**T.C.**

**BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ**

**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

# KENMOTSU MANİFOLDLAR VE BUNLARIN BAZI ALTMANİFOLDLARI

**DOKTORA TEZİ**

**Sibel SULAR**

**Balıkesir, Aralık-2009**

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

# KENMOTSU MANİFOLDLAR VE BUNLARIN BAZI ALTMANİFOLDLARI

DOKTORA TEZİ

Sibel SULAR

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Cihan ÖZGÜR

Sınav Tarihi : 07. 12. 2009

Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Kadri ARSLAN (UÜ)

Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN (UÜ)

Doç. Dr. Cihan ÖZGÜR (Danışman-BAÜ)

Yrd. Doç. Dr. Necati ÖZDEMİR (BAÜ)

Yrd. Doç. Dr. Bengü BAYRAM (BAÜ)

Balıkesir, Aralık-2009

## ÖZET

**KENMOTSU MANİFOLDLAR VE BUNLARIN BAZI ALTMANİFOLDLARI**

**Sibel SULAR**

**Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,**
**Matematik Anabilim Dalı**

**(Doktora Tezi / Tez Danışmanı : Doç. Dr. Cihan ÖZGÜR)**
**Balıkesir, 2009**

Bu çalışmada Kenmotsu manifoldları, Kenmotsu manifoldlarının bazı altmanifoldları, Kenmotsu uzay formun yarı-umbilik hiperyüzeyleri, invaryant ve anti-invaryant altmanifoldları ele alınmıştır. Ayrıca, katlı çarpım yardımıyla bir Kaehler manifoldu üzerinde Kenmotsu yapısının nasıl oluşturulduğu gösterilmiştir.

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş bölümüdür.

İkinci bölümde, çalışmanın ileriki bölümlerinde kullanılan temel tanım ve kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde hemen hemen değme metrik manifoldlar ve Kenmotsu manifoldlarının tanımı yapılarak katlı çarpım yardımıyla bir Kaehler manifoldu üzerinde Kenmotsu yapısının nasıl oluşturulduğu gösterilmiştir.

Dördüncü bölümde bir Kenmotsu manifoldu üzerinde çeyrek-simetrik metrik koneksiyon tanımı verilerek çeyrek-simetrik metrik koneksiyona göre genelleştirilmiş rekürent, $\varphi$-rekürent ve Chaki-pseudosimetrik Kenmotsu manifoldlarının var olmadığı gösterilmiştir. Bu bölüm orijinal sonuçlar içermektedir.

Beşinci bölümde Kenmotsu manifoldlarının rekürent ve pseudoparalel altmanifoldları ile bir Kenmotsu uzay formun yarı-umbilik hiperyüzeyleri ele alınarak orijinal sonuçlar elde edilmiştir.

Son bölümde ise bir Kenmotsu uzay formun invaryant ve anti-invaryant altmanifoldları üzerinde durularak altmanifoldun ikinci temel formunun boyunun karesinin Laplas denklemi hesaplanmıştır. Ayrıca bu altmanifoldlar üzerinde pseudoparalellik ve Ricci-genelleştirilmiş pseudoparalellik koşulları incelenmiş olup bazı orijinal sonuçlar elde edilmiş ve bunlara ait bazı önemli örnekler verilmiştir.



**ANAHTAR KELİMELER :** Kenmotsu manifold, Kenmotsu uzay form, invaryant altmanifold, anti-invaryant altmanifold, yarı-umbilik hiperyüzey.

**ABSTRACT**

**KENMOTSU MANIFOLDS AND THEIR SOME SUBMANIFOLDS**


**Sibel SULAR**

**Balıkesir University, Institute of Science, Department of Mathematics**


**(Ph. D. Thesis / Supervisor : Associate Prof. Dr. Cihan ÖZGÜR)**
**Balıkesir-Turkey, 2009**


In this thesis, we study on Kenmotsu manifolds and their submanifolds. We also consider quasi-umbilical hypersurfaces, invariant and anti-invariant submanifolds of Kenmotsu space forms. Moreover, we constitute a Kenmotsu structure on Kaehler manifolds by a warped product.

This thesis consists of six chapters.

The first chapter is introduction.

In the second chapter, we give some notions and definitions which will be used in the next chapters.

In the third chapter, we introduce notions of contact, almost contact metric and Kenmotsu manifolds and we show that how to constitute a Kenmotsu structure on Kaehler manifolds by a warped product.

The fourth chapter consists of original results. In this chapter we give the definition of a quarter-symmetric metric connection on a Kenmotsu manifold and we prove the non-existence of generalized recurrent, $\varphi$-recurrent and Chaki-pseudosymmetric Kenmotsu manifolds with respect to a quarter-symmetric metric connection.

In the fifth chapter, we consider recurrent and pseudoparalel submanifolds of Kenmotsu manifolds and quasi-umbilical hypersurfaces of a Kenmotsu space form. This chapter also contains some original results.

In the final chapter, we have calculated the Laplace equation of the square of the length of the second fundamental form of invariant and anti-invariant submanifolds in a Kenmotsu space form. We also study pseudoparallelity and Ricci-generalized pseudoparallelity conditions on this type submanifolds and we prove some original results.


**KEY WORDS :** Kenmotsu manifold, Kenmotsu space form, invariant submanifold, anti-invariant submanifold, quasi-umbilical hypersurface.

**İÇİNDEKİLER**

## SİMGELER DİZİNİ

| | |
|---|---|
| $\tilde{M}$ | Manifold |
| $M$ | Altmanifold |
| $\tilde{M}(c)$ | Uzay Formu |
| $g$ | Metrik Tensörü |
| $[,]$ | Lie Parantez Operatörü |
| $T_pM$ | Tanjant Uzay |
| $\chi(M)$ | Vektör Alanları Uzayı |
| $\tilde{\nabla}$ | Levi-Civita Koneksiyonu |
| $\nabla$ | Altmanifoldun Levi-Civita Koneksiyonu |
| $\overset{o}{\nabla}$ | Çeyrek-simetrik Metrik Koneksiyon |
| $\overline{\nabla}$ | Van der Waerden Bortolotti Koneksiyonu |
| $\nabla^{\perp}$ | Normal Koneksiyon |
| $\Delta$ | Laplas Dönüşümü |
| $h$ | 2. Temel Form |
| $\overline{\nabla}h$ | 3. Temel Form |
| $A_\alpha$ | Şekil Operatörü |
| $\|h\|$ | 2. Temel Formun Boyu |
| $H$ | Ortalama Eğrilik |
| $\tilde{H}$ | Hiperyüzeylerin 2. Temel Tensörü |
| $\tilde{R}$ | Riemann-Christoffel Eğrilik Tensörü |
| $R$ | Altmanifoldun Riemann-Christoffel Eğrilik Tensörü |
| $\overset{o}{R}$ | Çeyrek-simetrik Metrik Koneksiyonun Riemann Christoffel Eğrilik Tensörü |
| $S$ | Ricci Tensörü |
| $\overset{o}{S}$ | Çeyrek-simetrik Metrik Koneksiyonun Ricci Tensörü |
| $r$ | Skaler Eğrilik |

| | |
|---|---|
| $\overset{\circ}{r}$ | Çeyrek-simetrik Metrik Koneksiyonun Skaler Eğriliği |
| $\varphi$ | Tensör Alanı |
| $\xi$ | Birim Vektör Alanı |
| $\eta$ | 1-Form |
| $B \times F$ | Çarpım Manifoldu |
| $B \times_f F$ | Katlı Çarpım Manifold |
| $\wedge_A$ | Endomorfizm |
| $\otimes$ | Tensör Çarpımı |

## ÖNSÖZ

Bu çalışmada Kenmotsu manifoldları, Kenmotsu manifoldlarının üzerinde çeyrek-simetrik metrik koneksiyonu, Kenmotsu manifoldlarının altmanifoldları, Kenmotsu uzay formun invaryant ve anti-invaryant altmanifoldları ile yarı-umbilik hiperyüzeyleri ile ilgili literatürde yapılmış olan çalışmalar ayrıntılı olarak incelenmiş ve bazı orijinal sonuçlar verilmiştir.

Çalışmalarım sırasında benden destek ve yardımını esirgemeyen, beni her konuda yüreklendiren tez danışmanım sayın hocam Doç. Dr. Cihan ÖZGÜR'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca doktora çalışmalarıma katkıda bulunan Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN'a teşekkür eder, doktora çalışmalarım boyunca öneri ve görüşlerinden faydalandığım hocalarım sayın Prof. Dr. Kadri ARSLAN ve Doç. Dr. Nihal YILMAZ ÖZGÜR'e teşekkürü bir borç bilirim.

Doktora yaptığım süre içerisinde emeği geçen Fen Edebiyat Fakültesi'nde görevli personele teşekkür ederim.

Çalışmalarım sırasında maddi yönden beni destekleyen TÜBİTAK BİDEB'e teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca doktora çalışmalarım boyunca benden maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen, teşviklerini ve yardımlarını daima sürdüren sevgili eşim İlter SULAR'a, annem, babam ve ablama sonsuz teşekkür eder, sevgilerimi sunarım.

**Balıkesir, 2009** **Sibel SULAR**

# 1. GİRİŞ

1969 yılında S. Tanno [38], otomorfizm grupları maksimum boyuta sahip olan, bağlantılı, hemen hemen değme metrik manifoldları üç sınıfa ayırmıştır. Bu durumda c sabit $\varphi$-kesitsel eğriliği olmak üzere;

- Eğer c>0 ise; Riemann manifoldunun sabit $\varphi$-kesitsel eğriliğine sahip bir homojen Sasakian manifoldu olduğu,
- c = 0 ise ; Riemann manifoldunun sabit $\varphi$-kesitsel eğriliğe sahip Kaehler manifoldu ile bir çemberin yada bir doğrunun çarpım manifoldu olduğu,
- c<0 ise ; Riemann manifoldunun reel eksen ile kompleks düzlemin katlı çarpımından oluştuğu gösterilmiştir.

K. Kenmotsu [22], Tanno'nun bu sınıflandırmasında yer alan üçüncü durumu tüm geometrik özellikleriyle inceleyerek, hemen hemen değme metrik manifold olan bir Kenmotsu manifoldu ilk kez 1972'de tanımlamıştır.

Kenmotsu manifoldları ve bunların altmanifoldları üzerinde şimdiye kadar birçok özellik incelenmiştir. Bu özelliklerin önemli bir kısmı G. Pitiş'in [33] ''Geometry of Kenmotsu Manifolds'' isimli kitabında bulunabilir.

Bu tez çalışması, Kenmotsu manifoldları ve bunların bazı altmanifoldlarının geometrisini inceleyerek, bu manifoldların belirli eğrilik şartları altında hangi tip özelliklere sahip olacağını araştırmayı hedeflemektedir.

Dördüncü bölümde, ilk kez 1975 yılında S. Golab [20] tarafından tanımlanan çeyrek-simetrik metrik koneksiyon Kenmotsu manifoldları üzerinde incelenmiştir. C. Özgür [31] tarafından Levi-Civita koneksiyonuna göre incelenmiş olan genelleştirilmiş rekürent Kenmotsu manifoldlar, bu çalışmada çeyrek-simetrik metrik koneksiyona göre değerlendirilmiştir.

M. Kobayashi [23] bir Kenmotsu manifoldun bir altmanifoldunun paralel 2. temel forma sahip olması durumunda, bu altmanifoldun total geodezik olduğunu göstermiştir. Beşinci bölümde ise Kobayashi'nin çalışmasında önermiş olduğu koşullar genelleştirilerek 2. temel formun rekürent, 2-rekürent ve genelleştirilmiş 2-rekürent olması durumları ile Kenmotsu manifoldun bir altmanifoldunun paralel

3. temel forma sahip olması durumları incelenmiştir ve bir Kenmotsu uzay formun yarı-umbilik hiperyüzeyleri üzerinde durulmuştur.

Semiparalel immersiyon tanımı ilk kez 1985 yılında J. Deprez [16] tarafından verilmiştir. J. Deprez yapmış olduğu çalışmalarda, Öklid uzayında semiparalel hiperyüzeyleri sınıflandırmıştır.

Pseudoparalel altmanifold tanımı ise semiparalel immersiyon tanımının genelleştirilmesi ile A. C. Asperti, G. A. Lobos ve F. Mercuri [2] tarafından 1999 yılında verilmiştir. R. Deszcz, L. Verstraelen ve Ş. Yaprak 4-boyutlu $N^4(c)$ uzay formunun pseudoparalel hiperyüzeyleri üzerinde çalışmışlardır [18]. Ayrıca, Sasakian uzay formun anti-invaryant ($\xi$ vektör alanı normal), pseudoparalel altmanifoldları A. Yıldız, C. Murathan, K. Arslan ve R. Ezentaş tarafından incelenmiştir [43].

Diğer taraftan Ricci-genelleştirilmiş pseudoparalel altmanifoldlar, C. Murathan, K. Arslan ve R. Ezentaş [28] tarafından tanımlanmış olup Sasakian uzay formun pseudoparalel ve Ricci-genelleştirilmiş pseudoparalel invaryant altmanifoldları C. Murathan ve A. Yıldız tarafından incelenmiştir [44]. Ayrıca C. Özgür ve C. Murathan 2-pseudoparalel altmanifoldları tanımlayarak, Sasakian manifoldlarının 2-pseudoparalel, invaryant altmanifoldlarını çalışmışlardır [32].

Yukarıdaki çalışmaların doğrultusunda beşinci ve altıncı bölümlerde sırasıyla bir Kenmotsu manifoldun bir altmanifoldu ile Kenmotsu uzay formun invaryant ve anti-invaryant altmanifoldları üzerinde pseudoparalellik ve Ricci-genelleştirilmiş pseudoparalellik koşulları incelenmiş olup bazı orijinal sonuçlar elde edilmiştir.

# 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanımlar ve kavramlar verilecektir.

## 2.1. Riemann Manifoldları

**Tanım 2.1.1.** M n-boyutlu, diferensiyellenebilir ($C^\infty$) bir manifold olsun. M üzerindeki $C^\infty$ vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve M den $\mathbb{R}$ ye $C^\infty$ fonksiyonların uzayı $C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere, M üzerinde;

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \to C^\infty(M, \mathbb{R})$$

şeklinde tanımlanan pozitif, simetrik ve 2-lineer Riemann metriği g ile birlikte M ye bir *Riemann manifoldu* adı verilir ve (M, g) şeklinde gösterilir [24].

M manifoldunun herhangi iki p ve q noktası için; M üzerinde bu noktaları birleştiren bir eğri bulunabilirse M ye *bağlantılı manifold* adı verilir [29].

**Tanım 2.1.2.** M n-boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold ve M üzerindeki $C^\infty$ vektör alanlarının uzayı $\chi$ (M) olmak üzere;

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \xrightarrow{\text{2-lineer}} \chi(M)$$

$$(X, Y) \longrightarrow \nabla(X,Y) = \nabla_X Y$$

dönüşümü ;

**(i)** $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$ ; $\forall$ X, Y, Z $\in \chi(M)$,

**(ii)** $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$ ; $\forall$ X, Y, Z $\in \chi(M)$ ve $\forall$ f, g $\in C^\infty(M, \mathbb{R})$,

**(iii)** $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$ ; $\forall$ X, Y $\in \chi(M)$ ve $\forall$ f $\in C^\infty(M, \mathbb{R})$

özelliklerini sağlıyor ise $\nabla$ ya M üzerinde bir *Afin Koneksiyon* adı verilir [21].

**Tanım 2.1.3.** (M, g) n-boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\nabla$ da M üzerinde tanımlanan bir afin koneksiyonu olmak üzere;

**(i)** $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ ; $\forall X, Y \in \chi(M)$,

**(ii)** $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ ; $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$

şartlarını sağladığında $\nabla$ ya M üzerinde *sıfır torsiyonlu Riemann Koneksiyon* veya M nin *Levi-Civita Koneksiyonu* adı verilir [21].

**Tanım 2.1.4.** (M, g) n-boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\nabla$ da M üzerinde tanımlanan Levi-Civita koneksiyonu olmak üzere $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için;

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) \\ &\quad - g(X,[Y,Z]) - g(Y,[X,Z]) + g(Z,[X,Y]) \end{aligned}$$

ile tanımlanan ifadeye *Kozsul formülü* adı verilir [30].

**Tanım 2.1.5.** (M, g) n-boyutlu bir Riemann manifoldu, $\nabla$ da M üzerindeki Levi-Civita koneksiyonu olsun.

$$R : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \quad ; \quad X, Y, Z \in \chi(M) \tag{2. 1}$$

ile tanımlanan R fonksiyonu M üzerinde (l, 3)-tipinde bir tensör alanıdır ve M nin *Riemann eğrilik tensörü* olarak adlandırılır.

Ayrıca

$$R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W)$$

tensörüne M nin *Riemann-Christoffel eğrilik tensörü* adı verilir [29].

Ayrıca, X, Y, Z, V ve $W \in \chi(M)$ için Riemann eğrilik tensörü R ;

**(i)** $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$,

**(ii)** $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$,

**(iii)** $g(R(X, Y)V, W) = -g(R(X, Y)W, V)$,

**(iv)** $g(R(X, Y)V, W) = g(R(V, W)X, Y)$

özelliklerine sahiptir [29].

**Tanım 2.1.6.** M n-boyutlu, diferensiyellenebilir bir manifold ve M üzerinde (r, s)-tipinde simetrik bir tensör A olsun. Bu durumda, $1 \leq a < b \leq s$ reel sayıları ve keyfi bir r değeri için;

$$C_{ab} : \chi_s^r(M) \to \chi_{s-2}^r(M)$$

$$(C_{ab}A)_{j_1 \dots j_{s-2}}^{i_1 \dots i_r} = \sum_{p,q} g^{pq} A_{j_1 \dots \underset{a.\text{bileşen}}{p} \dots \underset{b.\text{bileşen}}{q} \dots j_{s-2}}^{i_1 \dots i_r}$$

biçiminde tanımlanan $C_{ab}$ operatörüne a. ve b. bileşenlere göre A tensörünün *metrik kontraksiyonu* adı verilir. Böylece kontraksiyon operatörü, (r, s)-tipindeki bir tensörü (r-1, s-1)-tipinde bir tensöre dönüştürür [30].

**Tanım 2.1.7.** (M, g) n-boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ lokal ortonormal vektör alanları $\chi(M)$ nin bir bazı olmak üzere;

$$S: \chi(M) \times \chi(M) \to C^\infty(M, \mathbb{R})$$

$$(X,Y) \to S(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} g(R(e_i, X)Y, e_i) \quad ; \quad X, Y \in \chi(M) \tag{2. 2}$$

şeklinde tanımlı (0, 2)-tipindeki S tensör alanına, M üzerinde *Ricci eğrilik tensörü* adı verilir. Ayrıca Q Ricci operatörü

$$g(QX, Y) = S(X, Y)$$

biçiminde tanımlanır [17].

**Tanım 2.1.8.** (M, g) n-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. $p \in M$ noktasındaki $T_pM$ tanjant uzayının 2-boyutlu alt uzayı $\Pi$ olmak üzere; $V, W \in \Pi$ tanjant vektörleri üzerine kurulan paralelkenarın alanı;

$$Q(V, W) = g(V, V)g(W, W) - g(V, W)^2 \neq 0$$

olmak üzere;

$$K(V, W) = \frac{g(R(V, W)W, V)}{Q(V,W)}$$

ifadesine $\Pi$ nin *kesitsel eğriliği* denir ve $K(\Pi)$ ile gösterilir [29].

**Tanım 2.1.9.** (M, g) $n \geq 2$ boyutlu bir Riemann manifoldu ve S de M nin Ricci tensörü olsun. Böylece, M üzerinde bir $\lambda : M \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için;

$$S(X, Y) = \lambda g(X, Y) \ ; \quad \forall X, Y \in \chi(M)$$

eşitliği sağlanıyorsa M ye bir *Einstein manifold* adı verilir [8].

M üzerinde bir birim tanjant vektör alanı U olmak üzere, A 1-formunu

$$g(X, U) = A(X)$$

biçiminde tanımlayalım. Burada U vektör alanına A 1*-formunun üreteci* adı verilir. Eğer (M, g) n-boyutlu Riemann manifoldunun Ricci tensörü S, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için;

$$S(X, Y) = ag(X, Y) + bA(X)A(Y), \qquad a, b \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$$

koşulunu sağlıyorsa M ye *yarı-Einstein manifold* adı verilir [7]. Eğer b = 0 ise (M, g) manifoldu bir Einstein manifolda dönüşür.

M üzerinde birim tanjant vektör alanları U ve V olmak üzere, A ve B 1-formlarını

$$A(X) = g(X, U) \quad \text{ve} \quad B(X) = g(X, V)$$

biçiminde tanımlayalım. Burada U vektör alanı A 1-formunun, V vektör alanı ise B 1-formunun üreteci olup U ile V birbirlerine dik vektör alanlarıdır.
Eğer (M, g) n-boyutlu Riemann manifoldunun Ricci tensörü S, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için;

$$S(X, Y) = ag(X, Y) + bA(X)A(Y) + cB(X)B(Y) \tag{2. 3}$$

, $a, b, c \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$, koşulunu sağlıyorsa M ye *genelleştirilmiş yarı-Einstein manifold* adı verilir [14]. Eğer c = 0 ise (M, g) manifoldu yarı-Einstein manifolda dönüşür.

**Tanım 2.1.10.** (M, g) n-boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ lokal ortonormal vektör alanları $\chi(M)$ nin bir bazı olmak üzere;

$$r = \sum_{i=1}^{n} S(e_i, e_i) \tag{2. 4}$$

fonksiyonuna M nin *skaler eğrilik fonksiyonu* adı verilir [8].

**Tanım 2.1.11.** (M, g) n-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Eğer, M nin kesitsel eğrilik fonksiyonu sabit ise M ye *sabit eğrilikli uzay* denir ve M(c) ile gösterilir [30].

**Sonuç 2.1.12.** (M, g) n-boyutlu c = sabit eğrilikli bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda M nin eğrilik tensörü R, $\forall$ X, Y, Z, W$\in \chi$(M) için;

$$R(X, Y, Z, W) = c\{g(Y, Z)g(X, W) - g(X, Z)g(Y,W)\}$$

biçimindedir [30].

**Tanım 2.1.13.** Sabit eğrilikli, tam, bağlantılı manifoldlara *uzay form* adı verilir ve n-boyutlu bir M uzay formu M(c) ile gösterilir.

Eğer;

$c = 0$ ise $M(c) \cong E^n$ Öklid uzayı,

$c = \frac{1}{r^2}$ ise $M(c) \cong S^n(r)$ küresi,

$c = -\frac{1}{r^2}$ ise $M(c) \cong H^n(r)$ Hiperbolik uzay

dır [12].

**Tanım 2.1.14.** (M, g) n-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. M üzerinde L ve N tensörlerini sırasıyla $\forall$ X, Y $\in \chi$(M) için;

$$L(X,Y) = -\frac{1}{n-2}S(X,Y) + \frac{n}{2(n-2)}rg(X,Y)$$

ve

$$g(NX,Y) = L(X,Y)$$

biçiminde tanımlayalım. Böylece $\forall$ X, Y, Z $\in \chi$(M) için Weyl konformal eğrilik tensörü ve D tensörü sırasıyla;

$$\begin{aligned} C(X,Y)Z = R(X,Y)Z + L(Y,Z)X - L(X,Z)Y \\ +g(Y,Z)NX - g(X,Z)NY \end{aligned}$$

ve

$$D(X,Y,Z) = (\nabla_X L)(Y,Z) - (\nabla_Y L)(X,Z)$$

ile tanımlanır [40].

Eğer (M, g) manifoldu üzerinde $n > 3$ için $C = 0$ ve $n = 3$ için $D = 0$ oluyorsa M ye *düzlemsel konformaldir* denir [8].

**Tanım 2.1.15.** M, $n \geq 2$ boyutlu, bağlantılı bir Riemann manifoldu olsun. A, M üzerinde tanımlı (0, 2)-tipinde simetrik bir tensör alanı olmak üzere $\wedge_A$ endomorfizmi $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için;

$$\wedge_A : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$(X \wedge_A Y)Z = A(Y, Z)X - A(X, Z)Y \qquad (2.5)$$

biçiminde tanımlanır. Eğer $A = g$ alınırsa (2. 7) denklemi

$$(X \wedge_g Y)Z = g(Y, Z)X - g(X, Z)Y$$

biçimine indirgenir. Bundan sonra $(X \wedge_g Y)$ yerine kısaca $X \wedge Y$ kullanılacaktır [17].

M Riemann manifoldu üzerinde (0, k)-tipinde $(k \geq 1)$ bir T tensör alanı ve (0, 2)-tipinde simetrik bir tensör alanı A verildiğinde T nin kovaryant türevi $\nabla T$;

$$(\nabla T)(X_1, X_2, ..., X_k; X) = (\nabla_X T)(X_1, X_2, ..., X_k)$$

$$= \nabla_X (T(X_1, X_2, ..., X_k)) - \sum_{i=1}^{k} T(X_1, ..., \nabla_X X_i, ..., X_k) \qquad (2.6)$$

ile, $R \cdot T$ ve $Q(A, T)$ tensörleri de sırası ile;

$$(R \cdot T)(X_1, X_2, ..., X_k; X, Y) = -T(R(X, Y)X_1, X_2, ..., X_k) - ... - T(X_1, X_2, ..., R(X, Y)X_k) \qquad (2.7)$$

ve

$$Q(A, T)(X_1, X_2, ..., X_k; X, Y) = -T((X \wedge_A Y)X_1, X_2, ..., X_k) - ... - T(X_1, X_2, ..., (X \wedge_A Y)X_k) \qquad (2.8)$$

biçiminde tanımlanır [17].

**Tanım 2.1.16.** (M, g) n-boyutlu Riemann manifoldu üzerinde (0, k)-tipinden $(k \geq 1)$ bir tensör alanı T nin kovaryant türevi $\nabla T$ olsun. Eğer T tensör alanı, $\forall X, X_1, Y_1, ..., X_k$ ve $Y_k \in \chi(M)$ için ;

$$(\nabla T)(X_1, ..., X_k; X) T(Y_1, ..., Y_k)$$

$$= (\nabla T)(Y_1, ..., Y_k; X) T(X_1, ..., X_k)$$

koşulunu sağlıyorsa T ye *rekürent tensör alanı* adı verilir [34]. Burada $\nabla$, M Riemann manifoldu üzerindeki Levi-Civita koneksiyonudur.

Bu tanıma denk olarak bir $p \in M$ noktasının bir W komşuluğunda sıfırdan farklı bir rekürent T tensör alanı için, W kümesi üzerinde

$$\nabla T = T \otimes \phi \tag{2. 9}$$

eşitliği sağlanır. Burada $\phi$ 1-formu

$$\phi = d(\log \|T\|)$$

biçiminde olup $\|T\|$, T tensör alanının normunu gösterir ve $\|T\|^2 = g(T,T)$ ile hesaplanır [34].

**Tanım 2.1.17.** (M, g) n-boyutlu Riemann manifoldu üzerinde (0, k)-tipinden ($k \geq 1$) bir tensör alanı T nin kovaryant türevi $\nabla T$ olsun. Eğer T tensör alanı, $\forall X, Y, X_1, Y_1, ..., X_k$ ve $Y_k \in \chi(M)$ için ;

$$(\nabla^2 T)(X_1,...,X_k; X, Y)T(Y_1,...,Y_k)$$

$$= (\nabla^2 T)(Y_1,...,Y_k; X, Y)T(X_1,...,X_k)$$

koşulunu sağlıyorsa T ye *2-rekürent tensör alanı* adı verilir [34]. Burada $\nabla$, M Riemann manifoldu üzerindeki Levi-Civita koneksiyonudur.

Bu tanıma denk olarak bir $p \in M$ noktasının bir W komşuluğunda sıfırdan farklı bir 2-rekürent T tensör alanı için, W kümesi üzerinde

$$\nabla^2 T = T \otimes \psi \tag{2. 10}$$

eşitliği sağlanır. Burada $\psi$, (0, 2)-tipinde bir tensördür [34].

Eğer T tensör alanı M üzerinde, $\forall X, Y, X_1, Y_1, ..., X_k$ ve $Y_k \in \chi(M)$ için;

$$((\nabla^2 T)(X_1,...,X_k; X, Y) - (\nabla T \otimes \phi)(X_1,...,X_k; X, Y))T(Y_1,...,Y_k)$$

$$= ((\nabla^2 T)(Y_1,...,Y_k; X, Y) - (\nabla T \otimes \phi)(Y_1,...,Y_k; X, Y))T(X_1,...,X_k)$$

koşulunu sağlıyorsa T ye *genelleştirilmiş 2-rekürent tensör alanı* adı verilir [34].

Bu tanıma denk olarak bir $p \in M$ noktasının bir W komşuluğunda sıfırdan farklı bir genelleştirilmiş 2-rekürent T tensör alanı için, W kümesi üzerinde

$$\nabla^2 T = \nabla T \otimes \phi + T \otimes \psi \tag{2. 11}$$

eşitliği sağlanır. Burada $\psi$ (0, 2)-tipinde bir tensör ve $\phi$ bir 1-formdur [34].

**Tanım 2.1.18.** (M, g) n-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. M nin R eğrilik tensörü $\forall$ X, Y, Z, W$\in \chi$(M) için;

$$(\nabla_X R)(Y,Z)W = 0 \tag{2. 12}$$

koşulunu sağlıyorsa M ye *lokal simetriktir* denir [6].

**Tanım 2.1.19.** (M, g) n-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. M üzerinde bir tanjant U vektör alanını, $\alpha \neq 0$ 1-formu yardımı ile

$$g(X,U) = \alpha(X)$$

biçiminde tanımlayalım. M nin eğrilik tensörü R, $\forall$ X, Y, Z, W$\in \chi$(M) için;

$$(\nabla_X R)(Y,Z)W = \alpha(X)R(Y,Z)W \tag{2. 13}$$

eşitliğini sağlıyorsa M ye *reküренttir* denir [6].

**Tanım 2.1.20.** (M, g) n-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. M üzerinde U ve V tanjant vektör alanlarını, $\alpha$ ve $\beta \neq 0$ 1-formları yardımı ile

$$g(X,U) = \alpha(X) \ , \qquad\qquad g(X,V) = \beta(X)$$

biçiminde tanımlayalım. M nin eğrilik tensörü R, $\forall$ X, Y, Z, W$\in \chi$(M) için;

$$(\nabla_X R)(Y,Z)W = \alpha(X)R(Y,Z)W + \beta(X)[g(Z,W)Y - g(Y,W)Z] \tag{2. 14}$$

eşitliğini sağlıyorsa M ye *genelleştirilmiş rekürenttir* denir [12].

**Tanım 2.1.21.** (M, g) n >3 boyutlu, flat olmayan bir Riemann manifoldu olsun. M üzerinde bir tanjant U vektör alanını, $\alpha \neq 0$ 1-formu yardımı ile

$$g(X,U) = \alpha(X)$$

biçiminde tanımlayalım. Eğer M nin eğrilik tensörü R, $\forall$ X, Y, Z, W$\in \chi$(M) için;

$$\begin{aligned}(\nabla_X R)(Y,Z)W = {} & 2\alpha(X)R(Y,Z)W + \alpha(Y)R(X,Z)W + \alpha(Z)R(Y,X)W \\ & + \alpha(W)R(Y,Z)X + g(R(Y,Z)W,X)U\end{aligned} \tag{2. 15}$$

eşitliğini sağlıyorsa M ye *Chaki-pseudosimetriktir* denir [6].

## 2.2. Altmanifoldlar

**Tanım 2.2.1.** M n-boyutlu bir manifold $\widetilde{M}$ (n+d)-boyutlu manifold olsun. $\forall p \in M$ noktası için $\widetilde{M}$ üzerinde bir $\tilde{U}$, M üzerinde bir U komşuluğu mevcut ve

$$U = \{m \in \tilde{U} : \tilde{x}_{n+1}(m) = \ldots = \tilde{x}_{n+d}(m) = 0\}$$

ise M ye $\widetilde{M}$ nın bir *altmanifoldu* adı verilir. Burada $\{\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{n+d}\}$ koordinat sistemi $\tilde{U}$ da, $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de U üzerinde koordinat sistemleridir [30].

**Tanım 2.2.2.** M ve $\widetilde{M}$ sırası ile n ve (n+d)-boyutlu Riemann manifoldları olmak üzere M, $\widetilde{M}$ nın altmanifoldu ve $\nabla$ ve $\tilde{\nabla}$ sırası ile M ve $\widetilde{M}$ da kovaryant türevler olsun. Böylece X ve Y, M üzerinde vektör alanları olmak üzere;

$$h : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi^{\perp}(M)$$

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - h(X, Y) \tag{2. 16}$$

biçiminde *Gauss eşitliği* elde edilir. Burada $\nabla_X Y$ ve h(X, Y), $\tilde{\nabla}_X Y$ nin sırasıyla tanjant ve normal bileşenleridir. (2. 16) ile tanımlanan h ya M nin *ikinci temel formu* adı verilir. Eğer $h = 0$ ise M ye *total geodeziktir* denir [8].

**Tanım 2.2.3.** M ve $\widetilde{M}$ sırası ile n ve (n+d)-boyutlu Riemann manifoldları olmak üzere M, $\widetilde{M}$ nın altmanifoldu olsun. M ye normal bir birim vektör alanı N olsun. $\tilde{\nabla}_X N$ nin teğet ve normal bileşenleri sırasıyla $-A_N X$ ve $\nabla_X^{\perp} N$ olmak üzere;

$$A : \chi(M) \times \chi^{\perp}(M) \to \chi(M)$$

dönüşümü iyi tanımlıdır.

Böylece

$$\tilde{\nabla}_X N = -A_N X + \nabla_X^{\perp} N \tag{2.17}$$

biçiminde *Weingarten eşitliği* elde edilir. Burada $A_N$ ye şekil operatörü, $\nabla^{\perp}$ e de M nin $T^{\perp}M$ *normal demetindeki (normal) koneksiyon* adı verilir [8].

M nin şekil operatörü $A_N$ ile ikinci temel form h arasında;

$$g(A_N X, Y) = g(h(X, Y), N) \tag{2. 18}$$

bağıntısı vardır. Burada g, $T_p M$ de skaler çarpımdır [8].

**Tanım 2.2.4.** $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ Riemann manifoldunun n-boyutlu bir altmanifoldu $(M, g)$ olsun. M altmanifoldunun ikinci temel formu h nın kovaryant türevi $\overline{\nabla} h$,

$$(\overline{\nabla}_X h)(Y, Z) = \nabla^{\perp}_X h(Y, Z) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z) \qquad (2.\ 19)$$

biçiminde tanımlanır. h nın kovaryant türevi $\overline{\nabla} h$ ya M nin *üçüncü temel formu* adı verilir [8].

