T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GENİŞLETİLMİŞ HECKE GRUPLARININ BAZI ALTGRUPLARI VE PELL-LUCAS SAYILARI İLE İLİŞKİLERİ

DOKTORA TEZİ

ZEHRA SARIGEDİK

BALIKESİR, MART - 2014

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GENİŞLETİLMİŞ HECKE GRUPLARININ BAZI ALTGRUPLARI VE PELL-LUCAS SAYILARI İLE İLİŞKİLERİ

DOKTORA TEZİ

ZEHRA SARIGEDİK

BALIKESİR, MART - 2014

KABUL VE ONAY SAYFASI

ZEHRA SARIGEDİK tarafından hazırlanan "**GENİŞLETİLMİŞ HECKE GRUPLARININ BAZI ALTGRUPLARI VE PELL-LUCAS SAYILARI İLE İLİŞKİLERİ**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 24.03.2014 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Doç. Dr. Sebahattin İKİKARDEŞ	....
Üye Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL	....
Üye Prof. Dr. Recep ŞAHİN	....
Üye Doç. Dr. Fırat ATEŞ	....
Üye Doç. Dr. Özden KORUOĞLU	....

Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez BAÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Prof. Dr. Cihan ÖZGÜR ....

ÖZET

GENİŞLETİLMİŞ HECKE GRUPLARININ BAZI ALTGRUPLARI VE PELL-LUCAS SAYILARI İLE İLİŞKİLERİ
DOKTORA TEZİ
ZEHRA SARIGEDİK
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. SEBAHATTİN İKİKARDEŞ)

BALIKESİR, MART - 2014

Bu tezde, $H(\lambda_q)$ Hecke grubunun indeksleri bilinen bazı temel denklik altgruplarının üreteçleri bulunmuştur. Bu üreteçler yardımıyla Pell ve Pell-Lucas sayılarının bir genellemesi verilmiştir ve sayılar teorisinde bazı uygulamaları çalışılmıştır.

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş bölümü olup çalışma tanıtılmıştır.

İkinci bölümde, $H(\lambda_q)$ Hecke grubu ve $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grubunun tanımları verilmiştir.

Üçüncü bölümde, $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grubunun $q \geq 3$ asal sayısı için bazı denklik ve temel denklik altgruplarının üreteçleri verilmiştir. Daha sonra, temel denklik altgrubun üreteçlerini kullanarak genelleştirilmiş Pell sayısı ve genelleştirilmiş Pell-Lucas sayısının tanımları yapılmıştır ve bu sayıların özellikleri incelenmiştir. Ayrıca bu dizilerin polinom olarak yazılabileceği de gösterilmiştir. Daha sonra, bu bölümde tanımlanmış olan A^k ve B^k matrislerinin $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ cismindeki sabit noktaları verilmiştir. Bu bölümde son olarak, tanımladığımız genelleştirilmiş Pell ve genelleştirilmiş Pell-Lucas sayılarının $\overline{H}(\lambda_3)$ genişletilmiş modüler grupta bir uygulaması verilmiştir.

Dördüncü bölümde, $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grubunun iki seviyeli temel denklik altgrubu için kare kuvvet altgrupları incelenmiştir.

Beşinci bölümde, $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grubunun $q \geq 3$ tamsayısı için kuvvet altgrupları incelenmiştir.

Altıncı bölümde, tezde elde edilen sonuçlar verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Genişletilmiş Hecke grupları, temel denklik altgrupları, denklik altgrupları, kuvvet altgrupları

ABSTRACT

SOME SUBGROUPS OF EXTENDED HECKE GROUPS AND RELATIONS WITH PELL-LUCAS NUMBERS
PH.D THESIS
ZEHRA SARIGEDİK
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE MATHEMATICS
(SUPERVISOR: ASSOC. PROF. DR. SEBAHATTIN IKIKARDES)

BALIKESİR, MARCH 2014

In this thesis, generators of some principal congruence subgroups of Hecke groups with known indexes have been found. With the help of these generators, a generalization of Pell and Pell-Lucas numbers are given and some applications of generators are studied in numbers theory.

This thesis consists of six chapters. In the first chapter which is the introduction, the fundamental notions and results of the study is introduced.

In the second chapter, the definitions of Hecke group and extended Hecke group were given.

In the third chapter, generators of some congruence and principal congruence subgroups in the extended Hecke group for $q \geq 3$ prime are given. Then, the definition of generalized Pell numbers and generalized Pell-Lucas numbers by means of the generators of principal congruence subgroups are given and properties of these numbers have been examined. Additionally, the fact that these sequences can be written in polynomial form is shown. Moreover, the fixed points of the matrices A^k and B^k in $\mathbb{Q}(d)$ are given that are defined. Finally in this chapter, an application of generalized Pell and generalized Pell-Lucas numbers in the extended modular group is given.

In the fourth chapter, the square power subgroups of the principal congruence subgroup of level two in the extended Hecke groups $\overline{H}(\lambda_q)$ are studied.

In the fifth chapter, the power subgroups of the extended Hecke groups $\overline{H}(\lambda_q)$ for $q \geq 3$ are studied.

In the sixth chapter, the results obtained in this thesis are summarized.

KEYWORDS: Extended Hecke groups, principal congruence subgroups, congruence subgroups, power subgroups

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbb{C}$	: Karmaşık sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Q}(\sqrt{\boldsymbol{d}})$	: $\mathbb{Q}$ cisminin $\sqrt{d}$ ile genişlemesi
SL(2, $\mathbb{Z}$)	: Özel lineer grup
PSL(2, $\mathbb{Z}$)	: $\{T \mid T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1\}$
$\boldsymbol{C_n}$	: n mertebeli devirli grup
$\boldsymbol{D_n}$	: Dihedral grup
$\mathbb{C}_\infty$	: Genişletilmiş karmaşık sayılar kümesi
$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\lambda})$	: Hecke grubu
$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\lambda_q})$	: $\lambda = \lambda_q = 2\cos\frac{\pi}{q}, 1 \leq \lambda < 2$ için elde edilen Hecke grubu
$\overline{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{\lambda_q})$	: Genişletilmiş Hecke grubu
$\overline{\boldsymbol{H}}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{\lambda_q})$	: Genişletilmiş Hecke grubunun p seviyeli temel denklik altgrubu
$\overline{\boldsymbol{H}}^m(\boldsymbol{\lambda_q})$	: Genişletilmiş Hecke grubunun m. kuvvet altgrubu
$\overline{\boldsymbol{H}}'(\boldsymbol{\lambda_q})$	: Genişletilmiş Hecke grubunun komütatör altgrubu
$\boldsymbol{\Sigma}$	: Schreier transversali
$\boldsymbol{U}$	: Üst yarı düzlem
$\boldsymbol{Aut}(\boldsymbol{U})$	: Üst yarı düzlemin otomorfizmlerinin kümesi
$\overline{\boldsymbol{F}}_{\lambda_q}$	: Genişletilmiş Hecke grubu için temel bir bölge
$\boldsymbol{P} = < \boldsymbol{X} \mid \boldsymbol{R} >$	: Grup sunuşu
$\boldsymbol{PGL}(\boldsymbol{2}, \boldsymbol{K})$	: Projektif genel lineer grup
$\boldsymbol{PSL}(\boldsymbol{2}, \boldsymbol{K})$	: Projektif özel lineer grup
$\boldsymbol{\Gamma}$	: Fuchsian gruplar
$(\boldsymbol{g}; \boldsymbol{m_1}, \dots, \boldsymbol{m_r}; \boldsymbol{t}; \boldsymbol{u})$	: Fuchsian grupların simgesi
$\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\Gamma})$	: Fuchsian grubun temel bölgesinin hiperbolik alanı
$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$	: Direk çarpım grubu
$\boldsymbol{A} * \boldsymbol{B}$	: Serbest çarpım grubu
$\boldsymbol{W}(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{R})$	: T, S, R üreteçleri için indirgenmiş kelime
$\boldsymbol{BRF}$	: İndirgenmiş bir blok biçimi
$\boldsymbol{F}[\boldsymbol{x}]$	: Katsayıları F cismine ait polinom halkası

$\boldsymbol{P_n}$	**:** n. Pell sayısı
$\boldsymbol{Q_n}$	**:** n. Pell-Lucas sayısı
$\boldsymbol{U_n}$	**:** Genelleştirilmiş n. Pell sayısı
$\boldsymbol{V_n}$	**:** Genelleştirilmiş n. Pell-Lucas sayısı
$\lfloor \boldsymbol{a} \rfloor$	**:** a için üst sınır

ÖNSÖZ

Bu çalışmada akademik bilgi ve birikimiyle bana destek olan ve yardımlarıyla her zaman yanımda hissettiğim danışman hocam Doç. Dr. Sebahattin İkikardeş'e ve lisansüstü hayatım boyunca yardımını hiç esirgemeyen sayın hocam Prof. Dr. Recep Şahin'e içtenlikle teşekkür ederim. Ayrıca teknik yardımlarından dolayı Ümit Sarp'a teşekkürler.

Beni yetiştiren, her konuda destekleyen ve bugünlere gelmemde büyük emekleri olan sevgili anneme ve babama teşekkürlerimi sunuyorum.

1. GİRİŞ

$n \geq 2$ olmak üzere $SL(n, \mathbb{Z})$ matris grubunu düşünelim. $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/_{k\mathbb{Z}}$ doğal halka homomorfizması bir $SL(n, \mathbb{Z}) \longrightarrow SL\left(n, \mathbb{Z}/_{k\mathbb{Z}}\right)$ grup homomorfizmasına indirger. Bu homomorfizmanın bir kısıtlaması,

$$\phi_k : PSL(n, \mathbb{Z}) \longrightarrow PSL\left(n, \mathbb{Z}/_{k\mathbb{Z}}\right)$$

homomorfizması olarak tanımlayalım. ϕ_k homomorfizmasının çekirdeğine $SL(n, \mathbb{Z})$ grubunun k seviyeli bir temel denklik altgrubu denir.

Temel denklik altgruplar, sayılar teorisinde çok önemli bir yere sahiptir. Örneğin, Fermat'ın son teoreminin ispatında, $\mathbb{Q}$ üzerinde tanımlı bir eliptik eğri üzerinde uygun bir temel denklik altgrup kullanılarak üst yarı düzlemde sabit olmayan bir meromorfik dönüşüm elde edilmiştir, [1].

$PSL(n, \mathbb{Z})$ grubunda $n = 2$ alınırsa literatürde çokça bilinen modüler grup elde edilir. Morris Newman 1963 yılında modüler grup için $(k, 6) = 1$ olduğunda normal denklik altgruplarının hangi şartlar altında temel denklik altgrup olduğunu vermiştir, [2]. 1974 yılında Schoeneberg modüler grubun temel denklik altgruplarını modüler grup içindeki indekslerini hesapladı, [3]. 1994 yılında B. Sury ve T. N. Venkataramana $n \geq 3$ için $PSL(n, \mathbb{Z})$ grubunun temel denklik altgruplarının üreteçlerini tanımlamışlardır, [4]. Cummins ve Pauli 2003 yılında modüler grubun topolojik cinsi 24 ten küçük olan tüm denklik altgruplarını hesapladı, [5]. 1936 yılında E. Hecke [6] nolu çalışmasında λ sabit bir pozitif sayı olmak üzere,

$$T(z) = -\frac{1}{z}$$

ve

$$U(z) = z + \lambda$$

kesirli doğrusal dönüşümleriyle üretilen grupları tanıttı. Bu gruplar literatürde Hecke grubu olarak bilinir. 1993 yılında Cangül doktora çalışmasında $\lambda = \lambda_q = 2\cos\frac{\pi}{q}$, $q \geq 3$ bir tamsayı durumuna karşılık gelen Hecke gruplarını ve bu grupların normal altgruplarını çalıştı. $q = 3,4,5,6$ ve $q \geq 7$ asal sayıları için Hecke gruplarının temel denklik altgruplarının Hecke grubundaki indekslerini buldu, [7]. 2000 yılında Lang, Hai ve Tan, Cangül'den farklı bir metodla Hecke grubunun temel denklik altgruplarının Hecke grubundaki indekslerini buldu, [8]. Hecke gruplarının temel denklik altgruplarının birçok özelliği literatürde [6, 9-16] nolu kaynaklarda çalışılmış ve kullanılmıştır.

Diğer taraftan Jones ve Thornton 1986 yılında genişletilmiş modüler grubu tanıttı ve bu grubun kongrüans altgrupları ve temel kongrüans altgrupları hakkında bir çalışma yaptı, [17]. 2001 yılında Şahin doktora çalışmasında genişletilmiş Hecke gruplarını ve bu grupların normal altgruplarını tanıttı, [18].

Bu tezde, $H(\lambda_q)$ Hecke grubunun indeksleri bilinen bazı temel denklik altgruplarının üreteçlerini bulduk. Bu üreteçler yardımıyla Pell ve Pell-Lucas sayılarının bir genellemesi ve sayılar teorisinde bazı uygulamaları çalışıldı.

İkinci bölümde, tezin temel konusu olan $H(\lambda_q)$ Hecke grubu ve $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grubunun tanımları yapılmıştır. Daha sonra bu grupların bir temel bölgesi verildikten sonra grup sunuşları verilmiştir.

Üçüncü bölümde, $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grubunun bazı denklik ve temel denklik altgruplarının üreteçleri verilmiştir. $q = 4$ ve $q = 6$ için $H(\sqrt{2})$ ve $H(\sqrt{3})$ ün temel denklik altgrubunun üreteçleri, daha sonra $q \geq 3$ asal sayı olmak üzere $H(\lambda_q)$ Hecke grubunun temel denklik altgrubunun üreteçleri verilmiştir. Daha sonra, temel denklik altgrubun üreteçlerini kullanarak genelleştirilmiş Pell sayısı ve genelleştirilmiş Pell-Lucas sayısının tanımları yapılmıştır ve bu sayıların özellikleri incelenmiştir. Ayrıca bu dizilerin polinom olarak yazılabileceği de gösterilmiştir. Daha sonra, bu bölümde tanımlanmış olan A^k ve B^k matrislerinin $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ cismindeki sabit noktaları verilmiştir. Bu bölümde son olarak, tanımladığımız genelleştirilmiş Pell ve genelleştirilmiş Pell-Lucas sayılarının $\overline{H}(\lambda_3)$ genişletilmiş modüler grupta bir uygulaması verilmiştir.

Dördüncü bölümde, $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grubunun iki seviyeli temel denklik altgrubu için 2. kuvvet altgrupları incelenmiştir.

