T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SABİT NOKTA TEOREMLERİ VE ÇEŞİTLİ UYGULAMALARI

DOKTORA TEZİ

NİHAL TAŞ

BALIKESİR, EKİM - 2017

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SABİT NOKTA TEOREMLERİ VE ÇEŞİTLİ UYGULAMALARI

DOKTORA TEZİ

NİHAL TAŞ

Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Nihal YILMAZ ÖZGÜR (Tez Danışmanı)
Prof. Dr. Erdal EKİCİ
Prof. Dr. Özden KORUOĞLU
Doç. Dr. Bekir TANAY
Yrd. Doç. Dr. Fırat EVİRGEN

BALIKESİR, EKİM - 2017

KABUL VE ONAY SAYFASI

Nihal TAŞ tarafından hazırlanan "**SABİT NOKTA TEOREMLERİ VE ÇEŞİTLİ UYGULAMALARI**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 27.10.2017 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Prof. Dr. Nihal YILMAZ ÖZGÜR	....
Üye Prof. Dr. Erdal EKİCİ	....
Üye Prof. Dr. Özden KORUOĞLU	....
Üye Doç. Dr. Bekir TANAY	....
Üye Yrd. Doç. Dr. Fırat EVİRGEN	....

Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Doç. Dr. Necati ÖZDEMİR ....

ÖZET

SABİT NOKTA TEOREMLERİ VE ÇEŞİTLİ UYGULAMALARI
DOKTORA TEZİ
NİHAL TAŞ
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. NİHAL YILMAZ ÖZGÜR)

BALIKESİR, EKİM - 2017

Bu tezde, $S-$metrik uzaylar üzerinde yeni sabit nokta teoremleri elde edilmiştir. Elde edilen bu teoremler sayesinde iyi bilinen Rhoades, Nemytskii – Edelstein ve Ciric daralma koşulları genelleştirilmiştir. Ayrıca $S-$metrik uzay kavramından yararlanılarak normlu uzayların bir genellemesi olarak $S-$normlu uzay kavramı tanıtılmış ve çeşitli özellikleri incelenmiştir. $S-$metrik uzaylar üzerinde sabit nokta teorisinin kompleks değerli $S-$metrik uzaylara ve diferansiyel denklemlere uygulaması verilmiştir. Son olarak $S-$metrik uzaylarda sabit nokta teorisi farklı bir bakış açısıyla sabit çember teorisine genelleştirilmiştir.

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş bölümüdür.

İkinci bölümde, çalışma boyunca kullanılacak temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, $S-$metrik uzaylarda klasik Rhoades koşulu çeşitli şekillerde genelleştirilmiş, aralarındaki ilişkiler incelenmiş ve bu koşulları sağlayan fonksiyonların sabit nokta teoremleri elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde, yeni bir genelleştirilmiş uzay olarak $S-$normlu uzay kavramı tanıtılmış, çeşitli özellikleri incelenmiş ve bir sabit nokta teoremi elde edilmiştir.

Beşinci bölümde, kompleks değerli $S-$metrik uzaylar üzerinde Rhoades koşulunun bir uygulaması verilmiştir. Ayrıca $S-$metrik uzaylar için "Picard Teoremi" tanımlanarak diferansiyel denklemler için Banach sabit nokta teorisinin bir uygulaması bulunmuştur.

Altıncı bölümde, $S-$metrik uzaylarda sabit çember kavramı tanıtılarak, verilen bir fonksiyonun sabit çemberinin var olabilmesi için gerekli koşullar araştırılmıştır. Elde edilen sabit çember teoremleri için teklik koşulları incelenmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: $S-$metrik, $S-$norm, Rhoades, Nemytskii – Edelstein, Ciric, sabit nokta, kompleks değerli $S-$metrik, sabit çember.

ABSTRACT

FIXED POINT THEOREMS AND THEIR VARIOUS APPLICATIONS
PH.D THESIS
NİHAL TAŞ
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS

(SUPERVISOR: PROF. DR. NİHAL YILMAZ ÖZGÜR)

BALIKESİR, OCTOBER 2017

In this thesis, new fixed point theorems are obtained on $S-$metric spaces. The well-known Rhoades, Nemytskii – Edelstein and Ciric contractive conditions are generalized by means of the obtained theorems. Also using the notion of an $S-$ metric space, the notion of an $S-$ normed space is introduced as a generalization of normed spaces and various properties of $S-$normed spaces are investigated. Some applications of the fixed point theory on $S-$metric spaces are given to complex valued $S-$metric spaces and differential equations. Finally, the fixed point theory is generalized to fixed circle theory on $S-$metric spaces as a different direction of generalization.

This thesis consists of six chapters.

The first chapter is the introduction.

In the second chapter, basic definitions and theorems which will be used throughout the study are given.

In the third chapter, the classical Rhoades condition is generalized on $S-$ metric spaces in various forms. Relationships among these new conditions are investigated and some fixed point theorems of self – mappings satisfying these conditions are obtained on $S-$metric spaces.

In the fourth chapter, the notion of an $S-$normed space is introduced as a new generalized space. Various properties of $S-$normed spaces are investigated and a fixed point theorem is obtained.

In the fifth chapter, an application of generalized Rhoades conditions is given on complex valued $S-$metric spaces. Also an application of the Banach fixed point theory is obtained by defining “Picard Theorem” for differential equations on $S-$metric spaces.

In the sixth chapter, the notion of fixed circle is introduced on $S-$metric spaces and the necessary conditions are investigated for the existence of a fixed circle of a given self – mapping. The uniqueness conditions are also examined for the obtained fixed circle theorems.

KEYWORDS: $S-$metric, $S-$normed, Rhoades, Nemytskii – Edelstein, Ciric, fixed point, complex valued $S-$metric, fixed circle.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

(X,d)	:	Metrik uzay
$\{x_n\}$	:	Dizi
$(X,\|.\|)$	:	Normlu uzay
(X,S)	:	$S-$metrik uzay
$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	:	Sıfır dahil pozitif reel sayılar kümesi
$B_S(x,r)$	:	$S-$metrik uzaylarda açık yuvar
$B_S[x,r]$	:	$S-$metrik uzaylarda kapalı yuvar
$P(X)$	:	X kümesinin kuvvet kümesi
S_d	:	Metrik tarafından üretilen $S-$metrik
d_S	:	$S-$metrik tarafından üretilen metrik
$\precsim$	:	Kısmi sıralama bağıntısı
(X,S_C)	:	Kompleks değerli $S-$metrik uzay
$C_{x_0,r}$	:	Metrik uzaylarda çember
$C^S_{x_0,r}$	:	$S-$metrik uzaylarda çember
$(X,\|.,.,.\|)$	:	$S-$normlu uzay
$conv(A)$	:	A kümesinin konveks örtüsü
A'	:	A kümesinin yığılma noktalarının kümesi

ÖNSÖZ

Bu çalışmada, $S-$metrik uzaylar üzerinde çeşitli sabit nokta teoremleri elde edilerek literatürde iyi bilinen bazı klasik sabit nokta sonuçları genelleştirilmiştir. Sabit nokta teorisi geometrik bir yorumla sabit çember teorisine taşınmıştır. Elde edilen sonuçlar verilen örneklerle desteklenmiştir.

Doktora tez konumu veren ve bana tüm çalışmalarım boyunca yol gösteren, destek olan ve hiçbir zaman sevgisini anlayışını, yardımlarını, bilgisini, deneyimlerini esirgemeyen çok sevdiğim, saydığım ve değer verdiğim saygıdeğer hocam ve danışmanım Sayın Prof. Dr. Nihal YILMAZ ÖZGÜR’e en içten sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Doktora süresince vermiş oldukları katkılardan dolayı tez izleme komitesindeki saygıdeğer hocalarıma teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca her konuda tavsiyelerinden faydalandığım Sayın Prof. Dr. Cihan ÖZGÜR’e, her konuda desteklerini esirgemeyen araştırma görevlisi arkadaşlarıma ve sevgili arkadaşım Dr. Fatma KARACA’ya teşekkürlerimi sunarım.

Lisansüstü eğitimim boyunca maddi ve manevi olarak desteğini hiçbir zaman kaybetmediğim gücüme güç katan sevgili eşim Murat TAŞ’a sonsuz teşekkürler ederim.

Tüm hayatım boyunca desteklerini esirgemeyen, her zaman yanımda olan, beni daha da güçlendiren canım annem, babam ve biricik kardeşime sonsuz teşekkürler sunarım.

Son olarak, doktora eğitimim boyunca maddi desteğinden dolayı “2211-E Doğrudan Yurt İçi Doktora Burs Programı” na kayıtlı bursiyer olduğum TÜBİTAK – BİDEB’e saygılarımla teşekkürü bir borç bilirim.

1. GİRİŞ

“Sabit Nokta Teorisi” birçok bilimsel çalışmada adından çok söz ettiren önemli bir araştırma konusu olmuştur. Özellikle bu teorinin, matematiğin kompleks analiz, diferansiyel denklemler, integral denklemler gibi çeşitli çalışma alanlarında ve mühendisliğin yapay sinir ağları gibi önemli araştırma konularında uygulamaları mevcuttur.

Stefan Banach zamanından beri sabit nokta teorisi farklı bakış açılarıyla çalışılmaya devam edilmektedir. İlk olarak, bu teori 1922 yılında daralma fonksiyonu kavramı kullanılarak tam metrik uzaylar üzerinde elde edilen “Banach Daralma Prensibi” ile başlamıştır [1]. Daha sonra farklı metotlar kullanılarak bu prensip genelleştirilmiştir. Bu metotlardan bir tanesi kullanılan daralma koşulunun değiştirilmesidir. Bu tarz çalışma örneklerine [2-6] numaralı kaynaklardan ulaşılabilir. Örneğin, 1977 yılında Rhoades çeşitli daralma fonksiyonlarının tanımlarını vererek aralarındaki ilişkiyi incelemiş ve bu daralma fonksiyonları yardımıyla bazı sabit nokta teoremleri elde etmiştir [5]. Bu amaç için kullanılan bir başka metot da kullanılan metrik uzayın genelleştirilmesidir. Bu sebeple çeşitli genelleştirilmiş metrik uzaylar üzerinde yapılan sabit nokta çalışmaları [7-16] numaralı kaynaklarda verilmiştir. Örneğin, 2012 yılında Sedghi ve arkadaşları tarafından üç boyutlu tanım kümesi üzerinde $S-$ metrik uzay kavramı metrik uzayların bir genellemesi olarak tanıtılmıştır [10]. Son zamanlarda ise bilinen sabit nokta teoremlerine farklı bir bakış açısı kazandırılarak sabit çember teoremleri elde edilmiş ve bir fonksiyonunun sabit çemberinin varlık ve teklik koşulları araştırılmıştır [17]. Örneğin, 2017 yılında Özgür ve Taş herhangi bir metrik uzay üzerinde sabit çember kavramını tanıtıp, Caristi tarafından [18] numaralı kaynakta verilen sabit nokta teoremindeki

$$d(x,Tx) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)$$

eşitsizliğini kullanarak sabit çember teoremleri elde etmişlerdir [17].

Bu çalışmada metrik uzayların önemli genelleştirilmelerinden biri olan $S-$ metrik uzaylar üzerinde topolojik kavramların da kullanılmasıyla yeni sabit nokta teoremleri elde edilmiştir. $S-$ metrik uzay kavramı yardımıyla $S-$ normlu uzay kavramı verilip bazı özellikleri incelenmiştir. $S-$ metrik uzaylar üzerinde sabit nokta teorisinin birer uygulaması olarak kompleks değerli $S-$ metrik uzaylara ve diferansiyel denklemlerin çözümlerine birer uygulama elde edilmiştir. Son olarak $S-$ metrik uzaylar üzerinde sabit nokta teorisi farklı bir yorumla sabit çember teorisine genelleştirilmiştir.

Bu çalışma, giriş bölümüyle beraber altı ana bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünde sabit nokta teoremlerinin hangi metotlarla çalışıldığına dair kısaca değinilmiş ve literatür yardımıyla da çalışmalar örneklendirilmiştir. Ayrıca çalışmanın içeriği ile ilgili bazı bilgiler verilmiştir.

Çalışmanın ikinci bölümünde, çalışma boyunca kullanılacak bazı temel kavramlara yer verilmiştir. Özellikle metrik uzaylar, $S-$metrik uzaylar ve kompleks değerli $S-$ metrik uzaylar üzerinde çalışılmış bazı tanım ve teoremler üzerinde durulmuştur.

Çalışmanın üçüncü bölümünde, metrik uzaylar üzerinde tanımlanmış olan $(R25)$ Rhoades koşulu dikkate alınarak $S-$metrik uzaylar üzerinde bu koşul $(S25)$ koşuluna genelleştirilmiş ve $(S25)$ koşulunun da $(S50)$, $(S75)$, $(S100)$ ve $(S125)$ gibi farklı genellemeleri elde edilmiştir. Daha sonra topolojik kavramlardan da yararlanarak $(S25)$ koşulunu ve genelleştirmelerini sağlayan bir fonksiyonun sabit noktasının var olabilmesi için çeşitli şartlar araştırılmıştır. Bu sayede metrik uzaylar üzerinde iyi bilinen Rhoades koşulunun yanı sıra Nemytskii – Edelstein ve Ciric sabit nokta sonuçları da genelleştirilmiştir.

Çalışmanın dördüncü bölümünde, $S-$metrik uzay kavramı kullanılarak yeni bir uzay olarak $S-$ normlu uzay kavramı tanıtılmıştır. Bu uzayın bazı temel özellikleri incelenerek, $S-$ metrik uzay ile arasındaki ilişki verilmiştir. Ayrıca normlu uzaylar üzerinde tanımlı olan $(NR25)$ Rhoades koşulu da bu uzayda $(NS25)$ koşuluna genelleştirilmiştir. Bu genelleştirilmiş koşul kullanılarak $S-$ normlu uzaylar üzerinde yeni bir sabit nokta teoremi elde edilmiştir.

Çalışmanın beşinci bölümünde, ilk olarak kompleks değerli $S-$ metrik uzaylar üzerinde Rhoades koşulunun bir uygulaması elde edilmiştir. Bu uygulama sayesinde klasik Nemytskii – Edelstein ve Ciric sabit nokta sonuçları bir kez daha farklı bir bakış açısıyla genelleştirilmiştir. Daha sonra $S-$metrik uzaylar üzerinde Picard Teoremi tanımlanarak $S-$metrik uzay üzerinde tanımlı olan Banach sabit nokta teoreminin diferansiyel denklemlere bir uygulaması elde edilmiştir.

Çalışmanın son bölümünde ise $S-$metrik uzaylarda sabit nokta teorisine geometrik bir yorum yapılarak bu teori sabit çember teorisine genelleştirilmiştir. Bir fonksiyonun sabit çemberinin var olabilmesi için gerekli koşullar araştırılmış ve sabit çemberin tekliği uygun koşullar altında incelenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde diğer bölümlerde kullanılacak olan temel tanımlar ve teoremler verilecektir.

2.1 Metrik Uzaylar ve Bazı Sabit Nokta Teoremleri

2.1.1 Tanım. X boştan farklı bir küme olsun. $d : X \times X \to [0,\infty)$ fonksiyonu her $x, y \in X$ için

(M1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
(M2) $d(x, y) = d(y, x)$ (simetri),
(M3) $d(x, y) \le d(x, z) + d(z, y)$ (üçgen eşitsizliği)

şartlarını sağlıyorsa d fonksiyonuna X kümesi üzerinde bir metrik ve (X,d) ikilisine de bir metrik uzay denir [19-20].

2.1.2 Tanım. (X,d) bir metrik uzay, $x \in X$ ve $\{x_n\}$ bu uzayda bir dizi olsun. Eğer verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $n \ge n_0$ şeklindeki her bir n doğal sayısı için

$$d(x_n, x) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı var ise $\{x_n\}$ dizisine yakınsaktır denir. Ayrıca x noktasına da bu dizinin limiti denir [20].

2.1.3 Tanım. (X,d) bir metrik uzay ve $\{x_n\}$ bu uzayda bir dizi olsun. Verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n, m \ge n_0$ için

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı var ise $\{x_n\}$ dizisine bir Cauchy dizisi denir [20].

2.1.4 Tanım. (X,d) bir metrik uzay olsun. X uzayındaki her bir Cauchy dizisi yakınsak ise (X,d) metrik uzayına tam metrik uzay denir [20].

2.1.5 Tanım. X boş olmayan bir küme ve $T:X\to X$ bir fonksiyon olsun.

$$Tx = x$$

eşitliğini sağlayan $x\in X$ noktasına T fonksiyonunun bir sabit noktası denir [20-21].

2.1.6 Tanım. (X,d) bir metrik uzay ve $T:X\to X$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x,y\in X$ için

$$d(Tx,Ty)\le \alpha d(x,y)$$

olacak şekilde $0<\alpha<1$ sabiti var ise T fonksiyonuna bir daralma veya büzülme fonksiyonu denir [1, 22].

2.1.7 Teorem. (X,d) bir tam metrik uzay ve $T:X\to X$ bir daralma fonksiyonu olsun. O zaman

1) T fonksiyonunun bir ve yalnız bir sabit $x\in X$ noktası vardır,

2) Herhangi bir $x_0\in X$ noktası için $\{T^n x_0\}$ iterasyon dizisi T fonksiyonunun bu sabit noktasına yakınsar [1, 22].

2.1.8 Teorem. (X,d) kompakt bir metrik uzay ve $T:X\to X$ her $x,y\in X\left(x\ne y\right)$ için

$$d(Tx,Ty)< d(x,y)$$

koşulunu sağlayan bir fonksiyon olsun. O zaman T fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır [23-24].

2.1.9 Tanım. (X,d) bir metrik uzay ve $T:X\to X$ bir fonksiyon olsun. T fonksiyonunun bir hemen hemen – daralma olması için gerekli ve yeterli koşul bir $q<1$ ve $x,y\in X$ için

$$d(Tx,Ty) \le q\max\left\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty), d(x,Ty), d(y,Tx)\right\}$$

olmasıdır [3].

2.1.10 Teorem. (X,d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x \in X$ için

$$d(x,Tx) \le \varphi(x) - \varphi(Tx)$$

olacak şekilde bir alttan yarı sürekli $\varphi: X \to [0,\infty)$ fonksiyonu var ise T fonksiyonunun bir sabit noktası vardır [18].

[5] numaralı kaynakta, Rhoades çeşitli daralma fonksiyonlarının karşılaştırmasını yaparak yeni sabit nokta teoremleri elde etmiştir.

2.1.11 Tanım. (X,d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir fonksiyon olsun.

(*R25*) Herhangi $x, y \in X, x \ne y$ için

$$d(Tx,Ty) < \max\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty), d(x,Ty), d(y,Tx)\}$$

dir.

(*R50*) Herhangi $x, y \in X, x \ne y$ için

$$d(T^p x, T^p y) < \max\{d(x,y), d(x,T^p x), d(y,T^p y), d(x,T^p y), d(y,T^p x)\}$$

olacak şekilde bir p pozitif tamsayısı vardır.

(*R75*) Herhangi $x, y \in X, x \ne y$ için

$$d(T^p x, T^q y) < \max\{d(x,y), d(x,T^p x), d(y,T^q y), d(x,T^q y), d(y,T^p x)\}$$

olacak şekilde bir p, q pozitif tamsayıları vardır.

(*R100*) $x \in X$ verilsin. Her $y \in X, x \ne y$ için

$$d(T^{p(x)}x, T^{p(x)}y) < \max\left\{\begin{matrix} d(x,y), d(x,T^{p(x)}x), d(y,T^{p(x)}y), \\ d(x,T^{p(x)}y), d(y,T^{p(x)}x) \end{matrix}\right\}$$

olacak şekilde bir $p(x)$ pozitif tamsayısı vardır.

(*R125*) Herhangi verilen $x, y \in X, x \neq y$ için

$$d(T^{p(x,y)}x, T^{p(x,y)}y) < \max\left\{\begin{matrix} d(x,y), d(x,T^{p(x,y)}x), d(y,T^{p(x,y)}y), \\ d(x,T^{p(x,y)}y), d(y,T^{p(x,y)}x) \end{matrix}\right\}$$

olacak şekilde bir $p(x, y)$ pozitif tamsayısı vardır [5, 25].

Eğer bir T fonksiyonu (*R25*) koşulunu sağlıyorsa T fonksiyonuna bir Rhoades fonksiyonu denir.

2.1.12 Tanım. (X,d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir fonksiyon olsun. Eğer herhangi $x \in X$ ve $T^i x \neq T^j x,\ 0 \leq i < j \leq n-1$ koşulunu sağlayan pozitif $n \geq 2$ tamsayısı için

$$d(T^n x, T^i x) < \max_{1 \leq j \leq n}\{d(T^j x, x)\}, i = 1, 2, ..., n-1$$

eşitsizliği sağlanıyorsa T fonksiyonuna bir $C-$ fonksiyon denir [26].

2.1.13 Sonuç. Her Rhoades fonksiyonu bir $C-$ fonksiyondur, fakat tersi her zaman doğru değildir [26].

2.1.14 Sonuç. (X,d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir Rhoades fonksiyonu olsun. O zaman T fonksiyonunun X de bir sabit noktaya sahip olması için gerekli ve yeterli koşul

$$T^m x = T^n x,\ m > n \geq 0$$

olacak şekilde m, n tamsayıları ve bir $x \in X$ noktasının var olmasıdır [26].

2.1.15 Tanım. (X,d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir fonksiyon olsun. Eğer herhangi $x \in X$ ve $T^i x \neq T^j x,\ 0 \le i < j \le n-1$ koşulunu sağlayan pozitif $n \ge 2$ tamsayısı için

$$d(T^n x, T^i x) < \max\{d(T^p x, T^q x) : 0 \le p < q \le n\}, i = 1, 2, ..., n-1$$

eşitsizliği sağlanıyorsa T fonksiyonuna bir $L-$ fonksiyon denir [27].

2.1.16 Tanım. (X,d) bir metrik uzay, $T: X \to X$ bir fonksiyon ve $x \in X$ olsun. $T^n x = x$ olacak şekilde bir pozitif n tamsayısı varsa x noktasına T fonksiyonunun bir periyodik noktası denir. $T^n x = x$ eşitliğini sağlayan en küçük pozitif n tamsayısına da x noktasının periyodik indeksi denir [25].

2.2 Normlu Uzaylar ve Bazı Temel Kavramlar

2.2.1 Tanım. X bir reel vektör uzayı olsun. $\|.\|: X \to \mathbb{R}$ reel değerli fonksiyonu

(N1) Her $x \in X$ için $\|x\| \ge 0$ dır.

(N2) Her $x \in X$ için $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ dır.

(N3) Her $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $x \in X$ için $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$,

(N4) Her $x, y \in X$ için $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$

şartlarını sağlıyorsa $\|.\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm ve $(X, \|.\|)$ ikilisine de bir normlu uzay denir [28].

Her normlu uzay bir metrik uzaydır. Gerçekten, her $x, y \in X$ için

$$d(x,y) = \|x - y\| \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanan d fonksiyonu X kümesi üzerinde bir metriktir.

(2.1) eşitliğinde tanımlı olan metriğe norm tarafından üretilen metrik denir.

$(X,\|.\|)$ normlu uzayında Cauchy dizisi tanımında " $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ " yerine "$\|x_n - x_m\| < \varepsilon$" yazılır.

Eğer $(X,\|.\|)$ normlu uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsak ise X normlu uzayına Banach uzayı denir.

Her metrik bir norm tarafından üretilemez. Örneğin, ayrık metrik bir norm tarafından üretilemeyen bir metriktir.

Bir X normlu uzayı üzerinde bir norm tarafından üretilen metrik her $x, y, z, a \in X$ ve λ sabiti için aşağıdaki koşulları sağlar [28]:

a) $d(x+a, y+a) = d(x, y)$,
b) $d(\lambda x, \lambda y) = d(x, y)$.

Tersine olarak eğer X vektör uzayı üzerindeki bir d metriği (a) ve (b) koşullarını sağlıyorsa o zaman

$$\|x\| = d(x,0),$$

fonksiyonu X üzerinde bir norm tanımlar. Bu norm tarafından d metriği üretilir. Gerçekten, (a) şıkkından

$$d(x-y,0) = d(x-y, y-y) = d(x,y) = \|x-y\|$$

olduğu elde edilir.

2.2.2 Tanım. X bir reel vektör uzayı olsun. $\|.,.,.\|: X \times X \times X \to \mathbb{R}$ reel değerli fonksiyonu

(NG1) $\|x, y, z\| \geq 0$ ve $\|x, y, z\| = 0 \Leftrightarrow x = y = z = 0$,

(NG2) $\|x, y, z\|$, x, y, z nin permütasyonları altında sabit,

(NG3) Her $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $x, y, z \in X$ için $\|\lambda x, \lambda y, \lambda z\| = |\lambda| \|x, y, z\|$,

(NG4) Her $x, y, z, x', y', z' \in X$ için

$$\|x+x', y+y', z+z'\| \leq \|x, y, z\| + \|x', y', z'\|,$$

(NG5) Her $x, y, z \in X$ için $\|x, y, z\| \geq \|x+y, 0, z\|$

şartlarını sağlıyorsa $\|.,.,.\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir $G-$ norm ve $\left(X, \|.,.,.\|\right)$ ikilisine de $G-$ normlu uzay denir [29].

2.2.3 Yardımcı Teorem. X bir Banach uzayı olsun. O zaman X kümesinin yansıyan olması için gerekli ve yeterli koşul X kümesinin boştan farklı, sınırlı, kapalı ve konveks alt kümelerinin herhangi azalan $\{K_n\}$ dizisi için

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$$

olmasıdır [30].

2.2.4 Tanım. $\left(X, \|.\|\right)$ bir Banach uzayı ve $T : X \to X$ bir fonksiyon olsun. (*NR25*) daralma koşulu

(*NR25*) Herhangi $x, y \in X, x \neq y$ için

$$\|Tx - Ty\| < \max\left\{\|x - y\|, \|x - Tx\|, \|y - Ty\|, \|x - Ty\|, \|y - Tx\|\right\}$$

şeklinde tanımlıdır [31].

X bir Banach uzayı ve A kümesi X uzayının konveks bir alt kümesi olsun. $\delta(A) > 0$ özelliğine sahip A kümesinin her sınırlı ve konveks alt kümesi en az bir çapsal olmayan noktaya sahip ise o zaman A kümesine normal yapıya sahiptir denir [31].

2.2.5 Teorem. X bir yansıyan Banach uzayı ve A, X kümesinin boştan farklı, kapalı, sınırlı, konveks ve normal yapıya sahip bir alt kümesi olsun. Eğer $T : A \to A$, (*NR25*) koşulunu sağlayan sürekli bir fonksiyon ise o zaman T fonksiyonunun A alt kümesinde bir tek sabit noktası vardır [31].

2.3 S – Metrik Uzaylar

2.3.1 Tanım. X boştan farklı bir küme olsun. $S : X \times X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonu her $x, y, z, a \in X$ için

(S1) $S(x,y,z)=0 \Leftrightarrow x=y=z,$

(S2) $S(x,y,z)\leq S(x,x,a)+S(y,y,a)+S(z,z,a)$

şartlarını sağlıyorsa S fonksiyonuna X kümesi üzerinde bir $S-$ metrik denir. (X,S) ikilisine de $S-$ metrik uzay denir [10].

2.3.2 Örnek. $X=\mathbb{R}$ olsun. Her $x,y,z\in\mathbb{R}$ için

$$S(x,y,z)=|x-z|+|y-z|$$

şeklinde tanımlı $S: X\times X\times X \to [0,\infty)$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde bir $S-$metriktir. Bu $S-$metriğe alışılmış $S-$metrik denir [11].

2.3.3 Tanım. (X,S) bir $S-$metrik uzay olsun ve $\{x_n\}\subset X$ bu uzayda bir dizi olsun.

1) X kümesindeki bir $\{x_n\}$ dizisinin x noktasına yakınsaması için gerekli ve yeterli koşul $n\to\infty$ iken $S(x_n,x_n,x)\to 0$ olmasıdır. Yani herhangi verilen $\varepsilon>0$ sayısı ve her $n\geq n_0$ için

$$S(x_n,x_n,x)<\varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0\in\mathbb{N}$ vardır ve $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ ile gösterilir.

2) Herhangi verilen $\varepsilon>0$ sayısı ve her $n,m\geq n_0$ için

$$S(x_n,x_n,x_m)<\varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0\in\mathbb{N}$ varsa X kümesindeki $\{x_n\}$ dizisine bir Cauchy dizisi denir.

3) (X,S) $S-$metrik uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsak ise (X,S) $S-$metrik uzayına tamdır denir [10].

2.3.4 Tanım. (X,S) bir $S-$metrik uzay ve $A\subset X$ olsun. Her $x,y\in A$ için $S(x,x,y)<r$ olacak şekilde bir $r>0$ sayısı varsa A kümesine $S-$sınırlı denir [10].

2.3.5 Yardımcı Teorem. (X,S) bir $S-$metrik uzay olsun. O zaman her $x,y\in X$ için

$$S(x,x,y)=S(y,y,x)$$

eşitliği sağlanır [10].

2.3.6 Yardımcı Teorem. (X,S) bir $S-$metrik uzay olsun. Eğer $x_n\to x$ ve $y_n\to y$ ise $S(x_n,x_n,y_n)\to S(x,x,y)$ dir [10].

2.3.7 Sonuç. $T:X\to Y$, X $S-$metrik uzayından Y $S-$metrik uzayına bir fonksiyon olsun. T fonksiyonunun $x\in X$ noktasında sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul $x_n\to x$ olduğunda $Tx_n\to Tx$ olmasıdır [11].

2.3.8 Tanım. (X,S) bir $S-$ metrik uzay olsun. $r>0$ reel sayısı ve bir $x\in X$ için $B_S(x,r)$ açık yuvarı ve $B_S[x,r]$ kapalı yuvarı, sırasıyla

$$B_S(x,r)=\{y\in X:S(y,y,x)<r\}$$

ve

$$B_S[x,r]=\{y\in X:S(y,y,x)\le r\}$$

şeklinde tanımlıdır [10].

X kümesi üzerinde tanımlı bir d metriği ve bir S $S-$metriği arasındaki ilişki aşağıdaki yardımcı teoremde verilmiştir.

2.3.9 Yardımcı Teorem. (X,d) bir metrik uzay olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır:

1) Her $x,y,z\in X$ için $S_d(x,y,z)=d(x,z)+d(y,z)$ şeklinde tanımlanan $S_d:X\times X\times X\to[0,\infty)$ fonksiyonu X kümesi üzerinde bir $S-$metriktir.

2) (X,d) metrik uzayında $x_n \to x$ olması için gerekli ve yeterli koşul (X,S_d) $S-$metrik uzayında $x_n \to x$ olmasıdır.

3) $\{x_n\}$ dizisinin (X,d) metrik uzayında bir Cauchy dizisi olması için gerekli ve yeterli koşul $\{x_n\}$ dizisinin (X,S_d) $S-$metrik uzayında bir Cauchy dizisi olmasıdır.

4) (X,d) metrik uzayının tam olması için gerekli ve yeterli koşul (X,S_d) $S-$metrik uzayının tam olmasıdır [32].

S_d metriğine d metriği tarafından üretilen $S-$metrik adı verilir.

Her d metriği için $S \neq S_d$ olacak şekilde bir $S-$metrik mevcuttur.

2.3.10 Örnek. $X=\mathbb{R}$ olsun ve $S: X\times X\times X \to [0,\infty)$ fonksiyonu her $x,y,z\in\mathbb{R}$ için

$$S(x,y,z)=|x-z|+|x+z-2y|$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $(X,\mathbb{R})$ ikilisi bir $S-$metrik uzaydır ve $S=S_d$ olacak şekilde hiçbir d metriği yoktur. Tersine olarak, her $x,y,z\in\mathbb{R}$ için

$$S(x,y,z)=d(x,z)+d(y,z)$$

olacak şekilde bir d metriğinin var olduğunu kabul edelim. Bu durumda her $x,y,z\in\mathbb{R}$ için

$$S(x,x,z)=2d(x,z)=2|x-z| \;\Rightarrow\; d(x,z)=|x-z|$$

ve

$$S(y,y,z)=2d(y,z)=2|y-z| \;\Rightarrow\; d(y,z)=|y-z|$$

elde edilir. Buradan

$$|x-z|+|x+z-2y|=|x-z|+|y-z|$$

çelişkisi elde edilir. O halde $S\neq S_d$ dir [33].

Her $S-$ metrik yardımıyla bir d metriği elde edilemez. Fakat [34] de aşağıdaki önerme verilmiştir.

2.3.11 Önerme. (X,S) bir $S-$ metrik uzay olsun. Her $x,y\in X$ için X kümesi üzerindeki her $S-$ metrik X kümesi üzerinde bir d_S metriği tanımlar [34]:

$$d_S(x,y)=S(x,x,y)+S(y,y,x)\,.$$

Ancak Önerme 2.3.11 de verilen d_S fonksiyonu her zaman bir metrik tanımlamadığı kolayca görülebilir. Çünkü X kümesinin her elemanı için üçgen eşitsizliği her zaman sağlanmayabilir. Eğer $S-$ metrik bir d metriği tarafından üretilebiliyorsa o zaman bu $S-$metrik X kümesi üzerinde bir d_S metriği tanımlar ve $d_S(x,y)=4d(x,y)$ elde edilir. Fakat $S-$ metrik bir metrik tarafından üretilemiyorsa d_S fonksiyonu metrik olabilir de olmayabilir de. Eğer d_S fonksiyonu bir metrik ise d_S metriğine $S-$metrik tarafından üretilen metrik denir [33].

2.3.12 Örnek. $X=\{1,2,3\}$ ve $S:X\times X\times X\to[0,\infty)$ fonksiyonu her $x,y,z\in X$ için

$$S(1,1,2)=S(2,2,1)=5\,,$$

$$S(2,2,3)=S(3,3,2)=S(1,1,3)=S(3,3,1)=2\,,$$

$$x=y=z \text{ ise } S(x,y,z)=0\,,$$

$$\text{diğer durumlarda ise } S(x,y,z)=1$$

şeklinde tanımlı olsun. Bu durumda S fonksiyonu herhangi bir metrik tarafından üretilemeyen bir $S-$metriktir ve (X,S) ikilisi bir $S-$metrik uzaydır. Fakat Önerme 2.3.11 de tanımlanan d_S fonksiyonu bir metrik değildir. Gerçekten, $x=1, y=2, z=3$ için

$$d_S(1,2)=10\not\leq d_S(1,3)+d_S(3,2)=8$$

elde edilir, yani üçgen eşitsizliği sağlanmaz [33].

2.3.13 Örnek. $X = \mathbb{R}$ ve $S : X \times X \times X \to [0,\infty)$ fonksiyonu Örnek 2.3.10 da tanımlanan $S-$metrik olsun. Bu $S-$metrik bir metrik tarafından üretilemez fakat her $x, y \in \mathbb{R}$ için $d_S(x, y) = 4\left| x - y \right|$ olduğundan bir metrik üretir. O halde $\left(\mathbb{R}, d_S\right)$ ikilisi bir metrik uzaydır [33].

$S-$metrik uzaylar üzerinde birçok sabit nokta teoremi çalışılmıştır. Örneğin, tam $S-$ metrik uzaylar üzerinde iyi bilinen Banach daralma prensibinin bir genellemesi aşağıdaki şekilde elde edilmiştir.

2.3.14 Tanım. (X, S) bir $S-$ metrik uzay ve $T : X \to X$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in X$ için

$$S(Tx, Tx, Ty) \le LS(x, x, y)$$

olacak şekilde bir $L \in [0,1)$ sabiti var ise o zaman T fonksiyonuna bir daralma denir [10].

2.3.15 Teorem. (X, S) bir tam $S-$metrik uzay ve $T : X \to X$ fonksiyonu bir daralma olsun. O zaman T fonksiyonunun bir tek $x_0 \in X$ sabit noktası vardır. Ayrıca her $x \in X$ için

$$S\left(T^n x, T^n x, x_0\right) \le \frac{2L^n}{1-L} S(Tx, Tx, x)$$

olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} T^n x = x_0$$

dır [10].

Son zamanlarda $S-$metrik uzaylar üzerinde çeşitli daralma fonksiyonları tanımlanarak yeni sabit nokta teoremleri elde edilmiş ve klasik Banach daralma prensibi genelleştirilmiştir.