Eğer

$$\overline{\nabla} h = 0 \qquad (2.\ 20)$$

ise M ye *paralel ikinci temel formlu* veya 1-*paraleldir* denir. Buradaki $\overline{\nabla}$ M nin $T^{\perp}M$ normal demetinde tanımlanan normal konneksiyon olup buna *van der Waerden Bortolotti koneksiyonu* denir [8].

**Tanım 2.2.5.** $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ Riemann manifoldunun n-boyutlu bir altmanifoldu $(M, g)$ olsun. $\widetilde{M}$ nın eğrilik tensörü $\widetilde{R}$, $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için;

$$\tilde{R}(X, Y)Z = \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Z - \tilde{\nabla}_{[X,Y]} Z$$

$$\tilde{R}(X, Y, Z, W) = \tilde{g}(\tilde{R}(X, Y)Z, W)$$

biçiminde tanımlanır. M nin eğrilik tensörü R ve $\widetilde{M}$ nın eğrilik tensörü $\widetilde{R}$ olmak üzere, (2. 16) ve (2. 17) denklemleri yardımıyla

$$\begin{aligned} \widetilde{R}(X,Y, Z, W) = {} & R(X,Y, Z, W) - \widetilde{g}(h(Y, Z), h(X,W)) \\ & + \widetilde{g}(h(X, Z), h(Y,W)) \end{aligned} \qquad (2.\ 21)$$

elde edilir. Burada (2. 21) ile tanımlanan denkleme *Gauss denklemi* adı verilir [8]. Gauss denkleminin teğet ve normal bileşenleri sırasıyla

$$(\widetilde{R}(X, Y)Z)^T = R(X, Y)Z + A_{h(X, Z)}Y - A_{h(Y, Z)}X \qquad (2.\ 22)$$

ve

$$(\widetilde{R}(X, Y)Z)^{\perp} = (\overline{\nabla}_X h)(Y, Z) - (\overline{\nabla}_Y h)(X, Z) \qquad (2.\ 23)$$

biçiminde olup (2. 23) denklemine *Codazzi denklemi* adı verilir [8]. Burada $\overline{\nabla}$, M üzerinde van der Waerden Bortolotti koneksiyonudur.

Ayrıca $\eta,\xi \in \chi^{\perp}(M)$ olmak üzere

$$\tilde{R}(X,Y,\xi,\eta) = R^{\perp}(X,Y,\xi,\eta) - g([A_{\xi},A_{\eta}]X,Y) \qquad (2.24)$$

biçiminde tanımlanan eşitliğe *Ricci denklemi* adı verilir [12]. Burada

$$[A_{\xi},A_{\eta}] = A_{\xi}A_{\eta} - A_{\eta}A_{\xi} \qquad (2.25)$$

ve $R^{\perp}$ ise $\nabla^{\perp}$ normal koneksiyonuna göre Riemann eğrilik tensörüdür.

**Tanım 2.2.6.** $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ Riemann manifoldunun n-boyutlu bir altmanifoldu (M, g) olsun. $\forall$ X, Y, Z, W$\in \chi(M)$ için $\overline{R}\cdot h$;

$$(\overline{R}(X,Y)\cdot h)(Z,W) = R^{\perp}(X,Y)h(Z,W) - h(R(X,Y)Z,W) - h(Z, R(X,Y)W) \qquad (2.26)$$

ile tanımlanır [16].

Eğer M nin her noktasında

$$\overline{R}\cdot h = 0 \qquad (2.27)$$

ise M ye $\widetilde{M}$ nın *semiparalel altmanifoldu* adı verilir [16].

**Tanım 2.2.7.** $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ Riemann manifoldunun n-boyutlu bir altmanifoldu (M, g) olsun. Eğer $n \geq 3$ için M nin her noktasında $\overline{R}\cdot h$ ve Q(g, h) tensörleri lineer bağımlı ise M ye $\widetilde{M}$ nın *pseudoparalel altmanifoldu* adı verilir. Bu durumda M nin pseudoparalel olması için gerek ve yeter şart U={p∈M : Q(g,h)≠0} kümesi üzerinde;

$$\overline{R}\cdot h = LQ(g,h) \qquad (2.28)$$

olmasıdır. Burada L fonksiyonu, U kümesi üzerinde iyi tanımlıdır [2].

**Tanım 2.2.8.** $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ Riemann manifoldunun n-boyutlu bir altmanifoldu (M, g) olsun. Eğer $n \geq 3$ için M nin her noktasında $\overline{R}\cdot h$ ve Q(S, h) tensörleri lineer bağımlı ise M ye $\widetilde{M}$ nın *Ricci-genelleştirilmiş pseudoparalel altmanifoldu* adı verilir [28]. Bu durumda M nin Ricci-genelleştirilmiş pseudoparalel olması için gerek ve yeter şart U={p∈M : Q(S,h)≠0} kümesi üzerinde;

$$\overline{R}\cdot h = LQ(S,h) \qquad (2.29)$$

olmasıdır. Burada L fonksiyonu, U kümesi üzerinde iyi tanımlıdır.

Üçüncü temel form $\overline{\nabla} h$ nın kovaryant türevi $\overline{\nabla}^2 h$,

$$
\begin{aligned}
(\overline{\nabla}^2 h)(Z, W; X, Y) &= (\overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y h)(Z, W) \\
&= \nabla^{\perp}_X (\overline{\nabla}_Y h)(Z, W) - (\overline{\nabla}_Y h)(\nabla_X Z, W) \\
&\quad - (\overline{\nabla}_X h)(Z, \nabla_Y W) - (\overline{\nabla}_{\nabla_X Y} h)(Z, W)
\end{aligned} \tag{2. 30}
$$

biçiminde tanımlanır [8].

Eğer

$$\overline{\nabla}^2 h = 0 \tag{2. 31}$$

ise M ye *paralel üçüncü temel formlu* veya 2-*paraleldir* denir. Buradan (2. 26) ve (2. 30) eşitlikleri yardımı ile

$$
\begin{aligned}
(\overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y h)(Z, W) - (\overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X h)(Z, W) &= (\overline{R}(X, Y)\cdot h)(Z, W) \\
&= R^{\perp}(X, Y)h(Z, W) - h(R(X, Y)Z, W) \\
&\quad - h(Z, R(X, Y)W)
\end{aligned} \tag{2. 32}
$$

olduğu görülmektedir [8].

**Tanım 2.2.9.** $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ Riemann manifoldunun n-boyutlu bir altmanifoldu (M, g) olsun. $\forall X, Y, Z, W, U \in \chi(M)$ için $\overline{R}\cdot\overline{\nabla}h$

$$
\begin{aligned}
(\overline{R}(X, Y)\cdot \overline{\nabla} h)(Z, W, U) &= R^{\perp}(X, Y)(\overline{\nabla} h(Z, W, U)) \\
&\quad - (\overline{\nabla} h)(R(X, Y,)Z, W, U) \\
&\quad - (\overline{\nabla} h)(Z, R(X, Y,)W, U) \\
&\quad - (\overline{\nabla} h)(Z, W, R(X, Y)U)
\end{aligned} \tag{2. 33}
$$

ile tanımlanır [8].

Eğer M nin her noktasında

$$\overline{R}\cdot\overline{\nabla} h = 0 \tag{2. 34}$$

ise M ye 2-*semiparalel altmanifold* adı verilir [1].

**Tanım 2.2.10.** $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ Riemann manifoldunun n-boyutlu bir altmanifoldu (M, g) olsun. Eğer $n \geq 3$ için M nin her noktasında $\overline{R}\cdot\overline{\nabla}h$ ve $Q(g, \overline{\nabla} h)$ tensörleri lineer bağımlı ise M ye $\widetilde{M}$ nın 2-*pseudoparalel altmanifoldu* adı verilir [32].

Bu durumda M nin 2-pseudoparalel olması için gerek ve yeter şart $U = \{p \in M : Q(g, \overline{\nabla} h) \neq 0\}$ kümesi üzerinde;

$$\overline{R} \cdot \overline{\nabla} h = LQ(g, \overline{\nabla} h) \tag{2. 35}$$

olmasıdır. Burada L fonksiyonu, U kümesi üzerinde iyi tanımlıdır.

**Tanım 2.2.11.** $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ Riemann manifoldunun n-boyutlu bir altmanifoldu (M, g) olsun. Eğer $n \geq 3$ için M nin her noktasında $\overline{R} \cdot \overline{\nabla} h$ ve $Q(S, \overline{\nabla} h)$ tensörleri lineer bağımlı ise M ye $\widetilde{M}$ nın *Ricci-genelleştirilmiş* 2-*pseudoparalel altmanifoldu* adı verilir [32].

Bu durumda M nin Ricci-genelleştirilmiş 2-pseudoparalel olması için gerek ve yeter şart $U = \{p \in M : Q(g, \overline{\nabla} h) \neq 0\}$ kümesi üzerinde;

$$\overline{R} \cdot \overline{\nabla} h = LQ(S, \overline{\nabla} h) \tag{2. 36}$$

olmasıdır. Burada L fonksiyonu, U kümesi üzerinde iyi tanımlıdır.

**Tanım 2.2.12.** $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ Riemann manifoldunun n-boyutlu bir altmanifoldu (M, g) olsun. M üzerindeki bir $x \in M$ için $T_xM$ nin lokal ortonormal $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ bazını alalım. M üzerinde

$$H = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(e_i, e_i) \tag{2.37}$$

biçiminde tanımlı vektöre M nin *ortalama eğrilik vektörü* adı verilir [8].

Eğer M üzerinde

$$H = 0$$

eşitliği sağlanıyorsa M ye *minimaldir* denir .

Eğer M üzerinde

$$\overline{\nabla} H = 0 \tag{2. 38}$$

oluyorsa M ye *paralel ortalama eğriliklidir* denir [8].

**Tanım 2.2.13.** $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ nın n-boyutlu bir hiperyüzeyi (M, g) olsun. M nin ikinci temel tensörü $\tilde{H}$;

$$\tilde{H}(X,Y) = ag(X,Y) + b\omega(X)\omega(Y) \tag{2. 39}$$

biçiminde ise M ye *yarı-umbilik hiperyüzey* adı verilir. Burada $\omega$ bir 1-form, $a, b \in \mathbb{R}$ olup,

$$h(X,Y) = \tilde{H}(X,Y)N \quad ; \qquad N \in \chi^{\perp}(M) \tag{2. 40}$$

biçimindedir [17].

# 3. KENMOTSU MANİFOLDLARI

Bu bölüm başlıca iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci bölümde hemen hemen değme metrik manifoldları, ikinci bölümde ise Kenmotsu manifoldları incelenmiş olup katlı çarpım yardımıyla bir Kaehler manifoldu üzerinde Kenmotsu yapısının nasıl oluşturulduğu gösterilmiştir.

## 3. 1. Hemen hemen Değme Metrik Manifoldları

**Tanım 3.1.1.** M, (2n+1)-boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold olsun. $\varphi$, (1, 1)-tipinden bir tensör alanı, $\xi$ bir vektör alanı, $\eta$ M üzerinde bir diferensiyel 1-form olmak üzere, $\forall X \in \chi(M)$ için $\{\varphi, \xi, \eta\}$ üçlüsü;

$$\varphi : \chi(M) \xrightarrow{\text{lineer}} \chi(M)$$

$$\eta : \chi(M) \xrightarrow{\text{dif.bilir}} C^{\infty}(M, \mathbb{R})$$

$$\eta(\xi) = 1 \text{ ve } \varphi^2 X = -X + \eta(X)\xi \tag{3. 1}$$

koşullarını sağlıyor ise bu üçlüye bir *hemen hemen değme yapı*, $\{M, \varphi, \xi, \eta\}$ dörtlüsüne de bir *hemen hemen değme manifoldu* adı verilir [40].

**Tanım 3.1.2.** M hemen hemen değme manifoldu üzerinde $X \neq \xi$ için,

$$\eta(\xi) = 1 \quad \text{ve} \quad d\eta(\xi, X) = 0$$

olacak biçimde bir tek $\xi \in \chi(M)$ vektör alanı var ise; $\xi$ ye $\eta$-*değme yapısının öz vektör alanı* denir [4].

**Örnek 3.1.3.** M, 3-boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold olsun. Her (x, y, z) noktası civarında

$$\eta = \cos z dx + \sin z dy$$

diferensiyel 1-formu ile M üzerinde

$$\xi = \cos z \frac{\partial}{\partial x} + \sin z \frac{\partial}{\partial y}$$

$\xi$ vektör alanını alalım. Buradan

$$d\eta = \sin z dx \wedge dz + \cos z dz \wedge dy$$

olup bir $X \in \chi(M)$ için;

$$\begin{aligned}
d\eta(X,\xi) &= (\sin z dx \wedge dz + \cos z dz \wedge dy)(X,\xi) \\
&= (\sin z dx \wedge dz)(X,\xi) + (\cos z dz \wedge dy)(X,\xi) \\
&= \sin z[dx(X)dz(\xi) - dx(\xi)dz(X)] \\
&\quad + \cos z[dz(X)dy(\xi) - dz(\xi)dy(X)] \\
&= \sin z dx(X)dz(\cos z\frac{\partial}{\partial x} + \sin z\frac{\partial}{\partial y}) \\
&\quad - \sin z dx(\cos z\frac{\partial}{\partial x} + \sin z\frac{\partial}{\partial y})dz(X) \\
&\quad + \cos z dz(X)dy(\cos z\frac{\partial}{\partial x} + \sin z\frac{\partial}{\partial y}) \\
&\quad - \cos z dz(\cos z\frac{\partial}{\partial x} + \sin z\frac{\partial}{\partial y})dy(X) \\
&= -\sin z \cos z dx(\frac{\partial}{\partial x})dz(X) + \cos z \sin z dz(X)dy(\frac{\partial}{\partial y})
\end{aligned}$$

denklemi yardımıyla

$$d\eta(X,\xi) = 0$$

bulunur.

Diğer taraftan

$$\eta(\xi) = (\cos z dx + \sin z dy)(\cos z \frac{\partial}{\partial x} + \sin z \frac{\partial}{\partial y})$$

$$= \cos^2 z dx(\frac{\partial}{\partial x}) + \cos z \sin z dx(\frac{\partial}{\partial y})$$
$$+ \cos z \sin z dy(\frac{\partial}{\partial x}) + \sin^2 z dy(\frac{\partial}{\partial y})$$

$$= \cos^2 z + \sin^2 z$$
$$= 1$$

dir. Böylece $\eta$ diferensiyel 1-formu için Tanım 3.1.2 deki şartları sağlayan bir tek $\xi \in \chi(M)$ vektör alanı

$$\xi = \cos z \frac{\partial}{\partial x} + \sin z \frac{\partial}{\partial y}$$

dır [25].

**Teorem 3.1.4.** (2n+1)-boyutlu M hemen hemen değme manifoldu üzerinde, X, $\xi \in \chi(M)$, X$\neq \xi$ vektör alanları ve $\varphi : \chi(M) \xrightarrow{\text{lineer}} \chi(M)$ için,

$$\varphi\xi = 0$$
$$\eta o \varphi = 0$$
$$\text{rank}\varphi = 2n$$

eşitlikleri sağlanır [40].

**Tanım 3.1.5.** (2n+1)-boyutlu M hemen hemen değme manifoldu üzerinde, $\forall$ X, Y$\in \chi(M)$ ve $\xi \in \chi(M)$ için;

$$\eta(X) = g(X, \xi) \tag{3. 2}$$

ve

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \tag{3. 3}$$

koşullarını sağlayan bir g metriği var ise; $\{\varphi, \xi, \eta, g\}$ dörtlüsüne bir *hemen hemen değme metrik yapı*, $\{M, \varphi, \xi, \eta, g\}$ beşlisine de bir *hemen hemen değme metrik manifoldu* adı verilir [40].

**Teorem 3.1.6.** (2n+1)-boyutlu M hemen hemen değme manifoldu üzerinde $\forall$ X, Y $\in \chi$(M) için ,

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\,\eta(Y)$$

olacak şekilde bir g Riemann metriği daima vardır [40].

**Sonuç 3.1.7.** (2n+1)-boyutlu M hemen hemen değme metrik manifoldu verilmiş olsun. $\forall$ X, Y $\in \chi$(M) için,

$$g(\varphi X, Y) = -\,g(X, \varphi Y) \tag{3. 4}$$

dir. Bu da, φ nin g ye göre anti-simetrik bir tensör alanı olduğunu gösterir [40].

**Teorem 3.1.8.** (2n+1)-boyutlu M hemen hemen değme manifoldu verilmiş olsun. M üzerinde bir η kontakt yapısı verildiğinde, $\forall$ X, Y $\in \chi$(M) için,

$$\varphi : \chi(M) \xrightarrow{\text{lineer}} \chi(M)$$

$$g(X, \varphi Y) = d\eta(X,Y)$$

olacak şekilde bir {φ, ξ, η, g} hemen hemen değme metrik yapısı vardır [40].

**Tanım 3.1.9.** (2n+1)-boyutlu diferensiyellenebilir M manifoldu üzerinde, bir {φ, ξ, η, g} hemen hemen değme metrik yapısı verilmiş olsun. $\forall$ X, Y $\in \chi$(M) için,

$$\Phi(X, Y) = g(X, \varphi Y)$$

biçiminde tanımlı Φ dönüşümüne {φ, ξ, η, g} hemen hemen değme metrik yapısının *temel* 2-*formu* denir [40].

**Önerme 3.1.10.** M, {φ, ξ, η, g} yapısı ile verilmiş (2n+1)-boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifold ve ∇ M üzerindeki Levi-Civita koneksiyonu olsun. $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için;

$$(\nabla_X \Phi)(Y, Z) = g(Y, (\nabla_X \varphi)Z)$$

$$(\nabla_X \Phi)(Y, Z) + (\nabla_X \Phi)(\varphi Y, \varphi Z) = \eta(Z)(\nabla_X \eta)\varphi Y - \eta(Y)(\nabla_X \eta)\varphi Z$$

$$(\nabla_X \eta)Y = g(Y, \nabla_X \xi) = (\nabla_X \Phi)(\xi, \varphi Y)$$

$$2d\eta(X, Y) = (\nabla_X \eta)Y - (\nabla_Y \eta)X$$

$$3d\Phi(X, Y, Z) = \underset{X,Y,Z}{\oplus} (\nabla_X \Phi)(Y, Z)$$

eşitlikleri geçerlidir [4].

Burada $\underset{X,Y,Z}{\oplus}$, X, Y ve Z vektör alanları üzerinden alınan devirli toplamı göstermektedir.

### 3. 2. Kenmotsu Manifoldları

Bu bölümde Kenmotsu manifoldları ile ilgili genel kavramlar verilmiş olup, Kenmotsu manifoldu örnekleri incelenmiştir.

**Tanım 3.2.1.** M, $\{\varphi, \xi, \eta, g\}$ yapısı ile verilmiş (2n+1)-boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifoldu olsun. Eğer M hemen hemen değme metrik manifoldu üzerinde

$$d\eta = 0, \qquad d\Phi = 2\eta \wedge \Phi$$

eşitlikleri sağlanıyorsa, M ye bir *hemen hemen Kenmotsu manifold* adı verilir [33].

**Tanım 3.2.2.** M, $\{\varphi, \xi, \eta, g\}$ yapısı ile verilmiş (2n+1)-boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifoldu olsun. Eğer M hemen hemen Kenmotsu manifoldu üzerinde $\forall$ X, Y$\in \chi$(M) için;

$$(\nabla_X\varphi)Y = g(\varphi X, Y)\xi - \eta(Y)\varphi X \tag{3. 5}$$

koşulu sağlanıyor ise M ye *Kenmotsu manifoldu* adı verilir [22].

Bir M Kenmotsu manifoldu üzerinde $\forall$ X, Y$\in \chi$(M) için;

$$\nabla_X\xi = X - \eta(X)\xi \tag{3. 6}$$

ve

$$(\nabla_X\eta)Y = g(X, Y) - \eta(X)\,\eta(Y) \tag{3. 7}$$

eşitlikleri sağlanmaktadır [22].

Bir Kenmotsu manifoldun R eğrilik tensörünün, (2. 1) denkleminde Z = $\xi$ alındığında

$$R(X, Y)\xi = \eta(X)Y - \eta(Y)X \tag{3. 8}$$

eşitliğini sağladığı görülmektedir [22].

Ayrıca (3. 8) denkleminden kontraksiyon yardımı ile bir Kenmotsu manifoldun Ricci tensörünün

$$S(X, \xi) = -2n\eta(X) \tag{3. 9}$$

denklemini sağladığı görülmektedir [22].

**Tanım 3.2.3.** M bir Kenmotsu manifoldu olsun. Böylece $p \in M$ noktasındaki $T_pM$ tanjant uzayında $\xi$ vektör alanına dik bir X birim vektör alanı $\{X, \varphi X\}$ ortonormal olacak biçimde var ise $\{X, \varphi X\}$ düzlemine $T_pM$ nin $\varphi$-*kesitseli* denir.

Ayrıca

$$K(X, \varphi X) = g(R(X, \varphi X)\varphi X, X)$$

biçiminde tanımlanan ifadeye M nin $\varphi$-*kesitsel eğriliği* adı verilir [22].

**Tanım 3.2.4.** (2n+1)-boyutlu M Kenmotsu manifoldunun R eğrilik tensörü $\forall$ X, Y, Z$\in \chi$(M) için;

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z = {} & \frac{(c-3)}{4}[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y] \\ & + \frac{(c+1)}{4}[\eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X \\ & + \eta(Y)g(X, Z)\xi - \eta(X)g(Y, Z)\xi \\ & + g(X, \varphi Z)\varphi Y - g(Y, \varphi Z)\varphi X + 2g(X, \varphi Y)\varphi Z] \end{aligned} \tag{3. 10}$$

biçiminde ise M ye c = sabit $\varphi$-kesitsel eğriliğine sahip *Kenmotsu uzay form* adı verilir [22].

Üzerlerinde tanımlı hemen hemen değme metrik yapıyla birlikte aşağıdaki Kenmotsu manifoldu örnekleri verilebilir:

**Örnek 3.2.5.** M, $\mathbb{R}^3$ deki (x, y, z) standart koordinatlar üzerinde $z \neq 0$ olacak biçimde tanımlı, 3-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. M üzerindeki her noktada lineer bağımsız

$$e_1 = z\frac{\partial}{\partial x}, \quad e_2 = z\frac{\partial}{\partial y}, \quad e_3 = -z\frac{\partial}{\partial z},$$

baz vektörlerini alalım. M üzerindeki g Riemann metriğini

$$g = \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{z^2}$$

ile tanımlayalım. Bu durumda

$$g(e_1, e_3) = g(e_1, e_2) = g(e_2, e_3) = 0$$

$$g(e_1, e_1) = g(e_2, e_2) = g(e_3, e_3) = 1$$

olduğu görülmektedir.

Diğer taraftan $\varphi$ (1, 1)-tipinde tensör alanını, $\xi$ vektör alanını, $\eta$ 1-formunu $\forall X \in \chi(M)$ için

$$\varphi(e_1) = -e_2, \qquad \varphi(e_2) = e_1, \qquad \varphi(e_3) = 0$$

ve

$$\xi = e_3, \qquad \eta(X) = g(X, e_3)$$

biçiminde alalım. Buradan $\varphi$ tensör alanı ve g metrik tensörünün lineerlik özelliklerini kullandığımızda $\forall X, Y \in \chi(M)$ için;

$$\eta(e_3) = 1,$$

$$\varphi^2 X = -X + \eta(X)e_3$$

ve

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

eşitliklerini sağlayarak, $\{\varphi, \xi, \eta, g\}$ nin M üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapı olduğu görülür.

Şimdi de M üzerindeki $\nabla$ Levi-Civita koneksiyonunu alalım. Buradan

$$[e_1, e_2] = 0, \qquad [e_1, e_3] = e_1, \qquad [e_2, e_3] = e_2$$

elde edilir.

Diğer taraftan Kozsul formülleri yardımıyla M üzerindeki ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$ bazına göre;

$$\nabla_{e_1} e_1 = -e_3, \qquad \nabla_{e_1} e_2 = 0, \qquad \nabla_{e_1} e_3 = e_1,$$

$$\nabla_{e_2} e_1 = 0, \qquad \nabla_{e_2} e_2 = -e_3, \qquad \nabla_{e_2} e_3 = e_2$$

ve

$$\nabla_{e_3} e_1 = 0, \qquad \nabla_{e_3} e_2 = 0, \qquad \nabla_{e_3} e_3 = 0$$

eşitlikleri yardımı ile (3. 6) denkleminin sağlandığı görülmektedir.

Şimdi, $a, b, c, \bar{a}, \bar{b}$ ve $\bar{c} \in \mathbb{R}$ değerleri için,

$$X = ae_1 + be_2 + c\xi, \qquad Y = \bar{a}e_1 + \bar{b}e_2 + \bar{c}\xi$$

vektör alanlarını alalım. Buradan

$$\begin{aligned} \varphi(Y) &= \varphi(\bar{a}e_1 + \bar{b}e_2 + \bar{c}\xi) \\ &= \bar{a}\varphi(e_1) + \bar{b}\varphi(e_2) \\ &= \bar{b}e_1 - \bar{a}e_2 \end{aligned}$$

olup buradan

$$\begin{aligned} (\nabla_X \varphi)Y &= \nabla_X \varphi Y - \varphi \nabla_X Y \\ &= (b\bar{a} - a\bar{b})\xi + \bar{c}ae_2 - \bar{c}be_1 \\ &= g(\varphi X, Y)\xi - \eta(Y)\varphi X \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (3. 5) denklemi yardımı ile M hemen hemen metrik manifoldunun bir Kenmotsu manifoldu olduğu görülür [15].

**Örnek 3.2.6.** $\mathbb{R}^{2n+1}$ deki $(x^1, x^2, \ldots, x^{2n+1})$ standart koordinatlar üzerinde $x^1 > 0$ olacak biçimde, üzerindeki $g = (x^1)^{-2} I_{2n+1}$ Riemann metriği ile birlikte (2n+1)-boyutlu $H^{2n+1}$ hiperbolik uzayını alalım.

$H^{2n+1}$ hiperbolik uzayı üzerindeki her noktada lineer bağımsız

$$e_1 = -x^1 \frac{\partial}{\partial x^1}, \qquad e_2 = -x^1 \frac{\partial}{\partial x^2}, \ldots, \qquad e_{2n+1} = -x^1 \frac{\partial}{\partial x^{2n+1}},$$

baz vektörlerini tanımlayalım.

Bu durumda her $1 \leq i, j \leq 2n+1$ için;

$$g(e_i, e_j) = 0, \qquad i \neq j$$

ve

$$g(e_i, e_i) = 1$$

olduğu görülmektedir.

Diğer taraftan $H^{2n+1}$ üzerindeki $\varphi$ (1, 1)-tipinde tensör alanını, $\xi$ vektör alanını, $\eta$ 1-formunu $\forall X \in \chi(M)$ ve her $2 \leq i \leq n+1$ için;

$$\xi = e_1, \qquad \eta(X) = g(X, e_1),$$

ve

$$\varphi(e_1) = 0, \qquad \varphi(e_i) = e_{i+n}, \qquad \varphi(e_{i+n}) = -e_i$$

ile tanımlayalım.

Buradan $\varphi$ tensör alanı ile g metrik tensörünün lineerlik özelliklerini kullandığımızda $\forall X, Y \in \chi(M)$ için;

$$\eta(e_1) = 1,$$

$$\varphi^2 X = -X + \eta(X)e_1$$

ve

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

eşitliklerini sağlayarak, $\{\varphi, \xi, \eta, g\}$ nin M üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapı olduğu görülür.

Şimdi de M üzerindeki $\nabla$ Levi-Civita koneksiyonunu alalım. Buradan

$$[e_1, e_i] = -e_i, \qquad 1 \leq i \leq 2n+1$$

$$[e_i, e_j] = 0, \qquad 2 \leq i, j \leq 2n+1$$

elde edilir.

Diğer taraftan Kozsul formülleri yardımıyla M üzerindeki ortonormal $\{e_1, e_2, ..., e_{2n+1}\}$ bazına göre;

$$\nabla_{e_1} e_1 = 0, \quad \nabla_{e_1} e_2 = 0, \quad \nabla_{e_1} e_3 = 0, \ldots\ldots\ldots, \nabla_{e_1} e_{2n+1} = 0,$$

$$\nabla_{e_2} e_1 = e_2, \quad \nabla_{e_2} e_2 = -e_2, \quad \nabla_{e_2} e_3 = 0, \ldots\ldots\ldots, \nabla_{e_2} e_{2n+1} = 0$$

$$\nabla_{e_3} e_1 = e_3, \quad \nabla_{e_3} e_2 = 0, \quad \nabla_{e_3} e_3 = -e_3, \ldots\ldots\ldots, \nabla_{e_3} e_{2n+1} = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\nabla_{e_{2n+1}} e_1 = e_{2n+1}, \quad \nabla_{e_2} e_{2n+1} = 0, \nabla_{e_3} e_{2n+1} = 0, \ldots\ldots\ldots, \nabla_{e_{2n+1}} e_{2n+1} = -e_{2n+1}$$

eşitliklerinin sağlandığı görülmektedir. Buradan

$$X = a_1\xi + \sum_{i=2}^{2n+1} a_i e_i, \qquad a_i \in \mathbb{R}$$

$$Y = \overline{a}_1\xi + \sum_{i=2}^{2n+1} \overline{a}_i e_i, \qquad \overline{a}_i \in \mathbb{R}$$

vektör alanları için

$$\begin{aligned}(\nabla_X\varphi)Y &= \nabla_X\varphi Y - \varphi\nabla_X Y \\ &= \sum_{2\le i<j\le 2n+1} [(a_i\overline{a}_j - a_j\overline{a}_i)\xi + \overline{a}_1(a_i e_j - a_j e_i)] \\ &= g(\varphi X, Y)\xi - \eta(Y)\varphi X\end{aligned}$$

elde edilerek (3. 5) denkleminin sağlandığı ve dolayısıyla $H^{2n+1}$ in , üzerindeki $\{\varphi, \xi, \eta, g\}$ hemen hemen değme metrik yapısıyla birlikte bir Kenmotsu manifoldu olduğu görülmektedir [11].

### 3.2.1. Katlı Çarpım Üzerindeki Kenmotsu Yapısı

Bu bölümde katlı çarpım yardımıyla bir Kaehler manifoldu üzerindeki Kenmotsu yapısının nasıl oluşturulduğu gösterilmiş olup bazı önemli örnekler verilmiştir .

**Tanım 3.2.1.1.** B ve F yarı-Riemann manifoldları ve $g_B$ ve $g_F$ sırasıyla B ve F yarı-Riemann manifoldları üzerindeki metrik tensörleri olsun. Böylece, $B \times F$ manifoldu, üzerindeki

$$g = g_B + g_F$$

metrik tensörü ile birlikte bir *çarpım manifoldu* oluşturur [3].

B manifoldu üzerinde $C^\infty$ sınıfından, pozitif tanımlı bir fonksiyon f olmak üzere, $M = B \times_f F$ manifoldu, $B \times F$ manifoldu üzerindeki

$$g = g_B + f^2 g_F$$

metrik tensörü ile birlikte bir *katlı çarpım manifoldu* oluşturur [3].

**Tanım 3.2.1.2.** M bir reel diferensiyellenebilir manifold olsun. Eğer her $p \in M$ noktası için $J^2 = -I$ olacak biçimde $T_pM$ tanjant uzayının bir J endomorfizmi mevcut ise, M üzerindeki J tensör alanına bir *hemen hemen kompleks yapı* adı verilir. Bir J hemen hemen kompleks yapısı ile verilen manifoldda bir *hemen hemen kompleks manifold* denir [41].

M üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapısı $\{\varphi, \xi, \eta, g\}$ ile verilsin. O zaman $M \times \mathbb{R}$ üzerinde herhangibir vektör alanı

$$(X, f\frac{d}{dt})$$

şeklinde yazılabilir. Burada X, M manifolduna teğet bir vektör alanı; t, $\mathbb{R}$ nin bir koordinatı ve $f\frac{d}{dt}$, $M \times \mathbb{R}$ üzerinde bir $C^\infty$ fonksiyondur.

$\{\varphi, \xi, \eta, g\}$, M üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapı olsun. Böylece $M \times \mathbb{R}$ üzerindeki bir hemen hemen kompleks yapı

$$J(X, f\frac{d}{dt}) = (\varphi X - f\xi, \eta(X)\frac{d}{dt})$$

biçiminde tanımlanır. Kolayca $J^2 = -I$ olduğu gösterilebilir [41].

**Tanım 3.2.1.3.** M diferensiyellenebilir bir manifold olmak üzere, M üzerinde (1, 1)-tipinde bir tensör alanı F olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$N_F(X, Y) = F^2[X, Y] + [FX, FY] - F[FX, Y] - F[X, FY]$$

şeklinde tanımlı $N_F$ tensör alanına F tensör alanının *Nijenhuis torsiyon tensörü* adı verilir.

$F = J$ olarak alınırsa,

$$\begin{aligned} N_J(X,Y) &= J^2[X,Y] + [JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY] \\ &= -[X,Y] + [JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY] \end{aligned}$$

eşitliği yazılır [41].

**Tanım 3.2.1.4.** (M, J), bir hemen hemen kompleks manifold olsun. Eğer, M üzerinde $N_J = 0$ ise M ye bir *kompleks manifold* denir [41].

**Tanım 3.2.1.5.** (M, J), bir hemen hemen kompleks manifold olsun. M üzerinde $\forall X, Y \in \chi(M)$ için;

$$g(JX, JY) = g(X, Y)$$

şeklinde verilen g Riemann metriğine *Hermityan metriği* adı verilir [41].

Hermityan metriği ile verilen bir hemen hemen kompleks manifold bir *hemen hemen Hermityan manifold* olarak adlandırılır. Ayrıca, Hermityan metriği ile verilen kompleks manifolda *Hermityan manifold* adı verilir [41].

**Tanım 3.2.1.6.** (M, J, g) bir Hermityan manifold olsun. Eğer M üzerinde

$$\nabla J = 0$$

oluyorsa, M ye bir *Kaehler manifoldu* adı verilir [41].

**Teorem 3.2.1.7.** M, üzerindeki (J, G) kompleks yapısı ile birlikte bir Kaehler manifold ve f de

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ , \qquad f(t) = ce^t \qquad c > 0$$

biçiminde tanımlı $C^\infty$ sınıfından bir fonksiyon olsun.

