T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

HOMOTOPİ PERTÜRBASYON SUMUDU DÖNÜŞÜM METODU VE UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SEMİH KÜÇÜK

BALIKESİR, KASIM - 2017

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

HOMOTOPİ PERTÜRBASYON SUMUDU DÖNÜŞÜM METODU VE UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SEMİH KÜÇÜK

Jüri Üyeleri : Yrd. Doç. Dr. Fırat EVİRGEN (Tez Danışmanı)
Doç. Dr. Necati ÖZDEMİR
Doç. Dr. Hacı Mehmet BAŞKONUŞ

BALIKESİR, KASIM - 2017

KABUL VE ONAY SAYFASI

SEMİH KÜÇÜK tarafından hazırlanan "**HOMOTOPİ PERTÜRBASYON SUMUDU DÖNÜŞÜM METODU VE UYGULAMALARI**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 06.11.2017 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Yrd.Doç.Dr. Fırat EVİRGEN	....
Üye Doç.Dr. Necati ÖZDEMİR	....
Üye Doç.Dr. Hacı Mehmet BAŞKONUŞ	....

Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Doç. Dr. Necati ÖZDEMİR ....

ÖZET

HOMOTOPİ PERTÜRBASYON SUMUDU DÖNÜŞÜM METODU VE UYGULAMALARI
YÜKSEK LİSANS TEZİ
SEMIH KÜÇÜK
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI: YRD. DOÇ. DR. FIRAT EVİRGEN)

BALIKESİR, KASIM - 2017

Bu tezde fen ve mühendislik alanlarında karşılaşılan çeşitli mertebelerden kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri Homotopi Pertürbasyon Sumudu dönüşüm metodu ile incelenmiş ve diğer sayısal yöntemler ile elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde lineer ve lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin elde edilmesinde kullanılan Homotopi Pertürbasyon Sumudu dönüşüm metodunun literatür özeti verilmiştir.

İkinci bölümde diferansiyel denklemlerin temel tanım ve özelliklerine yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde homotopi pertürbasyon, sumudu dönüşüm yöntemi ve bu iki yöntemin birleştirilmesiyle oluşturulan homotopi pertürbasyon sumudu dönüşüm yöntemi tanıtılmıştır.

Dördüncü bölümde literatürde yer alan bazı kısmi diferansiyel denklemlerin analitik ve yaklaşık çözümlerinin elde edilebilmesi için homotopi pertürbasyon sumudu dönüşüm metodunu uygulanmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Sumudu dönüşümü, Homotopi pertrübasyon yöntemi, kısmi diferansiyel denklemler.

ABSTRACT

HOMOTOPY PERTURBATION SUMUDU TRANSFORMATION METHOD AND THEIR APPLICATIONS
MSC THESIS
SEMİH KÜÇÜK
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS
(SUPERVISOR: ASSIST.PROF.DR. FIRAT EVİRGEN)

BALIKESİR, NOVEMBER 2017

In this thesis, the solutions of partial differential equations of various order in the fields of science and engineering are examined by Homotopy Perturbation Sumudu transform method and the results obtained by other numerical methods are compared.

The thesis consists of four chapter.

In the first chapter, the literature summary of the Homotopy Perturbation Sumudu transform method used for obtaining solutions of linear and nonlinear partial differential equations is given.

In the second chapter, basic definitions and properties of differential equations are given.

In the third chapter, homotopy perturbation, sumudu transform method and homotopy perturbation sumudu transform method which is created by combining these two methods, are introduced.

In the fourth chapter, homotopy perturbation sumudu transform method is applied in order to obtain analytical and approximate solutions of some partial differential equations in the literature.

KEYWORDS: Sumudu transform, homotopy perturbation method, partial differential equations.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

TABLO LİSTESİ

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

$S\left[f(t)\right]$	:	$f(t)$ 'nin sumudu dönüşümü
$S^{-1}\left[f(t)\right]$	:	$f(t)$ 'nin ters sumudu dönüşümü
$H_n(U)$	:	He polinomları
D	:	İkinci mertebeden lineer diferansiyel operatör
N	:	Genel lineer olmayan diferansiyel operatör
L	:	Lineer diferansiyel operatör

ÖNSÖZ

Tez çalışmamda hiçbir zaman desteğini esirgemeyen bilgi ve yardımlarıyla eğitim yaşantıma çok büyük katkı, yön sağlayan danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Fırat EVİRGEN'e sonsuz teşekkür ederim.

Hayatım boyunca hep yanımda olan her konuda olduğu gibi öğretim konusunda da hep daha ileriyi düşünmemi sağlayıp ulaşmam için desteğini hiçbir zaman esirgemeyen annem, eşim Cansu KÜÇÜK ve ablam Seval GÜLHAN'a sonsuz teşekkür ederim.

1. GİRİŞ

Doğada hayatımızı etkileyen ve yaşamımıza yön veren birçok fiziksel değişimler, bilimsel olaylar mühendislik ve fizik problemi barındırmaktadır. Bu problemlerin çözüm yöntemleri aşamasında modellemeye ihtiyaç duyulmaktadır. Diferansiyel denklemler, karmaşık olan bu yapıları modeller, daha anlaşılabilir duruma getirmekle birlikte olayların doğasına inebilmede kullanılır. Bu sebeple doğadaki birçok olay bilim insanları tarafından modellenmeye çalışılmaktadır. Özellikle kısmi diferansiyel denklemler ile ısı ve ışık akışı, su, radyo, deprem, elektromanyetik, ses dalgaları, çevrebilim, elektrik, reaktif metallerin yayılımı popülasyon modelleri ve gazların yayılımı gibi birçok fiziksel ve biyolojik olaylar modellenebilmektedir. Oldukça geniş uygulama alanına sahip olmasından dolayı kısmi diferansiyel denklemler için birçok analitik ve yaklaşık çözüm yöntemleri geliştirilmiştir. Bu yöntemlerden bazıları: Homotopi Perturbasyon Metodu (HPM) [1,2], Varyasyonel İterasyon Metodu (VIM) [3], Adomiyan Ayrışım Metodu (ADM) [4] ve Laplace Dönüşüm Metodu (LTM)'dur.

Bu yöntemlere alternatif olarak 1993 yılında Watugala tarafından literatüre kazandırılan Sumudu dönüşüm yöntemi [5] kullanılmaya başlanmıştır. Sumudu kelimesinin anlamı pürüzsüz demektir. Sumudu dönüşüm metodunda t-bölgesindeki integral ve türev işlemleri $u-$ bölgesindeki u ile bölme ve çarpma işlemlerine eşdeğerdir. Bu da u ve $F(u)$ ile ifade edilen dönüştürülmüş fonksiyonların sırasıyla t ve $f(t)$ gibi ifade edilebilmesi ve mühendislik birimleri ile tutarlı davranış sergilemesini sağlar.

1994 yılında, Sumudu dönüşüm yöntemi Weerakoon tarafından kısmi diferansiyel denklemlere uygulanmıştır [6].

1998 yılında ise Watugala sumudu dönüşüm yöntemini kontrol mühendisliğinde karşılaşılan diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanmıştır [7].

Watugala'nın çalışmaları ardından 1998 yılında Weerakoon kompleks sayılarda ters sumudu dönüşüm yöntemini literatüre kazandırmıştır [8].

Laplace dönüşüm yöntemi ve Sumudu dönüşüm yöntemi arasında fark olmadığını iddia eden Deakin'a karşı Weerakoon, 1997 yılında Sumudu dönüşüm yöntemi ve Laplace arasındaki farkı ortaya koymuştur [9,10]. Belgacem ve arkadaşları, 2003 yılında Laplace dönüşümü ile bağlantısını çeşitli teoremler yardımı ile kurarak metodun uygulamasını genişletmiştir [11].

Yapılan bu çalışmaların ardından Sumudu dönüşüm yöntemi birçok alanda uygulanarak literatüre yeni özellikler sunulmuştur. 2002 yılında Watugala Sumudu dönüşüm yöntemini iki değişkenli fonksiyonlar için genellemiştir [12]. Asiru, Sumudu dönüşüm yöntemini konvolüsyon tipteki, integral denklemlerine ve kesikli dinamik sistemlere uygulamıştır [13,14]. Sumudu dönüşümünün yeni gelişmeler ışığında detaylı incelemeleri Belgacem ve arkadaşları tarafından yapılmıştır [15,16]. 2010 yılında Kılıçman ve arkadaşları kesirli sumudu dönüşüm yöntemini literatüre sunmuştur [17].

Sonraki yıllarda mevcut yöntemlerin birleştirilmesiyle birbirinin dezavantajlarını ortadan kaldıran yeni hibrit yöntemler geliştirilmiştir. Bu amaçla Homotopi pertürbasyon yöntemi ile Sumudu dönüşüm yöntemi birleştirilerek homotopi pertürbasyon sumudu dönüşüm yöntemi Kumar ve Singh tarafından 2011 yılında literatüre kazandırmıştır [18].

Lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan Adomian polinomlarının hesabı karmaşık ve zor yapıda olmasından dolayı Kumar ve arkadaşları lineer olmayan denklemlerin çözümünde He polinomlarını ortaya atıp Adomian polinomlarını kullanmadan daha kolay ve yaklaşık çözümler elde etmiştirler. Böylece ele alınan problemlerin lineer olmayan kısımları, çözümü daha kolay olan lineer yapılara dönüştürülmüştür. Ayrıca Homotopi pertürbasyon sumudu dönüşüm yönteminde çözümlerin seri şeklinde olması ve bazı durumlarda çözümlerin kapalı formlarının elde edilebilmesi, bu yöntemleri farklı dallarda çalışan bilim adamları arasında oldukça önemli yer edinmiş olup çözümlere farklı yorumlar yapılmıştır. Kullanılan yaklaşımlarla, elde edilen mevcut ve yeni çözümlerin analizinin yapılması sağlanmıştır.

Bu çalışmada fen ve mühendislik alanlarında karşılaşılan çeşitli mertebelerden kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri Homotopi Pertürbasyon Sumudu dönüşüm metodu ile incelenmiştir.

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

2.1 Adi Türevli Diferansiyel Denklemler

2.1.1 Tanım Bir veya daha çok bağımlı değişken, bir tek bağımsız değişken ve bağımlı değişkenin bir tek bağımsız değişkene göre adi türevlerini veya diferansiyellerini içeren bir diferansiyel denkleme adi diferansiyel denklem denir. Diğer bir deyişle, bir diferansiyel denklemde bir tek bağımsız değişken varsa denkleme adi diferansiyel denklem denir.

Genel olarak, y bağımlı, x bağımsız değişkenli, n. mertebeden bir adi diferansiyel denklem,

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0,$$

şeklinde yazılır [19].

2.2 Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler

Bu kısımda kısmi diferansiyel denklemler için bazı tanım ve sınıflandırılmalara yer verilmiştir [20]

2.2.1 Tanım İçinde en az iki bağımsız ve en az bir bağımlı değişken ile bağımlı değişkenin bağımsız değişkenlere göre çeşitli basamaktan kısmi türevlerini kapsayan eşitliklere (özdeşlik değil) bir kısmi türevli denklem denir.

z bağımlı; x ve y bağımsız değişkenler olmak üzere bir kısmi türevli denklem genel olarak

$$F\left(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, \ldots\right) = 0 \ ,$$

şeklindedir. Burada

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = p \ , \ z_y = \frac{dz}{dy} = q \ , \ z_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r \ , \ z_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s \ , \ z_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t,$$

dir. n bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip kısmi türevli denklemlerin genel şekli,

$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),\ z=z(x)$ olmak üzere

$$F\left(x_1,x_2,\ldots,x_n,z,z_{x_1},z_{x_1x_1},z_{x_1x_2},\ldots\right)=0$$

formundadır. Gösterimde $x_1,x_2,\ldots,x_n$ bağımsız değişkenleri; z ise bağımlı değişkeni göstermekte ve

$$z_{xi=}\ \frac{\partial z}{\partial x_i}\quad,\ z_{x_iy_i}=\frac{\partial^2 z}{\partial x_i\partial y_i}\quad;\quad i,j=1,2,\ldots,n$$

dir.

2.2.2 Tanım Bir kısmi türevli diferansiyel denklemde görülen en yüksek mertebeden kısmi türevin mertebesine kısmi diferansiyel denklemin mertebesi denir.

Örneğin $U_{tt}+aU_t=c^2U_{xx}$ (a, c sabit) sönümlü dalga denklemi ikinci basamaktan bir kısmi türevli denklemdir.

Adi türevli diferansiyel denklemlerin genel çözümleri, denklemin basamağı kadar keyfi sabit kapsayan ve her noktasından teğet doğruların çizilebildiği eğri aileleridir. Bu eğri aileleri $xy-$ düzlemindedir. Kısmi türevli denklemlerin genel çözümleri ise denklemin basamağı kadar keyfi fonksiyon kapsayan ve her noktasından teğet düzlemlerin çizilebildiği yüzey aileleridir. Adi türevli denklemlerde önceden verilen bir noktadan geçen çözümü araştırırken bir başlangıç veya sınır değer problemi karşımıza çıkar.

2.2.3 Tanım Bir kısmi türevli denklemi özdeş olarak sağlayan ve keyfi fonksiyon veya keyfi parametre kapsamayan bir fonksiyona bu kısmi türevli denklemin bir özel çözümü denir. Diğer taraftan bir kısmi türevli denklemin basamağı kadar (sürekli türetilebilir) keyfi fonksiyon kapsayan ve denklemi özdeş olarak sağlayan bir yüzey ailesine bu kısmi türevli denklemin genel çözümü denir.

Keyfi fonksiyon kapsayan bir yüzey ailesinin, bir denklemin genel çözümü olabilmesi için bu fonksiyon veya fonksiyonların en az denklemin basamağı kadar sürekli türetilebilir olmaları gerekir. Bundan sonra uygun bir D bölgesinde en az n. mertebeye kadar sürekli türetilebilir fonksiyonların sınıfını $C^n[D]$ ile göstereceğiz.

Örneğin $f,g \in C^2[D]$, $(D\subset\mathbb{R}^2)$ olmak üzere $z = f(3x+2y) + g(2x+3y)$ yüzey ailesi $6z_{xx} + 6z_{yy} - 13z_{xy} = 0$ ikinci basamaktan sabit katsayılı lineer denklemin genel çözümüdür. Bu çözüm bazen genel integral yüzeyi olarakta isimlendirilir. Diğer taraftan z= $\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x+y}}$ fonksiyonu $xz_x + yz_y = \dfrac{3}{2}z$ denklemini sağlar. Bu yüzey keyfi fonksiyon veya parametre kapsamadığından denklemin bir özel çözümüdür.

2.2.4 Tanım Bir kısmi türevli diferansiyel denklemdeki bağımlı değişken ve bunların tüm kısmi türevleri birinci dereceden ve denklem bağımlı değişken ve türevlerinin çarpımını içermiyorsa bu denkleme lineer kısmi diferansiyel denklem denir. Aksi halde lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem adını alır.

İki bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip birinci ve ikinci mertebeden lineer kısmi türevli diferansiyel denklemlerin genel formları sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$P(x,y)z_x + Q(x,y)z_y + R(x,y)z = S(x,y)\,, \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} A(x,y)\, z_{xx} + B(x,y)\, z_{xy} + C(x,y)\, z_{yy} \\ + D(x,y)\, z_x + E(x,y)\, z_y + F(x,y)z = G(x,y)\,, \end{aligned} \tag{2.2}$$

(2.1) ve (2.2) denklemlerinden x, y bağımsız; z bağımlı değişkendir.

Örneğin $U_t - k\left(U_{xx} + U_{yy}\right) = 0$ (k sabit) iki boyutlu ısı denklemi ikinci basamaktan lineer bir denklemdir. Burada x,y,t bağımsız; U bağımlı değişkendir. Diğer taraftan

$$zz_{xy} - z_x z_y = 0,$$

$$z_{xy}z_{xx} - 3z_{yy} - 6xz_y + xyz = 0,$$

lineer olmayan denklemlere örnek olarak gösterilebilir.

2.2.5 Tanım Bir kısmi türevli diferansiyel denklem, denklemde bulunan en yüksek mertebeden kısmi türevlere göre lineer ise bu denkleme yarı-lineer (kuasi-lineer) kısmi diferansiyel denklem denir.

Yarı-lineer kısmi diferansiyel denklemde düşük mertebeden kısmi türevlerin ve bağımlı değişkenin nasıl bir yapıda olduğu önemli değildir. İki bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip birinci ve ikinci mertebeden yarı lineer denklemlerin genel şekilleri sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$P(x,y,z)z_x + Q(x,y,z)z_y = R(x,y,z), \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} A\left(x,y,z,\ z_{x,}z_y\right)z_{xx} &+ B\left(x,y,z,\ z_{x,}z_y\right)z_{xy} \\ &+C\left(x,y,z,\ z_{x,}z_y\right)z_{yy} + D\left(x,y,z,\ z_{x,}z_y\right) = 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Bağımsız değişkenlerin ikiden fazla olması halinde (2.3) ve (2.4)'e benzer şekilde yarı-lineer denklemler yazabiliriz.

Her lineer denklem aynı zamanda yarı-lineerdir, fakat yarı-lineer bir denklem lineer olmayabilir.

$$z_x z_{xx} + xz\, z_y = sin(y),$$

$$z_{xy} + 2\left(z^2{}_x + z\right) - 6xz^3 sin(y) = 0\ ,\ z_{xy} + 2\left(z^2{}_x + z\right) - 6xz^3 sin(y) = 0\ ,$$

denklemleri yarı-lineer denklemlerdir.