2.3.16 Teorem. (X,S) kompakt bir $S-$ metrik uzay ve $T:X\to X$, her $x,y\in X\left(x\neq y\right)$ için

$$S(Tx,Tx,Ty)<S(x,x,y)$$

koşulunu sağlayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda T fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır [10].

2.3.17 Tanım. (X,S) bir $S-$ metrik uzay, $T,F:X\to X$ iki fonksiyon ve $A\subset X$, $x\in X$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

1) $\delta(A)=\sup\{S(x,x,y):x,y\in A\}$.

2) $O_{T,F}(x,n)=\{Tx,TFx,TF^2x,...,TF^nx\}$.

3) $O_{T,F}(x,\infty)=\{Tx,TFx,TF^2x,...,TF^nx,...\}$.

4) Eğer T birim fonksiyonsa $O_F(x,n)=O_{T,F}(x,n)$ ve $O_F(x,\infty)=O_{T,F}(x,\infty)$ olur [32].

2.3.18 Sonuç. (X,S) bir $S-$ metrik uzay ve $T:X\to X$, aşağıdaki koşulları sağlayan bir fonksiyon olsun:

1) Her $x\in X$ için $\{T^nx\}$ formundaki her Cauchy dizisi yakınsaktır;

2) Herhangi $x,y\in X$ için

$$S(Tx,Tx,Ty)\le h\max\left\{\begin{matrix}S(x,x,y),S(Tx,Tx,x),S(Tx,Tx,y),\\ S(Ty,Ty,x),S(Ty,Ty,y)\end{matrix}\right\}$$

olacak şekilde bir $h\in[0,1)$ vardır.

Bu durumda aşağıdaki ifadeler elde edilir:

1) Her $i,j\le n$, $n\in\mathbb{N}$ ve $x\in X$ için $\delta(T^ix,T^ix,T^jx)\le h\delta[O_T(x,n)]$ dir;

2) Her $x\in X$ için $\delta[O_T(x,\infty)]\le\dfrac{2}{1-q}S(Tx,Tx,x)$ dir;

3) T nin bir tek x_0 sabit noktası vardır;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}T^nx=x_0$ dır [32].

2.3.19 Sonuç. (X,S) bir tam $S-$ metrik uzay, $T:X\to X$ bir fonksiyon, bazı $h\in\left[0,\frac{1}{3}\right)$ ve herhangi $x,y\in X$ için

$$S(Tx,Tx,Ty)\le h\max\begin{Bmatrix} S(x,x,y),S(Tx,Tx,x),S(Tx,Tx,y), \\ S(Ty,Ty,x),S(Ty,Ty,y) \end{Bmatrix}$$

olsun. O zaman T fonksiyonun X kümesinde bir tek sabit noktası vardır. Ayrıca T fonksiyonu bu sabit noktada süreklidir [11].

2.4 Kompleks Değerli S – Metrik Uzaylar

$\mathbb{C}$ kompleks sayıların kümesi ve $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ olsun. $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesi üzerinde $\precsim$ kısmi sıralama bağıntısı aşağıdaki şekilde tanımlıdır:

$$z_1 \precsim z_2 \iff \mathrm{Re}(z_1)\le \mathrm{Re}(z_2),\ \mathrm{Im}(z_1)\le \mathrm{Im}(z_2)$$

ve

$$z_1 \prec z_2 \iff \mathrm{Re}(z_1)< \mathrm{Re}(z_2),\ \mathrm{Im}(z_1)< \mathrm{Im}(z_2)\,.$$

Aşağıdaki koşullardan birinin sağlanması durumunda $z_1 \precnsim z_2$ yazılacaktır:

(1) $\mathrm{Re}(z_1)=\mathrm{Re}(z_2)$ ve $\mathrm{Im}(z_1)<\mathrm{Im}(z_2)$,
(2) $\mathrm{Re}(z_1)<\mathrm{Re}(z_2)$ ve $\mathrm{Im}(z_1)=\mathrm{Im}(z_2)$,
(3) $\mathrm{Re}(z_1)=\mathrm{Re}(z_2)$ ve $\mathrm{Im}(z_1)=\mathrm{Im}(z_2)$.

Ayrıca

$$0 \precsim z_1 \precnsim z_2 \Rightarrow |z_1|<|z_2|$$

ve

$$z_1 \precsim z_2,\ z_2 \prec z_3 \Rightarrow z_1 \prec z_3$$

olduğuna dikkat edilmelidir.

2.4.1 Tanım. X boştan farklı bir küme olsun. $S_C:X\times X\times X\to\mathbb{C}$ fonksiyonu her $x,y,z,a\in X$ için

(CS1) $0 \precsim S_C(x,y,z)$,

(CS2) $S_C(x,y,z)=0$ ancak ve ancak $x=y=z$,

(CS3) $S_C(x,y,z) \precsim S_C(x,x,a)+S_C(y,y,a)+S_C(z,z,a)$

şartlarını sağlıyorsa S_C fonksiyonuna X kümesi üzerinde kompleks değerli bir $S-$metrik ve (X,S_C) ikilisine de kompleks değerli bir $S-$metrik uzay denir [35].

2.4.2 Tanım. (X,S_C) kompleks değerli bir $S-$metrik uzay ve $\{x_n\} \subset X$ bu uzayda bir dizi olsun. O zaman

1) X kümesindeki $\{x_n\}$ dizisinin x noktasına yakınsaması için gerekli ve yeterli koşul herhangi verilen $0 \prec \varepsilon$ sayısı ve her $n \geq n_0$ için

$$S_C(x_n,x_n,x) \prec \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ doğal sayısının var olmasıdır. Bu durum $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ ile gösterilir.

2) Verilen herhangi $0 \prec \varepsilon$ sayısı ve her $n,m \geq n_0$ için

$$S_C(x_n,x_n,x_m) \prec \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $\{x_n\}$ dizisine bir Cauchy dizisi denir.

3) (X,S_C) kompleks değerli $S-$ metrik uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsak ise (X,S_C) kompleks değerli $S-$metrik uzayına tamdır denir [35].

2.4.3 Yardımcı Teorem. (X,S_C) kompleks değerli bir $S-$metrik uzay ve $\{x_n\}$ X kümesinde bir dizi olsun. $\{x_n\}$ dizisinin x noktasına yakınsaması için gerekli ve yeterli koşul $n \to \infty$ için $\left|S_C(x_n,x_n,x)\right| \to 0$ olmasıdır [35].

2.4.4 Yardımcı Teorem. (X,S_C) kompleks değerli bir $S-$metrik uzay ve $\{x_n\}$ X kümesinde bir dizi olsun. $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olması için gerekli ve yeterli koşul $n \to \infty$ için $\left|S_C(x_n,x_n,x_{n+m})\right| \to 0$ olmasıdır [35].

2.4.5 Yardımcı Teorem. (X, S_C) kompleks değerli bir $S-$metrik uzay ise her $x, y \in X$ için

$$S_C(x,x,y) = S_C(y,y,x)$$

elde edilir [35].

2.4.6 Tanım. $\precsim$ kısmi sıralama bağıntısı için "max" fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlıdır:

(1) $\max\{z_1, z_2\} = z_2 \Leftrightarrow z_1 \precsim z_2$.

(2) $z_1 \precsim \max\{z_2, z_3\} \Rightarrow z_1 \precsim z_2$ veya $z_1 \precsim z_3$.

(3) $\max\{z_1, z_2\} = z_2 \Leftrightarrow z_1 \precsim z_2$ veya $|z_1| < |z_2|$ [36].

2.4.7 Yardımcı Teorem. $z_1, z_2, z_3, \ldots \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\precsim$ kısmi sıralama bağıntısı $\mathbb{C}$ üzerinde tanımlı olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler sağlanır:

(1) Eğer $z_1 \precsim \max\{z_2, z_3\}$ ve $z_3 \precsim z_2$ ise $z_1 \precsim z_2$ dir,

(2) Eğer $z_1 \precsim \max\{z_2, z_3, z_4\}$ ve $\max\{z_3, z_4\} \precsim z_2$ ise $z_1 \precsim z_2$ dir,

(3) Eğer $z_1 \precsim \max\{z_2, z_3, z_4, z_5\}$ ve $\max\{z_3, z_4, z_5\} \precsim z_2$ ise $z_1 \precsim z_2$ dir.

Bu durum tümevarımla genellenebilir [36].

2.5 Metrik Uzaylarda Bazı Sabit Çember Teoremleri

2.5.1 Tanım. (X, d) bir metrik uzay, $C_{x_0,r} = \{x \in X : d(x_0, x) = r\}$ bir çember ve $T : X \to X$ bir fonksiyon olsun. Her $x \in C_{x_0,r}$ için $Tx = x$ oluyorsa $C_{x_0,r}$ çemberine T fonksiyonunun bir sabit çemberi denir [17].

2.5.2 Teorem. (X,d) bir metrik uzay, $C_{x_0,r}$ X üzerinde bir çember ve her $x \in X$ için $\varphi : X \to [0,\infty)$ fonksiyonu

$$\varphi(x) = d(x, x_0) \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlı olsun. Her $x \in C_{x_0,r}$ için

(C1) $d(x,Tx) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)$

ve

(C2) $d(Tx, x_0) \geq r$

koşullarını sağlayan bir $T : X \to X$ fonksiyonu varsa $C_{x_0,r}$ çemberi T fonksiyonunun bir sabit çemberidir [17].

2.5.3 Teorem. (X,d) bir metrik uzay, $C_{x_0,r}$ X üzerinde bir çember ve her $x \in X$ için $\varphi : X \to [0,\infty)$ fonksiyonu (2.1) eşitliğindeki gibi tanımlı olsun. Her $x \in C_{x_0,r}$ için

(C1)* $d(x,Tx) \leq \varphi(x) + \varphi(Tx) - 2r$

ve

(C2)* $d(Tx, x_0) \leq r$

koşullarını sağlayan bir $T : X \to X$ fonksiyonu varsa $C_{x_0,r}$ çemberi T fonksiyonunun bir sabit çemberidir [17].

2.5.4 Teorem. (X,d) bir metrik uzay, $C_{x_0,r}$ X üzerinde bir çember ve her $x \in X$ için $\varphi : X \to [0,\infty)$ fonksiyonu (2.1) eşitliğindeki gibi tanımlı olsun. Her $x \in C_{x_0,r}$ ve bir $h \in [0,1)$ için

(C1)** $d(x,Tx) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)$

ve

(C2)** $hd(x,Tx) + d(Tx, x_0) \geq r$

koşullarını sağlayan bir $T : X \to X$ fonksiyonu varsa $C_{x_0,r}$ çemberi T fonksiyonunun bir sabit çemberidir [17].

2.5.5 Teorem. (X,d) bir metrik uzay, $C_{x_0,r}$ X üzerinde bir çember ve her $x \in X$ için $\varphi : X \to [0,\infty)$ fonksiyonu (2.1) eşitliğindeki gibi tanımlı olsun. Her $x \in C_{x_0,r}$ için

(C1)*** $d(x,Tx) \leq \varphi(x) + \varphi(Tx) - 2r$

ve

(C2)*** $d(x,Tx) + d(Tx,x_0) \leq r$

koşullarını sağlayan bir $T : X \to X$ fonksiyonu varsa $C_{x_0,r}$ çemberi T fonksiyonunun bir sabit çemberidir [37].

$I_X : X \to X$ fonksiyonu her $a \in X$ için $I_X(a) = a$ şeklinde tanımlı özdeşlik dönüşümüdür.

2.5.6 Teorem. (X,d) bir metrik uzay, $C_{x_0,r}$ X üzerinde bir çember ve her $x \in X$ için $\varphi : X \to [0,\infty)$ fonksiyonu (2.1) eşitliğindeki gibi tanımlı olsun. Her $x \in X$ ve bir $h > 1$ için $T : X \to X$ fonksiyonu

$$(I_d) \qquad d(x,Tx) \leq \frac{\varphi(x) - \varphi(Tx)}{h}$$

koşulunu sağlıyorsa $T = I_X$ dir ve $C_{x_0,r}$ çemberi T fonksiyonunun bir sabit çemberidir [17].

3. S – METRİK UZAYLARDA BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Bu bölümde, metrik uzaylar üzerinde iyi bilinen $(R25)$ Rhoades daralma fonksiyonu $S-$ metrik uzaylara $(S25)$ koşulu olarak genelleştirilmiştir. $(S25)$ in bazı genel formları tanımlanarak aralarındaki ilişkiler incelenmiştir. Örnekler verilerek tanımların ve aralarındaki ilişkilerin daha iyi anlaşılması sağlanmıştır. Tanımlanan daralma fonksiyonları kullanılarak yeni sabit nokta teoremleri elde edilmiştir. Elde edilen sabit nokta teoremleri yardımıyla klasik Nemytskii – Edelstein ve Ciric sabit nokta sonuçları genelleştirilmiştir. Ayrıca $(S25)$ koşulunun bir uygulaması incelenmiştir.

3.1 Rhoades Daralma Fonksiyonunun S – Metrik Uzaylar Üzerinde Genelleştirilmeleri

Bu bölümde $S-$ metrik uzaylarda $(R25)$ Rhoades fonksiyonunun genellemesi olan $(S25)$ daralma fonksiyonu tanımlanacaktır. Ayrıca C_S- fonksiyon ve L_S- fonksiyon kavramları tanımlanarak $(S25)$ daralma fonksiyonuyla aralarındaki ilişki incelenecektir. $(S25)$ daralma fonksiyonundan yararlanarak $(S50)$, $(S75)$, $(S100)$ ve $(S125)$ gibi yeni daralma fonksiyonları tanımlanacaktır. Tanımlanan tüm daralma fonksiyonlarının aralarındaki ilişkiler araştırılacaktır.

3.1.1 Tanım. (X,S) bir $S-$metrik uzay ve $T:X\to X$ bir fonksiyon olsun. $(S25)$ koşulu aşağıdaki gibi tanımlıdır:

(S25) Herhangi $x,y\in X$, $x\neq y$ için

$$S(Tx,Tx,Ty)<\max\{S(x,x,y),S(Tx,Tx,x),S(Ty,Ty,y),\\ S(Ty,Ty,x),S(Tx,Tx,y)\}$$

dir [38].

İlk olarak $(R25)$ ve $(S25)$ daralma fonksiyonları arasındaki ilişki aşağıdaki önermelerde incelenmiştir.

3.1.2 Önerme. (X,d) bir tam metrik uzay, (X,S_d) bu metrik tarafından elde edilen $S-$ metrik uzay ve $T:X\to X$ bir fonksiyon olsun. Eğer T fonksiyonu $(R25)$ koşulunu sağlıyorsa $(S25)$ koşulunu da sağlar [33].

İspat: T fonksiyonu $(R25)$ koşulunu sağlasın. Bu durumda Yardımcı Teorem 2.3.5 kullanılarak

$$S_d(Tx,Tx,Ty)=d(Tx,Ty)+d(Tx,Ty)=2d(Tx,Ty)$$

$$<2\max\{d(x,y),d(x,Tx),d(y,Ty),d(x,Ty),d(y,Tx)\}$$

$$=\max\{2d(x,y),2d(x,Tx),2d(y,Ty),2d(x,Ty),2d(y,Tx)\}$$

$$=\max\{S_d(x,x,y),S_d(x,x,Tx),S_d(y,y,Ty),S_d(x,x,Ty),S_d(y,y,Tx)\}$$

$$=\max\{S_d(x,x,y),S_d(Tx,Tx,x),S_d(Ty,Ty,y),S_d(Ty,Ty,x),S_d(Tx,Tx,y)\}$$

eşitsizliği elde edilir. Sonuç olarak T fonksiyonu $(S25)$ koşulunu sağlar. □

3.1.3 Önerme. (X,S) bir tam $S-$ metrik uzay, (X,d_S) bu $S-$ metrik tarafından elde edilen metrik uzay ve $T:X\to X$ bir fonksiyon olsun. Eğer T fonksiyonu $(S25)$ koşulunu sağlıyorsa $(R25)$ koşulunu da sağlar [33].

İspat. T fonksiyonu $(S25)$ koşulunu sağlasın. Bu durumda Yardımcı Teorem 2.3.5 kullanılarak

$$d_S(Tx,Ty)=S(Tx,Tx,Ty)+S(Ty,Ty,Tx)$$

$$=S(Tx,Tx,Ty)+S(Tx,Tx,Ty)=2S(Tx,Tx,Ty)$$

$$<2\max\{S(x,x,y),S(Tx,Tx,x),S(Ty,Ty,y),S(Ty,Ty,x),S(Tx,Tx,y)\}$$

$$=\max\{2S(x,x,y),2S(Tx,Tx,x),2S(Ty,Ty,y),2S(Ty,Ty,x),2S(Tx,Tx,y)\}$$

$$=\max\{d_S(x,y),d_S(x,Tx),d_S(y,Ty),d_S(x,Ty),d_S(y,Tx)\}$$

eşitsizliği elde edilir. Sonuç olarak T fonksiyonu $(R25)$ koşulunu sağlar. □

3.1.4 Tanım. (X,S) bir $S-$metrik uzay ve $T:X\to X$ bir fonksiyon olsun. $x\in X$ olmak üzere ve

$$T^i x \neq T^j x,\ 0\leq i<j\leq n-1 \tag{3.1}$$

koşulunu sağlayan her $n\geq 2$ tamsayısı için

$$S(T^n x, T^n x, T^i x) < \max_{1\leq j\leq n}\{S(T^j x, T^j x, x)\},\ i=1,2,\ldots,n-1,\ldots \tag{3.2}$$

eşitsizliği gerçekleniyorsa T fonksiyonuna bir C_S- fonksiyon denir [38].

3.1.5 Tanım. (X,S) bir $S-$metrik uzay ve $T:X\to X$ bir fonksiyon olsun. $x\in X$ olmak üzere ve (3.1) koşulunu sağlayan her $n\geq 2$ tamsayısı için

$$S(T^n x, T^n x, T^i x) < \max_{0\leq p<q\leq n}\{S(T^p x, T^p x, T^q x)\},\ i=1,2,\ldots,n-1,\ldots \tag{3.3}$$

eşitsizliği gerçekleniyorsa T fonksiyonuna bir L_S- fonksiyon denir [38].

3.1.6 Önerme. (X,S) bir $S-$ metrik uzay ve $T:X\to X$ bir fonksiyon olsun. T fonksiyonu $(S25)$ koşulunu sağlıyorsa bu durumda T fonksiyonu bir C_S- fonksiyondur [38].

İspat. İspatı yapmak için tümevarım yöntemi kullanılacaktır. $x\in X$, $T:X\to X$, $(S25)$ koşulunu sağlayan bir fonksiyon ve $n\geq 2$, (3.1) koşulunu sağlayan bir tamsayı olsun. $n=2$ için $(S25)$ koşulundan

$$\begin{aligned} S(T^2x,T^2x,Tx) < \max\{&S(Tx,Tx,x), S(T^2x,T^2x,Tx), S(Tx,Tx,x),\\ &S(Tx,Tx,Tx), S(T^2x,T^2x,x)\}\end{aligned} \tag{3.4}$$

ve

$$S(T^2x,T^2x,Tx) < \max\{S(Tx,Tx,x), S(T^2x,T^2x,x)\}$$

eşitsizlikleri elde edilir.

Bu durumda (3.2) koşulu sağlanmış olur.

$n=k-1$, $k\geq 3$ için (3.2) koşulunun sağlandığını kabul edelim.

$$\alpha = \max_{1\leq j\leq k-1}\{S(T^j x, T^j x, x)\}$$

olsun. Şimdi $n=k$, $k\geq 2$ için (3.2) koşulunun sağlandığını gösterelim. $(S25)$ koşulu ve tümevarım hipotezi kullanılarak

$$S(T^k x,T^k x,T^{k-1}x)<\max\{S(T^{k-1}x,T^{k-1}x,T^{k-2}x),S(T^k x,T^k x,T^{k-1}x),$$
$$S(T^{k-1}x,T^{k-1}x,T^{k-2}x),S(T^{k-1}x,T^{k-1}x,T^{k-1}x),S(T^k x,T^k x,T^{k-2}x)\}$$

ve

$$S(T^k x,T^k x,T^{k-1}x)<\max\{\alpha,S(T^k x,T^k x,T^{k-2}x)\}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Ayrıca bu son eşitsizlik kullanılarak

$$S(T^k x,T^k x,T^{k-i}x)<\max\{\alpha,S(T^k x,T^k x,T^{k-i-1}x)\},\ i=1,2,\ldots,k-1$$

eşitsizliği elde edilir. $i=k-1$ için

$$S(T^k x,T^k x,Tx)<\max\{\alpha,S(T^k x,T^k x,x)\}=\max_{1\leq j\leq k}\{S(T^k x,T^k x,x)\}$$

ve

$$S(T^k x,T^k x,T^i x)<\max_{1\leq j\leq k}\{S(T^k x,T^k x,x)\},\ i=1,2,\ldots,k-1$$

eşitsizlikleri elde edilir. Böylece T fonksiyonu (3.2) koşulunu sağlar. Sonuç olarak T fonksiyonu bir C_S- fonksiyondur. □

Aşağıdaki örnekten de görülebileceği gibi Önerme 3.1.6 nın tersi her zaman doğru olmak zorunda değildir.

3.1.7 Örnek. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi olsun ve $\mathbb{R}$ üzerinde alışılmış $S-$ metriği göz önüne alalım. Bu durumda her $x,y,z\in\mathbb{R}$ için

$$S(x,y,z)=|x-z|+|y-z|$$

dir. $T:X\to X$ fonksiyonunu her $x\in X$ için

$$Tx=\begin{cases} x & , \quad x\in[0,1] \\ x-4 & , \quad x=6,10 \\ 1 & , \quad x=2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $X=[0,1]\cup\{2,6,10\}$ kümesinin bir $S-$ metrik uzay olduğu kolayca gösterilebilir. $x=\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{3}\in[0,1]$ için

$$S(Tx,Tx,Ty)=S\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3},$$

$$S(x,x,y)=S\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3},$$

$$S(Tx,Tx,x)=S(x,x,x)=0,$$

$$S(Ty,Ty,y)=S(y,y,y)=0,$$

$$S(Ty,Ty,x)=S\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3},$$

$$S(Tx,Tx,y)=S\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$$

ve bu değerler yardımıyla

$$S(Tx,Tx,Ty)=\frac{1}{3}<\max\left\{\frac{1}{3},0,0,\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right\}=\frac{1}{3}$$

elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Bu durumda T fonksiyonu $(S25)$ koşulunu sağlamaz.

Şimdi T fonksiyonunun bir C_S- fonksiyon olduğunu gösterelim. $x\in\{2,6,10\}$ için aşağıdaki durumları dikkate almalıyız:

Durum 1. $x=2$ ve $n=2$ için

$$S(T^2 2,T^2 2,T2)=0<\max\{S(T^2 2,T^2 2,2),S(T2,T2,2)\}=2$$

eşitsizliği elde edilir. Benzer şekilde $n>2$ için de (3.2) koşulunun sağlandığı kolayca görülebilir.

Durum 2. $x=6$ ve $n\in\{2,3\}$ için

$$S(T^2 6,T^2 6,T6)=2<\max\{S(T^2 6,T^2 6,6),S(T6,T6,6)\}=10$$

ve

$$\begin{aligned}&\max\{S(T^3 6,T^3 6,T6),S(T^3 6,T^3 6,T^2 6)\}=2<\\&\max\{S(T^3 6,T^3 6,6),S(T^2 6,T^2 6,6),S(T6,T6,6)\}=10\end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Benzer şekilde $n>3$ için de (3.2) koşulunun sağlandığı görülür.

Durum 3. $x=10$ ve $n\in\{2,3,4\}$ için

$$S(T^2 10, T^2 10, T10) = 8 < \max\{S(T^2 10, T^2 10, 10), S(T10, T10, 10)\} = 16,$$

$$\max\{S(T^3 10, T^3 10, T10), S(T^3 10, T^3 10, T^2 10)\} = 10 <$$
$$\max\{S(T^3 10, T^3 10, 10), S(T^2 10, T^2 10, 10), S(T10, T10, 10)\} = 18$$

ve

$$\max\{S(T^4 10, T^4 10, T10), S(T^4 10, T^4 10, T^2 10), S(T^4 10, T^4 10, T^3 10)\} = 10 <$$
$$\max\{S(T^4 10, T^4 10, 10), S(T^3 10, T^3 10, 10), S(T^2 10, T^2 10, 10), S(T10, T10, 10)\} = 18$$

eşitsizlikleri elde edilir. Benzer şekilde $n > 4$ için de (3.2) koşulunun sağlandığı görülür.

$x \in [0,1]$ alındığında da (3.2) koşulunun sağlandığı kolayca görülebilir. Böylece T bir $C_S -$ fonksiyondur [38].

3.1.8 Önerme. (X, S) bir $S-$ metrik uzay ve $T : X \to X$ bir fonksiyon olsun. $C_S -$ fonksiyon ve $L_S -$ fonksiyon kavramları denktir [38].

İspat. T bir $L_S -$ fonksiyon ve $x \in X$ olsun. (3.1) koşulunu sağlayan bir $n \geq 2$ tamsayısını dikkate alalım. Bu durumda $2 \leq k \leq n$ için

$$\min\{S(T^i x, T^i x, T^j x) : 0 \leq i < j \leq k-1\} > 0$$

elde edilir.

$$\alpha_n = \max_{1 \leq i \leq n-1}\{S(T^n x, T^n x, T^i x)\}$$

ve

$$\beta_n = \max_{1 \leq i \leq n}\{S(T^i x, T^i x, x)\}$$

olsun.

Yardımcı Teorem 2.3.5, (3.3) ve (3.4) koşulları kullanılarak $i = 1, 2, \ldots, n-1$ için

$$S(T^n x, T^n x, T^i x) < \max_{0 \leq p < q \leq n}\{S(T^p x, T^p x, T^q x)\}$$

ve

$$\alpha_n = \max\{S(T^n x, T^n x, T^i x) : 1 \leq i \leq n-1\}$$

$$< \max\{\alpha_n, \beta_n, \max\{S(T^p x, T^p x, T^q x) : 1 \le p < q \le n-1\}\}$$

$$= \max\{\beta_n, \max\{S(T^p x, T^p x, T^q x) : 1 \le p < q \le n-1\}\}$$

$$= \max\{\alpha_{n-1}, \beta_n, \max\{S(T^p x, T^p x, T^q x) : 1 \le p < q \le n-2\}\}$$

$$\le \max\{\beta_n, \beta_{n-1}, \max\{S(T^p x, T^p x, T^q x) : 1 \le p < q \le n-2\}\}$$

$$= \max\{\beta_n, \max\{S(T^p x, T^p x, T^q x) : 1 \le p < q \le n-2\}\}$$

$$\le \cdots$$

$$\le \max\{\beta_n, \max\{S(T^p x, T^p x, T^q x) : 1 \le p < q \le 2\}\}$$

$$= \max\{\beta_n, S(Tx, Tx, T^2 x)\}$$

$$= \max\{\beta_n, S(T^2 x, T^2 x, Tx)\}$$

$$\le \max\{\beta_n, \max\{S(Tx, Tx, x), S(T^2 x, T^2 x, x)\}\} = \beta_n$$

eşitsizlikleri elde edilir. Böylece T fonksiyonu (3.2) koşulunu sağlar. Sonuç olarak T bir $C_S -$ fonksiyondur.

Tersine olarak T bir $C_S -$ fonksiyon ve $x \in X$ olsun. (3.1) koşulunu sağlayan bir $n \ge 2$ tamsayısını dikkate alalım. Şimdi T fonksiyonunun bir $L_S -$ fonksiyon olduğunu gösterelim. (3.2) koşulu kullanılarak

$$S(T^n x, T^n x, T^i x) < \max_{1 \le j \le n}\{S(T^j x, T^j x, x)\}, \; i = 1, 2, \ldots, n-1$$

eşitsizliği elde edilir.

$1 \le j \le n$ ise $0 \le j-1 \le n-1$ dir. $0 \le j-1 < q \le n$ olacak şekilde bir q seçelim. $j-1 = 0$ için $1 \le q \le n$ ve

$$S(T^n x, T^n x, T^i x) < \max_{1 \le q \le n}\{S(T^q x, T^q x, x)\}$$

eşitsizliği elde edilir. Eğer $j-1 = p$ olarak alınırsa bu durumda

$$S(T^n x, T^n x, T^i x) < \max_{0 \le p < q \le n}\{S(T^q x, T^q x, T^p x)\} = \max_{0 \le p < q \le n}\{S(T^p x, T^p x, T^q x)\}$$

olur. Böylece T fonksiyonu bir $L_S -$ fonksiyondur. Sonuç olarak $C_S -$ fonksiyon ve $L_S -$ fonksiyon kavramları denktir. □

Aşağıdaki tanımda $S-$metrik uzaylarda çap kavramı verilmiştir.

3.1.9 Tanım. (X,S) bir $S-$metrik uzay ve A, X kümesinin boştan farklı bir alt kümesi olsun.

$$diam\{A\}=\sup\{S(x,x,y):x,y\in A\}$$

kümesine A kümesinin çapı denir. Eğer A kümesi $S-$ sınırlı ise o zaman $diam\{A\}<\infty$ yazılır [38].

3.1.10 Tanım. (X,S) bir $S-$ metrik uzay, $T:X\to X$ bir fonksiyon, $U_x=\{T^n x:n\in\mathbb{N}\}$, $diam\{U_x\}<\infty$ ve $diam\{U_y\}<\infty$ olsun. Herhangi $x,y\in X$, $x\neq y$ için

(*S25a*) $S(Tx,Tx,Ty)<diam\{U_x\cup U_y\}$

dir [38].

3.1.11 Önerme. (X,S) bir $S-$ metrik uzay ve $T:X\to X$ bir fonksiyon olsun. Eğer T fonksiyonu $(S25)$ koşulunu sağlıyorsa $(S25a)$ koşulunu da sağlar [38].

İspat. T fonksiyonu $(S25)$ koşulunu sağlasın. Bu durumda Tanım 3.1.1 ve Tanım 3.1.9 dan

$$\begin{aligned}S(Tx,Tx,Ty)&<\max\{S(x,x,y),S(Tx,Tx,x),S(Ty,Ty,y),\\&\qquad S(Ty,Ty,x),S(Tx,Tx,y)\}\\&<diam\{U_x\cup U_y\}\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Sonuç olarak T fonksiyonu $(S25a)$ koşulunu sağlar. □

Aşağıdaki örnekten de görülebileceği gibi Önerme 3.1.11 in tersi her zaman doğru değildir.

3.1.12 Örnek. $S:X\times X\times X\to[0,\infty)$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi üzerinde alışılmış $S-$metrik, T fonksiyonu her $x\in(0,1)$ için

$$Tx = x$$

şeklinde tanımlı olsun. $S_1 : X \times X \times X \to [0,\infty)$

$$S_1(x,y,z) = \frac{S(x,y,z)}{2}$$

olsun. S_1 fonksiyonunun $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi üzerinde bir $S-$ metrik olduğu kolayca gösterilebilir. $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{4} \in (0,1)$ için

$$S_1(Tx,Tx,Ty) = S_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4},$$

$$S_1(x,x,y) = S_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4},$$

$$S_1(Tx,Tx,x) = S_1(x,x,x) = 0,$$

$$S_1(Ty,Ty,y) = S_1(y,y,y) = 0,$$

$$S_1(Ty,Ty,x) = S_1\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4},$$

$$S_1(Tx,Tx,y) = S_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

ve bu değerler kullanılarak

$$S_1(Tx,Tx,Ty) = \frac{1}{4} < \max\left\{\frac{1}{4},0,0,\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right\} = \frac{1}{4}$$

elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. O zaman T fonksiyonu $(S25)$ koşulunu sağlamaz.

$\sup\{(0,1)\} = 1$ olduğundan T fonksiyonunun $(S25a)$ koşulunu sağladığı kolaylıkla görülür [38].

$(R25)$ Rhoades fonksiyonunun $(R50)$, $(R75)$, $(R100)$ ve $(R125)$ gibi genelleştirilmiş formları [25] nolu kaynakta çalışılmıştır. Biz de $S-$metrik uzaylar için $(R50)-(R125)$ formlarını genelleştireceğiz.

3.1.13 Tanım. (X,S) bir $S-$ metrik uzay ve $T : X \to X$ bir fonksiyon olsun.

(***S50***) Herhangi $x, y \in X$, $x \neq y$ noktaları için

$$S(T^p x, T^p x, T^p y) < \max\{S(x, x, y), S(T^p x, T^p x, x), S(T^p y, T^p y, y),$$
$$S(T^p y, T^p y, x), S(T^p x, T^p x, y)\}$$

olacak şekilde bir p pozitif tamsayısı vardır.

(***S75***) Herhangi $x, y \in X$, $x \neq y$ noktaları için

$$S(T^p x, T^p x, T^q y) < \max\{S(x, x, y), S(T^p x, T^p x, x), S(T^q y, T^q y, y),$$
$$S(T^q y, T^q y, x), S(T^p x, T^p x, y)\}$$

olacak şekilde $p,\ q$ pozitif tamsayıları vardır.

(***S100***) $x \in X$ verilsin. Her $y \in X$, $x \neq y$ noktası için

$$S(T^{p(x)} x, T^{p(x)} x, T^{p(x)} y) < \max\{S(x, x, y), S(T^{p(x)} x, T^{p(x)} x, x),$$
$$S(T^{p(x)} y, T^{p(x)} y, y), S(T^{p(x)} y, T^{p(x)} y, x), S(T^{p(x)} x, T^{p(x)} x, y)\}$$

olacak şekilde bir $p(x)$ pozitif tamsayısı vardır.

(***S125***) Herhangi $x, y \in X$, $x \neq y$ noktaları için

$$S(T^{p(x,y)} x, T^{p(x,y)} x, T^{p(x,y)} y) < \max\{S(x, x, y), S(T^{p(x,y)} x, T^{p(x,y)} x, x),$$
$$S(T^{p(x,y)} y, T^{p(x,y)} y, y), S(T^{p(x,y)} y, T^{p(x,y)} y, x), S(T^{p(x,y)} x, T^{p(x,y)} x, y)\}$$

olacak şekilde bir $p(x, y)$ pozitif tamsayısı vardır [33].

şeklinde tanımlanır.

3.1.14 Sonuç. (X, d) bir tam metrik uzay, (X, S_d) bu metrik tarafından elde edilen $S-$ metrik uzay ve $T : X \to X$ bir fonksiyon olsun. Eğer T fonksiyonu $(R50)$ (sırasıyla $(R75)$, $(R100)$ ve $(R125)$) koşulunu sağlıyorsa o zaman T fonksiyonu $(S50)$ (sırasıyla $(S75)$, $(S100)$ ve $(S125)$) koşulunu da sağlar [33].

3.1.15 Sonuç. (X, S) bir tam $S-$ metrik uzay, (X, d_S) bu $S-$ metrik tarafından elde edilen metrik uzay ve $T : X \to X$ bir fonksiyon olsun. Eğer T

fonksiyonu $(S50)$ (sırasıyla $(S75)$, $(S100)$ ve $(S125)$) koşulunu sağlıyorsa o zaman T fonksiyonu $(R50)$ (sırasıyla $(R75)$, $(R100)$ ve $(R125)$) koşulunu da sağlar [33].

3.1.16 Önerme. (X,S) bir $S-$ metrik uzay ve $T:X\to X$ bir fonksiyon olsun. Tanım 3.1.13 ten aşağıdaki ilişkiler elde edilir [33]:

$$(S25)\Rightarrow(S50)\Rightarrow(S75)$$

ve

$$(S50)\Rightarrow(S100)\Rightarrow(S125)\,.$$

İspat. T fonksiyonu $(S25)$ koşulunu sağlasın. Bu durumda herhangi $x,y\in X$, $x\neq y$ noktaları için

$$\begin{aligned}S(Tx,Tx,Ty)<\max\{&S(x,x,y),S(Tx,Tx,x),S(Ty,Ty,y),\\&S(Ty,Ty,x),S(Tx,Tx,y)\}\end{aligned}$$

olur. Eğer $p=1$ alınırsa $(S50)$ koşulunun sağlandığı açıktır. Sonuç olarak T fonksiyonu $(S50)$ koşulunu sağlar.