Beşinci bölümde, $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grubunun kuvvet altgrupları incelenmiştir. Burada $q \geq 3$ tek sayı ve $q \geq 4$ çift sayı olma durumları ayrı ayrı ele alınmıştır.

Altıncı bölümde, bu çalışmada elde edilen özgün sonuçlar verilmiştir.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde $H(\lambda_q)$ Hecke grubu ve $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grubunun tanımları yapılmıştır. Daha sonra bu grupların bir temel bölgesi verilip grup sunuşları verilmiştir. Burada verilen tanım ve teoremler [3, 6, 7, 18-25] nolu kaynaklarda bulunabilir.

2.1 Hecke Grupları

2.1.1 Tanım: $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ve $ad - bc = 1$ olmak üzere,

$$w = T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

biçimindeki bir dönüşüme kesirli doğrusal dönüşüm denir, [21].

Burada gerçel katsayılı doğrusal dönüşümler ile çalışacağımızdan bu dönüşümlerin,

$$PSL(2, \mathbb{R}) = \left\{T(z): T(z) = \frac{az + b}{cz + d};\ a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1\right\}$$

alt kümesi ile

$$G' = \left\{U(z): U(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d};\ a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = -1\right\}$$

biçimindeki bir kümeyi alalım. G kümesini $G = PSL(2, \mathbb{R}) \cup G'$ biçiminde oluşturalım.

2.1.2 Teorem: $U = \{z \in \mathbb{C} :\ Im(z)\ > 0\}$ üst yarı düzlem olmak üzere,

$$Aut(U) \cong PSL(2, \mathbb{R})$$

dir, [21].

2.1.3 Tanım: G' kümesine üst yarı düzlemin anti otomorfizmlerinin kümesi denir, [21].

Erich Hecke, 1936 yılında “Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch ihre Funktionalgleichung” adlı çalışmasında Hecke gruplarını aşağıdaki gibi tanımlamıştır, [6].

2.1.4 Tanım: λ sabit bir pozitif sayı olmak üzere,

$$T(z) = -\frac{1}{z}$$

ve

$$U(z) = z + \lambda$$

kesirli doğrusal dönüşümleriyle üretilen gruba denir ve $H(\lambda)$ ile gösterilir, [6].

Tanımlanan $T(z)$ ve $U(z)$ dönüşümleri yardımıyla $S = TU$ alınırsa,

$$S(z) = -\frac{1}{z + \lambda}$$

elde edilir. Ayrıca $H(\lambda)$ Hecke grubu $PSL(2, \mathbb{R})$ nin maksimal ayrık altgrubudur.

Tanımlanan bir

$$\frac{az + b}{cz + d}$$

dönüşümünün matris gösterimi,

$$\mp\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

biçiminde olduğundan, $H(\lambda)$ Hecke grubunun üreteçlerinin matris gösterimleri

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

biçiminde olur.

2.1.5 Tanım: (i) G topolojik dönüşüm grubunun ayrık bir altgrubuna Euclidean olmayan kristallografik grup (Non Euclidean crystallographic group) denir ve kısaca NEC-grup biçiminde gösterilir.

(ii) $PSL(2, \mathbb{R})$ nin altgrubu olan NEC-gruplara Fuchs grubu denir, [20].

2.1.6 Tanım: Γ bir Fuchs grubu olsun. Aşağıdaki koşulları gerçekleyen kapalı bir F kümesine Γ için bir temel bölge denir.

(i) F her yörüngeden en az bir eleman içerir.

(ii) F^o her yörüngeden en çok bir eleman içerir.

(iii) $F - F^o$ kümesinin hiperbolik alanı $\mu(F - F^o) = 0$ dır, [20].

$q = 3$ için $H(\lambda_3)$ modüler grubu için temel bölge,

$$F = \left\{z \in U \middle| |Re\, z| < \frac{1}{2}, |z| > 1\right\}$$

kümesidir, [22, 23].

Şimdi Hecke grubunun bir temel bölgesini verelim.

2.1.7 Teorem: $\lambda \geq 2$ veya $q \geq 3$ bir tamsayı olmak üzere,

$$\lambda = \lambda_q = 2\cos\frac{\pi}{q}, 1 \leq \lambda < 2$$

ise $H(\lambda)$ grubunun bir temel bölgesi,

$$F_\lambda = \left\{z \in U \middle| |Re\, z| < \frac{\lambda}{2}, |z| > 1\right\}$$

kümesidir, [24].

E. Hecke diğer $\lambda > 0$ değerleri için F_λ kümesinin bir temel bölge olmadığını da göstermiştir, [6]. $\lambda = \lambda_q$ veya $\lambda \geq 2$ olması durumunda $H(\lambda)$ grubunun sonlu üreteçli bir grup olduğu görülür. Ayrıca $H(\lambda)$ grubu, $PSL(2, \mathbb{R})$ nin ayrık bir altgrubu olduğundan $H(\lambda)$ grubu Fuchsian bir grup olur.

$H(\lambda)$ Hecke grubunun Fuchsian olması için gerekli ve yeterli şart $\lambda = \lambda_q = 2\cos\frac{\pi}{q}$, $q \geq 3$ bir tamsayı veya $\lambda \geq 2$ olmasıdır, [6].

$\lambda = \lambda_q = 2\cos\frac{\pi}{q}$, $1 \leq \lambda < 2$, durumuna karşılık gelen Hecke grupları $H(\lambda_q)$ ile gösterilir. $\lambda \geq 2$ değerleriyle elde edilen Hecke grupları için $H(\lambda)$ gösterimi kullanılır. Bu çalışmada sadece $\lambda = \lambda_q = 2\cos\frac{\pi}{q}$, ($q \geq 3$ bir tamsayı) olduğu durum ele alınmıştır.

2.1.8 Tanım: $A = \langle a_1, \dots, a_m; R_1, \dots, R_t \rangle$ ve $B = \langle b_1, \dots, b_m; S_1, \dots, S_t \rangle$ biçiminde iki grup olsun. A ve B gruplarının $A * B$ ile gösterilen serbest çarpımı,

$$\langle a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m; R_1, \dots, R_t, S_1, \dots, S_t \rangle$$

şeklinde tanımlıdır. Yani G grubunun üreteçleri, A ve B gruplarının üreteçlerinin tümünden ve bağıntıları da A grubunun R_i ve B grubunun S_j bağıntılarının tümünden oluşur. A ve B gruplarına G grubunun çarpanları denir, [25].

2.1.9 Teorem: $H(\lambda_q)$ Hecke grubunun sunuşu,

$$H(\lambda_q) = \langle T, S | T^2 = S^q = I \rangle \cong C_2 * C_q$$

biçiminde, 2 mertebeli devirli grup ile q mertebeli devirli grubun serbest çarpımıdır, [7].

Örneğin,

$q = 3$ ise $H(\lambda_3) = \Gamma = PSL(2, \mathbb{Z})$ olup literatürde modüler grup olarak bilinir.

$q = 4$ ise $H(\lambda_4) = H(\sqrt{2})$

$q = 5$ ise $H(\lambda_5) = H\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

$q = 6$ ise $H(\lambda_6) = H(\sqrt{3})$ olur.

$q \geq 4$ için $H(\lambda_q) \subset PSL(2, \mathbb{Z}[\lambda_q])$ olduğu açıktır, [18, 19].

2.1.10 Teorem: Eğer $\lambda \geq 2$ ise bu grubun sunuşu,

$$H(\lambda) = \langle T, S | T^2 = S^\infty = I \rangle \cong C_2 * C_\infty$$

biçiminde, 2 mertebeli devirli grup ve sonsuz mertebeli devirli grubun serbest çarpımıdır, [19].

2.2 Genişletilmiş Hecke Grupları

Burada 2.1.4 Tanımda verilen Hecke gruplarından, $R_1(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ yansıma dönüşümü yardımıyla elde edilen genişletilmiş Hecke gruplarından kısaca bahsedilmiştir.

Faydalanılan $R_1(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ dönüşümü birim çembere göre yansımadır. $\lambda \geq 2$ veya $q \geq 3$ bir tamsayı olmak üzere $\lambda = \lambda_q = 2\cos\frac{\pi}{q}$, $1 \leq \lambda < 2$ değerleri için $H(\lambda)$ ile gösterilen Hecke gruplarından yararlanarak şu tanımı verelim.

2.2.1 Tanım: Hecke gruplarına, $R_1(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ anti-otomorfizmini ekleyerek elde edilen gruplara genişletilmiş Hecke grupları denir. Genişletilmiş Hecke grupları $\overline{H}(\lambda_q)$ ile gösterilir ve otomorfizmler ile anti-otomorfizmleri bulundurur, [18].

$\overline{H}(\lambda_3)$ genişletilmiş modüler grubu için temel bölge,

$$\bar{F} = \left\{ z \in U \middle| \frac{-1}{2} < Re\, z < 0, |z| > 1 \right\}$$

kümesidir, [3].

Şimdi genişletilmiş Hecke grubunun bir temel bölgesini verelim.

2.2.2 Teorem: $\lambda \geq 2$ veya $q \geq 3$ bir tamsayı olmak üzere,

$$\lambda = \lambda_q = 2\cos\frac{\pi}{q}, 1 \leq \lambda < 2$$

ise $\overline{H}(\lambda)$ grubunun bir temel bölgesi,

$$\bar{F}_{\lambda_q} = \left\{ z \in U \middle| \frac{-\lambda_q}{2} < Re\, z < 0, |z| > 1 \right\}$$

kümesidir, [18].

Şimdi de genişletilmiş Hecke gruplarının aşağıda verilen yansımalar yardımıyla grup sunuşunu bulalım.

$\lambda = \lambda_q = 2\cos\frac{\pi}{q}$, $1 \leq \lambda$ <2 olmak üzere,

$$R_1(z) = \frac{1}{\bar{z}}, \qquad R_2(z) = -\bar{z}, \qquad R_3(z) = \frac{-\bar{z}}{\overline{\lambda z + 1}}$$

yansımaları yardımıyla, genişletilmiş Hecke gruplarının sunuşu

$$\overline{H}(\lambda_q) = \langle R_1, R_2, R_3 | R_1^2 = R_2^2 = R_3^2 = (R_1R_2)^2 = (R_3R_1)^q = I \rangle$$

yazılabilir, [18]. Burada,

$$R = R_1, \qquad T = R_1R_2 = R_2R_1, \qquad S = R_3R_1$$

olarak alınırsa $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke gruplarının sunuşu,

$$\overline{H}(\lambda_q) = \langle T, S, R | T^2 = S^q = R^2 = (TR)^2 = (RS)^2 = I \rangle \cong D_2 *_{\mathbb{Z}_2} D_q$$

olarak bulunur, [18].

3. GENİŞLETİLMİŞ HECKE GRUBUNUN BAZI TEMEL DENKLİK ALTGRUPLARI VE PELL-LUCAS SAYILARI İLE İLİŞKİLERİ

Bu bölümde $H(\lambda_q)$ Hecke grubunun ve $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grubunun bazı denklik altgrupları ve temel denklik altgruplarının üreteçleri verilmiştir. Daha sonra temel denklik altgrup üreteçlerini kullanarak genelleştirilmiş Pell ve genelleştirilmiş Pell-Lucas sayılarının tanımları yapılmıştır ve bazı özellikleri incelenmiştir. Daha sonra, bölüm içerisinde tanımlanmış olan A^k ve B^k matrislerinin $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ cismindeki sabit noktaları incelenmiştir. Son olarak, genelleştirilmiş Pell ve genelleştirilmiş Pell-Lucas sayılarının $\overline{H}(\lambda_3)$ genişletilmiş modüler grupta bir uygulaması verilmiştir. Bu konuların hepsi ayrı ayrı ele alınıp detaylı bir şekilde açıklanmıştır.

Bu bölümde verilen bazı tanımlar, teoremler veya bilgiler [7-9, 11, 18, 26-40] nolu kaynaklarda bulunabilir. Bununla birlikte bu bölümlerde verilen 3.1.16 Teorem, 3.1.17 Teorem, 3.1.18 Sonuç, 3.1.19 Sonuç, 3.1.20 Teorem, 3.1.21 Teorem, 3.1.22 Teorem, 3.1.23 Sonuç, 3.2.5 Lemma, 3.2.6 Önerme, 3.2.7 Önerme, 3.2.8 Önerme, 3.2.9 Önerme, 3.2.10 Önerme, 3.2.11 Önerme, 3.2.12 Önerme, 3.2.13 Önerme, 3.2.14 Önerme, 3.2.15 Önerme, 3.2.16 Önerme, 3.2.17 Önerme, 3.2.18 Önerme, 3.2.19 Önerme, 3.2.20 Teorem, 3.2.21 Teorem, 3.2.22 Önerme, 3.2.23 Önerme, 3.2.24 Önerme, 3.2.25 Önerme, 3.3.5 Sonuç, 3.3.6 Sonuç, 3.3.7 Sonuç, 3.4.1 Sonuç, 3.4.2 Sonuç tamamen özgündür.

3.1 Genişletilmiş Hecke Grubunun Bazı Denklik ve Temel Denklik Altgruplarının Üreteçleri

Literatürde [9] nolu kaynakta $H(\sqrt{m})$ Hecke grubunun temel denklik altgrupları incelenmiştir. Ancak bu çalışmada sadece grup yapısı hakkında bilgi verilmiştir. Bu çalışmada, öncelikle $q = 4$ ve $q = 6$ için $H(\sqrt{2})$ ve $H(\sqrt{3})$ ün temel denklik altgruplarının üreteçleri, daha sonra $q = 5$ için $H(\lambda_5)$ in temel denklik altgrubunun üreteçleri ve $q = 7$ için $H(\lambda_7)$ in temel denklik altgrubunun üreteçleri verilmiştir. Son olarak $q > 7$ asal sayı olmak üzere $H(\lambda_q)$ Hecke grubunun temel denklik altgrubunun üreteçleri verilmiştir. Böylece üreteçlerini bularak grup yapısı hakkında daha net bilgiler elde edilmiştir. Daha sonra $q \geq 3$ tamsayısı için $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grubunun iki seviyeli temel denklik altgrubunun hangi üreteçler tarafından üretildiği verilmiştir. Üreteçleri bulabilmek için matris gösterimlerinden yararlanılmıştır. Bunun için [9] nolu kaynaktan kısa bir bilgi verilmiştir.

İlk olarak, signature (gösterim) tanımı ve altgrup çalışmasında kullanılan Riemann-Hurwitz formülü, permütasyon metodu, Reidemeister-Schreier yöntemi verilmiştir.