2.2.6 Tanım Bir kısmi türevli diferansiyel denklem yarı-lineer ve denklemde görülen en yüksek mertebeden türevlerin katsayıları yalnızca bağımsız değişkenlerin fonksiyonları biçiminde ise bu denkleme hemen-hemen lineer kısmi diferansiyel denklem denir.

İki bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip ikinci mertebeden hemen-hemen lineer kısmi diferansiyel denklemin genel şekli

$$A(x,y)z_{xx} + B(x,y)z_{xy} + C(x,y)z_{yy} + D\left(x,y,z,z_x,z_y\right) = 0, \tag{2.5}$$

formundadır.

Diğer taraftan üç bağımsız, bir bağımlı değişkene sahip ikinci basamaktan genel bir yarı-lineer denklem (2.5) ‘e benzer şekilde yazılabilir.

$$x\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}+t\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+U^3\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2=t+1,$$

(x, y, t bağımsız; U bağımlı değişken)

$$3xU_{xx}+\ 4\,xyU_{yy}+5\,xz^3U_{zz}+2zU_{xy}-\ 4U_{yz}+U^2U_X-\ U_Y+xye^z=0,$$

(x, y, z bağımsız; U bağımlı değişken)

denklemleri hemen-hemen lineerdir.

3. HOMOTOPİ PERTÜRBASYON SUMUDU DÖNÜŞÜM METODU

3.1 Homotopi Pertürbasyon Metodu

Bu bölümde, lineer veya lineer olmayan diferansiyel denklemlerin analitik veya yaklaşık çözümlerinin elde edilebilmesi için homotopi pertürbasyon metodu tanıtılacaktır [1,2].

Bu metodun temelini açıklayabilmek için aşağıdaki lineer olmayan diferansiyel denklemi ele alalım.

$$A(u) - f(r) = 0, \; r \in \Omega. \tag{3.1}$$

Belirtilen denklem için sınır koşulu

$$B(u, \partial u / \partial n) = 0, \; r \in \Gamma, \tag{3.2}$$

şeklindedir. A genel diferansiyel operatörü, B sınır operatörü, $f(r)$ bilinen analitik fonksiyon ve Γ ise Ω ya bağımlı sınırdır.

Genel olarak A diferansiyel operatörü L ve N gibi iki parçaya ayrılabilecek şekilde yazılabilir ki burada L lineer N ise lineer olmayan operatördür. (3.1) denklemi aşağıdaki gibi düzenlenir ise:

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0. \tag{3.3}$$

Buna göre homotopi oluşturulur.

$$v(r,p) : \Omega \text{ x} [0,1] \rightarrow R,$$

olmak üzere,

$$H(v,p) = (1-p)\left[L(v) - L(u_0)\right] + p\left[A(v) - f(r)\right] = 0, \; r \in \Omega, \tag{3.4}$$

dir. Burada $p \in [0,1]$ bir parametre ve u_0 ise (3.1) denkleminin başlangıç koşuludur. O halde

$$H(v,p) = L(v) - L(u_0) - pL(v) + pL(u_0) + pA(v) - pf(r) = 0$$

$$= L(v) - L(u_0) - p\left[L(v) - L(u_0) - A(v) + f(r)\right] = 0$$

$$= L(v) - L(u_0) + pL(u_0) - p\left[L(v) - A(v) + f(r)\right] = 0,$$

olur. (3.1) ‘den

$$A(u) - f(r) = 0,$$

elde edilir. Böylece

$$L(v) - L(u_0) + pL(u_0) - p\left[L(v)\right] = 0, \tag{3.5}$$

elde edilir. Buradan (3.3) eşitliğinden

$$L(u) - N(u) - f(r) = 0 \Rightarrow L(u) = -N(u) + f(r), \tag{3.6}$$

denklemi yazılabilir. Elde edilen (3.6) denklemi (3.5) denkleminde yerine yazılırsa

$$L(v) - L(u_0) + pL(u_0) - p\left[-N(v) + f(r)\right] = 0,$$

elde edilir. Böylece (3.4) denklemi

$$H(v,p) = L(v) - L(u_0) + pL(u_0) + p\left[N(v) - f(r)\right] = 0, \tag{3.7}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Burada $p \in [0,1]$, u_0 başlangıç koşulu ve $v(r,p) : \Omega \times [0,1] \to \mathbb{R}$ ’dir. Böylece (3.4) ve (3.7) denklemlerinden

$$H(v,0) = L(v) - L(u_0) = 0, \tag{3.8}$$

$$H(v,1) = A(v) - f(r) = 0, \tag{3.9}$$

dir. Burada $p=0$ olduğunda (3.4) denklemi basit bir lineer diferansiyel denklem haline gelir; $p=1$ olduğunda ise ele aldığımız orijinal lineer olmayan diferansiyel denklem elde edilir. Yani p 'nin 0'dan 1'e değişim işlemi $L(v)-L(u_0)=0$ lineer diferansiyel denklemini, $A(v)-f(r)=0$ lineer olmayan diferansiyel denklemine dönüştürür. Homotopi pertürbasyon metodu gereğince, p oldukça küçük bir parametre olmak üzere (3.4) ve (3.7) denklemlerinin çözümü p 'nin kuvvet serisi şeklinde yazılabilir

$$v=v_0+pv_1+p^2v_2+p^3v_3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}p^nv_n, \tag{3.10}$$

buradan denklem p parametresinin kuvvetlerine göre düzenlenirse

$$p^0: f(v_0)-f(x_0)=0, \tag{3.11}$$

$$p^1: f^{'}(v_0)v_1-f(x_0)=0, \tag{3.12}$$

$$p^2: f^{'}(v_0)v_2+\frac{1}{2!}f''(v_0)v_1^{\,2}=0, \tag{3.13}$$

$$p^3: f^{'}(v_0)v_3+\frac{1}{2!}f''(v_0)2v_1v_2+\frac{1}{3!}f'''(v_0)v_1^{\,3}=0, \tag{3.14}$$

yazılır. (3.11)-(3.14) denklemlerinin v_1, v_2 ve v_3 göre çözülmesi ile

$$v_1=-\frac{f(x_0)}{f(v_0)}, \tag{3.15}$$

$$v_2=-\frac{f''(x_0)v_1^{\,2}}{2!\,f'(v_0)}=-\frac{f''(v_0)}{2!\,f'(v_0)}\left(\frac{f(v_0)}{f'(v_0)}\right)^2, \tag{3.16}$$

$$v_3=-\frac{f''(v_0)v_1v_2}{f'(v_0)}-\frac{f'''(v_0)v_1^3}{3!\,f'(v_0)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{f''(v_0)}{f'(v_0)}\right)^2\left(\frac{f(v_0)}{f'(v_0)}\right)^3+\frac{f'''(v_0)}{6f'(v_0)}\left(\frac{f(v_0)}{f'(v_0)}\right)^3, \tag{3.17}$$

(3.10) serisinin v_1, v_2 ve v_3 bileşenleri elde edilir. Elde edilen (3.15)-(3.17) denklemleri, (3.10) denkleminde $p=1$ alınırsa (3.1) denkleminin çözümü:

$$u=\lim_{p\to 1}\left(v_0+pv_1+p^2v_2+p^3v_3+\cdots\right)=v_0+v_1+v_2+v_3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}v_n, \tag{3.18}$$

şeklinde elde edilir.

3.2 He Polinomları

Homotopi Pertürbasyon metoduna göre (3.3) denklemdeki lineer olmayan terimler aşağıda belirtilen formda yazılır.

$$N(U)=\sum_{i=0}^{\infty}p^iH_i=H_0+pH_1+p^2H_2+\cdots\ . \tag{3.19}$$

Yukarıda yer alan denklemdeki H_n ‘ler He polinomu olarak adlandırılır ve aşağıda yer alan formül ile hesaplanır [18].

$$H_n\left(U_0,U_1,\cdots,U_n\right)=\frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial p^n}\left[N\left(\sum_{i=0}^{n}p^iU_i\right)\right]_{p=0},\ \ n=0,1,2,\cdots\ , \tag{3.20}$$

Lineer olmayan terimlerin Sumudu ve ters Sumudu dönüşümleri hesaplanırken He polinomlarından faydalanır.

Örneğin $S\left[UU_x\right]=S\left[\sum_{i=0}^{\infty}p^nH_n\left(U\right)\right]$ olarak hesaplanır. $H_n\left(U\right)$ ‘nun birkaç bileşenini yazmak istersek:

$$H_0\left(U\right)=U_0U_{0x}, \tag{3.21}$$

$$H_1\left(U\right)=U_0U_{1x}+U_1U_{0x}, \tag{3.22}$$

$$H_2\left(U\right)=U_0U_{2x}+U_1U_{1x}+U_2U_{0x}, \tag{3.23}$$

$$H_3\left(U\right)=U_0U_{3x}+U_1U_{2x}+U_2U_{1x}+U_3U_{0x}, \tag{3.24}$$

$$\vdots$$

He polinomları Homotopi pertürbasyon metodunun Sumudu dönüşümlerine uygulanması aşamasında kullanılacaktır.