T fonksiyonu $(S50)$ koşulunu sağlasın. Bu durumda herhangi $x,y\in X$, $x\neq y$ noktaları için

$$\begin{aligned}S(T^px,T^px,T^py)<\max\{&S(x,x,y),S(T^px,T^px,x),S(T^py,T^py,y),\\&S(T^py,T^py,x),S(T^px,T^px,y)\}\end{aligned}$$

olacak şekilde bir p pozitif tamsayısı vardır. Eğer $p=q$ alınırsa $(S75)$ koşulunun sağlandığı açıktır. Sonuç olarak T fonksiyonu $(S75)$ koşulunu sağlar. Ayrıca $p=p(x)$ için T fonksiyonu $(S100)$ koşulunu sağlar.

T fonksiyonu $(S100)$ koşulunu sağlasın ve herhangi $x\in X$ verilsin. Herhangi bir $y\in X$, $x\neq y$ noktası için

$$\begin{aligned}S(T^{p(x)}x,T^{p(x)}x,T^{p(x)}y)<\max\{&S(x,x,y),S(T^{p(x)}x,T^{p(x)}x,x),\\&S(T^{p(x)}y,T^{p(x)}y,y),S(T^{p(x)}y,T^{p(x)}y,x),S(T^{p(x)}x,T^{p(x)}x,y)\}\end{aligned}$$

olacak şekilde bir $p(x)$ pozitif tamsayısı vardır. Eğer $p=p(x)=p(x,y)$ alınırsa bu durumda $(S125)$ koşulu sağlanır. Sonuç olarak T fonksiyonu $(S125)$ koşulunu sağlar. □

Aşağıdaki örneklerden görüldüğü gibi, Önerme 3.1.16 daki ilişkilerin tersi her zaman doğru olmak zorunda değildir.

3.1.17 Örnek. Aşağıda tanımlanan fonksiyon $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi üzerinde alışılmış $S-$ metrikten farklı bir $S-$ metrik tanımlar:

Her $x, y, z \in \mathbb{R}$ için

$$S(x, y, z) = | x - z | + | x + z - 2y |$$

dir. $T : [0,1] \to [0,1]$ fonksiyonu

$$Tx = \begin{cases} 0 \quad , \quad x \in [0,1],\ x \neq \dfrac{1}{4} \\ 1 \quad , \qquad x = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı olsun. $([0,1], S)$ ikilisinin bir $S-$ metrik uzay olduğu kolayca görülebilir.

$x = \dfrac{1}{2}$, $y = \dfrac{1}{4}$ için

$$S(Tx, Tx, Ty) = S(0,0,1) = 2,$$

$$S(x, x, y) = S\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2},$$

$$S(Tx, Tx, x) = S\left(0, 0, \frac{1}{2}\right) = 1,$$

$$S(Ty, Ty, y) = S\left(1, 1, \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2},$$

$$S(Ty, Ty, x) = S\left(1, 1, \frac{1}{2}\right) = 1,$$

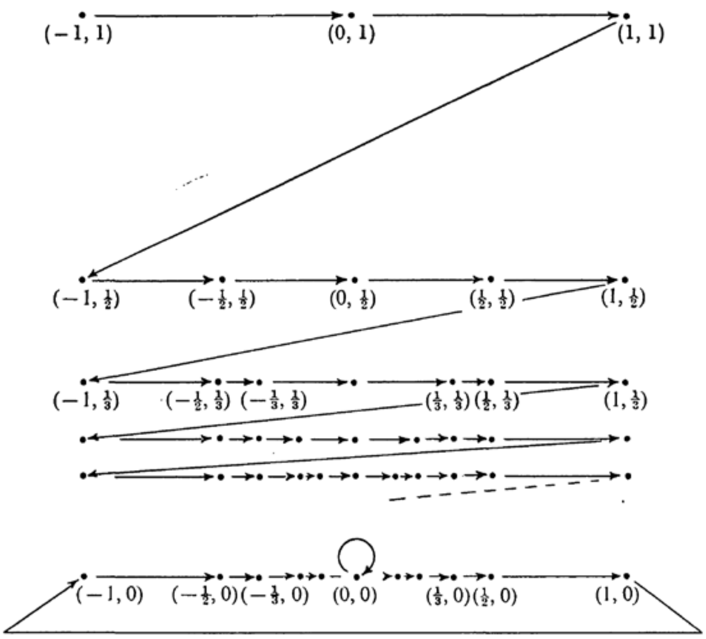
$$S(Tx, Tx, y) = S\left(0, 0, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

ve bu değerler yardımıyla

$$S(Tx, Tx, Ty) = 2 < \max\left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}\right\} = \frac{3}{2}$$

elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. O zaman T fonksiyonun $(S25)$ koşulunu sağlamaz. Ancak her $x, y \in X$ $(x \neq y)$ ve $p \geq 2$ için T fonksiyonunun $(S50)$ koşulunu sağladığı kolayca görülebilir [33].

3.1.18 Örnek. [39] numaralı kaynakta sayfa 105 de verilen örnekte tanımlı olan T fonksiyonunu (bkz. Şekil 3.1) ve alışılmış $S-$ metriği düşünelim. Eğer her n için $x = \left(\frac{1}{n}+1, 0\right)$, $y = \left(\frac{1}{n}, 0\right)$ seçilirse T fonksiyonunun $(S50)$ koşulunu sağlamadığı kolayca görülebilir. Herhangi $x \in X$ noktası için $(S100)$ koşulu sağlanacak şekilde bir $p(x)$ pozitif tamsayısı seçilebilir. Sonuç olarak T fonksiyonunun $(S100)$ koşulunu sağladığı elde edilir [33].



Şekil 3.1: Örnek 3.1.18 de tanımlı olan T fonksiyonu.

3.1.19 Örnek. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi üzerinde tanımlı olan ve Örnek 3.1.17 de verilen $S-$metriği dikkate alalım. $T:\{0,1,2\} \to \{0,1,2\}$ fonksiyonunu

$$Tx = \begin{cases} x+1 & , \quad x \in \{0,1\} \\ 1 & , \quad x = 2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. $(\{0,1,2\}, S)$ ikilisinin bir $S-$metrik uzay olduğu kolayca görülebilir.

$x=1$ ve $y=2$ seçelim. $p=1$ için

$$S(Tx,Tx,Ty)=S(2,2,1)=2,$$

$$S(x,x,y)=S(1,1,2)=2,$$

$$S(Tx,Tx,x)=S(2,2,1)=2,$$

$$S(Ty,Ty,y)=S(1,1,2)=2,$$

$$S(Ty,Ty,x)=S(2,2,2)=0,$$

$$S(Tx,Tx,y)=S(1,1,1)=0$$

ve bu değerler kullanılarak

$$S(Tx,Tx,Ty)=2<\max\{2,2,2,0,0\}=2$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Bu durumda T fonksiyonu $(S50)$ koşulunu sağlamaz.

$p=2$ için

$$S(T^2x,T^2x,T^2y)=S(1,1,2)=2,$$

$$S(x,x,y)=S(1,1,2)=2,$$

$$S(T^2x,T^2x,x)=S(1,1,1)=0,$$

$$S(T^2y,T^2y,y)=S(2,2,2)=0,$$

$$S(T^2y,T^2y,x)=S(1,1,2)=2,$$

$$S(T^2x,T^2x,y)=S(2,2,1)=2$$

ve bu değerler kullanılarak

$$S(T^2x,T^2x,T^2y)=2<\max\{2,0,0,2,2\}=2$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Bu durumda T fonksiyonu $(S50)$ koşulunu sağlamaz.

Benzer şekilde $p\geq 3$ için de $(S50)$ koşulunun sağlanmadığı görülür. Sonuç olarak her p için T fonksiyonunun $(S50)$ koşulunu sağlamadığı elde edilir.

T fonksiyonunun $p=1$ ve $q=2$ için $(S75)$ koşulunu sağladığı açıktır.

3.1.20 Örnek. Örnek 3.1.17 de tanımlı olan $S-$metrik ile birlikte tanımlanan $\mathbb{R}$ $S-$metrik uzayını dikkate alalım. $T:[0,1]\cup\{3\}\to[0,1]\cup\{3\}$ fonksiyonunu

$$Tx=\begin{cases}\sqrt{x} & , \quad x\in[0,1],\ x\neq\frac{1}{2},\ x\neq\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & , \quad x=\frac{1}{2} \\ 3 & , \quad x=\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & , \quad x=3\end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. $([0,1]\cup\{3\},S)$ ikilisinin bir $S-$metrik uzay olduğu kolayca görülebilir. $x\in X=[0,1]\cup\{3\}$ alalım. Herhangi bir $y\in X$, $x\neq y$ için T fonksiyonu $(S100)$ koşulunu sağlayacak şekilde bir $p(x)$ pozitif tamsayısı olmadığından $(S100)$ koşulu sağlanmaz. Fakat herhangi $x,y\in X$, $x\neq y$ noktaları için $(S125)$ koşulu sağlanacak şekilde bir $p(x,y)$ pozitif tamsayısının var olduğu açıktır. Sonuç olarak T fonksiyonu $(S125)$ koşulunu sağlar [33].

3.1.21 Uyarı. Önerme 3.1.7, Örnek 3.1.18 ve Örnek 3.1.19 dan $(S75)$ ve $(S100)$ koşullarının birbirinden bağımsız olduğu elde edilir [33].

3.2 S – Metrik Uzaylarda Bazı Sabit Nokta Teoremleri

Bu bölümde $S-$ metrik uzaylarda bazı sabit nokta teoremleri elde edilecektir. Bu sabit nokta teoremlerini elde etmek için $S-$ metrik uzaylarda C_S- fonksiyon, L_S- fonksiyon, kompaktlık, çap, yığılma noktası ve periyodik nokta kavramlarından yararlanılacaktır. Elde edilen sabit nokta teoremlerinin çeşitli daralma fonksiyonları kullanılarak bazı sonuçları araştırılacaktır.

3.2.1 Teorem. (X,S) bir $S-$metrik uzay ve $T:X\to X$ bir C_S- fonksiyon olsun. Bu durumda T fonksiyonunun X kümesinde bir sabit noktaya sahip olması için gerekli ve yeterli koşul

$$T^p x = T^q x \tag{3.5}$$

koşulunu sağlayan p ve q, $p > q \geq 0$ tamsayılarının ve $x \in X$ noktasının var olmasıdır. Eğer (3.5) koşulu sağlanıyorsa $T^q x$, T fonksiyonunun bir sabit noktasıdır [38].

İspat. $x_0 \in X$, T nin bir sabit noktası olsun. $p = 1$, $q = 0$ için (3.5) koşulu sağlanır.

Tersine,

$$T^p x = T^q x$$

eşitliğini sağlayan p ve q, $p > q \geq 0$ tamsayıları ve $x \in X$ noktasının var olduğunu kabul edelim.

p, $T^k x = T^p x$ $(k > q)$ olacak şekildeki en küçük tamsayı olsun. Eğer $T^q x = y$, $n = p - q$ alınırsa

$$T^n y = T^n T^q x = T^{p-q+q} x = T^p x = T^q x = y$$

elde edilir ve n, $T^n y = y$ $(n \geq 1)$ olacak şekildeki en küçük tamsayıdır.

Şimdi y nin T fonksiyonunun bir sabit noktası olduğunu gösterelim. Bunun için y nin T fonksiyonunun bir sabit noktası olmadığını kabul edelim. Bu durumda $n \geq 2$ ve $0 \leq i < j \leq n-1$ için

$$T^i y \neq T^j y$$

olur. T fonksiyonu bir $C_S -$ fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned} S(T^i y, T^i y, y) &= S(T^i y, T^i y, T^n y) = S(T^n y, T^n y, T^i y) \\ &< \max_{1 \leq j \leq n} \{S(T^j y, T^j y, y)\} \\ &= \max_{1 \leq j \leq n-1} \{S(T^j y, T^j y, y)\}, \; i = 1, 2, \ldots, n-1 \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikten

$$\max_{1 \leq i \leq n-1} \{S(T^i y, T^i y, y)\} < \max_{1 \leq j \leq n-1} \{S(T^j y, T^j y, y)\}$$

olur. Bu ise bir çelişkidir.

Sonuç olarak $T^q x = y$, T fonksiyonunun bir sabit noktasıdır. □

3.2.2 Sonuç. $T: X \to X$, $(S25)$ koşulunu sağlayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda T fonksiyonunun X kümesinde bir sabit noktaya sahip olması için gerekli ve yeterli koşul

$$T^p x = T^q x$$

koşulunu sağlayan p ve q, $p > q \geq 0$ tamsayılarının ve $x \in X$ noktasının var olmasıdır. Eğer (3.5) koşulu sağlanıyorsa $T^q x$, T fonksiyonunun bir sabit noktasıdır [38].

3.2.3 Teorem. (X,S) bir $S-$metrik uzay ve $T: X \to X$ bir L_S- fonksiyon olsun. Bu durumda T fonksiyonunun X kümesinde bir sabit noktaya sahip olması için gerekli ve yeterli koşul (3.5) koşulunu sağlayan p ve q, $p > q \geq 0$ tamsayılarının ve $x \in X$ noktasının var olmasıdır. Eğer (3.5) koşulu sağlanıyorsa $T^q x$, T fonksiyonunun bir sabit noktasıdır [38].

İspat. Önerme 3.1.8 ve Teorem 3.2.1 den açıktır. □

Şimdi *periyodik indeks* kavramı $S-$metrik uzaylara genelleştirilerek yeni sabit nokta teoremleri elde edilecektir.

3.2.4. Tanım. (X,S) bir $S-$ metrik uzay, $T: X \to X$ bir fonksiyon ve $x \in X$ olsun.

$$T^n x = x \tag{3.6}$$

olacak şekilde bir pozitif n tamsayısı varsa x noktasına T fonksiyonunun bir periyodik noktası denir. (3.6) koşulunu sağlayan en küçük pozitif n tamsayısına da x noktasının periyodik indeksi denir [38].

3.2.5 Teorem. (X,S) bir $S-$metrik uzay ve $T: X \to X$ bir L_S- fonksiyon olsun. Bu durumda T fonksiyonunun X kümesinde bir sabit noktaya sahip olması için gerekli ve yeterli koşul T fonksiyonunun X kümesinde bir periyodik noktaya sahip olmasıdır [38].

İspat. x_0, T fonksiyonunun bir sabit noktası olsun. $n=1$ için (3.6) koşulunun sağlandığı açıktır. Böylece T fonksiyonu X de bir x_0 periyodik noktasına sahiptir.

Tersine, $x_0 \in X$ noktasının T fonksiyonunun bir periyodik noktası olduğunu, yani

$$T^n x_0 = x_0$$

olacak şekilde bir n pozitif tamsayısının var olduğunu kabul edelim.

Şimdi x_0 ın T fonksiyonunun bir sabit noktası olduğunu gösterelim. Bunun için x_0 ın T fonksiyonunun bir sabit noktası olmadığını kabul edelim. Bu durumda $n \geq 2$ ve $0 \leq i < j \leq n-1$ için

$$T^i x_0 \neq T^j x_0$$

olur. T fonksiyonu bir L_S- fonksiyon olduğundan

$$S(T^n x_0, T^n x_0, T^i x_0) < \max_{0 \leq p < q \leq n} \{S(T^p x_0, T^p x_0, T^q x_0)\},\ i = 1, 2, \ldots, n-1$$

eşitsizliği elde edilir. $q = n$ için

$$\max_{1 \leq i \leq n-1} \{S(T^i x_0, T^i x_0, T^n x_0)\} < \max_{0 \leq p \leq n-1} \{S(T^p x_0, T^p x_0, T^n x_0)\}$$

olur. Bu ise bir çelişkidir.

Sonuç olarak x_0, T fonksiyonunun bir sabit noktasıdır. □

3.2.6 Sonuç. (X, S) bir $S-$ metrik uzay ve $T : X \to X$, $(S25)$ koşulunu sağlayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(1) T fonksiyonu X de bir sabit noktaya sahiptir,

(2) T fonksiyonu X de bir periyodik noktaya sahiptir,

(3) $T^p x = T^q x$ koşulunu sağlayan p ve q, $p > q \geq 0$ tamsayıları ve $x \in X$ noktası vardır.

Eğer (3) koşulu sağlanıyorsa $T^q x$, T fonksiyonunun bir sabit noktasıdır.

(X, S) bir $S-$ metrik uzay olsun. Eğer X deki her dizi yakınsak bir alt diziye sahipse X kümesine kompakt küme denir.

Kompakt $S-$ metrik uzaylar için aşağıdaki teorem verilecektir.

3.2.7 Teorem. (X,S) bir kompakt $S-$ metrik uzay ve $T:X\to X$ $(S25a)$ koşulunu sağlayan sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda T fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır [38].

İspat. T sürekli bir fonksiyon ve X kompakt olduğundan $TX\subset Y$ olacak şekilde X in bir kompakt Y alt kümesi vardır. Bu durumda $TY\subset Y$ dir ve $A=\bigcap_{n=1}^{\infty}T^nY$, T fonksiyonu tarafından kendi üzerine resmedilen X in boştan farklı kompakt bir alt kümesidir.

Şimdi A kümesinin T fonksiyonunun tek sabit noktasından oluşan tek noktalı bir küme olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki A kümesi tek noktadan oluşmasın. O zaman $diam\{A\}>0$ dır. A kompakt alt küme olduğundan

$$S(x,x,y)=diam\{A\}$$

olacak şekilde $x,y\in A$ noktaları vardır. Ayrıca T fonksiyonu A kümesini kendi üzerine resmettiğinden $Tx'=x$, $Ty'=y$ olacak şekilde $x',y'\in A$ noktaları vardır. T fonksiyonu $(S25a)$ koşulunu sağladığından

$$diam\{A\}=S(x,x,y)=S(Tx',Tx',Ty')<diam\{A\}$$

olur. Bu ise bir çelişkidir.

Sonuç olarak T fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır. □

3.2.8 Sonuç. (X,S) bir kompakt $S-$ metrik uzay ve $T:X\to X$ $(S25)$ koşulunu sağlayan sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda T fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır [38].

Teorem 3.2.7 nin bir sonucu olarak, bir kompakt $S-$metrik uzay üzerinde sürekli T fonksiyonları için Nemytskii – Edelstein teoreminin iki yeni genellemesi verilebilir. Eğer T fonksiyonu Teorem 2.3.16 daki eşitsizliği sağlıyorsa o zaman $(S25)$ koşulunu da sağlar. Gerçekten, her $x,y\in X\left(x\neq y\right)$ için

$$\begin{aligned}&S(Tx,Tx,Ty)<S(x,x,y)\\&<\max\left\{S(x,x,y),S(Tx,Tx,x),S(Ty,Ty,y),S(Ty,Ty,x),S(Tx,Tx,y)\right\}\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki sonuçları ifade edebiliriz:

(1) Sonuç 3.2.8, Teorem 2.3.16 nın bir genellemesidir.

(2) Önerme 3.1.11 den Teorem 3.2.7 nin Teorem 2.3.16 nın bir başka genellemesi olduğu elde edilir.

Şimdi $(S25)$ ve $(S25a)$ koşullarını sağlayan fakat Teorem 2.3.16 daki eşitsizliği sağlamayan bir fonksiyon örneği verilecektir.

3.2.9 Örnek. Alışılmış $S-$metrik ile birlikte $X=[0,1]$ $S-$metrik uzayını dikkate alalım. $T:X\to X$ fonksiyonunu her $x\in X$ için

$$Tx=\begin{cases} x+\dfrac{1}{2} & , \quad x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right) \\ 1 & , \quad x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right] \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. T fonksiyonu $([0,1],S)$ kompakt $S-$metrik uzayı üzerinde sürekli bir fonksiyondur. $x,y\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right)$ için

$$S(Tx,Tx,Ty)=2\left|x-y\right|<S(x,x,y)=2\left|x-y\right|$$

elde edilir. Bu durumda Teorem 2.3.16 daki eşitsizlik sağlanmaz. T fonksiyonunun $(S25)$ ve $(S25a)$ koşullarını sağladığı kolaylıkla görülebilir. Sonuç olarak, T fonksiyonunun $[0,1]$ kümesi üzerinde bir tek $x=1$ sabit noktası vardır [38].

Şimdi $S-$ metrik uzaylar için yığılma noktası tanımını verelim.

3.2.10 Tanım. (X,S) bir $S-$metrik uzay ve $A\subset X$ olsun. Her $r>0$ için

$$(B_S(x,r)-\{x\})\cap A\neq\varnothing$$

ise $x\in X$ noktasına A kümesinin bir yığılma noktası denir [38].

3.2.11 Teorem. (X,S) bir $S-$metrik uzay ve $A\subset X$ olsun. Bu durumda x noktasının A kümesinin bir yığılma noktası olması için gerekli ve yeterli koşul $i\neq j$ için $x_i\neq x_j$ ve $\lim\limits_{n\to\infty}S(x_n,x_n,x)=0$ olacak şekilde $x_i\in X$ $(i=1,2,\ldots,n,\ldots)$ noktalarının var olmasıdır [38].

İspat. Her $i \neq j$ için $x_i \neq x_j$ ve $\lim_{n\to\infty} S(x_n, x_n, x) = 0$ olacak şekilde $x_i \in X$ $(i = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$ noktalarının var olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisi $A - \{x\}$ kümesinde x noktasına yakınsar. Böylece $r > 0$ ve $n \geq n_0$ için $x_n \in B_S(x, r)$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan $(B_S(x, r) - \{x\}) \cap A \neq \varnothing$ olur. Sonuç olarak x noktası A kümesinin bir yığılma noktasıdır.

Tersine, x noktası A kümesinin bir yığılma noktası olsun. $x_1 \in B_S(x, 1)$ ve $x_1 \neq x$ olacak şekilde bir $x_1 \in A$ seçelim. Şimdi $x_2 \in B_S\left(x, \frac{1}{2}\right)$ ve $x_2 \neq x$, $x_2 \neq x_1$ olacak şekilde bir $x_2 \in A$ seçelim. Bu şekilde devam edersek $x_n \in B_S\left(x, \frac{1}{n}\right)$ ve $x_n \neq x$, $x_n \neq x_1$, $x_n \neq x_2$, … , $x_n \neq x_{n-1}$, … olacak şekilde bir $x_n \in A$ seçebiliriz. Bu durumda $\lim_{n\to\infty} S(x_n, x_n, x) = 0$ olacak şekilde A kümesinin farklı elemanlarını içeren $\{x_n\}$ dizisi elde edilir. □

3.2.12 Teorem. (X, S) bir $S-$ metrik uzay, $T : X \to X$ sürekli bir C_S- fonksiyon ve x, $\{T^n x\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi bir x_0 yığılma noktasına sahip olacak şekilde X kümesinde bir nokta olsun. O zaman $T^n x_0$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) noktaları $\{T^n x\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin yığılma noktalarıdır [38].

İspat. x_0 , $\{T^n x\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin bir yığılma noktası olsun. Bu durumda x_0 noktasına yakınsayan bir $\{T^{n_i} x\}$ alt dizisi vardır, yani,

$$\lim_{n_i\to\infty} S(T^{n_i} x, T^{n_i} x, x_0) = 0$$

olur. Şimdi $T^n x_0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ noktalarının $\{T^n x\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin yığılma noktaları olduğunu gösterelim. T fonksiyonu X kümesi üzerinde bir C_S- fonksiyon olduğundan

$$\lim_{n_i\to\infty} S(T^{n_i} x, T^{n_i} x, T^n x_0) \leq \lim_{n_i\to\infty} \{S(T^{n_i} x, T^{n_i} x, x_0)\} = 0$$

olur. Sonuç olarak her bir $n = 0, 1, 2, \ldots$ için $T^n x_0$, $\{T^n x\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin yığılma noktalarıdır. □

3.2.13 Teorem. (X, S) bir tam $S-$ metrik uzay, $T : X \to X$ sürekli bir C_S- fonksiyon ve x, $\{T^n x\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi bir x_0 yığılma noktasına sahip olacak şekilde

X kümesinde bir nokta olsun. Bu durumda T fonksiyonunun $\{T^n x_0\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinde bir sabit noktaya sahip olması için gerekli ve yeterli koşul aşağıdaki ifadelerden birinin sağlanmasıdır:

(1) $\{T^n x\}_{n=0}^{\infty}$ yakınsak bir dizidir.

(2) z , $\{T^n x_0\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin bir elamanı olmak üzere $T^q z = z$ olacak şekilde pozitif bir q tamsayısı vardır [38].

İspat. $\{T^n x_0\} = \{x_0\}$ ise bu durumda $\{T^n x\}$ dizisinin yakınsak olduğu açıktır ve (1) koşulu sağlanır. $\{T^n x_0\} \neq \{x_0\}$ ve $z \in \{T^n x_0\}$, T fonksiyonunun bir sabit noktası olsun. z , $\{T^n x\}$ dizisinin bir yığılma noktası olduğundan z noktasına yakınsayan bir $\{T^{n_i} x\}$ alt dizisi vardır. Böylece Teorem 3.2.12 den

$$\lim_{n_i \to \infty} S(T^{n_i} x, T^{n_i} x, z) = \lim_{n_i \to \infty} S(T^{n_i} x, T^{n_i} x, T^n z)$$

elde edilir. O zaman $T^n z = z$ olur ve böylece (2) koşulu sağlanır.

Tersine olarak (1) koşulu sağlanırsa $\{T^n x_0\} = \{x_0\}$ ve x_0 bir sabit noktadır. Eğer (2) koşulu sağlanırsa o zaman Teorem 3.2.1 den T fonksiyonunun bir sabit noktası vardır. □

3.2.14 Sonuç. (X,S) bir $S-$ metrik uzay, $T : X \to X$ sürekli bir $L_S -$ fonksiyon (ya da T fonksiyonu $(S25)$ koşulunu sağlasın) ve x, $\{T^n x\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi bir x_0 yığılma noktasına sahip olacak şekilde X kümesinde bir nokta olsun. Bu durumda T fonksiyonunun $\{T^n x_0\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinde bir sabit noktaya sahip olması için gerekli ve yeterli koşul aşağıdaki ifadelerden birinin sağlanmasıdır:

(1) $\{T^n x\}_{n=0}^{\infty}$ yakınsak bir dizidir.

(2) z , $\{T^n x_0\}_{n=0}^{\infty}$ da bir nokta olmak üzere $T^q z = z$ olacak şekilde pozitif bir q tamsayısı vardır [38].

$(S25)$ daralma fonksiyonunun genelleştirmeleri için aşağıdaki sabit nokta teoremleri elde edilmiştir.

3.2.15 Teorem. (X,S) bir $S-$metrik uzay ve $T:X\to X$ $(S125)$ koşulunu sağlayan bir fonksiyon olsun. Eğer T fonksiyonunun bir sabit noktası varsa tektir [33].

İspat. $x,y\in X$, $x\neq y$ olacak şekilde T fonksiyonunun iki sabit noktası olsun. $(S125)$ koşulu ve Yardımcı Teorem 2.3.5 kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
S(T^p x,T^p x,T^p y) &< \max\{S(x,x,y),S(T^p x,T^p x,x),S(T^p y,T^p y,y),\\
&\qquad S(T^p y,T^p y,x),S(T^p x,T^p x,y)\}\\
&= \max\{S(x,x,y),0,0,S(y,y,x),S(x,x,y)\}\\
&= S(x,x,y)
\end{aligned}
$$

olacak şekilde bir $p=p(x,y)$ pozitif tamsayısının var olduğu açıktır. Bu durumda, $T^p x=x$ ve $T^p y=y$ olduğundan

$$S(T^p x,T^p x,T^p y)=S(x,x,y)<S(x,x,y)$$

olduğu elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Sonuç olarak $x=y$ dir, yani sabit nokta tektir. □

3.2.16 Sonuç. (X,S) bir $S-$ metrik uzay ve $T:X\to X$ $(S25)$ (sırasıyla $(S50)$ ve $(S100)$) koşulunu sağlayan bir fonksiyon olsun. Eğer T fonksiyonunun bir sabit noktası varsa tektir [33].

İspat. Önerme 3.1.16 dan ispat kolaylıkla görülür. □

3.2.17 Sonuç. (X,S) bir $S-$ metrik uzay ve $T:X\to X$ $(S75)$ koşulunu sağlayan bir fonksiyon olsun. Eğer T fonksiyonunun bir sabit noktası varsa tektir [33].

İspat. $(S75)$ koşulunun tanımı kullanılarak Teorem 3.2.15 ün ispatında kullanılan yönteme benzer şekilde ispat görülür. □

3.2.18 Teorem. (X,S) bir $S-$ metrik uzay, $T:X\to X$ $(S125)$ koşulunu sağlayan bir fonksiyon, $x\in X$ ve x noktası m periyodik indeksli T fonksiyonunun bir periyodik noktası olsun. Bu durumda T fonksiyonunun $\{T^n x\}$ $(n\geq 0)$ dizisinde bir sabit noktasının var olması için gerekli ve yeterli koşul herhangi $T^{n_1}x, T^{n_2}x \in \{T^n x\}$ $(n \geq 0)$, $T^{n_1}x \neq T^{n_2}x$ noktaları için

$$T^{p(T^{n_3}x, T^{n_4}x)}(T^{n_3}x) = T^{n_1}x \text{ ve } T^{p(T^{n_3}x, T^{n_4}x)}(T^{n_4}x) = T^{n_2}x$$

olacak şekilde $T^{n_3}x, T^{n_4}x \in \{T^n x\}$ noktalarının var olmasıdır. Bu durumda x noktası T fonksiyonunun X kümesindeki tek sabit noktasıdır [33].

İspat. x noktasının periyodik indeksi m olduğundan

$$\{T^n x\} = \{x, Tx, \ldots, T^{m-1}x\}$$

olur. $x \neq Tx$ ise

$$\delta(\{T^n x\}) = \max_{0 \leq k, l \leq m-1, k \neq l} \{S(T^k x, T^k x, T^l x)\} = S(T^{n_1}x, T^{n_1}x, T^{n_2}x)$$

olacak şekilde $T^{n_1}x, T^{n_2}x \in \{T^n x\}$, $T^{n_1}x \neq T^{n_2}x$ vardır. Hipotezden

$$T^{p(T^{n_3}x, T^{n_4}x)}(T^{n_3}x) = T^{n_1}x \text{ ve } T^{p(T^{n_3}x, T^{n_4}x)}(T^{n_4}x) = T^{n_2}x$$

olacak şekilde $T^{n_3}x, T^{n_4}x \in \{T^n x\}$ vardır. $T^{n_1}x \neq T^{n_2}x$ olduğundan $T^{n_3}x \neq T^{n_4}x$ dir Böylece

$$\begin{aligned}
\delta(\{T^n x\}) &= S(T^{n_1}x, T^{n_1}x, T^{n_2}x) \\
&= S(T^{p(T^{n_3}x, T^{n_4}x)}(T^{n_3}x), T^{p(T^{n_3}x, T^{n_4}x)}(T^{n_3}x), T^{p(T^{n_3}x, T^{n_4}x)}(T^{n_4}x)) \\
&< \max\{S(T^{n_3}x, T^{n_3}x, T^{n_4}x), S(T^{n_1}x, T^{n_1}x, T^{n_3}x), S(T^{n_2}x, T^{n_2}x, T^{n_4}x), \\
&\qquad S(T^{n_2}x, T^{n_2}x, T^{n_3}x), S(T^{n_1}x, T^{n_1}x, T^{n_4}x)\} \\
&\leq \delta(\{T^n x\})
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu bir çelişkidir. Böylece $x = Tx$ olur. Teorem 3.2.15 ten x tektir.

Teoremin tersinin ispatı açıktır. □

3.2.19 Sonuç. (X, S) bir $S-$ metrik uzay, $T: X \to X$ $(S100)$ koşulunu sağlayan bir fonksiyon ve $x \in X$, T fonksiyonunun periyodik noktası olsun. Aşağıdaki koşullar denktir:

(1) T fonksiyonunun $\{T^n x\}$ $(n \geq 0)$ dizisinde bir tek sabit noktası vardır.

(2) $p(T^{n_0}x)$ pozitif tamsayı olmak üzere herhangi $T^{n_1}x \in \{T^n x\}$ $(n \geq 0)$ için

$$T^{p(T^{n_0}x)}(T^{n_0}x) = T^{n_1}x$$

olacak şekilde $T^{n_0}x \in \{T^n x\}$ $(n \geq 0)$ vardır.

Bu durumda x noktası T fonksiyonunun bir tek sabit noktasıdır [33].

3.2.20 Sonuç. (X,S) bir $S-$ metrik uzay, $T: X \to X$ $(S75)$ koşulunu sağlayan bir fonksiyon ve $x \in X$, T fonksiyonunun periyodik noktası olsun. p ve q pozitif tamsayılar olmak üzere herhangi $T^{n_1}x, T^{n_2}x \in \{T^n x\}$ $(n \geq 0)$, $T^{n_1}x \neq T^{n_2}x$ için

$$T^p(T^{n_3}x) = T^{n_1}x \text{ ve } T^q(T^{n_4}x) = T^{n_2}x$$

olacak şekilde $T^{n_3}x, T^{n_4}x \in \{T^n x\}$ varsa x noktası T fonksiyonunun bir tek sabit noktasıdır [33].

3.2.21 Sonuç. (X,S) bir $S-$ metrik uzay ve $T: X \to X$ $(S50)$ koşulunu sağlayan bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki koşullar denktir:

(1) T fonksiyonunun X kümesinde bir sabit noktası vardır.

(2) T fonksiyonunun X kümesinde bir periyodik noktası vardır.

Bu durumda x noktası T fonksiyonunun bir tek sabit noktasıdır [33].

Bir sonraki teoremde $(S75)$ koşulunu sağlayan $T: X \to X$ fonksiyonu için sabit noktanın varlığını garanti edecek bazı koşulları elde edilmiştir.

3.2.22 Teorem. (X,S) bir $S-$ metrik uzay, $T: X \to X$ $(S75)$ koşulunu sağlayan bir fonksiyon, $x \in X$, m periyodik indeksli T fonksiyonunun periyodik noktası ve p, q pozitif tamsayılar olsun. Aşağıdaki koşullar sağlansın:

(1) $p = p_1 m + p_2$, $q = q_1 m + q_2$, $0 \leq p_2, q_2 < m$ ve p_1, q_1 negatif olmayan tamsayılardır.

(2) $2|p_2 - q_2| \neq m$ dir.

Bu durumda x noktası T fonksiyonunun X kümesindeki bir tek sabit noktasıdır [33].

İspat. x noktasının T fonksiyonunun bir tek sabit noktası olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki x noktası T fonksiyonunun sabit noktası olmasın.

$$A=\{T^n x\}=\{x,Tx,T^2x,\ldots,T^n x,\ldots\}$$

olsun. x noktasının periyodik indeksi m olduğundan

$$A=\{T^n x\}=\{x,Tx,T^2x,\ldots,T^{m-1}x\}$$

olur ve A kümesinin elemanları birbirinden farklıdır. Bu yüzden $0\le i<j\le m$ ve

$$\delta(A)=\max_{0\le k,l\le m-1,k\ne l} S(T^k x,T^k x,T^l x)=S(T^i x,T^i x,T^j x)$$

olacak şekilde i, j vardır.

$p_2\ge q_2$ olsun. Ayrıca negatif olmayan n tamsayısı için $T^n(A)=A$ dır. Böylece

$$T^i x=T^{p_2}(T^{n_1}x) \text{ ve } T^j x=T^{q_2}(T^{n_2}x) \tag{3.7}$$

olacak şekilde $T^{n_1}x, T^{n_2}x\in A$ vardır. Benzer şekilde

$$T^i x=T^{q_2}(T^{n_3}x) \text{ ve } T^j x=T^{p_2}(T^{n_4}x) \tag{3.8}$$

olacak şekilde $T^{n_3}x, T^{n_4}x\in A$ vardır.

$n_1\ne n_2$, $n_3\ne n_4$ durumlarından en az birinin doğru olduğunu ispatlayalım.

$n_3=n_4$ olsun.

$$0\le i,\ j,\ p_2, q_2, n_1, n_2, n_3, n_4<m$$

olduğundan ve (3.7), (3.8) den

$$p_2+n_1=am+i,\quad q_2+n_2=bm+j \tag{3.9}$$

$$q_2+n_3=cm+i,\quad p_2+n_4=dm+j \tag{3.10}$$

olacak şekilde $a, b, c, d\in\{0,1\}$ vardır.