3.1.1 Tanım: Bir Γ Fuchsian grubunun

$$\left(g; +; [m_1, \dots, m_l]; \{(n_{11} \dots n_{1s_1}) \dots (n_{k1} \dots n_{ks_k})\}\right) \dots *$$

veya

$$\left(g; -; [m_1, \dots, m_l]; \{(n_{11} \dots n_{1s_1}) \dots (n_{k1} \dots n_{ks_k})\}\right) \dots **$$

biçiminde bir temsili vardır, [26, 27]. Buradaki m_i ler periyot ve $(n_{i1} \dots n_{is_i})$ periyot devridir.

$*$ gösteriminin üreteçleri;

$$x_i \ \ (i = 1, \dots, l)$$
$$e_i \ (i = 1, \dots, k)$$
$$c_{ij} \ \ (i = 1, \dots, k, j = 0, \dots, s_i)$$
$$a_j, b_j \ \ (j = 1, \dots, g)$$

ve bağıntısı

$$x_i^{m_i} = 1, (i = 1, \dots l)$$
$$c_{is_i} = e_i^{-1} c_{i0} e_i, (i = 1, \dots k)$$
$$c_{ij-1}^{\ 2} = c_{ij}^{\ 2} = (c_{ij-1} c_{ij})^{n_{ij}} = 1, (i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, s_i)$$
$$x_1 \dots x_l e_1 \dots e_k a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1$$

biçimindedir.

$**$ gösteriminin üreteçleri;

$$x_i \ \ (i = 1, \dots, l)$$

$$e_i \;\; (i = 1, \dots, k)$$
$$c_{ij} \;\; (i = 1, \dots, k, j = 0, \dots, s_i)$$
$$d_j \;\; (j = 1, \dots, g)$$

ve bağıntısı

$$x_i^{m_i} = 1, (i = 1, \dots l)$$
$$c_{is_i} = e_i^{-1} c_{i0} e_i, (i = 1, \dots k)$$
$$c_{ij-1}^{\;2} = c_{ij}^{\;2} = (c_{ij-1} c_{ij})^{n_{ij}} = 1, (i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, s_i)$$
$$x_1 \dots x_l e_1 \dots e_k d_1^{\;2} d_2^{\;2} \dots d_g^{\;2} = 1$$

biçimindedir, [26, 27, 28].

3.1.2 Tanım: Γ , simgesi 3.1.1 Tanımdaki gibi olan bir grup olsun. Γ nın hiperbolik alanını

$$\mu(\Gamma) = 2g - 2 + \sum_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) + t + u$$

olarak tanımlayalım. Eğer $\mu(\Gamma) > 0$ ise simgesi 3.1.1 Tanımdaki gibi olan bir Fuchsian grup vardır. Eğer Γ, birinci türden Fuchsian grupsa $\mu(\Gamma) > 0$ dır.

Γ_1, Γ nın sonlu indeksli bir altgrubu olsun. Bu durumda

$$[\Gamma : \Gamma_1] = \frac{\mu(\Gamma_1)}{\mu(\Gamma)}$$

olur. Burada $\mu(\Gamma_1)$ ve $\mu(\Gamma)$ sırasıyla Γ_1 ve Γ grubunun temel bölgesinin hiperbolik alanını göstermektedir. Bu formüle Riemann-Hurwitz formülü denir, [26, 27, 29].

Şimdi $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grubunun normal altgruplarının simgelerini bulmakta kullanacağımız permütasyon metodunu verelim.

3.1.3 Teorem: $p + q = r + t$ ve $1 < k_i \leq \infty$ olmak üzere Γ grubunun simgesi $(g; m_1, \dots, m_p, n_1 k_1, \dots, n_q k_q)$ ve Γ_1 , Γ grubunun μ indeksli bir normal altgrubu ise Γ_1 altgrubu $(g_1; k_1^{(\mu/n_1)}, \dots, k_q^{(\mu/n_q)})$ simgesine sahiptir. Burada $k_i^{(\mu/n_i)}$, k_i mertebeli elemandan μ/n_i tane var demektir ve g_1 cinsi Riemann-Hurwitz formülü ile bulunabilir, [26, 27, 30].

3.1.4 Reidemeister-Schreier Yöntemi

Genişletilmiş Hecke grupları, sonlu üreteçli gruplar olduğundan bu grupların sonlu indeksli bir altgrubu da sonlu üreteçli olur. Bu üreteçleri bulabilmek bu çalışma için oldukça önemlidir. Aşağıda verilen yöntem, bu üreteçleri bulabilmek için bir yol gösterir.

Reidemeister-Schreier yöntemi, sonlu indeksli $\overline{H}(\lambda_q)$ nun altgruplarının üreteçlerini bulmak için kullanılan çok yararlı bir yöntemdir.

G, üreteçleri $\{g_i\}$ olan sonlu bir grup olsun. H, G nin bir altgrubu olsun. Bu yöntemde önce H için bir Schreier transversal kümesi seçilir. Sonra da koset temsilleri, üreteçler ve transversal kümenin elemanlarının sıralı çarpımları alınır. Bir Σ Schreier transversal kümesi Johnson tarafından 1980 de tanımlanmıştır.

i) Birim eleman $I \in \Sigma$,

ii) Σ, sağdan sadeleşme altında kapalıdır. Yani, $g_{i_1}.g_{i_2} \dots g_{i_r} \in \Sigma$ iken $g_{i_1}.g_{i_2} \dots g_{i_{r-1}} \in \Sigma$ olmalıdır,

koşullarını sağlayan koset temsilcilerinin bir kümesine Σ Schreier transversal kümesi denir.

Σ, H için bir Schreier transversal kümesi olsun. Bu durumda H nin bir Schreier üreteci,

$(\Sigma\ nın\ bir\ elemanı) \times (bir\ üreteç) \times (bir\ önceki\ çarpımın\ koset\ temsili)^{-1}$

biçimine sahip olacaktır, [7, 18].

3.1.5 Teorem: G, $H(\lambda_q)$ nun sonlu μ indeksli bir serbest normal altgrubu olsun. O zaman G,

$$\left(1 - \frac{t}{2} + \mu.\frac{q-2}{4q}; \infty^{(t)}\right)$$

gösterimine sahiptir, [7].

3.1.6 Tanım: p bir asal sayı olmak üzere, $H(\lambda_q)$ Hecke grubunun p seviyeli temel denklik altgrubu,

$$H_p(\lambda_q) = \{T \in H(\lambda_q) : T \equiv \pm I \ (mod\ p)\}$$

$$H_p(\lambda_q) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b\lambda_q \\ c\lambda_q & d \end{pmatrix} : a \equiv d \equiv \pm 1, b \equiv c \equiv 0 \ (mod\ p), ad - bc(\lambda_q)^2 = 1 \right\}$$

biçiminde tanımlanır, [7].

$H_p(\lambda_q)$ grubunu elde etmenin diğer bir yöntemi, p asal sayı olmak üzere, p modülüne göre "indirgeme homomorfizmi" ni göz önüne almaktır.

$\wp$, $\mathbb{Z}[\lambda_q]$ nun bir ideali olsun. Bu durumda,

$$\Theta_{\wp} : \mathbb{Z}[\lambda_q] \to \mathbb{Z}[\lambda_q]/\wp$$

doğal dönüşümü bir

$$H(\lambda_q) \to PSL(2, \mathbb{Z}[\lambda_q])/\wp$$

dönüşümünü indirger ki bu dönüşümün çekirdeği seviyesi $\wp$ olan temel denklik altgrubu olarak adlandırılır. Şimdi s, $P_q^*(\lambda_q)$ polinomunun $GF(p^s)$ de çözümü olacak şekilde bir tamsayı olsun. Böyle bir s sayısının olduğunu ve

$$1 \le s \le d = degP_q^*(\lambda_q)$$

olduğunu biliyoruz. u, $P_q^*(\lambda_q)$ polinomunun $GF(p^s)$ de bir çözümü olsun. $\mathbb{Z}[\lambda_q]$ da u ile üretilen ideali $\wp$ alalım. Yukarıdaki gibi, $\lambda_q \to u$ ile indirgenmiş homomorfizm olarak

$$\Theta_{p,u,q} : H(\lambda_q) \to PSL(2, p^s)$$

tanımlayabiliriz. $K_{p,u}(\lambda_q) = çek(\Theta_{p,u,q})$ olsun. $K_{p,u}(\lambda_q)$, $H(\lambda_q)$ nun bir homomorfizminin çekirdeği olduğundan $H(\lambda_q)$ da normaldir. Eğer u ve v, $GF(p^s)$ üzerinde $P_q^*(\lambda_q)$ polinomunun aynı indirgenemeyen f çarpanına karşılık geliyorsa,

$$K_{p,u}(\lambda_q) = K_{p,v}(\lambda_q)$$

olur. $K_{p,u}(\lambda_q)$, $H(\lambda_q)$ nun p seviyeli normal denklik altgrubudur. Yani,

$$K_{p,u}(\lambda_q) \trianglelefteq H(\lambda_q)$$

olur. Buradan,

$$H_p(\lambda_q) \le \bigcap_{tüm\ u\ lar} K_{p,u}(\lambda_q)$$

bulunur, [9, 31].

Şimdi $H(\lambda_q)$ Hecke grubunun temel denklik altgrup tanımına benzer şekilde genişletilmiş Hecke grubu için tanımı verilmiştir.

3.1.7 Tanım: p bir asal sayı olmak üzere, $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grubunun p seviyeli temel denklik altgrubu,

$$\overline{H}_p(\lambda_q) = \{M \in \overline{H}(\lambda_q): M \equiv \pm I \ (mod\, p)\}$$

$$\overline{H}_p(\lambda_q) = \left\{\begin{pmatrix} a & b\lambda_q \\ c\lambda_q & d \end{pmatrix}: a \equiv d \equiv \pm 1, b \equiv c \equiv 0 \ (mod\, p), ad - bc(\lambda_q)^2 = 1\right\}$$

biçiminde tanımlanır, [18].

3.1.8 Teorem: $\overline{H}_p(\lambda_q)$ temel denklik altgrubu, $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grubunun sonlu indeksli normal bir altgrubudur, [32].

3.1.9 Sonuç: $H_p(\lambda_q) = \overline{H}_p(\lambda_q) \cap H(\lambda_q)$, [32].

3.1.10 Teorem:

a) $p \geq 3$ asal olma durumunda,

$$\overline{H}_p(\lambda_q) = H_p(\lambda_q)$$

ve

$$\overline{H}(\lambda_q)/\overline{H}_p(\lambda_q) = \overline{H}(\lambda_q)/H_p(\lambda_q) \cong C_2 \times G, G \cong H(\lambda_q)/H_p(\lambda_q)$$

b) $p = 2$ olma durumunda ise,

$$\overline{H}(\lambda_q)/\overline{H}_2(\lambda_q) \cong H(\lambda_q)/H_2(\lambda_q)$$

olur, [32].

3.1.11 Tanım: $I, Z[\lambda_q]$ halkasının bir ideali olsun.

$$H(\lambda_q, I) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}: a \equiv d \equiv 1, b \equiv c \equiv 0 \ (mod\, I)\right\}$$

biçiminde tanımlı $H(\lambda_q, I)$ kümesine $H(\lambda_q)$ Hecke grubunun I seviyeli temel denklik altgrubu denir, [8, 11].

Yukarıda verilen $K_{p,u}(\lambda_q)$ temel denklik altgrubu ile $H(\lambda_q, I)$ temel denklik altgrubu aynı altgruplardır, [33].

3.1.12 Tanım: $H(\lambda_q, I)$ temel denklik altgrubunu içeren $H(\lambda_q)$ Hecke grubunun herhangi bir altgrubuna I seviyeli bir denklik altgrubu denir, [8, 11].

$H(\lambda_q, I)$ temel denklik altgrupları, $H(\lambda_q)$ Hecke grubunun normal altgruplarıdır. Ancak denklik altgrupları, $H(\lambda_q)$ Hecke grubunda normal altgrup olmak zorunda değildir. $H(\lambda_q)$ Hecke grubunun en önemli iki denklik altgrupları [8, 11] nolu kaynakta aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$H_0(\lambda_q, I) = \left\{A \in H(\lambda_q) : A \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} (mod\, I)\right\}$$

$$H_1(\lambda_q, I) = \left\{A \in H(\lambda_q) : A \equiv \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (mod\, I)\right\}$$

Burada $H(\lambda_q, I) \leq H_1(\lambda_q, I) \leq H_0(\lambda_q, I) \leq H(\lambda_q)$ olduğunu görmek kolaydır.

3.1.13 Tanım: $J, Z[\lambda_q]$ halkasının bir ideali olsun.

$$\overline{H}(\lambda_q, J) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a \equiv d \equiv 1, b \equiv c \equiv 0\ (mod\, J)\right\}$$

biçiminde tanımlı $\overline{H}(\lambda_q, J)$ kümesine $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grubunun J seviyeli temel denklik altgrubu denir, [8, 11].

3.1.14 Tanım: $\overline{H}(\lambda_q, J)$ temel denklik altgrubunu içeren $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grubunun herhangi bir altgrubuna J seviyeli bir denklik altgrubu denir, [8].

Biz bu çalışmada $p = 2$ olma durumunu ele alacağız. Bu durumda

$$\overline{H}(\lambda_q)/\overline{H}_2(\lambda_q) \cong H(\lambda_q)/H_2(\lambda_q)$$

olduğunu 3.1.10 Teoremden biliyoruz.

Şimdi $H(\lambda_q)$ Hecke grubunun $H_2(\lambda_q)$ ve $K_{2,u}(\lambda_q)$ grupları ile bölüm gruplarını ve bunların grup yapılarını sırasıyla $q = 4, 5, 6, 7$ için verelim, [7].

i) $q = 4$ için $H(\sqrt{2})$ grubunun $K_{2,u}(\sqrt{2})$ denklik altgrupları, $H_2(\sqrt{2})$ ve bölüm grupları,

$$H(\sqrt{2})/K_{2,u}(\sqrt{2}) \cong C_2$$

ve

$$H(\sqrt{2})/H_2(\sqrt{2}) \cong D_4$$

biçimindedir.

ii) $q = 5$ için $H(\lambda_5)$ grubunun $K_{2,u}(\lambda_5)$ temel denklik altgruplarına bölüm grupları,

$$H(\lambda_5)/K_{2,u}(\lambda_5) \cong D_5$$

biçimindedir.

iii) $q = 6$ için $H(\sqrt{3})$ grubunun $K_{2,u}(\sqrt{3})$ denklik altgrupları, $H_2(\sqrt{3})$ ve bölüm grupları,

$$H(\sqrt{3})/K_{2,u}(\sqrt{3}) \cong D_3$$

ve

$$H(\sqrt{3})/H_2(\sqrt{3}) \cong D_6$$

biçimindedir.

iv) $q = 7$ için $H(\lambda_7)$ grubunun $K_{2,u}(\lambda_7)$ temel denklik altgruplarına bölüm grupları,

$$H(\lambda_7)/K_{2,u}(\lambda_7) \cong D_7$$

biçimindedir.