$\mathbb{R} \times_f M$ katlı çarpım manifoldu üzerindeki $\{g, \xi, \eta\}$ yapısını her $(t,x) \in \mathbb{R} \times M$ ve $X \in \chi(\mathbb{R} \times M)$ için

$$g_{(t,x)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f^2(t)G_x \end{pmatrix}, \qquad \xi = \frac{d}{dt}, \qquad \eta(X) = g(X, \xi)$$

biçiminde tanımlayalım. Burada $G_x$, $x \in M$ noktasındaki G metriğine karşılık gelen matrisi göstermektedir.

Ayrıca, $\mathbb{R}\times_f M$ üzerindeki $\varphi$ tensör alanını her $(t,x)\in\mathbb{R}\times M$ için

$$\varphi_{(t,x)}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \tilde{\varphi}_{(t,x)}\end{pmatrix}$$

ile tanımlayalım. Burada,

$$\tilde{\varphi}_{(t,x)}=(e^{t\xi})_* J_x (e^{-t\xi})_*$$

biçimindedir.

Böylece $\{\varphi,g,\xi,\eta\}$ yapısı, bir hemen hemen değme metrik manifold ve $\mathbb{R}\times_f M$ katlı çarpım manifoldu da her $X,Y\in\chi(\mathbb{R}\times M)$ için (3. 5) eşitliği ile birlikte bir Kenmotsu manifoldu olur. Burada $\nabla$, $\mathbb{R}\times_f M$ üzerindeki Levi-Civita koneksiyonudur [22].

**Teorem 3.2.1.8.** $M_1$ ve $M_2$ üzerlerindeki $\{\varphi_1,g_1\}$ ve $\{\varphi_2,\xi_2,\eta_2,g_2\}$ yapıları ile birlikte sırası ile hemen hemen Hermitian manifold ve hemen hemen değme metrik manifold olsunlar. $M_1\times M_2$ çarpım manifoldunun, üzerindeki $\{\varphi,g,\xi,\eta\}$ hemen hemen değme metrik yapı ile bir Kenmotsu manifoldu olması için gerek ve yeter koşul, $M_1$ ve $M_2$ manifoldlarının sırasıyla Kaehler ve Kenmotsu manifoldu olmalarıdır [39].

**Tanım 3.2.1.9.** $\mathbb{C}P^n$ kompleks projektif uzay üzerindeki homojen koordinat sistemi $\{z^0,z^1,...,z^n\}$ olsun. $\mathbb{C}P^n$ üzerinde her j için $z^j\neq 0$ olacak biçimde, $U_j$ açık kümelerini alalım. $U_j$ kümesi üzerinde

$$t_j^k=\frac{z_k}{z_j}, \qquad j,k=0,1,...,n$$

biçiminde $\{t_j^0,...,t_j^j,...,t_j^n\}$ lokal koordinat sistemini tanımlayalım. Bu durumda $\overline{t}$, t koordinatının eşleniği olmak üzere;

$$ds^2=4\frac{(1+\sum t^\alpha\overline{t}^\alpha)(\sum dt^\alpha d\overline{t}^\alpha)-(\sum \overline{t}^\alpha dt^\alpha)(\sum t^\alpha d\overline{t}^\alpha)}{(1+\sum t^\alpha\overline{t}^\alpha)^2}$$

ile tanımlanan $\mathbb{C}P^n$ kompleks projektif uzay üzerindeki metriğe *Fubini-Study metriği* adı verilir [40].

**Tanım 3.2.1.10.** $\mathbb{C}^n$ kompleks uzayının

$$D^n = \{(z^1,...,z^n) : \sum z^\alpha \overline{z}^\alpha < 1\}$$

biçiminde tanımlı açık birim diskini alalım.

Bu durumda $\overline{z}$, z koordinatının eşleniği olmak üzere;

$$ds^2 = 4\frac{(1-\sum z^\alpha \overline{z}^\alpha)(\sum dz^\alpha d\overline{z}^\alpha) + (\sum \overline{z}^\alpha dz^\alpha)(\sum z^\alpha d\overline{z}^\alpha)}{(1-\sum z^\alpha \overline{z}^\alpha)^2}$$

ile tanımlanan $D^n$ birim diski üzerindeki metriğe *Bergman metriği* adı verilir [40].

Böylece, aşağıdaki Kenmotsu manifold örnekleri verilebilir:

**Örnek 3.2.1.11.** $\mathbb{C}^n$ kompleks uzay, üzerindeki Fubini-Study metriği ile birlikte $\mathbb{C}P^n$ kompleks projektif uzay ve Bergman metriği ile $D^n \subset \mathbb{C}^n$ birim diski, c = sabit holomorfik eğrilikleri sırasıyla c = 0, c>0 ve c<0 biçiminde olan Kaehler manifolddurlar.

Şimdi, $\mathbb{R}$ üzerinde pozitif tanımlı, $f(t) = ce^t$ diferensiyellenebilir fonksiyonunu alalım. Böylece $\mathbb{R}\times_f \mathbb{C}^n, \mathbb{R}\times_f \mathbb{C}P^n$ ve $\mathbb{R}\times_f D^n$ katlı çarpım manifoldları birer Kenmotsu manifoldu olurlar [33].

Benzer şekilde Örnek 3.2.1.11 de verilen yapılar üzerinde aşağıdaki örnek verilebilir:

**Örnek 3.2.1.12.** $\mathbb{C}^n$ kompleks uzay, üzerindeki Fubini-Study metriği ile birlikte $\mathbb{C}P^n$ kompleks projektif uzay ve Bergman metriği ile $D^n \subset \mathbb{C}^n$ birim diski c = sabit holomorfik eğrilikleri sırasıyla c = 0, c>0 ve c<0 biçiminde olan Kaehler manifoldudurlar. Böylece $H^{2n+1}$ bir Kenmotsu manifold olmak üzere, $\mathbb{C}^n \times H^{2n+1}, \mathbb{C}P^n \times H^{2n+1}$ ve $D^n \times H^{2n+1}$ çarpım manifoldları birer Kenmotsu manifoldu olurlar [33].

# 4. KENMOTSU MANİFOLDLARI ÜZERİNDE ÇEYREK-SİMETRİK METRİK KONEKSİYON

Bu bölüm orijinal sonuçlar içermektedir. Bu bölümde Kenmotsu manifoldları üzerinde çeyrek-simetrik metrik koneksiyon incelenmiştir. Çeyrek-simetrik metrik koneksiyona göre bir Kenmotsu manifoldunun eğrilik tensörü ve Ricci tensörü ile skaler eğriliği elde edilmiş olup, çeyrek-simetrik metrik koneksiyona göre lokal simetrik n-boyutlu bir Kenmotsu manifoldunun Levi-Civita koneksiyonuna göre skaler eğriliğinin $r = n(1-n)$ olduğu bulunmuştur. Ayrıca çeyrek-simetrik metrik koneksiyona göre genelleştirilmiş rekürent, $\varphi$-rekürent ve Chaki-pseudosimetrik Kenmotsu manifoldlarının var olmadığı gösterilmiştir.

**Tanım 4.1.** M bir Riemann manifoldu olsun. Eğer M nin $\overset{o}{\nabla}$ lineer koneksiyonuna ait

$$T(X,Y) = \overset{o}{\nabla}_X Y - \overset{o}{\nabla}_Y X - [X,Y] \tag{4. 1}$$

biçiminde tanımlı torsiyon tensörü T, $\forall$ X, Y $\in \chi(M)$ için;

$$T(X,Y) = \eta(Y)\varphi X - \eta(X)\varphi Y, \tag{4. 2}$$

şartını sağlıyor ise $\overset{o}{\nabla}$ ya *çeyrek-simetrik koneksiyon* adı verilir. Burada $\eta$ diferensiyellenebilir bir 1-form ve $\varphi$ (1, 1)-tipinde bir tensör alanıdır [20].

Eğer M Riemann manifoldu üzerinde g Riemann metriğine göre $\forall$ X, Y, Z $\in \chi(M)$ için;

$$(\overset{o}{\nabla}_X g)(Y,Z) = 0 \tag{4. 3}$$

koşulu sağlanıyor ise $\overset{o}{\nabla}$ koneksiyonuna *çeyrek-simetrik metrik koneksiyon* adı verilir [42].

M, n-boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifoldu olsun. $\nabla$ ve $\overset{o}{\nabla}$ sırası ile M üzerinde Levi-Civita koneksiyonu ve çeyrek-simetrik metrik koneksiyonu göstermek üzere, $\nabla$ ile $\overset{o}{\nabla}$ arasındaki bağıntı $\forall$ X, Y $\in \chi$ (M) için;

$$\overset{o}{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + D(X, Y) \qquad (4.\ 4)$$

denklemi yardımı ile verilmektedir [42].

Burada D (1, 1)-tipindeki tensör alanı, M üzerindeki $\overset{o}{\nabla}$ çeyrek-simetrik metrik koneksiyona göre $\forall$ X, Y $\in \chi$ (M) için;

$$D(X, Y) = \frac{1}{2}[T(X, Y) + T^{'}(X, Y) + T^{'}(Y, X)] \qquad (4.\ 5)$$

biçiminde tanımlı olup, $T^{'}$ (1, 1)-tipindeki tensör alanı ise

$$g(T^{'}(X, Y), Z) = g(T(Z, X), Y) \qquad (4.\ 6)$$

denklemi yardımı ile verilir [42].

**Tanım 4.2.** (M, g) n-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. M üzerinde bir tanjant U vektör alanını, $\alpha \neq 0$ 1-formu yardımı ile

$$g(X, U) = \alpha(X)$$

biçiminde tanımlayalım. M nin eğrilik tensörü R, $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için;

$$\varphi^2((\nabla_X R)(Y, Z)W) = \alpha(X)R(Y, Z)W \qquad (4.\ 7)$$

koşulunu sağlıyorsa M ye $\varphi$*-rekürent* adı verilir.

**Önerme 4.3.** n-boyutlu bir M Riemann manifoldu üzerinde $\nabla$ Levi-Civita koneksiyonu ile $\overset{o}{\nabla}$ çeyrek-simetrik metrik koneksiyon arasındaki bağıntı,

$$\overset{o}{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \eta(X)\varphi Y \qquad (4.\ 8)$$

biçimindedir [36].

**İspat :** n-boyutlu bir M Riemann manifoldu üzerinde $\overset{o}{\nabla}$ çeyrek-simetrik metrik koneksiyona ait (4. 2) denklemi ile verilen torsiyon tensörü (4. 6) denkleminde kullanıldığında,

$$g(T^{'}(X, Y), Z) = g(\eta(X)\varphi Z - \eta(Z)\varphi X, Y)$$

yazılabilir.

Buradan da

$$g(T'(X,Y),Z) = \eta(X)g(\varphi Z,Y) - \eta(Z)g(\varphi X,Y)$$

biçiminde olup $\forall\, Z \in \chi(M)$ için;

$$T'(X,Y) = g(\varphi Y,X)\xi - \eta(X)\varphi Y \tag{4. 9}$$

elde edilir.

(4. 2) ile (4. 9) denklemleri (4. 5) denkleminde yerlerine yazıldığında

$$D(X,Y) = \frac{1}{2}[\eta(Y)\varphi X - \eta(X)\varphi Y + g(\varphi Y,X)\xi$$
$$- \eta(X)\varphi Y + g(\varphi X,Y)\xi - \eta(Y)\varphi X]$$

bulunur. Son denklemde gerekli sadeleştirmeler yapılarak $\varphi$ tensör alanının anti-simetri özelliği kullanıldığında

$$D(X,Y) = -\eta(X)\varphi Y$$

elde edilir. Buradan da son denklem (4. 4) de yerine yazıldığında $\forall\, X,\ Y \in \chi(M)$ için;

$$\overset{o}{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \eta(X)\varphi Y$$

olur. ■

(4. 8) denkleminde $Y = \xi$ alındığında bir Kenmotsu manifoldu üzerinde

$$\overset{o}{\nabla}_X \xi = \nabla_X \xi = X - \eta(X)\xi \tag{4. 10}$$

elde edilir.

**Önerme 4.4.** n-boyutlu bir M Kenmotsu manifoldu üzerinde $\nabla$ Levi-Civita koneksiyonuna göre eğrilik tensörü R ve $\overset{o}{\nabla}$ çeyrek-simetrik metrik koneksiyona göre eğrilik tensörü $\overset{o}{R}$ olmak üzere, R ile $\overset{o}{R}$ arasındaki bağıntı

$$\overset{o}{R}(X,Y)Z = R(X,Y)Z + \eta(X)g(\varphi Y,Z)\xi - \eta(Y)g(\varphi X,Z)\xi$$
$$- \eta(X)\eta(Z)\varphi Y + \eta(Y)\eta(Z)\varphi X \tag{4. 11}$$

biçimindedir [36].

**İspat :** $\overset{o}{\nabla}$ çeyrek-simetrik metrik koneksiyona göre eğrilik tensörü $\overset{o}{R}$ olmak üzere, $\forall$ X, Y, Z $\in \chi$(M) için ;

$$\overset{o}{R}(X,Y)Z = \overset{o}{\nabla}_X \overset{o}{\nabla}_Y Z - \overset{o}{\nabla}_Y \overset{o}{\nabla}_X Z - \overset{o}{\nabla}_{[X,Y]} Z \tag{4. 12}$$

biçimindedir. (4. 12) denkleminde (4. 8) kullanıldığında

$$\overset{o}{R}(X,Y)Z = \overset{o}{\nabla}_X(\nabla_Y Z - \eta(Y)\varphi Z) - \overset{o}{\nabla}_Y(\nabla_X Z - \eta(X)\varphi Z)$$
$$- \nabla_{[X,Y]} Z + \eta([X,Y])\varphi Z$$

olup buradan da

$$\overset{o}{R}(X,Y)Z = \overset{o}{\nabla}_X \nabla_Y Z - \eta(Y)\overset{o}{\nabla}_X(\varphi Z) - g(\overset{o}{\nabla}_X Y,\xi)\varphi Z - g(Y,\overset{o}{\nabla}_X \xi)\varphi Z$$
$$- \overset{o}{\nabla}_Y \nabla_X Z + \eta(X)\overset{o}{\nabla}_Y(\varphi Z) + g(\overset{o}{\nabla}_Y X,\xi)\varphi Z + g(X,\overset{o}{\nabla}_Y \xi)\varphi Z$$
$$- \nabla_{[X,Y]} Z + g(\nabla_X Y,\xi)\varphi Z - g(\nabla_Y X,\xi)\varphi Z \tag{4. 13}$$

elde edilir. (4. 13) denkleminde, (4. 10) ile (4. 8) eşitlikleri kullanıldığında

$$\overset{o}{R}(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \eta(X)\varphi(\nabla_Y Z) - \eta(Y)\nabla_X(\varphi Z) + \eta(X)\eta(Y)\varphi^2 Z$$
$$- g(\nabla_X Y,\xi)\varphi Z + \eta(X)g(\varphi Y,\xi)\varphi Z - g(Y,\nabla_X \xi)\varphi Z$$
$$- \nabla_Y\nabla_X Z + \eta(Y)\varphi(\nabla_X Z) + \eta(X)\nabla_Y(\varphi Z) - \eta(X)\eta(Y)\varphi^2 Z$$
$$+ g(\nabla_Y X,\xi)\varphi Z - \eta(Y)g(\varphi X,\xi)\varphi Z + g(X,\nabla_Y \xi)\varphi Z$$
$$- \nabla_{[X,Y]} Z + g(\nabla_X Y,\xi)\varphi Z - g(\nabla_Y X,\xi)\varphi Z \tag{4. 14}$$

bulunur. M bir Kenmotsu manifoldu olduğundan (3. 1) ile (3. 6) denklemleri kullanılarak gerekli düzenlemeler yapıldığında (4. 14) denklemi

$$\overset{o}{R}(X,Y)Z = R(X,Y)Z + \eta(X)(\nabla_Y\varphi)Z - \eta(Y)(\nabla_X\varphi)Z - \eta(X)\eta(Y)Z$$
$$+ \eta(X)\eta(Y)\eta(Z)\xi - g(X,Y)\varphi Z + \eta(X)\eta(Y)\varphi Z + \eta(X)\eta(Y)Z$$
$$- \eta(X)\eta(Y)\eta(Z)\xi + g(X,Y)\varphi Z - \eta(X)\eta(Y)\varphi Z$$

biçimine dönüşür. Buradan da gerekli sadeleşmeler yapıldığında

$$\overset{o}{R}(X,Y)Z = R(X,Y)Z + \eta(X)(\nabla_Y\varphi)Z - \eta(Y)(\nabla_X\varphi)Z \tag{4. 15}$$

sonucuna ulaşılır.

M bir Kenmotsu manifoldu olduğundan (4. 15) denkleminde (3. 5) denklemi kullanıldığında

$$\overset{o}{R}(X,Y)Z = R(X,Y)Z + \eta(X)g(\varphi Y,Z)\xi - \eta(Y)g(\varphi X,Z)\xi$$
$$- \eta(X)\eta(Z)\varphi Y + \eta(Y)\eta(Z)\varphi X$$

elde edilir. ■

**Önerme 4.5.** n-boyutlu bir M Kenmotsu manifoldu üzerinde $\nabla$ Levi-Civita koneksiyonuna göre eğrilik tensörü R ve $\overset{o}{\nabla}$ çeyrek-simetrik metrik koneksiyona göre eğrilik tensörü $\overset{o}{R}$ olmak üzere, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için ;

**(i)** $\overset{o}{R}(X,\xi)Y = g(X,Y)\xi - \eta(Y)X - g(\varphi X,Y)\xi + \eta(Y)\varphi X$

**(ii)** $\overset{o}{R}(X,Y)\xi = \eta(X)Y - \eta(Y)X - \eta(X)\varphi Y + \eta(Y)\varphi X$

**(iii)** $\overset{o}{R}(\xi,X)\xi = X - \eta(X)\xi - \varphi X$

biçimindedir [36].

**İspat :** (4. 11) denkleminde sırası ile $Y = \xi$ ve $Z = Y$ olarak alındığında

$$\overset{o}{R}(X,\xi)Y = R(X,\xi)Y - g(\varphi X,Y)\xi + \eta(Y)\varphi X$$

elde edilir.
M bir Kenmotsu manifoldu olduğundan (3. 8) denklemi yardımıyla

$$\overset{o}{R}(X,\xi)Y = g(X,Y)\xi - \eta(Y)X - g(\varphi X,Y)\xi + \eta(Y)\varphi X \qquad (4.\ 16)$$

yazılabilir. Böylece (i) denklemi elde edilir.
Benzer şekilde (4. 11) denkleminde $Z = \xi$ olarak alındığında

$$\overset{o}{R}(X,Y)\xi = R(X,Y)\xi - \eta(X)\varphi Y + \eta(Y)\varphi X$$

yazılabilir. M bir Kenmotsu manifoldu olduğundan burada yeniden (3. 8) denklemi kullanıldığında

$$\overset{o}{R}(X,Y)\xi = \eta(X)Y - \eta(Y)X - \eta(X)\varphi Y + \eta(Y)\varphi X \qquad (4.\ 17)$$

biçiminde (ii) denklemi elde edilir.

Son olarak (4. 11) denkleminde sırası ile $X = Z = \xi$ ve Y = X olarak alındığında

$$\overset{o}{R}(\xi, X)\xi = R(\xi, X)\xi - \varphi X$$

bulunur. M bir Kenmotsu manifoldu olduğundan buradan (3. 8) denklemi yardımı ile

$$\overset{o}{R}(\xi, X)\xi = X - \eta(X)\xi - \varphi X \tag{4. 18}$$

elde edilir. Bu da bize (iii) denklemini verir. ■

**Önerme 4.6.** n-boyutlu bir M Kenmotsu manifoldu üzerinde $\overset{o}{\nabla}$ çeyrek-simetrik metrik koneksiyona göre Ricci tensörü ve skalar eğriliği sırasıyla $\overset{o}{S}$ ve $\overset{o}{r}$ olmak üzere,

$$\overset{o}{S}(Y, Z) = S(Y, Z) + g(\varphi Y, Z) \tag{4. 19}$$

ve

$$\overset{o}{r} = r \tag{4. 20}$$

dir [36].

**İspat :** (4. 11) denkleminin her iki yanının $W \in \chi(M)$ ile iç çarpımı alındığında

$$\begin{aligned}\overset{o}{R}(X, Y, Z, W) = R(X, Y, Z, W) &+ \eta(X)\eta(W)g(\varphi Y, Z) - \eta(Y)\eta(W)g(\varphi X, Z) \\ &- \eta(X)\eta(Z)g(\varphi Y, W) + \eta(Y)\eta(Z)g(\varphi X, W)\end{aligned} \tag{4. 21}$$

yazılabilir. Buradan da X ve W vektör alanlarına göre kontraksiyon yapıldığında

$$\overset{o}{S}(Y, Z) = S(Y, Z) + g(\varphi Y, Z)$$

elde edilir.

Son denklemde de Y ve Z vektör alanlarına göre kontraksiyon yapıldığında

$$\overset{o}{r} = r$$

bulunur. ■

(4. 21) denkleminde $Z = \xi$ olarak alındığında

$$\overset{o}{S}(Y, \xi) = S(Y, \xi) = (1 - n)\eta(Y) \tag{4. 22}$$

olduğu görülür.

**Önerme 4.7.** n-boyutlu bir M Kenmotsu manifoldu üzerinde $\overset{o}{\nabla}$ çeyrek-simetrik metrik koneksiyona göre $\forall$ X, Y, Z, W$\in \chi$(M) için ;

**(i)** $\overset{o}{R}(X,Y,Z,W)+\overset{o}{R}(X,Y,W,Z)=0$

**(ii)** $\overset{o}{R}(X,Y,Z,W)+\overset{o}{R}(Y,X,Z,W)=0$

biçimindedir [36].

**İspat :** (2n+1)-boyutlu bir M Kenmotsu manifoldu üzerinde $\nabla$ Levi-Civita koneksiyonuna göre eğrilik tensörü R ve $\overset{o}{\nabla}$ çeyrek-simetrik metrik koneksiyona göre eğrilik tensörü $\overset{o}{R}$ olmak üzere, $\forall$ X, Y, Z, W$\in \chi$(M) için ;

$$\begin{aligned}\overset{o}{R}(X,Y,Z,W) &= R(X,Y,Z,W)+\eta(X)\eta(W)g(\varphi Y,Z)-\eta(Y)\eta(W)g(\varphi X,Z)\\ &\quad -\eta(X)\eta(Z)g(\varphi Y,W)+\eta(Y)\eta(Z)g(\varphi X,W) \qquad (4.\ 23)\end{aligned}$$

olduğunu biliyoruz. Diğer taraftan (4. 23) denkleminde W ile Z vektör alanlarının yerleri değiştirildiğinde

$$\begin{aligned}\overset{o}{R}(X,Y,W,Z) &= R(X,Y,W,Z)+\eta(X)\eta(Z)g(\varphi Y,W)-\eta(Y)\eta(Z)g(\varphi X,W)\\ &\quad -\eta(X)\eta(W)g(\varphi Y,Z)+\eta(Y)\eta(W)g(\varphi X,Z) \qquad (4.\ 24)\end{aligned}$$

elde edilir. (4. 23) ile (4. 24) denklemleri taraf tarafa toplandığında

$$\overset{o}{R}(X,Y,Z,W)+\overset{o}{R}(X,Y,W,Z)=R(X,Y,Z,W)+R(X,Y,W,Z)$$

bulunur. Buradan da $\nabla$ Levi-Civita koneksiyonuna göre R eğrilik tensörünün özellikleri kullanıldığında

$$\overset{o}{R}(X,Y,Z,W)+\overset{o}{R}(X,Y,W,Z)=0$$

sonucuna ulaşılır.

Benzer şekilde (4. 23) denkleminde Y = X ve W = Z olarak alındığında

$$\begin{aligned}\overset{o}{R}(Y,X,W,Z) &= R(Y,X,W,Z)+\eta(Y)\eta(Z)g(\varphi X,W)-\eta(X)\eta(Z)g(\varphi Y,W)\\ &\quad -\eta(Y)\eta(W)g(\varphi X,Z)+\eta(X)\eta(W)g(\varphi Y,Z) \qquad (4.\ 25)\end{aligned}$$

elde edilir.

(4. 23) ile (4. 25) denklemleri taraf tarafa toplandığında

$$\overset{o}{R}(X,Y,Z,W)+\overset{o}{R}(Y,X,W,Z)=R(X,Y,Z,W)+R(Y,X,W,Z)$$

olup buradan da $\nabla$ Levi-Civita koneksiyonuna göre R eğrilik tensörünün özellikleri kullanıldığında

$$\overset{o}{R}(X,Y,Z,W)+\overset{o}{R}(Y,X,Z,W)=0$$

bulunur. ■

**Teorem 4.8.** M, $\overset{o}{\nabla}$ çeyrek-simetrik metrik koneksiyona göre n-boyutlu lokal simetrik bir Kenmotsu manifoldu olsun. Bu durumda M nin Levi-Civita koneksiyonuna göre skaler eğriliği $r=n(1-n)$ dir [36].

**İspat :** M, $\overset{o}{\nabla}$ çeyrek-simetrik metrik koneksiyona göre lokal simetrik olduğundan (2. 12) denklemi yardımıyla $\forall$ X, Y, Z, W$\in \chi$(M) için ;

$$(\overset{o}{\nabla}_X \overset{o}{R})(Y,Z)W=0 \tag{4. 26}$$

yazılabilir. (4. 26) denkleminin U$\in \chi$(M) ile iç çarpımı alındığında

$$(\overset{o}{\nabla}_X \overset{o}{R})(Y,Z,W,U)=0$$

olur. Buradan da Y ve U vektör alanlarına göre kontraksiyon yapıldığında

$$(\overset{o}{\nabla}_X \overset{o}{S})(Z,W)=0 \tag{4. 27}$$

elde edilir.

Diğer taraftan çeyrek-simetrik metrik koneksiyona göre (2. 6) eşitliği kullanıldığında (4. 27) denklemi

$$\overset{o}{\nabla}_X \overset{o}{S}(Z,W)-\overset{o}{S}(\overset{o}{\nabla}_X Z,W)-\overset{o}{S}(Z,\overset{o}{\nabla}_X W)=0 \tag{4. 28}$$

biçimine dönüşür. (4. 28) denkleminde $W=\xi$ olarak alındığında

$$\overset{o}{\nabla}_X \overset{o}{S}(Z,\xi)-\overset{o}{S}(\overset{o}{\nabla}_X Z,\xi)-\overset{o}{S}(Z,\overset{o}{\nabla}_X \xi)=0$$

olup burada (4. 10) ve (4. 22) denklemleri kullanıldığında

$$(1-n)\overset{o}{\nabla}_X(\eta(Z))+(1-n)\eta(\overset{o}{\nabla}_X Z)-\overset{o}{S}(Z,X-\eta(X)\xi)=0 \tag{4. 29}$$

yazılabilir.

(4. 29) denkleminde gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$(1-n)g(\overset{o}{\nabla}_X Z,\xi)+(1-n)g(Z,\overset{o}{\nabla}_X \xi)-(1-n)g(\overset{o}{\nabla}_X Z,\xi)-\overset{o}{S}(Z,X)+\eta(X)\overset{o}{S}(Z,\xi)=0$$

elde edilir. Burada gerekli sadeleştirmeler yapılarak (4. 10), (4. 19) ve (4. 22) denklemleri kullanıldığında

$$(1-n)g(Z,X-\eta(X)\xi)-S(Z,X)-g(\varphi Z,X)+(1-n)\eta(X)\eta(Z)=0$$

olup buradan da

$$(1-n)g(X,Z)-S(X,Z)-g(\varphi Z,X)=0 \qquad (4.\ 30)$$

sonucuna ulaşılır. (4. 30) denkleminde X ve Z vektör alanlarına göre kontraksiyon yapıldığında

$$r=n(1-n)$$

elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur. ■

**Teorem 4.9.** $\overset{o}{\nabla}$ çeyrek-simetrik metrik koneksiyona göre genelleştirilmiş rekürent Kenmotsu manifoldu yoktur [36].

**İspat :** M, $\overset{o}{\nabla}$ çeyrek-simetrik metrik koneksiyona göre genelleştirilmiş rekürent bir Kenmotsu manifoldu olsun. Bu durumda (2. 14) denklemi yardımıyla $\forall$ X, Y, Z, W$\in \chi$(M) için ;

$$(\overset{o}{\nabla}_X \overset{o}{R})(Y,Z)W=\alpha(X)\overset{o}{R}(Y,Z)W+\beta(X)[g(Z,W)Y-g(Y,W)Z] \qquad (4.\ 31)$$

yazılabilir. (4. 31) denkleminde $Y=W=\xi$ olarak alındığında

$$(\overset{o}{\nabla}_X \overset{o}{R})(\xi,Z)\xi=\alpha(X)\overset{o}{R}(\xi,Z)\xi+\beta(X)[\eta(Z)\xi-Z]$$

elde edilir. Buradan (4. 18) eşitliği gereği son denklem

$$(\overset{o}{\nabla}_X \overset{o}{R})(\xi,Z)\xi=[\beta(X)-\alpha(X)]\{\eta(Z)\xi-Z\}-\alpha(X)\varphi Z \qquad (4.\ 32)$$

biçimine dönüşür.

Diğer taraftan (2. 6) denklemi kullanıldığında

$$\begin{aligned}(\overset{o}{\nabla}_X \overset{o}{R})(\xi,Z)\xi &= \overset{o}{\nabla}_X \overset{o}{R}(\xi,Z)\xi-\overset{o}{R}(\overset{o}{\nabla}_X \xi,Z)\xi \\ &\quad -\overset{o}{R}(\xi,\overset{o}{\nabla}_X Z)\xi-\overset{o}{R}(\xi,Z)\overset{o}{\nabla}_X \xi \qquad (4.\ 33)\end{aligned}$$

olur.

(4. 33) denkleminde (4. 10) ve (4. 18) değerleri yerlerine yazıldığında

$$(\overset{o}{\nabla}_X \overset{o}{R})(\xi, Z)\xi = \overset{o}{\nabla}_X (Z - \eta(Z)\xi - \varphi Z) - \overset{o}{R}(X, Z)\xi + \eta(X)\overset{o}{R}(\xi, Z)\xi$$

$$-\overset{o}{\nabla}_X Z + \eta(\overset{o}{\nabla}_X Z)\xi + \varphi \overset{o}{\nabla}_X Z - \overset{o}{R}(\xi, Z)X + \eta(X)\overset{o}{R}(\xi, Z)\xi$$

sonucuna ulaşılır. Burada (4. 8) denklemi ile (4. 17) ve (4. 18) eşitlikleri kullanıldığında

$$(\overset{o}{\nabla}_X \overset{o}{R})(\xi, Z)\xi = -g(\overset{o}{\nabla}_X Z, \xi)\xi - g(Z, \overset{o}{\nabla}_X \xi)\xi - \eta(Z)\overset{o}{\nabla}_X \xi - \nabla_X \varphi Z + \eta(X)\varphi^2 Z$$

$$-\eta(X)Z + \eta(Z)X + \eta(X)\varphi Z - \eta(Z)\varphi X + 2\eta(X)Z - 2\eta(X)\eta(Z)\xi - 2\eta(X)\varphi Z$$

$$+g(\overset{o}{\nabla}_X Z, \xi)\xi + \varphi \nabla_X Z - \eta(X)\varphi^2 Z - \eta(X)Z + g(X, Z)\xi + g(\varphi X, Z)\xi + \eta(X)\varphi Z$$

elde edilir. Son denklemde gerekli sadeleştirmeler yapılarak (4. 10) denklemi yardımıyla

$$(\overset{o}{\nabla}_X \overset{o}{R})(\xi, Z)\xi = -g(X, Z)\xi + \eta(X)\eta(Z)\xi + \eta(X)\eta(Z)\xi - (\nabla_X \varphi)Z$$

$$-\eta(Z)\varphi X - 2\eta(X)\eta(Z)\xi + g(X, Z)\xi + g(\varphi X, Z)\xi \qquad (4.\ 34)$$

bulunur. M bir Kenmotsu manifoldu olduğundan (4. 34) denkleminde (3. 5) kullanıldığında

$$(\overset{o}{\nabla}_X \overset{o}{R})(\xi, Z)\xi = 0 \qquad (4.\ 35)$$

sonucuna ulaşılır. (4. 32) ve (4. 35) denklemlerinin sağ tarafları karşılaştırıldığında

$$[\beta(X) - \alpha(X)]\{\eta(Z)\xi - Z\} - \alpha(X)\varphi Z = 0 \qquad (4.\ 36)$$

yazılabilir. (4. 37) denkleminde $Z = \varphi Z$ alındığında

$$[\beta(X) - \alpha(X)]\varphi Z + \alpha(X)\{\eta(Z)\xi - Z\} = 0 \qquad (4.\ 37)$$

elde edilir. Buradan (4. 36) ve (4. 37) denklemleri karşılaştırıldığında

$$[\alpha(X)]^2 + [\beta(X) - \alpha(X)]^2 = 0$$

bulunur. Bu da bize $\forall X \in \chi(M)$ için $\alpha(X) = \beta(X) = 0$ olduğunu gösterir. Ancak tanım gereği $\beta \neq 0$ olduğundan bu sonuç varsayımla çelişir. Böylece çeyrek-simetrik metrik koneksiyona göre genelleştirilmiş rekürent Kenmotsu manifoldu olmadığı sonucuna ulaşılır. ■

**Teorem 4.10.** $\overset{o}{\nabla}$ çeyrek-simetrik metrik koneksiyona göre $\varphi$-rekürent Kenmotsu manifoldu yoktur [36].

**İspat :** M $\overset{o}{\nabla}$ çeyrek-simetrik metrik koneksiyona göre $\varphi$-rekürent bir Kenmotsu manifoldu olsun. Dolayısıyla (4. 7) denklemi yardımıyla $\forall$ X, Y, Z, W$\in \chi$(M) için ;

$$\varphi^2((\overset{o}{\nabla}_X \overset{o}{R})(Y,Z)W) = \alpha(X)\overset{o}{R}(Y,Z)W \tag{4. 38}$$

yazılabilir. M, bir hemen hemen değme metrik manifold olduğundan (4. 38) denkleminde (3. 1) eşitliği kullanıldığında

$$-(\overset{o}{\nabla}_X \overset{o}{R})(Y,Z)W + \eta((\overset{o}{\nabla}_X \overset{o}{R})(Y,Z)W)\xi = \alpha(X)\overset{o}{R}(Y,Z)W \tag{4. 39}$$

elde edilir. (4. 39) denkleminde $Y = W = \xi$ olarak alındığında

$$-(\overset{o}{\nabla}_X \overset{o}{R})(\xi,Z)\xi + \eta((\overset{o}{\nabla}_X \overset{o}{R})(\xi,Z)\xi)\xi = \alpha(X)\overset{o}{R}(\xi,Z)\xi$$

olur. Buradan da (4. 35) denklemi yardımı ile

$$\alpha(X)\overset{o}{R}(\xi,Z)\xi = 0$$

bulunur. Son denklemde (4. 18) kullanıldığında

$$\alpha(X)[Z - \varphi Z - \eta(Z)] = 0 \tag{4. 40}$$

elde edilir. (4. 40) denklemi bize $\forall X \in \chi$(M) için $\alpha(X) = 0$ olduğunu gösterir. Ancak tanım gereği $\alpha \neq 0$ olduğundan bu durum varsayımla çelişir. Böylece çeyrek-simetrik metrik koneksiyona göre $\varphi$-rekürent Kenmotsu manifoldu olmadığı sonucuna ulaşılır. ■

**Teorem 4.11.** $\overset{o}{\nabla}$ çeyrek-simetrik metrik koneksiyona göre Chaki-pseudosimetrik Kenmotsu manifoldu yoktur [36].