$n_1=n_2$ ise $p_2\ge q_2$ olduğundan $am+i\ge bm+j$ elde edilir. $i<j$ olduğundan $a=1$, $b=0$ olur. (3.9) dan

$$(p_2-q_2)+(j-i)=m \tag{3.11}$$

dir. (3.10) eşitlikleri ve $n_3=n_4$ olduğu kullanılarak

$$(p_2 - q_2) = (d-c)m + (j-i) \tag{3.12}$$

elde edilir.

$0 \le p_2 - q_2 \le m-1,\ 0 \le j-i < m$ olduğundan (3.12) eşitliği kullanılarak $d-c=0$ olur. Böylece $p_2 - q_2 = j-i$ olduğu görülür.

(3.11) eşitliğinden

$$2(p_2 - q_2) = m$$

olur. Bu bir çelişkidir. Böylece $n_1 \neq n_2$ olmalıdır. $T^{n_1}x \neq T^{n_2}x$ dir. $T^{p_2}x = T^{p}x$, $T^{q_2}x = T^{q}x$ olduğu kullanılarak

$$\begin{aligned}
\delta(A) &= S(T^i x, T^i x, T^j x) = S(T^{p_2}(T^{n_1}x), T^{p_2}(T^{n_1}x), T^{q_2}(T^{n_2}x)) \\
&= S(T^{p}(T^{n_1}x), T^{p}(T^{n_1}x), T^{q}(T^{n_2}x)) \\
&< \max\{S(T^{n_1}x, T^{n_1}x, T^{n_2}x), S(T^{p}(T^{n_1}x), T^{p}(T^{n_1}x), T^{n_1}x), \\
&\qquad S(T^{q}(T^{n_2}x), T^{q}(T^{n_2}x), T^{n_2}x), S(T^{q}(T^{n_2}x), T^{q}(T^{n_2}x), T^{n_1}x), \\
&\qquad S(T^{p}(T^{n_1}x), T^{p}(T^{n_1}x), T^{n_2}x)\} \\
&\le \delta(A)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu bir çelişkidir. Sonuç olarak $x = Tx$ dir.

Benzer şekilde $n_1 = n_2$ ise $n_3 \neq n_4$ olduğu görülür ve böylece $x = Tx$ olur. Sonuç 3.2.17 den x noktası T fonksiyonunun bir tek sabit noktasıdır. □

3.3 Rhoades Daralma Fonksiyonunun Bir Uygulaması

Bu bölümde Sonuç 2.3.19 daki daralma fonksiyonu aşağıdaki gibi $(Q25)$ olarak adlandırılarak yeni sabit nokta teoremleri elde edilmiştir.

Herhangi $x, y \in X$ için

$$\textbf{(Q25)} \quad S(Tx,Tx,Ty) \le h\max\{S(x,x,y), S(Tx,Tx,x), S(Ty,Ty,y)$$
$$S(Ty,Ty,x), S(Tx,Tx,y)\}$$

olacak şekilde $h \in \left[0, \frac{1}{3}\right)$ sayısı vardır.

3.3.1 Tanım: (X,S) bir $S-$metrik uzay ve $T: X \to X$ bir fonksiyon olsun. X, $S-$ metrik uzayının T_S- yörüngesel tam olması için gerekli ve yeterli koşul bir $x \in X$ için $\{x, Tx, \ldots, T^n x, \ldots\}$ dizisindeki her Cauchy dizisinin X de yakınsak olmasıdır [33].

3.3.2 Teorem: (X,S), T_S- yörüngesel tam ve $T: X \to X$ $(Q25)$ koşulunu sağlayan bir fonksiyon olsun. T fonksiyonunun X de bir tek sabit noktası vardır [33].

İspat. Sonuç 2.3.18 den açıktır.

Şimdi $S-$ metrik uzaylardaki $(Q25)$ daralma fonksiyonunun tanımını aşağıdaki şekilde genişletelim:

$h \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ olmak üzere herhangi $x, y \in X$, bazı sabit p ve q pozitif tamsayıları için

$$\textbf{(Q25a)} \quad S(T^p x, T^p x, T^q y) \le h\max\{S(T^{r_1}x, T^{r_1}x, T^{s_1}y), S(T^{r_1}x, T^{r_1}x, T^{r_2}x),$$
$$S(T^{s_1}y, T^{s_1}y, T^{s_2}y) : 0 \le r_1, r_2 \le p \text{ ve } 0 \le q_1, q_2 \le q\}$$

dır.

3.3.3 Teorem: (X,S) bir tam $S-$ metrik uzay ve $T: X \to X$, $(Q25a)$ koşulunu sağlayan sürekli bir fonksiyon olsun. T fonksiyonunun X de bir tek sabit noktası vardır [33].

İspat. Genelliği bozmadan $h \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ alabiliriz. Bu durumda $(Q25a)$ koşulu sağlanır ve $\frac{h}{1-2h} \geq 1$ olur. $p \geq q$ olsun.

$x \in X$ olsun ve $\{T^n x : n = 1, 2, \ldots\}$ dizisinin $S-$ sınırlı olmadığını kabul edelim. Açıktır ki

$$\{S(T^n x, T^n x, T^q x) : n = 1, 2, \ldots\}$$

dizisi $S-$ sınırlı değildir. Böylece

$$S(T^n x, T^n x, T^q x) > \frac{h}{1-2h} \max\{S(T^i x, T^i x, T^q x) : 0 \leq i \leq p\}$$

olacak şekilde bir n tamsayısı vardır.

m, n tamsayıların en küçüğü olsun. $\frac{h}{1-2h} \geq 1$ olduğundan $m > p \geq q$ olur. Böylece

$$S(T^m x, T^m x, T^q x) > \frac{h}{1-2h} \max\{S(T^i x, T^i x, T^q x) : 0 \leq i \leq p\}$$

$$\geq \max\{S(T^{r_1} x, T^{r_1} x, T^q x) : 0 \leq r_1 \leq m\} \qquad (3.13)$$

olur. (3.13) eşitsizliği kullanılarak

$$(1-2h) S(T^m x, T^m x, T^q x) > h \max\{S(T^i x, T^i x, T^q x) : 0 \leq i \leq p\}$$

$$\geq h \max\{S(T^i x, T^i x, T^{r_1} x) - S(T^{r_1} x, T^{r_1} x, T^q x) : 0 \leq i \leq p \text{ ve } 0 \leq r_1 < m\}$$

$$\geq h \max\{S(T^i x, T^i x, T^{r_1} x) - S(T^m x, T^m x, T^q x) : 0 \leq i \leq p \text{ ve } 0 \leq r_1 < m\}$$

ve böylece

$$S(T^m x, T^m x, T^q x) > h \max\{S(T^i x, T^i x, T^{r_1} x) : 0 \leq i \leq p \text{ ve } 0 \leq r_1 < m\} \qquad (3.14)$$

elde edilir.

Şimdi

$$S(T^m x, T^m x, T^q x) > h \max\{S(T^i x, T^i x, T^{r_1} x) : 0 \leq i, r_1 < m\} \qquad (3.15)$$

olduğunu ispatlayalım. Tersine

$$S(T^m x, T^m x, T^q x) \leq h \max\{S(T^i x, T^i x, T^{r_1} x) : 0 \leq i, r_1 < m\}$$

olması durumunda (3.14) eşitsizlikleri kullanılarak

$$S(T^m x, T^m x, T^q x) \le h \max\{S(T^i x, T^i x, T^{r_1} x) : p < i, r_1 < m\} \tag{3.16}$$

elde edilir.

$(Q25a)$ koşulu kullanılarak (3.14) eşitsizliğinden $0 \le i \le p$ olmak üzere $S(T^i x, T^i x, T^{r_1} x)$ formundaki terimler çıkarılabildiğinden $k = 1, 2, \ldots$ için

$$S(T^m x, T^m x, T^q x) \le h^k \max\{S(T^i x, T^i x, T^{r_1} x) : p < i, r_1 < m\}$$

yazılabilir.

$k \to \infty$ için $S(T^m x, T^m x, T^q x) = 0$ elde edilir. Bu da kabulümüz ile çelişir. Bu yüzden (3.15) eşitsizliği elde edilir. Fakat $(Q25a)$ koşulu kullanılarak

$$\begin{aligned} S(T^m x, T^m x, T^q x) &\le h \max\{S(T^{r_1} x, T^{r_1} x, T^{s_1} x), S(T^{r_1} x, T^{r_1} x, T^{r_2} x), \\ &\qquad S(T^{s_1} x, T^{s_1} x, T^{s_2} x) : m - p \le r_1, r_2 \le m \text{ ve } 0 \le s_1, s_2 \le q\} \\ &\le h \max\{S(T^{r_1} x, T^{r_1} x, T^{s_1} x) : 0 \le r_1, s_1 \le m\} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu (3.15) eşitsizliğinden dolayı çelişkidir. Bu durumda $\{T^n x : n = 1, 2, \ldots\}$ dizisi $S-$ sınırlı olmalıdır.

$N = \sup\{S(T^{r_1} x, T^{r_1} x, T^{s_1} x) : r_1, s_1 = 0, 1, 2, \ldots\} < \infty$ olsun. Herhangi $\varepsilon > 0$ için $h^M N < \varepsilon$ olacak şekilde M seçelim. $m, n \ge M \max\{p, q\}$ için M defa $(Q25a)$ koşulu kullanılarak

$$S(T^m x, T^m x, T^n x) \le h^M N < \varepsilon$$

elde edilir. Böylece $\{T^n x : n = 1, 2, \ldots\}$ dizisi tam (X, S) $S-$ metrik uzayında bir Cauchy dizisidir. T fonksiyonunun sürekliliğinden $Tx_0 = x_0$ ve böylece x_0 , T fonksiyonunun bir sabit noktasıdır. x_0 ın T fonksiyonunun tek sabit noktası olduğu kolayca görülür. □

$q = 1$ (ya da $p = 1$) için $(Q25a)$ daralma fonksiyonundan $(Q25)$ daralma fonksiyonunun bir genellemesi elde edildi.

$h \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ olmak üzere herhangi $x, y \in X$, bazı sabit p pozitif tamsayısı için

$$(\boldsymbol{Q25b}) \qquad \begin{aligned} S(T^p x, T^p x, Ty) \le h \max\{ & S(T^{r_1} x, T^{r_1} x, T^s y), S(T^{r_1} x, T^{r_1} x, T^{r_2} x), \\ & S(Ty, Ty, y) : 0 \le r_1, r_2 \le p \text{ ve } s = 0,1\} \end{aligned}$$

dır.

Aşağıdaki teoremde $(Q25b)$ koşulunu sağlayan $T : X \to X$ fonksiyonunun sürekli olmak zorunda olmadığını elde edildi.

3.3.4 Teorem. (X, S) bir tam $S-$ metrik uzay ve $T : X \to X$ $(Q25b)$ koşulunu sağlayan bir fonksiyon olsun. T fonksiyonunun X de bir tek sabit noktası vardır [33].

İspat. $x \in X$ olsun. Teorem 3.3.3 ün ispatında görüldüğü gibi $\{T^n x : n = 1, 2, \ldots\}$ dizisi X tam $S-$ metrik uzayında bir Cauchy dizisidir. Böylece dizinin X de bir x_0 limiti vardır. $n \ge p$ için

$$\begin{aligned} S(T^n x, T^n x, Tx_0) \le h \max\{ & S(T^{r_1} x, T^{r_1} x, T^s x_0), S(T^{r_1} x, T^{r_1} x, T^{r_2} x), \\ & S(Tx_0, Tx_0, x_0) : n - p \le r_1, r_2 \le n \text{ ve } s = 0,1\} \end{aligned}$$

olduğu elde edilir. Yardımcı Teorem 2.3.5 ten $n \to \infty$ için

$$\begin{aligned} S(x_0, x_0, Tx_0) = S(Tx_0, Tx_0, x_0) &\le h \max\{S(T^s x_0, T^s x_0, x_0) : s = 0,1\} \\ &= hS(Tx_0, Tx_0, x_0) \end{aligned}$$

olur. $h < 1$ olduğundan $Tx_0 = x_0$ elde edilir. □

3.3.5 Sonuç. (X, S) bir tam $S-$metrik uzay ve $T : X \to X$ $(Q25)$ koşulunu sağlayan bir fonksiyon olsun. T fonksiyonunun X de bir tek sabit noktası vardır [33].

3.3.6 Uyarı. Teorem 3.3.3 te $p, q \ge 2$ olması gerektiğinde T fonksiyonu sürekli olmalıdır. Fakat aşağıdaki örnek $T : X \to X$ fonksiyonunun sürekli olmadığı durumlarda Teorem 3.3.3 ün her zaman doğru olmadığını göstermektedir.

3.3.7 Örnek. Örnek 3.1.17 de tanımlı olan $S-$ metrik ile birlikte $\mathbb{R}$ $S-$ metrik uzayını dikkate alalım. $T:[0,1]\to[0,1]$ fonksiyonu

$$Tx=\begin{cases}1 & , \quad x=0\\ \dfrac{x}{4} & , \quad x\neq 0\end{cases}$$

şeklinde tanımlı olsun. $([0,1],S)$ bir tam $S-$ metrik uzaydır. Ayrıca T fonksiyonu sürekli değildir. Herhangi $x,y\in X$ için

$$S(T^{p}x,T^{p}x,T^{q}y)=\frac{1}{4}S(T^{p-1}x,T^{p-1}x,T^{q-1}y)$$

elde edilir ve böylece $h=\dfrac{1}{4}$ ile T fonksiyonu $(Q25a)$ koşulunu sağlar. Fakat T fonksiyonunun sabit noktası yoktur [33].

Aşağıdaki teorem kompakt $S-$ metrik uzaylar üzerinde T fonksiyonunun hangi koşullar altında sabit noktasının var olduğunu göstermektedir.

3.3.8 Teorem. (X,S) bir kompakt $S-$ metrik uzay ve $T:X\to X$ herhangi $x,y\in X$ için

$$S(T^{p}x,T^{p}x,T^{q}y)<\max\{S(T^{r_1}x,T^{r_1}x,T^{s_1}y),S(T^{r_1}x,T^{r_1}x,T^{r_2}x),$$
$$S(T^{s_1}y,T^{s_1}y,T^{s_2}y):0\leq r_1,r_2\leq p \text{ ve } 0\leq s_1,s_2\leq q\} \qquad (3.17)$$

koşulunu sağlayan sürekli bir fonksiyon olsun. Burada (3.17) eşitsizliğinin sağ tarafı pozitiftir. Bu durumda T fonksiyonunun X de bir tek sabit noktası vardır [33].

İspat. T fonksiyonu $(Q25a)$ koşulunu sağlasın. Teorem 3.3.3 ten T fonksiyonunun X de bir tek sabit noktası vardır.

T fonksiyonu $(Q25a)$ koşulunu sağlamasın. $\{h_n:n=1,2,\ldots\}$, 1 e yakınsayan sayıların monoton azalan bir dizisi ise $n=1,2,\ldots$ için

$$S(T^{p}x_n,T^{p}x_n,T^{q}y_n)>h_n\max\{S(T^{r_1}x_n,T^{r_1}x_n,T^{s_1}y_n),S(T^{r_1}x_n,T^{r_1}x_n,T^{r_2}x_n),$$
$$S(T^{s_1}y_n,T^{s_1}y_n,T^{s_2}y_n):0\leq r_1,r_2\leq p \text{ ve } 0\leq s_1,s_2\leq q\}$$

olacak şekilde X de $\{x_n:n=1,2,\ldots\}$ ve $\{y_n:n=1,2,\ldots\}$ dizileri vardır. X in kompaktlığı nedeniyle sırasıyla x ve y ye yakınsayan $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizilerinin

$\{x_{n_k} : k=1,2,\ldots\}$ ve $\{y_{n_k} : k=1,2,\ldots\}$ alt dizileri vardır. T fonksiyonu sürekli olduğundan $k \to \infty$ için

$$S(T^p x, T^p x, T^q y) \geq \max\{S(T^{r_1} x, T^{r_1} x, T^{s_1} y), S(T^{r_1} x, T^{r_1} x, T^{r_2} x),$$

$$S(T^{s_1} y, T^{s_1} y, T^{s_2} y) : 0 \leq r_1, r_2 \leq p \text{ ve } 0 \leq s_1, s_2 \leq q\}$$

elde edilir. $Tx = x = y$ değilse bu bir çelişkidir. Bu durumda x noktası T fonksiyonunun bir tek sabit noktasıdır. □

3.3.9 Sonuç. (X,S) bir kompakt $S-$ metrik uzay ve $T : X \to X$ $(S25)$ koşulunu sağlayan sürekli bir fonksiyon olsun. Burada $(S25)$ koşulunun sağ tarafı pozitiftir. Bu durumda T fonksiyonunun X de bir tek sabit noktası vardır [33].

3.3.10 Uyarı. Sonuç 3.2.8, Sonuç 2.3.19 un bir genellemesidir. Sonuç 2.3.19 da verilen eşitsizlik $(Q25)$ olarak adlandırılmıştır ve bir kompakt $S-$ metrik uzay üzerinde sürekli fonksiyonlar için Sonuç 2.3.19 un bir başka genellemesi elde edilmiştir. Ayrıca bu genelleme Sonuç 3.2.8 ile çakışmaktadır. Eğer Örnek 3.2.9 da tanımlanan fonksiyon dikkate alınırsa bu fonksiyonun Sonuç 2.3.19 daki eşitsizliği sağlamadığı kolaylıkla görülebilir [38].

4. S – NORMLU UZAYLAR VE RHOADES DARALMA FONKSİYONUNUN BİR GENELLEMESİ

Bu bölümde normlu uzayların bir genellemesi olarak $S-$ normlu uzaylar tanımlandı ve bazı temel özellikleri incelendi. $S-$ normlu uzaylarda Rhoades daralma fonksiyonu ifade edilerek yeni bir sabit nokta teoremi elde edildi.

4.1 S – Normlu Uzaylar

Bu bölümde $S-$ normlu uzay kavramı tanımlanıp bu yeni uzayın bazı temel özellikleri araştırıldı. Ayrıca $S-$ metrik ve $S-$ norm ($S-$ norm ve norm) arasındaki ilişki incelendi.

4.1.1 Tanım. X bir reel vektör uzayı olsun. $\|.,.,.\|: X \times X \times X \to \mathbb{R}$ reel değerli fonksiyonu

(NS1) $\| x,y,z \| \geq 0$ ve $\| x,y,z \| = 0$ ancak ve ancak $x = y = z = 0$,

(NS2) Her $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $x,y,z \in X$ için $\| \lambda x, \lambda y, \lambda z \| = | \lambda | \| x,y,z \|$,

(NS3) Her $x,y,z,x',y',z' \in X$ için

$$\| x+x', y+y', z+z' \| \leq \| 0,x,z' \| + \| 0,y,x' \| + \| 0,z,y' \|$$

şartlarını sağlıyorsa $\| .,.,. \|$ fonksiyonuna X kümesi üzerinde bir $S-$ norm ve $(X, \| .,.,. \|)$ ikilisine de $S-$ normlu uzay denir.

4.1.2 Örnek. $X=\mathbb{R}$ ve $\|.,.,.\|: X\times X\times X\to\mathbb{R}$ fonksiyonu her $x,y,z\in X$ için

$$\|x,y,z\|=|x|+|y|+|z|$$

şeklinde tanımlı olsun. $\left(X,\|.,.,.\|\right)$ bir $S-$ normlu uzaydır.

Gerçekten $\|x,y,z\|=|x|+|y|+|z|$ fonksiyonunun (NS1), (NS2) ve (NS3) koşullarını sağladığını gösterelim.

(NS1) Fonksiyonun tanımından her $x,y,z\in X$ için $\|x,y,z\|\geq 0$ olduğu açıktır. Eğer $\|x,y,z\|=|x|+|y|+|z|=0$ ise $x=y=z=0$ olduğu elde edilir. Tersine $x=y=z=0$ ise $\|x,y,z\|=0$ olduğu açıktır.

(NS2) $x,y,z\in X$ ve $\lambda\in\mathbb{R}$ olsun.

$$\begin{aligned}\|\lambda x,\lambda y,\lambda z\| &= |\lambda x|+|\lambda y|+|\lambda z|\\ &= |\lambda||x|+|\lambda||y|+|\lambda||z|\\ &= |\lambda|\left(|x|+|y|+|z|\right)\\ &= |\lambda|\|x,y,z\|\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

(NS3) $x,y,z,x',y',z'\in X$ olsun.

$$\begin{aligned}\|x+x',y+y',z+z'\| &= |x+x'|+|y+y'|+|z+z'|\\ &= |x|+|x'|+|y|+|y'|+|z|+|z'|\\ &= |0|+|x|+|z'|+|0|+|y|+|x'|+|0|+|z|+|y'|\\ &\leq \|0,x,z'\|+\|0,y,x'\|+\|0,z,y'\|\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç olarak $\|x,y,z\|=|x|+|y|+|z|$ fonksiyonu (NS1), (NS2), (NS3) koşullarını sağlar ve böylece $\left(X,\|.,.,.\|\right)$ bir $S-$ normlu uzaydır.

Aşağıdaki önermede her $S-$ normun bir $S-$ metrik ürettiği görülmektedir.

4.1.3 Önerme. $\left(X,\|.,.,.\|\right)$ bir $S-$ normlu uzay olsun.

$$S(x,y,z)=\| x-y, y-z, z-x \| \tag{4.1}$$

şeklinde tanımlı $S: X\times X\times X \to [0,\infty)$ fonksiyonu X üzerinde bir $S-$ metrik tanımlar.

İspat. (NS1) koşulu kullanılarak (S1) koşulunun sağlandığı kolaylıkla görülür. (S2) koşulunun da sağlandığını gösterelim. (NS3) koşulu yardımıyla her $x,y,z,a\in X$ için

$$\begin{aligned}S(x,y,z)&=\| x-y, y-z, z-x \|\\&=\| x-a+a-y, y-a+a-z, z-a+a-x \|\\&\leq \| 0, x-a, a-x \| + \| 0, y-a, a-y \| + \| 0, z-a, a-z \|\\&= S(x,x,a)+S(y,y,a)+S(z,z,a)\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

S fonksiyonu bir $S-$ metriktir ve (X,S) ikilisi bir $S-$ metrik uzaydır. □

(4.1) eşitliğindeki $S-$ metriğe $S-$ norm tarafından üretilen $S-$ metrik denir ve $S_{\|.\|}$ ile gösterilir.

4.1.4 Sonuç. Her $S-$ normlu uzay bir $S-$ metrik uzaydır.

4.1.5 Örnek. X boştan farklı bir küme, (X,d) bir metrik uzay ve $S: X\times X\times X \to [0,\infty)$ fonksiyonu her $x,y,z\in X$ için [10] numaralı kaynakta

$$S(x,y,z)=d(x,y)+d(x,z)+d(y,z)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon olsun. S fonksiyonu X üzerinde bir $S-$ metriktir.

$X=\mathbb{R}$ olsun. $\mathbb{R}$ üzerindeki alışılmış metriği düşünelim. Her $x,y,z\in\mathbb{R}$ için

$$S(x,y,z) = |x-y| + |x-z| + |y-z|$$

$S-$ metriği elde edilir. Önerme 4.1.3 ten bu $S-$ metrik Örnek 4.1.2 de tanımlanan $S-$ norm tarafından üretilir. Gerçekten her $x,y,z\in X$ için

$$S(x,y,z) = \| x-y, y-z, z-x \| = |x-y| + |y-z| + |z-x|$$

$$= |x-y| + |x-z| + |y-z| = d(x,y) + d(x,z) + d(y,z)$$

bulunur.

4.1.6 Yardımcı Teorem. Bir X $S-$ normlu uzayı üzerinde bir $S-$ norm tarafından indirgenen $S-$ metrik, her $x,y,z,a\in X$ ve her λ sabiti için aşağıdaki koşulları sağlar.

(1) $S(x+a, y+a, z+a) = S(x,y,z)$.

(2) $S(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = |\lambda| S(x,y,z)$.

İspat.

(1) Önerme 4.1.3 ten

$$\begin{aligned} S(x+a, y+a, z+a) &= \| x+a-y-a, y+a-z-a, z+a-x-a \| \\ &= \| x-y, y-z, z-x \| \\ &= S(x,y,z) \end{aligned}$$

olduğu elde edilir.

(2) Önerme 4.1.3 ve (NS2) koşulundan

$$\begin{aligned} S(\lambda x, \lambda y, \lambda z) &= \| \lambda x - \lambda y, \lambda y - \lambda z, \lambda z - \lambda x \| \\ &= \| \lambda(x-y), \lambda(y-z), \lambda(z-x) \| \\ &= |\lambda| \| x-y, y-z, z-x \| \\ &= |\lambda| S(x,y,z) \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. □

Aşağıdaki örnekte görüldüğü gibi her $S-$ metrik bir $S-$ norm tarafından üretilemez.

4.1.7 Örnek. X boştan farklı bir küme ve $S : X \times X \times X \to [0,\infty)$ fonksiyonu her $x, y, z \in X$ için

$$S(x,y,z) = \begin{cases} 1 & , \quad \text{diğer durumlar} \\ 0 & , \quad x = y = z \end{cases}$$

şeklinde tanımlı olsun. S fonksiyonu X üzerinde bir $S-$metriktir. Bu $S-$metriğe ayrık $S-$metrik ve (X,S) ikilisine de ayrık $S-$metrik uzay denir.

Şimdi bu $S-$ metriğin bir $S-$norm tarafından üretilemediğini ispatlayalım. Tersine bu $S-$metrik bir $S-$norm tarafından üretilsin. Her $x, y, z \in X$ için

$$S(x,y,z) = \| x-y, y-z, z-x \|$$

eşitliği sağlanır.

Eğer $x = y \neq z$ ve $|\lambda| \neq 0,1$ seçersek

$$S(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \| 0, \lambda(y-z), \lambda(z-x) \| = 1$$

$$\neq |\lambda| S(x,y,z) = |\lambda| \| 0, y-z, z-x \| = |\lambda|$$

elde edilir. Bu ise (NS2) koşulu ile çelişir. Sonuç olarak ayrık $S-$metrik bir $S-$ norm tarafından üretilemez.

Aşağıdaki yardımcı teorem ilerleyen bölümlerde kullanılacaktır.

4.1.8 Yardımcı Teorem. $\left(X, \| .,.,. \|\right)$ bir $S-$ normlu uzay olsun. Her $x, y \in X$ için

$$\| 0, x-y, y-x \| = \| 0, y-x, x-y \|$$

dir.

İspat. (NS3) koşulundan

$$\| 0, x-y, y-x \| \leq \| 0,0,0 \| + \| 0,0,0 \| + \| 0, y-x, x-y \|$$

$$= \| 0, y-x, x-y \| \tag{4.2}$$

ve

$$\| 0, y-x, x-y \| \leq \| 0,0,0 \| + \| 0,0,0 \| + \| 0, x-y, y-x \|$$

$$= \| 0, x-y, y-x \| \tag{4.3}$$

eşitsizlikleri elde edilir. (4.2) ve (4.3) eşitsizlikleri kullanılarak

$$\| 0, x-y, y-x \| = \| 0, y-x, x-y \|$$

eşitliği bulunur. □

Aşağıdaki önermede her normun bir $S-$norm ürettiği görülmektedir.

4.1.9 Önerme. $(X, \| \,.\, \|)$ bir normlu uzay ve $\| .,.,. \| : X \times X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y, z \in X$ için

$$\| x, y, z \| = \| x \| + \| y \| + \| z \| \tag{4.4}$$

şeklinde tanımlı olsun. O zaman $(X, \| .,.,. \|)$ bir $S-$normlu uzaydır. Bu $S-$norm fonksiyonuna, $\| . \|$ normu tarafından üretilen $S-$norm denir.

İspat. $\| x, y, z \| = \| x \| + \| y \| + \| z \|$ şeklinde tanımlı fonksiyonun (NS1), (NS2) ve (NS3) koşullarını sağladığını gösterelim.

(NS1) $\| x, y, z \| \geq 0$ ve $\| x, y, z \| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y = z = 0$ olduğu normun tanımından açıktır.

(NS2) $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $x, y, z \in X$ olsun.

$$\| \lambda x, \lambda y, \lambda z \| = \| \lambda x \| + \| \lambda y \| + \| \lambda z \|$$

$$= | \lambda | \| x \| + | \lambda | \| y \| + | \lambda | \| z \|$$

$$= | \lambda | \left(\| x \| + \| y \| + \| z \| \right) = | \lambda | \| x, y, z \|$$

eşitliği elde edilir.

(NS3) $x, y, z, x', y', z' \in X$ olsun. O zaman

$$\| x + x', y + y', z + z' \| = \| x + x' \| + \| y + y' \| + \| z + z' \|$$

$$\leq \| x \| + \| x' \| + \| y \| + \| y' \| + \| z \| + \| z' \|$$

$$= \| 0 \| + \| x \| + \| z' \| + \| 0 \| + \| y \| + \| x' \| + \| 0 \| + \| z \| + \| y' \|$$

$$= \| 0, x, z' \| + \| 0, y, x' \| + \| 0, z, y' \|$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç olarak, $\| x, y, z \| = \| x \| + \| y \| + \| z \|$ fonksiyonu (NS1), (NS2), (NS3) koşullarını sağlar ve $(X, \| .,.,. \|)$ bir $S-$normlu uzaydır. □

Örneğin, Örnek 4.1.2 de tanımlanan $S-$ norm alışılmış norm tarafından üretilmiştir.

Aşağıdaki örnekte de görüldüğü gibi herhangi bir norm tarafından üretilemeyen $S-$norm örnekleri mevcuttur.

4.1.10 Örnek. X boştan farklı bir küme ve $\| .,.,. \| : X \times X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y, z \in X$ için

$$\| x, y, z \| = | x - 2y - 2z | + | y - 2x - 2z | + | z - 2y - 2x |$$

şeklinde tanımlı olsun. $\| .,.,. \|$ fonksiyonu X üzerinde bir $S-$normdur fakat bir norm tarafından üretilemez.

İlk olarak (NS1), (NS2) ve (NS3) koşullarının sağlandığını gösterelim.

(NS1) Her $x, y, z \in X$ için $\| x, y, z \| \geq 0$ ve $\| x, y, z \| = 0 \Leftrightarrow x = y = z = 0$ olduğu tanımdan açıktır.

(NS2) Her $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $x, y, z \in X$ için

$$\| \lambda x, \lambda y, \lambda z \| = | \lambda x - 2\lambda y - 2\lambda z | + | \lambda y - 2\lambda x - 2\lambda z | + | \lambda z - 2\lambda y - 2\lambda x |$$

$$= | \lambda | \left(| x - 2y - 2z | + | y - 2x - 2z | + | z - 2y - 2x | \right)$$

$$= | \lambda | \| x, y, z \|$$

eşitliği elde edilir.

(NS3) $x, y, z, x', y', z' \in X$ olsun.

$$\| x+x', y+y', z+z' \| = | x+x'-2y-2y'-2z-2z' | + | y+y'-2x-2x'-2z-2z' |$$

$$+ | z+z'-2y-2y'-2x-2x' |$$

$$\leq | 2x+2z' | + | x-2z' | + | z'-2x | + | 2y+2x' | + | y-2x' | + | x'-2y |$$

$$+ | 2z+2y' | + | z-2y' | + | y'-2z |$$

$$= \| 0, x, z' \| + \| 0, y, x' \| + \| 0, z, y' \|$$

bulunur.

Sonuç olarak $\| x, y, z \| = | x-2y-2z | + | y-2x-2z | + | z-2y-2x |$ fonksiyonu X üzerinde bir $S-$normdur.

Şimdi bu $S-$ normun herhangi bir norm tarafından üretilemediğini gösterelim. Tersine, bu $S-$normun bir norm tarafından üretildiğini kabul edelim. Bu durumda tanımdan her $x, y, z \in X$ için

$$\| x, y, z \| = \| x \| + \| y \| + \| z \|$$

olur ve

$$\| x, 0, 0 \| = \| x \| = | x | + | 2x | + | 2x | = 5| x |,$$

$$\| x, x, 0 \| = 2\| x \| = | x | + | x | + | 4x | = 6| x |,$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece $\| x \| = 5| x |$ ve $\| x \| = 3| x |$ olur. Bu bir çelişkidir. Böylece bu $S-$norm bir norm tarafından üretilemez.

Her $S-$normun bir norm ürettiği aşağıdaki önermede ispatlanmıştır.

4.1.11 Önerme. X boştan farklı bir küme, $\left(X, \| .,.,. \|\right)$ bir $S-$normlu uzay ve $\| . \| : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x \in X$ için

$$\| x \| = \| 0, x, 0 \| + \| 0, 0, x \|$$

şeklinde tanımlı olsun. Bu durumda $\|x\|$ fonksiyonu X üzerinde bir normdur ve $(X,\|\,.\,\|)$ bir normlu uzaydır. Bu norma $\|\,.,.,.\,\|$ $S-$normu tarafından üretilen norm denir.

İspat. (NS1) ve (NS2) koşulları kullanıldığında (N1), (N2) ve (N3) koşullarının sağlandığı açıktır.

Şimdi (N4) koşulunun sağlandığını gösterelim.

(N4) $x, y \in X$ olsun. (NS3) koşulundan

$$\begin{aligned}\|x+y\| &= \|0,x+y,0\|+\|0,0,x+y\| = \|0,x+y,0\|+\|0,0,y+x\| \\ &\leq \|0,0,0\|+\|0,x,0\|+\|0,0,y\|+\|0,0,x\|+\|0,0,0\|+\|0,y,0\| \\ &= \|x\|+\|y\|\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Sonuç olarak $\|x\| = \|0,x,0\|+\|0,0,x\|$ fonksiyonu X üzerinde bir normdur ve $(X,\|\,.\,\|)$ bir normlu uzaydır. □

$G-$normlu uzay ve $S-$normlu uzay arasındaki ilişki aşağıdaki önermede verilmiştir.

4.1.12 Önerme. Her $G-$normlu uzay bir $S-$normlu uzaydır.

İspat. (NG1) ve (NG2) koşulları kullanılarak (NS1) ve (NS2) koşullarının sağlandığı görülür. Sadece (NS3) koşulunun sağlandığını görelim.

(NS3) $x, y, z, x', y', z' \in X$ olsun. (NG2) ve (NG4) koşulları kullanılarak

$$\|x+x', y+y', z+z'\| = \|(x+0)+x', 0+(y+y'), z'+z\|$$

$$\leq \|x+0,0,0+z'\|+\|x', y+y', z\| = \|0,0+x,0+z'\|+\|x', y+y', z\|$$

$$\leq \|0,0,0\|+\|0,x,z'\|+\|x',y,0\|+\|0,y',z\|$$

$$\leq \|0,x,z'\|+\|0,y,x'\|+\|0,z,y'\|$$

eşitsizliği elde edilir. Sonuç olarak (NS3) koşulu sağlanır. □

Aşağıdaki örnekte görüldüğü gibi Önerme 4.1.12 nin tersi her zaman doğru değildir.

4.1.13 Örnek. $X=\mathbb{R}$ ve X üzerindeki $S-$norm Örnek 4.1.10 daki gibi tanımlı olsun. Eğer $x=1$, $y=5$ ve $z=0$ alınırsa (NG5) koşulu sağlanmaz. Gerçekten,

$$\| \text{x,y,z} \| = |x-2y-2z|+|y-2x-2z|+|z-2y-2x| = 23$$

$$\not\leq \| \text{x+y,0,z} \| = |x+y-2z|+|2x+2y+2z|+|z-2y-2x| = 30$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece bu $S-$norm $\mathbb{R}$ üzerinde bir $G-$norm değildir.

$S-$normlu uzaylarda açık yuvar ve kapalı yuvar tanımları aşağıdaki gibidir.