$\boldsymbol{H(\sqrt{2})}$ *ve* $\boldsymbol{H(\sqrt{3})}$ *ün Temel Denklik Altgruplarının Üreteçleri*

Bu bölümde, $m = 2,3$ için $H_2(\sqrt{m})$ temel denklik altgrubunun üreteçleri incelenmiştir.

$\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grubunun temel denklik altgruplarını ve üreteçlerini bulabilmek için [35] nolu kaynaktan kısa bir bilgi verelim.

$\Gamma_2 = H_2(\lambda_3)$ temel denklik altgrubu,

$$a_1 = (TS)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$a_2 = (TS^{-1})^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisleri ile üretilir.

[35] nolu kaynakta, $A(g)$ matrisinin

$$g = (a_1.a_2)^k = [(TS)^2(TS^2)^2]^k, k \geq 1$$

elemanı ile üretildiği gösterilmiştir. Ayrıca $g \in \Gamma$ ve P_k k. Pell sayısı için

$$A(g) = \begin{bmatrix} P_{2k-1} & P_{2k} \\ P_{2k} & P_{2k+1} \end{bmatrix}$$

olduğu verilmiştir. Burada P_k ile gösterilen Pell sayısının, genelleştirilmiş Hecke grubu ile bağlantısı bir sonraki bölümde detaylı bir şekilde verilmiştir.

3.1.15 Teorem: $m = 2, 3$ için $H(\sqrt{m})$ Hecke grubunun $H_2(\sqrt{m})$ temel denklik altgrupları,

$$H(\sqrt{m})/H_2(\sqrt{m}) \cong D_{2m}$$

olur, [9].

3.1.16 Teorem: $H(\sqrt{2})$ nin $H_2(\sqrt{2})$ temel denklik altgrubu üç tane sonsuz devirli grubun serbest çarpımıdır.

İspat: $H(\sqrt{2}) \ / \ H_2(\sqrt{2}) \cong \langle T, S | T^2 = S^4 = (TS)^2 = I \rangle$ biçiminde tanımlıdır. Böylece, $|H(\sqrt{2}): H_2(\sqrt{2})| \cong D_4$ ve $|H(\sqrt{2}): H_2(\sqrt{2})| = 8$ olur, [9].

Eğer $H_2(\sqrt{2})$ için Schreier transversali

$$I, T, S, S^2, S^3, TS, TS^2, ST$$

olarak seçersek, bu durumda bütün çarpımları,

$I.T.(T)^{-1} = I,$ $\quad$ $I.S.(S)^{-1} = I,$

$T.T.(I)^{-1} = I,$ $\quad$ $T.S.(TS)^{-1} = I,$

$S.T.(ST)^{-1} = I,$ $\quad$ $S.S.(S^2)^{-1} = I,$

$S^2.T.(TS^2)^{-1} = S^2TS^2T,$ $\quad$ $S^2.S.(S^3)^{-1} = I,$

$S^3.T.(TS)^{-1} = S^3TS^3T,$ $\quad$ $S^3.S.(I)^{-1} = I,$

$TS.T.(S^3)^{-1} = TSTS,$ $\quad$ $TS.S.(TS^2)^{-1} = I,$

$TS^2.T.(S^2)^{-1} = TS^2TS^2,$ $\quad$ $TS^2.S.(ST)^{-1} = TS^3TS^3,$

$ST.T.(S)^{-1} = I,$ $\quad$ $ST.S.(T)^{-1} = STST$

biçimindedir. Burada

$$(STST)^{-1} = TS^3TS^3$$
$$(S^2TS^2T)^{-1} = TS^2TS^2$$
$$(S^3TS^3T)^{-1} = TSTS$$

dir. Buna göre, $H_2(\sqrt{2})$ nin üreteçleri $TSTS$, TS^2TS^2, TS^3TS^3 olur. Böylece,

$$H_2(\sqrt{2}) = \langle TSTS \rangle * \langle TS^2TS^2 \rangle * \langle TS^3TS^3 \rangle$$

bulunur.

Burada permütasyon metodu ve Riemann-Hurwitz formülü kullanılarak $H_2(\sqrt{2})$ nin işareti $(0; \infty^{(4)})$ olarak bulunur. ■

3.1.17 Teorem: $H(\sqrt{3})$ ün $H_2(\sqrt{3})$ temel denklik altgrubu beş tane sonsuz devirli grubun serbest çarpımıdır.

İspat: $H(\sqrt{3})\ /\ H_2(\sqrt{3}) \cong \langle T, S | T^2 = S^6 = (TS)^2 = I \rangle$ biçiminde tanımlıdır. Böylece, $|H(\sqrt{3}) : H_2(\sqrt{3})| \cong D_6$ ve $|H(\sqrt{3}) : H_2(\sqrt{3})| = 12$ olur, [9]. Eğer $H_2(\sqrt{3})$ için Schreier transversali

$$I, T, S, S^2, S^3, S^4, S^5, TS, TS^2, TS^3, TS^4, ST$$

olarak seçersek, bu durumda bütün çarpımları,

$I.T.(T)^{-1} = I,$	$I.S.(S)^{-1} = I,$
$T.T.(I)^{-1} = I,$	$T.S.(TS)^{-1} = I,$
$S.T.(ST)^{-1} = I,$	$S.S.(S^2)^{-1} = I,$
$S^2.T.(TS^4)^{-1} = S^2TS^2T,$	$S^2.S.(S^3)^{-1} = I,$
$S^3.T.(TS^3)^{-1} = S^3TS^3T,$	$S^3.S.(S^4)^{-1} = I,$
$S^4.T.(TS^2)^{-1} = S^4TS^4T,$	$S^4.S.(S^5)^{-1} = I,$
$S^5.T.(TS)^{-1} = S^5TS^5T,$	$S^5.S.(I)^{-1} = I,$
$TS.T.(S^5)^{-1} = TSTS,$	$TS.S.(TS^2)^{-1} = I,$
$TS^2.T.(S^4)^{-1} = TS^2TS^2,$	$TS^2.S.(TS^3)^{-1} = I,$
$TS^3.T.(S^3)^{-1} = TS^3TS^3,$	$TS^3.S.(TS^4)^{-1} = I,$
$TS^4.T.(S^2)^{-1} = TS^4TS^4,$	$TS^4.S.(ST)^{-1} = TS^5TS^5,$
$ST.T.(S)^{-1} = I,$	$ST.S.(T)^{-1} = STST$

biçimindedir. Burada

$$(STST)^{-1} = TS^5TS^5$$

$$(S^2TS^2T)^{-1} = TS^4TS^4$$
$$(S^3TS^3T)^{-1} = TS^3TS^3$$
$$(S^4TS^4T)^{-1} = TS^2TS^2$$
$$(S^5TS^5T)^{-1} = TSTS$$

dir. Buna göre, $H_2(\sqrt{3})$ ün üreteçleri $TSTS$, TS^2TS^2, TS^3TS^3, TS^4TS^4, TS^5TS^5 olur. Böylece,

$$H_2(\sqrt{3}) = \langle TSTS\rangle * \langle TS^2TS^2\rangle * \langle TS^3TS^3\rangle * \langle TS^4TS^4\rangle * \langle TS^5TS^5\rangle$$

bulunur.

Burada permütasyon metodu ve Riemann-Hurwitz formülü kullanılarak $H_2(\sqrt{3})$ ün işareti $(0; \infty^{(6)})$ olarak bulunur. ■

3.1.18 Sonuç: $q = 3, 4, 6$ için $H(\lambda_q)$ Hecke grubunun $H_2(\lambda_q)$ temel denklik altgrubu, mertebesi sonsuz olan ve

$$a_1 = TSTS, a_2 = TS^2TS^2, \dots, a_{q-1} = TS^{q-1}TS^{q-1}$$

elemanları ile üretilen $(q-1)$ tane sonlu devirli grubun serbest çarpımıdır.

$TR \notin H_2(\sqrt{m})$, $TR \in \overline{H}_2(\sqrt{m})$ ve $\overline{H}(\sqrt{m})/\overline{H}_2(\sqrt{m}) \cong H(\sqrt{m}) / H_2(\sqrt{m})$ olduğundan

$$\overline{H}_2(\sqrt{m}) = H_2(\sqrt{m}) \cup TR.H_2(\sqrt{m})$$

elde edilir. Böylece,

3.1.19 Sonuç: $q = 3, 4, 6$ için $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grubunun $\overline{H}_2(\lambda_q)$ temel denklik altgrubu, mertebesi 2 olan q tane sonlu devirli grubun serbest çarpımıdır. Buna göre,

$$\overline{H}_2(\lambda_q) = \langle TR\rangle * \langle RSTS\rangle * \dots * \langle RS^{q-1}TS^{q-1}\rangle$$

elde edilir.

$H(\lambda_5)$ in Temel Denklik Altgrubunun Üreteçleri

Bu bölümde, $q = 5$ için $H_2(\lambda_q)$ nun temel denklik altgrubunun üreteçleri incelenmiştir.

3.1.20 Teorem: $H(\lambda_5)$ in $H_2(\lambda_5)$ temel denklik altgrubu dört tane sonsuz devirli grubun serbest çarpımıdır.

İspat: $H(\lambda_5)\ /\ H_2(\lambda_5) \cong \langle T, S | T^2 = S^5 = (TS)^2 = I\rangle$ biçiminde tanımlıdır. Böylece, $|H(\lambda_5): H_2(\lambda_5)| \cong D_5$ ve $|H(\lambda_5): H_2(\lambda_5)| = 10$ olur, [9].

Eğer $H_2(\lambda_5)$ için Schreier transversali

$$I, T, S, S^2, S^3, S^4, TS, TS^2, TS^3, ST$$

olarak seçersek, bu durumda bütün çarpımları,

$I.T.(T)^{-1} = I,$	$I.S.(S)^{-1} = I,$
$T.T.(I)^{-1} = I,$	$T.S.(TS)^{-1} = I,$
$S.T.(ST)^{-1} = I,$	$S.S.(S^2)^{-1} = I,$
$S^2.T.(TS^3)^{-1} = S^2TS^2T,$	$S^2.S.(S^3)^{-1} = I,$
$S^3.T.(TS^2)^{-1} = S^3TS^3T,$	$S^3.S.(S^4)^{-1} = I,$
$S^4.T.(TS)^{-1} = S^4TS^4T,$	$S^4.S.(I)^{-1} = I,$
$TS.T.(S^4)^{-1} = TSTS,$	$TS.S.(TS^2)^{-1} = I,$
$TS^2.T.(S^3)^{-1} = TS^2TS^2,$	$TS^2.S.(TS^3)^{-1} = I,$
$TS^3.T.(S^2)^{-1} = TS^3TS^3,$	$TS^3.S.(ST)^{-1} = TS^4TS^4,$
$ST.T.(S)^{-1} = I,$	$ST.S.(T)^{-1} = STST$

biçimindedir. Burada

$$(STST)^{-1} = TS^4TS^4$$
$$(S^2TS^2T)^{-1} = TS^3TS^3$$
$$(S^3TS^3T)^{-1} = TS^2TS^2$$
$$(S^4TS^4T)^{-1} = TSTS$$

dir. Buna göre, $H_2(\lambda_5)$ ün üreteçleri $TSTS$, TS^2TS^2, TS^3TS^3, TS^4TS^4 olur. Böylece,

$$H_2(\lambda_5) = \langle TSTS\rangle * \langle TS^2TS^2\rangle * \langle TS^3TS^3\rangle * \langle TS^4TS^4\rangle$$

bulunur.

Burada permütasyon metodu ve Riemann-Hurwitz formülü kullanılarak $H_2(\lambda_5)$ in işareti $(0; \infty^{(5)})$ olarak bulunur. ■

$H(\lambda_7)$ nin Temel Denklik Altgrubunun Üreteçleri

Bu bölümde, $q = 7$ için $H_2(\lambda_q)$ nun temel denklik altgrubunun üreteçleri incelenmiştir.

3.1.21 Teorem: $H(\lambda_7)$ nin $H_2(\lambda_7)$ temel denklik altgrubu altı tane sonsuz devirli grubun serbest çarpımıdır.

İspat: $H(\lambda_7)\ /\ H_2(\lambda_7) \cong \langle T, S | T^2 = S^7 = (TS)^2 = I \rangle$ biçiminde tanımlıdır. Böylece, $|H(\lambda_7): H_2(\lambda_7)| \cong D_7$ ve $|H(\lambda_7): H_2(\lambda_7)| = 14$ olur, [9]. Eğer $H_2(\lambda_7)$ için Schreier transversali

$$I, T, S, S^2, S^3, S^4, S^5, S^6, TS, TS^2, TS^3, TS^4, TS^5, ST$$

olarak seçersek, bu durumda bütün çarpımları,

$$
\begin{array}{ll}
I.T.(T)^{-1} = I, & I.S.(S)^{-1} = I, \\
T.T.(I)^{-1} = I, & T.S.(TS)^{-1} = I, \\
S.T.(ST)^{-1} = I, & S.S.(S^2)^{-1} = I, \\
S^2.T.(TS^5)^{-1} = S^2TS^2T, & S^2.S.(S^3)^{-1} = I, \\
S^3.T.(TS^4)^{-1} = S^3TS^3T, & S^3.S.(S^4)^{-1} = I, \\
S^4.T.(TS^3)^{-1} = S^4TS^4T, & S^4.S.(S^5)^{-1} = I, \\
S^5.T.(TS^2)^{-1} = S^5TS^5T, & S^5.S.(S^6)^{-1} = I, \\
S^6.T.(TS)^{-1} = S^6TS^6T, & S^6.S.(I)^{-1} = I, \\
TS.T.(S^6)^{-1} = TSTS, & TS.S.(TS^2)^{-1} = I, \\
TS^2.T.(S^5)^{-1} = TS^2TS^2, & TS^2.S.(TS^3)^{-1} = I, \\
TS^3.T.(S^4)^{-1} = TS^3TS^3, & TS^3.S.(TS^4)^{-1} = I, \\
TS^4.T.(S^3)^{-1} = TS^4TS^4, & TS^4.S.(TS^5)^{-1} = I, \\
TS^5.T.(S^2)^{-1} = TS^5TS^5, & TS^5.S.(ST)^{-1} = TS^6TS^6, \\
ST.T.(S)^{-1} = I, & ST.S.(T)^{-1} = STST
\end{array}
$$

biçimindedir. Burada

$$(STST)^{-1} = TS^6TS^6$$
$$(S^2TS^2T)^{-1} = TS^5TS^5$$
$$(S^3TS^3T)^{-1} = TS^4TS^4$$
$$(S^4TS^4T)^{-1} = TS^3TS^3$$
$$(S^5TS^5T)^{-1} = TS^2TS^2$$
$$(S^6TS^6T)^{-1} = TSTS$$

dir. Buna göre, $H_2(\lambda_7)$ nin üreteçleri $TSTS$, TS^2TS^2, TS^3TS^3, TS^4TS^4, TS^5TS^5, TS^6TS^6 olur. Böylece,

$$H_2(\lambda_7) = \langle TSTS \rangle * \langle TS^2TS^2 \rangle * \langle TS^3TS^3 \rangle * \langle TS^4TS^4 \rangle * \langle TS^5TS^5 \rangle * \langle TS^6TS^6 \rangle$$

bulunur.