**İspat :** M, $\overset{o}{\nabla}$ çeyrek-simetrik metrik koneksiyona göre pseudosimetrik bir Kenmotsu manifoldu olsun. Bu durumda (2. 15) denklemi göz önüne alındığında $\forall$ X, Y, Z, W $\in \chi$(M) için ;

$$\begin{aligned}(\overset{o}{\nabla}_X \overset{o}{R})(Y,Z,W) = {} & 2\alpha(X)\overset{o}{R}(Y,Z)W + \alpha(Y)\overset{o}{R}(X,Z)W \\ & +\alpha(Z)\overset{o}{R}(Y,X)W + \alpha(W)\overset{o}{R}(Y,Z)X \\ & +g(\overset{o}{R}(Y,Z)W,X)U\end{aligned} \tag{4. 41}$$

yazılabilir.

(4. 41) denkleminin her iki yanının $V \in \chi(M)$ ile iç çarpımı alındığında

$$
\begin{aligned}
(\overset{o}{\nabla}_X \overset{o}{R})(Y,Z,W,V) = {} & 2\alpha(X)\overset{o}{R}(Y,Z,W,V) + \alpha(Y)\overset{o}{R}(X,Z,W,V) \\
& + \alpha(Z)\overset{o}{R}(Y,X,W,V) + \alpha(W)\overset{o}{R}(Y,Z,X,V) \\
& + g(\overset{o}{R}(Y,Z)W,X)g(U,V)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan da Y ve V vektör alanlarına göre kontraksiyon yapılarak (4. 11) denklemi kullanıldığında son denklem

$$
\begin{aligned}
(\overset{o}{\nabla}_X \overset{o}{S})(Z,W) = {} & 2\alpha(X)\overset{o}{S}(Z,W) + \alpha(\overset{o}{R}(X,Z)W) + \alpha(Z)\overset{o}{S}(X,W) \\
& + \alpha(W)\overset{o}{S}(Z,X) - \alpha(R(W,X)Z) + \alpha(\xi)\eta(X)g(\varphi Z,W) \\
& + \eta(X)\eta(Z)\alpha(\varphi W) - \alpha(\xi)\eta(W)g(\varphi Z,X) - \eta(Z)\eta(W)\alpha(\varphi X)
\end{aligned} \tag{4. 42}
$$

biçimine dönüşür. Son denklemde $W = \xi$ olarak alındığında

$$
\begin{aligned}
(\overset{o}{\nabla}_X \overset{o}{S})(Z,\xi) = {} & 2\alpha(X)\overset{o}{S}(Z,\xi) + \alpha(\overset{o}{R}(X,Z)\xi) + \alpha(Z)\overset{o}{S}(X,\xi) \\
& + \alpha(\xi)\overset{o}{S}(Z,X) - \alpha(R(\xi,X)Z) + \alpha(\xi)\eta(X)g(\varphi Z,\xi) \\
& + \eta(X)\eta(Z)\alpha(\varphi\xi) - \alpha(\xi)\eta(\xi)g(\varphi Z,X) - \eta(Z)\eta(\xi)\alpha(\varphi X)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada (4. 17), (4. 19) ile (4. 22) denklemleri kullanılarak gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$
\begin{aligned}
(\overset{o}{\nabla}_X \overset{o}{S})(Z,\xi) = {} & 2(1-n)\alpha(X)\eta(Z) + \alpha(\eta(X)Z - \eta(Z)X - \eta(X)\varphi Z + \eta(Z)\varphi X) \\
& + (1-n)\alpha(Z)\eta(X) + \alpha(\xi)S(Z,X) + \alpha(\xi)g(\varphi Z,X) \\
& - \alpha(R(\xi,X)Z) - \alpha(\xi)g(\varphi Z,X) - \eta(Z)\alpha(\varphi X)
\end{aligned} \tag{4. 43}
$$

olur. M bir Kenmotsu manifoldu olduğundan (4. 43) denkleminde (3. 8) kullanıldığında

$$
\begin{aligned}
(\overset{o}{\nabla}_X \overset{o}{S})(Z,\xi) = {} & 2(1-n)\alpha(X)\eta(Z) + \eta(X)\alpha(Z) - \eta(Z)\alpha(X) - \eta(X)\alpha(\varphi Z) \\
& + \eta(Z)\alpha(\varphi X) + (1-n)\alpha(Z)\eta(X) + \alpha(\xi)S(Z,X) + \alpha(\xi)g(\varphi Z,X) \\
& - \eta(Z)\alpha(X) + \alpha(\xi)g(X,Z) - \alpha(\xi)g(\varphi Z,X) - \eta(Z)\alpha(\varphi X)
\end{aligned}
$$

bulunur. Buradan gerekli düzenlemeler yapılarak Levi-Civita koneksiyonuna göre S Ricci tensörünün simetrikliği kullanıldığında

$$
\begin{aligned}
(\overset{o}{\nabla}_X \overset{o}{S})(Z,\xi) = {} & -2n\alpha(X)\eta(Z) + (2-n)\eta(X)\alpha(Z) \\
& - \eta(X)\alpha(\varphi Z) + \alpha(\xi)S(X,Z) + \alpha(\xi)g(X,Z)
\end{aligned} \tag{4. 44}
$$

elde edilir.

Diğer taraftan $\overset{o}{\nabla}$ çeyrek-simetrik metrik koneksiyona göre M nin Ricci tensörü S nin kovaryant türevinin

$$(\overset{o}{\nabla}_X \overset{o}{S})(Z,W) = \overset{o}{\nabla}_X \overset{o}{S}(Z,W) - \overset{o}{S}(\overset{o}{\nabla}_X Z, W) - \overset{o}{S}(Z, \overset{o}{\nabla}_X W) \tag{4. 45}$$

biçiminde olduğunu biliyoruz. (4. 45) denkleminde W vektör alanı yerine $\xi$ alındığında

$$(\overset{o}{\nabla}_X \overset{o}{S})(Z,\xi) = \overset{o}{\nabla}_X \overset{o}{S}(Z,\xi) - \overset{o}{S}(\overset{o}{\nabla}_X Z, \xi) - \overset{o}{S}(Z, \overset{o}{\nabla}_X \xi)$$

olur. Buradan da (4. 8), (4. 10) ve (4. 22) denklemleri kullanıldığında

$$(\overset{o}{\nabla}_X \overset{o}{S})(Z,\xi) = (1-n)\overset{o}{\nabla}_X \eta(Z) - (1-n)\eta(\overset{o}{\nabla}_X Z) - \overset{o}{S}(Z, X - \eta(X)\xi) \tag{4. 46}$$

elde edilir.

(4. 46) denkleminde (4. 19) ile (4. 22) eşitlikleri kullanılarak gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$(\overset{o}{\nabla}_X \overset{o}{S})(Z,\xi) = (1-n)g(X,Z) - S(X,Z) - g(X,\varphi Z) \tag{4. 47}$$

bulunur. (4. 44) denklemi ile (4. 47) denklemlerinin sağ tarafları karşılaştırıldığında

$$\begin{aligned} &(1-n)g(X,Z) - S(X,Z) - g(X,\varphi Z) \\ &= -2n\alpha(X)\eta(Z) + (2-n)\eta(X)\alpha(Z) \\ &- \eta(X)\alpha(\varphi Z) + \alpha(\xi)S(X,Z) + \alpha(\xi)g(X,Z) \end{aligned} \tag{4. 48}$$

sonucuna ulaşılır. (4. 48) denkleminde $X = Z = \xi$ alınarak (3. 9) denklemi kullanıldığında

$$-4(n-1)\alpha(\xi) = 0$$

olup n >1 olduğundan buradan

$$\alpha(\xi) = 0 \tag{4. 49}$$

elde edilir.

Şimdi $\alpha$ nın M üzerindeki her bir vektör alanı için sıfıra eşit olduğunu gösterelim. (4. 42) denkleminde Z vektör alanı yerine $\xi$ konularak (4. 49) denklemi göz önüne alındığında

$$\begin{aligned} (\overset{o}{\nabla}_X \overset{o}{S})(\xi,W) &= 2\alpha(X)\overset{o}{S}(\xi,W) + \alpha(\overset{o}{R}(X,\xi)W) + \alpha(W)\overset{o}{S}(\xi,X) \\ &- \alpha(R(W,X)\xi) + \eta(X)\alpha(\varphi W) - \eta(W)\alpha(\varphi X) \end{aligned} \tag{4. 50}$$

bulunur.

(4. 50) denkleminde (4. 22) denklemi ile (4. 16) kullanıldığında

$$(\overset{o}{\nabla}_X \overset{o}{S})(\xi, W) = 2(1-n)\alpha(X)\eta(W) + \alpha(g(X,W)\xi - \eta(W)X - g(\varphi X, W)\xi + \eta(W)\varphi X)$$
$$+(1-n)\alpha(W)\eta(X) - \alpha(R(W,X)\xi) + \eta(X)\alpha(\varphi W) - \eta(W)\alpha(\varphi X)$$

olur.

Diğer taraftan, M bir Kenmotsu manifoldu olduğundan son denklemde (3. 8) eşitliği kullanılarak (4. 47) denklemi de göz önüne alındığında

$$(\overset{o}{\nabla}_X \overset{o}{S})(\xi, W) = -2n\alpha(X)\eta(W) + (2-n)\alpha(W)\eta(X) + \eta(X)\alpha(\varphi W) \qquad (4.\ 51)$$

elde edilir. Ayrıca (4. 51) denkleminde $Z = \xi$ olarak alındığında

$$(\overset{o}{\nabla}_X \overset{o}{S})(\xi, W) = \overset{o}{\nabla}_X \overset{o}{S}(\xi, W) - \overset{o}{S}(\overset{o}{\nabla}_X \xi, W) - \overset{o}{S}(\xi, \overset{o}{\nabla}_X W)$$

yazılabilir.

Buradan da (4. 8), (4. 10) ve (4. 22) denklemleri kullanıldığında son denklem

$$(\overset{o}{\nabla}_X \overset{o}{S})(\xi, W) = (1-n)g(X,W) - S(X,W) - g(\varphi X, W) \qquad (4.\ 52)$$

biçimine dönüşür. (4. 51) ve (4. 52) eşitliklerinin sağ tarafları karşılaştırıldığında

$$(1-n)g(X,W) - S(X,W) - g(\varphi X, W) \qquad (4.\ 53)$$
$$= -2n\alpha(X)\eta(W) + (2-n)\alpha(W)\eta(X) + \eta(X)\alpha(\varphi W)$$

elde edilir. (4. 53) denkleminde $W = \xi$ alınarak (4. 49) eşitliği kullanıldığında $\forall X \in \chi(M)$ için ;

$$\alpha(X) = 0$$

olduğu görülür. Ancak tanım gereği $\alpha \neq 0$ olduğundan bu durum varsayımla çelişir. Böylece çeyrek-simetrik metrik koneksiyona göre Chaki-pseudosimetrik Kenmotsu manifoldu olmadığı sonucuna ulaşılır. ■

# 5. KENMOTSU MANİFOLDLARININ BAZI ALTMANİFOLDLARI

Bu bölüm orijinal sonuçlar içermektedir. Bu bölümde Kenmotsu manifoldlarının altmanifoldları ele alınarak, birinci bölümde Kenmotsu manifoldunun bir altmanifoldunun ikinci temel formunun sırası ile rekürent, 2-rekürent ve genelleştirilmiş 2-rekürent olması durumlarında altmanifoldun total geodezik olduğu gösterilmiştir. Ayrıca paralel üçüncü temel forma sahip Kenmotsu manifoldunun bir altmanifoldunun da total geodezik olduğu sonucu elde edilmiştir. İkinci bölümde bir Kenmotsu uzay formun yarı-umbilik bir hiperyüzeyinin genelleştirilmiş yarı-Einstein olduğu gösterilmiştir. Son bölümde ise bir Kenmotsu manifoldunun bir altmanifoldunun pseudoparalel, Ricci-genelleştirilmiş pseudoparalel, 2-pseudoparalel ve Ricci-genelleştirilmiş 2-pseudoparalel olması durumları incelenmiştir.

**Önerme 5.1.** (2n+1)-boyutlu $\widetilde{M}$ Kenmotsu manifoldunun $\xi$ tanjant bir vektör alanı olmak üzere n-boyutlu bir altmanifoldu M olsun. Bu durumda $\forall X \in \chi(M)$ için;

$$\nabla_X \xi = X - \eta(X)\xi \tag{5. 1}$$

ve

$$h(X, \xi) = 0 \tag{5. 2}$$

dir [23].

**Önerme 5.2.** (2n+1)-boyutlu $\widetilde{M}$ Kenmotsu manifoldunun $\xi$ vektör alanı tanjant olacak biçimde, n-boyutlu bir altmanifoldu M olsun. M altmanifoldunun eğrilik tensörü R ve Ricci tensörü S olmak üzere $\forall X, Y \in \chi(M)$ için;

$$R(X,Y)\xi = \eta(X)Y - \eta(Y)X \tag{5. 3}$$

ve

$$S(Y,\xi) = -(n-1)\eta(Y) \tag{5. 4}$$

biçimindedir.

**İspat :** $\widetilde{M}$ Kenmotsu manifoldunun M altmanifoldunun eğrilik tensörünün (2. 22) denklemi gereği

$$\widetilde{R}(X, Y)Z = R(X, Y)Z + A_{h(X, Z)}Y - A_{h(Y, Z)}X$$

olduğunu biliyoruz. Buradan $Z = \xi$ olarak alındığında

$$\widetilde{R}(X, Y)\xi = R(X, Y)\xi + A_{h(X,\xi)}Y - A_{h(Y,\xi)}X$$

elde edilir. Son denklemde (5. 2) eşitliği kullanıldığında

$$\widetilde{R}(X, Y)\xi = R(X, Y)\xi$$

bulunur. Buradan da (3. 8) denklemi kullanıldığında

$$R(X, Y)\xi = \eta(X)Y - \eta(Y)X$$

elde edilir. Son denklemin her iki yanının W vektör alanı ile iç çarpımı alındığında

$$R(X, Y, \xi, W) = \eta(X)g(Y, W) - \eta(Y)g(X, W)$$

olur. Buradan da X ve W vektör alanlarına göre kontraksiyon yapıldığında

$$S(Y, \xi) = -(n-1)\eta(Y)$$

elde edilir. ■

**Önerme 5.3.** (2n+1)-boyutlu $\widetilde{M}$ Kenmotsu manifoldunun $\xi$ vektör alanı tanjant olacak biçimde n-boyutlu bir altmanifoldu M olsun. Bu durumda, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için;

$$g(\varphi X, \xi) = 0 \tag{5. 5}$$

ve

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \tag{5. 6}$$

eşitlikleri sağlanmaktadır [23].

### 5.1. Kenmotsu Manifoldlarının Rekürent Altmanifoldları

M. Kobayashi, [23] nolu makalesinde bir Kenmotsu manifoldun paralel ikinci temel forma sahip bir altmanifoldunun total geodezik olduğunu göstermiştir. Bu bölümde, bu sonucun bir genellemesi olarak bir Kenmotsu manifoldun sırasıyla rekürent, 2-rekürent ve genelleştirilmiş 2-rekürent ikinci temel forma sahip altmanifoldları ile paralel üçüncü temel forma sahip altmanifoldları incelenmiştir.

**Teorem 5.1.1.** (2n+1)-boyutlu $\tilde{M}$ Kenmotsu manifoldunun $\xi$ vektör alanı tanjant olacak biçimde n-boyutlu bir altmanifoldu M olsun. Bu durumda M nin ikinci temel formu h nın rekürent olması için gerek ve yeter koşul M nin total geodezik olmasıdır [37].

**İspat :** İkinci temel form h rekürent olduğundan (2. 9) denklemi yardımıyla $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için;

$$(\overline{\nabla}_X h)(Y, Z) = \phi(X)h(Y,Z) \tag{5. 7}$$

yazılabilir. Buradan (2. 19) denklemi kullanıldığında, (5. 7) denklemi

$$\begin{aligned} &\nabla^{\perp}_X h(Y,Z) - h(\nabla_X Y,Z) - h(Y,\nabla_X Z) \\ &= \phi(X)h(Y,Z) \end{aligned}$$

biçimine dönüşür. Son denklemde $Z = \xi$ alındığında

$$\nabla^{\perp}_X h(Y,\xi) - h(\nabla_X Y,\xi) - h(Y,\nabla_X \xi) = \phi(X)h(Y,\xi)$$

elde edilir. Buradan (5. 1) ve (5. 2) denklemleri kullanıldığında

$$h(Y, X - \eta(X)\xi) = 0$$

bulunur.

İkinci temel form h 2-lineer olduğundan, son denklem

$$h(X, Y) - \eta(X)h(Y, \xi) = 0$$

biçiminde yazılabilir. Buradan yeniden (5. 2) denklemi göz önüne alındığında

$$h(X, Y) = 0$$

elde edilir. Bu da M altmanifoldunun total geodezik olduğunu gösterir.

Tersine $\tilde{M}$ Kenmotsu manifoldunun M altmanifoldu total geodezik olsun. Bu durumda M nin ikinci temel formu h nın (5. 7) denklemini sağladığı görülmektedir. Bu da h nın rekürent olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

**Teorem 5.1.2.** (2n+1)-boyutlu $\tilde{M}$ Kenmotsu manifoldunun $\xi$ vektör alanı tanjant olacak biçimde n-boyutlu bir altmanifoldu M olsun. Bu durumda M nin paralel üçüncü temel forma sahip olması için gerek ve yeter koşul M nin total geodezik olmasıdır [37].

**İspat :** $\widetilde{M}$ Kenmotsu manifoldunun $\xi$ vektör alanına tanjant olacak biçimde bir M altmanifoldunu alalım. M, paralel üçüncü temel forma sahip olsun. Bu durumda (2. 34) yardımıyla $\forall$ X, Y, Z, W$\in \chi$(M) için;

$$(\overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y h)(Z,W) = 0 \tag{5. 8}$$

yazılabilir. (5. 8) denkleminde W = $\xi$ olarak alındığında

$$(\overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y h)(Z,\xi) = 0$$

olur. Buradan da (2. 30) eşitliği kullanıldığında

$$\begin{aligned} &\nabla^{\perp}_X((\overline{\nabla}_Y h)(Z,\xi)) - (\overline{\nabla}_Y h)(\nabla_X Z,\xi) \\ &-(\overline{\nabla}_X h)(Z,\nabla_Y \xi) - (\overline{\nabla}_{\nabla_X Y} h)(Z,\xi) = 0 \end{aligned} \tag{5. 9}$$

elde edilir. (5. 9) denkleminde (2. 19) eşitliği göz önüne alındığında

$$\begin{aligned} &\nabla^{\perp}_X(\nabla^{\perp}_Y h(Z,\xi) - h(\nabla_Y Z,\xi) - h(Z,\nabla_Y \xi)) \\ &-(\nabla^{\perp}_Y h(\nabla_X Z,\xi) - h(\nabla_Y \nabla_X Z,\xi) - h(\nabla_X Z,\nabla_Y \xi)) \\ &-(\nabla^{\perp}_X h(Z,\nabla_Y \xi) - h(\nabla_X Z,\nabla_Y \xi) - h(Z,\nabla_X \nabla_Y \xi)) \\ &-(\nabla^{\perp}_{\nabla_X Y} h(Z,\xi) - h(\nabla_{\nabla_X Y} Z,\xi) - h(Z,\nabla_{\nabla_X Y} \xi)) = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan (5.2) eşitliği kullanıldığında son denklem

$$\begin{aligned} &-\nabla^{\perp}_X h(Z,\nabla_Y \xi) + h(\nabla_X Z,\nabla_Y \xi) \\ &-\nabla^{\perp}_X h(Z,\nabla_Y \xi) + h(\nabla_X Z,\nabla_Y \xi) \\ &+h(Z,\nabla_X \nabla_Y \xi) + h(Z,\nabla_{\nabla_X Y} \xi) = 0 \end{aligned} \tag{5. 10}$$

biçimine dönüşür. (5. 10) denkleminde (5. 1) eşitliği göz önüne alındığında

$$\begin{aligned} &-2\nabla^{\perp}_X h(Z, Y - \eta(Y)\xi) + 2h(\nabla_X Z, Y - \eta(Y)\xi) \\ &+h(Z,\nabla_X (Y - \eta(Y)\xi)) + h(Z,\nabla_X Y - \eta(\nabla_X Y)\xi) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da ikinci temel form h nın 2-lineerliği göz önüne alınarak son denklem (5. 2) yardımıyla düzenlendiğinde

$$-2\nabla^{\perp}_X h(Y,Z) + 2h(\nabla_X Z, Y) + 2h(Z,\nabla_X Y) - \eta(Y)h(Z,\nabla_X \xi) = 0$$

bulunur. Buradan tekrar (5. 1) eşitliği kullanıldığında

$$-2\nabla^{\perp}_X h(Y,Z) + 2h(\nabla_X Z, Y) + 2h(Z,\nabla_X Y) - \eta(Y)h(X,Z) = 0 \tag{5. 11}$$

olur. (5. 11) denkleminde Y = $\xi$ alındığında

$$-2\nabla^{\perp}_X h(\xi,Z) + 2h(\nabla_X Z,\xi) + 2h(Z,\nabla_X \xi) - h(X,Z) = 0$$

yazılabilir.

Buradan da (5. 1) ile (5. 2) eşitlikleri göz önüne alındığında

$$2h(Z, X - \eta(X)\xi) - h(X, Z) = 0$$

bulunur. Son denklemde gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$h(X, Z) = 0$$

elde edilir. Bu da bize M altmanifoldunun total geodezik olduğunu gösterir.

Tersine, eğer $\widetilde{M}$ Kenmotsu manifoldunun bir M altmanifoldu total geodezik olduğunda (5. 8) denkleminin sağlandığı görülmektedir. Bu da bize M nin paralel üçüncü temel forma sahip olduğunu gösterir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur. ■

**Sonuç 5.1.3.** (2n+1)-boyutlu $\widetilde{M}$ Kenmotsu manifoldunun $\xi$ vektör alanı tanjant olacak biçimde n-boyutlu bir altmanifoldu M olsun. Bu durumda M nin ikinci temel formu h nın 2-rekürent olması için gerek ve yeter koşul M nin total geodezik olmasıdır [37].

**İspat :** $\widetilde{M}$ Kenmotsu manifoldunun M altmanifoldunun ikinci temel formu 2-rekürent olsun. Bu durumda (2. 10) denklemi yardımıyla

$$(\overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y h)(Z, W) = \phi(X, Y) h(Z, W) \qquad (5.\ 12)$$

yazılabilir. (5. 12) denkleminde $W = \xi$ alındığında

$$(\overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y h)(Z, \xi) = \phi(X, Y) h(Z, \xi)$$

elde edilir. Buradan (5. 2) denklemi kullanıldığında son denklem

$$(\overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y h)(Z, \xi) = 0$$

biçimine dönüşür. Buradan da Teorem 5.1.2 nin ispatından yararlanıldığında

$$h(X, Z) = 0$$

bulunur. Bu da bize M altmanifoldunun total geodezik olduğunu gösterir.

Teoremin tersi ise aşikardır. ■

**Teorem 5.1.4.** (2n+1)-boyutlu $\widetilde{M}$ Kenmotsu manifoldunun $\xi$ vektör alanı tanjant olacak biçimde n-boyutlu bir altmanifoldu olsun. Bu durumda M nin ikinci temel formu h nın genelleştirilmiş 2-rekürent olması için gerek ve yeter koşul M nin total geodezik olmasıdır [37].

**İspat :** M nin ikinci temel formu h genelleştirilmiş 2-rekürent olduğundan (2. 11) denklemi yardımıyla

$$(\overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y h)(Z, W) = \psi(X, Y)h(Z, W) + \phi(X)(\overline{\nabla}_Y h)(Z, W) \tag{5. 13}$$

yazılabilir. (5. 13) denkleminde W yerine $\xi$ konularak, (5. 2) eşitliği göz önüne alındığında

$$(\overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y h)(Z, \xi) = \phi(X)(\overline{\nabla}_Y h)(Z, \xi) \tag{5. 14}$$

elde edilir. Buradan (2. 19) ile (2. 30) denklemleri kullanıldığında

$$\begin{aligned} &\nabla_X^{\perp}((\overline{\nabla}_Y h)(Z,\xi)) - (\overline{\nabla}_Y h)(\nabla_X Z, \xi) \\ &-(\overline{\nabla}_X h)(Z, \nabla_Y \xi) - (\overline{\nabla}_{\nabla_X Y} h)(Z, \xi) \\ &= \phi(X)[\nabla_Y^{\perp} h(Z,\xi) - h(\nabla_Y Z, \xi) - h(Z, \nabla_Y \xi)] \end{aligned} \tag{5. 15}$$

bulunur. (5. 15) denkleminde yeniden (2. 19) eşitliği kullanılarak (5. 1) ve (5. 2) denklemleri göz önüne alındığında

$$\begin{aligned} &\nabla_X^{\perp}(\nabla_Y^{\perp} h(Z,\xi) - h(\nabla_Y Z, \xi) - h(Z, \nabla_Y \xi)) \\ &-(\nabla_Y^{\perp} h(\nabla_X Z, \xi) - h(\nabla_Y \nabla_X Z, \xi) - h(\nabla_X Z, \nabla_Y \xi)) \\ &-(\nabla_X^{\perp} h(Z, \nabla_Y \xi) - h(\nabla_X Z, \nabla_Y \xi) - h(Z, \nabla_X \nabla_Y \xi)) \\ &-(\nabla_{\nabla_X Y}^{\perp} h(Z,\xi) - h(\nabla_{\nabla_X Y} Z, \xi) - h(Z, \nabla_{\nabla_X Y} \xi)) \\ &= -\phi(X)h(Y, Z) \end{aligned} \tag{5. 16}$$

elde edilir. Buradan tekrar (5. 1) ve (5. 2) eşitlikleri kullanıldığında (5. 16) denklemi

$$\begin{aligned} &-2\nabla_X^{\perp} h(Y, Z) + 2h(\nabla_X Z, Y) + 2h(Z, \nabla_X Y) - \eta(Y)h(X, Z) \\ &= -\phi(X)h(Y, Z) \end{aligned} \tag{5. 17}$$

biçimine dönüşür. (5. 17) denkleminde $Y = \xi$ alınarak benzer şekilde (5. 1) ve (5. 2) eşitliklerinden yararlanıldığında

$$h(X, Z) = 0$$

olup, buradan da $\widetilde{M}$ Kenmotsu manifoldunun bir M altmanifoldunun total geodezik olduğu görülmektedir.

Tersine, M altmanifoldu total geodezik olarak alındığında (5. 13) denkleminin sağlandığı ve dolayısıyla M nin ikinci temel formu h nın genelleştirilmiş 2-rekürent olduğu görülmektedir. Bu da teoremin ispatını bitirir. ■

**Tanım 5.1.5.** $\{\tilde{\varphi}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{g}\}$ yapısı ile verilen $\tilde{M}$ (2m+1)-boyutlu hemen hemen değme metrik manifoldunun (2n+1)-boyutlu bir altmanifoldu M olsun. Eğer, $\tilde{M}$ manifoldu üzerinde M manifolduna teğet bir $\tilde{\xi}$ vektör alanı var ve M nin her noktasında M manifolduna teğet X vektör alanı için M manifolduna teğet bir $\tilde{\varphi}X$ vektör alanı var ise M manifolduna $\tilde{M}$ manifoldunun *invaryant altmanifoldu* adı verilir [40].

$\tilde{M}$ manifoldunun invaryant altmanifoldu M üzerinde

$$\tilde{\varphi} = \varphi, \qquad \tilde{\xi} = \xi, \qquad \tilde{\eta} = \eta$$

alınabilir. Dolayısıyla $\{\tilde{M}, \tilde{\varphi}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{g}\}$ hemen hemen değme metrik manifold ise M de $\{M, \varphi, \xi, \eta, g\}$ indirgenmiş metrik yapısına göre bir hemen hemen değme metrik manifolddur.

**Örnek 5.1.6.** $\mathbb{C}P^m(c)$, sabit $c > 0$ kesitsel eğriliğine sahip m-boyutlu kompleks projektif uzay olsun. $m > n$ olmak üzere, aynı kesitsel eğriliğe sahip her $\mathbb{C}P^n(c)$ kompleks projektif uzay, $\mathbb{C}P^m(c)$ nin invaryant, total geodezik bir altmanifoldudur. Benzer şekilde sırasıyla c = 0 ve c<0 sabit kesitsel eğriliklerine sahip kompleks uzay $\mathbb{C}^n$ ve birim disk $D^n$, aynı kesitsel eğriliklere sahip $\mathbb{C}^m$ ve $D^m$ nin invaryant, total geodezik altmanifoldudurlar [41].

Şimdi $\mathbb{R}$ üzerinde pozitif tanımlı, $f(t) = ce^t$ diferensiyellenebilir fonksiyonunu alalım. Bu durumda, $\mathbb{R} \times_f \mathbb{C}P^n(c)$, $\mathbb{R} \times_f \mathbb{C}P^m(c)$ Kenmotsu manifoldunun; $\mathbb{R} \times_f \mathbb{C}^n$, $\mathbb{R} \times_f \mathbb{C}^m$ nin ve $\mathbb{R} \times_f D^n$, $\mathbb{R} \times_f D^m$ nin invaryant, total geodezik altmanifoldu olurlar.

**Örnek 5.1.7.** $\mathbb{C}P^{n+p}(2c)$ kompleks projektif uzayının $p = \dfrac{n(n+1)}{2}$ olmak üzere, invaryant, total geodezik olmayan bir altmanifoldu $\mathbb{C}P^n(c)$ olsun [41].

Böylece $\mathbb{R} \times_f \mathbb{C}P^n(c)$, $\mathbb{R}$ üzerindeki pozitif tanımlı $f(t) = ce^t$ diferensiyellenebilir fonksiyonu için $\mathbb{R} \times_f \mathbb{C}P^{n+p}(2c)$ Kenmotsu manifoldunun total geodezik olmayan, invaryant bir altmanifoldu olur.

## 5.2. Kenmotsu Uzay Formun Yarı-Umbilik Hiperyüzeyleri

Bu bölümde $\widetilde{M}(c)$ Kenmotsu uzay formunun yarı-umbilik bir hiperyüzeyinin, bir genelleştirilmiş yarı-Einstein hiperyüzey olduğu gösterilmiştir.

**Teorem 5.2.1.** (2n+1)-boyutlu $\widetilde{M}(c)$ Kenmotsu uzay formunun $\xi$ vektör alanı tanjant olacak biçimde yarı-umbilik bir hiperyüzeyi M olsun. Bu durumda M, bir genelleştirilmiş yarı-Einstein hiperyüzeydir [37].

**İspat :** $\widetilde{M}(c)$ bir Kenmotsu uzay form olduğundan, (3. 10) denkleminin her iki yanının $W \in \chi(M)$ ile iç çarpımı alındığında

$$\begin{aligned}\tilde{R}(X,Y,Z,W) = \frac{(c-3)}{4}&[g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W)]\\ &+\frac{(c+1)}{4}[\eta(X)\eta(Z)g(Y,W) - \eta(Y)\eta(Z)g(X,W)\\ &+\eta(Y)\eta(W)g(X,Z) - \eta(X)\eta(W)g(Y,Z)\\ &+g(X,\varphi Z)g(\varphi Y,W) - g(Y,\varphi Z)g(\varphi X,W)\\ &+2g(X,\varphi Y)g(\varphi Z,W)] \qquad (5.\ 18)\end{aligned}$$

olduğu görülür. M, $\widetilde{M}(c)$ Kenmotsu uzay formunun bir hiperyüzeyi olduğundan (2. 40) denklemi yardımıyla bir $N \in \chi^{\perp}(M)$ için

$$h(X,Z) = \widetilde{H}(X,Z)N \qquad (5.\ 19)$$

yazılabilir. (5. 19) eşitliği Gauss denkleminde yerine yazıldığında

$$\widetilde{R}(X,Y,Z,W) = R(X,Y,Z,W) - \widetilde{H}(Y,Z)\widetilde{H}(X,W) + \widetilde{H}(X,Z)\widetilde{H}(Y,W) \qquad (5.\ 20)$$

elde edilir.

Diğer taraftan, M yarı-umbilik bir hiperyüzey olduğundan (2. 39) denklemi (5. 20) de yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}\tilde{R}(X,Y,Z,W) = R(X,Y,Z,W)&\\ &-[(ag(Y,Z)+b\omega(Y)\omega(Z))(ag(X,W)+b\omega(X)\omega(W))]\\ &+[(ag(X,Z)+b\omega(X)\omega(Z))(ag(Y,W)+b\omega(Y)\omega(W))] \qquad (5.\ 21)\end{aligned}$$

bulunur.

Buradan (5. 18) denklemi yardımıyla (5. 21) denklemi

$$\frac{(c-3)}{4}[g(Y,Z)g(X,W)-g(X,Z)g(Y,W)]+\frac{(c+1)}{4}[\eta(X)\eta(Z)g(Y,W)$$
$$-\eta(Y)\eta(Z)g(X,W)+\eta(Y)\eta(W)g(X,Z)-\eta(X)\eta(W)g(Y,Z)$$
$$+g(X,\varphi Z)g(\varphi Y,W)-g(Y,\varphi Z)g(\varphi X,W)+2g(X,\varphi Y)g(\varphi Z,W)]$$
$$=R(X,Y,Z,W)-[(ag(Y,Z)+b\omega(Y)\omega(Z))(ag(X,W)+b\omega(X)\omega(W))]$$
$$+[(ag(X,Z)+b\omega(X)\omega(Z))(ag(Y,W)+b\omega(Y)\omega(W))] \tag{5. 22}$$

biçimine dönüşür. (5. 22) denklemi düzenlendiğinde

$$\frac{(c-3)}{4}[g(Y,Z)g(X,W)-g(X,Z)g(Y,W)]+\frac{(c+1)}{4}[\eta(X)\eta(Z)g(Y,W)$$
$$-\eta(Y)\eta(Z)g(X,W)+\eta(Y)\eta(W)g(X,Z)-\eta(X)\eta(W)g(Y,Z)$$
$$+g(X,\varphi Z)g(\varphi Y,W)-g(Y,\varphi Z)g(\varphi X,W)+2g(X,\varphi Y)g(\varphi Z,W)]$$
$$=R(X,Y,Z,W)+a^2[g(X,Z)g(Y,W)-g(Y,Z)g(X,W)]$$
$$+ab[g(X,Z)\omega(Y)\omega(W)+g(Y,W)\omega(X)\omega(Z)$$
$$-g(Y,Z)\omega(X)\omega(W)-g(X,W)\omega(Y)\omega(Z)]$$

elde edilir.