3.3 Sumudu Dönüşüm Metodu

Bir $f(t)$ fonksiyonun Sumudu Dönüşüm metodu Watugala tarafından 1993 yılında aşağıdaki gibi tanımlamıştır [5].

Bir A fonksiyonlar kümesi

$$A=\left\{ f(t):\exists M,\tau_1,\tau_2>0,\left|f(t)\right|<Me^{\frac{|t|}{\tau}},t\in(-1)^j \text{ x}[0,\infty) \right\},$$

biçiminde tanımlanmak üzere

$$S\left[f(t)\right]=F(u)=\int_0^{\infty} e^{-t} f(ut)\,dt,\quad u\in(-\tau_1,\tau_2), \tag{3.25}$$

$$S\left[f(t)\right]=F(u)=\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{u}\right)e^{\frac{-t}{u}} f(t)\,dt, \tag{3.26}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. (3.25) eşitliği verilen diferansiyel denklemlere uygulanarak $F(u)$ Sumudu dönüşümü elde edilir. Ters Sumudu dönüşümü ise aşağıdaki şekilde tanımlanır;

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st}F\left(\frac{1}{s}\right)\frac{ds}{s}. \tag{3.27}$$

Formülde belirtilen integral hesabı bazı fonksiyonlar için oldukça güç ve zaman alıcı olabilir. Bu sebepten, ters Laplace dönüşümlerinde olduğu gibi ters Sumudu dönüşümlerinde de sık karşılaşılan fonksiyonların Sumudu dönüşüm tabloları hazırlanmıştır [11,15,16]. Verilen bir diferansiyel denklemin çözümün araştırılmasında ilk olarak denklemin Sumudu dönüşümü alınarak cebirsel bir denkleme indirgenir, sonrasında ise bu denklemden bağımlı değişken çekilerek ters Sumudu dönüşümü uygulandığında çözüm elde edilmiş olur.

Bu tezde kullanılan ve literatürdeki birçok çalışmada da sıklıkla karşılaşılan bazı fonksiyonların Sumudu dönüşümleri aşağıdaki teoremlerle ifade edilebilir.

3.3.1 Teorem $f(t)$, $g(t)$ fonksiyonlarının Sumudu dönüşümü,

$$S\left[af(t)+bg(t)\right]=aS\left[f(t)\right]+b\left[g(t)\right], a,b\in\mathbb{R},$$

şeklinde lineerlik özelliğine sahiptir [15].

İspat:

$$S\left[af(t)+bg(t)\right]=\int_0^\infty e^{-t}\left[af(ut)+bg(ut)\right]dt=\int_0^\infty \left[e^{-t}a.f(ut)+e^{-t}b.g(ut)\right]dt$$

$$=\int_0^\infty\left[e^{-t}a.f(ut)\right]dt+\int_0^\infty\left[e^{-t}b.g(ut)\right]dt$$

$$=a\int_0^\infty\left[e^{-t}f(ut)\right]dt+b\int_0^\infty\left[e^{-t}g(ut)\right]dt$$

$$=a.S\left[f(t)\right]+b.S\left[g(t)\right]. \qquad \square$$

3.3.2 Teorem $U(x,t)$ fonksiyonunun birinci mertebeden türevinin Sumudu dönüşümü,

$$S\left[\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}\right]=\frac{1}{u}\left[S\left[U(x,t)\right]-U(x,0)\right].$$

özelliğine sahiptir [15].

İspat:

$$S\left[\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}\right]=\int_0^\infty \frac{1}{u}e^{\frac{-t}{u}}\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}dt=\lim_{p\to\infty}\left[\int_0^p \frac{1}{u}e^{\frac{-t}{u}}\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}dt\right]$$

$$=\lim_{p\to\infty}\left[\left(\frac{1}{u}e^{\frac{-t}{u}}U(x,t)\right)_0^p+\int_0^p \frac{1}{u^2}e^{\frac{-t}{u}}U(x,t)dt\right]$$

$$=\lim_{p\to\infty}\left[-\frac{1}{u}U(x,0)+\frac{1}{u}\left(\int_0^p \frac{1}{u}e^{\frac{-t}{u}}U(x,t)dt\right)\right]$$

$$=-\frac{1}{u}U(x,0)+\frac{1}{u}\left(\int_0^\infty \frac{1}{u}e^{\frac{-t}{u}}U(x,t)dt\right)$$

$$=-\frac{1}{u}\Big[S\big[U(x,t)\big]-U(x,0)\Big]. \qquad \square$$

3.3.3 Teorem $U(x,t)$ fonksiyonunun ikinci mertebeden türevinin Sumudu dönüşümü,

$$S\left[\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2}\right]=\frac{1}{u^2}\left[S\big[U(x,t)\big]-U(x,0)-u\frac{\partial U(x,0)}{\partial t}\right],$$

özelliğine sahiptir [15].

İspat:

$S\left[\frac{\partial\, U(x,t)}{\partial t}\right]=\frac{1}{u}\Big[S\big[U(x,t)\big]-U(x,0)\Big]=g(x,t)$ olduğunu biliyoruz. Buradan

$$S\left[\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2}\right]=S\left[\frac{\partial\, g(x,t)}{\partial t}\right]$$

$$=\frac{1}{u}\Big[S\big[g(x,t)\big]-g(x,0)\Big]$$

$$= \frac{1}{u}\left[\int_0^\infty \frac{1}{u} e^{-\frac{t}{u}} g(x,t)\,dt - g(x,0)\right]$$

$$= \frac{1}{u}\left[\frac{1}{u}\left[S\left[U(x,t)\right] - U(x,0)\right] - \frac{\partial U(x,0)}{\partial t}\right]$$

$$= \frac{1}{u^2}\left[S\left[U(x,t)\right] - U(x,0) - u\frac{\partial U(x,0)}{\partial t}\right],$$

kolaylıkla elde edilir. □

3.3.4 Teorem $G(u)$, $f(t)$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü olmak üzere $tf(t)$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü

$$S\left[tf(t)\right] = u\frac{d\left(uG(u)\right)}{du},$$

olur [15].

3.3.5 Teorem $G(u)$, $f(t)$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü, $G_k(u)$ da $G(u)$ fonksiyonunun u 'ya göre k. mertebeden türevi olsun. $t^n f(t)$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü

$$S\left[t^n f(t)\right] = u^n \sum_{k=0}^{n} a^n{}_k u^k G_k(u),$$

olur. Burada,

$$a_0^n = n!,\ a_n^n = 1,\ a_1^n = n!.n,\ a_{n-1}^n = n^2 \ \text{ ve } \ k = 2,3,...,n-2,$$

için $a_k^n = a_{k-1}^{n-1} + (n+k)a_k^{n-1}$ dir [15].

Bu tezde kullanılan bazı fonksiyonların Sumudu dönüşümleri Tablo 3.1 'de verilmiştir.

Tablo 3.1: Bazı fonksiyonların Sumudu dönüşümleri.

$f(t)$	$G(u)=S(f(t))$
1	1
t	u
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!},\ n=1,2,...$	u^{n-1}
$\frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)},\ n>0$	u^{n-1}
e^{at}	$\frac{1}{1-au}$
$\frac{\sin(at)}{a}$	$\frac{u}{1+a^2u^2}$
$\cos(at)$	$\frac{1}{1+a^2u^2}$
$S\left[\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}\right]$	$\frac{1}{u}\left[S\left[U(x,t)\right]-U(x,0)\right]$
$S\left[\frac{\partial^n U(x,t)}{\partial t^n}\right]$	$\frac{1}{u^n}\left[S\left[U(x,t)\right]-\sum_{k=0}^{n-1}u^k U(x,0)^{(k)}\right]$

3.4 Homotopi Pertürbasyon Sumudu Dönüşüm Metodu

Homotopi Pertürbasyon Sumudu dönüşüm metodu ile lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin yaklaşık ve kesin çözümleri elde edilir. Aşağıda genel formda ifade edilen lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemi başlangıç koşulları ile ele alalım [18].

$$DU(x,t)+RU(x,t)+NU(x,t)=g(x,t), \tag{3.28}$$

$$U(x,0)=h(x),\ \ U_t(x,0)=f(x). \tag{3.29}$$

Burada D ikinci mertebeden lineer diferansiyel operatör $\left(D=\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right)$, R mertebesi D ‘den küçük lineer diferansiyel operatör, N genel lineer olmayan operatör, $g(x,t)$ ise bir kaynak terimdir.