4.1.14 Tanım. $\left(X,\| .,.,. \|\right)$ bir $S-$ normlu uzay olsun. Verilen $x_0,a_1,a_2\in X$ noktaları ve $r>0$ reel sayısı için $B_{a_1}^{\;a_2}(x_0,r)$ açık yuvar ve $B_{a_1}^{\;a_2}[x_0,r]$ kapalı yuvar sırasıyla aşağıdaki şekilde tanımlıdır:

$$B_{a_1}^{\;a_2}(x_0,r)=\left\{y\in X: \| y-x_0,y-a_1,y-a_2 \| < r\right\}$$

ve

$$B_{a_1}^{\;a_2}[x_0,r]=\left\{y\in X: \| y-x_0,y-a_1,y-a_2 \| \leq r\right\} \;.$$

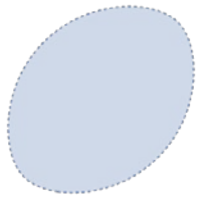
4.1.15 Örnek. $X=\mathbb{R}^2$ üzerindeki alışılmış norm tarafından üretilen $\left(X,\| .,.,. \|\right)$ $S-$normlu uzayını düşünelim. $\mathbb{R}^2$ deki açık yuvar

$$B_{a_1}^{\;a_2}(x_0,r)=\left\{y\in\mathbb{R}^2: \| y-x_0 \| + \| y-a_1 \| + \| y-a_2 \| < r\right\}$$

dir. Bu açık yuvar bir 3 – elipstir. Eğer $y=\left(y_1,y_2\right)$, $x_0=\left(1,1\right)$, $a_1=\left(0,0\right)$, $a_2=\left(-1,-1\right)$ ve $r=5$ alınırsa

$$B_{a_1}^{\;a_2}(x_0,r)=\left\{y\in\mathbb{R}^2: \sqrt{\left(y_1-1\right)^2+\left(y_2-1\right)^2}+\sqrt{y_1^{\;2}+y_2^{\;2}}+\sqrt{\left(y_1+1\right)^2+\left(y_2+1\right)^2}<5\right\}$$

açık yuvarı elde edilir (bkz. Şekil 4.1).



Şekil 4.1: Örnek 4.1.15 te elde edilen açık yuvar.

Bir sonraki örnekte bir norm tarafından üretilemeyen $S-$normun açık yuvarı incelenmiştir.

4.1.16 Örnek. $X=\mathbb{R}^2$ ve $\|.,.,.\|: X\times X\times X\to\mathbb{R}$ fonksiyonu Örnek 4.1.10 daki gibi tanımlı olsun. Her $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$, $z=(z_1,z_2)\in\mathbb{R}^2$ için

$$\|x,y,z\|=|x-2y-2z|+|y-2x-2z|+|z-2y-2x|$$

$$=\sqrt{(x_1-2y_1-2z_1)^2+(x_2-2y_2-2z_2)^2}+\sqrt{(y_1-2x_1-2z_1)^2+(y_2-2x_2-2z_2)^2}$$

$$+\sqrt{(z_1-2y_1-2x_1)^2+(z_2-2y_2-2x_2)^2}$$

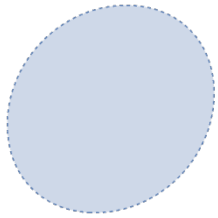
elde edilir. $(\mathbb{R}^2,\|.,.,.\|)$ bir $S-$normlu uzaydır. $\mathbb{R}^2$ deki açık yuvar

$$B_{a_1}^{a_2}(x_0,r)=\{y\in\mathbb{R}^2:\|y-x_0,y-a_1,y-a_2\|<r\}$$

dir. Eğer $y=(y_1,y_2)$, $x_0=(1,1)$, $a_1=(0,0)$, $a_2=(-1,-1)$ ve $r=20$ alınırsa

$$B_{a_1}^{a_2}(x_0,r)=\left\{\begin{array}{l} y\in\mathbb{R}^2:\sqrt{(3y_1+3)^2+(3y_2+3)^2}+\sqrt{9y_1^2+9y_2^2} \\ \qquad\qquad +\sqrt{(3-3y_1)^2+(3-3y_2)^2}<20\end{array}\right\}$$

açık yuvarını elde edilir (bkz. Şekil 4.2).



Şekil 4.2: Örnek 4.1.16 da elde edilen açık yuvar.

4.1.17 Tanım. $(X,\|.,.,.\|)$ bir $S-$normlu uzay olsun.

(1) X deki $\{x_n\}$ dizisinin x noktasına yakınsaması için gerekli ve yeterli koşul

$$\lim_{n\to\infty}\|0,x_n-x,x-x_n\|=0$$

olmasıdır. Yani herhangi verilen $\varepsilon>0$ ve her $n\ge n_0$ için $\|0,x_n-x,x-x_n\|<\varepsilon$ olacak şekilde $n_0\in\mathbb{N}$ vardır.

(2) Herhangi verilen $\varepsilon>0$ ve her $n,m,l\ge n_0$ için $\|x_n-x_m,x_m-x_l,x_l-x_n\|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0\in\mathbb{N}$ varsa X deki $\{x_n\}$ dizisine bir Cauchy dizisi denir. Yani

$$\lim_{n,m,l\to\infty}\|x_n-x_m,x_m-x_l,x_l-x_n\|=0$$

dır.

(3) $(X,\|.,.,.\|)$ $S-$ normlu uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsak ise $(X,\|.,.,.\|)$ $S-$normlu uzayına tamdır denir.

(4) Tam $S-$normlu uzayına bir $S-$Banach uzayı denir.

4.1.18 Önerme. Bir $S-$ normlu uzaydaki her yakınsak dizi bir Cauchy dizisidir.

İspat. X deki $\{x_n\}$ dizisi x e yakınsasın. Her $\varepsilon>0$ sayısı ve her $n\ge n_0$ için

$$\| 0, x_n - x, x - x_n \| < \frac{\varepsilon}{3}$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Şimdi her $\varepsilon > 0$ sayısı ve her $n, m, l \geq n_0$ için

$$\| x_n - x_m, x_m - x_l, x_l - x_n \| < \varepsilon$$

olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ nin var olduğunu gösterelim. (NS3) koşulunu kullanarak

$$\begin{aligned}
\| x_n - x_m, x_m - x_l, x_l - x_n \| &= \| x_n - x + x - x_m, x_m - x + x - x_l, x_l - x + x - x_n \| \\
&\leq \| 0, x_n - x, x - x_n \| + \| 0, x_m - x, x - x_m \| + \| 0, x_l - x, x - x_l \| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Sonuç olarak $\{x_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir. □

Aşağıdaki örnekten görüldüğü gibi Önerme 4.1.18 in tersi her zaman doğru değildir.

4.1.19 Örnek. $X = (0,1) \subset \mathbb{R}$ ve $\|.,.,.\| : X \times X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu X üzerindeki alışılmış norm tarafından üretilen $S-$ norm olsun. Eğer $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ dizisi düşünülürse bu dizi bir Cauchy dizisidir, fakat yakınsak değildir. Gerçekten, $x_n, x_m, x_l \in X$ için

$$\begin{aligned}
\lim_{n,m,l\to\infty} \| x_n - x_m, x_m - x_l, x_l - x_n \| &= \lim_{n,m,l\to\infty} \left\| \frac{1}{n} - \frac{1}{m}, \frac{1}{m} - \frac{1}{l}, \frac{1}{l} - \frac{1}{n} \right\| \\
&= \lim_{n,m,l\to\infty} \left(\left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| + \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{l} \right| + \left| \frac{1}{l} - \frac{1}{n} \right| \right) = 0
\end{aligned}$$

bulunur. O halde $\{x_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir. Ayrıca

$$\lim_{n\to\infty} \| 0, x_n - x, x - x_n \| = \lim_{n\to\infty} \left\| 0, \frac{1}{n} - 0, 0 - \frac{1}{n} \right\| = 0$$

olduğundan $\{x_n\}$ dizisi 0 noktasına yakınsar, fakat $0 \notin X$ dir. Sonuç olarak $\{x_n\}$ dizisi X üzerinde yakınsak değildir.

4.2 S – Normlu Uzaylarda Bir Sabit Nokta Teoremi

Bu bölümde $S-$ normlu uzaylarda Rhoades daralma fonksiyonu tanımlanmıştır ve bu daralma fonksiyonu kullanılarak bir sabit nokta teoremi ispatlanmıştır. Bunun için de gerekli olan bazı tanım ve önermeler verilmiştir.

4.2.1 Tanım. $\left(X,\|.,.,.\|\right)$ bir $S-$ normlu uzay ve $A\subseteq X$ olsun. A kümesinin kapanışı $\overline{A}$ şeklinde gösterilir ve x noktasına yakınsayan A kümesinde bir $\{x_n\}$ dizisi var olacak şekildeki x noktalarının kümesi olarak tanımlanır. Eğer $A=\overline{A}$ ise A kümesine bir kapalı küme denir.

4.2.2 Tanım. $\left(X,\|.,.,.\|\right)$ bir $S-$normlu uzay ve $A\subseteq X$ olsun. Eğer her $x,y\in A$ için $\|0,x-y,y-x\|<r$ olacak şekilde $r>0$ sayısı varsa A kümesine sınırlıdır denir.

4.2.3 Tanım. $\left(X,\|.,.,.\|\right)$ bir $S-$ normlu uzay ve $A\subseteq X$ olsun. A kümesinin $S-$çapı

$$\delta^s(A)=\sup\left\{\|0,x-y,y-x\|:x,y\in A\right\}$$

şeklinde tanımlıdır. Eğer A kümesi sınırlıysa $\delta^s(A)<\infty$ yazılır.

4.2.4 Tanım. X bir $S-$Banach uzayı, $A\subseteq X$ ve $u\in X$ olsun.

(1) Verilen $u\in X$ e göre A kümesinin $S-$yarıçapı

$$r_u^s(A)=\sup\left\{\|0,u-x,x-u\|:x\in A\right\}$$

şeklinde tanımlıdır.

(2) A kümesinin $S-$Chebyshev yarıçapı

$$r^s(A)=\inf\left\{r_u^s(A):u\in A\right\}$$

şeklinde tanımlıdır.

(3) A kümesinin $S-$Chebyshev merkezi

$$C^s(A)=\left\{u\in A: r_u^{\,s}(A)=r^s(A)\right\}$$

şeklinde tanımlıdır.

Tanım 4.2.3 ve Tanım 4.2.4 ten aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$r^s(A)\le r_u^{\,s}(A)\le \delta^s(A)\,.$$

4.2.5 Tanım. Eğer $r_u^{\,s}(A)=\delta^s(A)$ ise $u\in A$ noktasına $S-$çapsal denir. Eğer $r_u^{\,s}(A)<\delta^s(A)$ ise u noktasına $S-$çapsal olmayan denir.

4.2.6 Tanım. X $S-$Banach uzayının bir konveks A alt kümesinin $S-$normal yapıya sahip olması için gerekli koşul $\delta^s(A)>0$ olmak üzere A kümesinin her $S-$sınırlı ve konveks alt kümesinin en az bir $S-$çapsal olmayan bir noktaya sahip olmasıdır.

4.2.7 Önerme. X yansıyan bir $S-$Banach uzayı, $A\neq\varnothing$ ve $A\subset X$ olsun. Eğer A, X kümesinin kapalı ve konveks bir alt kümesi ise $C^s(A)$ kümesi de boştan farklı, kapalı ve konvekstir.

İspat. $C^s(A)$ kümesinin tanımından ispat kolayca görülür. □

Bir $S-$Banach uzayında $(NS25)$ Rhoades daralma fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlıdır.

4.2.8 Tanım. $\left(X,\|.,.,.\|\right)$ bir $S-$Banach uzay ve $T:X\to X$ bir fonksiyon olsun. (*NS25*) koşulu aşağıdaki gibi tanımlıdır:

(*NS25*) Her $x,y\in X$, $x\neq y$ noktaları için

$$\| 0, Tx - Ty, Ty - Tx \| < \max \left\{ \begin{matrix} \| 0, x-y, y-x \|, \| 0, Tx - x, x - Tx \|, \| 0, Ty - y, y - Ty \|, \\ \| 0, Ty - x, x - Ty \|, \| 0, Tx - y, y - Tx \| \end{matrix} \right\}$$

dir.

4.2.9 Yardımcı Teorem. $(X, \| .,.,. \|)$ bir $S-$ Banach uzay olsun. Bu durumda X kümesinin yansıyan olması için gerekli ve yeterli koşul X kümesinin boştan farklı, sınırlı, kapalı ve konveks alt kümelerinin herhangi bir azalan $\{K_n\}$ dizisi için

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \varnothing$$

olmasıdır.

İspat. Metrik uzaylardaki ispat mantığı ile kolayca görülür. □

Aşağıdaki teoremde $(NS25)$ Rhoades daralma fonksiyonu için bir sabit nokta sonucu elde edilmiştir.

Bir A kümesinin konveks örtüsünün herhangi bir elemanı her $i = 1, 2, \ldots, n$ için $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1,\ \alpha_i \geq 0$ ve $x_i \in A$ olacak şekilde $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ formundadır ve A kümesinin konveks örtüsü $conv(A)$ ile gösterilir.

4.2.10 Teorem. $(X, \| .,.,. \|)$ yansıyan bir $S-$Banach uzay ve A kümesi $S-$ normal yapıya sahip X kümesinin boştan farklı, kapalı, sınırlı ve konveks alt kümesi olsun. Eğer $T : A \to A$ fonksiyonu $(NS25)$ koşulunu sağlayan sürekli bir fonksiyon ise T fonksiyonunun A kümesinde bir tek sabit noktası vardır.

İspat. İlk olarak sabit noktanın varlığını gösterelim. $\mathfrak{M},\ A$ kümesinin boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümelerinin bir ailesi olsun. Ayrıca $F \in \mathfrak{M}$ ise $TF \subseteq F$ olduğunu kabul edelim. $A \in \mathfrak{M}$ olduğundan $\mathfrak{M}$ ailesi boştan farklıdır. $\mathfrak{M}$ ailesini kapsama bağıntısına göre kısmi sıralı bir küme olarak düşünebiliriz, yani $F_1 \subseteq F_2$ ise $F_1 \leq F_2$ yazabiliriz.

$\mathfrak{M}$ ailesinde $S=\{F_i : F_i \in \mathfrak{M}, i \in I\}$ alt kümelerinin bir azalan ağını tanımlarsak, yansıma özelliğinden bu S ağının boştan farklı bir kesişime sahip olduğu açıktır. Çünkü X kümesinin boştan farklı, kapalı, sınırlı ve konveks alt kümelerinin azalan bir ağıdır. $F_0 = \bigcap_{i\in I} F_i$ ise bu durumda $F_0 \in \mathfrak{M}$ dir ve S ağının bir alt sınırıdır.

Zorn Yardımcı Teoremi'nden yararlanarak S ağı $\mathfrak{M}$ ailesinde herhangi bir azalan ağ olmak üzere $\mathfrak{M}$ ailesinde bir minimal F elemanı vardır ve tek elemanlıdır. $\delta^s(F) \neq \emptyset$ olsun. F kümesi boştan farklı, kapalı ve konveks olduğundan $C^s(F)$ kümesi de F kümesinin boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesidir.

$$r^s(F) < \delta^s(F)$$

ve

$$\delta^s(C^s(F)) \leq r^s(F) < \delta^s(F)$$

olduğundan $C^s(F)$ kümesi F kümesinin bir öz alt kümesidir.

$(F_m)_{m\in\mathbb{N}}$ her $m \in \mathbb{N}$ için

$$F_1 = C^s(F) \text{ ve } F_{m+1} = conv\left(F_m \cup TF_m\right)$$

şeklinde tanımlı F kümesinin alt kümelerinin artan bir dizisi olsun. F_k kümelerinin $S-$çapları $\delta_k{}^s = \delta^s(F_k)$ ile gösterilsin. Bu durumda

$$\delta_k{}^s \leq r^s(F)$$

olduğunu gösterelim.

Tümevarım yöntemi kullanılarak

(1) $k=1$ için

$$\delta_1{}^s = \delta^s(F_1) = \delta^s(C^s(F)) \leq r^s(F)$$

ve

(2) Her $k=1,\ldots,m$ için $\delta_k{}^s \leq r^s(F)$ ise bu durumda $\delta_{m+1}{}^s \leq r^s(F)$

olduğu elde edilir. Burada

$$\delta_{m+1}{}^s = \delta^s(F_{m+1}) = \delta^s(conv(F_m \cup TF_m)) = \delta^s(F_m \cup TF_m)$$

dir. $S-$çap tanımından herhangi $\varepsilon>0$ sayısı için $F_m \cup TF_m$ kümesinde

$$\delta_{m+1}{}^{s}-\varepsilon<\left\|0,x'-y',y'-x'\right\|\leq \delta_{m+1}{}^{s}$$

olacak şekilde x' ve y' noktaları vardır. x' ve y' noktaları için aşağıdaki üç durumu dikkate alalım:

(1) $x',y'\in F_m$ ya da
(2) $x'\in F_m$ ve $y'\in TF_m$ ya da
(3) $x',y'\in TF_m$.

x' ve y' noktaları aşağıdaki şekilde tekrar tanımlansın.

(1) $x,y\in F_m$ olacak şekilde $x'=x$ ve $y'=y$,
(2) $x,y\in F_m$ olacak şekilde $x'=x$ ve $y'=Ty$,
(3) $x,y\in F_m$ olacak şekilde $x'=Tx$ ve $y'=Ty$.

Her bir durum için $\delta_{m+1}{}^{s}-\varepsilon<r^{s}(F)$ olduğunu gösterelim.

Durum 1. $\delta_m{}^{s}$ kümesinin tanımından ve tümevarım hipotezinden

$$\delta_{m+1}{}^{s}-\varepsilon<\left\|0,x-y,y-x\right\|\leq \delta_{m+1}{}^{s}\leq r^{s}(F)$$

ve

$$\delta_{m+1}{}^{s}-\varepsilon<r^{s}(F)$$

olduğu elde edilir.

Durum 2. $x,y\in F_m$ için

$$\delta_{m+1}{}^{s}-\varepsilon<\left\|0,x-Ty,Ty-x\right\|$$

elde edilir. Bu durumda F_m dizisinin tanımından $x,y\in conv\left(F_{m-1}\cup TF_{m-1}\right)$ olur ve $\sum_{i\in I}\alpha_i=1$, $\alpha_i\geq 0$ olmak üzere $x=\sum_{i\in I}\alpha_i x_i$ ve herhangi $i\in I$ için $x_i\in F_{m-1}\cup TF_{m-1}$ olacak şekilde sonlu bir I indis kümesi vardır. I kümesi $I=I_1\cup I_2$ olmak üzere $i\in I_1$ ise $x_i\in F_{m-1}$ ve $i\in I_2$ ise $x_i\in TF_{m-1}$ olacak şekilde iki ayrık alt kümeye ayrılabilir. $x_i\in F_{m-1}$ olmak üzere x_i noktası Tx_i olarak yeniden tanımlanırsa

$$x=\sum_{i\in I_1}\alpha_i x_i+\sum_{i\in I_2}\alpha_i Tx_i$$

elde edilir. Bu nokta $\|0, x-Ty, Ty-x\|$ de yerine yazılırsa

$$\|0, x-Ty, Ty-x\| \le \sum_{i\in I_1} \alpha_i \|0, x_i - Ty, Ty - x_i\| + \sum_{i\in I_2} \alpha_i \|0, Tx_i - Ty, Ty - Tx_i\| \tag{4.5}$$

bulunur. $\|0, Tx_i - Ty, Ty - Tx_i\|$ ifadesine $(NS25)$ koşulu uygulanırsa

$$\|0, Tx_i - Ty, Ty - Tx_i\| < \max \begin{Bmatrix} \|0, x_i - y, y - x_i\|, \|0, x_i - Tx_i, Tx_i - x_i\|, \\ \|0, y - Ty, Ty - y\|, \|0, x_i - Ty, Ty - x_i\|, \\ \|0, Tx_i - y, y - Tx_i\| \end{Bmatrix} \tag{4.6}$$

elde edilir. $x_i \in F_{m-1}$, $Tx_i, y \in F_m$ olduğundan

$$\|0, x_i - y, y - x_i\| \le r^s(F),$$

$$\|0, x_i - Tx_i, Tx_i - x_i\| \le r^s(F),$$

$$\|0, Tx_i - y, y - Tx_i\| \le r^s(F)$$

olur ve (4.6) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\|0, Tx_i - Ty, Ty - Tx_i\| < \max\left\{r^s(F), \|0, y - Ty, Ty - y\|, \|0, x_i - Ty, Ty - x_i\|\right\}$$

elde edilir. I_2 indis kümesi $I_2 = I_2^1 \cup I_2^2 \cup I_2^3$ olmak üzere

$$I_2^1 = \left\{i \in I_2 : \|0, Tx_i - Ty, Ty - Tx_i\| < r^s(F)\right\},$$

$$I_2^2 = \left\{i \in I_2 : \|0, Tx_i - Ty, Ty - Tx_i\| < \|0, x_i - Ty, Ty - x_i\|\right\},$$

$$I_2^3 = \left\{i \in I_2 : \|0, Tx_i - Ty, Ty - Tx_i\| < \|0, y - Ty, Ty - y\|\right\}$$

olacak şekilde üç ayrık alt kümeye bölünebilir. Bu durumda (4.5) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} \|0, x - Ty, Ty - x\| \le & \sum_{i\in I_1 \cup I_2^2} \alpha_i \|0, x_i - Ty, Ty - x_i\| + \sum_{i \in I_2^1} \alpha_i r^s(F) \\ & + \sum_{i\in I_2^3} \alpha_i \|0, y - Ty, Ty - y\| \end{aligned} \tag{4.7}$$

elde edilir. I_1, I_2 ve I_3 indis kümeleri aşağıdaki şekilde yeniden tanımlansın:

$$\overline{I_1} = I_1 \cup I_2^2,\ \overline{I_2} = I_2^1 \text{ ve } \overline{I_3} = I_2^3.$$

Bu durumda $\overline{I_j} \cap \overline{I_k} = \emptyset$ olmak üzere $I = \overline{I_1} \cup \overline{I_2} \cup \overline{I_3}$ elde edilir. $j \neq k$ ve $\sum_{i \in I} \alpha_i = 1$ ise (4.7) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} \| 0, x - Ty, Ty - x \| \le & \sum_{i \in \overline{I_1}} \alpha_i \| 0, x_i - Ty, Ty - x_i \| + \sum_{i \in \overline{I_2}} \alpha_i r^s(F) \\ & + \sum_{i \in \overline{I_3}} \alpha_i \| 0, y - Ty, Ty - y \| \end{aligned} \tag{4.8}$$

elde edilir. $\sum_{i \in \overline{I_1}} \alpha_i + A_0 + B_0 = 1$ olmak üzere $A_0 = \sum_{i \in \overline{I_2}} \alpha_i$ ve $B_0 = \sum_{i \in \overline{I_3}} \alpha_i$ ise (4.8) eşitsizliğinden yararlanarak

$$\| 0, x - Ty, Ty - x \| \le \sum_{i \in \overline{I_1}} \alpha_i \| 0, x_i - Ty, Ty - x_i \| + A_0 r^s(F) + B_0 \| 0, y - Ty, Ty - y \| \tag{4.9}$$

elde edilir. Her bir $i \in \overline{I_1}$, $x_i \in F_{m-1} = conv\left(F_{m-2} \cup TF_{m-2}\right)$ ve herhangi bir $j \in J_i$ için $x_i^{\,j} \in F_{m-2} \cup TF_{m-2}$, $\beta_i^{\,j} \ge 0$, $\sum_{j \in J_i} \beta_i^{\,j} = 1$ ve $x_i = \sum_{j \in J_i} \beta_i^{\,j} x_i^{\,j}$ olacak şekilde sonlu bir J_i indis kümesi vardır.

$$x_i = \sum_{j \in J_i^1} \beta_i^{\,j} x_i^{\,j} + \sum_{j \in J_i^2} \beta_i^{\,j} x_i^{\,j}$$

ve $J_i^1 \cap J_i^2 = \emptyset$ olacak şekilde $J_i = J_i^1 \cup J_i^2$ olsun. Her $i \in \overline{I_1}$ için

$$\begin{aligned} \| 0, x_i - Ty, Ty - x_i \| \le & \sum_{j \in J_i^1} \beta_i^{\,j} \| 0, x_i^{\,j} - Ty, Ty - x_i^{\,j} \| \\ & + \sum_{j \in J_i^2} \beta_i^{\,j} \| 0, Tx_i^{\,j} - Ty, Ty - Tx_i^{\,j} \| \end{aligned} \tag{4.10}$$

elde edilir. $\| 0, Tx_i^{\,j} - Ty, Ty - Tx_i^{\,j} \|$ ifadesine $(NS25)$ koşulu uygulanırsa

$$\| 0, Tx_i^{\,j} - Ty, Ty - Tx_i^{\,j} \| < \max \left\{ \begin{array}{l} \| 0, x_i^{\,j} - y, y - x_i^{\,j} \|, \| 0, Tx_i^{\,j} - x_i^{\,j}, x_i^{\,j} - Tx_i^{\,j} \|, \\ \| 0, y - Ty, Ty - y \|, \| 0, Tx_i^{\,j} - y, y - Tx_i^{\,j} \|, \\ \| 0, x_i^{\,j} - Ty, Ty - x_i^{\,j} \| \end{array} \right\} \tag{4.11}$$

elde edilir. $x_i^{\,j} \in F_{m-2}$ ve $y \in F_m$ olduğundan

$$\| 0, x_i^{\,j} - y, y - x_i^{\,j} \| \le r^s(F),$$

$$\| 0, Tx_i^{\,j} - x_i^{\,j}, x_i^{\,j} - Tx_i^{\,j} \| \le r^s(F),$$

$$\left\| 0, Tx_i^{\,j} - y, y - Tx_i^{\,j} \right\| \le r^s(F)$$

bulunur. (4.11) eşitsizliğinden yararlanılarak

$$\left\| 0, Tx_i^{\,j} - Ty, Ty - Tx_i^{\,j} \right\| < \max\left\{ r^s(F), \left\| 0, y - Ty, Ty - y \right\|, \left\| 0, x_i^{\,j} - Ty, Ty - x_i^{\,j} \right\| \right\}$$

elde edilir. $J_i^{\,2}$ indis kümesi, $J_i^{\,2_k} \cap J_i^{\,2_p} = \varnothing$ ve

$$J_i^{\,2_1} = \left\{ j \in J_i^{\,2} : \left\| 0, Tx_i^{\,j} - Ty, Ty - Tx_i^{\,j} \right\| < r^s(F) \right\},$$

$$J_i^{\,2_2} = \left\{ j \in J_i^{\,2} : \left\| 0, Tx_i^{\,j} - Ty, Ty - Tx_i^{\,j} \right\| < \left\| 0, y - Ty, Ty - y \right\| \right\},$$

$$J_i^{\,2_3} = \left\{ j \in J_i^{\,2} : \left\| 0, Tx_i^{\,j} - Ty, Ty - Tx_i^{\,j} \right\| < \left\| 0, x_i^{\,j} - Ty, Ty - x_i^{\,j} \right\| \right\}$$

olmak üzere $J_i^{\,2} = J_i^{\,2_1} \cup J_i^{\,2_2} \cup J_i^{\,2_3}$ şeklinde yazılsın. Bu durumda (4.10) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} \left\| 0, x_i - Ty, Ty - x_i \right\| \le & \sum_{j \in J_i^1 \cup J_i^{2_3}} \beta_i^j \left\| 0, x_i^{\,j} - Ty, Ty - x_i^{\,j} \right\| + \sum_{j \in J_i^{2_1}} \beta_i^j r^s(F) \\ & + \sum_{j \in J_i^{2_2}} \beta_i^j \left\| 0, y - Ty, Ty - y \right\| \end{aligned} \tag{4.12}$$

elde edilir. $J_1^{\,i} = J_i^{\,1} \cup J_i^{\,2_3}$, $J_2^{\,i} = J_i^{\,2_2}$ ve $J_3^{\,i} = J_i^{\,2_1}$ olsun. Bu durumda (4.12) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} \left\| 0, x_i - Ty, Ty - x_i \right\| \le & \sum_{j \in J_1^i} \beta_i^j \left\| 0, x_i^{\,j} - Ty, Ty - x_i^{\,j} \right\| + \sum_{j \in J_3^i} \beta_i^j r^s(F) \\ & + \sum_{j \in J_2^i} \beta_i^j \left\| 0, y - Ty, Ty - y \right\| \end{aligned} \tag{4.13}$$

elde edilir. $\sum_{j \in J_1^i} \beta_i^{\,j} + A_i + B_i = 1$ olmak üzere $A_i = \sum_{j \in J_3^i} \beta_i^j$ ve $B_i = \sum_{j \in J_2^i} \beta_i^j$ ise (4.13) eşitsizliğinden yararlanılarak

$$\begin{aligned} \left\| 0, x_i - Ty, Ty - x_i \right\| \le & \sum_{j \in J_1^i} \beta_i^{\,j} \left\| 0, x_i^{\,j} - Ty, Ty - x_i^{\,j} \right\| + A_i r^s(F) \\ & + B_i \left\| 0, y - Ty, Ty - y \right\| \end{aligned} \tag{4.14}$$

elde edilir. (4.9) eşitsizliği ve (4.14) eşitsizliğinde $\left\| 0, x_i - Ty, Ty - x_i \right\|$ kullanılarak

$$\| 0, x-Ty, Ty-x \| \leq \sum_{i \in \overline{I_1}} \alpha_i \sum_{j \in J_1^i} \beta_i^j \| 0, x_i^j - Ty, Ty - x_i^j \|$$
$$+ \left[\sum_{i \in \overline{I_1}} \alpha_i A_i + A_0 \right] r^s(F) + \left[\sum_{i \in \overline{I_1}} \alpha_i B_i + B_0 \right] \| 0, y-Ty, Ty-y \|$$

elde edilir. $A_1 = \sum_{i \in \overline{I_1}} \alpha_i A_i$ ve $B_1 = \sum_{i \in \overline{I_1}} \alpha_i B_i$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \| 0, x-Ty, Ty-x \| &\leq \sum_{i \in \overline{I_1}} \alpha_i \sum_{j \in J_1^i} \beta_i^j \| 0, x_i^j - Ty, Ty - x_i^j \| \\ &+ [A_1 + A_0] r^s(F) + [B_1 + B_0] \| 0, y-Ty, Ty-y \| \end{aligned} \tag{4.15}$$

elde edilir. Burada

$$\sum_{i \in \overline{I_1}} \alpha_i \sum_{j \in J_1^i} \beta_i^j + \sum_{i \in \overline{I_1}} \alpha_i A_i + A_0 + \sum_{i \in \overline{I_1}} \alpha_i B_i + B_0 = 1$$

dir. $K = \bigcup_{i \in \overline{I_1}} \left(\bigcup_{j \in J_1^i} j \right)$ olsun ve ξ_k ile sabitler gösterilsin. (i, j) ikilisine göre her k için x_i^j, x_k ile gösterilsin. (4.15) eşitsizliği kullanılarak $\sum_{k \in K} \xi_k + A_1 + A_0 + B_1 + B_0 = 1$ ve $x_k \in F_{m-2}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \| 0, x-Ty, Ty-x \| &\leq \sum_{k \in K} \xi_k \| 0, x_k - Ty, Ty - x_k \| \\ &+ [A_1 + A_0] r^s(F) + [B_1 + B_0] \| 0, y-Ty, Ty-y \| \end{aligned}$$

elde edilir. Her bir x_k için bu işleme devam edilirse $\sum_{p \in P} \gamma_p + \sum_{i=0}^{m-1} (A_i + B_i) = 1$ ve $x_p \in F_1 = C^s(F)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \| 0, x-Ty, Ty-x \| &\leq \sum_{p \in P} \gamma_p \| 0, x_p - Ty, Ty - x_p \| \\ &+ \sum_{k=0}^{m-1} A_k r^s(F) + \sum_{k=0}^{m-1} B_k \| 0, y-Ty, Ty-y \| \end{aligned} \tag{4.16}$$

elde edilir. Böylece $\| 0, x_p - Ty, Ty - x_p \| \leq r^s(F)$ olur ve (4.16) eşitsizliğinden yararlanılarak

$$\| 0, x-Ty, Ty-x \| \leq \sum_{k=0}^{m-1} B_k \| 0, y-Ty, Ty-y \| + \left(\sum_{p \in P} \gamma_p + \sum_{k=0}^{m-1} A_k \right) r^s(F) \tag{4.17}$$

elde edilir. Şimdi $\| 0, y-Ty, Ty-y \|$ ifadesi tekrar dikkate alınsın. $y \in conv(F_{m-1} \cup TF_{m-1})$ olduğundan her $i \in I$ için $\sum_{i \in I} \alpha_i = 1$, $y_i \in F_{m-1} \cup TF_{m-1}$ ve $\alpha_i \geq 0$ olmak üzere $y = \sum_{i \in I} \alpha_i y_i$ yazılabilir. $I_1 \cap I_2 = \varnothing$ olacak şekilde $I = I_1 \cup I_2$ olsun. Eğer $i \in I_1$ ise $y_i \in F_{m-1}$ ve $i \in I_2$ ise $y_i \in TF_{m-1}$ olur. $y_i = Ty_i$ olsun. Bu durumda $y_i \in F_{m-1}$ olmak üzere $y = \sum_{i \in I_1} \alpha_i y_i + \sum_{i \in I_2} \alpha_i Ty_i$ yazılabilir. $\| 0, y-Ty, Ty-y \|$ ifadesinde yerine yazılırsa

$$\| 0, y-Ty, Ty-y \| \leq \sum_{i \in I_1} \alpha_i \| 0, y_i - Ty, Ty - y_i \| + \sum_{i \in I_2} \alpha_i \| 0, Ty_i - Ty, Ty - Ty_i \| \tag{4.18}$$

elde edilir. $(NS25)$ koşulu kullanılarak

$$\| 0, Ty_i - Ty, Ty - Ty_i \| < \max \begin{Bmatrix} \| 0, y_i - y, y - y_i \|, \| 0, y_i - Ty_i, Ty_i - y_i \|, \\ \| 0, y - Ty, Ty - y \|, \| 0, y_i - Ty, Ty - y_i \|, \\ \| 0, Ty_i - y, y - Ty_i \| \end{Bmatrix} \tag{4.19}$$

bulunur. $y_i \in F_{m-1}$, $y \in F_m$ olduğundan

$$\| 0, y_i - y, y - y_i \| \leq r^s(F) ,$$

$$\| 0, y_i - Ty_i, Ty_i - y_i \| \leq r^s(F) ,$$

$$\| 0, Ty_i - y, y - Ty_i \| \leq r^s(F)$$

olur ve (4.19) eşitsizliği kullanılarak

$$\| 0, Ty_i - Ty, Ty - Ty_i \| < \max \left\{ r^s(F), \| 0, y - Ty, Ty - y \|, \| 0, y_i - Ty, Ty - y_i \| \right\}$$

elde edilir. I_2 indis kümesi

$$I_2^1 = \left\{ i \in I_2 : \| 0, Ty_i - Ty, Ty - Ty_i \| < r^s(F) \right\} ,$$

$$I_2^2 = \left\{ i \in I_2 : \| 0, Ty_i - Ty, Ty - Ty_i \| < \| 0, y - Ty, Ty - y \| \right\} ,$$

$$I_2^3 = \left\{ i \in I_2 : \| 0, Ty_i - Ty, Ty - Ty_i \| < \| 0, y_i - Ty, Ty - y_i \| \right\}$$

ve $I_2 = I_2^1 \cup I_2^2 \cup I_2^3$ olacak şekilde yeniden tanımlansın. Bu durumda (4.18) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}\|0, y-Ty, Ty-y\| \leq & \sum_{i\in I_1\cup I_2^3} \alpha_i \|0, y_i - Ty, Ty - y_i\| + \sum_{i\in I_2^1} \alpha_i r^s(F) \\ & + \sum_{i\in I_2^2} \alpha_i \|0, y-Ty, Ty-y\|\end{aligned} \tag{4.20}$$

elde edilir. $\sum_{i\in I_2^2} \alpha_i = 1$ ise bu durumda

$$\|0, y-Ty, Ty-y\| \leq \|0, Ty_i - Ty, Ty - Ty_i\| < \|0, y-Ty, Ty-y\|$$

elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. O halde $\sum_{i\in I_2^2} \alpha_i < 1$ olmalıdır ve (4.20) eşitsizliği kullanılarak

$$\sum_{i\in I_1\cup I_2^3} \frac{\alpha_i}{1-\sum_{i\in I_2^2}\alpha_i} + \sum_{i\in I_2^1} \frac{\alpha_i}{1-\sum_{i\in I_2^2}\alpha_i} = 1$$

olmak üzere

$$\|0, y-Ty, Ty-y\| \leq \sum_{i\in I_1\cup I_2^3} \frac{\alpha_i}{1-\sum_{i\in I_2^2}\alpha_i} \|0, y_i - Ty, Ty - y_i\| + \sum_{i\in I_2^1} \frac{\alpha_i}{1-\sum_{i\in I_2^2}\alpha_i} r^s(F) \tag{4.21}$$