Buradan da X ve W ya göre kontraksiyon yapıldığında

$$\frac{(c-3)}{4}[2ng(Y,Z)-g(Y,Z)]+\frac{(c+1)}{4}[\eta(Y)\eta(Z)-2n\eta(Y)\eta(Z)$$
$$+\eta(Y)\eta(Z)-g(Y,Z)+g(\varphi Y,\varphi Z)g(,W)+2g(\varphi Y,\varphi Z)]$$
$$=S(Y,Z)+a^2[g(Y,Z)-2ng(Y,Z)]+ab[\omega(Y)\omega(Z)$$
$$+\omega(Y)\omega(Z)-g(Y,Z)-2n\omega(Y)\omega(Z)] \tag{5. 23}$$

bulunur. (5. 23) denkleminde gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$S(Y,Z)=[(\frac{c-3}{4})(2n-1)+(\frac{c+1}{2})+a^2(2n-1)+ab]g(Y,Z)$$
$$-(\frac{c+1}{4})(2n+1)\eta(Y)\eta(Z)+2ab(n-1)\omega(Y)\omega(Z)$$

olur. Son denklem bize (2. 3) eşitliği yardımıyla M nin bir genelleştirilmiş yarı-Einstein hiperyüzey olduğunu gösterir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur. ■

### 5.3. Kenmotsu Manifoldlarının Pseudoparalel Altmanifoldları

Bu bölümde bir Kenmotsu manifoldun bir altmanifoldunun pseudoparalel, Ricci-genelleştirilmiş pseudoparalel, 2-pseudoparalel ve Ricci-genelleştirilmiş 2-pseudoparalel olması durumları incelenmiştir.

**Teorem 5.3.1.** $\widetilde{M}$ Kenmotsu manifoldunun $\xi$ vektör alanı tanjant olacak biçimde n-boyutlu bir altmanifoldu M olsun. Eğer M pseudoparalel ise bu durumda M ya total geodeziktir yada M üzerinde $L=-1$ dir.

**İspat :** $\widetilde{M}$ Kenmotsu manifoldunun pseudoparalel bir altmanifoldu M olsun. Bu durumda (2. 28) denklemi yardımıyla $\forall X,Y,U,V \in \chi(M)$ için;

$$(\overline{R}(X,Y)\cdot h)(U,V) = LQ(g,h)(U,V;X,Y) \tag{5. 24}$$

yazılabilir.

Buradan (2. 8) ve (2. 26) denklemleri göz önüne alındığında (5. 24) denklemi

$$\begin{aligned} &R^{\perp}(X,Y)h(U,V) - h(R(X,Y)U,V) - h(U,R(X,Y)V) \\ &= -L[h((X\wedge Y)U,V) + h(U,(X\wedge Y)V)] \end{aligned} \tag{5. 25}$$

biçimine dönüşür. (5. 25) denkleminde $X=V=\xi$ olarak alındığında

$$\begin{aligned} &R^{\perp}(\xi,Y)h(U,\xi) - h(R(\xi,Y)U,\xi) - h(U,R(\xi,Y)\xi) \\ &= -L[h((\xi\wedge Y)U,\xi) + h(U,(\xi\wedge Y)\xi)] \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan (5. 2) denklemi yardımıyla

$$h(U,R(\xi,Y)\xi) = L\,h(U,(\xi\wedge Y)\xi) \tag{5. 26}$$

bulunur. (5. 26) denkleminde (2. 5) (5 3) eşitlikleri kullanıldığında

$$h(U,Y-\eta(Y)\xi) = Lh(U,\eta(Y)\xi - Y)$$

olup buradan da h ikinci temel formun 2-lineerlik özelliği kullanıldığında

$$h(U,Y) - \eta(Y)h(U,\xi) = L[\eta(Y)h(U,\xi) - h(U,Y)] \tag{5. 27}$$

elde edilir. (5. 27) denkleminde yeniden (5. 2) eşitliği kullanıldığında

$$(L+1)h(U,Y) = 0$$

olur. Buradan da h(U, Y) = 0 yada (L+1) = 0 bulunur. Bu da bize M nin ya total geodezik olduğunu yada M üzerinde $L=-1$ eşitliğinin sağlandığını gösterir. ■

Böylece, Teorem 5.3.1 den yararlanılarak aşağıdaki sonuç verilebilir:

**Sonuç 5.3.2.** $\widetilde{M}$ Kenmotsu manifoldunun $\xi$ vektör alanı tanjant olacak biçimde n-boyutlu bir altmanifoldu M olsun. Eğer M semiparalel ise bu durumda M total geodeziktir.

**İspat:** $\widetilde{M}$ Kenmotsu manifoldunun semiparalel bir altmanifoldu M olsun. Bu durumda (2. 27) denklemi yardımıyla $\forall X, Y, U, V \in \chi(M)$ için;

$$(\overline{R}(X,Y)\cdot h)(U,V)=0 \tag{5. 28}$$

yazılabilir. Buradan (2. 26) denklemi yardımıyla (5. 28) denklemi

$$R^{\perp}(X,Y)h(U,V)-h(R(X,Y)U,V)-h(U,R(X,Y)V)=0$$

biçimine dönüşür. Son denklemde X ve V vektör alanları yerine $\xi$ alınarak Teorem 5.3.1 in ispatından yararlanıldığında

$$h(U,Y)=0$$

bulunur. Bu da bize M altmanifoldunun total geodezik olduğunu gösterir. ■

**Teorem 5.3.3.** $\widetilde{M}$ Kenmotsu manifoldunun $\xi$ vektör alanı tanjant olacak biçimde n-boyutlu bir altmanifoldu M olsun. Eğer M Ricci-genelleştirilmiş pseudoparalel ise bu durumda M ya total geodeziktir yada M üzerinde $L=\dfrac{1}{n-1}$ dir.

**İspat :** $\widetilde{M}$ Kenmotsu manifoldunun Ricci-genelleştirilmiş pseudoparalel altmanifoldu M olsun. Bu durumda (2.29) denklemi yardımıyla $\forall X, Y, U, V \in \chi(M)$ için;

$$(\overline{R}(X,Y)\cdot h)(U,V)=LQ(S,h)(U,V;X,Y) \tag{5. 29}$$

yazılabilir. (5. 29) denkleminde (2. 8) ve (2. 26) denklemleri kullanıldığında

$$\begin{aligned}&R^{\perp}(X,Y)h(U,V)-h(R(X,Y)U,V)-h(U,R(X,Y)V)\\&=-L[h((X\wedge_S Y)U,V)+h(U,(X\wedge_S Y)V)]\end{aligned} \tag{5. 30}$$

elde edilir. Burada X ve V yerine $\xi$ alındığında (5. 32) denklemi

$$\begin{aligned}&R^{\perp}(\xi,Y)h(U,\xi)-h(R(\xi,Y)U,\xi)-h(U,R(\xi,Y)\xi)\\&=-L[h((\xi\wedge_S Y)U,\xi)+h(U,(\xi\wedge_S Y)\xi)]\end{aligned}$$

biçimine dönüşür.

Buradan da (5. 2) yardımıyla

$$h(U, R(\xi, Y)\xi) = Lh(U, (\xi \wedge_S Y)\xi) \tag{5. 31}$$

elde edilir. (5. 31) denkleminde (2. 5) ve (5. 3) eşitlikleri ile h ikinci temel formun 2-lineerliği kullanıldığında

$$h(U, Y) - \eta(Y)h(U, \xi) = L[S(Y, \xi)h(U, \xi) - S(\xi, \xi)h(U, Y)]$$

bulunur. Son denklemde (5. 2) eşitliği göz önüne alındığında

$$h(U, Y) = -LS(\xi, \xi)h(U, Y)$$

olup buradan da (5. 4) denklemi yardımıyla

$$[L(n-1) - 1]h(U, Y) = 0$$

elde edilir. Bu da bize M nin ya total geodezik olduğunu yada M üzerinde $L = \dfrac{1}{n-1}$ eşitliğinin sağlandığını gösterir. Böylece teoremin ispatı tamamlanır. ■

**Teorem 5.3.4.** $\widetilde{M}$ Kenmotsu manifoldunun $\xi$ vektör alanı tanjant olacak biçimde n-boyutlu bir altmanifoldu M olsun. Eğer M 2-pseudoparalel ise bu durumda M ya total geodeziktir yada M üzerinde $L = -1$ dir.

**İspat :** $\widetilde{M}$ Kenmotsu manifoldunun 2-pseudoparalel bir altmanifoldu M olsun. Bu durumda (2. 35) denklemi yardımıyla $\forall X, Y, U, V, W \in \chi(M)$ için;

$$(\overline{R}(X, Y) \cdot \overline{\nabla} h)(U, V, W) = LQ(g, \overline{\nabla} h)(U, V, W; X, Y) \tag{5. 32}$$

yazılabilir. (2. 8) ve (2. 33) denklemleri kullanıldığında (5. 32) denklemi

$$\begin{aligned} & R^{\perp}(X, Y)(\overline{\nabla}_U h)(V, W) - (\overline{\nabla}_{R(X,Y)U} h)(V, W) \\ & -(\overline{\nabla}_U h)(R(X, Y)V, W) - (\overline{\nabla}_U h)(V, R(X, Y)W) \\ & = -L[(\overline{\nabla}_{(X \wedge Y)U} h)(V, W) + (\overline{\nabla}_U h)((X \wedge Y)V, W) + (\overline{\nabla}_U h)(V, (X \wedge Y)W)] \end{aligned}$$

biçimine dönüşür. Son denklemde $X = V = W = \xi$ alındığında

$$(\overline{\nabla}_{R(\xi,Y)U} h)(\xi, \xi) + (\overline{\nabla}_U h)(R(\xi, Y)\xi, \xi) + (\overline{\nabla}_U h)(\xi, R(\xi, Y)\xi)$$

$$= L[(\overline{\nabla}_{(\xi \wedge Y)U} h)(\xi, \xi) + (\overline{\nabla}_U h)((\xi \wedge Y)\xi, \xi) + (\overline{\nabla}_U h)(\xi, (\xi \wedge Y)\xi)]$$

elde edilir.

Buradan da (2. 5) ve (2. 31) denklemleri kullanıldığında

$$\begin{aligned}
&\nabla^{\perp}_{R(\xi,Y)U}h(\xi,\xi)-h(\nabla_{R(\xi,Y)U}\xi,\xi)-h(\xi,\nabla_{R(\xi,Y)U}\xi)\\
&+\nabla^{\perp}_{U}h(R(\xi,Y)\xi,\xi)-h(\nabla_{U}R(\xi,Y)\xi,\xi)-h(R(\xi,Y)\xi,\nabla_{U}\xi)\\
&+\nabla^{\perp}_{U}h(\xi,R(\xi,Y)\xi)-h(\nabla_{U}\xi,R(\xi,Y)\xi)-h(\xi,\nabla_{U}R(\xi,Y)\xi)\\
&=L[\nabla^{\perp}_{(\xi\wedge Y)U}h(\xi,\xi)-h(\nabla_{(\xi\wedge Y)U}\xi,\xi)-h(\xi,\nabla_{(\xi\wedge Y)U}\xi)\\
&+\nabla^{\perp}_{U}h((\xi\wedge Y)\xi,\xi)-h(\nabla_{U}(\xi\wedge Y)\xi,\xi)-h((\xi\wedge Y)\xi,\nabla_{U}\xi)\\
&+\nabla^{\perp}_{U}h(\xi,(\xi\wedge Y)\xi)-h(\nabla_{U}\xi,(\xi\wedge Y)\xi)-h(\xi,\nabla_{U}(\xi\wedge Y)\xi)
\end{aligned} \qquad (5.\ 33)$$

yazılabilir. (5. 33) denkleminde (5. 2) eşitliği göz önüne alındığında

$$h(R(\xi,Y)\xi,\nabla_{U}\xi)=Lh((\xi\wedge Y)\xi,\nabla_{U}\xi)$$

bulunur. Buradan (2. 5) ve (5. 3) denklemleri ile (5. 1) eşitliği kullanıldığında

$$h(Y-\eta(Y)\xi,U-\eta(U)\xi)=Lh(\eta(Y)\xi-Y,U-\eta(U)\xi) \qquad (5.\ 34)$$

elde edilir. (5. 34) denkleminde, h ikinci temel formun 2-lineerlik özelliği kullanılarak (5. 2) denklemi göz önüne alındığında

$$(L+1)h(U,Y)=0$$

olduğu görülmektedir. Bu da bize M nin ya total geodezik olduğunu yada M üzerinde $L=-1$ eşitliğinin sağlandığını göstermektedir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur. ■

Teorem 5.3.4 yardımı ile aşağıdaki sonuç verilebilir:

**Sonuç 5.3.5.** $\widetilde{M}$ Kenmotsu manifoldunun $\xi$ vektör alanı tanjant olacak biçimde n-boyutlu bir altmanifoldu M olsun. Eğer M 2-semiparalel ise bu durumda M total geodeziktir.

**İspat:** $\widetilde{M}$ Kenmotsu manifoldunun 2-semiparalel bir altmanifoldu M olsun. Bu durumda (2. 34) denklemi yardımıyla $\forall X,Y,U,V,W\in\chi(M)$ için;

$$(\overline{R}(X,Y)\cdot\overline{\nabla}h)(U,V,W)=0 \qquad (5.\ 35)$$

yazılabilir.

Buradan (2. 33) denklemi yardımıyla (5. 35) denkleminden

$$R^{\perp}(X,Y)(\overline{\nabla}_U h)(V,W)-(\overline{\nabla}_{R(X,Y)U} h)(V,W)$$
$$-(\overline{\nabla}_U h)(R(X,Y)V,W)-(\overline{\nabla}_U h)(V,R(X,Y)W)=0$$

elde edilir. Son denklemde X, V ve W vektör alanları yerine $\xi$ alınarak Teorem 5.3.4 ün ispatından yararlanıldığında

$$h(U,Y)=0$$

bulunur. Bu da bize M altmanifoldunun total geodezik olduğu sonucunu verir. ■

**Teorem 5.3.6.** $\widetilde{M}$ Kenmotsu manifoldunun $\xi$ vektör alanı tanjant olacak biçimde n-boyutlu bir altmanifoldu M olsun. Eğer M Ricci-genelleştirilmiş 2-pseudoparalel ise bu durumda M ya total geodeziktir yada M üzerinde $L=\dfrac{1}{n-1}$ dir.

**İspat :** $\widetilde{M}$ Kenmotsu manifoldunun Ricci-genelleştirilmiş 2-pseudoparalel bir altmanifoldu M olsun. Bu durumda (2. 36) denklemi yardımıyla $\forall X,Y,U,V,W\in\chi(M)$ için;

$$(\overline{R}(X,Y)\cdot\overline{\nabla}h)(U,V,W)=LQ(S,\overline{\nabla}h)(U,V,W;X,Y) \qquad (5.\ 36)$$

yazılabilir. Buradan (2. 8) ve (2. 33) denklemleri kullanıldığında (5. 36) dan

$$R^{\perp}(X,Y)(\overline{\nabla}_U h)(V,W)-(\overline{\nabla}_{R(X,Y)U} h)(V,W)$$
$$-(\overline{\nabla}_U h)(R(X,Y)V,W)-(\overline{\nabla}_U h)(V,R(X,Y)W)$$
$$=-L[(\overline{\nabla}_{(X\wedge_S Y)U} h)(V,W)+(\overline{\nabla}_U h)((X\wedge_S Y)V,W)+(\overline{\nabla}_U h)(V,(X\wedge_S Y)W)]$$

elde edilir.

Son denklemde $X=V=W=\xi$ alındığında

$$(\overline{\nabla}_{R(\xi,Y)U} h)(\xi,\xi)+(\overline{\nabla}_U h)(R(\xi,Y)\xi,\xi)+(\overline{\nabla}_U h)(\xi,R(\xi,Y)\xi)$$
$$=L[(\overline{\nabla}_{(\xi\wedge_S Y)U} h)(\xi,\xi)+(\overline{\nabla}_U h)((\xi\wedge_S Y)\xi,\xi)+(\overline{\nabla}_U h)(\xi,(\xi\wedge_S Y)\xi)]$$

bulunur. Buradan da (2. 5) ve (2. 19) denklemleri kullanılarak Teorem 5.3.4 ün ispatı göz önüne alındığında

$$h(R(\xi,Y)\xi,\nabla_U\xi)=Lh((\xi\wedge_S Y)\xi,\nabla_U\xi)$$

sonucuna ulaşılır.

Son denklemde (2. 5) ve (5. 1) denklemleri ile (5. 3) eşitliği kullanıldığında

$$h(Y-\eta(Y)\xi, U-\eta(U)\xi) = Lh(S(Y,\xi)\xi - S(\xi,\xi)Y, U-\eta(U)\xi) \qquad (5.\ 37)$$

elde edilir. (5. 37) denkleminde, h ikinci temel formun 2-lineerlik özelliği kullanılarak (5. 2) ve (5. 4) denklemleri göz önüne alındığında

$$[L(n-1)-1]h(U,Y)=0$$

olduğu görülmektedir. Bu da bize M nin ya total geodezik olduğunu yada M üzerinde $L=\dfrac{1}{n-1}$ eşitliğinin sağlandığını göstermektedir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur. ■

**Sonuç 5.3.7.** $\tilde{M}$ Kenmotsu manifoldunun düzlemsel konformal, invaryant bir altmanifoldu M olsun. M, $\tilde{M}$ Kenmotsu manifoldunun invaryant bir altmanifoldu olduğundan M nin kendisi de yine bir Kenmotsu manifold olur [22]. Ayrıca düzlemsel konformal bir Kenmotsu manifoldu $c=-1$ sabit kesitsel eğriliğine sahip olup $H^{2n+1}(-1)$ hiperbolik uzayına lokal olarak izometriktir [30]. Böylece M altmanifoldu üzerinde

$$\bar{R}\cdot h = -Q(g,h),$$

$$\bar{R}\cdot h = \frac{1}{2n}Q(S,h),$$

$$\bar{R}\cdot\bar{\nabla}h = -Q(g,\bar{\nabla}h)$$

ve

$$\bar{R}\cdot\bar{\nabla}h = \frac{1}{2n}Q(S,\bar{\nabla}h)$$

eşitlikleri sağlanır.

# 6. KENMOTSU UZAY FORMUN İNVARYANT VE ANTİ-İNVARYANT ALTMANİFOLDLARI

Bu bölümde bir Kenmotsu uzay formun invaryant ve anti-invaryant altmanifoldları ele alınmıştır. Birinci bölümde bir Kenmotsu uzay formun invaryant bir altmanifoldunun ikinci temel formunun boyunun karesinin Laplas denklemi bulunarak altmanifoldun pseudoparalel ve Ricci-genelleştirilmiş pseudoparalel olması durumları incelenmiştir. İkinci ve üçüncü bölümlerde ise Kenmotsu uzay formun anti-invaryant bir altmanifoldunun $\xi$ vektör alanının tanjant ve normal olması durumları sırasıyla göz önüne alınarak ikinci temel formun boyunun karesinin Laplas denklemleri hesaplanmış olup bu durumlarda altmanifoldun pseudoparalel ve Ricci-genelleştirilmiş pseudoparalel olması durumları incelenmiştir.

## 6. 1. İkinci Temel Formun Laplas Hesabı

**Tanım 6.1.1.** $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ m-boyutlu Riemann manifoldunun n-boyutlu bir altmanifoldu (M, g) olsun. M üzerindeki bir $x \in M$ için $T_xM$ nin lokal ortonormal $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ bazını alalım. M nin ikinci temel formu h için, M üzerinde

$$\|h\|^2 = \sum_{i,j} g(h(e_i, e_j), h(e_i, e_j)) \tag{6. 1}$$

ve

$$A_{h(e_i,e_j)}e_k = \sum_{\alpha} g(A_\alpha e_i, e_j)A_\alpha e_k \tag{6. 2}$$

eşitlikleri sağlanmaktadır [8].

**Tanım 6.1.2.** $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ m-boyutlu Riemann manifoldunun n-boyutlu bir altmanifoldu (M, g) olsun. $\{e_1,...,e_n\}$ $T_xM$ de, $\{e_{n+1},...,e_m\}$ $T_x^{\perp}M$ de bir ortonormal baz olsun.

M nin ikinci temel formu h nın boyunun karesinin *Laplas denklemi*

$$\frac{1}{2}\Delta\|h\|^2 = g(\overline{\nabla}^2 h, h) + \|\overline{\nabla} h\|^2 \tag{6. 3}$$

biçiminde tanımlanır [40].

Böylece (2. 23) Codazzi denklemi yardımıyla (6. 3) denkleminin sağ tarafındaki ilk terimin daha genel bir ifadesi [40] dan alındığında

$$\begin{aligned}(\overline{\nabla}^2 h)(X,Y) &= \sum_i (\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i} h)(X,Y) \\ &= \sum_i [(\overline{R}(e_i,X)\cdot h)(e_i,Y) + (\tilde{\nabla}_X(\tilde{R}(e_i,Y)e_i)^{\perp})^{\perp} \\ &+ (\tilde{\nabla}_{e_i}(\tilde{R}(e_i,X)Y)^{\perp})^{\perp}] + \nabla^{\perp}_X\nabla^{\perp}_Y(\mathrm{izh})\end{aligned} \tag{6. 4}$$

elde edilir.

Diğer taraftan

$$\begin{aligned}\sum_i (\overline{R}(e_i,X)\cdot h)(e_i,Y) &= \sum_i [R^{\perp}(e_i,X)h(e_i,Y) - h(R(e_i,X)e_i,Y) \\ &- h(e_i,R(e_i,X)Y)],\end{aligned} \tag{6. 5}$$

$$\begin{aligned}\sum_i (\tilde{\nabla}_X(\tilde{R}(e_i,Y)e_i)^{\perp})^{\perp} &= \sum_i [(\tilde{\nabla}_X\tilde{R})(e_i,Y)e_i + \tilde{R}(h(X,e_i),Y)e_i + \tilde{R}(e_i,h(X,Y))e_i \\ &+ \tilde{R}(e_i,Y)h(X,e_i)]^{\perp} - \sum_i h(X,\tilde{R}(e_i,Y)e_i^{T}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_i (\tilde{\nabla}_{e_i}(\tilde{R}(e_i,X)Y)^{\perp})^{\perp} &= \sum_i [(\tilde{\nabla}_{e_i}\tilde{R})(e_i,X)Y + \tilde{R}(h(e_i,e_i),X)Y + \tilde{R}(e_i,h(e_i,X))Y \\ &+ \tilde{R}(e_i,X)h(e_i,Y)]^{\perp} - \sum_i h(e_i,(\tilde{R}(e_i,X)Y)^{T}),\end{aligned}$$

bulunur [40].

M ye normal her V vektör alanı için

$$\begin{aligned}&g((\overline{\nabla}^2 h)(X,Y),V) \\ &= g(\nabla^{\perp}_X\nabla^{\perp}_Y(\mathrm{izh}),V) + \sum_i [g((\tilde{\nabla}_X\tilde{R})(e_i,Y)e_i,V) - g((\tilde{\nabla}_{e_i}\tilde{R})(e_i,X)Y,V)] \\ &+ \sum_i [g(R^{\perp}(e_i,X)h(e_i,Y),V) + 2g(\tilde{R}(e_i,Y)h(X,e_i),V) + g(\tilde{R}(e_i,h(X,Y))e_i,V) \\ &+ g(\tilde{R}(h(e_i,e_i),X)Y,V) + g(\tilde{R}(e_i,X)h(e_i,Y),V) \\ &- g(A_V X,\tilde{R}(e_i,Y)e_i) - g(A_V e_i,\tilde{R}(e_i,X)Y)] \\ &- \sum_i [g(R(e_i,X)e_i,A_V Y) + g(R(e_i,X)Y,A_V e_i)]\end{aligned} \tag{6. 6}$$

elde edilir.

Ayrıca;

$$-\sum_{i}[g(R(e_i,X)e_i,A_V Y)+g(R(e_i,X)Y,A_V e_i)]$$

$$=-\sum_{i}[g(\tilde{R}(e_i,X)e_i,A_V Y)+g(\tilde{R}(e_i,X)Y,A_V e_i)]$$

$$-\sum_{\alpha}[g(A_V A_\alpha^2 X,Y)-izA_\alpha g(A_V A_\alpha X,Y)$$

$$+izA_\alpha A_V g(A_\alpha X,Y)-g(A_\alpha A_V A_\alpha X,Y)] \tag{6. 7}$$

ve

$$\sum_{i}[g(R^{\perp}(e_i,X)h(e_i,Y),V)=\sum_{i}g(\tilde{R}(e_i,X)h(e_i,Y),V)$$

$$+\sum_{\alpha}[g(A_\alpha A_V A_\alpha X,Y)-g(A_\alpha^2 A_V X,Y)] \tag{6. 8}$$

biçimindedir.

Buradan, (6. 7) ve (6. 8) denklemleri (6. 6) da yerlerine yazıldığında

$$g((\overline{\nabla}^2 h)(X,Y),V)$$

$$=g(\nabla_X^{\perp}\nabla_Y^{\perp}(izh),V)+\sum_{i}[g((\tilde{\nabla}_X\tilde{R})(e_i,Y)e_i,V)-g((\tilde{\nabla}_{e_i}\tilde{R})(e_i,X)Y,V)]$$

$$+\sum_{i}[2g(\tilde{R}(e_i,X)h(e_i,Y),V)+2g(\tilde{R}(e_i,Y)h(X,e_i),V)+g(\tilde{R}(e_i,h(X,Y))e_i,V)$$

$$+g(\tilde{R}(h(e_i,e_i),X)Y,V)-g(A_V X,\tilde{R}(e_i,Y)e_i)$$

$$-g(A_V Y,\tilde{R}(e_i,X)e_i)-2g(A_V e_i,\tilde{R}(e_i,X)Y)] \tag{6. 9}$$

$$+\sum_{i}[izA_\alpha g(A_V A_\alpha X,Y)-izA_\alpha A_V g(A_\alpha X,Y)$$

$$+2g(A_\alpha A_V A_\alpha X,Y)-g(A_\alpha^2 A_V X,Y)-g(A_V A_\alpha^2 X,Y)]$$

elde edilir [40].

**Önerme 6.1.3.** Lokal simetrik bir $\widetilde{M}$ Riemann manifoldunun bir altmanifoldu M olsun. M nin ortalama eğrilik vektörü paralel ise M üzerinde

$$
\begin{aligned}
& g((\overline{\nabla}^2 h)(X,Y),V) \\
&= \sum_i [2g(\tilde{R}(e_i,X)h(e_i,Y),V) + 2g(\tilde{R}(e_i,Y)h(X,e_i),V) + g(\tilde{R}(e_i,h(X,Y))e_i,V) \\
&+ g(\tilde{R}(h(e_i,e_i),X)Y,V) - g(A_V X,\tilde{R}(e_i,Y)e_i) \\
&- g(A_V Y,\tilde{R}(e_i,X)e_i) - 2g(A_V e_i,\tilde{R}(e_i,X)Y)] \qquad (6.\ 10) \\
&+ \sum_i [\mathrm{iz}A_\alpha g(A_V A_\alpha X,Y) - \mathrm{iz}A_\alpha A_V g(A_\alpha X,Y) \\
&+ 2g(A_\alpha A_V A_\alpha X,Y) - g(A_\alpha^2 A_V X,Y) - g(A_V A_\alpha^2 X,Y)]
\end{aligned}
$$

eşitliği geçerlidir [40].

Eğer M minimal ise (6. 10) denkleminden

$$
\begin{aligned}
& g((\overline{\nabla}^2 h)(X,Y),V) \\
&= \sum_i [2g(\tilde{R}(e_i,X)h(e_i,Y),V) + 2g(\tilde{R}(e_i,Y)h(X,e_i),V) + g(\tilde{R}(e_i,h(X,Y))e_i,V) \\
&+ g(\tilde{R}(h(e_i,e_i),X)Y,V) - g(A_V X,\tilde{R}(e_i,Y)e_i) \\
&- g(A_V Y,\tilde{R}(e_i,X)e_i) - 2g(A_V e_i,\tilde{R}(e_i,X)Y)] \qquad (6.\ 11) \\
&+ \sum_i [2g(A_\alpha A_V A_\alpha X,Y) - g(A_\alpha^2 A_V X,Y) - g(A_V A_\alpha^2 X,Y)]
\end{aligned}
$$

elde edilir [40].

**Önerme 6.1.4.** M ye teğet her X, Y ve Z vektör alanları için $\widetilde{R}(X,Y)Z$ de M ye teğet olsun. Bu durumda (6. 3) denklemi göz önüne alındığına

$$(\overline{\nabla}^2 h)(X,Y) = \sum_i (\overline{R}(e_i,X)\cdot h)(e_i,Y) + \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp(\mathrm{iz}h) \qquad (6.\ 12)$$

biçimindedir [40].

Böylece (6. 5) ve (6. 12) denklemleri yardımıyla aşağıdaki sonuç verilebilir:

**Sonuç 6.1.5.** $\widetilde{M}$ Riemann manifoldunun bir altmanifoldu M olsun. M ye teğet her X, Y ve Z vektör alanları için $\widetilde{R}(X,Y)Z$ de M ye teğet ise

$$(\overline{\nabla}^2 h)(X,Y) = \sum_i [R^{\perp}(e_i,X)h(e_i,Y) - h(R(e_i,X)e_i,Y) - h(e_i,R(e_i,X)Y)]$$

$$+\nabla^{\perp}_X\nabla^{\perp}_Y(izh) \tag{6. 13}$$

biçimindedir [40].

### 6.2. Kenmotsu Uzay Formun İnvaryant Altmanifoldları

Bu bölümde Kenmotsu uzay formun invaryant altmanifoldları ele alınacak olup Kenmotsu uzay formun invaryant bir altmanifoldunun ikinci temel formunun boyunun karesinin Laplas denklemi hesaplanacaktır.

**Önerme 6.2.1.** $\widetilde{M}$ Kenmotsu manifoldunun invaryant bir altmanifoldu yine bir Kenmotsu manifoldudur [22].

**Önerme 6.2.2.** $\widetilde{M}$ Kenmotsu manifoldunun bir invaryant altmanifoldu M olsun. Bu durumda M için

$$\varphi h(X,Y) = h(\varphi X,Y) = h(X,\varphi Y) \tag{6. 14}$$

özelliği sağlanır [33].

Böylece, (6. 14) eşitliği yardımıyla aşağıdaki sonuç kolayca elde edilir:

**Sonuç 6.2.3.** $\widetilde{M}$ Kenmotsu manifoldunun bir invaryant altmanifoldu minimaldir [27].

(2m+1)-boyutlu φ-kesitsel eğriliği c = sabit olan bir Kenmotsu uzay formu $\widetilde{M}(c)$ nin (2n+1)-boyutlu invaryant bir altmanifoldu M olsun. M invaryant altmanifoldunun eğrilik tensörü (2. 21) ve (3. 10) denklemleri yardımıyla

$\forall$ X, Y, Z, W$\in \chi$(M) için;

$$R(X,Y,Z,W) = \frac{(c-3)}{4}[g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W)]$$

$$+\frac{(c+1)}{4}[\eta(X)\eta(Z)g(Y,W) - \eta(Y)\eta(Z)g(X,W)$$

$$+\eta(Y)\eta(W)g(X,Z) - \eta(X)\eta(W)g(Y,Z)$$

$$+g(X,\varphi Z)g(\varphi Y,W) - g(Y,\varphi Z)g(\varphi X,W) + 2g(X,\varphi Y)g(\varphi Z,W)]$$

$$+g(h(Y,Z),h(X,W)) - g(h(X,Z),h(Y,W)) \tag{6. 15}$$

yazılabilir.

Buradan X ve W vektör alanlarına göre kontraksiyon yapıldığında M nin S Ricci tensörü

$$S(Y,Z) = \frac{1}{2}[n(c-3)+(c+1)]g(Y,Z) - \frac{1}{2}(n+1)(c+1)\eta(Y)\eta(Z)$$

$$-\sum_{i} g(h(Y,e_i),h(Z,e_i)) \tag{6. 16}$$

bulunur.

(6. 16) denkleminde Y ve Z vektör alanlarına göre yeniden kontraksiyon yapıldığında M nin r skalar eğriliği

$$\left.\begin{aligned} r &= \sum_{j} S(e_j,e_j) \\ r &= n^2(c-3)+n(c-1)-\|h\|^2 \end{aligned}\right\} \tag{6. 17}$$

elde edilir.

**Yardımcı Teorem 6.2.4.** (2m+1)-boyutlu ve $\varphi$-kesitsel eğriliği c = sabit olan bir Kenmotsu uzay formu $\widetilde{M}(c)$ nin (2n+1)-boyutlu invaryant bir altmanifoldu M olsun. M nin ikinci temel formu h nın boyunun karesinin Laplas denklemi

$$\frac{1}{2}\Delta\|h\|^2 = \|\overline{\nabla}h\|^2 + [\frac{(n+2)(c-3)}{2}+3]\|h\|^2$$

$$+\sum_{\alpha,\beta}[iz(A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha)^2 - (iz(A_\alpha A_\beta))^2] \tag{6. 18}$$

biçimindedir.

**İspat :** $\{e_1, e_2, ..., e_{2n+1}\}$ $T_xM$ nin bir bazı olsun. (6. 3) denklemi ile M altmanifoldunun minimalliği göz önüne alındığında

$$(\overline{\nabla}^2 h)(X,Y) = \sum_i (\overline{R}(e_i, X) \cdot h)(e_i, Y)$$

yazılabilir. Burada (2. 26) denklemi yardımıyla

$$(\overline{R}(e_k, e_i) \cdot h)(e_k, e_j) = R^{\perp}(e_k, e_i) h(e_k, e_j) - h(R(e_k, e_i)e_k, e_j) - h(e_k, R(e_k, e_i)e_j)$$

olur.