(3.28) denkleminin her iki tarafının Sumudu dönüşümü alınır ise,

$$S\left[DU(x,t)\right]+S\left[RU(x,t)\right]+S\left[NU(x,t)\right]=S\left[g(x,t)\right], \tag{3.30}$$

denklemi elde edilir. Buradan Sumudu dönüşüm yöntemi özelliklerinden,

$$\begin{aligned}&\frac{S\left[U(x,t)\right]-U(x,0)}{u^2}-\frac{U_t(x,t)}{u}\\&\qquad+S\left[RU(x,t)+NU(x,t)\right]=S\left[g(x,t)\right],\end{aligned} \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned}&\frac{S\left[U(x,t)\right]-h(x)}{u^2}-\frac{f(x)}{u}\\&\qquad+S\left[RU(x,t)+NU(x,t)\right]=S\left[g(x,t)\right],\end{aligned} \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned}&S\left[U(x,t)\right]-h(x)-uf(x)\\&\qquad+u^2S\left[RU(x,t)+NU(x,t)\right]=u^2S\left[g(x,t)\right],\end{aligned} \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned}&S\left[U(x,t)\right]=h(x)+uf(x)\\&\qquad-u^2S\left[RU(x,t)+NU(x,t)\right]+u^2S\left[g(x,t)\right]\end{aligned} \tag{3.34}$$

elde edilir.

Buradan (3.28) diferansiyel denkleminin $U(x,t)$ çözümünü elde edebilmek için her iki tarafın ters Sumudu dönüşümü uygulanır ise,.

$$U(x,t)=G(x,t)-S^{-1}\left[u^2S\left[RU(x,t)+NU(x,t)\right]\right], \tag{3.35}$$

$$G(x,t)=S^{-1}\left[h(x)+uf(x)+u^2S\left[g(x,t)\right]\right],$$

olmak üzere elde edilir.

(3.35) denklemde lineer olmayan terimlerin ters Sumudu dönüşümlerinin kolaylıkla alınabilmesi için Homotopi pertürbasyon metodu uygulanır. Bu amaçla

$$U(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}p^{n}U_{n}(x,t), \tag{3.36}$$

açılımı ve

$$NU(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}p^{n}H_{n}(U), \tag{3.37}$$

$$H_{n}(U_{0},U_{1},...,U_{n})=\frac{1}{n!}\frac{\partial^{n}}{\partial p^{n}}\left[N\left(\sum_{i=0}^{n}p^{i}U_{i}\right)\right]_{p=0},\quad n=0,1,2,..., \tag{3.38}$$

He polinomları ele alınır. (3.36) ve (3.37) eşitliklerini (3.35) denkleminde yerine yazarsak,

$$\sum_{n=0}^{\infty}p^{n}U_{n}(x,t)=G(x,t)-p\left(S^{-1}\left[u^{2}S\left[R\sum_{n=0}^{\infty}p^{n}U_{n}(x,t)+\sum_{n=0}^{\infty}p^{n}H_{n}(U)\right]\right]\right), \tag{3.39}$$

eşitliği elde edilir. Burada $U(x,t)$ çözümünün elde edilişinde Sumudu dönüşümü, Homotopi pertürbasyon metodu ve He polinomları kullanılmıştır.

(3.39) denkleminin her iki tarafındaki p 'nin eşit dereceli kuvvetleri birbirine özdeşlenir ise;

$$\begin{aligned}
p^{0}&:U_{0}(x,t)=G(x,t),\\
p^{1}&:U_{1}(x,t)=-S^{-1}\left[u^{2}S\left[RU_{0}(x,t)+H_{0}(U)\right]\right],\\
p^{2}&:U_{2}(x,t)=-S^{-1}\left[u^{2}S\left[RU_{1}(x,t)+H_{1}(U)\right]\right],\\
p^{3}&:U_{3}(x,t)=-S^{-1}\left[u^{2}S\left[RU_{2}(x,t)+H_{2}(U)\right]\right],\\
&\vdots
\end{aligned} \tag{3.40}$$

eşitlikleri kolaylıkla elde edilir.

Böylece ele alınan diferansiyel denklemin $U(x,t)$ çözümü (3.40) eşitliklerinin (3.36) eşitliğinde yerine yazılması ve $p \to 1$ için limitinin alınması ile

$$\begin{aligned} U(x,t) &= \lim_{p\to 1}\sum_{n=0}^{\infty} p^n U_n(x,t) \\ &= U_0(x,t) + U_1(x,t) + U_2(x,t) + U_3(x,t) + \cdots, \end{aligned} \tag{3.41}$$

formunda elde edilmiş olur.

4. HOMOTOPİ PERTÜRBASYON SUMUDU DÖNÜŞÜM METODUNUN UYGULAMALARI

Bu bölümde literatürde yer alan lineer veya lineer olmayan bazı kısmı diferansiyel denklemlerin Homotopi Pertürbasyon Sumudu dönüşüm metodu ile çözümleri araştırılacaktır.

4.1 Isı Tipi Denklem Modeline Homotopi Pertürbasyon Sumudu Dönüşüm Metodunun Uygulanması

Isı tipi homojen ve lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem,

$$U_t = \frac{1}{2} x^2 U_{xx}\,, \tag{4.1}$$

formunda,

$0 < x < 1$, $t > 0$, $U(0,t) = 0$, $U(1,t) = e^t$ sınır koşulları ve $U(x,0) = x^2$ başlangıç koşulu ile verilmiş olsun [21].

Tablo 3.1 'deki bilgiler kullanılarak (4.1) denklemin her iki tarafına Sumudu dönüşümü uygulanır ise

$$S[U_t] = S\left[\frac{1}{2} x^2 U_{xx}\right], \tag{4.2}$$

$$\frac{S\left[U(x,t) - U(x,0)\right]}{u} = S\left[\frac{1}{2} x^2 U_{xx}\right], \tag{4.3}$$

elde edilir. Buradan (4.3) denkleminden $S\left[U(x,t)\right]$ terimi çekildiğinde,

$$S\left[U(x,t)\right] = x^2 + uS\left[\frac{1}{2} x^2 U_{xx}\right], \tag{4.4}$$

eşitliği görülür.

Ele alınan kısmi diferansiyel denklemin $U(x,t)$ çözümünün elde edilebilmesi için (4.4) eşitliğinin her iki tarafına ters Sumudu dönüşümü uygulanırsa,

$$U(x,t)=x^2+S^{-1}\left[uS\left[\frac{1}{2}x^2U_{xx}\right]\right], \tag{4.5}$$

elde edilir. (4.5) denkleminin sağ tarafındaki ters Sumudu dönüşümünün alınabilmesi için Homotopi Pertürbasyon metodu, (3.36)-(3.38) eşitlikleri dikkate alınarak,

$$\sum_{n=0}^{\infty}p^nU_n(x,t)=x^2+pS^{-1}\left[uS\left[\sum_{n=0}^{\infty}p^nH_n\big(U(x,t)\big)\right]\right], \tag{4.6}$$

$$H_n(U_0,U_1,\ldots,U_n)=\frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial p^n}\left[N\left(\sum_{i=0}^{n}p^i\right)\right]_{p=0}, \tag{4.7}$$

$n=0,1,2,\ldots$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty}p^nU_n(x,t)=x^2+\frac{1}{2}px^2S^{-1}\left[uS\left[U_{xx}\right]\right], \tag{4.8}$$

yazılabilir. Buradan,

$$H_0=\frac{1}{0!}\frac{\partial^0}{\partial p^0}\left((U_0)_{xx}\right)=(U_0)_{xx}, \tag{4.9}$$

$$H_1=\frac{1}{1!}\frac{\partial^1}{\partial p^1}\left((U_0+pU_1)_{xx}\right)_{p=0}=(U_1)_{xx}, \tag{4.10}$$

$$H_2=\frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial p^2}\left((U_0+pU_1+p^2U_2)_{xx}\right)_{p=0}=(U_2)_{xx}, \tag{4.11}$$

$$H_3=\frac{1}{3!}\frac{\partial^3}{\partial p^3}\left((U_0+pU_1+p^2U_2+p^3U_3)_{xx}\right)_{p=0}=(U_3)_{xx}, \tag{4.12}$$

$$\vdots$$

elde edilir. Böylece (4.6)-(4.8) denklemleri ve (4.9)-(4.12) He polinomları yardımı ile,

$p=0$ için $\mathrm{U}_0(x,t)=x^2,$

$p=1$ için $\mathrm{U}_1(x,t)=2t\left(\frac{1}{2}x^2\right)=x^2t,$

$p=2$ için $\mathrm{U}_2(x,t)=\frac{1}{2}x^2\left(\frac{2t^2}{2!}\right)=\frac{1}{2!}x^2t^2,$