Burada permütasyon metodu ve Riemann-Hurwitz formülü kullanılarak $H_2(\lambda_7)$ nin işareti $\left(0;\infty^{(7)}\right)$ olarak bulunur. ■

$H(\lambda_q)$ nun $q>7$ asalı için Temel Denklik Altgrubunun Üreteçleri

Bu bölümde, $q>7$ asal sayısı için $H_2\left(\lambda_q\right)$ nun temel denklik altgrubunun üreteçleri incelenmiştir.

3.1.22 Teorem: $q>7$ asal sayısı için $H(\lambda_q)$ nun $H_2\left(\lambda_q\right)$ temel denklik altgrubu $q-1$ tane sonsuz devirli grubun serbest çarpımıdır.

İspat: $H\left(\lambda_q\right) / H_2\left(\lambda_q\right) \cong \langle T,S \mid T^2=S^q=(TS)^2=I\rangle$ biçiminde tanımlıdır. Böylece, $\left|H\left(\lambda_q\right):H_2\left(\lambda_q\right)\right| \cong D_q$ ve $\left|H\left(\lambda_q\right):H_2\left(\lambda_q\right)\right|=2q$ olur, [9]. Eğer $H_2\left(\lambda_q\right)$ için Schreier transversali

$$I,T,S,S^2,S^3,S^4,S^5,\ldots,S^{q-1},TS,TS^2,TS^3,TS^4,\ldots,TS^{q-2},ST$$

olarak seçersek, bu durumda bütün çarpımları,

$I.T.(T)^{-1}=I,$	$I.S.(S)^{-1}=I,$
$T.T.(I)^{-1}=I,$	$T.S.(TS)^{-1}=I,$
$S.T.(ST)^{-1}=I,$	$S.S.(S^2)^{-1}=I,$
$S^2.T.(TS^{q-2})^{-1}=S^2TS^2T,$	$S^2.S.(S^3)^{-1}=I,$
$S^3.T.(TS^{q-3})^{-1}=S^3TS^3T,$	$S^3.S.(S^4)^{-1}=I,$
$\vdots,$	$\vdots,$
$S^{q-2}.T.(TS^2)^{-1}=S^{q-2}TS^{q-2}T,$	$S^{q-2}.S.(S^{q-1})^{-1}=I,$
$S^{q-1}.T.(TS)^{-1}=S^{q-1}TS^{q-1}T,$	$S^{q-1}.S.(I)^{-1}=I,$
$TS.T.(S^{q-1})^{-1}=TSTS,$	$TS.S.(TS^2)^{-1}=I,$
$TS^2.T.(S^{q-2})^{-1}=TS^2TS^2,$	$TS^2.S.(TS^3)^{-1}=I,$
$TS^3.T.(S^{q-3})^{-1}=TS^3TS^3,$	$TS^3.S.(TS^4)^{-1}=I,$
$\vdots,$	$\vdots,$
$TS^{q-3}.T.(S^3)^{-1}=TS^{q-3}TS^{q-3},$	$TS^{q-3}.S.(TS^{q-2})^{-1}=I,$
$TS^{q-2}.T.(S^2)^{-1}=TS^{q-2}TS^{q-2},$	$TS^{q-2}.S.(ST)^{-1}=TS^{q-1}TS^{q-1},$
$ST.T.(S)^{-1}=I,$	$ST.S.(T)^{-1}=STST$

biçimindedir. Burada

$$(STST)^{-1} = TS^{q-1}TS^{q-1}$$
$$(S^2TS^2T)^{-1} = TS^{q-2}TS^{q-2}$$
$$(S^3TS^3T)^{-1} = TS^{q-3}TS^{q-3}$$
$$(S^4TS^4T)^{-1} = TS^{q-4}TS^{q-4}$$
$$\vdots$$
$$(S^{q-1}TS^{q-1}T)^{-1} = TSTS$$
$$(TS^2TS^2)^{-1} = S^{q-2}TS^{q-2}T$$
$$(TS^3TS^3)^{-1} = S^{q-3}TS^{q-3}T$$

dir. Buna göre, $H_2(\lambda_q)$ nun üreteçleri $TSTS$, TS^2TS^2, TS^3TS^3,..., $TS^{q-3}TS^{q-3}$, $TS^{q-2}TS^{q-2}$, $TS^{q-1}TS^{q-1}$ olur. Böylece,

$$H_2(\lambda_q) = \langle TSTS\rangle * \langle TS^2TS^2\rangle * \langle TS^3TS^3\rangle * \dots * \langle TS^{q-2}TS^{q-2}\rangle * \langle TS^{q-1}TS^{q-1}\rangle$$

bulunur.

Burada permütasyon metodu ve Riemann-Hurwitz formülü kullanılarak $H_2(\lambda_q)$ nun işareti $(0; \infty^{(q)})$ olarak bulunur. ■

3.1.23 Sonuç: $q \geq 3$ için $\overline{H}(\lambda_q)$ Hecke grubunun $\overline{H}_2(\lambda_q)$ temel denklik altgrubu, mertebesi 2 olan q tane sonlu devirli grubun serbest çarpımıdır. Buna göre,

$$\overline{H}_2(\lambda_q) = \langle TR\rangle * \langle RSTS\rangle * \dots * \langle RS^{q-1}TS^{q-1}\rangle$$

elde edilir.

3.2 Pell Sayıları ve Genelleştirilmiş Pell Sayıları

Bu bölümde Pell sayıları, Pell-Lucas sayılarının tanımları verilmiştir. Daha sonra genelleştirilmiş Pell ve genelleştirilmiş Pell-Lucas sayılarının farklı tanımları yapılmıştır. Bu bölümde, bir önceki bölümde bulunan $H_2(\lambda_q)$ temel denklik altgrubunun $a_1 = TSTS$ ve $a_{q-1} = TS^{-1}TS^{-1}$ üreteçlerini kullanarak genelleştirilmiş Pell ve Pell-Lucas sayılarının tanımları yapılmıştır. Daha sonra genelleştirilmiş Pell ve genelleştirilmiş Pell-Lucas sayılarının özellikleri incelenmiştir. Ayrıca bu dizilerin polinom olarak yazılabileceği de gösterilmiştir.

3.2.1 Tanım: Pell sayıları, her $n \geq 2$ tamsayısı için ve başlangıç koşulları

$$P_0 = 0$$

ve

$$P_1 = 1$$

olmak üzere

$$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$$

bağıntısı ile tanımlanır. Burada P_n ye n. Pell sayısı denir, [35].

3.2.2 Tanım: Pell-Lucas sayıları, her $n \geq 2$ tamsayısı için ve başlangıç koşulları

$$Q_0 = Q_1 = 2$$

olmak üzere

$$Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}$$

bağıntısı ile tanımlanır. Burada Q_n ye n. Pell-Lucas sayısı denir, [35].

Şimdi genelleştirilmiş Pell ve genelleştirilmiş Pell-Lucas sayılarını tanımlayabilmek için $H(\lambda_q)$ Hecke grubunun $= \lambda_q = 2\cos\frac{\pi}{q}$, $q \geq 3$ durumunu ele alalım.

$q = 3$ için $\lambda = \lambda_q = 1$

$q = 4$ için $\lambda = \lambda_q = \sqrt{2}$

$q = 6$ için $\lambda = \lambda_q = \sqrt{3}$

olduğunu biliyoruz. Bu değerlerden yararlanarak $\lambda_q = \sqrt{m}$ biçiminde bir sayı olduğunu düşünürsek aşağıdaki tanımları verebiliriz.

3.2.3 Tanım: Her $n \geq 2$ tamsayısı ve $q = 3, 4, 6$ için ve başlangıç koşulları

$$U_0 = 0$$

ve

$$U_1 = 1$$

olmak üzere

$$U_n = 2\sqrt{m}U_{n-1} + U_{n-2}$$

bağıntısı ile tanımlanır ve U_n ye n. genelleştirilmiş Pell sayısı denir.

Burada $q = 3, 4, 6$ için sırasıyla $m = 1, 2, 3$ değerlerini alır.

3.2.4 Tanım: Her $n \geq 2$ tamsayısı ve $q = 3, 4, 6$ için ve başlangıç koşulları

$$V_0 = 2$$

ve

$$V_1 = 2\sqrt{m}$$

olmak üzere

$$V_n = 2\sqrt{m}V_{n-1} + V_{n-2}$$

bağıntısı ile tanımlanır ve V_n ye n. genelleştirilmiş Pell-Lucas sayısı denir.

Burada $q = 3, 4, 6$ için $m = 1, 2, 3$ değerleri karşılık gelecek şekilde $H(\sqrt{m})$ Hecke grubu üzerinde çalışılacaktır. Bu durumda, $a_1 = (TS)^2$ ve $a_{q-1} = (TS^{-1})^2$ üreteçlerinin matris gösterimleri

$$\begin{bmatrix} 1 & 2\sqrt{m} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2\sqrt{m} & 1 \end{bmatrix}$$

biçiminde olur. Böylece $a_{q-1}.a_1 = (TS^{-1})^2.(TS)^2$ için matris gösterimi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2\sqrt{m} \\ 2\sqrt{m} & 1 + 4m \end{bmatrix}$$

olur.

3.2.5 Lemma: Her $k \geq 2$ sayısı için,

$$A^k = \begin{bmatrix} U_{2k-1} & U_{2k} \\ U_{2k} & U_{2k+1} \end{bmatrix}$$

dır. Burada $U_0 = 0$, $U_1 = 1$ ve $U_k = 2\sqrt{m}U_{k-1} + U_{k-2}$ dir.

İspat: k üzerinden tümevarım yöntemi ile yapalım.

$$A = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \\ U_2 & U_3 \end{bmatrix}$$

ve

$$A^k = \begin{bmatrix} U_{2k-1} & U_{2k} \\ U_{2k} & U_{2k+1} \end{bmatrix}$$

olsun. Bu durumda,

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2\sqrt{m} \\ 2\sqrt{m} & 1+4m \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2\sqrt{m} \\ 2\sqrt{m} & 1+4m \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+4m & 2\sqrt{m}(1+4m)+2\sqrt{m} \\ 2\sqrt{m}(1+4m)+2\sqrt{m} & 4m+(4m+1)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_3 & U_4 \\ U_4 & U_5 \end{bmatrix}$$

Böylece $k = 2$ için eşitlik sağlanır. Şimdi $A^{k-1} = \begin{bmatrix} U_{2k-3} & U_{2k-2} \\ U_{2k-2} & U_{2k-1} \end{bmatrix}$ olduğunu varsayalım.

$$A^k = \begin{bmatrix} U_{2k-3} & U_{2k-2} \\ U_{2k-2} & U_{2k-1} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2\sqrt{m} \\ 2\sqrt{m} & 1+4m \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} U_{2k-3}+2\sqrt{m}(U_{2k-2}) & 2\sqrt{m}U_{2k-3}+(1+4m)U_{2k-2} \\ U_{2k-2}+2\sqrt{m}(U_{2k-1}) & 2\sqrt{m}U_{2k-2}+(1+4m)U_{2k-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} U_{2k-1} & U_{2k} \\ U_{2k} & U_{2k+1} \end{bmatrix}$$

Böylece istenen elde edilmiş olur.■

3.2.6 Önerme: Her $k \geq 2$ için,

$$U_k = \frac{1}{2\sqrt{m+1}}\left[(\sqrt{m}+\sqrt{m+1})^k - (\sqrt{m}-\sqrt{m+1})^k\right]$$

dır.

İspat: U_k dizisinin karakteristik polinomuna r^k diyelim. O halde

$$r^k = 2\sqrt{m}r^{k-1} + r^{k-2}$$

olur ve böylece

$$r^2 - 2\sqrt{m}r - 1 = 0$$

olur. Bu denklemin kökleri

$$r_{1,2} = \sqrt{m} \pm \sqrt{m+1}$$

dir.

Şimdi r_1 ve r_2 den yararlanarak U_k dizisini yazarsak,

$$U_k = A(\sqrt{m}+\sqrt{m+1})^k + B(\sqrt{m}-\sqrt{m+1})^k$$

olur.

$U_0 = 0$ ve $U_1 = 1$ olduğundan A ve B yi hesaplayabiliriz.

$$U_0 = 0 = A + B$$

$$U_1 = 1 = A\left(\sqrt{m}+\sqrt{m+1}\right) + B(\sqrt{m}-\sqrt{m+1})$$

olur ve böylece

$$2A\sqrt{m+1}=1$$

olur. Buradan

$$A=\frac{1}{2\sqrt{m+1}}$$

ve

$$B=-\frac{1}{2\sqrt{m+1}}$$

bulunur. Dolayısıyla,

$$U_k=\frac{1}{2\sqrt{m+1}}\left[(\sqrt{m}+\sqrt{m+1})^k-(\sqrt{m}-\sqrt{m+1})^k\right]$$

elde edilir. ■

Burada U_k formülü, genelleştirilmiş Pell sayı dizisi olur. Eğer $m=1$ alınırsa, $U_k=P_k$ (k. Pell sayısı) olur ve

$$U_k=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(1+\sqrt{2})^k-(1-\sqrt{2})^k\right]$$

elde edilir.