Buradan eşitliğin her iki yanının $h(e_i,e_j)$ ile iç çarpımı alındığında

$$\begin{aligned} g((\overline{R}(e_k, e_i) \cdot h)(e_k, e_j), h(e_i, e_j)) &= g(R^{\perp}(e_k, e_i) h(e_k, e_j), h(e_i, e_j)) \\ &- g(h(R(e_k, e_i)e_k, e_j), h(e_i, e_j)) \\ &- g(h(e_k, R(e_k, e_i)e_j), h(e_i, e_j)) \end{aligned}$$

elde edilir.

Son denklemde (2. 22) eşitliği kullanıldığında

$$\begin{aligned} g((\overline{R}(e_k, e_i) \cdot h)(e_k, e_j), h(e_i, e_j)) &= g(R^{\perp}(e_k, e_i) h(e_k, e_j), h(e_i, e_j)) \\ &- g(h(\widetilde{R}(e_k, e_i)e_k, e_j), h(e_i, e_j)) \\ &- \sum_{\alpha} g(A_{\alpha} e_i, e_k) g(h(A_{\alpha} e_k, e_j), h(e_i, e_j)) \\ &+ \sum_{\alpha} g(A_{\alpha} e_k, e_k) g(h(A_{\alpha} e_i, e_j), h(e_i, e_j)) \\ &- g(h(e_k, \widetilde{R}(e_k, e_i)e_j), h(e_i, e_j)) \\ &- \sum_{\alpha} g(A_{\alpha} e_i, e_j) g(h(A_{\alpha} e_k, e_k), h(e_i, e_j)) \\ &+ \sum_{\alpha} g(A_{\alpha} e_k, e_j) g(h(A_{\alpha} e_i, e_k), h(e_i, e_j)) \end{aligned}$$

bulunur.

Buradan da

$$
\begin{aligned}
g((\bar{R}(e_k,e_i)\cdot h)(e_k,e_j),h(e_i,e_j)) = {} & g(R^{\perp}(e_k,e_i)h(e_k,e_j),h(e_i,e_j)) \\
& - g(h(\widetilde{R}(e_k,e_i)e_k,e_j),h(e_i,e_j)) \\
& -\sum_{\alpha,\beta} g(A_\alpha e_i,e_k)g(A_\alpha e_k,A_\beta e_j)g(A_\beta e_i,e_j) \\
& +\sum_{\alpha,\beta} g(A_\alpha e_k,e_k)g(A_\alpha e_i,A_\beta e_j)g(A_\beta e_i,e_j) \\
& - g(h(e_k,\widetilde{R}(e_k,e_i)e_j),h(e_i,e_j)) \\
& -\sum_{\alpha,\beta} g(A_\alpha e_i,e_j)g(A_\alpha e_k,A_\beta e_k)g(A_\beta e_i,e_j) \\
& +\sum_{\alpha,\beta} g(A_\alpha e_k,e_j)g(A_\alpha e_i,A_\beta e_k)g(A_\beta e_i,e_j)
\end{aligned}
$$

sonucuna ulaşılır. Böylece

$$
\begin{aligned}
g((\bar{R}(e_k,e_i)\cdot h)(e_k,e_j),h(e_i,e_j)) = {} & g(R^{\perp}(e_k,e_i)h(e_k,e_j),h(e_i,e_j)) \\
& - g(h(\widetilde{R}(e_k,e_i)e_k,e_j),h(e_i,e_j)) \\
& -\sum_{\alpha,\beta} g(A_\beta A_\alpha e_k,A_\beta A_\alpha e_k) +\sum_{\alpha,\beta} iz(A_\alpha)iz(A_\beta^2 A_\alpha) \\
& - g(h(e_k,\widetilde{R}(e_k,e_i)e_j),h(e_i,e_j)) \\
& -\sum_{\alpha,\beta} (iz(A_\alpha A_\beta))^2 +\sum_{\alpha,\beta} iz(A_\beta A_\alpha)^2 \qquad (6.\ 19)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

(6. 19) denkleminde, (2. 24) eşitliği ile Sonuç 6.2.4. gereği M nin minimalliği göz önüne alındığında

$$
\begin{aligned}
g((\bar{R}(e_k,e_i)\cdot h)(e_k,e_j),h(e_i,e_j)) = {} & g(\tilde{R}(e_k,e_i)h(e_k,e_j),h(e_i,e_j)) \\
& + g([A_{h(e_k,e_j)},A_{h(e_i,e_j)}]e_k,e_i) \\
& - g(h(\widetilde{R}(e_k,e_i)e_k,e_j),h(e_i,e_j)) \\
& - g(h(e_k,\widetilde{R}(e_k,e_i)e_j),h(e_i,e_j)) \\
& -\sum_{\alpha,\beta} g(A_\beta A_\alpha e_k,A_\beta A_\alpha e_k) \\
& -\sum_{\alpha,\beta} (iz(A_\alpha A_\beta))^2 +\sum_{\alpha,\beta} iz(A_\beta A_\alpha)^2
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Buradan da

$$g((\bar{R}(e_k,e_i)\cdot h)(e_k,e_j),h(e_i,e_j))$$

$$=g(\tilde{R}(e_k,e_i)h(e_k,e_j),h(e_i,e_j))-g(h(\tilde{R}(e_k,e_i)e_k,e_j),h(e_i,e_j))$$

$$-g(h(e_k,\tilde{R}(e_k,e_i)e_j),h(e_i,e_j))$$

$$+\sum_{\alpha,\beta}g(A_\alpha e_k,e_j)g(A_\beta e_i,e_j)[g(e_i,A_\alpha A_\beta e_k)-g(e_i,A_\beta A_\alpha e_k)]$$

$$-\sum_{\alpha,\beta}g(A_\beta A_\alpha e_k,A_\beta A_\alpha e_k)-\sum_{\alpha,\beta}(iz(A_\alpha A_\beta))^2+\sum_{\alpha,\beta}iz(A_\beta A_\alpha)^2$$

olup buradan

$$g((\bar{R}(e_k,e_i)\cdot h)(e_k,e_j),h(e_i,e_j))$$

$$=g(\tilde{R}(e_k,e_i)h(e_k,e_j),h(e_i,e_j))-g(h(\tilde{R}(e_k,e_i)e_k,e_j),h(e_i,e_j))$$

$$-g(h(e_k,\tilde{R}(e_k,e_i)e_j),h(e_i,e_j))$$

$$+\sum_{\alpha,\beta}g(A_\alpha e_k,e_j)g(A_\beta e_i,e_j)g(e_i,A_\alpha A_\beta e_k)-\sum_{\alpha,\beta}g(A_\alpha e_k,e_j)g(A_\beta e_i,e_j)g(e_i,A_\beta A_\alpha e_k)$$

$$-\sum_{\alpha,\beta}g(A_\beta A_\alpha e_k,A_\beta A_\alpha e_k)-\sum_{\alpha,\beta}(iz(A_\alpha A_\beta))^2+\sum_{\alpha,\beta}iz(A_\beta A_\alpha)^2$$

sonucuna ulaşılır. Son denklemde gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$g((\bar{R}(e_k,e_i)\cdot h)(e_k,e_j),h(e_i,e_j)) \tag{6. 20}$$

$$=g(\tilde{R}(e_k,e_i)h(e_k,e_j),h(e_i,e_j))-g(h(\tilde{R}(e_k,e_i)e_k,e_j),h(e_i,e_j))$$

$$-g(h(e_k,\tilde{R}(e_k,e_i)e_j),h(e_i,e_j))+\sum_{\alpha,\beta}[iz(A_\alpha A_\beta-A_\beta A_\alpha)^2-(iz(A_\alpha A_\beta))^2]$$

bulunur.

Diğer taraftan $\tilde{M}(c)$ Kenmotsu uzay form olduğundan

$$g((\tilde{R}(e_k,e_i)h)(e_k,e_j),h(e_i,e_j))$$

$$=(\frac{c-3}{4})[g(e_i,h(e_k,e_j))g(e_k,h(e_i,e_j))-g(e_k,h(e_k,e_j))g(e_i,h(e_i,e_j))]$$

$$+(\frac{c+1}{4})[\eta(e_k)\eta(h(e_k,e_j))g(e_i,h(e_i,e_j))-\eta(e_i)\eta(h(e_k,e_j))g(e_k,h(e_i,e_j))$$

$$+\eta(e_i)\eta(h(e_i,e_j))g(e_k,h(e_k,e_j))-\eta(e_k)\eta(h(e_k,e_j))g(e_i,h(e_k,e_j))$$

$$+g(e_k,\varphi h(e_k,e_j))g(\varphi e_i,h(e_i,e_j))-g(e_i,\varphi h(e_k,e_j))g(\varphi e_k,h(e_i,e_j))$$

$$+2g(e_k,\varphi e_i)g(\varphi h(e_k,e_j),h(e_i,e_j))]$$

yazılabilir.

M nin, $\tilde{M}(c)$ Kenmotsu uzay formunun invaryant bir altmanifoldu olduğu göz önüne alındığında

$$g((\tilde{R}(e_k, e_i)h)(e_k, e_j), h(e_i, e_j)) = (\frac{c+1}{2})\, g(e_k, \varphi e_i)\, g(\varphi h(e_k, e_j), h(e_i, e_j))$$

elde edilir. Son denklemde (6. 14) denklemi kullanıldığında

$$g((\tilde{R}(e_k, e_i)h)(e_k, e_j), h(e_i, e_j)) = -(\frac{c+1}{2})g(\varphi h(e_i, e_j), \varphi h(e_i, e_j))$$

olup buradan da (3. 1) denklemi göz önüne alındığında

$$g((\tilde{R}(e_k, e_i)h)(e_k, e_j), h(e_i, e_j)) = -(\frac{c+1}{2})g(h(e_i, e_j), h(e_i, e_j)) \tag{6. 21}$$

sonucuna ulaşılır. (2. 42) eşitliği yardımı ile i, j ve k indisleri üzerinden toplam alındığında (6. 21) denkleminin

$$\sum_{i,j,k=1}^{2n+1} g((\tilde{R}(e_k, e_i)h)(e_k, e_j), h(e_i, e_j)) = \frac{(c+1)}{2}\|h\|^2 \tag{6. 22}$$

biçimine dönüştüğü görülür. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}\tilde{R}(e_k, e_i)e_k = (\frac{c-3}{4})&[g(e_i, e_k)e_k - g(e_k, e_k)e_i] \\ &+(\frac{c+1}{4})[\eta(e_k)\eta(e_k)e_i - \eta(e_i)\eta(e_k)e_k \\ &+\eta(e_i)g(e_k, e_k)\xi - \eta(e_k)g(e_i, e_k)\xi \\ &+g(e_k, \varphi e_k)\varphi e_i - g(e_i, \varphi e_k)\varphi e_k + 2g(e_k, \varphi e_i)\varphi e_k]\end{aligned}$$

denklemi yardımıyla

$$\begin{aligned}&g(h(\tilde{R}(e_k, e_i)e_k, e_j), h(e_i, e_j)) \\ &= g(A_{h(e_i, e_j)}e_j, \tilde{R}(e_k, e_i)e_k) \\ &= (\frac{c-3}{4})[g(e_i, e_k)g(e_k, A_{h(e_i, e_j)}e_j) - g(e_k, e_k)g(e_i, A_{h(e_i, e_j)}e_j)] \\ &+(\frac{c+1}{4})[\eta(e_k)\eta(e_k)g(e_i, A_{h(e_i, e_j)}e_j) - \eta(e_i)\eta(e_k)g(e_k, A_{h(e_i, e_j)}e_j) \\ &+\eta(e_i)g(e_k, e_k)g(\xi, A_{h(e_i, e_j)}e_j) - \eta(e_k)g(e_i, e_k)g(\xi, A_{h(e_i, e_j)}e_j) \\ &+g(e_k, \varphi e_k)g(\varphi e_i, A_{h(e_i, e_j)}e_j) - g(e_i, \varphi e_k)g(\varphi e_k, A_{h(e_i, e_j)}e_j) \\ &+2g(e_k, \varphi e_i)g(\varphi e_k, A_{h(e_i, e_j)}e_j)]\end{aligned}$$

yazılabilir.

Buradan (5. 2) denklemi göz önüne alındığında

$$g(h(\tilde{R}(e_k,e_i)e_k,e_j),h(e_i,e_j))$$

$$=(\frac{c-3}{4})[g(e_i,A_{h(e_i,e_j)}e_j)-(2n+1)g(e_i,A_{h(e_i,e_j)}e_j)]$$

$$+(\frac{c+1}{4})[g(\xi,\xi)g(e_i,A_{h(e_i,e_j)}e_j)-g(\varphi e_k,e_i)g(e_i,A_{h(\varphi e_k,e_j)}e_j)$$

$$-2g(\varphi e_k,e_i)g(e_j,A_{h(\varphi e_k,e_j)}e_i)] \tag{6. 23}$$

elde edilir. (6. 23) denkleminde (3. 1) ve (6. 1) yardımıyla

$$g(h(\tilde{R}(e_k,e_i)e_k,e_j),h(e_i,e_j))=-2n(\frac{c-3}{4})\|h\|^2+(\frac{c+1}{4})[\|h\|^2-3g(\varphi e_k,A_{h(\varphi e_k,e_j)}e_j)]$$

olup buradan da yeniden (6. 3) ve (6. 14) denklemleri yardımı ile i, j ve k indisleri üzerinden toplam alındığında

$$\sum_{i,j,k=1}^{2n+1} g(h(\tilde{R}(e_k,e_i)e_k,e_j),h(e_i,e_j))=-(\frac{n(c-3)+(c+1)}{2})\|h\|^2 \tag{6. 24}$$

sonucuna ulaşılır. Son olarak

$$\begin{aligned}\tilde{R}(e_k,e_i)e_j &= (\frac{c-3}{4})[g(e_i,e_j)e_k-g(e_k,e_j)e_i]\\ &+(\frac{c+1}{4})[\eta(e_k)\eta(e_j)e_i-\eta(e_i)\eta(e_j)e_k\\ &+\eta(e_i)g(e_k,e_j)\xi-\eta(e_k)g(e_i,e_j)\xi\\ &+g(e_k,\varphi e_j)\varphi e_i-g(e_i,\varphi e_j)\varphi e_k+2g(e_k,\varphi e_i)\varphi e_j]\end{aligned}$$

denklemi yardımıyla

$$g(h(\tilde{R}(e_k,e_i)e_j,e_k),h(e_i,e_j))$$

$$=g(A_{h(e_i,e_j)}e_k,\tilde{R}(e_k,e_i)e_j)$$

$$=(\frac{c-3}{4})[g(e_i,e_j)g(e_k,A_{h(e_i,e_j)}e_k)-g(e_k,e_j)g(e_i,A_{h(e_i,e_j)}e_k)]$$

$$+(\frac{c+1}{4})[\eta(e_k)\eta(e_j)g(e_i,A_{h(e_i,e_j)}e_k)-\eta(e_i)\eta(e_j)g(e_k,A_{h(e_i,e_j)}e_j)$$

$$+\eta(e_i)g(e_k,e_j)g(\xi,A_{h(e_i,e_j)}e_k)-\eta(e_k)g(e_i,e_j)g(\xi,A_{h(e_i,e_j)}e_k)$$

$$+g(e_k,\varphi e_j)g(\varphi e_i,A_{h(e_i,e_j)}e_k)-g(e_i,\varphi e_j)g(\varphi e_k,A_{h(e_i,e_j)}e_k)$$

$$+2g(e_k,\varphi e_i)g(\varphi e_j,A_{h(e_i,e_j)}e_k)]$$

yazılabilir.

Buradan yeniden (5. 2) denklemi kullanıldığında

$$\begin{aligned}
& g(h(\tilde{R}(e_k,e_i)e_j,e_k),h(e_i,e_j)) \\
& =(\frac{c-3}{4})[g(e_j,A_{h(e_k,e_k)}e_j)-g(e_i,A_{h(e_i,e_j)}e_j)] \\
& +(\frac{c+1}{4})[g(A_{h(e_i,e_j)}e_i,\xi)\eta(e_j)-g(A_{h(e_k,e_k)}e_i,\xi)\eta(e_i) \\
& +g(A_{h(e_i,e_j)}\varphi e_i,\varphi e_j)-g(A_{h(\varphi e_k,e_k)}e_j,\varphi e_j)+2g(A_{h(e_i,e_j)}\varphi e_i,\varphi e_j)]
\end{aligned} \tag{6. 25}$$

elde edilir. (6. 25) denkleminde (6. 1) ile (6. 14) denklemleri kullanılarak i, j ve k indisleri üzerinden toplam alınıp, M nin minimalliği göz önüne alındığında

$$\sum_{i,j,k=1}^{2n+1} g(h(\tilde{R}(e_k,e_i)e_j,e_k),h(e_i,e_j))=-c\|h\|^2 \tag{6. 26}$$

sonucuna ulaşılır. (6. 22), (6. 24) ve (6. 26) denklemleri (6. 20) de yerlerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
& \sum_{i,j,k=1}^{2n+1} g((\overline{R}(e_k,e_i)\cdot h)(e_k,e_j),h(e_i,e_j)) \\
& =[\frac{(n+2)(c-3)}{2}+3]\|h\|^2+\sum_{\alpha,\beta}[iz(A_\alpha A_\beta-A_\beta A_\alpha)^2-(iz(A_\alpha A_\beta))^2]
\end{aligned} \tag{6. 27}$$

elde edilir. Böylece (6. 27) denklemi (5. 1) ile verilen Laplas denkleminde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta\|h\|^2 &= \|\overline{\nabla}h\|^2+[\frac{(n+2)(c-3)}{2}+3]\|h\|^2 \\
&+\sum_{\alpha,\beta}[iz(A_\alpha A_\beta-A_\beta A_\alpha)^2-(iz(A_\alpha A_\beta))^2]
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. ∎

V. Mangione, bir Kenmotsu manifoldun invaryant bir altmanifoldu üzerinde aşağıdaki eşitsizliklerin sağlandığını göstermiştir:

**Önerme 6.2.5.** $\widetilde{M}$ (2m+1)-boyutlu Kenmotsu manifoldunun (2n+1)-boyutlu, invaryant bir altmanifoldu M olsun. Bu durumda M üzerinde,

$$\frac{1}{2p}\|h\|^4 \leq \sum_{\alpha,\beta=n+1}^{2p}[iz(A_\alpha A_\beta)]^2 \leq \frac{1}{2}\|h\|^4 \tag{6. 28}$$

ve

$$\frac{1}{n}\|h\|^4 \leq \sum_{\alpha,\beta=n+1}^{2p}\|[A_\alpha,A_\beta]\|^2 \leq \|h\|^4 \tag{6. 29}$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Burada $p=m-n$ dir [27].

Teorem 5.3.1 ve Teorem 5.3.3 ün ispatlarında kullandığımız yöntem sırasıyla $L=-1$ ve $L=\frac{1}{2n}$ durumlarını yorumlamak için yeterli değildir. Dolayısıyla bu durumlar açık birer problemdir. Kenmotsu uzay formun invaryant bir altmanifoldu için bu durumların çözümleri sırasıyla aşağıdaki teoremler yardımıyla verilmiştir:

**Teorem 6.2.6.** (2m+1)-boyutlu ve φ-kesitsel eğriliği c = sabit olan bir Kenmotsu uzay formu $\widetilde{M}(c)$ nin (2n+1)-boyutlu invaryant bir altmanifoldu M olsun. Eğer M pseudoparalel ise bu durumda;

**(i)** M total geodeziktir veya;

**(ii)** M üzerinde

$$\|h\|^2=\frac{1}{3}[n(c-1)+2c]$$

eşitliği geçerlidir veya;

**(iii)** Bazı $x\in M$ noktalarında

$$\|h\|^2(x)\geq\frac{1}{3}[n(c-1)+2c]$$

dir.

**İspat :** $\widetilde{M}(c)$ Kenmotsu uzay formunun (2n+1)-boyutlu invaryant bir altmanifoldu M olsun. Bundan sonra $p=m-n$ olarak alınacaktır. Diğer taraftan $x\in M$ için $T_xM$ nin $\{e_1,e_2,...,e_{2n+1}\}$ ortonormal bazını alalım. Burada $e_{n+t}=\varphi e_t$ (t = 1, 2, …, n), $e_{2n+1}=\xi$ biçimindedir.
Böylece, bu baz yardımıyla M nin ikinci temel formu h nın bileşenleri $1\leq i,j\leq n$ ve $n+1\leq\alpha\leq 2p$ için;

$$h_{ij}^{\alpha}=g(h(e_i,e_j),e_\alpha) \tag{6. 30}$$

ile tanımlanmaktadır.

Benzer şekilde M nin ikinci temel formu h nın birinci ve ikinci kovaryant türevlerinin bileşenleri sırasıyla $1 \le i, j, k, l \le n$ ve $n+1 \le \alpha \le 2p$ için;

$$h^{\alpha}_{ijk} = g((\overline{\nabla}_{e_k} h)(e_i, e_j), e_\alpha) = \overline{\nabla}_{e_k} h^{\alpha}_{ij} \tag{6. 31}$$

ve

$$\begin{aligned} h^{\alpha}_{ijkl} &= g((\overline{\nabla}_{e_l} \overline{\nabla}_{e_k} h)(e_i, e_j), e_\alpha) \\ &= \overline{\nabla}^{\alpha}_{e_l} h^{\alpha}_{ijk} \\ &= \overline{\nabla}_{e_l} \overline{\nabla}^{\alpha}_{e_k} h^{\alpha}_{ij} \end{aligned} \tag{6. 32}$$

denklemleri ile verilmektedir.

Eğer M pseudoparalel ise tanım gereği

$$(\overline{R}(e_l, e_k) \cdot h) = -[(e_l \wedge_g e_k) \cdot h] \tag{6. 33}$$

yazılabilir. Burada $1 \le i, j, k, l \le n$ için;

$$[(e_l \wedge_g e_k) \cdot h](e_i, e_j) = -h((e_l \wedge_g e_k) e_i, e_j) - h(e_i, (e_l \wedge_g e_k) e_j)$$

biçimindedir. Buradan (2. 7) denklemi göz önüne alındığında

$$\begin{aligned} [(e_l \wedge_g e_k) \cdot h](e_i, e_j) = &-g(e_k, e_i) h(e_l, e_j) + g(e_l, e_i) h(e_k, e_j) \\ &- g(e_k, e_j) h(e_l, e_i) + g(e_l, e_j) h(e_k, e_i) \end{aligned} \tag{6. 34}$$

olur.

Diğer taraftan (2. 32) denklemi yardımıyla

$$(\overline{R}(e_l, e_k) \cdot h)(e_i, e_j) = (\overline{\nabla}_{e_l} \overline{\nabla}_{e_k} h)(e_i, e_j) - (\overline{\nabla}_{e_k} \overline{\nabla}_{e_l} h)(e_i, e_j) \tag{6. 35}$$

yazılabilir. Burada (6. 30), (6. 32), (6. 34) ve (6. 35) denklemleri kullanıldığında (6. 33) ile verilen pseudoparalellik koşulu

$$h^{\alpha}_{ijkl} = h^{\alpha}_{ijlk} + \{\delta^{\alpha}_{kihlj} - \delta^{\alpha}_{lihkj} + \delta^{\alpha}_{kjhil} - \delta^{\alpha}_{ljhki}\}$$

şekline dönüşür. Burada $1 \le i, j, k, l \le n$ ve $n+1 \le \alpha \le 2p$ için $g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ biçimindedir.

İkinci temel form $h^{\alpha}_{ij}$ nın Laplas gösterimi olan

$$\Delta h^{\alpha}_{ij} = \sum_{i,j,k=1}^{n} h^{\alpha}_{ijkk} \tag{6. 36}$$

denklemi (6. 1) denkleminde kullanıldığında

$$\frac{1}{2} \Delta \|h\|^2 = \sum_{i,j,k=1}^{n} \sum_{\alpha=n+1}^{2p} h^{\alpha}_{ij} h^{\alpha}_{ijkk} + \|\overline{\nabla} h\|^2 \tag{6. 37}$$

elde edilir.

Burada

$$\|h\|^2 = \sum_{i,j,k=1}^{n} \sum_{\alpha=n+1}^{2p} (h_{ij}^{\alpha})^2$$

ve

$$\|\overline{\nabla} h\|^2 = \sum_{i,j,k=1}^{n} \sum_{\alpha=n+1}^{2p} (h_{ijkk}^{\alpha})^2$$

biçiminde tanımlanmaktadır.

Bunun yanında (6. 30) ve (6. 32) denklemleri kullanıldığında

$$\begin{aligned} h_{ij}^{\alpha} h_{ijkk}^{\alpha} &= g(h(e_i, e_j), e_\alpha) g((\overline{\nabla}_{e_k} \overline{\nabla}_{e_k} h)(e_i, e_j), e_\alpha) \\ &= g((\overline{\nabla}_{e_k} \overline{\nabla}_{e_k} h)(e_i, e_j), h(e_i, e_j)) \end{aligned} \tag{6. 38}$$

olur.

(6. 38) denklemi (6. 37) de kullanıldığında

$$\frac{1}{2} \Delta \|h\|^2 = \sum_{i,j,k=1}^{n} g((\overline{\nabla}_{e_k} \overline{\nabla}_{e_k} h)(e_i, e_j), h(e_i, e_j)) + \|\overline{\nabla} h\|^2 \tag{6. 39}$$

elde edilir. Son denklemde (6. 33), (6. 34) ve (6. 35) denklemlerinden yararlanıldığında

$$\begin{aligned} & g((\overline{\nabla}_{e_k} \overline{\nabla}_{e_k} h)(e_i, e_j), h(e_i, e_j)) \\ &= g((\overline{\nabla}_{e_k} \overline{\nabla}_{e_i} h)(e_k, e_j), h(e_i, e_j)) \\ &= g((\overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_{e_k} h)(e_j, e_k), h(e_i, e_j)) \\ &- L\{g(e_i, e_j) g(h(e_k, e_k), h(e_i, e_j)) - g(e_k, e_j) g(h(e_k, e_i), h(e_i, e_j)) \\ &+ g(e_k, e_i) g(h(e_j, e_k), h(e_i, e_j)) - g(e_k, e_k) g(h(e_i, e_j), h(e_i, e_j))\} \end{aligned} \tag{6. 40}$$

yazılabilir. (6. 40) eşitliği, (6. 39) da yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta \|h\|^2 = \sum_{i,j,k=1}^{n} & g((\overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_{e_j} h)(e_k, e_k), h(e_i, e_j)) \\ & + \{g(e_i, e_j) g(h(e_k, e_k), h(e_i, e_j)) \\ & - g(e_k, e_j) g(h(e_k, e_i), h(e_i, e_j)) \\ & + g(e_k, e_i) g(h(e_j, e_k), h(e_i, e_j)) \\ & - g(e_k, e_k) g(h(e_i, e_j), h(e_i, e_j))\} + \|\overline{\nabla} h\|^2 \end{aligned}$$

bulunur.

$\widetilde{M}$ nın invaryant bir altmanifoldu minimal olduğundan son denklemde gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\frac{1}{2}\Delta\|h\|^2 = \sum_{i,j,k=1}^{n} g((\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_j}h)(e_k,e_k),h(e_i,e_j)) - n\|h\|^2 + \|\overline{\nabla}h\|^2 \tag{6. 41}$$

sonucuna ulaşılır. Eğer (6. 41) denkleminde $H^{\alpha} = \sum_{k=1}^{n} h_{kk}^{\alpha}$ eşitliği göz önüne alınırsa

$$\frac{1}{2}\Delta\|h\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n}\sum_{\alpha=n+1}^{2p} h_{ij}^{\alpha}(\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_j}H^{\alpha}) - n\|h\|^2 + \|\overline{\nabla}h\|^2 \tag{6. 42}$$

elde edilir.

Burada

$$\|H\|^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{\alpha=n+1}^{2p}(H^{\alpha})^2$$

biçiminde tanımlanmaktadır. (6. 42) denkleminde yeniden M nin minimalliği kullanıldığında

$$\frac{1}{2}\Delta\|h\|^2 = -n\|h\|^2 + \|\overline{\nabla}h\|^2 \tag{6. 43}$$

elde edilir. Buradan (6. 18) ile (6. 43) denklemlerinin sağ tarafları karşılaştırıldığında

$$[-n + \frac{(n+2)(3-c)}{2} - 3]\|h\|^2 - \sum_{\alpha,\beta}\left\{iz(A_{\alpha}A_{\beta} - A_{\beta}A_{\alpha})^2 - [iz(A_{\alpha}A_{\beta})]^2\right\} = 0$$

bulunur. [4] nolu kaynaktan yararlanıldığında son denklem

$$[-n + \frac{(n+2)(3-c)}{2} - 3]\|h\|^2 + \sum_{\alpha,\beta}\left\{[iz(A_{\alpha}A_{\beta})]^2 + \|[A_{\alpha},A_{\beta}]\|^2\right\} = 0$$

biçimine dönüşür. Buradan (6. 28) ile (6. 29) eşitsizlikleri kullanıldığında

$$\|h\|^2[3\|h\|^2 - n(c-1) - 2c] \geq 0$$

elde edilir.

Şimdi M üzerinde her yerde $\|h\|^2 \leq \frac{1}{3}[n(c-1)+2c]$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda M ya total geodeziktir, ya M üzerinde $\|h\|^2 = \frac{1}{3}[n(c-1)+2c]$ eşitliği geçerlidir yada bazı $x \in M$ noktalarında $\|h\|^2(x) \geq \frac{1}{3}[n(c-1)+2c]$ elde edilir. ■

**Teorem 6.2.7.** (2m+1)-boyutlu ve φ-kesitsel eğriliği c = sabit olan bir Kenmotsu uzay formu $\widetilde{M}(c)$ nin (2n+1)-boyutlu invaryant altmanifoldu M olsun. Eğer M Ricci-genelleştirilmiş pseudoparalel ise bu durumda;

**(i)** M total geodeziktir veya;

**(ii)** M üzerinde

$$\|h\|^2 = \frac{2}{3}[-\frac{1}{2n}r + \frac{(n+2)(c-3)}{2} + 3]$$

eşitliği geçerlidir veya;

**(iii)** Bazı $x \in M$ noktalarında

$$\|h\|^2(x) \geq \frac{2}{3}[-\frac{1}{2n}r(x) + \frac{(n+2)(c-3)}{2} + 3]$$

dir.

**İspat :** Eğer M Ricci-genelleştirilmiş pseudoparalel ise tanım gereği

$$(\overline{R}(e_l, e_k) \cdot h) = L[(e_l \wedge_S e_k) \cdot h] \qquad (6.\ 44)$$

yazılabilir. Burada $1 \leq i, j, k, l \leq n$ için;

$$[(e_l \wedge_S e_k) \cdot h](e_i, e_j) = -h((e_l \wedge_S e_k)e_i, e_j) - h(e_i, (e_l \wedge_S e_k)e_j)$$

biçimindedir.

Buradan (2. 5) denklemi göz önüne alındığında

$$\begin{aligned}[(e_l \wedge_S e_k) \cdot h](e_i, e_j) &= -S(e_k, e_i)h(e_l, e_j) + S(e_l, e_i)h(e_k, e_j) \\ &\quad - S(e_k, e_j)h(e_l, e_i) + S(e_l, e_j)h(e_k, e_i) \end{aligned} \qquad (6.\ 45)$$

olur.

Diğer taraftan (2. 32) denklemi yardımıyla

$$(\overline{R}(e_l, e_k) \cdot h)(e_i, e_j) = (\overline{\nabla}_{e_l}\overline{\nabla}_{e_k} h)(e_i, e_j) - (\overline{\nabla}_{e_k}\overline{\nabla}_{e_l} h)(e_i, e_j) \qquad (6.\ 46)$$

yazılabilir. Burada (6. 30), (6. 32), (6. 34) ve (6. 35) denklemleri kullanıldığında (6. 44) ile verilen Ricci-genelleştirilmiş pseudoparalellik koşulu

$$h^{\alpha}_{ijkl} = h^{\alpha}_{ijlk} - \frac{1}{2n}\{S^{\alpha}_{kihlj} - S^{\alpha}_{lihkj} + S^{\alpha}_{kjhil} - S^{\alpha}_{ljhki}\}$$

biçimine dönüşür.

(6. 39) ve (6. 40) denklemlerinde g = S alındığında

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta\|h\|^2 &= \sum_{i,j,k=1}^{n} g((\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_j}h)(e_k,e_k),h(e_i,e_j))\\
&-\frac{1}{2n}\{S(e_i,e_j)g(h(e_k,e_k),h(e_i,e_j))\\
&-S(e_k,e_j)g(h(e_k,e_i),h(e_i,e_j))\\
&+S(e_k,e_i)g(h(e_j,e_k),h(e_i,e_j))\\
&-S(e_k,e_k)g(h(e_i,e_j),h(e_i,e_j))\}+\|\overline{\nabla}h\|^2 \qquad (6.\ 47)\end{aligned}$$

elde edilir.

Buradan (6. 21) denklemi kullanıldığında

$$\begin{aligned}\sum_{i,j,k=1}^{n} S(e_i,e_j)g(h(e_k,e_k),h(e_i,e_j)) &= \sum_{i,j,k=1}^{n}\sum_{\alpha=n+1}^{2p} S(e_i,e_j)g(A_\alpha e_k,e_k)g(A_\alpha e_i,e_j)\\
&= \sum_{i,j,k=1}^{n}\sum_{\alpha=n+1}^{2p} S(e_i,e_j)iz(A_\alpha)g(A_\alpha e_i,e_j)\end{aligned}$$

yazılabilir.

M minimal olduğundan son denklemden

$$\sum_{i,j,k=1}^{n} S(e_i,e_j)g(h(e_k,e_k),h(e_i,e_j)) = 0 \qquad (6.\ 48)$$

elde edilir.