$p=3$ için $\mathrm{U}_3(x,t)=\frac{1}{2}x^2\left(\frac{2t^2}{3!}\right)=\frac{1}{3!}x^2t^2,$

$$\vdots$$

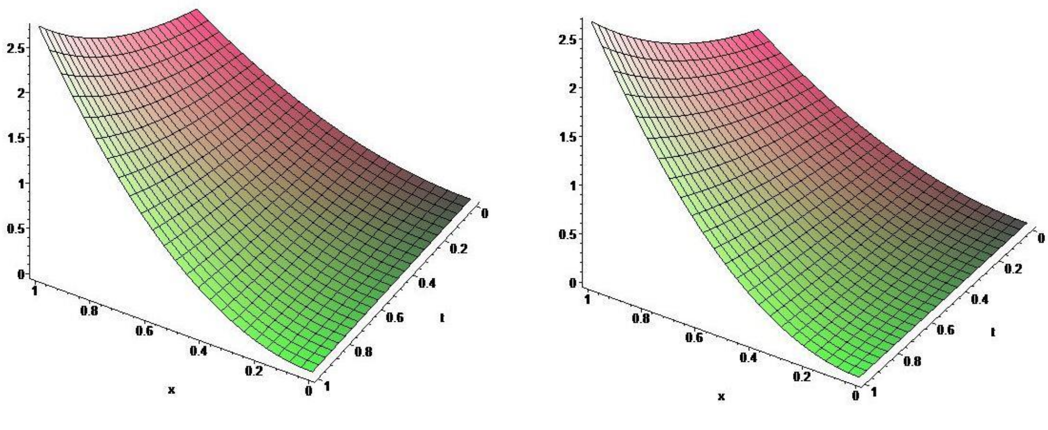
terimleri elde edilir. Böylece (4.1) Isı tipi denkleminin yaklaşık seri çözümü

$$U(x,t)=\lim_{p\to 1}\sum_{n=1}^{\infty}p^nU_n=U_0+U_1+U_2+...=x^2+x^2t+x^2\frac{t^2}{2!}+x^2\frac{t^3}{3!}+... \quad ,$$

formunda elde edilir. Bu seri çözümün kapalı formu ise

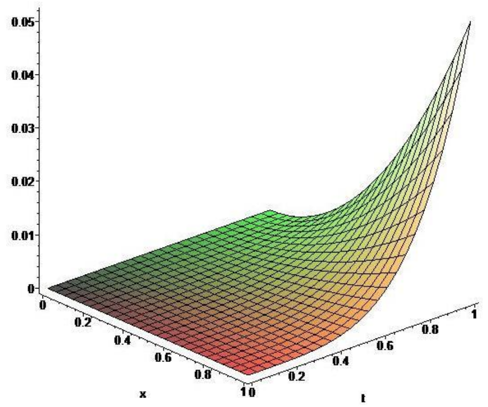
$$U(x,t)=x^2e^t,$$

dir.



(a) Analitik çözüm. (b) $n=4$ için yaklaşık çözüm.

Şekil 4.1: Isı tipi denklem modelinin $U(x,t)$ analitik çözümü ve Homotopi Pertürbasyon Sumudu dönüşüm metodu ile elde edilen yaklaşık çözümü ($n=4$).



Şekil 4.2: Isı tipi denklem modelinin analitik çözümü ile $n=4$ için yaklaşık çözümü arasındaki farkın grafiksel gösterimi.

4.2 Dispersive Denklemine Homotopi Pertürbasyon Sumudu Dönüşüm Metodunun Uygulanması

Dispersive kısmi diferansiyel denklemini,

$$U_t + U_{xxx} = 0, \tag{4.13}$$

formunda ve $U_0(x,0)=\cos(\pi x)$ başlangıç koşulu ile ele alalım [22].

Denklemin her iki tarafına Tablo 3.1 yardımı ile Sumudu dönüşümü metodu uygulanır ise,

$$S[U_t]+S[U_{xxx}]=0,$$

$$\frac{S[U]-U_0}{u}+S[U_{xxx}]=0,$$

$$S[U]-\cos(\pi x)+uS[U_{xxx}]=0, \tag{4.14}$$

elde edilir. Buradan (4.14) denkleminden $S[U(x,t)]$ terimi çekilip, her iki tarafın ters Sumudu dönüşümü alınır ise,

$$U(x,t)=\cos(\pi x)-S^{-1}\left[uS[U_{xxx}]\right], \tag{4.15}$$

çözümü elde edilir. (4.15) denkleminin sağ tarafındaki ters Sumudu dönüşümünün alınabilmesi için Homotopi Pertürbasyon metodunu ve (3.36)-(3.38) eşitliklerini dikkate alırsak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n U_n = \cos(\pi x) - pS^{-1}\left[uS\left[\sum_{n=0}^{\infty} p^n (U_n)_{xxx}\right]\right], \tag{4.16}$$

$$U_0 + p^1U_1 + p^2U_2 + p^3U_3 + \cdots = \cos(\pi x)$$
$$- pS^{-1}\left[uS\left[(U_0)_{xxx} + p^1(U_1)_{xxx} + p^2(U_2)_{xxx} + p^3(U_3)_{xxx} + \cdots\right]\right],$$

eşitliği bulunur. (4.16) eşitliğinin her iki tarafı dikkate alınarak p parametresinin kuvvetlerine göre düzenlenirse,

$$p^0 : U_0 = \cos(\pi x),$$

$$p^1 : U_1 = -S^{-1}\left[uS\left[(U_0)_{xxx}\right]\right],$$

$$S\left[(U_0)_{xxx}\right] = \pi^3 \sin(\pi x),$$

$$S^{-1}\left[u\pi^3 \sin(\pi x)\right] = \pi^3 \sin(\pi x).S^{-1}[u] = \frac{t}{1!}\pi^3 \sin(\pi x),$$

$$U_1 = -t\pi^3 \sin(\pi x),$$

$$p^2 : U_2 = -S^{-1}\left[uS\left[(U_1)_{xxx}\right]\right],$$

$$(U_1)_{xxx} = t\pi^6 \cos(\pi x),$$

$$S^{-1}\left[u^2\pi^6 \cos(\pi x)\right] = \frac{t^2}{2!}\pi^6 \cos(\pi x),$$

$$U_2 = -\frac{t^2}{2}\pi^6 \cos(\pi x),$$

$$p^3 : U_3 = -S^{-1}\left[uS\left[(U_2)_{xxx}\right]\right],$$

$$(U_2)_{xxx} = -\frac{t^2}{2}\pi^9 \sin(\pi x),$$

$$S\left[(U_2)_{xxx}\right] = -u^2\pi^9 \sin(\pi x),$$

$$S^{-1}\left[-u^3\pi^9 \sin(\pi x)\right] = \frac{t^3}{3!}\pi^9 \sin(\pi x),$$

$$U_3 = \frac{t^3}{6}\pi^9 \sin(\pi x),$$

$$\vdots$$

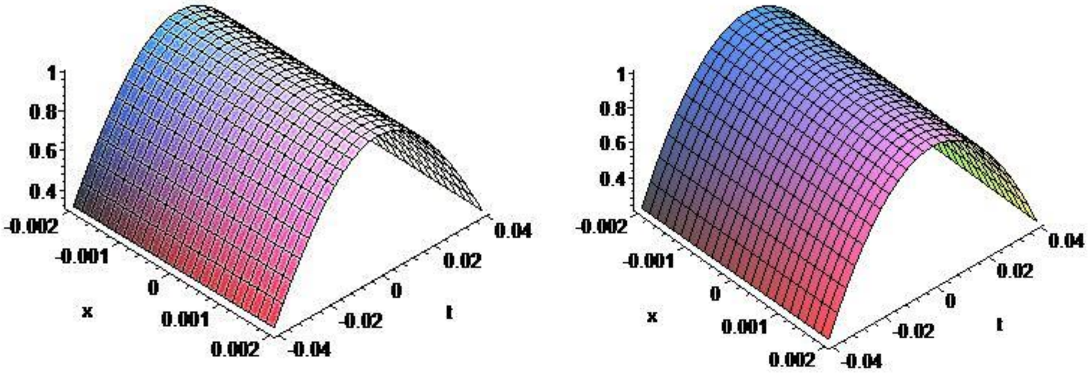
terimleri elde edilir. Böylece (4.13) Dispersive denkleminin yaklaşık çözümü

$$U(x,t) = \lim_{p\to 1}\sum_{n=1}^{\infty} p^u U_n = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + ...$$
$$= \cos(\pi x) - \pi^3 t \sin(\pi x) - \frac{1}{2}\pi^6 t^2 \cos(\pi x) + \frac{1}{6}\pi^9 t^3 \sin(\pi x) + \cdots,$$

formunda elde edilebilir. Bu seri çözüm dikkate alındığında analitik çözüm kapalı formda

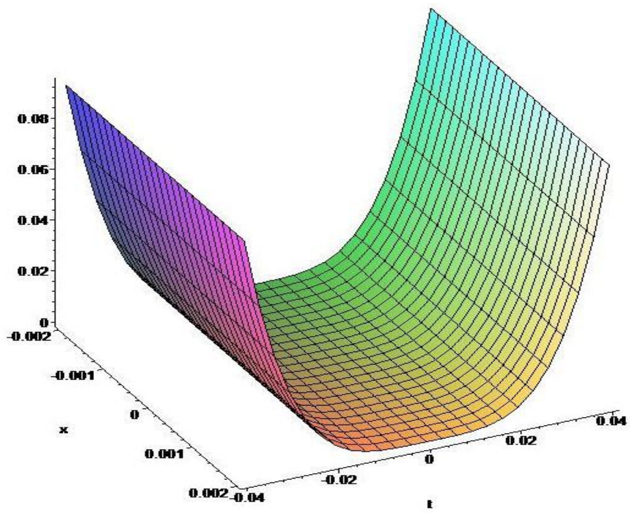
$$U(x,t) = \cos\left(\pi x + \pi^3 t\right),$$

elde edilir.