Genel olarak A^k matrisinin izi,

$$tr(A^k)=U_{2k-1}+U_{2k+1}=U_{2k-1}+2\sqrt{m}U_{2k}+U_{2k-1}=2\sqrt{m}U_{2k}+2U_{2k-1}$$

biçimindedir.

Şimdi, V_k genelleştirilmiş Pell-Lucas dizisini bulabiliriz. Her $k\geq 2$ sayısı için $V_0=2$ ve $V_1=2\sqrt{m}$ olmak üzere $V_k=2\sqrt{m}V_{k-1}+V_{k-2}$ indirgeme bağıntısı ile tanımlanır. Böylece genelleştirilmiş Pell-Lucas dizisi, $V_k=2\sqrt{m}U_k+2U_{k-1}$ ile gösterilebilir. Buradan

$$tr(A^k)=V_{2k}$$

olduğu görülür. Ayrıca A^k matrisinin determinantı 1 dir.

$a_1.a_{q-1}=(TS)^2.(TS^{-1})^2$ çarpımı alınırsa, matris gösterimi $B=\begin{bmatrix}1+4m & 2\sqrt{m}\\ 2\sqrt{m} & 1\end{bmatrix}$ olur. Böylece her k sayısı için $B^k=\begin{bmatrix}U_{2k+1} & U_{2k}\\ U_{2k} & U_{2k-1}\end{bmatrix}$ elde edilir. Burada B^k matrisinin izi, $tr(B^k)=V_{2k}$ olur ve $\det(B^k)=1$ dir. A ve B matrisleri aynı karakteristik denkleme ve dolayısıyla aynı köklere sahiptir. Karakteristik denklem,

$$r^2 - (4m+2)r + 1 = 0$$

ve kökler,

$$r_{1,2} = (2m+1) \pm 2\sqrt{m(m+1)}$$

biçimindedir.

Genelleştirilmiş Pell ve Genelleştirilmiş Pell-Lucas Dizilerinin Temel Özellikleri

3.2.7 Önerme: Her $k \geq 2$ için

$$V_k = \left(\sqrt{m} + \sqrt{m+1}\right)^k + \left(\sqrt{m} - \sqrt{m+1}\right)^k$$

dır.

İspat: b_k dizisinin karakteristik polinomuna r^k diyelim. O halde

$$r^k = 2\sqrt{m}r^{k-1} + r^{k-2}$$

olur ve böylece

$$r^2 - 2\sqrt{m}r - 1 = 0$$

olur. Bu denklemin kökleri

$$r_{1,2} = \sqrt{m} \mp \sqrt{m+1}$$

dir.

Şimdi r_1 ve r_2 den yararlanarak V_k dizisini yazarsak,

$$V_k = A\left(\sqrt{m} + \sqrt{m+1}\right)^k + B\left(\sqrt{m} - \sqrt{m+1}\right)^k$$

olur.

$V_0 = 2$ ve $V_1 = 2\sqrt{m}$ olduğundan A ve B yi hesaplayabiliriz.

$$V_0 = 2 = A + B$$

$$V_1 = 2\sqrt{m} = A\left(\sqrt{m} + \sqrt{m+1}\right) + B\left(\sqrt{m} - \sqrt{m+1}\right)$$

olur ve böylece

$$2\sqrt{m} = A\left(\sqrt{m} + \sqrt{m+1}\right) + (2 - A)\left(\sqrt{m} - \sqrt{m+1}\right)$$

olur. Buradan denklemin çözümünün

$A = 1$ ve $B = 1$

olduğu çıkar. Dolayısıyla

$$V_k = \left(\sqrt{m} + \sqrt{m+1}\right)^k + \left(\sqrt{m} - \sqrt{m+1}\right)^k$$

dır. ■

Burada dikkat edilirse V_k genelleştirilmiş Pell-Lucas dizisidir. Eğer $m = 1$ seçilirse dizi Pell-Lucas dizisi olur. Yani $V_k = Q_k$ (k. Pell-Lucas sayısı) dır. Bu durumda,

$$V_k = \left(1+\sqrt{2}\right)^k + \left(1-\sqrt{2}\right)^k$$

olur. Böylece U_k ve V_k sırasıyla genelleştirilmiş Pell ve genelleştirilmiş Pell-Lucas dizileri olur.

U_k ve V_k dizilerini negatif indekslilere genişletmek mümkündür. Örneğin,

$$U_{-1} = U_1 - 2\sqrt{m}U_0 = 1$$
$$U_{-2} = U_0 - 2\sqrt{m}U_{-1} = -2\sqrt{m}$$
$$U_{-3} = U_{-1} - 2\sqrt{m}U_{-2} = 4m+1$$
$$\vdots$$

şeklinde devam eder. Böylece

$$U_{-k} = (-1)^{k+1}U_k$$

olur. Benzer şekilde,

$$V_{-1} = V_1 - 2\sqrt{m}V_0 = -2\sqrt{m}$$
$$V_{-2} = V_0 - 2\sqrt{m}V_{-1} = 4m+2$$
$$V_{-3} = V_{-1} - 2\sqrt{m}V_{-2} = -2\sqrt{m}(4m+3)$$
$$\vdots$$

olur ve böylece

$$V_{-k} = (-1)^k V_k$$

olduğunu söyleyebiliriz.

Şimdi U_k (k. genelleştirilmiş Pell sayısı) ve V_k (k. genelleştirilmiş Pell-Lucas sayısı) dizilerinin bazı özelliklerini inceleyelim.

3.2.8 Önerme: $\{U_k\}$ genelleştirilmiş Pell dizisi ve $\{V_k\}$ genelleştirilmiş Pell-Lucas dizisi olsun. Bu durumda,

$$\boldsymbol{i})U_k = (4m+2)U_{k-2} - U_{k-4}$$
$$\boldsymbol{ii})V_k = (4m+2)V_{k-2} - V_{k-4}$$

İspat: ***i***) U_k tanımından, $U_{k-3} = 2\sqrt{m}U_{k-4} + U_{k-5}$ ve böylece

$$U_{k-3} - U_{k-5} = 2\sqrt{m}U_{k-4}$$

olur.

$$\begin{aligned} U_k &= 2\sqrt{m}U_{k-1} + U_{k-2} = 2\sqrt{m}\left(2\sqrt{m}U_{k-2} + U_{k-3}\right) + U_{k-2} \\ &= (4m+1)U_{k-2} + 2\sqrt{m}U_{k-3} \\ &= (4m+1)U_{k-2} + 2\sqrt{m}\left(2\sqrt{m}U_{k-4} + U_{k-5}\right) \\ &= (4m+1)U_{k-2} + 4mU_{k-4} + 2\sqrt{m}U_{k-5} \\ &= (4m+2)U_{k-2} - \left(2\sqrt{m}U_{k-3} + U_{k-4}\right) + 4mU_{k-4} + 2\sqrt{m}U_{k-5} \\ &= (4m+2)U_{k-2} - U_{k-4} + 4mU_{k-4} - 2\sqrt{m}(U_{k-3} - U_{k-5}) \\ &= (4m+2)U_{k-2} - U_{k-4} + 4mU_{k-4} - 2\sqrt{m}\left(2\sqrt{m}U_{k-4}\right) \\ &= (4m+2)U_{k-2} - U_{k-4} \end{aligned}$$

ii) Benzer şekilde $V_k = (4m+2)V_{k-2} - V_{k-4}$ olduğu kolayca gösterilebilir. ■

Burada $m = 1$ alınırsa $U_k = 6U_{k-2} - U_{k-4}$ ve $V_k = 6V_{k-2} - V_{k-4}$ elde edilir.

3.2.9 Önerme: $\{U_k\}$ genelleştirilmiş Pell dizisi ve $\{V_k\}$ genelleştirilmiş Pell-Lucas dizisi olsun. Bu durumda,

$$V_k = U_{k+1} + U_{k-1}$$

olur.

İspat: k üzerinden tümevarım ile ispatlayalım.

$k = 0$ için $U_1 + U_{-1} = 1 + 1 = 2 = V_0$ ve $k = 1$ için $U_2 + U_0 = 2\sqrt{m} = V_1$ olur. Böylece $k = 0$ ve $k = 1$ için eşitlik sağlanır.

$k = 2, \ldots, n$ için eşitliğin doğru olduğunu varsayalım ve $k = n+1$ için eşitliğin doğruluğunu gösterelim. Varsayım gereği,

$$V_n = U_{n+1} + U_{n-1}$$

ve

$$V_{n-1} = U_n + U_{n-2}$$

olur. Böylece

$$U_{n+2} + U_n = 2\sqrt{m}U_{n+1} + U_n + 2\sqrt{m}U_{n-1} + U_{n-2}$$

$$= 2\sqrt{m}(U_{n+1} + U_{n-1}) + (U_n + U_{n-2})$$
$$= 2\sqrt{m}V_n + V_{n-1} = V_{n+1}$$

olur. ■

3.2.10 Önerme: $\{U_k\}$ genelleştirilmiş Pell dizisi ve $\{V_k\}$ genelleştirilmiş Pell-Lucas dizisi olsun. Bu durumda,

$$U_{k-3} + U_{k+3} = (4m+1)V_k$$

olur.

İspat: $V_k = U_{k+1} + U_{k-1}$ olduğundan,

$$(4m+2)V_k = (4m+2)U_{k+1} + (4m+2)U_{k-1} \dots *$$

olur. $U_k = (4m+2)U_{k-2} - U_{k-4}$ olduğundan $U_{k+3} = (4m+2)U_{k+1} - U_{k-1}$ ve $U_{k+1} = (4m+2)U_{k-1} - U_{k-3}$ olur. Böylece $(4m+2)U_{k+1} = U_{k+3} + U_{k-1}$ ve $(4m+2)U_{k-1} = U_{k+1} + U_{k-3}$ olur. Bu eşitlikler $*$ da yerine konulursa,

$$(4m+2)V_k = U_{k+3} + U_{k-1} + U_{k+1} + U_{k-3}$$

olur. 3.2.9 Önermeden $(4m+2)V_k = U_{k+3} + U_{k-3} + V_k$ olur ve böylece

$$U_{k-3} + U_{k+3} = (4m+1)V_k$$

olduğu görülür. ■

3.2.11 Önerme: $\{U_k\}$ genelleştirilmiş Pell dizisi ve $\{V_k\}$ genelleştirilmiş Pell-Lucas dizisi olsun. Bu durumda,

$$U_{2k} = U_k V_k$$

olur.

İspat: İspatı k üzerinden tümevarım ile yapalım. $k = 0$ ise $U_0V_0 = 0 = U_0$ ve $k = 1$ ise $U_1V_1 = 2\sqrt{m} = U_2$ olur ve eşitlik sağlanır. Varsayalım ki $k = 2, \dots, n-1$ için eşitlik sağlansın. Yani $U_{2(n-1)} = U_{n-1}V_{n-1}$ olsun.

Şimdi $k = n$ için eşitliğin doğru olduğunu gösterelim. 3.2.8 Önerme, 3.2.9 Önerme ve tanımdan,

$$U_nV_n = U_n(U_{n+1} + U_{n-1})$$
$$= U_n\big((4m+2)U_{n-1} - U_{n-3}\big) + U_{n-1}((4m+2)U_{n-2} - U_{n-4})$$
$$= (4m+2)U_nU_{n-1} + (4m+2)U_{n-1}U_{n-2} - U_nU_{n-3} -$$
$$U_{n-1}U_{n-4}$$

$$= (4m+2)U_{n-1}(U_n + U_{n-2}) - U_nU_{n-3} - U_{n-1}U_{n-4}$$
$$= (4m+2)U_{n-1}V_{n-1} - U_nU_{n-3} - U_{n-1}U_{n-4}$$
$$= (4m+2)U_{n-1}V_{n-1} - U_{n-3}\left(2\sqrt{m}U_{n-1} + U_{n-2}\right) - U_{n-1}(U_{n-2} - 2\sqrt{m}U_{n-3})$$
$$= (4m+2)U_{n-1}V_{n-1} - 2\sqrt{m}U_{n-3}U_{n-1} - U_{n-2}(U_{n-3} + U_{n-1}) + 2\sqrt{m}U_{n-1}U_{n-3}$$
$$= (4m+2)U_{n-1}V_{n-1} - U_{n-2}V_{n-2}$$
$$= (4m+2)U_{2n-2} - U_{2n-4}$$
$$= U_{2n}$$

olur. ■

3.2.12 Önerme: $\{U_k\}$ genelleştirilmiş Pell dizisi ve $\{V_k\}$ genelleştirilmiş Pell-Lucas dizisi olsun. Bu durumda,

$$V_{k-1} + V_{k+1} = (4m+4)U_k$$

olur.

İspat: k üzerinden tümevarım ile ispatlayalım.

$k = 0$ için $V_{-1} + V_1 = -2\sqrt{m} + 2\sqrt{m} = 0 = U_0$ ve $k = 1$ için $V_0 + V_2 = 2 + 4m + 2 = (4m+4)U_1$ olur. Böylece $k = 0$ ve $k = 1$ için eşitlik sağlanır.

$k = 2, \dots, n-1$ için eşitliğin doğru olduğunu varsayalım ve $k = n$ için eşitliğin doğruluğunu gösterelim. Varsayım gereği,

$$V_{n-2} + V_n = (4m+4)U_{n-1}$$

olur. 3.2.8 Önermeden,

$$V_{n-1} + V_{n+1} = (4m+2)V_{n-3} - V_{n-5} + (4m+2)V_{n-1} - V_{n-3}$$
$$= (4m+2)(V_{n-3} + V_{n-1}) - (V_{n-5} + V_{n-3})$$
$$= (4m+2)(4m+4)U_{n-2} - (4m+4)U_{n-4}$$
$$= (4m+4)\left((4m+2)U_{n-2} - U_{n-4}\right) = (4m+4)U_n$$

olur. ■

3.2.13 Önerme: $\{U_k\}$ genelleştirilmiş Pell dizisi ve $\{V_k\}$ genelleştirilmiş Pell-Lucas dizisi olsun. Bu durumda,

$$\boldsymbol{i)}\, U_{k+1}V_{k+1} - U_kV_k = 2\sqrt{m}U_{2k+1}$$
$$\boldsymbol{ii)}\, U_{k+1}V_{k+1} + U_kV_k = V_{2k+1}$$

olur.

İspat: $\boldsymbol{i}$) 3.2.11 Önerme ve U_k tanımından,

$$U_{k+1}V_{k+1}-U_kV_k=U_{2k+2}-U_{2k}=2\sqrt{m}U_{2k+1}+U_{2k}-U_{2k}=2\sqrt{m}U_{2k+1}$$

olduğu görülür.