elde edilir. $I_1 = I_1 \cup I_2^3$, $I_2 = I_2^1$ ve $\beta_i = \frac{\alpha_i}{1-\sum_{i\in I_2^2}\alpha_i}$ olsun. (4.21) eşitsizliği kullanılarak

$$\|0, y-Ty, Ty-y\| \leq \sum_{i\in I_1} \beta_i \|0, y_i - Ty, Ty - y_i\| + \sum_{i\in I_2} \beta_i r^s(F) \tag{4.22}$$

elde edilir. $A_0 = \sum_{i\in I_2} \beta_i$ ise (4.22) eşitsizliği kullanılarak $\sum_{i\in I_1} \beta_i + A_0 = 1$ ve $y_i \in F_{m-1} = conv(F_{m-2} \cup TF_{m-2})$ olmak üzere

$$\|0, y-Ty, Ty-y\| \leq \sum_{i\in I_1} \beta_i \|0, y_i - Ty, Ty - y_i\| + A_0 r^s(F) \tag{4.23}$$

elde edilir. Her $i \in I_1$ için $y_i^j \in F_{m-2}$ ve $\sum_{j\in J_i^1\cup J_i^2} \gamma_i^j = 1$ olacak şekilde

$$y_i = \sum_{j\in J_i^1} \gamma_i^j y_i^j + \sum_{j\in J_i^2} \gamma_i^j T y_i^j$$

yazılabilir. Bu durumda

$$\|0, y_i - Ty, Ty - y_i\| \le \sum_{j\in J_i^1} \gamma_i^{\,j} \|0, y_i^{\,j} - Ty, Ty - y_i^{\,j}\| + \sum_{j\in J_i^2} \gamma_i^{\,j} \|0, Ty_i^{\,j} - Ty, Ty - Ty_i^{\,j}\| \tag{4.24}$$

elde edilir. $(NS25)$ koşulu kullanılarak

$$\|0, Ty_i^{\,j} - Ty, Ty - Ty_i^{\,j}\| < \max\left\{\begin{array}{l}\|0, y_i^{\,j} - y, y - y_i^{\,j}\|, \|0, Ty_i^{\,j} - y_i^{\,j}, y_i^{\,j} - Ty_i^{\,j}\|, \\ \|0, y - Ty, Ty - y\|, \|0, Ty_i^{\,j} - y, y - Ty_i^{\,j}\|, \\ \|0, y_i^{\,j} - Ty, Ty - y_i^{\,j}\|\end{array}\right\}$$

bulunur. $y_i^{\,j} \in F_{m-2}$, $Ty_i^{\,j} \in F_{m-1}$ ve $y \in F_m$ olduğundan

$$\|0, y_i^{\,j} - y, y - y_i^{\,j}\| \le r^s(F),$$

$$\|0, Ty_i^{\,j} - y_i^{\,j}, y_i^{\,j} - Ty_i^{\,j}\| \le r^s(F),$$

$$\|0, Ty_i^{\,j} - y, y - Ty_i^{\,j}\| \le r^s(F)$$

ve

$$\|0, Ty_i^{\,j} - Ty, Ty - Ty_i^{\,j}\| < \max\left\{r^s(F), \|0, y - Ty, Ty - y\|, \|0, y_i^{\,j} - Ty, Ty - y_i^{\,j}\|\right\}$$

elde edilir. J_i^2 indis kümesi

$$J_i^{2_1} = \left\{ j \in J_i^2 : \|0, Ty_i^{\,j} - Ty, Ty - Ty_i^{\,j}\| < \|0, y_i^{\,j} - Ty, Ty - y_i^{\,j}\|\right\},$$

$$J_i^{2_2} = \left\{ j \in J_i^2 : \|0, Ty_i^{\,j} - Ty, Ty - Ty_i^{\,j}\| < r^s(F)\right\},$$

$$J_i^{2_3} = \left\{ j \in J_i^2 : \|0, Ty_i^{\,j} - Ty, Ty - Ty_i^{\,j}\| < \|0, y - Ty, Ty - y\|\right\}$$

ve $J_i^2 = J_i^{2_1} \cup J_i^{2_2} \cup J_i^{2_3}$ olacak şekilde ayrık kümelerin birleşimi olarak yeniden yazılsın. Bu durumda (4.24) eşitsizliği kullanılarak

$$\|0, y_i - Ty, Ty - y_i\| \le \sum_{j\in J_i^1 \cup J_i^{2_1}} \gamma_i^{\,j} \|0, y_i^{\,j} - Ty, Ty - y_i^{\,j}\| + \sum_{j\in J_i^{2_2}} \gamma_i^{\,j} r^s(F) + \sum_{j\in J_i^{2_3}} \gamma_i^{\,j} \|0, y - Ty, Ty - y\| \tag{4.25}$$

elde edilir. İndis kümeleri $J_i^1 = J_i^1 \cup J_i^{2_1}$, $J_i^2 = J_i^{2_2}$, $J_i^3 = J_i^{2_3}$ olacak şekilde yeniden isimlendirilsin. O halde (4.25) eşitsizliğinden

$$\|0, y_i - Ty, Ty - y_i\| \le \sum_{j\in J_i^1} \gamma_i^{\,j} \|0, y_i^{\,j} - Ty, Ty - y_i^{\,j}\| + \sum_{j\in J_i^2} \gamma_i^{\,j} r^s(F)$$
$$+ \sum_{j\in J_i^3} \gamma_i^{\,j} \|0, y - Ty, Ty - y\|$$

elde edilir. Bu durumda (4.23) eşitsizliğinden yararlanılarak

$$\|0, y - Ty, Ty - y\| \le \sum_{i\in I_1} \beta_i \sum_{j\in J_i^1} \gamma_i^{\,j} \|0, y_i^{\,j} - Ty, Ty - y_i^{\,j}\| + $$
$$+ \sum_{i\in I_1} \beta_i \sum_{j\in J_i^3} \gamma_i^{\,j} \|0, y - Ty, Ty - y\| + \left[\sum_{i\in I_1} \beta_i \sum_{j\in J_i^2} \gamma_i^{\,j} + A_0\right] r^s(F) \tag{4.26}$$

elde edilir. $\sum_{i\in I_1} \beta_i \sum_{j\in J_i^3} \gamma_i^{\,j} = 1$ ise $\|0, y - Ty, Ty - y\| < \|0, y - Ty, Ty - y\|$ çelişkisi elde edilir. Bu durumda $\sum_{i\in I_1} \beta_i \sum_{j\in J_i^3} \gamma_i^{\,j} < 1$ olur ve (4.26) eşitsizliğinden

$$\frac{\sum_{i\in I_1} \beta_i \sum_{j\in J_i^1} \gamma_i^{\,j}}{1 - \sum_{i\in I_1} \beta_i \sum_{j\in J_i^3} \gamma_i^{\,j}} + \frac{\sum_{i\in I_1} \beta_i \sum_{j\in J_i^2} \gamma_i^{\,j} + A_0}{1 - \sum_{i\in I_1} \beta_i \sum_{j\in J_i^3} \gamma_i^{\,j}} = 1$$

olmak üzere

$$\|0, y - Ty, Ty - y\| \le \frac{\sum_{i\in I_1} \beta_i \sum_{j\in J_i^1} \gamma_i^{\,j}}{1 - \sum_{i\in I_1} \beta_i \sum_{j\in J_i^3} \gamma_i^{\,j}} \|0, y_i^{\,j} - Ty, Ty - y_i^{\,j}\|$$
$$+ \frac{\sum_{i\in I_1} \beta_i \sum_{j\in J_i^2} \gamma_i^{\,j} + A_0}{1 - \sum_{i\in I_1} \beta_i \sum_{j\in J_i^3} \gamma_i^{\,j}} r^s(F) \tag{4.27}$$

elde edilir. $A_1 = \dfrac{\sum_{i\in I_1} \beta_i \sum_{j\in J_i^2} \gamma_i^{\,j} + A_0}{1 - \sum_{i\in I_1} \beta_i \sum_{j\in J_i^3} \gamma_i^{\,j}}$ ve $K = \bigcup_{i\in I_1} \left(\bigcup_{j\in J_i^1} j \right)$ olsun. Bu durumda her bir (i, j) ikilisine göre $k \in K$ için ς_k yazılırsa $\varsigma_k = \dfrac{\sum_{i\in I_1} \beta_i \sum_{j\in J_i^2} \gamma_i^{\,j}}{1 - \sum_{i\in I_1} \beta_i \sum_{j\in J_i^3} \gamma_i^{\,j}}$ olur. Ayrıca $y_i^{\,j}$ için y_k yazılıp ve (4.27) eşitsizliği kullanılırsa $\sum_{k\in K} \varsigma_k + A_1 + A_0 = 1$ ve $y_k \in F_{m-2}$ olmak üzere

$$\|0, y - Ty, Ty - y\| \le \sum_{k\in K} \varsigma_k \|0, y_k - Ty, Ty - y_k\| + \left(A_1 + A_0\right) r^s(F)$$

elde edilir. Bu işleme devam edilirse $y_p \in F_1$ ve $\sum_{p\in P}\lambda_p + \sum_{k=0}^{m-1} A_k = 1$ olmak üzere

$$\| 0, y - Ty, Ty - y \| \le \sum_{p\in P}\lambda_p \| 0, y_p - Ty, Ty - y_p \| + \sum_{k=0}^{m-1} A_k r^s(F)$$

yazılabilir. Bu durumda $\| 0, y_p - Ty, Ty - y_p \| \le r^s(F)$ olur ve

$$\| 0, y - Ty, Ty - y \| \le \left(\sum_{p\in P}\lambda_p + \sum_{k=0}^{m-1} A_k \right) r^s(F) = r^s(F)$$

elde edilir. (4.17) eşitsizliği kullanılarak $\sum_{k=0}^{m-1} B_k + \sum_{p\in P}\gamma_p + \sum_{k=0}^{m-1} A_k = 1$ olmak üzere

$$\| 0, x - Ty, Ty - x \| \le \left(\sum_{k=0}^{m-1} B_k + \sum_{p\in P}\gamma_p + \sum_{k=0}^{m-1} A_k \right) r^s(F)$$

elde edilir. Sonuç olarak $\| 0, x - Ty, Ty - x \| \le r^s(F)$ olur ve böylece

$$\delta_{m+1}{}^s - \varepsilon < \| 0, x - Ty, Ty - x \| \le r^s(F)$$

elde edilir.

Durum 3. $x, y \in F_m$ için

$$\delta_{m+1}{}^s - \varepsilon < \| 0, Tx - Ty, Ty - Tx \| < \max \left\{ \begin{matrix} \| 0, x - y, y - x \|, \| 0, Tx - x, x - Tx \|, \\ \| 0, y - Ty, Ty - y \|, \| 0, x - Ty, Ty - x \|, \\ \| 0, Tx - y, y - Tx \| \end{matrix} \right\}$$

olur ve Durum 2 de yapılan tüm işlemler tekrar edilirse

$$\delta_{m+1}{}^s - \varepsilon < \| 0, Tx - Ty, Ty - Tx \| \le r^s(F)$$

elde edilir.

Bu üç durumda da $\delta_{m+1}{}^s - \varepsilon < r^s(F)$ elde edilir. Eğer ε sıfıra yaklaşırsa bu durumda $\delta_{m+1}{}^s \le r^s(F)$ olur.

$F^\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ olsun. $C^s(F) \ne \varnothing$ olduğundan F^∞ kümesi de boştan farklıdır. $F_k \subseteq F_{k+1}$ olduğuna $\delta^s(F^\infty) = \lim_{k\to\infty} \delta^s(F_k) \le r^s(F)$ elde edilir. $F_k \subseteq F$ olduğuna göre $F^\infty \subseteq F$ olur ve $\delta^s(F^\infty) \le r^s(F)$ bulunur.

F kümesinin $S-$ normal yapı özelliği kullanılarak $r^s(F) < \delta^s(F)$ ve $\delta^s(F^\infty) < \delta^s(F)$ elde edilir. Bu durumda F^∞ kümesi F kümesinin bir öz alt kümesi olmalıdır. Ayrıca F^∞ kümesi konvekstir ve $TF^\infty \subseteq F^\infty$ dir.

$M = \overline{convF^\infty} = \overline{F^\infty}$ olsun. M kümesinin çapı F^∞ kümesinin çapı ile aynıdır. Bu durumda $\delta^s(M) \le r^s(F) < \delta^s(F)$ olur ve M kümesi F kümesinin kapalı, boştan farklı ve konveks öz alt kümesidir. T fonksiyonu sürekli olduğundan M kümesi $T-$ invaryanttır ve $TM = TF^\infty \subseteq \overline{TF^\infty} \subseteq \overline{F^\infty} = M$ olur. Bu durumda $M \in \mathfrak{M}$ ve $M \subset F$ elde edilir. Bu ise F kümesinin minimal olması ile çelişir ve $\delta^s(F) = 0$ olmalıdır. Sonuç olarak F kümesinin tek noktası vardır ve bu nokta T fonksiyonunun sabit noktasıdır. □

4.3 S – Normlu Uzaylarda Bazı Karşılaştırmalar

Bu bölümde $(S25)$ ve $(NS25)$ (sırasıyla $(NR25)$ ve $(NS25)$) arasındaki ilişkiler incelenecektir.

İlk olarak $(S25)$ ve $(NS25)$ arasındaki ilişki aşağıdaki önermede verilmiştir.

4.3.1 Önerme. $\left(X, \|.,.,.\|\right)$ bir $S-$ Banach uzay, $(X, S_{\|\cdot\|})$ bu $S-$ norm tarafından elde edilen $S-$metrik uzay ve $T: X \to X$ bir fonksiyon olsun. Eğer T fonksiyonu $(NS25)$ koşulunu sağlıyorsa $(S25)$ koşulunu da sağlar.

İspat. T fonksiyonu $(NS25)$ koşulunu sağlasın. Bu durumda

$$S_{\|\cdot\|}(Tx,Tx,Ty) = \| Tx-Tx, Tx-Ty, Ty-Tx \| = \| 0, Tx-Ty, Ty-Tx \|$$

$$< \max\left\{ \begin{array}{l} \| 0, x-y, y-x \|, \| 0, Tx-x, x-Tx \|, \| 0, Ty-y, y-Ty \|, \\ \| 0, Ty-x, x-Ty \|, \| 0, Tx-y, y-Tx \| \end{array} \right\}$$

$$= \max\left\{ S_{\|\cdot\|}(x,x,y), S_{\|\cdot\|}(Tx,Tx,x), S_{\|\cdot\|}(Ty,Ty,y), S_{\|\cdot\|}(Ty,Ty,x), S_{\|\cdot\|}(Tx,Tx,y) \right\}$$

elde edilir. Sonuç olarak T fonksiyonu $(S25)$ koşulunu sağlar. □

Aşağıdaki önermede $(NR25)$ ve $(NS25)$ koşulları arasındaki ilişki verilmiştir.

4.3.2 Önerme. $(X,\|\,.\,\|)$ bir Banach uzay, $(X,\|\,.,.,.\,\|)$ bu norm tarafından elde edilen $S-$ normlu uzay ve $T: X \to X$ bir fonksiyon olsun. Eğer T fonksiyonu $(NR25)$ koşulunu sağlarsa $(NS25)$ koşulunu da sağlar.

İspat. T fonksiyonu $(NR25)$ koşulunu sağlasın. Bu durumda

$$\|0,Tx-Ty,Ty-Tx\| = \|0\| + \|Tx-Ty\| + \|Ty-Tx\| = 2\|Tx-Ty\|$$

$$< 2\max\{\|x-y\|,\|x-Tx\|,\|y-Ty\|,\|x-Ty\|,\|y-Tx\|\}$$

$$< \max\{2\|x-y\|,2\|x-Tx\|,2\|y-Ty\|,2\|x-Ty\|,2\|y-Tx\|\}$$

$$= \max\left\{\begin{array}{l}\|x-y\|+\|y-x\|,\|x-Tx\|+\|Tx-x\|,\|y-Ty\|+\|Ty-y\|,\\ \|x-Ty\|+\|Ty-x\|,\|y-Tx\|+\|Tx-y\|\end{array}\right\}$$

$$= \max\left\{\begin{array}{l}\|0,x-y,y-x\|,\|0,Tx-x,x-Tx\|,\|0,Ty-y,y-Ty\|,\\ \|0,Ty-x,x-Ty\|,\|0,Tx-y,y-Tx\|\end{array}\right\}$$

elde edilir. Sonuç olarak T fonksiyonu $(NS25)$ koşulunu sağlar. □

X kümesi bir norm tarafından üretilen $S-$norm ile birlikte bir $S-$normlu uzay olduğunda Teorem 2.2.5 ve Teorem 4.2.10 çakışır. Fakat hiçbir norm tarafından üretilemeyen $S-$norm örnekleri mevcut olduğu için Teorem 4.2.10, Teorem 2.2.5 in bir genellemesidir.

5. S – METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEORİSİNİN BAZI UYGULAMALARI

Bu bölümde $S-$ metrik uzaylarda bazı genelleştirilmiş daralma fonksiyonlarının kompleks değerli $S-$metrik uzaylara bir uygulaması verilmiştir. Ayrıca $S-$ metrik uzaylarda Picard Teoremi tanımlanarak herhangi bir metrik tarafından üretilemeyen bir $S-$metrik için yaklaşık olarak hata analizi yapmanın bir uygulaması verilmiştir.

5.1 Kompleks Değerli Fonksiyonlar Teorisine Bir Uygulama

Bu bölümde kompleks değerli $S-$metrik uzaylarda Rhoades daralma koşulu, Nemytskii – Edelstein daralma koşulu ve Ciric daralma koşulu kullanılarak bazı yeni genelleştirilmiş sabit nokta teoremleri elde edilmiştir.

Kompleks değerli $S-$ metrik uzaylarda Rhoades koşulu aşağıdaki şekilde tanımlıdır.

5.1.1 Tanım. (X, S_C) kompleks değerli bir $S-$metrik uzay ve $T: X \to X$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in X$ $(x \neq y)$ için

$$\textbf{(CS25)}\ S_C(Tx,Tx,Ty) \prec \max\begin{Bmatrix} S_C(x,x,y), S_C(Tx,Tx,x), S_C(Ty,Ty,y), \\ S_C(Ty,Ty,x), S_C(Tx,Tx,y) \end{Bmatrix}$$

dir.

Aşağıdaki tanımlarda kompleks değerli bir $S-$metrik uzay üzerinde çap kavramı tanımlanmış ve ($CS25$) koşulunun bir genellemesi elde edilmiştir.

5.1.2 Tanım. (X, S_C) kompleks değerli bir $S-$ metrik uzay ve A, X kümesinin boştan farklı bir alt kümesi olsun. A kümesinin çapı

$$diam\{A\} = \sup\{|S_C(x,x,y)| : x, y \in A\}$$

şeklinde tanımlıdır. Eğer A kümesi sınırlı bir küme ise $diam\{A\} < \infty$ yazılır.

5.1.3 Tanım. (X, S_C) kompleks değerli bir $S-$metrik uzay, $T : X \to X$ bir fonksiyon, $U_x = \{T^n x : n \in \mathbb{N}\}$, $diam\{U_x\} < \infty$ ve $diam\{U_y\} < \infty$ olsun. Her $x, y \in X$ $(x \neq y)$ için

(*CS25a*) $|S_C(Tx,Tx,Ty)| < diam\{U_x \cup U_y\}$

dir.

(*CS25*) ve (*CS25a*) koşulları arasındaki ilişki aşağıdaki önermede verilmiştir.

5.1.4 Önerme. (X, S_C) kompleks değerli bir $S-$metrik uzay ve $T : X \to X$ bir fonksiyon olsun. T fonksiyonu (*CS25*) koşulunu sağlıyorsa (*CS25a*) koşulunu da sağlar.

İspat. T fonksiyonu (*CS25*) koşulunu sağlasın. Tanım gereğince

$$S_C(Tx,Tx,Ty) \prec \max\left\{\begin{array}{l} S_C(x,x,y), S_C(Tx,Tx,x), S_C(Ty,Ty,y), \\ S_C(Ty,Ty,x), S_C(Tx,Tx,y) \end{array}\right\} = \alpha$$

ve buradan

$$|S_C(Tx,Tx,Ty)| < |\alpha| < diam\{U_x \cup U_y\}$$

elde edilir. O halde (*CS25a*) koşulu sağlanır. □

Önerme 5.1.4 ün tersinin her zaman doğru olmadığı aşağıdaki örnekten görülmektedir.

5.1.5 Örnek. $X=(0,1)$ kümesi, her $x,y,z\in X$ için

$$S_C(x,y,z)=5e^{ik}\left(\left|\,x-z\,\right|+\left|\,x+z-2y\,\right|\right),\ k\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

şeklinde tanımlı kompleks değerli $S-$metrik ile kompleks değerli bir $S-$metrik uzay olsun. Her $x\in X$ için $T:X\to X$ fonksiyonu

$$Tx=\begin{cases} x & ; \quad x\in(0,1), x\neq\frac{1}{2}, x\neq\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & ; \quad x=\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & ; \quad x=\frac{1}{3} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı olsun. $x=\frac{1}{4}, y=\frac{1}{5}\in X$ için

$$S_C(Tx,Tx,Ty)=\frac{e^{ik}}{2}\ ,\ S_C(x,x,y)=\frac{e^{ik}}{2},$$

$$S_C(Tx,Tx,x)=0\,,\ S_C(Ty,Ty,y)=0\,,$$

$$S_C(Ty,Ty,x)=\frac{e^{ik}}{2}\,,\ S_C(Tx,Tx,y)=\frac{e^{ik}}{2}$$

ve

$$S_C(Tx,Tx,Ty)=\frac{e^{ik}}{2}\prec\max\left\{\frac{e^{ik}}{2},0,0,\frac{e^{ik}}{2},\frac{e^{ik}}{2}\right\}$$

elde edilir. Buradan

$$\left|\,S_C(Tx,Tx,Ty)\,\right|=\frac{1}{2}<\left|\frac{e^{ik}}{2}\right|=\frac{1}{2}$$

çelişkisi elde edilir. O halde T fonksiyonu (*CS25*) koşulunu sağlamaz. Fakat $\sup X=1$ olduğundan T fonksiyonu (*CS25a*) koşulunu sağlar.

(X,S_C) kompleks değerli bir $S-$metrik uzay olsun. X kümesindeki her dizi yakınsak bir alt diziye sahipse X uzayına kompakt kompleks değerli $S-$metrik uzay denir.

(X,S_C) ve (Y,S_C^*) kompleks değerli iki $S-$metrik uzay ve $T:X\rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. T fonksiyonunun $x\in X$ noktasında sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul $x_n\rightarrow x$ olduğunda $Tx_n\rightarrow Tx$ olmasıdır.

Aşağıdaki teoremde, kompakt kompleks değerli bir $S-$metrik uzay üzerinde $(CS25a)$ koşulunu sağlayan bir fonksiyon için bir sabit nokta sonucu elde edilmiştir.

5.1.6 Teorem. (X,S_C) kompakt kompleks değerli bir $S-$metrik uzay ve $T:X\rightarrow X$, $(CS25a)$ koşulunu sağlayan sürekli bir fonksiyon olsun. T fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır.

İspat. T fonksiyonu sürekli ve X kompakt olduğundan $TX\subset Y$ olacak şekilde X kümesinin kompakt bir Y alt kümesi vardır. $TY\subset Y$ elde edilir ve $Z=\bigcap_{n=1}^{\infty}T^nY$, X kümesinin boştan farklı kompakt bir alt kümesidir. Z kümesinin, T fonksiyonunun bir tek sabit noktası olan x_0 noktasından oluşan tek elemanlı bir küme olduğunu gösterelim. Z kümesi tek elemanlı olmasın. Bu durumda $diam\{Z\}>0$ dır. Z kompakt bir alt küme olduğundan, $\left|S_C(x,x,y)\right|=diam\{Z\}$ olacak şekilde $x,y\in Z$ noktaları vardır. Ayrıca T fonksiyonu Z kümesini kendi üzerine resmettiğinden $Tx_0=x$ ve $Ty_0=y$ olacak şekilde $x_0,y_0\in Z$ noktaları vardır. $(CS25a)$ koşulundan

$$diam\{Z\}=\left|S_C(x,x,y)\right|=\left|S_C(Tx_0,Tx_0,Ty_0)\right|<diam\{Z\}$$

çelişkisi elde edilir. O halde T fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır. □

Önerme 5.1.4 kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

5.1.7 Sonuç. (X,S_C) kompakt kompleks değerli bir $S-$metrik uzay ve $T:X\rightarrow X$, $(CS25)$ koşulunu sağlayan sürekli bir fonksiyon olsun. T fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır.

Aşağıdaki önermeden kompleks değerli $S-$metrik fonksiyonunun sürekli olduğu görülmektedir.

5.1.8 Önerme. (X,S_C) kompleks değerli bir $S-$metrik uzay ve $\{x_n\},\{y_n\}$ iki dizi olsun. $\{x_n\}\to x$ ve $\{y_n\}\to y$ ise $S_C(x_n,x_n,y_n)\to S_C(x,x,y)$ dir.

İspat. $\{x_n\}\to x$ ve $\{y_n\}\to y$ olsun. Her $n\geq n_1,n_2$ için

$$S_C(x_n,x_n,x) \prec \frac{\varepsilon}{4} \text{ ve } S_C(y_n,y_n,y) \prec \frac{\varepsilon}{4}$$

olacak şekilde $n_1,n_2\in\mathbb{N}$ sayıları vardır. $n_0=\max\{n_1,n_2\}$ olarak alınırsa (CS3) koşulu ve Yardımcı Teorem 2.4.5 kullanılarak

$$S_C(x_n,x_n,y_n) \precsim 2S_C(x_n,x_n,x)+2S_C(y_n,y_n,y)+S_C(x,x,y)\prec \varepsilon+S_C(x,x,y)$$

ve dolayısıyla

$$S_C(x_n,x_n,y_n)-S_C(x,x,y) \prec \varepsilon \tag{5.1}$$

elde edilir. Ayrıca

$$S_C(x,x,y) \precsim 2S_C(x,x,x_n)+2S_C(y,y,y_n)+S_C(x_n,x_n,y_n)\prec \varepsilon+S_C(x_n,x_n,y_n)$$

ve böylece

$$S_C(x,x,y)-S_C(x_n,x_n,y_n) \prec \varepsilon \tag{5.2}$$

elde edilir. (5.1) ve (5.2) eşitsizlikleri kullanılarak

$$\left|S_C(x_n,x_n,y_n)-S_C(x,x,y)\right|< \varepsilon$$

yani, $S_C(x_n,x_n,y_n)\to S_C(x,x,y)$ elde edilir. Sonuç olarak, kompleks değerli $S-$ metrik fonksiyonu süreklidir. □

Kompleks değerli $S-$metrik uzay üzerinde Nemytskii – Edelstein koşulu aşağıdaki şekilde verilmiştir.

5.1.9 Tanım. (X,S_C) kompleks değerli bir $S-$metrik uzay ve $T:X\to X$ bir fonksiyon olsun. Her $x,y\in X$ $(x\neq y)$ için

(*CSN-E*) $S_C(Tx,Tx,Ty) \prec S_C(x,x,y)$

dir.

Aşağıdaki önermede (*CS25*) koşulu ile (*CSN-E*) koşulu arasındaki ilişki incelenmiştir.

5.1.10 Önerme. (X, S_C) kompleks değerli bir $S-$ metrik uzay ve $T: X \to X$ bir fonksiyon olsun. Eğer T fonksiyonu (*CSN-E*) koşulunu sağlıyorsa (*CS25*) koşulunu da sağlar.

İspat. Tanım 5.1.1 ve Tanım 5.1.9 kullanılarak ispat kolayca görülür. □

Önerme 5.1.4 ve Önerme 5.1.10 dan aşağıdaki sonuç elde edilir.

5.1.11 Sonuç. (X, S_C) kompleks değerli bir $S-$metrik uzay ve $T: X \to X$ bir fonksiyon olsun. Eğer T fonksiyonu (*CSN-E*) koşulunu sağlıyorsa (*CS25a*) koşulunu da sağlar.

Önerme 5.1.10 ve Sonuç 5.1.11 in tersi her zaman doğru olmak zorunda değildir.

5.1.12 Örnek. $X = [0,1]$, Örnek 5.1.5 te tanımlanan kompleks değerli $S-$ metrik ile beraber kompleks değerli bir $S-$ metrik uzay olsun. Her $x \in X$ için $T: X \to X$ fonksiyonu

$$Tx = \begin{cases} x + \dfrac{4}{5} & ; \quad x \in \left[0, \dfrac{1}{5}\right) \\ 1 & ; \quad x \in \left[\dfrac{1}{5}, 1\right] \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $x = \frac{1}{6}, y = \frac{1}{7} \in X$ için

$$S_C(Tx, Tx, Ty) = \frac{5}{21} e^{ik}, \; S_C(x, x, y) = \frac{5}{21} e^{ik}$$

ve böylece

$$S_C(Tx, Tx, Ty) = \frac{5}{21} e^{ik} \prec S_C(x, x, y) = \frac{5}{21} e^{ik}$$

elde edilir. Buradan

$$| S_C(Tx,Tx,Ty) | = \frac{5}{21} < | S_C(x,x,y) | = \frac{5}{21}$$

çelişkisi elde edilir. O halde T fonksiyonu (*CSN-E*) koşulunu sağlamaz. Fakat T fonksiyonu (*CS25*) ve (*CS25a*) koşullarını sağlar.

Aşağıdaki teoremde kompakt kompleks değerli bir $S-$metrik uzay üzerinde klasik Nemytskii – Edelstein sabit nokta teoreminin bir genellemesi elde edilmiştir.

5.1.13 Teorem. (X,S_C) kompakt kompleks değerli bir $S-$metrik uzay ve $T:X\rightarrow X$, (*CSN-E*) koşulunu sağlayan bir fonksiyon olsun. T fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır.

İspat. $\psi : X \rightarrow [0,1)$ fonksiyonunu $\psi(x) = | S_C(x,x,Tx) |$ şeklinde tanımlayalım. (X,S_C) kompakt kompleks değerli bir $S-$metrik uzay olduğundan ψ fonksiyonu minimum değerini alır. Yani, her $x\in X$ için

$$| S_C(x_0,x_0,Tx_0) | < | S_C(x,x,Tx) |$$

olacak şekilde bir $x_0 \in X$ vardır. x_0 noktasının T fonksiyonunun bir sabit noktası olduğunu gösterelim. x_0 noktası T fonksiyonunun bir sabit noktası olmasın, yani $Tx_0 \neq x_0$ olsun. (*CSN-E*) koşulu kullanılarak

$$S_C(Tx_0,Tx_0,TTx_0) \prec S_C(x_0,x_0,Tx_0)$$

ve

$$| S_C(Tx_0,Tx_0,TTx_0) | < | S_C(x_0,x_0,Tx_0) |$$

elde edilir. Bu ise tüm $| S_C(x,x,Tx) |$ değerleri arasında $| S_C(x_0,x_0,Tx_0) |$ ın minimalliği ile çelişir. Böylece x_0 noktası T fonksiyonunun bir sabit noktasıdır. x_0 noktasının tek olduğunu gösterelim. y_0, T fonksiyonunun başka bir sabit noktası olsun, yani, $Ty_0 = y_0$ ve $x_0 \neq y_0$ olsun. (*CSN-E*) koşulu kullanılarak

$$S_C(x_0,x_0,y_0) = S_C(Tx_0,Tx_0,Ty_0) \prec S_C(x_0,x_0,y_0)$$

ve

$$| S_C(x_0,x_0,y_0) | < | S_C(x_0,x_0,y_0) |$$

çelişkisi elde edilir. O halde $x_0 = y_0$ dır, yani x_0 noktası T fonksiyonunun bir tek sabit noktasıdır. □

5.1.14 Uyarı. Kompakt kompleks değerli bir $S-$metrik uzay üzerinde sürekli fonksiyonlar için aşağıdaki sonuçlar çıkarılabilir.

(1) Sonuç 5.1.7, Teorem 5.1.13 ün bir genellemesidir.

(2) Önerme 5.1.4 ten Teorem 5.1.6 nın Teorem 5.1.13 ün bir başka genellemesi olduğu elde edilir.

(3) Örnek 5.1.12 dikkate alınırsa (*CS25*) ve (*CS25a*) koşullarını sağlandığından $x=1$ noktası T fonksiyonunun bir tek sabit noktasıdır.

(4) Teorem 5.1.13 te S_C fonksiyonu $S_C : X \times X \times X \to [0,\infty)$ olarak alınırsa Teorem 2.3.16 elde edilir.

Son olarak kompleks değerli bir $S-$metrik uzay üzerinde Ciric koşulunun bir genellemesi aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

5.1.15 Tanım. (X, S_C) kompleks değerli bir $S-$metrik uzay ve $T : X \to X$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in X$ ve bazı $h \in \left[0, \frac{1}{3}\right)$ için

$$\textbf{(CSC)}\quad S_C(Tx,Tx,Ty) \precsim h\max\left\{\begin{array}{l} S_C(x,x,y), S_C(Tx,Tx,x), S_C(Ty,Ty,y), \\ S_C(Ty,Ty,x), S_C(Tx,Tx,y) \end{array}\right\}$$

dir.

Aşağıdaki önermede (*CS25*) ve (*CSC*) koşulları arasındaki ilişki verilmiştir.

5.1.16 Önerme. (X, S_C) kompleks değerli bir $S-$ metrik uzay ve $T : X \to X$ bir fonksiyon olsun. T fonksiyonu (*CSC*) koşulunu sağlıyorsa (*CS25*) koşulunu da sağlar.

İspat. Tanım 5.1.1 ve Tanım 5.1.15 ten ispat kolayca elde edilir. □

Önerme 5.1.4 ve Önerme 5.1.16 kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

5.1.17 Sonuç. (X,S_C) kompleks değerli bir $S-$metrik uzay ve $T:X\to X$ bir fonksiyon olsun. T fonksiyonu (CSC) koşulunu sağlıyorsa ($CS25a$) koşulunu da sağlar.

Örnek 5.1.12 de tanımlanan T fonksiyonu dikkate alınırsa o zaman T fonksiyonu ($CS25$) ve ($CS25a$) koşullarını sağlar fakat (CSC) koşulunu sağlamaz.

Tam kompleks değerli bir $S-$metrik uzay üzerinde Ciric sabit nokta teoremi aşağıdaki gibi genellenmiştir.

5.1.18 Teorem. (X,S_C) tam kompleks değerli bir $S-$ metrik uzay ve $T:X\to X$, (CSC) koşulunu sağlayan bir fonksiyon olsun. T fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır.