Benzer şekilde

$$\begin{aligned}&\sum_{i,j,k=1}^{n} S(e_k,e_j)g(h(e_i,e_k),h(e_i,e_j)) \qquad (6.\ 49)\\
&= \sum_{i,j,k=1}^{n}\sum_{\alpha=n+1}^{2p} S(e_k,e_j)g(A_\alpha e_i,e_k)g(A_\alpha e_i,e_j)\\
&= \sum_{i,j,k=1}^{n}\sum_{\alpha=n+1}^{2p} S(e_k,e_j)g(A_\alpha e_k,e_i)g(A_\alpha e_j,e_i)\\
&= \sum_{j,k=1}^{n}\sum_{\alpha=n+1}^{2p} S(e_k,e_j)g(A_\alpha e_k,A_\alpha e_j)\\
&= \sum_{j,k=1}^{n}\sum_{\alpha=n+1}^{2p} \frac{1}{2}[n(c-3)+(c+1)]\{g(e_k,e_j)g(A_\alpha e_k,A_\alpha e_j)\\
&-\frac{1}{2}(n+1)(c+1)g(A_\alpha e_k,A_\alpha e_j)\} - \sum_{\alpha=n+1}^{2p} g(A_\alpha e_k,A_\alpha e_j)g(A_\alpha e_k,A_\alpha e_j)\end{aligned}$$

ve

$$\sum_{i,j,k=1}^{n} S(e_k, e_i) g(h(e_j, e_k), h(e_i, e_j)) \tag{6. 50}$$

$$= \sum_{i,j,k=1}^{n} \sum_{\alpha=n+1}^{2p} S(e_k, e_i) g(A_\alpha e_j, e_k) g(A_\alpha e_i, e_j)$$

$$= \sum_{i,j,k=1}^{n} \sum_{\alpha=n+1}^{2p} S(e_k, e_j) g(A_\alpha e_k, e_j) g(A_\alpha e_i, e_j)$$

$$= \sum_{i,k=1}^{n} \sum_{\alpha=n+1}^{2p} S(e_k, e_i) g(A_\alpha e_k, A_\alpha e_i)$$

$$= \sum_{j,k=1}^{n} \sum_{\alpha=n+1}^{2p} \frac{1}{2}[n(c-3)+(c+1)]\{g(e_k, e_i) g(A_\alpha e_k, A_\alpha e_i)$$

$$-\frac{1}{2}(n+1)(c+1) g(A_\alpha e_k, A_\alpha e_i)\} - \sum_{\alpha=n+1}^{2p} g(A_\alpha e_k, A_\alpha e_i) g(A_\alpha e_k, A_\alpha e_i)$$

bulunur.

Son olarak (6. 17) denklemi yardımıyla

$$\sum_{i,j,k=1}^{n} S(e_k, e_k) g(h(e_i, e_j), h(e_i, e_j)) = r\|h\|^2 \tag{6. 51}$$

olduğu görülür. Buradan da (6. 48), (6. 49), (6. 50) ve (6. 51) denklemleri (6. 47) de yerlerine yazıldığında

$$\frac{1}{2}\Delta\|h\|^2 = \sum_{i,j,k=1}^{n} g((\bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_j} h)(e_k, e_k), h(e_i, e_j)) + \frac{1}{2n} r\|h\|^2 + \|\bar{\nabla} h\|^2 \tag{6. 52}$$

elde edilir.

Eğer (6. 52) denkleminde $H^\alpha = \sum_{k=1}^{n} h_{kk}^\alpha$ eşitliği göz önüne alınırsa

$$\frac{1}{2}\Delta\|h\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{\alpha=n+1}^{2p} h_{ij}^\alpha (\bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_j} H^\alpha) + \frac{1}{2n} r\|h\|^2 + \|\bar{\nabla} h\|^2$$

bulunur. Son denklemde yeniden M altmanifoldunun minimalliği kullanılırsa

$$\frac{1}{2}\Delta\|h\|^2 = \frac{1}{2n} r\|h\|^2 + \|\bar{\nabla} h\|^2 \tag{6. 53}$$

elde edilir.

Buradan [4] nolu kaynaktan yararlanılarak (6. 18) ile (6.53) denklemlerinin sağ tarafları karşılaştırıldığında

$$[\frac{1}{2n}r+\frac{(n+2)(3-c)}{2}-3]\|h\|^2+\sum_{\alpha,\beta}\left\{[iz(A_\alpha A_\beta)]^2+\|[A_\alpha,A_\beta]\|^2\right\}=0$$

sonucuna ulaşılır. Buradan (6. 28) ile (6. 29) eşitsizlikleri kullanıldığında

$$\|h\|^2[\frac{3}{2}\|h\|^2+\frac{1}{2n}r+\frac{(n+2)(3-c)}{2}-3]\geq 0$$

elde edilir.

Şimdi M üzerinde her yerde $\|h\|^2\leq\frac{2}{3}[-\frac{1}{2n}r+\frac{(n+2)(c-3)}{2}+3]$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda M ya total geodeziktir, ya M üzerinde

$$\|h\|^2=\frac{2}{3}[-\frac{1}{2n}r+\frac{(n+2)(c-3)}{2}+3]$$

eşitliği geçerlidir yada bazı $x\in M$ noktalarında

$$\|h\|^2(x)\geq\frac{2}{3}[-\frac{1}{2n}r(x)+\frac{(n+2)(c-3)}{2}+3]$$

elde edilir. ■

### 6.3. Kenmotsu Uzay Formun Anti-İnvaryant Altmanifoldları

Bu bölümde Kenmotsu uzay formun anti-invaryant altmanifoldları ele alınmıştır. İlk bölümde $\tilde{M}(c)$ Kenmotsu uzay formun minimal, anti-invaryant bir altmanifoldunun $\xi$ vektör alanına tanjant olması durumunda ikinci temel formunun boyunun karesinin Laplas denklemi hesaplanarak altmanifoldun pseudoparalel ve Ricci-genelleştirilmiş pseudoparalel olması durumları incelenmiştir. İkinci bölümde ise $\tilde{M}(-1)$ Kenmotsu uzay formun paralel ortalama eğriliğe sahip, anti-invaryant altmanifoldunun $\xi$ vektör alanına normal olması durumunda, benzer şekilde ikinci temel formunun boyunun karesinin Laplas denklemi hesaplanarak altmanifoldun pseudoparalel ve Ricci-genelleştirilmiş pseudoparalel olması durumları incelenmiştir.

**Tanım 6.3.1.** $\{\widetilde{M},\widetilde{\varphi},\widetilde{\xi},\widetilde{\eta},\widetilde{g}\}$, (2n+1)-boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. Her $x \in M$ için $\varphi(T_x M) \in T_x^{\perp} M$ olacak şekilde $\widetilde{M}$ manifoldunun m-boyutlu bir altmanifoldu var ise bu altmanifolda *anti-invaryant altmanifold* adı verilir. Bu durumda $\operatorname{rank}\varphi = 2n,\ m \leq n+1$ dir [40].

### 6.3.1. $\xi$ Vektör Alanının Tanjant Olması Durumu

Burada (2n+1)-boyutlu $\widetilde{M}$ Kenmotsu manifoldunun, (n+1)-boyutlu anti-invaryant bir altmanifoldu üzerinde çalışarak, $\xi \in \chi(M)$ olduğunu kabul edeceğiz. Bu durumda $\forall x \in M$ için;

$$T_x^{\perp} M = \varphi(T_x M)$$

biçimindedir.

**Önerme 6.3.1.1.** (2n+1) boyutlu $\widetilde{M}$ Kenmotsu manifoldunun (n+1)-boyutlu anti-invaryant bir altmanifoldu M ise bu durumda, $\forall Y, Z \in \chi(M)$ için ;

$$A_{\varphi Y} Z = A_{\varphi Z} Y \tag{6. 54}$$

dir [35].

(2n+1)-boyutlu φ-kesitsel eğriliği c = sabit olan bir Kenmotsu uzay formu $\widetilde{M}(c)$ nin (n+1)-boyutlu anti-invaryant altmanifoldu M olsun. M anti-invaryant altmanifoldunun eğrilik tensörü (2. 21) ve (3. 10) denklemleri yardımıyla $\forall$ X, Y, Z, W$\in \chi$(M) için;

$$\begin{aligned} R(X,Y,Z,W) = {} & \frac{(c-3)}{4}[g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W)] \\ & + \frac{(c+1)}{4}[\eta(X)\eta(Z)g(Y,W) - \eta(Y)\eta(Z)g(X,W) \\ & + \eta(Y)\eta(W)g(X,Z) - \eta(X)\eta(W)g(Y,Z)] \\ & + g(h(Y,Z),h(X,W)) - g(h(X,Z),h(Y,W)) \end{aligned} \tag{6. 55}$$

yazılabilir.

Buradan X ve W vektör alanlarına göre kontraksiyon yapıldığında M nin S Ricci tensörü

$$S(Y,Z)=\frac{1}{4}[n(c-3)-(c+1)]g(Y,Z)-\frac{1}{4}(n-1)(c+1)\eta(Y)\eta(Z)$$

$$-\sum_{i} g(h(Y,e_i),h(Z,e_i)) \qquad (6.\ 56)$$

elde edilir.

(6. 56) denkleminde Y ve Z vektör alanlarına göre yeniden kontraksiyon yapıldığında M nin r skaler eğriliği

$$\left.\begin{aligned} r&=\sum_{j} S(e_j,e_j) \\ r&=\frac{1}{4}[n^2(c-3)-n(c+5)]-\|h\|^2 \end{aligned}\right\} \qquad (6.\ 57)$$

olur.

**Yardımcı Teorem 6.3.1.2.** (2n+1)-boyutlu ve $\varphi$-kesitsel eğriliği c = sabit olan bir Kenmotsu uzay formu $\widetilde{M}(c)$ nin $\xi$ vektör alanı tanjant olacak biçimde, (n+1)-boyutlu minimal, anti-invaryant altmanifoldu M olsun. M nin ikinci temel formu h nın boyunun karesinin Laplas denklemi

$$\frac{1}{2}\Delta\|h\|^2=\|\overline{\nabla}h\|^2+[\frac{(n+1)(c-3)}{4}]\|h\|^2$$

$$+\sum_{\alpha,\beta}[iz(A_\alpha A_\beta-A_\beta A_\alpha)^2-(iz(A_\alpha A_\beta))^2] \qquad (6.\ 58)$$

biçimindedir.

**İspat :** $\{e_1,e_2,...,e_n,e_{n+1}=\xi\}$ $T_xM$ nin bir bazı olsun. M altmanifoldunun minimalliği göz önüne alındığında (6. 3) denklemi

$$(\overline{\nabla}^2h)(X,Y)=\sum_{i}(\overline{R}(e_i,X)\cdot h)(e_i,Y)$$

biçimine dönüşür.

Burada Yardımcı Teorem 6.2.4 ün ispatından yararlanıldığında

$$g((\overline{R}(e_k,e_i)\cdot h)(e_k,e_j),h(e_i,e_j))$$

$$= g(\widetilde{R}(e_k,e_i)h(e_k,e_j),h(e_i,e_j)) - g(h(\widetilde{R}(e_k,e_i)e_k,e_j),h(e_i,e_j))$$

$$- g(h(e_k,\widetilde{R}(e_k,e_i)e_j),h(e_i,e_j))$$

$$+\sum_{\alpha,\beta}[iz(A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha)^2 - (iz(A_\alpha A_\beta))^2] \tag{6. 59}$$

yazılabilir.

Diğer taraftan $\tilde{M}(c)$ Kenmotsu uzay form olduğundan, (3. 10) denklemi yardımıyla

$$\begin{aligned}
g((\widetilde{R}(e_k, e_i)h)(e_k, e_j), h(e_i, e_j)) = (\frac{c-3}{4})[\, & g(e_i, h(e_k, e_j))g(e_k, h(e_i, e_j)) \\
& - g(e_k, h(e_k, e_j))g(e_i, h(e_i, e_j))] \\
& + (\frac{c+1}{4})[\eta(e_k)\, \eta(h(e_k, e_j))g(e_i, h(e_i, e_j)) \\
& - \eta(e_i)\, \eta(h(e_k, e_j))g(e_k, h(e_i, e_j)) \\
& + \eta(e_i)\, \eta(h(e_i, e_j))g(e_k, h(e_k, e_j)) \\
& - \eta(e_k)\, \eta(h(e_k, e_j))g(e_i, h(e_k, e_j)) \\
& + g(e_k, \varphi h(e_k, e_j))g(\varphi e_i, h(e_i, e_j)) \\
& - g(e_i, \varphi h(e_k, e_j))g(\varphi e_k, h(e_i, e_j)) \\
& + 2\, g(e_k, \varphi e_i)\, g(\varphi h(e_k, e_j), h(e_i, e_j))]
\end{aligned}$$

yazılabilir.

M nin, $\tilde{M}(c)$ Kenmotsu uzay formunun anti-invaryant bir altmanifoldu olduğu göz önüne alındığında son denklemden

$$g(\widetilde{R}(e_k,e_i)h(e_k,e_j),h(e_i,e_j))$$

$$= (\frac{c+1}{4})[g(\varphi e_i,h(e_k,e_j))g(\varphi e_k,h(e_i,e_j)) - g(\varphi e_k,h(e_k,e_j))g(\varphi e_i,h(e_i,e_j))]$$

$$= (\frac{c+1}{4})[g(A_{\varphi e_i}e_k,e_j)g(A_{\varphi e_k}e_i,e_j) - g(A_{\varphi e_k}e_k,e_j)g(A_{\varphi e_i}e_i,e_j)]$$

$$= (\frac{c+1}{4})[g(A_{\varphi e_i}e_k,A_{\varphi e_k}e_i) - g(A_{\varphi e_k}e_k,A_{\varphi e_i}e_i)]$$

elde edilir.

Buradan da son denklemde (6. 54) eşitliği kullanıldığında

$$g(\tilde{R}(e_k,e_i)h(e_k,e_j),h(e_i,e_j)) = (\frac{c+1}{4})[g(A_{\varphi e_i}e_k, A_{\varphi ei}e_k) - g(A_{\varphi e_k}e_k, A_{\varphi e_i}e_i)]$$

$$= (\frac{c+1}{4})[iz(A_{\varphi e_i})^2 - iz(A_{\varphi e_k})iz(A_{\varphi e_i})]$$

olur. Yukarıdaki denklemde i, j ve k indisleri üzerinden toplam alındığında

$$\sum_{i,j,k=1}^{n+1} g(\tilde{R}(e_k,e_i)h(e_k,e_j),h(e_i,e_j)) = (\frac{c+1}{4})\|h\|^2 \qquad (6.\ 60)$$

elde edilir. $\tilde{M}(c)$ Kenmotsu uzay form olduğundan, benzer şekilde

$$\tilde{R}(e_k,e_i)e_k = (\frac{c-3}{4})[g(e_i,e_k)e_k - g(e_k,e_k)e_i]$$

$$+(\frac{c+1}{4})[\eta(e_k)\eta(e_k)e_i - \eta(e_i)\eta(e_k)e_k$$

$$+\eta(e_i)g(e_k,e_k)\xi - \eta(e_k)g(e_i,e_k)\xi]$$

denklemi yardımıyla

$$g(h(\tilde{R}(e_k,e_i)e_k,e_j),h(e_i,e_j))$$

$$= g(A_{h(e_i,e_j)}e_j, \tilde{R}(e_k,e_i)e_k)$$

$$= (\frac{c-3}{4})[g(e_i,e_k)g(e_k,A_{h(e_i,e_j)}e_j) - g(e_k,e_k)g(e_i,A_{h(e_i,e_j)}e_j)]$$

$$+(\frac{c+1}{4})[\eta(e_k)\eta(e_k)g(e_i,A_{h(e_i,e_j)}e_j) - \eta(e_i)\eta(e_k)g(e_k,A_{h(e_i,e_j)}e_j)$$

$$+\eta(e_i)g(e_k,e_k)g(\xi,A_{h(e_i,e_j)}e_j) - \eta(e_k)g(e_i,e_k)g(\xi,A_{h(e_i,e_j)}e_j)]$$

yazılabilir.

Buradan da

$$g(h(\tilde{R}(e_k,e_i)e_k,e_j),h(e_i,e_j))$$

$$= (\frac{c-3}{4})[g(A_{h(e_i,e_j)}e_j, ei) - (n+1)g(A_{h(e_i,e_j)}e_j,e_i)] + (\frac{c+1}{4})g(A_{h(e_i,e_j)}e_j,e_i)$$

elde edilir. Son denklemde i, j ve k indisleri üzerinden toplam alınarak, (6. 1) eşitliği yardımıyla

$$\sum_{i,j,k=1}^{n+1} g(h(\tilde{R}(e_k,e_i)e_k,e_j),h(e_i,e_j)) = (\frac{-n(c-3)+(c+1)}{4})\|h\|^2 \qquad (6.\ 61)$$

bulunur.

Son olarak

$$\tilde{R}(e_k,e_i)e_j=(\frac{c-3}{4})[g(e_i,e_j)e_k-g(e_k,e_j)e_i]$$

$$+(\frac{c+1}{4})[\eta(e_k)\eta(e_j)e_i-\eta(e_i)\eta(e_j)e_k$$

$$+\eta(e_i)g(e_k,e_j)\xi-\eta(e_k)g(e_i,e_j)\xi]$$

denklemi yardımıyla

$$g(h(\tilde{R}(e_k,e_i)e_j,e_k),h(e_i,e_j))$$

$$=g(A_{h(e_i,e_j)}e_k,\tilde{R}(e_k,e_i)e_j)$$

$$=(\frac{c-3}{4})[g(e_i,e_j)g(e_k,A_{h(e_i,e_j)}e_k)-g(e_k,e_j)g(e_i,A_{h(e_i,e_j)}e_k)]$$

$$+(\frac{c+1}{4})[\eta(e_k)\eta(e_j)g(e_i,A_{h(e_i,e_j)}e_k)-\eta(e_i)\eta(e_j)g(e_k,A_{h(e_i,e_j)}e_j)$$

$$+\eta(e_i)g(e_k,e_j)g(\xi,A_{h(e_i,e_j)}e_j)-\eta(e_k)g(e_i,e_j)g(\xi,A_{h(e_i,e_j)}e_j)]$$

yazılabilir. Buradan da

$$g(h(\tilde{R}(e_k,e_i)e_j,e_k),h(e_i,e_j))$$

$$=(\frac{c-3}{4})[g(e_j,A_{h(e_k,e_k)}e_j)-g(e_i,A_{h(e_i,e_j)}e_j)]$$

$$+(\frac{c+1}{4})[g(A_{h(e_i,e_j)}e_i,\xi)\eta(e_j)-g(A_{h(e_k,e_k)}e_i,\xi)\eta(e_i)]$$

elde edilir.

Son denklemde (6. 1) ve (5. 2) eşitlikleri kullanılarak i, j ve k indisleri üzerinden toplam alınıp, M nin minimalliği göz önüne alındığında

$$\sum_{i,j,k=1}^{n+1}g(h(\tilde{R}(e_k,e_i)e_j,e_k),h(e_i,e_j))=-(\frac{c-3}{4})\|h\|^2 \qquad (6.\ 62)$$

sonucuna ulaşılır.

(6. 60), (6. 61) ve (6. 62) denklemleri (6. 59) da yerlerine yazıldığında

$$\sum_{i,j,k=1}^{n+1} g((\overline{R}(e_k, e_i)\cdot h)(e_k, e_j), h(e_i, e_j))$$

$$= [\frac{(n+1)(c-3)}{4}]\|h\|^2 + \sum_{\alpha,\beta}[iz(A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha)^2 - (iz(A_\alpha A_\beta))^2]$$

olup buradan da son denklem (6. 3) ile verilen Laplas denkleminde yerine yazıldığında

$$\frac{1}{2}\Delta\|h\|^2 = \|\overline{\nabla} h\|^2 + [\frac{(n+1)(c-3)}{4}]\|h\|^2$$

$$+\sum_{\alpha,\beta}[iz(A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha)^2 - (iz(A_\alpha A_\beta))^2]$$

sonucuna ulaşılır. ■

Teorem 5.3.1 ve Teorem 5.3.3 ün ispatlarında kullandığımız yöntem sırasıyla $L = -1$ ve $L = \frac{1}{n}$ durumlarını yorumlamak için yeterli değildir. Dolayısıyla bu durumlar açık birer problemdir. Bu bölümde, Kenmotsu uzay formun anti-invaryant bir altmanifoldu için bu durumların çözümleri verilmiştir:

**Teorem 6.3.1.3.** (2n+1)-boyutlu ve $\varphi$-kesitsel eğriliği c = sabit olan bir Kenmotsu uzay form $\widetilde{M}(c)$ nin $\xi$ vektör alanı tanjant olacak biçimde, (n+1)-boyutlu minimal, anti-invaryant bir altmanifoldu M olsun. Eğer M pseudoparalel ve M üzerinde $\frac{(n+1)(c-1)}{4} \leq 0$ ise bu durumda M total geodeziktir.

**İspat :** $\widetilde{M}(c)$ Kenmotsu uzay formunun (n+1)-boyutlu anti-invaryant bir altmanifoldu M olsun. Bir $x \in M$ için $T_xM$ nin $\{e_1, e_2, ..., e_n, e_{n+1} = \xi\}$ ortonormal bazını alalım. Burada $e_{n+1} = \xi$ ve $e_{n+t} = \varphi e_t$ (t = 2, 3, …, n), biçimindedir.

Böylece Teorem 6.2.6 nın ispatından yararlanıldığında $1 \le i, j \le n+1$ ve $n+2 \le \alpha \le 2n+1$ için;

$$\frac{1}{2}\Delta\|h\|^2 = \sum_{i,j,k=1}^{n+1} g((\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_j}h)(e_k, e_k), h(e_i, e_j))$$

$$+\{g(e_i, e_j)g(h(e_k, e_k), h(e_i, e_j))$$

$$-g(e_k, e_j)g(h(e_k, e_i), h(e_i, e_j))$$

$$+g(e_k, e_i)g(h(e_j, e_k), h(e_i, e_j))$$

$$-g(e_k, e_k)g(h(e_i, e_j), h(e_i, e_j))\} + \|\overline{\nabla}h\|^2 \qquad (6.\ 63)$$

yazılabilir.

M altmanifoldu minimal olduğundan son denklemde gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\frac{1}{2}\Delta\|h\|^2 = \sum_{i,j,k=1}^{n+1} g((\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_j}h)(e_k, e_k), h(e_i, e_j)) - (n+1)\|h\|^2 + \|\overline{\nabla}h\|^2$$

sonucuna ulaşılır.

Eğer son denklemde $H^{\alpha} = \sum_{k=1}^{n+1} h_{kk}^{\alpha}$ eşitliği göz önüne alınırsa

$$\frac{1}{2}\Delta\|h\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n+1}\sum_{\alpha=n+2}^{2n+1} h_{ij}^{\alpha}(\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_j}H^{\alpha}) - (n+1)\|h\|^2 + \|\overline{\nabla}h\|^2 \qquad (6.\ 64)$$

elde edilir. Burada

$$\|H\|^2 = \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{\alpha=n+2}^{2n+1}(H^{\alpha})^2$$

biçiminde tanımlanmaktadır. (6. 64) denkleminde yeniden minimallik koşulu kullanıldığında

$$\frac{1}{2}\Delta\|h\|^2 = -(n+1)\|h\|^2 + \|\overline{\nabla}h\|^2 \qquad (6.\ 65)$$

elde edilir. Buradan (6. 58) ile (6. 65) denklemlerinin sağ tarafları karşılaştırıldığında

$$[-(n+1) + \frac{(n+1)(3-c)}{4}]\|h\|^2 - \sum_{\alpha,\beta}[iz(A_{\alpha}A_{\beta} - A_{\beta}A_{\alpha})^2 - (iz(A_{\alpha}A_{\beta}))^2] = 0$$

bulunur.

Böylece [4] nolu kaynaktan yararlanıldığında son denklem

$$[-(n+1)+\frac{(n+1)(3-c)}{4}]\|h\|^2+\sum_{\alpha,\beta}\left\{[iz(A_\alpha A_\beta)]^2+\|[A_\alpha,A_\beta]\|^2\right\}=0$$

biçimine dönüşür.

Eğer $\frac{(n+1)(c+1)}{4}\leq 0$ ise $iz(A_\alpha A_\beta)=0$ ve dolayısıyla $\|A_\alpha\|^2=iz(A_\alpha A_\alpha)=0$ olup buradan da h = 0 olduğu görülür. Böylece M altmanifoldunun total geodezik olduğu sonucuna ulaşılır. ■

**Teorem 6.3.1.4.** (2n+1)-boyutlu ve φ-kesitsel eğriliği c = sabit olan Kenmotsu uzay form $\widetilde{M}(c)$ nin $\xi$ vektör alanı tanjant olacak biçimde, (n+1)-boyutlu minimal, anti-invaryant bir altmanifoldu M olsun. Eğer M Ricci-genelleştirilmiş pseudoparalel ve M üzerinde $\frac{r}{n}-\frac{(n+1)(c-3)}{4}\geq 0$ ise bu durumda M total geodeziktir.

**İspat :** $\widetilde{M}(c)$ nin Ricci-genelleştirilmiş pseudoparalel anti-invaryant altmanifoldu M için Teorem 6.2.7 nin ispatı yardımıyla $1\leq i,j,k,l\leq n+1$ için;

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta\|h\|^2 &= \sum_{i,j,k=1}^{n+1} g((\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_j}h)(e_k,e_k),h(e_i,e_j))\\ &-\frac{1}{n}\{S(e_i,e_j)g(h(e_k,e_k),h(e_i,e_j))\\ &-S(e_k,e_j)g(h(e_k,e_i),h(e_i,e_j))\\ &+S(e_k,e_i)g(h(e_j,e_k),h(e_i,e_j))\\ &-S(e_k,e_k)g(h(e_i,e_j),h(e_i,e_j))\}+\|\overline{\nabla}h\|^2 \qquad (6.66)\end{aligned}$$

yazılabilir.

Buradan (6. 56) denklemi kullanıldığında

$$\sum_{i,j,k=1}^{n+1} S(e_i,e_j)g(h(e_k,e_k),h(e_i,e_j)) = \sum_{i,j,k=1}^{n+1}\sum_{\alpha=n+2}^{2n+1} S(e_i,e_j)g(A_\alpha e_k,e_k)g(A_\alpha e_i,e_j)$$

$$= \sum_{i,j,k=1}^{n+1}\sum_{\alpha=n+2}^{2n+1} S(e_i,e_j)iz(A_\alpha)g(A_\alpha e_i,e_j)$$

olur. M minimal olduğundan son denklemden

$$\sum_{i,j,k=1}^{n+1} S(e_i,e_j)g(h(e_k,e_k),h(e_i,e_j)) = 0 \tag{6. 67}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\sum_{i,j,k=1}^{n+1} S(e_k,e_j)g(h(e_i,e_k),h(e_i,e_j)) \tag{6. 68}$$

$$= \sum_{i,j,k=1}^{n+1}\sum_{\alpha=n+2}^{2n+1} S(e_k,e_j)g(A_\alpha e_i,e_k)g(A_\alpha e_i,e_j)$$

$$= \sum_{i,j,k=1}^{n+1}\sum_{\alpha=n+2}^{2n+1} S(e_k,e_j)g(A_\alpha e_k,e_i)g(A_\alpha e_j,e_i)$$

$$= \sum_{j,k=1}^{n+1}\sum_{\alpha=n+2}^{2n+1} S(e_k,e_j)g(A_\alpha e_k,A_\alpha e_j)$$

$$= \sum_{j,k=1}^{n+1}\sum_{\alpha=n+2}^{2n+1} \frac{1}{4}[n(c-3)-(c+1)]g(e_k,e_j)g(A_\alpha e_k,A_\alpha e_j)$$

$$-\frac{1}{4}(n-1)(c+1)g(A_\alpha e_k,A_\alpha e_j)] - \sum_{\alpha=n+1}^{2n+1} g(A_\alpha e_k,A_\alpha e_j)g(A_\alpha e_k,A_\alpha e_j)$$

ve

$$\sum_{i,j,k=1}^{n+1} S(e_k,e_i)g(h(e_j,e_k),h(e_i,e_j)) \tag{6. 69}$$

$$= \sum_{i,j,k=1}^{n+1}\sum_{\alpha=n+2}^{2n+1} S(e_k,e_i)g(A_\alpha e_j,e_k)g(A_\alpha e_i,e_j)$$

$$= \sum_{i,j,k=1}^{n+1}\sum_{\alpha=n+2}^{2n+1} S(e_k,e_j)g(A_\alpha e_k,e_j)g(A_\alpha e_i,e_j)$$

$$= \sum_{i,k=1}^{n+1}\sum_{\alpha=n+2}^{2n+1} S(e_k,e_i)g(A_\alpha e_k,A_\alpha e_i)$$

$$= \sum_{j,k=1}^{n+1}\sum_{\alpha=n+2}^{2n+1} \frac{1}{4}[n(c-3)-(c+1)]g(e_k,e_i)g(A_\alpha e_k,A_\alpha e_i)$$

$$-\frac{1}{4}(n-1)(c+1)g(A_\alpha e_k,A_\alpha e_i)] - \sum_{\alpha=n+2}^{2n+1} g(A_\alpha e_k,A_\alpha e_i)g(A_\alpha e_k,A_\alpha e_i)$$

bulunur.

Son olarak (6. 57) denklemi yardımıyla

$$\sum_{i,j,k=1}^{n+1} S(e_k, e_k) g(h(e_i, e_j), h(e_i, e_j)) = r\|h\|^2 \tag{6. 70}$$

olduğu görülür. Buradan da (6. 67), (6. 68), (6. 69) ve (6. 70) denklemleri (6. 66) da yerlerine yazıldığında

$$\frac{1}{2}\Delta\|h\|^2 = \sum_{i,j,k=1}^{n+1} g((\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_j} h)(e_k, e_k), h(e_i, e_j)) + \frac{r}{n}\|h\|^2 + \|\overline{\nabla} h\|^2 \tag{6. 71}$$

elde edilir.

Eğer (6. 71) denkleminde $H^{\alpha} = \sum_{k=1}^{n+1} h_{kk}^{\alpha}$ eşitliği göz önüne alınırsa

$$\frac{1}{2}\Delta\|h\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n+1}\sum_{\alpha=n+2}^{2n+1} h_{ij}^{\alpha}(\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_j} H^{\alpha}) + \frac{1}{n} r\|h\|^2 + \|\overline{\nabla} h\|^2$$

bulunur. Son denklemde yeniden minimallik koşulu kullanıldığında

$$\frac{1}{2}\Delta\|h\|^2 = \frac{r}{n}\|h\|^2 + \|\overline{\nabla} h\|^2 \tag{6. 72}$$

elde edilir. Buradan (6. 58) ile (6.72) denklemlerinin sağ tarafları karşılaştırıldığında

$$[\frac{r}{n} - \frac{(n+1)(c-3)}{4}]\|h\|^2 + \sum_{\alpha,\beta}\left\{[iz(A_{\alpha}A_{\beta})]^2 + \|[A_{\alpha}, A_{\beta}]\|^2\right\} = 0$$

sonucuna ulaşılır. Eğer $\frac{r}{n} - \frac{(n+1)(c-3)}{4} \geq 0$ ise $iz(A_{\alpha}A_{\beta}) = 0$ ve dolayısı ile $\|A_{\alpha}\|^2 = iz(A_{\alpha}A_{\alpha}) = 0$ olup buradan da h = 0 olduğu görülür. Böylece M altmanifoldu total geodezik olur. ■

### 6.3.2. $\xi$ Vektör Alanının Normal Olması Durumu

Burada (2n+1)-boyutlu $\widetilde{M}$ Kenmotsu manifoldunun n-boyutlu anti-invaryant bir altmanifoldu M üzerinde çalışarak, $\xi \in \chi^{\perp}(M)$ olduğunu kabul edeceğiz. Bu durumda $\forall x \in M$ için;

$$T_x^{\perp}M = \varphi(T_x M) + Sp\{\xi\}$$

biçimindedir.

**Önerme 6.3.2.1.** (2n+1)-boyutlu $\widetilde{M}$ Kenmotsu manifoldunun $n \geq 4$ boyutlu, anti-invaryant bir altmanifoldu M olsun. $\xi \in \chi^{\perp}(M)$ olacak biçimde $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için;

**(i)** $A_{\varphi Z}Y = A_{\varphi Y}Z$ (6. 73)

**(ii)** $A_{\xi}X = -X$ (6. 74)

**(iii)** $\nabla^{\perp}_{X}\xi = 0$ (6. 75)

özellikleri geçerlidir [35].

(6. 74) denkleminin bir sonucu olarak aşağıdaki önerme verilebilir:

**Önerme 6.3.2.2.** (2n+1)-boyutlu $\widetilde{M}$ Kenmotsu manifoldunun $\xi$ vektör alanı normal olacak biçimde, anti-invaryant bir altmanifoldu M minimal olamaz [35].

(2n+1)-boyutlu φ-kesitsel eğriliği c = sabit olan bir Kenmotsu uzay formu $\widetilde{M}(c)$ nin $\xi$ vektör alanı normal olacak biçimde, n-boyutlu anti-invaryant bir altmanifoldu M olsun. M anti-invaryant altmanifoldunun eğrilik tensörü (2. 21) ve (3. 10) denklemleri yardımıyla $\forall$ X, Y, Z, W $\in \chi$ (M) için;

$$R(X,Y,Z,W) = \frac{(c-3)}{4}[g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W)]$$

$$+ g(h(Y, Z), h(X, W)) - g(h(X, Z), h(Y, W)) \quad (6.\ 76)$$

yazılabilir. Buradan X ve W vektör alanlarına göre kontraksiyon yapıldığında M nin S Ricci tensörü

$$S(Y,Z) = \frac{1}{4}[(n-1)(c-3)]g(Y,Z) - \sum_{i} g(h(Y,e_i), h(Z,e_i)) \quad (6.\ 77)$$

elde edilir. (6. 77) denkleminden Y ve Z vektör alanlarına göre yeniden kontraksiyon yapıldığında M nin r skalar eğriliği

$$\left.\begin{aligned} r &= \sum_{j} S(e_j, e_j) \\ r &= \frac{1}{4}[n(n-1)(c-3)] - \|h\|^2 \end{aligned}\right\} \quad (6.\ 78)$$

biçimindedir.

**Yardımcı Teorem 6.3.2.3.** (2n+1)-boyutlu ve $\varphi$-kesitsel eğriliği c = sabit olan bir Kenmotsu uzay formu $\tilde{M}(c)$ nin $\xi$ vektör alanı normal olacak biçimde, $n \geq 4$ boyutlu paralel ortalama eğriliğe sahip, anti-invaryant bir altmanifoldu M olsun. Bu durumda, M nin ikinci temel formu h nın boyunun karesinin Laplas denklemi

$$\frac{1}{2}\Delta\|h\|^2 = \|\nabla h\|^2 + [\frac{n(c-3)+(c+1)}{4}]\|h\|^2 - \frac{(c-1)}{2}(izh)^2$$

$$+\frac{n(n-1)(c+1)}{4} + \sum_{\alpha,\beta}[iz(A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha)^2 - (iz(A_\alpha A_\beta))^2] \qquad (6.\ 79)$$

ile verilir.