$\boldsymbol{ii}$) Benzer şekilde 3.2.11 Önerme ve 3.2.13 Önerme i kısmından,

$$\begin{aligned}U_{k+1}V_{k+1}+U_kV_k&=2\sqrt{m}U_{2k+1}+2U_kV_k=2\sqrt{m}U_{2k+1}+2U_{2k}\\&=2\sqrt{m}\left(2\sqrt{m}U_{2k}+U_{2k-1}\right)+2U_{2k}\\&=(4m+2)U_{2k}+2\sqrt{m}U_{2k-1}-U_{2k-2}+U_{2k-2}=U_{2k+2}+U_{2k}\\&=V_{2k+1}\end{aligned}$$

elde edilir. ■

3.2.14 Önerme: $\{U_k\}$ genelleştirilmiş Pell dizisi ve $\{V_k\}$ genelleştirilmiş Pell-Lucas dizisi olsun. Bu durumda,

$$\boldsymbol{i})U_kU_{k+3}-U_{k+1}U_{k+2}=2\sqrt{m}(-1)^{k+1}$$

$$\boldsymbol{ii})V_kV_{k+3}-V_{k+1}V_{k+2}=8\sqrt{m}(m+1)(-1)^{k}$$

olur.

İspat: $\boldsymbol{i}$) k üzerinden tümevarım ile ispatlayalım.

$k=0$ için $U_0U_3-U_1U_2=-2\sqrt{m}=2\sqrt{m}(-1)^1$ ve $k=1$ için $U_1U_4-U_2U_3=2\sqrt{m}(4m+2)-2\sqrt{m}(4m+1)=2\sqrt{m}=2\sqrt{m}(-1)^2$ olur. Böylece $k=0$ ve $k=1$ için eşitlik sağlanır.

$k=2,\dots,n$ için eşitliğin doğru olduğunu varsayalım ve $k=n+1$ için eşitliğin doğruluğunu gösterelim. Varsayım gereği,

$$U_nU_{n+3}-U_{n+1}U_{n+2}=2\sqrt{m}(-1)^{n+1}$$

olur ve böylece

$$\begin{aligned}U_{n+1}U_{n+4}-U_{n+2}U_{n+3}&=U_{n+1}\left(2\sqrt{m}U_{n+3}+U_{n+2}\right)-U_{n+3}\left(2\sqrt{m}U_{n+1}+U_n\right)\\&=-(U_{n+3}U_n-U_{n+1}U_{n+2})=2\sqrt{m}(-1)^{n+2}\end{aligned}$$

$\boldsymbol{ii}$) Benzer şekilde, $k=0$ için

$$\begin{aligned}V_0V_3-V_1V_2&=2.2\sqrt{m}(4m+3)\\&\quad-2\sqrt{m}(4m+2)=8\sqrt{m}(m+1)=8\sqrt{m}(m+1)(-1)^0\end{aligned}$$

ve $k=1$ için

$$V_1V_4 - V_2V_3 = 2\sqrt{m}(16m^2 + 16m + 2) - (4m + 2).2\sqrt{m}.(4m + 3)$$
$$= -8\sqrt{m}(m + 1) = 8\sqrt{m}(m + 1)(-1)^1$$

olur. Böylece $k = 0$ ve $k = 1$ için eşitlik sağlanır.

$k = 2, \dots, n$ için eşitliğin doğru olduğunu varsayalım ve $k = n + 1$ için eşitliğin doğruluğunu gösterelim. Varsayım gereği,

$$V_nV_{n+3} - V_{n+1}V_{n+2} = 8\sqrt{m}(m + 1)(-1)^n$$

olur ve böylece

$$V_{n+1}V_{n+4} - V_{n+2}V_{n+3} = V_{n+1}\left(2\sqrt{m}V_{n+3} + V_{n+2}\right) - V_{n+3}\left(2\sqrt{m}V_{n+1} + V_n\right)$$
$$= -(V_{n+3}V_n - V_{n+1}V_{n+2}) = 8\sqrt{m}(m + 1)(-1)^{n+1}$$

elde edilir. ■

3.2.15 Önerme: $\{U_k\}$ genelleştirilmiş Pell dizisi olsun. Bu durumda,

$$U_{2m+2}U_k - U_{2m}U_{k-2} = 2\sqrt{m}U_{2m+k}$$

olur.

İspat: m sabit sayı olsun. k üzerinden tümevarım ile ispatlayalım. $k = 0$ için $U_0 = 0$ ve $U_{-2} = (-1)^3U_2 = -2\sqrt{m}$ olduğundan,

$$U_{2m+2}U_0 - U_{2m}U_{-2} = 2\sqrt{m}U_{2m}$$

$k = 1$ için $U_1 = 1$ ve $U_{-1} = 1$ olduğundan,

$$U_{2m+2}U_1 - U_{2m}U_{-1} = U_{2m+2} - U_{2m} = 2\sqrt{m}U_{2m+1}$$

olur. $k = 2, \dots, n$ için eşitliğin doğru olduğunu varsayalım ve $k = n + 1$ için eşitliğin doğruluğunu gösterelim. Varsayım gereği,

$U_{2m+2}U_{n-1} - U_{2m}U_{n-3} = 2\sqrt{m}U_{2m+n-1}$ ve $U_{2m+2}U_n - U_{2m}U_{n-2} = 2\sqrt{m}U_{2m+n}$

olur. Böylece,

$$U_{2m+2}U_{n+1} - U_{2m}U_{n-1} = U_{2m+2}\left(2\sqrt{m}U_n + U_{n-1}\right) - U_{2m}\left(2\sqrt{m}U_{n-2} + U_{n-3}\right)$$
$$= 2\sqrt{m}(U_{2m+2}U_n - U_{2m}U_{n-2}) + (U_{2m+2}U_{n-1} - U_{2m}U_{n-3})$$
$$= 2\sqrt{m}2\sqrt{m}U_{2m+n} + 2\sqrt{m}U_{2m+n-1}$$
$$= 2\sqrt{m}\left(2\sqrt{m}U_{2m+n} + U_{2m+n-1}\right) = 2\sqrt{m}U_{2m+n+1}$$

olur. ■

Şimdi U_k (k. genelleştirilmiş Pell sayısı) ve V_k (k. genelleştirilmiş Pell-Lucas sayısı) için bir formül verelim.

3.2.16 Önerme: $\{U_k\}$ genelleştirilmiş Pell dizisi ve $\{V_k\}$ genelleştirilmiş Pell-Lucas dizisi olsun. Bu durumda,

$$\sum_{i=1}^{k+1} U_i = \frac{U_{k+2} + U_{k+1} - 1}{2\sqrt{m}}$$

ve

$$\sum_{i=1}^{k+1} V_i = \frac{V_{k+2} + V_{k+1} - \left(2\sqrt{m} + 2\right)}{2\sqrt{m}}$$

olur.

İspat: U_k tanımından,

$$U_{k+2} - U_{k+1} = 2\sqrt{m}U_{k+1} + U_k - U_{k+1} = \left(2\sqrt{m} - 1\right)U_{k+1} + U_k$$

ve böylece

$$k = 0 \Rightarrow U_2 - U_1 = \left(2\sqrt{m} - 1\right)U_1 + U_0$$

$$k = 1 \Rightarrow U_3 - U_2 = \left(2\sqrt{m} - 1\right)U_2 + U_1$$

$$\vdots$$

$$k = k - 1 \Rightarrow U_{k+1} - U_k = \left(2\sqrt{m} - 1\right)U_k + U_{k-1}$$

$$k = k \Rightarrow U_{k+2} - U_{k+1} = \left(2\sqrt{m} - 1\right)U_{k+1} + U_k$$

olur. Eşitlikleri taraf tarafa toplarsak,

$$\begin{aligned} U_{k+2} - U_1 &= \left(2\sqrt{m} - 1\right)(U_1 + U_2 + \cdots + U_{k+1}) + (U_0 + U_1 + \cdots + U_k) \\ &= 2\sqrt{m}(U_1 + U_2 + \cdots + U_{k+1}) + U_0 - U_{k+1} \end{aligned}$$

elde edilir. $U_0 = 0$ ve $U_1 = 1$ olduğundan,

$$U_{k+2} - 1 = 2\sqrt{m}(U_1 + U_2 + \cdots + U_{k+1}) - U_{k+1}$$

$$U_{k+2} + U_{k+1} - 1 = 2\sqrt{m}(U_1 + U_2 + \cdots + U_{k+1})$$

$$\frac{U_{k+2} + U_{k+1} - 1}{2\sqrt{m}} = U_1 + U_2 + \cdots + U_{k+1}$$

olur ve böylece

$$\sum_{i=1}^{k+1} U_i = \frac{U_{k+2} + U_{k+1} - 1}{2\sqrt{m}}$$

elde edilir.

Benzer şekilde,

$$\sum_{i=1}^{k+1} V_i = \frac{V_{k+2} + V_{k+1} - \left(2\sqrt{m} + 2\right)}{2\sqrt{m}}$$

olduğu kolayca görülür. ■

3.2.17 Önerme: $\{U_k\}$ genelleştirilmiş Pell dizisi olsun. Bu durumda,

$$U_{k-1}U_{k+1} - U_k^2 = (-1)^k$$

olur.

İspat: k üzerinden tümevarım ile ispatlayalım.

$k = 0$ için $U_{-1}U_1 - U_0^2 = (-1)^0$ ve $k = 1$ için $U_0U_2 - U_1^2 = -1 = (-1)^1$. $k = 2, \dots, n$ için eşitliğin doğru olduğunu varsayalım ve $k = n + 1$ için eşitliğin doğruluğunu gösterelim. Varsayım gereği,

$$U_{n-1}U_{n+1} - U_n^2 = (-1)^n$$

olur.

$$\begin{aligned} U_nU_{n+2} - U_{n+1}^2 &= U_n\left(2\sqrt{m}U_{n+1} + U_n\right) - U_{n+1}\left(2\sqrt{m}U_n + U_{n-1}\right) \\ &= -(U_{n+1}U_{n-1} - U_n^2) = (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

elde edilir. ■

3.2.18 Önerme: $\{U_k\}$ genelleştirilmiş Pell dizisi ve $\{V_k\}$ genelleştirilmiş Pell-Lucas dizisi olsun. Bu durumda,

$$V_k^2 - (4m + 4)U_k^2 = 4(-1)^k$$

olur.

İspat: U_k, 3.2.9 Önerme, 3.2.17 Önermeden,

$$\begin{aligned} V_k^2 - (4m + 4)U_k^2 &= (U_{k-1} + U_{k+1})^2 - (4m + 4)U_k^2 \\ &= U_{k-1}^2 + 2U_{k-1}U_{k+1} + U_{k+1}^2 - 4mU_k^2 - 4U_k^2 \\ &= U_{k-1}^2 + 2U_{k-1}\left(2\sqrt{m}U_k + U_{k-1}\right) + \left(2\sqrt{m}U_k + U_{k-1}\right)^2 - 4mU_k^2 \\ &\quad - 4U_k^2 \\ &= U_{k-1}^2 + 4\sqrt{m}U_{k-1}U_k + 2U_{k-1}^2 + 4mU_k^2 + U_{k-1}^2 + 4\sqrt{m}U_kU_{k-1} \\ &\quad - 4mU_k^2 - 4U_k^2 = 4U_{k-1}^2 + 8\sqrt{m}U_{k-1}U_k - 4U_k^2 \\ &= 4U_{k-1}\left(U_{k-1} + 2\sqrt{m}U_k\right) - 4U_k^2 \end{aligned}$$

$$= 4U_{k-1}U_{k+1} - 4U_k^2 = 4(U_{k-1}U_{k+1} - U_k^2) = 4(-1)^k$$

elde edilir. ■

3.2.19 Önerme: $\{U_k\}$ genelleştirilmiş Pell dizisi ve $\{V_k\}$ genelleştirilmiş Pell-Lucas dizisi olsun. Bu durumda,

$$\boldsymbol{i)} \sum_{n=1}^{k-1} U_n^2 = \frac{1}{2\sqrt{m}} U_k U_{k-1}$$

$$\boldsymbol{ii)} \sum_{n=1}^{k-1} V_n^2 = \left(\frac{1}{2\sqrt{m}} V_k V_{k-1}\right) - 2$$

olur. ■

İspat: $\boldsymbol{i)}$ k üzerinden tümevarım ile ispatlayalım. $k = 2$ için, $U_1^2 = \frac{1}{2\sqrt{m}} U_2 U_1 = \frac{1}{2\sqrt{m}} 2\sqrt{m} = 1$. Şimdi $k = n - 1$ için eşitliğin doğru olduğunu varsayalım. Bu durumda,

$$\sum_{n=1}^{k-2} U_n^2 = \frac{1}{2\sqrt{m}} U_{k-1} U_{k-2}$$

olsun ve

$$\sum_{n=1}^{k-1} U_n^2 = \frac{1}{2\sqrt{m}} U_k U_{k-1}$$

olduğunu gösterelim.

$$\sum_{n=1}^{k-1} U_n^2 = \sum_{n=1}^{k-2} U_n^2 + U_{k-1}^2 = \left(\frac{1}{2\sqrt{m}} U_{k-1} U_{k-2}\right) + U_{k-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{m}}(U_k - U_{k-2})\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{m}} U_{k-1}U_{k-2} + \frac{1}{2\sqrt{m}} U_k U_{k-1} - \frac{1}{2\sqrt{m}} U_{k-1} U_{k-2} = \frac{1}{2\sqrt{m}} U_k U_{k-1}$$

$\boldsymbol{ii)}$ Benzer şekilde, $k = 2$ için,

$$V_1^2 = \left(\frac{1}{2\sqrt{m}} V_2 V_1\right) - 2 = \left(\frac{1}{2\sqrt{m}}(4m + 2)2\sqrt{m}\right) - 2 = 4m$$

Şimdi $k = n - 1$ için eşitliğin doğru olduğunu varsayalım. Bu durumda,

$$\sum_{n=1}^{k-2} V_n^2 = \left(\frac{1}{2\sqrt{m}} V_{k-1} V_{k-2}\right) - 2$$

olsun ve

$$\sum_{n=1}^{k-1} V_n^2 = \left(\frac{1}{2\sqrt{m}} V_k V_{k-1}\right) - 2$$

olduğunu gösterelim.

$$\sum_{n=1}^{k-1} V_n^2 = \sum_{n=1}^{k-2} V_n^2 + V_{k-1}^2 = \left(\frac{1}{2\sqrt{m}} V_{k-1} V_{k-2}\right) - 2 + V_{k-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{m}}(V_k - V_{k-2})\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{m}} V_{k-1} V_{k-2} - 2 + \frac{1}{2\sqrt{m}} V_k V_{k-1} - \frac{1}{2\sqrt{m}} V_{k-1} V_{k-2}$$

$$= \left(\frac{1}{2\sqrt{m}} V_k V_{k-1}\right) - 2$$

elde edilir. ■

Genelleştirilmiş Pell ve Genelleştirilmiş Pell-Lucas Dizilerinin Polinom Gösterimleri

Bu bölümde U_k (k. genelleştirilmiş Pell sayısı) ve V_k (k. genelleştirilmiş Pell-Lucas sayısı) dizilerinin polinom şeklinde yazılabileceği gösterilmiştir. $m = 1$ için Pell ve Pell-Lucas sayılarının polinom gösterimi olur. Daha sonra bu diziler için elde edilen bazı üst sınır özellikleri de verilmiştir.