(a) Analitik çözüm. (b) $n = 4$ için yaklaşık çözüm.

Şekil 4.3: Dispersive denkleminin $U(x,t)$ analitik çözümü ve Homotopi Pertürbasyon Sumudu dönüşüm metodu ile elde edilen yaklaşık çözümü ($n = 4$).



Şekil 4.4: Dispersive denkleminin analitik çözümü ile $n = 4$ için yaklaşık çözümü arasındaki farkın grafiksel gösterimi.

4.3 Korteweg-de Vries K(2,2) Diferansiyel Denklemine Homotopi Pertürbasyon Sumudu Dönüşüm Metodunun Uygulanması

K(2,2) diferansiyel denklemini,

$$U_t + (U^2)_x + (U^2)_{xxx} = 0 \tag{4.17}$$

formunda ve $U(x,0) = x$ başlangıç koşulu ile ele alalım [23].

Denklemin her iki tarafına Tablo 3.1 yardımı ile Sumudu dönüşümü metodu uygulanır ise,

$$S[U_t] + S[(U^2)_x] + S[(U^2)_{xxx}] = 0$$

$$\frac{S[U] - U(x,0)}{u} + S\left[\left(U^2\right)_x\right] + S\left[\left(U^2\right)_{xxx}\right] = 0$$

$$S\left[U(x,t)\right] = x - uS\left[\left(U^2\right)_x\right] - uS\left[\left(U^2\right)_{xxx}\right] \tag{4.18}$$

elde edilir. Buradan (4.18) denkleminden $S\left[U(x,t)\right]$ terimi çekilip, her iki tarafın ters Sumudu dönüşümü alınır ise,

$$U(x,t) = x - S^{-1}\left[uS\left[\left(U^2\right)_x\right]\right] - S^{-1}\left[uS\left[\left(U^2\right)_{xxx}\right]\right] \tag{4.19}$$

çözümü elde edilir. (4.19) denkleminin sağ tarafındaki lineer olmayan terimlerin ters Sumudu dönüşümlerinin alınabilmesi için Homotopi Pertürbasyon metodunu, He polinomlarını ve (3.36)-(3.38) eşitliklerini dikkate alırsak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n U_n(x,t) = x - \underbrace{pS^{-1}\left[uS\left[\left(U^2\right)_x\right]\right]}_{\text{Birinci lineer olmayan terim}} - \underbrace{pS^{-1}\left[uS\left[\left(U^2\right)_{xxx}\right]\right]}_{\text{İkinci lineer olmayan terim}} \tag{4.20}$$

eşitliği elde edilir. (4.20) denkleminde yer alan birinci lineer olmayan terim için:

$$pS^{-1}\left[u.S\left[\sum_{n=0}^{\infty} p^n H_n(U)\right]\right]$$

$$H_{1n} = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial p^n}\left[N\left(\sum_{n=0}^{\infty} p^i U_i\right)\right]_{p=0}$$

$$N(U)=\left(U^2\right)_x$$

eşitliklerinden;

$$H_{1n}=\frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial p^n}\left[\left(U_0+pU_1+p^2U_2+p^3U_3+\cdots+p^nU_n\right)_x^2\right]_{p=0} \qquad (4.21)$$

H_{1n} denklemi elde edilir.

Benzer şekilde ikinci lineer olmayan terim için:

$$pS^{-1}\left[uS\left[\left(U^2\right)_{xxx}\right]\right]$$

için,

$$H_{2n}=\frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial p^n}\left[N\left(\sum_{n=0}^{\infty}p^iU_i\right)\right]_{p=0}$$

$$N(U)=\left(U^2\right)_{xxx}$$

$$H_{2n}=\frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial p^n}\left[\left(U_0+pU_1+p^2U_2+p^3U_3+\cdots+p^nU_n\right)_{xxx}^2\right]_{p=0} \qquad (4.22)$$

H_{2n} denklemi elde edilir.

Burada (4.21) ve (4.22) eşitlikleri dikkate alındığında H_n ‘lerin hesabı:

$\left(H_{1n}=\frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial p^n}\left[\left(U_0+pU_1+p^2U_2+p^3U_3+\cdots+p^nU_n\right)_x^2\right]_{p=0}\right)$ için:

$$H_{10}:2U_0U_{0x}$$

$$H_{11}:2\left(U_{0x}U_1+U_0U_{1x}\right)$$

$$H_{12}:2\left(U_{1x}U_1+U_{0x}U_2+U_0U_{2x}\right)$$

$$H_{13}:2\left(U_{0x}U_3+U_0U_{3x}+U_{1x}U_2+U_1U_{2x}\right)$$

$$\vdots$$

$\left(H_{2n}=\frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial p^n}\left[\left(U_0+pU_1+p^2U_2+p^3U_3+\cdots+p^nU_n\right)_{xxx}^2\right]_{p=0}\right)$ için:

$$H_{20}:6U_{0x}U_{0xx}+2U_0U_{0xxx}$$

$$H_{21}:2\left(U_{0xxx}U_1+3U_{0xx}U_{1x}+3U_{0x}U_{1xx}+U_0U_{1xxx}\right)$$

$$H_{22}:2\left(U_{1xxx}U_1+3U_{1xx}U_{1x}+U_{0xxx}U_2+3U_{0xx}U_{2x}+3U_{0x}U_{2xx}+U_0U_{2xxx}\right)$$

$$H_{23}:6\begin{pmatrix}U_{0xxx}U_3+3U_{0xx}U_{3x}+3U_{0x}U_{3xx}+U_0U_{3xxx}+U_{1xxx}U_2+3U_{1xx}U_{2x}\\ +3U_{1x}U_{2xx}+U_1U_{2xxx}\end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

eşitlikleri bulunur.

(4,20)-(4,22) denklemleri göz önünde alınarak p parametresinin kuvvetlerine göre düzenlenirse,

$$p^0:U_0=x$$

$$p^1:U_1=-S^{-1}\left[uS\left[2U_0U_{0x}\right]\right]-S^{-1}\left[uS\left[6U_{0x}U_{0xx}+2U_0U_{0xxx}\right]\right]$$

$$U_1=-S^{-1}\left[uS\left[2x\right]\right]=-S^{-1}\left[u2x\right]=-2xt$$

$$p^2:U_2=-S^{-1}\left[uS\left[H_1\right]\right]-S^{-1}\left[uS\left[H_1\right]\right]$$

$$U_2=-S^{-1}\left[uS\left[-4xt-4xt\right]\right]$$

$$=-S^{-1}\left[uS\left[-8xt\right]\right]$$

$$=8xS^{-1}\left[u^2\right]$$

$$=8x\frac{t^2}{2!}$$

$$=4xt^2$$

$$p^3:U_3=-S^{-1}\left[uS\left[H_2\right]\right]-S^{-1}\left[uS\left[H_2\right]\right]$$

$$=-S^{-1}\left[uS\left[24xt^2\right]\right]$$

$$=-24xS^{-1}\left[u2u^2\right]$$

$$=-48xS^{-1}\left(u^3\right)$$

$$= \frac{-48xt^3}{3!}$$

$$= -8xt^3$$

$$p^4 : U_4 = -S^{-1}\left[uS\left[H_{13}\right]\right] - S^{-1}\left[uS\left[H_{23}\right]\right]$$

$$= -S^{-1}\left[uS\left[-64xt^3\right]\right]$$

$$= 64xS^{-1}\left[u6u^3\right]$$

$$= 384xS^{-1}\left(u^4\right)$$

$$= \frac{384xt^4}{4!}$$

$$= 16xt^4$$

$$\vdots$$

terimleri elde edilir. Böylece (4.17) K(2,2) diferansiyel denkleminin yaklaşık çözümü,

$$U(x,t) = \lim_{p\to 1}\sum p^n U_n = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \cdots$$