**İspat :** (2n+1)-boyutlu $\tilde{M}(c)$ Kenmotsu manifoldunun n-boyutlu anti-invaryant bir altmanifoldu M olsun. M nin

$$\{e_1,\ldots, e_n, \varphi e_1=e_1^*,\ldots, \varphi e_n=e_n^*,\ e_{n+1}^*=\xi\}$$

ortonormal bazını alalım. M nin ikinci temel formunun boyunun karesinin Laplas denkleminin tanım gereği

$$\frac{1}{2}\Delta\|h\|^2 = g(\bar{\nabla}^2 h, h) + \|\nabla h\|^2 \qquad (6.\ 80)$$

biçiminde olduğunu biliyoruz. Buradan (6. 12) denkleminden yararlanıldığında

$$g(\bar{\nabla}^2 h\,,\, h)(X,\, Y) = \sum_{\mathbf{i}}(\bar{\nabla}_{e_i}\bar{\nabla}_{e_i} h)(X, Y)$$

$$= \sum_{\mathbf{i}}[(\bar{R}(e_i, X)\cdot h)(e_i, Y) + (\tilde{\nabla}_{\mathbf{X}}(\tilde{R}(e_i, Y)e_i)^{\perp})^{\perp}$$

$$+ (\tilde{\nabla}_{e_i}(\tilde{R}(e_i, X)Y)^{\perp})^{\perp}] + \nabla^{\perp}_{\mathbf{X}}\nabla^{\perp}_{\mathbf{Y}}(izh)$$

yazılabilir. M nin paralel ortalama eğriliğe sahip olduğu göz önüne alındığında son denklem,

$$(\bar{\nabla}^2 h)(X, Y) = \sum_{\mathbf{i}}(\bar{R}(e_i, X)\cdot h)(e_i, Y)$$

biçimine dönüşür.

Böylece Yardımcı Teorem 6.2.4 ün ispatından yararlanıldığında

$$
\begin{aligned}
& g(\overline{R}(e_k, e_i)h(e_k, e_j), h(e_i, e_j)) \\
& = g(\widetilde{R}(e_k, e_i)h(e_k, e_j), h(e_i, e_j)) \\
& - g(h(\widetilde{R}(e_k, e_i)e_k, e_j), h(e_i, e_j)) \\
& - g(h(e_k, \widetilde{R}(e_k, e_i)e_j), h(e_i, e_j)) \\
& + \sum_{\alpha,\beta}[iz(A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha)^2 - (iz(A_\alpha A_\beta))^2]
\end{aligned} \tag{6. 81}
$$

yazılabilir.

Diğer taraftan $\tilde{M}(c)$ Kenmotsu uzay form olduğundan (3. 10) yardımıyla

$$
\begin{aligned}
g(\widetilde{R}(e_k, e_i)h(e_k, e_j), h(e_i, e_j)) = (\frac{c-3}{4})[\, & g(e_i, h(e_k, e_j))g(e_k, h(e_i, e_j)) \\
& - g(e_k, h(e_k, e_j))g(e_i, h(e_i, e_j))] \\
& + (\frac{c+1}{4})[\eta(e_k)\, \eta(h(e_k, e_j))g(e_i, h(e_i, e_j)) \\
& - \eta(e_i)\, \eta(h(e_k, e_j))g(e_k, h(e_i, e_j)) \\
& + \eta(e_i)\, \eta(h(e_i, e_j))g(e_k, h(e_k, e_j)) \\
& - \eta(e_k)\, \eta(h(e_k, e_j))g(e_i, h(e_k, e_j)) \\
& + g(e_k, \varphi h(e_k, e_j))g(\varphi e_i, h(e_i, e_j)) \\
& - g(e_i, \varphi h(e_k, e_j))g(\varphi e_k, h(e_i, e_j)) \\
& + 2\, g(e_k, \varphi e_i)\, g(\varphi h(e_k, e_j), h(e_i, e_j))]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan da

$$
\begin{aligned}
g(\widetilde{R}(e_k, e_i)h(e_k, e_j), h(e_i, e_j)) & = (\frac{c+1}{4})[g(\varphi e_i, h(e_k, e_j))g(\varphi e_k, h(e_i, e_j)) \\
& \quad - g(\varphi e_k, h(e_k, e_j))g(\varphi e_i, h(e_i, e_j))] \\
& = (\frac{c+1}{4})[g(A_{\varphi ei}e_k, e_j)g(A_{\varphi ek}e_i, e_j) \\
& \quad - g(A_{\varphi ek}e_k, e_j)g(A_{\varphi ei}e_i, e_j)]
\end{aligned}
$$

olup son denklemde (6. 80) denklemi kullanıldığında

$$
g(\widetilde{R}(e_k, e_i)h(e_k, e_j), h(e_i, e_j)) = (\frac{c+1}{4})[g(A_{\varphi ek}e_i, A_{\varphi ek}e_i) - g(A_{\varphi ek}e_k, A_{\varphi ei}e_i)]
$$

yazılabilir.

Buradan da i, j ve k indisleri üzerinden toplam alındığında

$$\sum_{i,j,k=1}^{n} g(\tilde{R}(e_k, e_i)h(e_k, e_j), h(e_i, e_j)) = \frac{(c+1)}{4}[\|h\|^2 - (izh)^2 + n(n-1)] \tag{6. 82}$$

bulunur.

Benzer şekilde

$$\tilde{R}(e_k, e_i)e_k = (\frac{c-3}{4})[g(e_i, e_k)e_k - g(e_k, e_k)e_i]$$

$$= (\frac{c-3}{4})[g(e_i, e_k)e_k - ne_i]$$

ve

$$h(\tilde{R}(e_k, e_i)e_k, e_j) = (\frac{c-3}{4})[g(e_i, e_k)h(e_k, e_j) - nh(e_i, e_j)]$$

biçiminde olup buradan eşitliğin her iki yanının $h(e_i, e_j)$ ile iç çarpımı alındığında,

$$g(h(\tilde{R}(e_k, e_i)e_k, e_j), h(e_i, e_j)) = g(A_{h(ei,\, ej)}\tilde{R}(e_k, e_i)e_k, e_j)$$

$$= g(A_{h(ei,\, ej)}e_j, \tilde{R}(e_k, e_i)e_k)$$

$$= (\frac{c-3}{4})[g(e_i, e_k)\, g(A_{h(ei,\, ej)}e_j, e_k) - ng(A_{h(ei,\, ej)}e_j, e_i)]$$

$$= (1-n)(\frac{c-3}{4})g(A_{h(ei,\, ej)}e_j, e_i)$$

$$= (1-n)\frac{(c-3)}{4}\|h\|^2 \tag{6. 83}$$

bulunur.

Son olarak,

$$\tilde{R}(e_k, e_i)e_j = (\frac{c-3}{4})[g(e_i, e_j)e_k - g(e_k, e_j)e_i]$$

denklemi göz önüne alınarak i, j ve k indisleri üzerinden toplam alındığında

$$\sum_{i,j,k=1}^{n} g(h(\tilde{R}(e_k, e_i)e_j, e_k), h(e_i, e_j)) = g(A_{h(ei,\, ej)}\tilde{R}(e_k, e_i)e_j, e_k)$$

$$= g(\tilde{R}(e_k, e_i)e_j, A_{h(ei,\, ej)}e_k)$$

$$= (\frac{c-3}{4})[g(e_i, e_j)\, g(A_{h(ei,\, ej)}e_k, e_k) - g(A_{h(ei,\, ej)}e_j, e_i)]$$

$$= (\frac{c-3}{4})[(izh)^2 - g(A_{h(ei,\, ej)}e_j, e_i)]$$

$$= (\frac{c-3}{4})[(izh)^2 - \|h\|^2] \tag{6. 84}$$

elde edilir.

(6. 82), (6. 83) ve (6. 84) denklemleri (6. 81) eşitliğinde yerlerine yazıldığında

$$g(\overline{R}(e_k, e_i)h(e_k, e_j), h(e_i, e_j)) = [\frac{n(c-3)+(c+1)}{4}]\|h\|^2 \tag{6. 85}$$

$$-\frac{(c-1)}{2}(izh)^2 + \frac{n(n-1)(c+1)}{4}$$

$$+\sum_{\alpha,\beta}[iz(A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha)^2 - (iz(A_\alpha A_\beta))^2]$$

sonucuna ulaşılır. (6. 85) denklemi (6. 81) de yerine yazılarak, (6. 1) denkleminde kullanıldığında

$$\frac{1}{2}\Delta\|h\|^2 = \|\overline{\nabla} h\|^2 + [\frac{n(c-3)+(c+1)}{4}]\|h\|^2 - \frac{(c-1)}{2}(izh)^2$$

$$+\frac{n(n-1)(c+1)}{4} + \sum_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}[iz(A_{\boldsymbol{\alpha}} A_{\boldsymbol{\beta}} - A_{\boldsymbol{\beta}} A_{\boldsymbol{\alpha}})^2 - (iz(A_{\boldsymbol{\alpha}} A_{\boldsymbol{\beta}}))^2]$$

elde edilir. ■

**Teorem 6.3.2.4.** $n \geq 4$ olmak üzere, (2n+1)-boyutlu ve φ-kesitsel eğriliği $c=-1$ olan bir Kenmotsu uzay formu $\tilde{M}(-1)$ in $\xi$ vektör alanı normal olacak biçimde, paralel ortalama eğriliğe sahip, pseudoparalel bir altmanifoldu M olsun. Bu durumda M üzerinde

$$\|h\|^2 \geq \frac{2(L+1)(izh)^2}{2n(L+1)+3\|h\|^2}$$

eşitliği geçerlidir.

**İspat :** (2n+1)-boyutlu $\tilde{M}(-1)$ Kenmotsu uzay formunun n-boyutlu anti-invaryant bir altmanifoldu M olsun. M nin

$$\{e_1,\ldots, e_n, \varphi e_1=e_1^*, \ldots, \varphi e_n=e_n^*, e_{n+1}^*=\xi\}$$

ortonormal bazını alalım. Buradan Teorem 6.2.6 yardımı ile $1 \leq i, j \leq n$ ve $n+1 \leq \alpha \leq 2n+1$ için;

$$\frac{1}{2}\Delta\|h\|^2 = \sum_{i,j,k=1}^{n} g((\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_j}h)(e_k,e_k), h(e_i,e_j))$$

$$-L\{g(e_i,e_j)g(h(e_k,e_k),h(e_i,e_j)) - g(e_k,e_j)g(h(e_k,e_i),h(e_i,e_j))$$

$$+g(e_k,e_i)g(h(e_j,e_k),h(e_i,e_j)) - g(e_k,e_k)g(h(e_i,e_j),h(e_i,e_j))\} + \|\nabla h\|^2$$

yazılabilir.

Son denklemde gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\frac{1}{2}\Delta\|h\|^2 = \sum_{i,j,k=1}^{n} g((\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_j}h)(e_k,e_k),h(e_i,e_j)) \tag{6. 86}$$

$$+Ln\|h\|^2 - L(izh)^2 + \|\overline{\nabla}h\|^2$$

sonucuna ulaşılır.

(6. 86) denkleminde $H^{\alpha} = \sum_{k=1}^{n} h_{kk}^{\alpha}$ eşitliği göz önüne alındığında

$$\frac{1}{2}\Delta\|h\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n}\sum_{\alpha=n+1}^{2n+1} h_{ij}^{\alpha}(\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_j}H^{\alpha}) \tag{6. 87}$$

$$+Ln\|h\|^2 - L(izh)^2 + \|\overline{\nabla}h\|^2$$

elde edilir. Burada

$$\|H\|^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{\alpha=n+1}^{2n+1}(H^{\alpha})^2$$

biçiminde tanımlanmaktadır. M paralel ortalama eğriliğe sahip olduğundan , (6. 87) denklemi

$$\frac{1}{2}\Delta\|h\|^2 = Ln\|h\|^2 - L(izh)^2 + \|\overline{\nabla}h\|^2 \tag{6. 88}$$

biçimine dönüşür. Buradan (6. 79) ile (6. 88) denklemlerinin sağ tarafları karşılaştırıldığında

$$[\frac{4Ln-n(c-3)-(c+1)}{4}]\|h\|^2 + \frac{(c-1-2L)}{2}(izh)^2 + \frac{n(n-1)(c+1)}{4}$$

$$+\sum_{\alpha,\beta}[iz(A_{\alpha}A_{\beta}-A_{\beta}A_{\alpha})^2 - (iz(A_{\alpha}A_{\beta}))^2] = 0$$

olur.

[4] nolu kaynaktan yararlanıldığında yukarıdaki denklemden

$$[\frac{4Ln-n(c-3)-(c+1)}{4}]\|h\|^2 + \frac{(c-1-2L)}{2}(izh)^2 + \frac{n(n-1)(c+1)}{4}$$

$$+\sum_{\alpha,\beta}\left\{[iz(A_{\alpha}A_{\beta})]^2 + \|[A_{\alpha},A_{\beta}]\|^2\right\} = 0$$

elde edilir.

$c=-1$ olduğundan son denklemden

$$n(L+1)\|h\|^2-(L+1)(izh)^2\sum_{\alpha,\beta}\left\{[iz(A_\alpha A_\beta)]^2+\|[A_\alpha,A_\beta]\|^2\right\}=0$$

bulunur.

Son denklemde A. M. Li ve J. M. Li nin [26] nolu kaynaktaki eşitsizlikleri kullanıldığında M üzerinde

$$\|h\|^2\geq\frac{2(L+1)(izh)^2}{2n(L+1)+3\|h\|^2}$$

eşitliği elde edilir. ■

**Teorem 6.3.2.5.** $n\geq 4$ olmak üzere, (2n+1)-boyutlu ve φ-kesitsel eğriliği $c=-1$ olan bir Kenmotsu uzay formu $\tilde{M}(-1)$ in $\xi$ vektör alanı normal olacak biçimde, paralel ortalama eğriliğe sahip, anti-invaryant bir altmanifoldu M olsun. Eğer M Ricci-genelleştirilmiş pseudoparalel ise bu durumda M üzerinde

$$\|h\|^2\geq\frac{[2-2L(n-1)](izh)^2}{2L[(izh)^2+r]+2n+3\|h\|^2}$$

eşitliği geçerlidir.

**İspat :** $\tilde{M}(-1)$ nin Ricci-genelleştirilmiş pseudoparalel anti-invaryant altmanifoldu M için Teorem 6.2.7 nin ispatı yardımı ile $1\leq i,j,k,l\leq n$ için;

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta\|h\|^2=\sum_{i,j,k=1}^{n}&g((\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_j}h)(e_k,e_k),h(e_i,e_j))\\&-L\{S(e_i,e_j)g(h(e_k,e_k),h(e_i,e_j))\\&-S(e_k,e_j)g(h(e_k,e_i),h(e_i,e_j))\\&+S(e_k,e_i)g(h(e_j,e_k),h(e_i,e_j))\\&-S(e_k,e_k)g(h(e_i,e_j),h(e_i,e_j))\}+\|\overline{\nabla}h\|^2\end{aligned}\qquad(6.\ 89)$$

yazılabilir.

Buradan (6. 77) denklemi kullanıldığında

$$\sum_{i,j,k=1}^{n} S(e_i,e_j)g(h(e_k,e_k),h(e_i,e_j))$$

$$=\sum_{i,j,k=1}^{n}\sum_{\alpha=n+1}^{2p} S(e_i,e_j)g(A_{\alpha}e_k,e_k)g(A_{\alpha}e_i,e_j)$$

$$=\sum_{i,j,k=1}^{n}\sum_{\alpha=n+1}^{2p} S(e_i,e_j)g(A_{\alpha}e_i,e_j)(izh)$$

$$=\sum_{i,j,k=1}^{n}\sum_{\alpha=n+1}^{2p} [\frac{1}{4}(n-1)(c-3)]g(e_i,e_j)g(A_{\alpha}e_i,e_j)(izh)$$

$$-\sum_{i,j,k=1}^{n}\sum_{\alpha=n+1}^{2p} g(A_{\alpha}e_i,A_{\alpha}e_j)g(A_{\alpha}e_i,e_j)(izh)$$

$$=\frac{1}{4}(n-1)(c-3)(izh)^2-\|h\|^2(izh)^2 \qquad (6.\ 90)$$

olur.

Benzer şekilde

$$\sum_{i,j,k=1}^{n} S(e_k,e_j)g(h(e_i,e_k),h(e_i,e_j))$$

$$=\sum_{i,j,k=1}^{n}\sum_{\alpha=n+1}^{2p} S(e_k,e_j)g(A_{\alpha}e_i,e_k)g(A_{\alpha}e_i,e_j)$$

$$=\sum_{i,j,k=1}^{n}\sum_{\alpha=n+1}^{2p} S(e_k,e_j)g(A_{\alpha}e_k,e_i)g(A_{\alpha}e_j,e_i)$$

$$=\sum_{j,k=1}^{n}\sum_{\alpha=n+1}^{2p} S(e_k,e_j)g(A_{\alpha}e_k,A_{\alpha}e_j)$$

$$=\sum_{j,k=1}^{n}\sum_{\alpha=n+1}^{2p} [\frac{1}{4}(n-1)(c-3)]g(e_k,e_j)g(A_{\alpha}e_k,A_{\alpha}e_j)$$

$$-\sum_{\alpha=n+1}^{2p} g(A_{\alpha}e_k,A_{\alpha}e_j)g(A_{\alpha}e_k,A_{\alpha}e_j) \qquad (6.\ 91)$$

ve

$$\sum_{i,j,k=1}^{n} S(e_k, e_i) g(h(e_j, e_k), h(e_i, e_j))$$

$$= \sum_{i,j,k=1}^{n} \sum_{\alpha=n+1}^{2p} S(e_k, e_i) g(A_{\alpha} e_j, e_k) g(A_{\alpha} e_i, e_j)$$

$$= \sum_{i,j,k=1}^{n} \sum_{\alpha=n+1}^{2p} S(e_k, e_j) g(A_{\alpha} e_k, e_j) g(A_{\alpha} e_i, e_j)$$

$$= \sum_{i,k=1}^{n} \sum_{\alpha=n+1}^{2p} S(e_k, e_i) g(A_{\alpha} e_k, A_{\alpha} e_i)$$

$$= \sum_{j,k=1}^{n} \sum_{\alpha=n+1}^{2p} [\frac{1}{4}(n-1)(c-3)] g(e_k, e_i) g(A_{\alpha} e_k, A_{\alpha} e_i)$$

$$- \sum_{\alpha=n+1}^{2p} g(A_{\alpha} e_k, A_{\alpha} e_i) g(A_{\alpha} e_k, A_{\alpha} e_i) \tag{6. 92}$$

bulunur. Son olarak (6. 78) denklemi yardımı ile

$$\sum_{i,j,k=1}^{n} S(e_k, e_k) g(h(e_i, e_j), h(e_i, e_j)) = r\|h\|^2 \tag{6. 93}$$

olduğu görülür.

Buradan da (6. 90), (6. 91), (6. 92) ve (6. 93) denklemleri (6. 89) da yerlerine yazıldığında

$$\frac{1}{2}\Delta\|h\|^2 = \sum_{i,j,k=1}^{n} g((\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_j} h)(e_k, e_k), h(e_i, e_j)) + \|\overline{\nabla} h\|^2$$
$$-L\left[\frac{1}{4}(n-1)(c-3)(izh)^2 - [(izh)^2 + r]\|h\|^2\right]$$

elde edilir. Son denklemde $H^{\alpha} = \sum_{k=1}^{n} h_{kk}^{\alpha}$ eşitliği göz önüne alınırsa

$$\frac{1}{2}\Delta\|h\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{\alpha=n+1}^{2p} h_{ij}^{\alpha} (\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_j} H^{\alpha}) + \|\overline{\nabla} h\|^2$$
$$-L\left[\frac{1}{4}(n-1)(c-3)(izh)^2 - [(izh)^2 + r]\|h\|^2\right]$$

bulunur.

Diğer taraftan M paralel ortalama eğriliğe sahip olduğundan yukarıdaki denklemden

$$\frac{1}{2}\Delta\|h\|^2 = -L\left[\frac{1}{4}(n-1)(c-3)(izh)^2 - [(izh)^2 + r]\|h\|^2\right] + \|\bar{\nabla} h\|^2 \tag{6. 94}$$

elde edilir.

Buradan [4] nolu kaynaktan yararlanılarak (6.79) ile (6.94) denklemlerinin sağ tarafları karşılaştırıldığında

$$[\frac{2(c-1) - L(n-1)(c-3)}{4}](izh)^2 + [\frac{4L((izh)^2 + r) - n(c-3) + (c+1)}{4}]\|h\|^2$$

$$+\frac{n(n-1)(c+1)}{4} + \sum_{\alpha,\beta}\left\{[iz(A_\alpha A_\beta)]^2 + \|[A_\alpha, A_\beta]\|^2\right\} = 0$$

sonucuna ulaşılır. Son denklemde $c = -1$ alındığında

$$[L(n-1) - 1](izh)^2 + (L[(izh)^2 + r] + n)\|h\|^2$$

$$+\sum_{\alpha,\beta}\left\{[iz(A_\alpha A_\beta)]^2 + \|[A_\alpha, A_\beta]\|^2\right\} = 0$$

elde edilir.

Son denklemde A. M. Li ve J. M. Li nin [26] nolu kaynaktaki eşitsizlikleri kullanıldığında

$$\|h\|^2 \geq \frac{[2 - 2L(n-1)](izh)^2}{2L[(izh)^2 + r] + 2n + 3\|h\|^2}$$

sonucuna ulaşılır. Bu da teoremin ispatını bitirir. ■

Şimdi, hemen hemen değme metrik manifoldun bir slant altmanifoldunu tanımlayarak, katlı çarpım yardımıyla bir Kenmotsu manifoldun total geodezik olan ve total geodezik olmayan, invaryant ve aşikar olmayan slant altmanifold örneklerini verelim:

**Tanım 6.3.2.6.** $\tilde{M}$ (2n+1)-boyutlu hemen hemen değme metrik manifoldunun $\xi$ vektör alanına tanjant bir altmanifoldu M olsun. Eğer, her X vektör alanı için $\varphi(X)$ vektör alanı ile $p \in M$ noktasındaki $T_pM$ tanjant uzayı arasındaki $\theta(X)$ açısı sabit ise M manifolduna *slant altmanifold* adı verilir. Burada $\theta(X)$ açısı, $p \in M$ noktası $X_p \in T_pM$ $(X_p \neq \xi_p)$ tanjant vektörünün seçiminden bağımsızdır.

Özel olarak, $\theta = 0$ ise M slant altmanifoldu invaryant, $\theta = \frac{\pi}{2}$ ise anti-invaryant olarak adlandırılır. Ne invaryant, ne de anti-invaryant slant altmanifolda *aşikar olmayan slant altmanifold* adı verilir [5].

$\tilde{M}(c)$ kompleks uzay formun $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$ olacak biçimde bir slant altmanifoldu M, f de $\mathbb{R}$ üzerinde pozitif tanımlı, diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\mathbb{R} \times_f M$, $\mathbb{R} \times_f \tilde{M}(c)$ katlı çarpım manifoldunun yine katlı çarpım bir altmanifoldu olur [10].

Ayrıca $\mathbb{R} \times_f M$, $\mathbb{R} \times_f \tilde{M}(c)$ nin bir slant altmanifoldu olup, $\mathbb{R} \times_f M$ nin $\mathbb{R} \times_f \tilde{M}(c)$ nin total geodezik olması için gerek ve yeter koşul M nin $\tilde{M}(c)$ nin bir total geodezik altmanifoldu olmasıdır [10].

**Örnek 6.3.2.7.** M, $\mathbb{C}^4$ kompleks uzayında $k > 0$ için;

$$x(u, v, w, z) = (u, v, k\sin w, k\sin z, kw, kz, k\cos w, k\cos z)$$

kartezyen denklemi ile verilen, $\theta = \cos^{-1} k$ slant açısına sahip bir Kaehler slant altmanifold olsun [9].

k = 1 için slant açısı $\theta = 0$ olup M, $\mathbb{C}^4$ kompleks uzayının invaryant bir altmanifoldu olur ve M nin denklemi,

$$x(u, v, w, z) = (u, v, \sin w, \sin z, w, z, \cos w, \cos z)$$

biçimine dönüşür. Böylece M, $\mathbb{C}^4$ kompleks uzayının total geodezik olmayan bir altmanifoldu olur.

Şimdi $\mathbb{R}$ üzerinde pozitif tanımlı, $f(t) = ce^t$ diferensiyellenebilir fonksiyonunu alalım. Bu durumda, $\mathbb{R} \times_f M$, $\mathbb{R} \times_f \mathbb{C}^4$ katlı çarpım manifoldunun yine katlı çarpım bir altmanifoldu olur. Buradan da $\mathbb{R} \times_f M$ ve $\mathbb{R} \times_f \mathbb{C}^4$ manifoldlarının birer Kenmotsu manifold olduğu görülmektedir. Böylece 9-boyutlu $\mathbb{R} \times_f \mathbb{C}^4$ Kenmotsu manifoldunun invaryant, total geodezik olmayan $\mathbb{R} \times_f M$ Kenmotsu altmanifoldu elde edilir.

**Örnek 6.3.2.8.** M, $\mathbb{C}^2$ kompleks uzayında k>0 sabit reel sayısı için;

$$x(u,v)=(e^{ku}\cos u\cos v, e^{ku}\sin u\cos v, e^{ku}\cos u\sin v, e^{ku}\sin u\sin v)$$

kartezyen denklemi ile verilen minimal olmayan, $\theta=\cos^{-1}(\frac{k}{\sqrt{1+k^2}})$ slant açısına sahip, ortalama eğriliği $\|H\|=\frac{e^{-ku}}{\sqrt{1+k^2}}$ biçiminde olan aşikar olmayan slant bir yüzey olsun [9].

Burada, özel olarak k = 1 seçildiğinde $\theta=\frac{\pi}{4}$ olup, M yüzeyi

$$x(u,v)=(e^{u}\cos u\cos v, e^{u}\sin u\cos v, e^{u}\cos u\sin v, e^{u}\sin u\sin v)$$

denklemine sahip, $\mathbb{C}^2$ kompleks uzayının total geodezik olmayan $\frac{\pi}{4}$-slant altmanifoldu olur.

Benzer şekilde $\mathbb{R}$ üzerinde pozitif tanımlı, $f(t)=ce^t$ diferensiyellenebilir fonksiyonunu alalım. Bu durumda, $\mathbb{R}\times_f M$, $\mathbb{R}\times_f \mathbb{C}^2$ katlı çarpım manifoldunun yine bir katlı çarpım altmanifoldu olur. Buradan da $\mathbb{R}\times_f M$ ve $\mathbb{R}\times_f \mathbb{C}^2$ manifoldlarının birer Kenmotsu manifold olduğu görülmektedir. Böylece 5-boyutlu $\mathbb{R}\times_f \mathbb{C}^2$ Kenmotsu manifoldunun invaryant, total geodezik olmayan $\mathbb{R}\times_f M$ Kenmotsu altmanifoldu elde edilir.

# 7. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

4. bölümde, bir Kenmotsu manifoldu üzerinde çeyrek-simetrik metrik koneksiyon incelenerek, çeyrek-simetrik metrik koneksiyon ile Levi-Civita koneksiyonu arasındaki bağıntı bulunmuş ve sırasıyla eğrilik tensörü, Ricci tensörü ve skaler eğrilikleri karşılaştırılmış olup Teorem 4.7, Teorem 4.8, Teorem 4.9 ve Teorem 4.10 ispatlanmıştır.

5. bölümde, bir Kenmotsu manifoldun rekürent ve pseudoparalel altmanifoldları ile bir Kenmotsu uzay formun yarı-umbilik hiperyüzeyleri incelenerek Teorem 5.1.1, Teorem 5.1.2, Teorem 5.1.4, Teorem 5.2.1, Teorem 5.3.1, Teorem 5.3.3, Teorem 5.3.4, Teorem ve Teorem 5.3.6. ispatlanmıştır.

Son bölümde bir Kenmotsu uzay formun invaryant ve anti-invaryant altmanifoldları incelenerek, Teorem 6.2.6, Torem 6.2.7, Teorem 6.3.1.3, Teorem 6.3.1.4, Teorem 6.3.2.4 ve Teorem 6.3.2.5 ispatlanmıştır.

## 8. KAYNAKLAR


[1] Arslan, K., Lumiste, U., Murathan, C. and Özgür, C., ''2-semiparallel surfaces in space forms'' *Two particular cases. Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math.* **49** (2000), no. 3, 139-148.

[2] Asperti, A. C., Lobos, G. A., Mercuri, F., ''Pseudo-parallel immersions in space forms'', 10th School on Differential Geometry (Portuguese) (Belo Horizonte, 1998). *Mat. Contemp.* **17** (1999), 59-70.

[3] Bishop, R. L. and O'Neill B., ''Manifolds of negative curvature'', *Trans. Amer. Math. Soc.* **145** 1969, 1-49.

[4] Blair, D. E., Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds, Progress in Mathematics, 203. Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 2002.

[5] Cabrerizo, J. L., Carriazo, A., Fernández, L. M. and Fernández, M., '' Slant submanifolds in Sasakian manifolds'', *Glasg. Math. J.* **42** (2000), no. 1, 125-138.

[6] Chaki, M. C., ''On pseudo symmetric manifolds'', *An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi Sect. I a Mat.* **33** (1987), no. 1, 53-58.

[7] Chaki, M. C. and Maity, R. K., ''On quasi Einstein manifolds'', *Publ. Math. Debrecen* **57** (2000), no. 3-4, 297-306.

[8] Chen, B.Y, Geometry of submanifolds, Pure and Applied Mathematics, No. 22. Marcel Dekker, Inc., New York, (1973).

[9] Chen, B. Y., Geometry of slant submanifolds. Katholieke Universiteit Leuven, Louvain, 1990.

[10] Chen, B. Y., ''On warped product immersions'', *Journal of Geometry*, **82** (2005), 36-49.

[11] Chinea, D. And Gonzales, C., ''A classification of almost contact metric manifolds'' *Ann. Mat. Pura. Applic.*, IV Ser., (1990), 15-36.

[12] De, U. C. and Guha, N., ''On generalised recurrent manifolds'', *Proc. Math. Soc.* **7** (1991), 7-11.

[13] De, U. C., Shaikh, A. A. and Biswas, S., ''On φ-recurrent Sasakian manifolds'' *Novi Sad J. Math.* **33** (2003), no. 2, 43-48.

[14] De, U. C.and Ghosh, G. C., ''On generalized quasi Einstein manifolds'', *Kyungpook Math. J.* **44** (2004), no. 4, 607-615.

[15] De, U. C., Yıldız, A. and Yalınız, A. F., ''On φ-recurrent Kenmotsu manifolds'', *Turkish Journal of Mathematics*, **33** (2009), 17-25.

[16] Deprez, J., ''Semiparallel surfaces in Euclidean space'', *J. Geom.* **25** (1985), no. 2, 192-200.

[17] Deszcz, R., "On pseudosymmetric spaces" *Bull. Soc. Math. Belg. Ser. A* **44** (1992), no. 1, 1-34.

[18] Deszcz, R., Verstraelen, L. and Yaprak, S., ''Pseudosymmetric hypersurfaces in 4-dimensional spaces of constant curvature'' *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica* **22** (1994), no. 2, 167-179.

[19] Deszcz R., Hotlos M.and Şentürk Z., ''On curvature properties of quasi-Einstein hypersurfaces in semi-Euclidean space'', *Soochow J. Math.* **27** (2001), no.4, 375-389.

[20] Golab, S., ''On semi-symmetric and quarter-symmetric linear connections'', *Tensor (N.S.)* **29** (1975), no. 3, 249-254.

[21] Hacısalihoğlu, H. H., Diferensiyel Geometri, İnönü Üniversitesi Yayınları, (1983).

[22] Kenmotsu, K., ''A class of almost contact Riemannian manifolds'', *Tohoku Math. Journ.* **24** (1972), 93-103.

[23] Kobayashi, M., ''Semi-invariant submanifolds of a certain class of almost contact manifolds'', *Tensor (N.S.)* **43** (1986), 28-36.

[24] Kobayashi, S., Nomizu, K., Foundations of differential geometry, John Wiley and Sons, Inc., New York (1996).

[25] Kocayiğit, H., ''Lorentz 3-Manifoldlarında Biharmonik Eğriler ve Kontakt Geometry'', Doktora Tezi, 2004.

[26] Li, A. M. and Li, J. M., ''An intrinsic rigidity theorem for minimal submanifolds in a sphere'', *Arch. Math.* **58** (1992), 582-594.

[27] Mangione, V., ''Totally geodesic submanifolds of a Kenmotsu space form'', *Mathematical Reports, Bucharest*, **7** (2005), no. 4, 315-324.

[28] Murathan, C. Arslan, K. and Ezentaş, R., ''Ricci generalized pseudo-parallel immersions'', *Differential geometry and its applications,* 99-108, Matfyzpress, Prague, 2005.

[29] O'Neill, B., Elementary differential geometry, Academic Press, New York-London (1996).

[30] O'Neill, B., Semi-Riemannian geometry with applications to relativity, Pure and Applied Mathematics, 103. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York, 1983.

[31] Özgür, C., ''On generalized recurrent Kenmotsu manifolds'', *World Applied Sciences Journal* **2** (2007), 29-33.

[32] Özgür, C. and Murathan C., ''On 2-pseudoparallel invariant submanifolds of Sasakian manifolds'', preprint.

[33] Pitiş, G., Geometry of Kenmotsu Manifolds, Publishing House of Transilvania University of Braşov, 2007.

[34] Roter, W., ''On conformally recurrent Ricci-recurrent manifolds'', *Colloq. Math.*, **46** (1982), 45-57.

[35] Shahid, Hasan M., ''Anti-invariant submanifolds of a Kenmotsu manifold'', *Kuwait J. Sci. and Eng.* **23** (2), 1996, 145-151.

[36] Sular, S., Özgür, C. and De, U. C., ''Quarter-symmetric metric connection in a Kenmotsu manifold'', *SUT Journal of Mathematics*, **44** (2008), no. 2, 297-306.

[37] Sular, S. and Özgür, C., ''On some submanifolds of Kenmotsu manifolds'', *Chaos, Solitons and Fractals*, **42(4)** (2009), 1990-1995.

[38] Tanno S., ''The automorphism groups of almost contact Riemannian manifolds'', *Tôhoku Math. J.* **2** (1969), 21-38.

[39] Tshikuna, T. M., ''Quelques classes des submersions metriques presque de contact'', *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* **35**(1990), 705-721.

[40] Yano, K. and Kon, M., Structures on manifolds, Series in Pure Mathematics, 3. World Scientific Publishing Co., Singapore, 1984.

[41] Yano, K. and Kon, M., Anti-invariant submanifolds, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, no. 21. Marcel Dekker, Inc., New York-Basel, 1976.

[42] Yano, K., ''On semi-symmetric metric connection'', *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* **15** (1970), 1579-1586.

[43] Yıldız, A., Murathan, C., Arslan, K. and Ezentaş, R., ''C-totally real pseudo-parallel submanifolds of Sasakian space forms'' *Monatshefte für Mathematik* **151** (2007), no. 3, 247-256.

[44] Yıldız, A. and Murathan, C., ''Invariant submanifolds of Sasakian space forms'', *Journal of Geometry*, 2009, (baskıda).