverhalten der Ableitung der Abbildungsfunktion bei konformer Abbildung'' *Math, Zeitschrift* , 35 , (1990).

[11] A.Yu. Karlovich, ''Algebras of Singular Integral Operators with Piecewise Continuous Coefficients on Reflexive Orlicz Spaces'', *Math. Nachr*. 179, 187-222 , (1996).

[12] Goluzin, G. M. , *Geometric Theory of Functions of a Complex Variable,* Translations of Mathematical Monographs, Vol. 26, Amer. Math. Sac, 388, (1969).

[13] Balcı, M. , *Reel Analiz* , Ankara, 125, (2000).

[14] De Vore, R. A. and Lorentz, G.G. , *Constructive Approximation,* Springer-Verlag , (1993).

[15] Duren, P.L. , *Theory of H_p Space*, Academic Press, 38, New York (1970).

[16] Krosnoselskii, M. A. and Ruticki, Ya. , B. , *Convex Functions and Orlicz Spaces,* P. Noordhoff Ltd. , Groningen, (1961).

[17] Böttcher, A. and Karlovich, A. Yu., *Carleson curves,Muckenhoupt weights and Toeplitz operators,* Prog. Math. Vol. 154, Birkhauser, (1997).

[18] M. M. Rao and Z. D. Ren, *Theory of Orlicz Spaces,* Marcel Dekker, New York, (1991).

[19] Israfilov, Daniyal M. , Oktay, Burçin, Akgün, Ramazan, ‘‘Approximation in Smirnov-Orlicz Classes’’ *Glasnik Matematicki* , Vol. 40(60), 87-102 , (2005).

[20] Akgün, R. and Israfilov, Daniyal M. , ‘‘Approximation by Interpolating Polynomials in Smirnov-Orlicz Class’’ *J. Korean Math. Soc*. 43, No.2, p. 413-424 , (2006).

[21] Cruz-Uribe, D. V. , Fiorenza, A. ,*Variable Lebesgue Spaces Foundation and Harmonic Analysis* , Birkhäsuser , (2013).

[22] Sharapudinov, I.I. , Some *questions of approximation theory in the Lebesgue spaces with variable exponent* , Viladikavkaz, (2012).

[23] Akgün, R. , ‘‘ Polynomial approximation of functions in weighted Lebesgue and Smirnov spaces with nonstandard growth’’ , *Georgian Math. Journal*, 18 , p. 203-235 , (2011).

[24] Israfilov, D. M. , Elife Gursel Ramazan and Esra Akcay Abubekir , *Maximal convergence in Smirnov classes with variable exponent* , Abstract book of Int. Conf. ‘‘ Teoretical and Applied Problems of Mathematics’’, Sumgayit, Azerbaijan, p.40 , (2017).

[25] Suetin, P.K. , *Series of Faber Polynomials,* Gordon and Breach, 33-208, (1998).

[26] Cömert, N. , ‘‘Kompleks Bölgelerde Tanımlı Fonksiyon Uzaylarında Yaklaşım Problemleri’’ Yüksek Lisans Tezi*, Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü,* Matematik Ana Bilim Dalı, Haziran, (2013).

[27] Akgün, R. , ‘‘Smirnov-Orlicz Uzaylarında Polinomlarla Yaklaşım’’ Doktora Tezi, *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü,* Matematik Ana Bilim Dalı, Mayıs, (2007).

[28] Faber, G. , ‘‘Uber polynomische Entwicklungen ’’ , *Mathem. Ann.* 57, 389-408, (1903).

[29] Güven, A. , ‘‘Faber Polinomları ve Onların Yaklaşım Özellikleri’’*,* Yüksek Lisans Tezi, *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü,* Matematik Ana Bilim Dalı, Balıkesir, (2000).

[30] Pommerenke , C. , *Univalent Functions,* Vandenhoeck & Ruprecht, 1 , (1975).