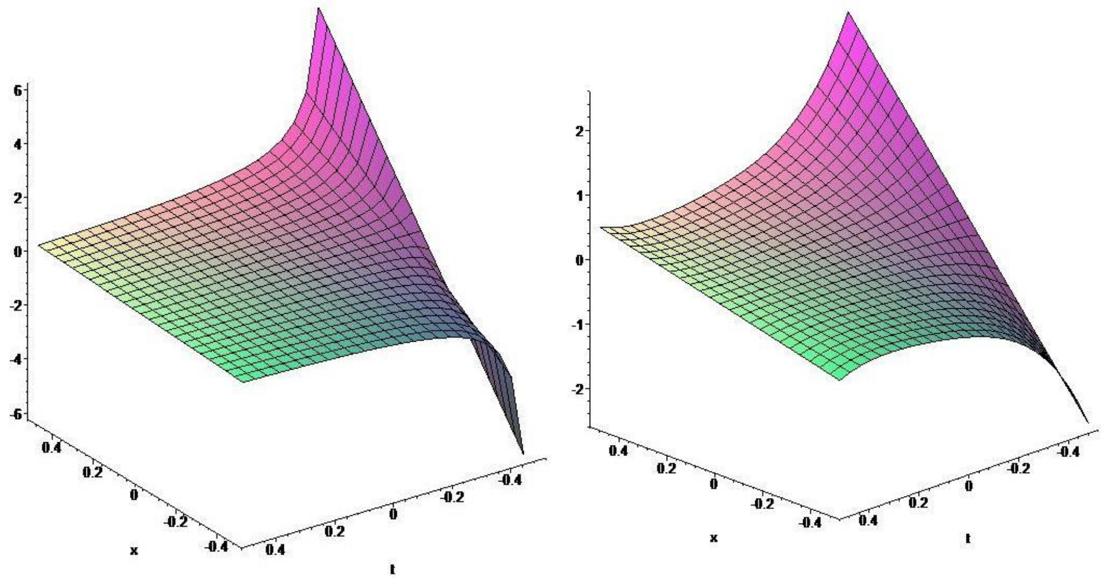
$$= x - 2xt + 8x\frac{t^2}{2!} - 48x\frac{t^3}{3!} + 384x\frac{t^4}{4!} + \cdots$$

$$= x\left(1 - 2t + 4t^2 - 8t^3 + 16t^4 - \cdots\right)$$

formunda elde edilebilir. Bu seri çözüm dikkate alındığında analitik çözüm kapalı formda

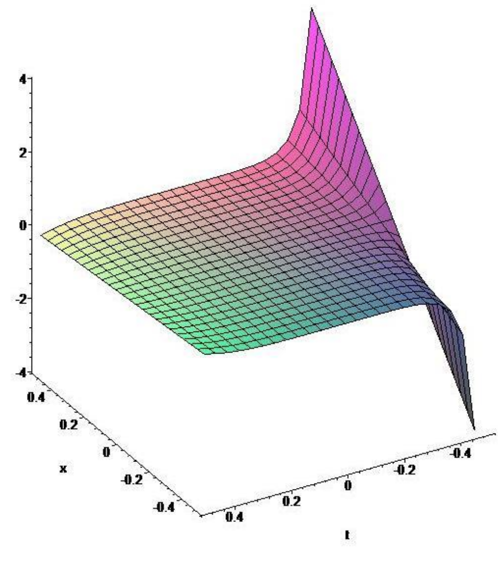
$$U(x,t) = \frac{x}{1+2t}$$

elde edilir.



(a) Analitik çözüm. (b) $n = 5$ için yaklaşık çözüm.

Şekil 4.5: Korteweg-de Vries (kdv) K(2,2) Diferansiyel denkleminin $U(x,t)$ analitik çözümü ve Homotopi Pertürbasyon Sumudu dönüşüm metodu ile elde edilen yaklaşık çözümü ($n = 5$).



Şekil 4.6: Korteweg-de Vries (kdv) K(2,2) Diferansiyel denkleminin analitik çözümü ile $n = 5$ için yaklaşık çözümü arasındaki farkın grafiksel gösterimi.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümüne alternatif bir metot olan Sumudu dönüşüm metodu ve özellikleri verildi. Sumudu dönüşüm metodu ile lineer ve lineer olmayan, belirli başlangıç ve sınır koşullarıyla birlikte verilen adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin analitik veya yaklaşık çözümleri elde edilebilir. Sumudu dönüşüm metodu, başlangıç koşullarıyla birlikte verilmiş olan diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini elde etmek için karmaşık hesaplamalara gerek kalmadan kullanılabilmektedir. Metod uygulanırken karşılaşılan lineer olmayan terimlerin ters Sumudu dönüşümlerinin alınabilmesi için He polinomları ve homotopi pertürbasyon metodu kullanılmıştır. Homotopi pertürbasyon metodu ile sumudu dönüşüm metodunun birleştirilerek birlikte kullanılması diğer metotlara kıyasla kolay ve hızlı bir şekilde analitik çözüm vermesi bakımından önemli bir yere sahiptir. Bu metot sayesinde ele alınan adi veya kısmi diferansiyel denklemlerin eğer mevcut ise analitik çözümlerinin $t=0$ anındaki Maclaurin seri açılımları elde edilmiş olur. Şekil 4.2, Şekil 4.4 ve Şekil 4.6 da görüldüğü gibi kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümleri ile yaklaşık çözümleri arasındaki fark $t=0$ değerinin komşuluğunda sıfıra çok yakın iken bu komşuluğun dışında farklılaşmalar gözlenmektedir. Tabi ki yaklaşık çözümdeki terim sayısı artırıldıkça yakınsama daha net görülmektedir. Bu sebepten dolayı homotopi pertürbasyon sumudu dönüşüm metodu, uygulamalı matematik, fizik ve mühendislik alanlarındaki problemlerin çözümlerini elde etmek ve yapısını anlamak için oldukça elverişli bir yöntemdir.

6. KAYNAKLAR

[1] He, J.H., "A New Approach to Nonlinear Partial Differential Equations", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2, 230-235, (1997).

[2] He, J.H., "Approximate Analytical Solution for Seepage Flow with Fractional Derivatives in Porous Media", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 167, 57-68, (1998).

[3] He, J.H., "Variational iteration method–a kind of non-linear analytical technique: some examples", *International Journal of Non-linear Mechanics*, 34(4), 699-708, (1999).

[4] Adomian, G., "A review of the decomposition method and some recent results for nonlinear equations", *Mathematical and Computer Modelling*, 13(7), 17–43, (1990).

[5] Watugala, G.K., "Sumudu Transform: A new integral transform to solve differential equations and control engineering problems", *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 24(1), 35-43, (1993).

[6] Weerakoon, S., "Application of Sumudu transform to partial differential equations", *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 25(2), 277–283, (1994).

[7] Watugala, G.K., "Sumudu transform—a new integral transform to solve differential equations and control engineering problems", *Mathematical Engineering in Industry*, 6(4), 319–329, (1998).

[8] Weerakoon, S., "Complex inversion formula for Sumudu transform", *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 29(4), 618–621, (1998).

[9] Deakin, M.A.B., "The Sumudu transform and the Laplace transform", *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 28(1), 159-160, (1997).

[10] Weerakoon, S., “The Sumudu transform and the Laplace transform–reply”, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 28(1), 160, (1997).

[11] Belgacem, F.B.M., Karaballi, A.A. ve Kalla, S.L., “Analytical investigations of the Sumudu transform and applications to integral production equations”, *Mathematical Problems in Engineering*, 3-4, 103–118, (2003).

[12] Watugala, G.K., “The Sumudu transform for functions of two variables”, *Mathematical Engineering in Industry*, 8(4), 293-302, (2002).

[13] Asiru, M.A., “Sumudu transform and the solution of integral equations of convolution type”, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 32(6), 906-910, (2001).

[14] Asiru, M.A., “Classroom note: Application of the Sumudu transform to discrete dynamic systems”, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 34(6), 944-949, (2003).

[15] Belgacem, F.B.M. ve Karaballi, A.A., “Sumudu transform fundamental properties investigations and applications”, *International Journal of Stochastic Analysis*, Article ID 91083, 23 pages (2006).

[16] Belgacem, F.B.M., “Introducing and analyzing deeper, Sumudu properties”, *Nonlinear Studies*, 13(1), 23, (2006).

[17] Gupta, V. G., Shrama B. ve Kılıçman, A. “A note on fractional Sumudu transform”, *Journal of Applied Mathematics*, Article ID 154189, 9 pages, (2010).

[18] Kumar, D., Singh, J. ve Sushila “Homotopy Perturbation Sumudu Transform Method for Nonlinear Equations”, *Adv. Theor. Appl. Mech.*, 4(4), 165- 175, (2011).

[19] Sezer, M, Daşçıoğlu A., *Diferansiyel denklemler I*, Bursa: Dora Yayınları 278-279, (2010).

[20] Koca, K., *Kısmi türevli denklemler*, Ankara: Gazi Kitapevi, 2-6, (2013).

[21] Ağırseven, D., “Bazı lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemlerin homotopi pertürbasyon ve homotopi metodları ile çözümlerinin analizi”, Doktora Tezi, *Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Matematik Anabilim Dalı, Edirne, (2009).

[22] Başkonuş, M., “Bazı lineer olmayan diferensiyel denklemlerin adomian ayrışım metodu ve homotopi pertürbasyon metodu ile sayısal çözümleri”, Yüksek Lisans Tezi, *Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Matematik Anabilim Dalı, Elazığ, (2010).

[23] Farshad, E., Amin, H., Farzad, E., Rohoallah, M., “An iterative method for solving partial differential equations and solution of Korteweg-de Vries equations for showing the capability of the iterative method”, *World Applied Programming*, 3(8), 320- 327, (2013).