İspat. $x_0\in X$ ve $\{x_n\}$ dizisi $Tx_n=x_{n+1}, n=0,1,2,\dots$ şeklinde tanımlı olsun. Her n için $x_n\neq x_{n+1}$ olduğunu kabul edelim. (CSC) koşulu ve Yardımcı Teorem 2.4.5 kullanılarak

$$S_C(x_n,x_n,x_{n+1})=S_C(Tx_{n-1},Tx_{n-1},Tx_n)$$

$$\precsim h\max\left\{\begin{array}{l}S_C(x_{n-1},x_{n-1},x_n),S_C(x_n,x_n,x_{n-1}),S_C(x_{n+1},x_{n+1},x_n),\\ S_C(x_{n+1},x_{n+1},x_{n-1}),S_C(x_n,x_n,x_n)\end{array}\right\}$$

$$=h\max\{S_C(x_{n-1},x_{n-1},x_n),S_C(x_{n+1},x_{n+1},x_n),S_C(x_{n+1},x_{n+1},x_{n-1})\}$$

$$=h\alpha$$

ve

$$|S_C(x_n,x_n,x_{n+1})|\leq h|\alpha|\leq 2h|S_C(x_{n+1},x_{n+1},x_n)|+h|S_C(x_{n-},x_{n-1},x_n)|$$

elde edilir. Buradan

$$|S_C(x_n,x_n,x_{n+1})|\leq\frac{h}{1-2h}|S_C(x_{n-1},x_{n-1},x_n)| \tag{5.3}$$

olur. $a=\dfrac{h}{1-2h}$ olsun. $3h<1$ olduğundan $a<1$ olur. $0\leq h<\dfrac{1}{3}$ olduğundan $1-2h\neq 0$ dır. Tümevarım yöntemi ve (5.3) eşitsizliği kullanılarak

$$|S_C(x_n,x_n,x_{n+1})|\leq a^n|S_C(x_0,x_0,x_1)| \tag{5.4}$$

elde edilir. $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Her $n,m\in\mathbb{N}$, $n<m$ için (5.4) eşitsizliği ve (CS3) koşulu kullanılarak

$$|S_C(x_n,x_n,x_m)|\leq\frac{a^n}{1-a}|S_C(x_0,x_0,x_1)|$$

elde edilir. $n,m\to\infty$ iken $|S_C(x_n,x_n,x_m)|\to 0$ olur Böylece $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir. Tamlık hipotezinden $\{x_n\}\to x$ olacak şekilde $x\in X$ noktası vardır. Şimdi bu x noktasının T fonksiyonunun bir sabit noktası olduğunu gösterelim. Tersine olarak, x noktası T fonksiyonunun bir sabit noktası olmasın, yani $Tx\neq x$ olsun. (CSC) koşulu kullanılarak

$$\begin{aligned} S_C(x_n,x_n,x) &= S_C(Tx_{n-1},Tx_{n-1},Tx) \\ &\precsim h\max\left\{\begin{matrix} S_C(x_{n-1},x_{n-1},x),S_C(x_n,x_n,x_{n-1}),S_C(Tx,Tx,x), \\ S_C(Tx,Tx,x_{n-1}),S_C(x_n,x_n,x) \end{matrix}\right\} \end{aligned}$$

ve $n\to\infty$ için

$$S_C(x,x,Tx)\ \precsim\ S_C(Tx,Tx,x)$$

elde edilir. Buradan Yardımcı Teorem 2.4.5 kullanılarak

$$|S_C(Tx,Tx,x)|\leq h|S_C(Tx,Tx,x)|$$

bulunur. Bu ise $Tx=x$ olmasını sağlar, yani x noktası T fonksiyonunun bir sabit noktasıdır. Şimdi x noktasının T fonksiyonunun bir tek sabit noktası olduğunu gösterelim. Tersine olarak, y noktası $x\neq y$ olacak şekilde T fonksiyonunun başka bir sabit noktası olsun. (CSC) koşulu kullanılarak

$$S_C(x,x,y)=S_C(Tx,Tx,Ty)\quad\precsim h\max\left\{\begin{matrix} S_C(x,x,y),S_C(x,x,x),S_C(y,y,y), \\ S_C(y,y,x),S_C(x,x,y) \end{matrix}\right\}$$

ve Yardımcı Teorem 2.4.5 den

$$|S_C(x,x,y)|\leq|S_C(x,x,y)|$$

elde edilir. $h \in \left[0, \frac{1}{3}\right)$ olduğundan $x = y$ olur. Sonuç olarak, x noktası T fonksiyonunun bir tek sabit noktasıdır. □

5.1.19 Uyarı. Kompakt kompleks değerli bir $S-$metrik uzay üzerinde sürekli fonksiyonlar için aşağıdaki sonuçlar çıkarılabilir:

(1) Sonuç 5.1.7, Teorem 5.1.18 in bir genellemesidir.

(2) Önerme 5.1.4 ten Teorem 5.1.6 nın Teorem 5.1.18 in bir başka genellemesi olduğu elde edilir.

(3) Teorem 5.1.18 de S_C fonksiyonu $S_C : X \times X \times X \to [0, \infty)$ olarak alınırsa Sonuç 2.3.19 elde edilir.

5.2 Diferansiyel Denklem Teorisine Bir Uygulama

Bu bölümde $S_\infty-$ uzay kavramı verilerek bu uzayın tamlık özellikleri incelenmiştir. Bu uzay kullanılarak klasik Picard Teoremi'nin bir genellemesi elde edilmiştir. Ayrıca herhangi bir metrik tarafından üretilemeyen $S-$ metrik için yaklaşık çözüm yapılarak hata analiz uygulaması verilmiştir.

$a > 0, b > 0 \in \mathbb{R}$ olsun ve $\mathbb{R}^2$ üzerinde

$$D = \{(x, y) : |\, x - x_0 \,| \le a, |\, y - y_0 \,| \le b\}$$

kümesi tanımlansın. I herhangi bir aralık olmak üzere $x \in I$ ve I üzerinde tanımlı bir y fonksiyonu için $y'(x) = f(x, y(x))$ olacak şekilde $(x, y(x)) \in D$ ve $y(x_0) = y_0$ koşulları sağlanıyorsa $y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y(x))$ olmak üzere y fonksiyonuna

$$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0 \tag{5.5}$$

başlangıç değer probleminin bir çözümü denir. Yukarıda verilen başlangıç değer problemi, I üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlı integral denkleme denktir:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt. \tag{5.6}$$

Her $x \in I$ için $(x, y(x)) \in D$ ve

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))dt \tag{5.7}$$

koşullarını sağlayan y fonksiyonu (5.6) nin bir çözümü olarak düşünülebilir. (5.7) eşitliğinden y fonksiyonu süreklidir. Ayrıca y fonksiyonunun (5.5) te verilen başlangıç değer probleminin bir çözümü olması için gerekli ve yeterli koşul y fonksiyonunun (5.6) da verilen integral denklemin bir çözümünün olmasıdır [40].

5.2.1 $S_\infty -$ Uzaylar ve Tamlık

$F = \mathbb{R}$ ya da $F = \mathbb{C}$ ve $C[a,b] = \{ f \mid f : [a,b] \to F \text{ sürekli bir fonksiyon} \}$ olsun. Her $f, g \in C[a,b]$ için

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$$

şeklinde tanımlı $d_\infty : C[a,b] \times C[a,b] \to [0, \infty)$ fonksiyonu $C[a,b]$ kümesi üzerinde bir metriktir ve $(C[a,b], d_\infty)$ ikilisi bir metrik uzaydır.

Bu bölümde $S_\infty -$ uzay kavramı verilerek ve bu uzayın tamlık özellikleri incelenecektir. Bunun için ilk olarak d_∞ metriği tarafından elde edilen $S -$ metriği dikkate alalım.

Her $f, g, h \in C[a,b]$ için

$$S_\infty(f, g, h) = d_\infty(f, h) + d_\infty(g, h) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - h(x)| + \sup_{x \in [a,b]} |g(x) - h(x)|$$

şeklinde tanımlı $S_\infty : C[a,b] \times C[a,b] \times C[a,b] \to [0, \infty)$ fonksiyonu $C[a,b]$ kümesi üzerinde bir $S -$ metriktir ve $(C[a,b], S_\infty)$ ikilisi bir $S -$ metrik uzaydır.

5.2.1.1 Önerme. $\left(C\left[a,b\right],S_{\infty}\right)$ ikilisi bir tam $S-$ metrik uzaydır.

İspat. Yardımcı Teorem 2.3.9 kullanılarak ispat kolayca görülür. □

5.2.1.2 Tanım. (X,S) bir $S-$ metrik uzay ve Y kümesi X kümesinin boştan farklı bir alt kümesi olsun. $S_Y : Y\times Y\times Y \to [0,\infty)$ fonksiyonu her $x,y,z\in Y$ için

$$S_Y(x,y,z) = S(x,y,z)$$

şeklinde tanımlı olsun. Bu durumda S_Y bir $S-$ metriktir ve bu $S-$ metrik indirgenmiş $S-$ metrik olarak adlandırılır. (Y,S_Y) ikilisine de (X,S) $S-$ metrik uzayının alt $S-$ metrik uzayı denir.

5.2.1.3 Tanım. (X,S) bir $S-$ metrik uzay ve $A\subseteq X$ olsun. $A'_S \subset A$ ise A kümesine kapalıdır denir.

5.2.1.4 Önerme. (X,S) bir tam $S-$ metrik uzay olsun. Y kümesi (X,S) $S-$ metrik uzayında kapalı ise bu durumda (Y,S_Y) ikilisi tamdır.

İspat. Tamlık ve kapalılık tanımlarından ispat kolayca görülür. □

5.2.1.5 Önerme. $X=\left\{ f \,\middle|\, f:\left[a,b\right]\to\left[c,d\right] \text{ sürekli bir fonksiyon}\right\}$ olsun. Bu durumda (X,S_{∞}) ikilisi bir tam $S-$ metrik uzaydır.

İspat. Önerme 5.2.1.4 kullanılarak $X\subset C\left[a,b\right]$ ve $\left(C\left[a,b\right],S_{\infty}\right)$ ikilisi tam $S-$ metrik uzay olduğundan sadece X kümesinin kapalı olduğunu göstermek yeterlidir. $f\in C\left[a,b\right]$ ve f fonksiyonu X kümesinin bir yığılma noktası olsun. Bu durumda $\{f_n\}\to f$ olacak şekilde X kümesinde $\{f_n\}$ dizisi vardır. Her $x\in\left[a,b\right]$ için

$$\left|f_n(x)-f(x)\right| \le S_{\infty}(f_n,f_n,f)$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

elde edilir. Her $x \in [a,b]$ için $c \leq f_n(x) \leq d$ olduğundan $c \leq f(x) \leq d$ olur. Sonuç olarak $f \in X$ elde edilir. □

5.2.2 Picard Teoremi

Bu bölümde "Picard Teoremi" nin $S-$ metrik uzaylara bir genellemesi verilecektir.

5.2.2.1 Teorem. $a > 0$, $b > 0$ olsun ve f fonksiyonu

$$D = \{(x,y) : |x - x_0| \leq a,\ |y - y_0| \leq b\}$$

üzerinde her $(x, y_1), (x, y_2) \in D$ için

$$S\left(f(x,y_1), f(x,y_1), f(x,y_2)\right) \leq MS(y_1, y_1, y_2) \tag{5.8}$$

koşulunu sağlayan sürekli bir fonksiyon olsun. Burada $M > 0$ dir ve S fonksiyonu D üzerinde tanımlı alışılmış $S-$ metriktir. Bu durumda bir $r > 0$ için $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$ olduğunda

$$y'(x) = f(x, y(x)) \text{ ve } y(x_0) = y_0 \tag{5.9}$$

olacak şekilde $[x_0 - r, x_0 + r]$ üzerinde tanımlı bir tek y fonksiyonu vardır, yani $y(x_0) = y_0$ başlangıç koşulu altında

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y(x))$$

birinci dereceden diferansiyel denklemin $[x_0 - r, x_0 + r]$ üzerinde bir tek φ çözümü vardır.

İspat. f fonksiyonu D kümesi üzerinde sürekli olduğundan her bir $(x,y) \in D$ için

$$|f(x,y)| < k$$

olacak şekilde bir $k>0$ sayısı vardır, yani f fonksiyonu sınırlıdır. f fonksiyonu D kümesi üzerinde sınırlı ve sürekli olduğundan

$$K=\sup\left\{\left|f(x,y)\right|:\left(x,y\right)\in D\right\} \tag{5.10}$$

sayısı vardır. $r=\min\left\{a,\dfrac{b}{k}\right\}$ ve S fonksiyonu alışılmış $S-$ metrik olmak üzere

$$X=\left\{y\in C\left[x_0-r,x_0+r\right]:x\in\left[x_0-r,x_0+r\right] \text{ için } S\left(y(x),y(x),y_0\right)\le b\right\}$$

olsun. Bu durumda Önerme 5.2.1.5 ten (X,S_∞) ikilisi tam $S-$ metrik uzaydır. r sayısının tanımından $S(x,x,x_0)\le r$ ve $y\in X$ için $(x,y(x))\in D$ olduğu kolayca görülür. T fonksiyonu

$$Ty(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,y(t))dt\,,\ S(x,x,x_0)\le r$$

şeklinde tanımlı olsun. Bu durumda y fonksiyonunun (5.9) koşulunu sağlaması için gerekli ve yeterli koşul $Ty=y$ olmasıdır. r sayısının tanımı ve (5.10) eşitliği kullanılırsa $S(x,x,x_0)\le r$ ise $T:X\to X$ bir fonksiyon ve $Ty\in X$ olmak üzere

$$\begin{aligned}S\left(Ty(x),Ty(x),y_0\right)=2\left|Ty(x)-y_0\right|\le 2\left|\int_{x_0}^{x} f(t,y(t))dt\right|\le 2\int_{x_0}^{x}\left|f(t,y(t))\right|dt\\ \le 2K\left|x-x_0\right|=KS(x,x,x_0)\le Kr\le b\end{aligned}$$

elde edilir. Bir p tamsayısı için T^p fonksiyonunun bir daralma dönüşümü olduğunu gösterelim. Bu durumda

$$Ty_1(x)-Ty_2(x)=\int_{x_0}^{x}\left[f(t,y_1(t))-f(t,y_2(t))\right]dt$$

elde edilir. $x_0\le x$ olsun. Bu durumda

$$S\left(Ty_1(x),Ty_1(x),Ty_2(x)\right)=2\left|Ty_1(x)-Ty_2(x)\right|\le 2\int_{x_0}^{x}\left|f(t,y_1(t))-f(t,y_2(t))\right|dt$$

$$\le 2M\int_{x_0}^{x}\left|y_1(t)-y_2(t)\right|dt\le MS_\infty(y_1,y_1,y_2)\int_{x_0}^{x}dt=M(x-x_0)S_\infty(y_1,y_1,y_2)$$

elde edilir. Ty_1 ve Ty_2 fonksiyonları için bu yöntem tekrarlanırsa

$$S\left(T^2y_1(x),T^2y_1(x),T^2y_2(x)\right)=2\left|T^2y_1(x)-T^2y_2(x)\right|\le 2\int_{x_0}^{x}\left|f(t,Ty_1(t))-f(t,Ty_2(t))\right|dt$$

$$\leq M\int_{x_0}^{x} 2\left|Ty_1(t)-Ty_2(t)\right|dt \leq M\int_{x_0}^{x} S\left(Ty_1(t),Ty_1(t),Ty_2(t)\right)dt$$

$$= M\int_{x_0}^{x} M(t-x_0)S_\infty(y_1,y_1,y_2)dt = \frac{M^2(x-x_0)^2}{2}S_\infty(y_1,y_1,y_2)$$

elde edilir. Benzer düşünce ile herhangi bir n için

$$S\left(T^n y_1(x),T^n y_1(x),T^n y_2(x)\right) \leq \frac{M^n(x-x_0)^n}{n!}S_\infty(y_1,y_1,y_2)$$

$$\leq \frac{M^n\left|x-x_0\right|^n}{n!}S_\infty(y_1,y_1,y_2) \leq \frac{\left(Ma\right)^n}{n!}S_\infty(y_1,y_1,y_2)$$

elde edilir. Yardımcı Teorem 2.3.5 kullanılarak $x \leq x_0$ için de bu eşitsizliğin sağlandığı görülür. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(Ma\right)^n}{n!}=0$ olduğundan $\frac{\left(Ma\right)^p}{p!}<1$ olacak şekilde bir p tamsayısı vardır. Bu durumda T^p fonksiyonu bir daralma dönüşümüdür. Sonuç olarak T nin bir tek çözümü vardır. □

5.2.2.2 Uyarı.

(1) Teorem 5.2.2.1 in ispatı ayrıca, $0<r<\min\left\{\frac{1}{M},a,\frac{b}{k}\right\}$ olmak üzere $\left(B_S\left[y_0(x),kr\right],S_\infty\right)$ tam $S-$ metrik uzayı üzerinde Banach daralma prensibi kullanılarak da yapılabilir.

(2) Bir metrik tarafından üretilemeyen $S-$ metrik örnekleri mevcut olduğundan Teorem 5.2.2.1 de seçilen D bölgesine göre herhangi bir $S-$ metrik kullanılabilir. Bu durumda Teorem 5.2.2.1 klasik Picard Teoremi'nde içerilemeyen durumlarda önem kazanır. Çünkü herhangi bir D bölgesinde ve herhangi bir $S-$ metrik (özellikle herhangi bir metrik tarafından üretilemeyen ya da herhangi bir metriği üretmeyen) kullanılarak çalışmak gerekebilir.

Aşağıdaki teoremde dikey şerit üzerinde Picard Teoremi'nin yeni bir genellemesi verilmiştir.

5.2.2.3 Teorem. I bir kapalı aralık ve f fonksiyonu

$$D=\left\{\left(x,y\right):x\in I\right\}$$

üzerinde sürekli bir fonksiyon olsun. Herhangi $(x,y_1),(x,y_2)\in D$ için

$$S\left(f(x,y_1),\,f(x,y_1),\,f(x,y_2)\right)\leq MS\left(y_1,y_1,y_2\right)$$

olacak şekilde bir $M>0$ sayısı varsa bu durumda $(x_0,y_0)\in D$, $x\in I$ için

$$y'(x)=f(x,y(x)) \text{ ve } y(x_0)=y_0$$

olacak şekilde I üzerinde bir tek y fonksiyonu vardır, yani $y(x_0)=y_0$ başlangıç koşulu altında

$$\frac{dy}{dx}=f\left(x,y(x)\right)$$

birinci dereceden diferansiyel denkleminin I üzerinde bir tek φ çözümü vardır.

İspat. Teorem 5.2.2.1 in ispatında kullanılan yönteme benzer şekilde ispat kolayca görülür. □

Picard Teoremi vektör değerli fonksiyonlar kullanılarak genelleştirilebilir. Birinci dereceden bir diferansiyel denklem sistemi aşağıdaki gibidir:

$$u'(x)=f(x,u(x),v(x),\ldots)\,,\ u(a)=u\,,$$

$$v'(x)=g(x,u(x),v(x),\ldots)\,,\ v(a)=v$$

$$\vdots$$

dir. Bu durumda

$$y(x)=\begin{pmatrix}u(x)\\ v(x)\\ \vdots\end{pmatrix}$$

ve

$$y'(x)=\begin{pmatrix}u'(x)\\ v'(x)\\ \vdots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f(x,u(x),v(x))\\ g(x,u(x),v(x))\\ \vdots\end{pmatrix}=F(x,y(x))$$

yazılabilir.

5.2.2.4 Teorem. F fonksiyonu x üzerinde sürekli bir vektör fonksiyonu ve (5.8) eşitsizliği $x = x_0$, $y = y_0$ noktalarını içeren D bölgesinde y üzerinde sağlanırsa bu durumda $y(x_0) = y_0$ başlangıç koşulu altında

$$y'(x) = F(x, y(x))$$

adi diferansiyel denkleminin y_0 üzerinde bir tek $y(x)$ çözümü vardır ve bu çözüm sürekli olarak y_0 a bağlıdır.

İspat. Başlangıç koşulu ile birlikte adi diferansiyel denklem

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, y(t))dt$$

denklemine denktir. Picard iterasyonunu

$$y_0(x) = y_0 ,$$

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, y_0)dt ,$$

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, y_1(t))dt$$

$$\vdots$$

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, y_n(t))dt$$

şeklinde tanımlayalım.

$$D = \{(x, y) : x \in (x_0 - a, x_0 + a), y \in (y_0 - b, y_0 + b)\}$$

bölgesini dikkate alalım. $r \le a$ olmak üzere $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ olsun ve F fonksiyonu (5.8) eşitsizliğini sağlasın. İlk olarak tümevarım yöntemiyle

$$S(y_{n+1}(x), y_{n+1}(x), y_n(x)) \le \frac{kM^n S(x, x, x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \tag{5.11}$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösterelim. $n = 0$ ise $|.|$ bir vektörün normu, S fonksiyonu alışılmış $S-$ metrik ve $k = \sup\limits_{t\in[x_0-r, x_0+r]} F(t, y_0)$ olmak üzere

$$S(y_1(x), y_1(x), y_0(x)) = 2|y_1(x) - y_0(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} F(t, y_0)dt \right|$$

$$\leq 2k\left|\int_{x_0}^{x} dt\right| = 2k\,|\,x - x_0\,| = kS(x, x, x_0)$$

elde edilir. $n-1$ için (5.11) eşitsizliğinin sağlandığını kabul edelim. Bu durumda

$$S\left(y_{n+1}(x), y_{n+1}(x), y_n(x)\right) = 2\,|\,y_{n+1}(x) - y_n(x)\,| = 2\left|\int_{x_0}^{x}\left[F(t, y_n(t)) - F(t, y_{n-1}(t))\right]dt\right|$$

$$\leq 2\int_{x_0}^{x}|\,F(t, y_n(t)) - F(t, y_{n-1}(t))\,|\,dt \leq 2M\int_{x_0}^{x}|\,y_n(t) - y_{n-1}(t)\,|\,dt$$

$$\leq M\int_{x_0}^{x} S\left(y_n(t), y_n(t), y_{n-1}(t)\right)dt \leq M\int_{x_0}^{x}\frac{kM^{n-1}S(t,t,x_0)^n}{n!}dt \leq \frac{kM^nS(x,x,x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

elde edilir. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{kM^n}{(n+1)!}S(x,x,x_0)^{n+1}$ serisi yakınsaktır. Bu durumda

$$\sum_{n=0}^{\infty} S\left(y_{n+1}(x), y_{n+1}(x), y_n(x)\right)$$

serisinin yakınsaklığı elde edilir. Böylece

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = y_0 + \sum_{n=0}^{\infty}\left(y_{n+1}(x) - y_n(x)\right)$$

dizisi $y(x)$ vektör fonksiyonuna yakınsar. Ayrıca

$$S\left(y_{n+1}(x), y_{n+1}(x), y_n(x)\right) = 2\,|\,y_{n+1}(x) - y_n(x)\,| \leq 2^{n+1}\frac{kM^{n+1}\,|\,x - x_0\,|^{n+1}}{M(n+1)!}$$

ve

$$2\,|\,y(x) - y_N(x)\,| \leq \sum_{n=0}^{N-1} 2\,|\,y_{n+1}(x) - y_n(x)\,| \leq \frac{k}{M}\sum_{n=N}^{\infty} 2^{n+1}\frac{M^{n+1}\,|\,x - x_0\,|^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$= \frac{k}{M}\sum_{n=N}^{\infty} 2^{n+1}\frac{M^{n+1}S(x,x,x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{k}{M}\frac{M^{N+1}a^{N+1}}{(N+1)!}e^{Ma}$$

elde edilir. Sonuç olarak yakınsama x üzerinde düzgündür ve sürekli fonksiyonların düzgün yakınsaklığı süreklidir.

Şimdi $y(x)$ vektör fonksiyonunun bir çözüm olduğunu gösterelim. y_n dizisi y ye düzgün yakınsadığından y_n dizisinin y ye yaklaştığını kabul edelim. Bu durumda

$$\left|\int_{x_0}^{x} F(t,y_n(t))dt - \int_{x_0}^{x} F(t,y(t))dt\right| \le \int_{x_0}^{x} \left| F(t,y_n(t)) - F(t,y(t)) \right| dt$$

$$\le \int_{x_0}^{x} M \left| y_n(t) - y(t) \right| dt < M\varepsilon \left| x - x_0 \right| \le M\varepsilon a$$

elde edilir.

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t,y_n(t))dt$$

eşitliğinde $n \to \infty$ için limit alınırsa y vektör fonksiyonunun

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t,y(t))dt$$

adi diferansiyel denkleminin bir çözümü olduğu elde edilir.

Şimdi y vektör fonksiyonunun tek olduğunu gösterelim.

$$u(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t,y(t))dt$$

bir başka çözüm olsun. y ve u vektör fonksiyonları sürekli olduğundan $[x_0 - r, x_0 + r]$ üzerinde sınırlıdır, yani her $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$ için $\left| y(x) - u(x) \right| < K$ elde edilir. Bu durumda

$$S(y(x), y(x), u(x)) = 2\left| y(x) - u(x) \right| = 2\left| \int_{x_0}^{x} \left[F(t,y(t)) - F(t,u(t)) \right] dt \right|$$

$$\le 2\int_{x_0}^{x} M \left| y(t) - u(t) \right| dt \le 2MK \left| x - x_0 \right|,$$

$$S(y(x), y(x), u(x)) = 2\left| y(x) - u(x) \right| = 2\left| \int_{x_0}^{x} \left[F(t,y(t)) - F(t,u(t)) \right] dt \right|$$

$$\le 2\int_{x_0}^{x} M \left| y(t) - u(t) \right| dt \le 2^2 \int_{x_0}^{x} M^2 K \left| t - x_0 \right| \le 2^2 M^2 K \frac{\left| x - x_0 \right|^2}{2}$$

ve bu yönteme devam edilirse $n \to \infty$ için

$$S(y(x), y(x), u(x)) \le 2^n K M^n \frac{\left| x - x_0 \right|^n}{n!} \to 0$$

elde edilir. Bu durumda $[x_0 - r, x_0 + r]$ aralığı üzerinde $y(x) = u(x)$ bulunur.

Şimdi y vektör fonksiyonunun sürekli olarak y_0 a bağlı olduğunu gösterelim. y vektör fonksiyonu $y(x_0) = y_0$ başlangıç koşulu altında adi diferansiyel denklemin bir tek çözümü ve u vektör fonksiyonu da $u(x_0)=y_0+\delta$ başlangıç koşulu altında bir tek çözümü olsun. Bu durumda

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}F(t,y(t))dt$$

ve

$$u(x)=y_0+\delta+\int_{x_0}^{x}F(t,u(t))dt$$

eşitlikleri sağlanır.

$$|\, y(x)-u(x)\,| \leq |\,\delta\,| + \int_{x_0}^{x} |\, F(t,y(t))-F(t,u(t))\,| dt$$

$$\leq |\,\delta\,| + M\int_{x_0}^{x} |\, y(t)-u(t)\,| dt \tag{5.12}$$

elde edilir. y ve u vektör fonksiyonları sürekli olduğundan $\left(x_0-r,x_0+r\right)$ üzerinde $|\, y(x)-u(x)\,| \leq K$ elde edilir. (5.12) eşitsizliği kullanılarak

$$|\, y(x)-u(x)\,| \leq |\,\delta\,| + MK\,|\, x-x_0\,|$$

bulunur. Tümevarım yöntemi kullanılarak

$$|\, y(x)-u(x)\,| \leq |\,\delta\,| \left(1+M\,|\, x-x_0\,| + M^2\frac{|\, x-x_0\,|^2}{2!}+\cdots+M^n\frac{|\, x-x_0\,|^n}{n!}\right)$$

$$+KM^{n+1}\frac{|\, x-x_0\,|^{n+1}}{(n+1)!} \to |\,\delta\,| e^{M|x-x_0|}$$

ve

$$S(y(x),y(x),u(x)) \to 2|\,\delta\,| e^{M|x-x_0|}$$

elde edilir. $\delta \to 0$ iken $u(x)\to y(x)$ olur.

Tüm $y_n(x)$ lerin $\left(y_0-b,y_0+b\right)$ aralığında olduğunu gösterelim.

$$K'=\sup\left\{F(x,y):(x,y)\in D\right\}$$

olmak üzere $r=\min\left\{a,\dfrac{b}{K'}\right\}$ olsun. $x\in\left(x_0-r,x_0+r\right)$ için n üzerinden tümevarım uygulanırsa

$$y_0(x) = y_0 \in \left(y_0 - b, y_0 + b\right),$$

$$\left| y_{n+1}(x) - y_0 \right| = \left| \int_{x_0}^{x} F(t, y_n(t))dt \right| \leq M \left| x - x_0 \right| \leq Mr \leq b$$

ve buradan $y_{n+1}(x) \in \left(y_0 - b, y_0 + b\right)$ elde edilir. □

5.2.2.5 Teorem. $y = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \vdots \end{pmatrix}$ de her $F_i(x, y)$ bileşeni (5.8) eşitsizliğini sağlarsa, yani

$$S(F_i(x, y_1), F_i(x, y_1), F_i(x, y_2)) \leq M_i \left(S(u_1, u_1, u_2) + S(v_1, v_1, v_2) + \cdots\right)$$

ise bu durumda F vektör fonksiyonu y de (5.8) eşitsizliğini sağlar.

İspat. Herhangi pozitif $a_1, \ldots, a_n$ reel sayıları için

$$\left\| \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \right\| \leq a_1 + \cdots + a_n \leq \sqrt{n} \left\| \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \right\|$$

eşitsizliği sağlanır. Bu durumda $M = \sqrt{n} \sum_i M_i$ olmak üzere

$$S(F(x, y_1), F(x, y_1), F(x, y_2)) = 2\left| F(x, y_1) - F(x, y_2) \right| \leq 2\sum_i \left| F_i(x, y_1) - F_i(x, y_2) \right|$$

$$= \sum_i S(F_i(x, y_1), F_i(x, y_1), F_i(x, y_2)) \leq \sum_i M_i (S(u_1, u_1, u_2) + S(v_1, v_1, v_2) + \cdots)$$

$$\leq MS(y_1, y_1, y_2)$$

elde edilir. □

5.2.2.6 Örnek.

$$u'(x) = u(x) - xv(x), \; u(0) = 1$$

$$v'(x) = u(x) + v(x)^2, \; v(0) = 0$$

denklem sisteminin $x = 0$ civarında bir aralıkta bir tek çözümü olduğunu gösterelim. Bu sistem,

$$F(x,u,v)=\begin{pmatrix} u-xv \\ u+v^2 \end{pmatrix}$$

olmak üzere $y'(x)=F(x,y(x))$ olarak yazılabilir. F fonksiyonunun x üzerinde her yerde sürekli olduğu kolayca görülebilir. F fonksiyonunun bileşenleri dikkate alınırsa $|x|\leq M_1$ olmak üzere

$$S(u_1-xv_1,u_1-xv_1,u_2-xv_2)=2\left|(u_1-xv_1)-(u_2-xv_2)\right|\leq 2\left(|u_1-u_2|+|x||v_1-v_2|\right)$$

$$=2|u_1-u_2|+2|x||v_1-v_2|\leq (M_1+1)\left[2|u_1-u_2|+2|v_1-v_2|\right]$$

$$=(M_1+1)\left[S(u_1,u_1,u_2)+S(v_1,v_1,v_2)\right]$$

ve $|v_1|,|v_2|\leq M_2$ olmak üzere

$$S(u_1+v_1^2,u_1+v_1^2,u_2+v_2^2)=2\left|\left(u_1+v_1^2\right)-\left(u_2+v_2^2\right)\right|=2\left|\left(u_1-u_2\right)+\left(v_1^2-v_2^2\right)\right|$$

$$\leq 2\left(|u_1-u_2|+|v_1-v_2||v_1+v_2|\right)\leq 2\left(|u_1-u_2|+|v_1-v_2|\left(|v_1|+|v_2|\right)\right)$$

$$\leq (2M_2+1)\left[2|u_1-u_2|+2|v_1-v_2|\right]=(2M_2+1)\left[S(u_1,u_1,u_2)+S(v_1,v_1,v_2)\right]$$

elde edilir. Teorem 5.2.2.5 kullanılarak $(-1,1)\times(-1,1)$ bölgesinde $M=\sqrt{2}\left(M_1+2M_2+1\right)$ olmak üzere

$$S(F(x,y_1),F(x,y_1),F(x,y_2))\leq MS(y_1,y_1,y_2)$$

elde edilir. Sonuç olarak Teorem 5.2.2.4 ten 0 civarında bir tek çözüm vardır.

5.2.3 Yaklaşık Çözüme Bir Uygulama

Bu bölümde herhangi bir metrik tarafından üretilemeyen $S-$ metrik için yaklaşık olarak $n.$ iterasyonun hata analizi için bir örnek verilecektir.

$X=\mathbb{R}$ ve $S:X\times X\times X\to[0,\infty)$ fonksiyonu Örnek 2.3.10 daki gibi tanımlı bir $S-$ metrik olsun. Yani her $x,y,z\in\mathbb{R}$ için

$$S(x,y,z)=|x-z|+|x+z-2y| \qquad (5.13)$$

şeklinde tanımlıdır ve (X,S) ikilisi bir $S-$ metrik uzaydır. Teorem 2.3.15 deki eşitsizlik kullanılarak iterasyon dizileri için

$$S(x_n,x_n,x)\le \frac{2L^n}{1-L}S(x_1,x_1,x_0) \tag{5.14}$$

elde edilir. (5.14) eşitsizliği yaklaşık olarak *n*. iterasyonun hata analizinde kullanılabilir. Bu kullanımın nasıl olduğunu görmek için aşağıdaki örnek verilecektir.

5.2.3.1 Örnek. Picard iterasyonunu kullanarak $y(0)=\frac{1}{3}$ başlangıç koşulu altında

$$\frac{dy}{dx}=2x-3y^2$$

diferansiyel denkleminin yaklaşık çözümünü bulalım. $f(x,y)=2x-3y^2$ fonksiyonu Teorem 5.2.2.1 in koşullarını sağlar.

$$D=\left\{(x,y):|x|\le 1,\left|y-\frac{1}{3}\right|<\frac{1}{3}\right\}$$

olsun. Bu durumda f fonksiyonu D üzerinde tanımlıdır ve süreklidir. (5.8) eşitsizliği sağlanır. Gerçekten alışılmış $S-$ metriğin yerine (5.13) de tanımlanan $S-$ metriği alırsak

$$S(f(x,y_1),f(x,y_1),f(x,y_2))=2\left|f(x,y_1)-f(x,y_2)\right|=2\left|2x-3y_1^2-2x+3y_2^2\right|$$

$$=6\left|y_1^2-y_2^2\right|=3\left|y_1+y_2\right|S(y_1,y_1,y_2)\le 3\frac{4}{3}S(y_1,y_1,y_2)=4S(y_1,y_1,y_2)$$

elde edilir. $\left|f(x,y)\right|\le 1$ olduğundan f fonksiyonu D üzerinde sınırlıdır. $M=4$ olduğundan $r<\min\left\{\frac{1}{4},1,\frac{1}{3}\right\}=\frac{1}{4}$ elde edilir. $L=Mr<1$ alınırsa 2. iterasyon için

$$S_\infty(y_2(x),y_2(x),y(x))\le\frac{2L^2}{1-L}S_\infty(y_1(x),y_1(x),y_0(x))$$

elde edilir. Şimdi $y_1(x)$ i bulalım.

$$y_1(x)=\frac{1}{3}+\int_0^x\left(2t-\frac{1}{3}\right)dt=x^2-\frac{x}{3}+\frac{1}{3}$$

elde edilir. $r = \dfrac{1}{5}$ olsun. Bu durumda

$$[x_0 - r, x_0 + r] = \left[0 - \frac{1}{5}, 0 + \frac{1}{5}\right] = \left[-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right]$$

ve $L = \dfrac{4}{5}$ elde edilir.

$$S_\infty(y_1(x), y_1(x), y_0(x)) = 2 \sup_{x \in \left[-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right]} \left| \left(x^2 - \frac{x}{3} + \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{3} \right| = 2 \sup_{x \in \left[-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right]} \left| x^2 - \frac{x}{3} \right| = \frac{16}{75}$$

ve

$$S_\infty(y_2(x), y_2(x), y(x)) \leq \frac{512}{375} \cong 1.36$$

elde edilir. Üçüncü ve dördüncü iterasyonların hata analizi aşağıdaki gibidir:

$$S_\infty(y_3(x), y_3(x), y(x)) \leq \frac{2048}{1875} \cong 1.09$$

ve

$$S_\infty(y_4(x), y_4(x), y(x)) \leq \frac{8192}{9375} \cong 0.87 \,.$$

Sonuç olarak $n \geq 3$ için hata $n.$ iterasyonda azalır.

6. S – METRİK UZAYLARDA BAZI SABİT ÇEMBER TEOREMLERİ

Bu bölümde yeni $S-$ metrik uzay örnekleri elde edilerek bu uzaylarda bazı çember örnekleri verilmiştir. Bir (X,S) $S-$ metrik uzayının bir $T:X\to X$ fonksiyonunun sabit çemberi kavramı tanımlanarak $S-$ metrik uzaylar üzerinde sabit çember teoremlerinin varlık ve teklik koşulları araştırılmıştır. Ayrıca elde edilen sonuçların koşullarını sağlayan örnekler verilmiş ve geometrik yorum yapılmıştır.

6.1 S – Metrik Uzaylarda Bazı Çember Örnekleri

Bu bölümde yeni $S-$ metrik uzay örnekleri verilerek bazı çember örnekleri incelenmiştir.

$S-$ metrik uzaylarda çember kavramı aşağıdaki gibidir.

6.1.1 Tanım. (X,S) bir $S-$ metrik uzay ve $x_0\in X$, $r\in(0,\infty)$ olsun. x_0 merkezli, r yarıçaplı çember

$$C^S_{x_0,r}=\left\{x\in X:S(x,x,x_0)=r\right\}$$

şeklinde tanımlıdır.

6.1.2 Örnek. $X=\mathbb{R}^3$ ve $S_1:X\times X\times X\to[0,\infty)$ fonksiyonu her $x=(x_1,x_2,x_3),y=(y_1,y_2,y_3),z=(z_1,z_2,z_3)\in\mathbb{R}^3$ için

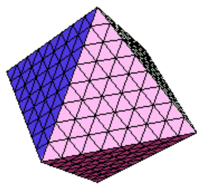
$$S_1(x,y,z)=\sum_{i=1}^{3}\left(\left|x_i-z_i\right|+\left|y_i-z_i\right|\right)$$

şeklinde tanımlı olsun. Bu durumda S_1 fonksiyonu $\mathbb{R}^3$ üzerinde bir $S-$metriktir ve $\left(\mathbb{R}^3, S_1\right)$ ikilisi de bir $S-$metrik uzaydır.

$x_0 = 0 = (0,0,0)$ ve $r = 10$ seçilirse bu durumda

$$C_{0,10}^{S_1} = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : S_1(x,x,0) = 10\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : |\, x_1 \,|+|\, x_2 \,|+|\, x_3 \,| = 5\right\}$$

çemberi elde edilir (bkz. Şekil 6.1).



Şekil 6.1: Örnek 6.1.2 de elde edilen çember.

6.1.3 Örnek. $X = \mathbb{R}^3$ ve $S_2 : X \times X \times X \to [0,\infty)$ fonksiyonu her $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3), z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$ için

$$S_2(x,y,z) = \sum_{i=1}^{3}\left(|\, x_i - z_i \,|+|\, x_i + z_i - 2y_i \,|\right)$$

şeklinde tanımlı olsun. Bu durumda S_2 fonksiyonu $\mathbb{R}^3$ üzerinde herhangi bir metrik tarafından üretilemeyen bir $S-$ metriktir ve $\left(\mathbb{R}^3, S_2\right)$ ikilisi de bir $S-$ metrik uzaydır.

6.1.4 Örnek. $X = \mathbb{R}^2$ ve $S_3 : X \times X \times X \to [0,\infty)$ fonksiyonu her $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2), z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$S_3(x,y,z) = \sqrt{\frac{\left(x_1 - z_1\right)^2}{9} + 4\left(x_2 - z_2\right)^2} + \sqrt{\frac{\left(x_1 + z_1 - 2y_1\right)^2}{9} + 4\left(x_2 + z_2 - 2y_2\right)^2}$$

şeklinde tanımlı olsun. Bu durumda S_3 fonksiyonu $\mathbb{R}^2$ üzerinde bir $S-$metriktir ve $\left(\mathbb{R}^2, S_3\right)$ ikilisi de bir $S-$metrik uzaydır. Ayrıca bu $S-$metrik herhangi bir metrik tarafından üretilemeyen bir $S-$metriktir.

$x_0 = 0 = (0,0)$ ve $r = 2$ seçilirse bu durumda

$$C_{0,2}^{S_3} = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : S_3(x,x,0) = 2\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{\frac{x_1^2}{9} + 4x_2^2} = 1\right\}$$

çemberi elde edilir (bkz. Şekil 6.2).

Şekil 6.2: Örnek 6.1.4 te elde edilen çember.

6.1.5 Örnek. $X = \mathbb{R}^3$ ve $S_4 : X \times X \times X \to [0,\infty)$ fonksiyonu her $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3), z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$ için

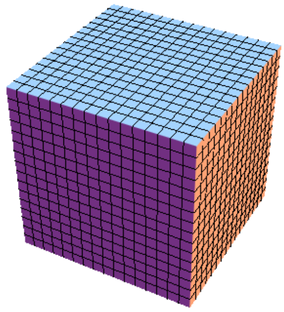
$$S_4(x,y,z) = \max\left\{\left| x_i - z_i \right| + \left| y_i - z_i \right| : i \in \{1,2,3\}\right\}$$

şeklinde tanımlı olsun. Bu durumda S_4 fonksiyonu $\mathbb{R}^3$ üzerinde bir $S-$metriktir ve $\left(\mathbb{R}^3, S_4\right)$ ikilisi de bir $S-$metrik uzaydır.

$x_0 = 0 = (0,0,0)$ ve $r = 10$ seçilirse bu durumda

$$C_{0,10}^{S_4} = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : S_4(x,x,0) = 10\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : \max\left\{\left| x_1 \right|, \left| x_2 \right|, \left| x_3 \right|\right\} = 5\right\}$$

çemberi elde edilir (bkz. Şekil 6.3).



Şekil 6.3: Örnek 6.1.5 te elde edilen çember.

6.1.6 Örnek. $X=\mathbb{R}^3$ ve $S_5 : X\times X\times X \to [0,\infty)$ fonksiyonu her $x=(x_1,x_2,x_3), y=(y_1,y_2,y_3), z=(z_1,z_2,z_3)\in\mathbb{R}^3$ için

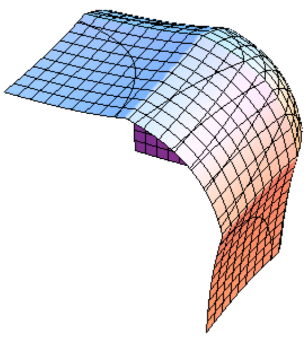
$$S_5(x,y,z)=\sum_{i=1}^{3}\left(\left|e^{x_i}-e^{z_i}\right|+\left|e^{y_i}-e^{z_i}\right|\right)$$

şeklinde tanımlı olsun. Bu durumda S_5 fonksiyonu $\mathbb{R}^3$ üzerinde bir $S-$metriktir ve $\left(\mathbb{R}^3,S_5\right)$ ikilisi de bir $S-$metrik uzaydır.

$x_0=0=(0,0,0)$ ve $r=8$ seçilirse bu durumda

$$C_{0,8}^{S_5}=\left\{x\in\mathbb{R}^3 : S_5(x,x,0)=8\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}^3 : \left|e^{x_1}-1\right|+\left|e^{x_2}-1\right|+\left|e^{x_3}-1\right|=4\right\}$$

çemberi elde edilir (bkz. Şekil 6.4).



Şekil 6.4: Örnek 6.1.6 da elde edilen çember.

6.2 Bazı Sabit Çember Teoremleri

Aşağıdaki tanımda $S-$ metrik uzaylar üzerinde sabit çember kavramı verilmiştir.

6.2.1 Tanım. (X,S) bir $S-$ metrik uzay, $C^S_{x_0,r}=\{x\in X : S(x,x,x_0)=r\}$ X üzerinde herhangi bir çember ve $T:X\to X$ bir fonksiyon olsun. Her $x\in C^S_{x_0,r}$ için $Tx=x$ oluyorsa bu durumda $C^S_{x_0,r}$ çemberine T fonksiyonunun bir sabit çemberi denir.

6.2.1 Sabit Çemberlerin Varlığı

(X,S) bir $S-$ metrik uzay olsun. Bu bölümde $T:X\to X$ şeklindeki fonksiyonların sabit çemberlerinin var olabilmesi için gerekli koşullar araştırılacaktır.

6.2.1.1 Teorem. (X,S) bir $S-$metrik uzay, $C^S_{x_0,r}$ X üzerinde herhangi bir çember olsun. Her $x\in X$ için $\varphi : X\to[0,\infty)$ fonksiyonu

$$\varphi(x)=S(x,x,x_0) \tag{6.1}$$

şeklinde tanımlansın. Eğer her $x\in C^S_{x_0,r}$ için

$$S(x,x,Tx)\le\varphi(x)+\varphi(Tx)-2r \tag{6.2}$$

ve

$$S(x,x,Tx)+S(Tx,Tx,x_0)\le r \tag{6.3}$$

koşullarını sağlayan bir $T:X\to X$ fonksiyonu varsa bu durumda $C^S_{x_0,r}$ çemberi T fonksiyonunun bir sabit çemberidir.

İspat. $x\in C^S_{x_0,r}$ ve $x\neq Tx$ olsun. Bu durumda φ fonksiyonunun tanımı, (6.2), (6.3) koşulları, Yardımcı Teorem 2.3.5 ve üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$S(x,x,Tx) \le \varphi(x) + \varphi(Tx) - 2r = S(x,x,x_0) + S(Tx,Tx,x_0) - 2r$$

$$\le S(x,x,Tx) + S(x,x,Tx) + S(Tx,Tx,x_0) + S(Tx,Tx,x_0) - 2r$$

$$= 2S(x,x,Tx) + 2S(Tx,Tx,x_0) - 2r \le 2r - 2r = 0$$

ve $S(x,x,Tx) = 0$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Sonuç olarak $Tx = x$ olmalıdır ve $C^S_{x_0,r}$ çemberi T fonksiyonunun bir sabit çemberidir. □

6.2.1.2 Uyarı.

(1) (6.2) koşulu $x \in C^S_{x_0,r}$ noktası için Tx noktasının $C^S_{x_0,r}$ çemberinin içinde bulunmadığını garantiler. Benzer şekilde (6.3) koşulu da $x \in C^S_{x_0,r}$ noktası için Tx noktasının $C^S_{x_0,r}$ çemberinin dışında bulunmadığını garantiler. Bu durumda her $x \in C^S_{x_0,r}$ için $Tx \in C^S_{x_0,r}$ dir ve $T\left(C^S_{x_0,r}\right) \subset C^S_{x_0,r}$ elde edilir.

(2) Bir $S-$ metrik herhangi bir d metriği tarafından üretiliyorsa Teorem 6.2.1.1 karşılık gelen metrik uzay üzerinde de kullanılabilir.

Şimdi bazı sabit çember örnekleri verilecektir.

6.2.1.3 Örnek. $X = \mathbb{R}$ ve $S : X \times X \times X \to [0,\infty)$ fonksiyonu alışılmış $S-$ metrik olsun. $C^S_{0,2}$ çemberi dikkate alınsın ve $T_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $x \in \mathbb{R}$ için

$$T_1x = \begin{cases} x & ; \quad x \in \{-1,1\} \text{ ise} \\ 10 & ; \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı olsun. Bu durumda T_1 fonksiyonu (6.2) ve (6.3) koşullarını sağlar. Böylece $C^S_{0,2}$ çemberi T_1 fonksiyonunun bir sabit çemberidir.

Dikkat edilirse $C^S_{\frac{9}{2},11}$ çemberi T_1 fonksiyonunun bir diğer sabit çemberidir. Böylece verilen bir fonksiyon için sabit çember tek değildir.

Diğer yandan $\mathbb{R}$ üzerinde d alışılmış metriğini düşünürsek $C_{0,2} = \{-2,2\}$ çemberi elde edilir ve $C_{0,2}$ çemberi T_1 fonksiyonunun bir sabit çemberi değildir.

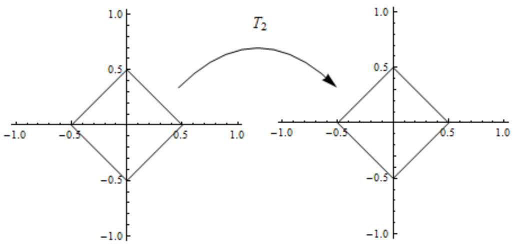
6.2.1.4 Örnek. $X=\mathbb{R}^2$ ve $S: X\times X\times X \to [0,\infty)$ fonksiyonu her $x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2), z=(z_1,z_2)\in\mathbb{R}^2$ için

$$S(x,y,z)=\sum_{i=1}^{2}\left(\left|x_i-z_i\right|+\left|x_i+z_i-2y_i\right|\right)$$

şeklinde tanımlı olsun. Bu durumda S fonksiyonu $\mathbb{R}^2$ üzerinde herhangi bir metrik tarafından üretilemeyen bir $S-$metriktir ve $\left(\mathbb{R}^2,S\right)$ ikilisi de bir $S-$metrik uzaydır. $C_{0,1}^S$ çemberi dikkate alınsın ve $T_2:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ fonksiyonu $x\in\mathbb{R}^2$ için

$$T_2x=\begin{cases} x & ; \quad x\in C_{0,1}^S \text{ ise} \\ (1,0) & ; \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı olsun. Bu durumda T_2 fonksiyonu (6.2) ve (6.3) koşullarını sağlar. Böylece $C_{0,1}^S$ çemberi T_2 fonksiyonunun bir sabit çemberidir (bkz. Şekil 6.5).



Şekil 6.5: Örnek 6.2.1.4 te kullanılan fonksiyonun sabit çemberi.

Aşağıdaki örnekte (6.2) koşulunu sağlayan fakat (6.3) koşulunu sağlamayan bir fonksiyon örneği verilecektir.

6.2.1.5 Örnek. $X=\mathbb{R}$ ve (X,S) Örnek 2.3.10 daki gibi tanımlı $S-$metrik uzay olsun. $C_{0,3}^S$ çemberi dikkate alınsın ve $T_3:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $x\in\mathbb{R}$ için

$$T_3 x=\begin{cases} -\dfrac{7}{2} & ; \quad x=-\dfrac{3}{2} \text{ ise} \\ \dfrac{7}{2} & ; \quad x=\dfrac{3}{2} \text{ ise} \\ 7 & ; \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı olsun. Bu durumda T_3 fonksiyonu (6.2) koşulunu sağlar fakat (6.3) koşulunu sağlamaz. T_3 fonksiyonunun $C_{0,3}^S$ çemberini sabit bırakmadığı kolayca görülebilir.

Aşağıdaki örnekte (6.3) koşulunu sağlayan fakat (6.2) koşulunu sağlamayan bir fonksiyon örneği verilecektir.

6.2.1.6 Örnek. (X,S) bir $S-$metrik uzay, $C_{x_0,r}^S$ X üzerinde herhangi bir çember ve $T_4 : X \to X$ fonksiyonu her $x \in X$ için $T_4 x = x_0$ şeklinde tanımlı olsun. Bu durumda T_4 fonksiyonu (6.3) koşulunu sağlar fakat (6.2) koşulunu sağlamaz. T_4 fonksiyonunun $C_{x_0,r}^S$ çemberini sabit bırakmadığı açıktır.

6.2.1.7 Teorem. (X,S) bir $S-$ metrik uzay, $C_{x_0,r}^S$ X üzerinde herhangi bir çember ve $\varphi : X \to [0,\infty)$ fonksiyonu da (6.1) deki gibi tanımlı olsun. Eğer her $x \in C_{x_0,r}^S$ ve bir $h \in [0,1)$ için

$$S(x,x,Tx) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx) \tag{6.4}$$

ve

$$hS(x,x,Tx) + S(Tx,Tx,x_0) \geq r \tag{6.5}$$

koşullarını sağlayan bir $T : X \to X$ fonksiyonu varsa bu durumda $C_{x_0,r}^S$ çemberi T fonksiyonunun bir sabit çemberidir.

İspat. $x \in C_{x_0,r}^S$ ve $x \neq Tx$ olsun. φ fonksiyonunun tanımı, (6.4) ve (6.5) koşulları kullanılarak

$$S(x,x,Tx) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx) = S(x,x,x_0) - S(Tx,Tx,x_0) = r - S(Tx,Tx,x_0)$$

$$\leq hS(x,x,Tx) + S(Tx,Tx,x_0) - S(Tx,Tx,x_0) = hS(x,x,Tx)$$

elde edilir. $h \in [0,1)$ olduğundan bu ise bir çelişkidir. Bu durumda $Tx = x$ olmalıdır ve $C^S_{x_0,r}$ çemberi T fonksiyonunun bir sabit çemberidir. □

6.2.1.8 Uyarı.

(1) (6.4) koşulu $x \in C^S_{x_0,r}$ noktası için Tx noktasının $C^S_{x_0,r}$ çemberinin dışında bulunmadığını garantiler. Bu durumda Tx noktası $C^S_{x_0,r}$ çemberinin ya üzerindedir ya da içindedir.

(2) Bir $S-$ metrik herhangi bir d metriği tarafından üretiliyorsa Teorem 6.2.1.7 karşılık gelen metrik uzay üzerinde de kullanılabilir.

6.2.1.9 Örnek. $X = \mathbb{R}$ ve $S : X \times X \times X \to [0,\infty)$ fonksiyonu alışılmış $S-$ metrik olsun. $C^S_{1,2}$ çemberi dikkate alınsın ve $T_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $x \in \mathbb{R}$ için

$$T_5 x = \begin{cases} e^x - 1 & ; \quad x = 0 \text{ ise} \\ 2x - 2 & ; \quad x = 2 \text{ ise} \\ 3 & ; \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı olsun Bu durumda T_5 fonksiyonu (6.4) ve (6.5) koşullarını sağlar. Böylece $C^S_{1,2}$ çemberi T_5 fonksiyonunun bir sabit çemberidir.

Diğer yandan $\mathbb{R}$ üzerinde d alışılmış metriğini düşünürsek $C_{1,2} = \{-1,3\}$ dir ve $C_{1,2}$ çemberi T_5 fonksiyonunun bir sabit çemberi değildir. Fakat $C_{1,1}$ çemberi, T_5 fonksiyonunun bir sabit çemberidir.

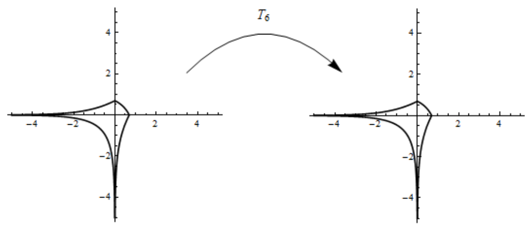
6.2.1.10 Örnek. $X = \mathbb{R}^2$ ve $S : X \times X \times X \to [0,\infty)$ fonksiyonu her $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2), z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$S(x,y,z) = \sum_{i=1}^{2} \left(\left| e^{x_i} - e^{z_i} \right| + \left| e^{x_i} + e^{z_i} - 2e^{y_i} \right| \right)$$

şeklinde tanımlı olsun. Bu durumda S fonksiyonu $\mathbb{R}^2$ üzerinde herhangi bir metrik tarafından üretilemeyen bir $S-$metriktir ve $\left(\mathbb{R}^2, S\right)$ ikilisi de bir $S-$metrik uzaydır. $C^S_{0,2}$ çemberi dikkate alınsın ve $T_6 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ fonksiyonu $x \in \mathbb{R}^2$ için

$$T_6 x = \begin{cases} x & ; \quad x \in C^S_{0,2} \text{ ise} \\ (\ln 2, 0) & ; \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı olsun. Bu durumda T_6 fonksiyonu (6.4) ve (6.5) koşullarını sağlar. Böylece $C^S_{0,2}$ çemberi T_6 fonksiyonunun bir sabit çemberidir (bkz. Şekil 6.6).



Şekil 6.6: Örnek 6.2.1.10 da kullanılan fonksiyonun sabit çemberi.

Aşağıdaki örnekte (6.4) koşulunu sağlayan fakat (6.5) koşulunu sağlamayan bir fonksiyon örneği verilmiştir.

6.2.1.11 Örnek. (X, S) bir $S-$metrik uzay, $C^S_{x_0,r}$ X üzerinde herhangi bir çember ve $T_7 : X \to X$ fonksiyonu her $x \in X$ için $T_7 x = x_0$ şeklinde tanımlı olsun. Bu durumda T_7 fonksiyonu (6.4) koşulunu sağlar fakat (6.5) koşulunu sağlamaz. T_7 fonksiyonunun $C^S_{x_0,r}$ çemberini sabit bırakmadığı kolayca görülebilir.

Aşağıdaki örnekte (6.5) koşulunu sağlayan fakat (6.4) koşulunu sağlamayan bir fonksiyon örneği verilmiştir.

6.2.1.12 Örnek. $X = \mathbb{R}$ ve (X, S) Örnek 2.3.10 daki gibi tanımlı $S-$metrik uzay olsun. $C^S_{0,1}$ çemberi dikkate alınsın ve $T_8 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $x \in \mathbb{R}$ için $T_8 x = 1$ şeklinde tanımlı olsun. Bu durumda T_8 fonksiyonu (6.5) koşulunu sağlar fakat (6.4) koşulunu sağlamaz. T_8 fonksiyonunun $C^S_{0,1}$ çemberini sabit bırakmadığı kolayca görülebilir.

$I_X : X \to X$ fonksiyonu, her $x \in X$ için $I_X(x) = x$ şeklinde tanımlı birim fonksiyon olsun. Birim fonksiyon sırasıyla (6.2), (6.3), (6.4) ve (6.5) koşullarını sağlar. Şimdi Teorem 6.2.1.1 ve Teorem 6.2.1.7 de I_X fonksiyonunun dahil olmadığı koşullar araştırılacaktır.

6.2.1.13 Teorem. (X, S) bir $S-$ metrik uzay, $C_{x_0,r}^{S}$ X üzerinde herhangi bir çember, $T : X \to X$ bir fonksiyon ve $\varphi : X \to [0, \infty)$ fonksiyonu da (6.1) deki gibi tanımlı olsun. T fonksiyonunun her $x \in X$ ve bir $h > 2$ için

$$(I_S) \qquad\qquad S(x, x, Tx) \leq \frac{\varphi(x) - \varphi(Tx)}{h}$$

koşulunu sağlaması için gerekli ve yeterli koşul $T = I_X$ olmasıdır.

İspat. $x \in X$ ve $x \neq Tx$ olsun. Bu durumda φ fonksiyonunun tanımı, (I_S) eşitsizliği, Yardımcı Teorem 2.3.5 ve üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$hS(x, x, Tx) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx) = S(x, x, x_0) - S(Tx, Tx, x_0)$$

$$\leq 2S(x, x, Tx) + S(Tx, Tx, x_0) - S(Tx, Tx, x_0) = 2S(x, x, Tx)$$

ve $(h-2)S(x, x, Tx) \leq 0$ elde edilir. $h > 2$ olduğundan $x = Tx$ elde edilir. Her $x \in X$ için $x = Tx$ olduğundan $T = I_X$ olur. Tersine, $T = I_X$ birim fonksiyonunun (I_S) koşulunu sağladığı açıktır. □

6.2.1.14 Uyarı.

(1) Dikkat edilirse Teorem 6.2.1.13 ün tersi de doğrudur. Teorem 6.2.1.1 (Teorem 6.2.1.7) deki $T : X \to X$ fonksiyonu Teorem 6.2.1.13 deki (I_S) eşitsizliğini sağlamadığı durumda T fonksiyonu birim fonksiyon olamaz.

(2) Bir $S-$metrik herhangi bir d metriği tarafından üretiliyor yada bir d metriği üretiyorsa bu durumda Teorem 6.2.1.13 karşılık gelen metrik uzay üzerinde de kullanılabilir.

6.2.2 Sabit Çemberlerin Tekliği

Bu bölümde, elde edilen varlık teoremlerindeki sabit çemberlerin tekliği araştırılacaktır.

(X,S) bir $S-$ metrik uzay olsun. X üzerinde herhangi $C^S_{x_0,r}$ ve $C^S_{x_1,\rho}$ çemberleri için bu çemberleri sabit bırakan en az bir $T:X\to X$ fonksiyonu vardır. Gerçekten, $\varphi_1,\varphi_2 : X\to[0,\infty)$ fonksiyonları her $x\in X$ için $\varphi_1(x)=S(x,x,x_0)$ ve $\varphi_2(x)=S(x,x,x_1)$ şeklinde tanımlı olsun. α , $S(\alpha,\alpha,x_0)\neq r$ ve $S(\alpha,\alpha,x_1)\neq\rho$ olacak şekilde bir sabit olmak üzere her $x\in X$ için $T:X\to X$ fonksiyonu

$$Tx=\begin{cases} x & ; \quad x\in C^S_{x_0,r}\cup C^S_{x_1,\rho} \\ \alpha & ; \quad \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı ise T fonksiyonunun sırasıyla φ_1, φ_2 fonksiyonları ve $C^S_{x_0,r}$, $C^S_{x_1,\rho}$ çemberleri için Teorem 6.2.1.1 deki (6.2) ve (6.3) (sırasıyla Teorem 6.2.1.7 deki (6.4) ve (6.5)) koşullarını sağladığı açıktır. Böylece T fonksiyonu $C^S_{x_0,r}$ ve $C^S_{x_1,\rho}$ çemberlerinin ikisini de sabit bırakır. Benzer şekilde sabit çemberlerin sayısı pozitif bir n tamsayısına genişletilebilir.

Aşağıdaki örnekte iki sabit çemberi olan bir fonksiyon örneği verilecektir.

6.2.2.1 Örnek. $X=\mathbb{R}$ ve (X,S) Örnek 2.3.10 daki gibi tanımlı $S-$metrik uzay olsun. $C^S_{0,2}$, $C^S_{0,4}$ çemberleri dikkate alınsın ve $T_9:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu her $x\in\mathbb{R}$ ve $\alpha\in\mathbb{R}$ için

$$T_9x=\begin{cases} x & ; \quad x\in\{-2,-1,1,2\} \text{ ise} \\ \alpha & ; \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı olsun. Bu durumda T_9 fonksiyonu $C^S_{0,2}$ ve $C^S_{0,4}$ çemberleri için (6.2) ve (6.3) koşullarını sağlar. Böylece $C^S_{0,2}$ ve $C^S_{0,4}$ çemberleri T_9 fonksiyonunun sabit çemberleridir.

Şimdi Teorem 6.2.1.1 için sabit çemberlerin tekliğini veren bir koşul verilecektir.

6.2.2.2 Teorem. (X,S) bir $S-$ metrik uzay ve $C^S_{x_0,r}$ X üzerinde herhangi bir çember olsun. $T:X\to X$ fonksiyonu Teorem 6.2.1.1 de verilen (6.2) ve (6.3) koşullarını sağlasın. Eğer T fonksiyonu her $x\in C^S_{x_0,r}$, $y\in X\setminus C^S_{x_0,r}$ için $(S25)$ eşitsizliğini sağlıyorsa bu durumda $C^S_{x_0,r}$ çemberi T fonksiyonunun tek sabit çemberidir.

İspat. $C^S_{x_0,r}$ ve $C^S_{x_1,\rho}$ çemberleri (6.2) ve (6.3) koşullarını sağlayan T fonksiyonunun iki sabit çemberi olsun. $x\in C^S_{x_0,r}$ ve $y\in C^S_{x_1,\rho}$ $(x\neq y)$ olsun. $(S25)$ eşitsizliği kullanılarak

$$S(x,x,y)=S(Tx,Tx,Ty)<\max\left\{\begin{matrix}S(x,x,y),S(Tx,Tx,x),S(Ty,Ty,y),\\ S(Ty,Ty,x),S(Tx,Tx,y)\end{matrix}\right\}=S(x,x,y)$$

elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Sonuç olarak $x=y$ olmalıdır ve $C^S_{x_0,r}$ çemberi T fonksiyonunun tek sabit çemberidir. □

Şimdi Teorem 6.2.1.7 için sabit çemberlerin tekliğini veren bir koşul verilecektir.

6.2.2.3 Teorem. (X,S) bir $S-$ metrik uzay, ve $C^S_{x_0,r}$ X üzerinde herhangi bir çember olsun. $T:X\to X$ fonksiyonu Teorem 6.2.1.7 de verilen (6.4) ve (6.5) koşullarını sağlasın. Eğer T fonksiyonu her $x\in C^S_{x_0,r}$, $y\in X\setminus C^S_{x_0,r}$ için $(S25a)$ eşitsizliğini sağlıyorsa bu durumda $C^S_{x_0,r}$ çemberi T fonksiyonunun tek sabit çemberidir.

İspat. $C^S_{x_0,r}$ ve $C^S_{x_1,\rho}$ çemberleri (6.4) ve (6.5) koşullarını sağlayan T fonksiyonunun iki sabit çemberi olsun. $x\in C^S_{x_0,r}$ ve $y\in C^S_{x_1,\rho}$ $(x\neq y)$ olsun. $(S25a)$ eşitsizliği kullanılarak

$$S(x,x,y)=S(Tx,Tx,Ty)<diam\{U_x\cup U_y\}=S(x,x,y)$$

elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Sonuç olarak $x=y$ olmalıdır ve $C^S_{x_0,r}$ çemberi T fonksiyonunun tek sabit çemberidir. □

6.2.2.4 Uyarı. Teorem 6.2.2.2 ve Teorem 6.2.2.3 de kullanılan $(S25)$ ve $(S25a)$ koşulları tek değildir. Örneğin, Teorem 6.2.2.2 de kullanılan $(S25)$ koşulu Teorem 6.2.2.3 için de kullanılabilir. Benzer şekilde, Teorem 6.2.2.3 de kullanılan $(S25a)$ koşulu da Teorem 6.2.2.2 için de kullanılabilir.

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, metrik uzayların önemli bir genellemesi olan $S-$metrik uzaylar üzerinde çeşitli daralma koşulları tanımlanarak bilinen daralma koşullarının genellemeleri elde edilmiştir. Tüm daralma koşulları arasındaki ilişkiler incelenmiş ve gerekli ters örneklemeler yapılmıştır. Ayrıca $S-$ normlu uzay kavramı da tanıtılarak bazı temel özellikleri incelenmiştir. Elde edilen daralma koşulları kullanılarak çeşitli sabit nokta teoremleri elde edilmiştir. Kompleks değerli $S-$ metrik uzaylar üzerinde Rhoades koşulunun bir uygulaması çalışılmıştır. Ayrıca $S-$ metrik uzaylar üzerinde Picard teoremi tanımlanarak diferansiyel denklemler için bir uygulaması yapılmıştır. Son olarak, $S-$metrik uzaylarda sabit çember teorisine giriş yapılarak sabit nokta teorisi farklı bir bakış açısıyla genelleştirilmiştir. Bir fonksiyonun sabit çemberlerinin var olabilmesi için gerekli koşullar araştırılmış ve çemberlerin tekliği uygun koşullar altında incelenmiştir.

İleriki çalışmalar için elde edilen sonuçların farklı uzaylar üzerinde çalışılması ve yeni genellemelerin elde edilmesi mümkün görülmektedir.

8. KAYNAKLAR

[1] Banach, S., "Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur application aux equations integrals", *Fund. Math.*, 2, 133 – 181, (1922).

[2] Chatterjea, S. K., "Fixed point theorem", *C. R. Acad. Bulgare Sci.*, 25, 727 – 730, (1972).

[3] Ciric, L. B., "A generalization of Banach's contraction principle", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 45 (2), 267 – 273, (1974).

[4] Kannan, R., "Some results on fixed points II", *Am. Math. Mon.*, 76, 405 – 408, (1969).

[5] Rhoades, B. E., "A comparison of various definitions of contractive mappings", *Trans. Amer. Math. Soc.*, 226, 257 – 290, (1977).

[6] Wang, S. Z., Li, B. Y., Gao, Z. M. and Iseki, K., "Some fixed point theorems for expansive mappings", *Math. Japan.*, 29, 631 – 636, (1984).

[7] Bakhtin, I. A., "The contraction mapping principle in almost metric spaces", *Funct. Anal. Gos. Ped. Inst. Unianowsk*, 30, 26 – 37, (1989).

[8] Hussain, N., Khaleghizadeh, S., Salimi, P. and Abdou, A. A. N., "A new approach to fixed point results in triangular intuitionistic fuzzy metric spaces", *Abstr. Appl. Anal.*, 2014, Article ID 690139, 16 pages, (2014).

[9] Hussain, N., Salimi, P. and Parvaneh, V., "Fixed point results for various contractions in parametric and fuzzy b – metric spaces", *Journal of Nonlinear Science and Its Applications*, 8 (5), 719 – 739, (2015).

[10] Sedghi, S., Shobe, N. and Aliouche, A., "A generalization of fixed point theorems in S – metric spaces", *Mat. Vesnik*, 64 (3), 258 – 266, (2012).

[11] Sedghi, S. and Dung, N. V., "Fixed point theorems on S – metric spaces", *Mat. Vesnik*, 66 (1), 113 – 124, (2014).

[12] Özgür, N. Y. and Taş, N., "Some generalizations of fixed point theorems on S – metric spaces", *Essays in Mathematics and Its Applications in Honor of Vladimir Arnold, New York, Springer*, (2016).

[13] Sedgi, S., Gholidahneh, A.,Dosenovic, T., Esfahani, J. and Radenovic, S., "Common fixed point of four maps in S_b – metric spaces", *J. Linear Topol. Algebra*, 5 (2), 93 – 104, (2016).

[14] Özgür, N. Y. and Taş, N., "New generalized fixed point results on S_b – metric spaces", *arXiv:1703.01868 [math.GN]*.

[15] Taş, N. and Özgür, N. Y., "On parametric S – metric spaces and fixed – point type theorems for expansive mappings", *Journal of Mathematics*, 2016, Article ID 4746732, 6 pages, (2016).

[16] Ughade, M., Türkoğlu, D., Singh, S. K. and Daheriya, R. D., "Some fixed point theorems in A_b – metric space", *British Journal of Mathematics & Computer Science*, 19 (6), 1 – 24, (2016).

[17] Özgür, N. Y. and Taş, N., “Some fixed – circle theorems on metric spaces”, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* (2017). https://doi.org/10.1007/s40840-017-0555-z
[18] Caristi, J., “Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 215, 241 – 251, (1976).
[19] Willard, S., “General topology”, *Addison – Wesley Publishing Company*, (1970).
[20] Lipschutz, S., “General topology”, *Schaum’s Outlines*, (1965).
[21] Munkres, J. R., “Topology”, *Prentice Hall*, (2000).
[22] Ciesielski, K., “On Stefan Banach and some of his results”, *Banach J. Math. Anal.*, 1, 1 – 10, (2007).
[23] Edelstein, M., “On fixed and periodic points under contractive mappings”, *J. Lond. Math. Soc.*, 37, 74 – 79, (1962).
[24] Nemytskii, V. V., “The fixed point method in analysis”, *Usp. Mat. Nauk.*, 1, 141 – 174, (1936).
[25] Chang, S. S. and Zhong, Q. C., “On Rhoades’ open questions”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 109 (1), 269 – 274, (1990).
[26] Chang, S. S., “On Rhoades’ open questions and some fixed point theorems for a class of mappings”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 97 (2), 343 – 346, (1986).
[27] Liu, Z., Xu, Y. and Cho, Y. J., “On characterizations of fixed and common fixed points”, *J. Math. Anal. Appl.*, 222, 494 – 504, (1998).
[28] Kreyszig, E., “Introductory functional analysis with applications”, *Wiley Classics Library*, (1978).
[29] Khan, K. A., “Generalized normed spaces and fixed point theorems”, *Journal of Mathematics and Computer Science*, 13, 157 – 167, (2014).
[30] Smulian, V., “The principle of inclusion in the space of the type (B)”, *Rec. Math. [Math. Sbornik]*, 5 (47) (2), 317 – 328, (1939).
[31] Oliveria, P., “Two results on fixed points”, *Proceedings of the Third World Congress of Nonlinear Analysis, Part 4*, 47 2703 – 2717, (2001).
[32] Hieu, N. T., Ly, N. T. and Dung, N. V., “A generalization of Ciric quasi – contractions for maps on *S* – metric spaces”, *Thai J. Math.*, 13 (2), 369 – 380, (2015).
[33] Özgür, N. Y. and Taş, N., “Some new contractive mappings on *S* – metric spaces and their relationships with the mapping (*S25*)”, *Math. Sci.*, 11, 7 – 16, (2017).
[34] Gupta, A., “Cyclic contraction on *S* – metric spaces”, *Int. J. Anal. Appl.*, 3 (2), 119 – 130, (2013).
[35] Mlaiki, N. M., “Common fixed points in complex valued *S* – metric space”, *Adv. Fixed Point Theory*, 4 (4), 509 – 524, (2014).
[36] Verma, R. K. and Pathak, H. K., “Common fixed point theorems using property (E.A) in complex – valued metric spaces”, *Thai J. Math.*, 11 (2), 347 – 355, (2013).
[37] Özgür, N. Y. and Taş, N., “Generalizations of metric spaces: From the fixed – point theory to the fixed – circle theory”, invited contribution for the

volume entitled: *Handbook of Nonlinear Analysis, New York, Springer*, (2017).

[38] Özgür, N. Y. and Taş, N., "Some fixed point theorems on S – metric spaces", *Mat. Vesnik*, 69 (1), 39 – 52, (2017).

[39] Bailey, D. F., "Some theorems on contractive mappings", *J. London Math. Soc.*, 41, 101 – 106, (1996).

[40] Bronson, R. and Costa, G. B., "Differential equations", *Third Edition Schaum's Outline Series*, (2006).