İlk olarak U_k (k. genelleştirilmiş Pell sayısı) ve V_k (k. genelleştirilmiş Pell-Lucas sayısı) dizilerinin ilk 6 terimini verelim.

U_k	V_k
$U_0 = 0$	$V_0 = 2$
$U_1 = 1$	$V_1 = 2\sqrt{m}$
$U_2 = 2\sqrt{m}$	$V_2 = 4m + 2$
$U_3 = 4m + 1$	$V_3 = 2\sqrt{m}(4m + 3)$
$U_4 = 4\sqrt{m}(2m + 1)$	$V_4 = 16m^2 + 16m + 2$
$U_5 = 16m^2 + 12m + 1$	$V_5 = 2\sqrt{m}(16m^2 + 20m + 5)$

U_k ve V_k dizilerinin polinom gösterimini bulmadan önce kullanacağımız bir özellik verelim, [36].

$$\binom{k}{n} + 2\binom{k+1}{n-1} - \binom{k}{n-2} = \binom{k+2}{n}$$

ve

$$\binom{k}{n} + \binom{k-1}{n-1} = \binom{k-1}{n-1}\frac{n+k}{n}$$

3.2.20 Teorem: $\{U_k\}$ genelleştirilmiş Pell dizisi olsun. Bu durumda, U_{2k} ve U_{2k+1} dizilerinin polinom gösterimi,

$$U_{2k} = \left(2\sqrt{m}\right)^{2k-1} + \binom{2k-2}{1}\left(2\sqrt{m}\right)^{2k-3} + \binom{2k-3}{2}\left(2\sqrt{m}\right)^{2k-5} + \cdots$$
$$+ \binom{k+2}{k-3}\left(2\sqrt{m}\right)^{3} + \binom{k+1}{k-2}\left(2\sqrt{m}\right)$$

ve

$$U_{2k+1} = \left(2\sqrt{m}\right)^{2k} + (2k-1)\left(2\sqrt{m}\right)^{2k-2} + \binom{2k-2}{1}\frac{2k-3}{2}\left(2\sqrt{m}\right)^{2k-4}$$
$$+ \binom{2k-3}{2}\frac{2k-5}{3}\left(2\sqrt{m}\right)^{2k-6} + \cdots + \binom{k+1}{k-2}\frac{3}{k-1}\left(2\sqrt{m}\right)^{2}$$

şeklinde tanımlanır.

İspat: İspatı tümevarım ile yapalım ve ilk olarak U_{2k} dizisinin polinom gösterimini ispatlayalım.

$k = 1$ için $U_2 = 2\sqrt{m}$ ve $k = 2$ için $U_4 = \left(2\sqrt{m}\right)^3 + 2.2\sqrt{m} = 2\sqrt{m}(4m+2)$ olduğundan $k = 1$ ve $k = 2$ için eşitlik sağlanır. Şimdi $k = 1, 2, \ldots, n$ için eşitliğin sağlandığını varsayalım ve $k = n+1$ için eşitliğin sağlandığını gösterelim. Varsayımdan,

$$U_{2n-2} = \left(2\sqrt{m}\right)^{2n-3} + \binom{2n-4}{1}\left(2\sqrt{m}\right)^{2n-5} + \binom{2n-5}{2}\left(2\sqrt{m}\right)^{2n-7} + \cdots$$
$$+ \binom{n+1}{n-4}\left(2\sqrt{m}\right)^{3} + \binom{n}{n-3}\left(2\sqrt{m}\right)$$

ve

$$U_{2n} = \left(2\sqrt{m}\right)^{2n-1} + \binom{2n-2}{1}\left(2\sqrt{m}\right)^{2n-3} + \binom{2n-3}{2}\left(2\sqrt{m}\right)^{2n-5} + \cdots$$
$$+ \binom{n+2}{n-3}\left(2\sqrt{m}\right)^{3} + \binom{n+1}{n-2}\left(2\sqrt{m}\right)$$

olur. 3.2.8 Önermeden,

$$U_{2n+2} = (4m+2)U_{2n} - U_{2n-2}$$

olduğundan,

$$
\begin{aligned}
U_{2n+2} = (4m+2)\Big[&\left(2\sqrt{m}\right)^{2n-1} + \binom{2n-2}{1}\left(2\sqrt{m}\right)^{2n-3} + \binom{2n-3}{2}\left(2\sqrt{m}\right)^{2n-5} \\
&+ \cdots + \binom{n+2}{n-3}\left(2\sqrt{m}\right)^{3} + \binom{n+1}{n-2} 2\sqrt{m}\Big] \\
&- \Big[\left(2\sqrt{m}\right)^{2n-3} + \binom{2n-4}{1}\left(2\sqrt{m}\right)^{2n-5} + \binom{2n-5}{2}\left(2\sqrt{m}\right)^{2n-7} \\
&+ \cdots + \binom{n+1}{n-4}\left(2\sqrt{m}\right)^{3} + \binom{n}{n-3} 2\sqrt{m}\Big] \\
&= \left(2\sqrt{m}\right)^{2n+1} + \left[\binom{2n-2}{1} + 2\right]\left(2\sqrt{m}\right)^{2n-1} \\
&+ \left[\binom{2n-3}{2} + 2\binom{2n-2}{1}\right]\left(2\sqrt{m}\right)^{2n-3} + \cdots \\
&+ \left[\binom{n+1}{n-2} + 2\binom{n+2}{n-3}\right]\left(2\sqrt{m}\right)^{3} + 2\binom{n+1}{n-2} 2\sqrt{m}
\end{aligned}
$$

olur. Burada yukarıda verilen özellik kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
U_{2n+2} = &\left(2\sqrt{m}\right)^{2n+1} + \binom{2n}{1}\left(2\sqrt{m}\right)^{2n-1} + \binom{2n-1}{2}\left(2\sqrt{m}\right)^{2n-3} + \cdots \\
&+ \binom{n+3}{n-2}\left(2\sqrt{m}\right)^{3} + \binom{n+2}{n-1}\left(2\sqrt{m}\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece $k = n+1$ için eşitlik sağlanmış olduğundan U_{2k} dizisi için ispat biter.

Şimdi U_{2k+1} dizisinin polinom gösterimini ispatlayalım.

U_k tanımından,

$$
U_{2k+1} = \frac{1}{2\sqrt{m}}\left(U_{2k+2} - U_{2k}\right)
$$

olur. Böylece

$$
\begin{aligned}
U_{2k+1} = \frac{1}{2\sqrt{m}}\Bigg[&\Bigg(\left(2\sqrt{m}\right)^{2k+1} + \binom{2k}{1}\left(2\sqrt{m}\right)^{2k-1} + \binom{2k-1}{2}\left(2\sqrt{m}\right)^{2k-3} + \cdots \\
&+ \binom{k+3}{k-2}\left(2\sqrt{m}\right)^{3} + \binom{k+2}{k-1}\left(2\sqrt{m}\right)\Bigg) \\
&- \Bigg(\left(2\sqrt{m}\right)^{2k-1} + \binom{2k-2}{1}\left(2\sqrt{m}\right)^{2k-3} + \binom{2k-3}{2}\left(2\sqrt{m}\right)^{2k-5} \\
&+ \cdots + \binom{k+2}{k-3}\left(2\sqrt{m}\right)^{3} + \binom{k+1}{k-2}\left(2\sqrt{m}\right)\Bigg)\Bigg]
\end{aligned}
$$

olur. Burada yukarıdaki özellik kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
U_{2k+1} = &\left(2\sqrt{m}\right)^{2k} + (2k-1)\left(2\sqrt{m}\right)^{2k-2} + \binom{2k-2}{1}\frac{2k-3}{2}\left(2\sqrt{m}\right)^{2k-4} \\
&+ \binom{2k-3}{2}\frac{2k-5}{3}\left(2\sqrt{m}\right)^{2k-6} + \cdots + \binom{k+1}{k-2}\frac{3}{k-1}\left(2\sqrt{m}\right)^{2}
\end{aligned}
$$

elde edilir ve böylece ispat biter. ■

3.2.21 Teorem: $\{V_k\}$ genelleştirilmiş Pell-Lucas dizisi olsun. Bu durumda, V_{2k} ve V_{2k+1} dizilerinin polinom gösterimi,

$$V_{2k} = \left(2\sqrt{m}\right)^{2k} + (2k)\left(2\sqrt{m}\right)^{2k-2} + \binom{2k-3}{1}\frac{2k}{2}\left(2\sqrt{m}\right)^{2k-4}$$
$$+ \binom{2k-4}{2}\frac{2k}{3}\left(2\sqrt{m}\right)^{2k-6} + \cdots + \binom{k}{k-2}\frac{2k}{k-1}\left(2\sqrt{m}\right)^{2}$$

ve

$$V_{2k+1} = \left(2\sqrt{m}\right)^{2k+1} + (2k+1)\left(2\sqrt{m}\right)^{2k-1} + \binom{2k-2}{1}\frac{2k+1}{2}\left(2\sqrt{m}\right)^{2k-3}$$
$$+ \binom{2k-3}{2}\frac{2k+1}{3}\left(2\sqrt{m}\right)^{2k-5} + \cdots + \binom{k+1}{k-2}\frac{2k+1}{k-1}\left(2\sqrt{m}\right)$$

şeklinde tanımlanır.

İspat: 3.2.9 Önermeden,

$$V_{2k} = U_{2k-1} + U_{2k+1}$$

olduğundan,

$$V_{2k} = \left[\left(2\sqrt{m}\right)^{2k-2} + (2k-3)\left(2\sqrt{m}\right)^{2k-4} + \binom{2k-4}{1}\frac{2k-5}{2}\left(2\sqrt{m}\right)^{2k-6} + \cdots\right.$$
$$\left. + \binom{k}{k-3}\frac{3}{k-2}\left(2\sqrt{m}\right)^{2}\right]$$
$$+ \left[\left(2\sqrt{m}\right)^{2k} + (2k-1)\left(2\sqrt{m}\right)^{2k-2} + \binom{2k-2}{1}\frac{2k-3}{2}\left(2\sqrt{m}\right)^{2k-4}\right.$$
$$\left. + \cdots + \binom{k+1}{k-2}\frac{3}{k-1}\left(2\sqrt{m}\right)^{2}\right]$$
$$= \left(2\sqrt{m}\right)^{2k} + [1 + (2k-1)]\left(2\sqrt{m}\right)^{2k-2}$$
$$+ \left[(2k-3) + \binom{2k-2}{1}\frac{2k-3}{2}\right]\left(2\sqrt{m}\right)^{2k-4} + \cdots$$
$$+ \left[\binom{k}{k-3}\frac{3}{k-2}\right]\left(2\sqrt{m}\right)^{2}$$

olur. Böylece yukarıdaki özellikten,

$$V_{2k} = \left(2\sqrt{m}\right)^{2k} + (2k)\left(2\sqrt{m}\right)^{2k-2} + \binom{2k-3}{1}\frac{2k}{2}\left(2\sqrt{m}\right)^{2k-4}$$
$$+ \binom{2k-4}{2}\frac{2k}{3}\left(2\sqrt{m}\right)^{2k-6} + \cdots + \binom{k}{k-2}\frac{2k}{k-1}\left(2\sqrt{m}\right)^{2}$$

elde edilir.

Benzer şekilde

$$V_{2k+1} = U_{2k} + U_{2k+2}$$

olduğundan

$$V_{2k+1} = \left(2\sqrt{m}\right)^{2k+1} + (2k+1)\left(2\sqrt{m}\right)^{2k-1} + \binom{2k-2}{1}\frac{2k+1}{2}\left(2\sqrt{m}\right)^{2k-3} + \binom{2k-3}{2}\frac{2k+1}{3}\left(2\sqrt{m}\right)^{2k-5} + \cdots + \binom{k+1}{k-2}\frac{2k+1}{k-1}\left(2\sqrt{m}\right)$$

olduğu kolayca gösterilebilir. ■

Bu bölümde son olarak U_k (k. genelleştirilmiş Pell sayısı) ve V_k (k. genelleştirilmiş Pell-Lucas sayısı) için bazı üst sınır özelliklerini verelim.

3.2.22 Önerme: $\{U_k\}$ genelleştirilmiş Pell dizisi olsun. Bu durumda her k tamsayısı için,

$$U_k = \left\lfloor \frac{\alpha^k}{2\sqrt{m+1}} + \sqrt{m} \right\rfloor$$

olur.

İspat: Her k için

$$U_k = \frac{\alpha^k - \beta^k}{\alpha - \beta}$$

olduğundan,

$$\left| U_k - \frac{\alpha^k}{2\sqrt{m+1}} \right| = \left| \frac{\beta^k}{2\sqrt{m+1}} \right| < \sqrt{m}$$

elde edilir. ■

Burada U_k dizisinin karakteristik denkleminin kökleri $\alpha = \sqrt{m} + \sqrt{m+1}$ ve $\beta = \sqrt{m} - \sqrt{m+1}$ dir.

3.2.23 Önerme: $\{U_k\}$ genelleştirilmiş Pell dizisi olsun. Bu durumda her $k \geq 2$ için,

$$U_{k+1} = \left\lfloor \alpha U_k + \sqrt{m} \right\rfloor$$

olur.

İspat: Her $k \geq 2$ için,

$$|U_{k+1} - \alpha U_k| = \left|\frac{\alpha^{k+1} - \beta^{k+1}}{2\sqrt{m+1}} - \frac{\alpha^{k+1} - \alpha\beta^k}{2\sqrt{m+1}}\right| = \left|\frac{\beta^k(\alpha - \beta)}{2\sqrt{m+1}}\right| = |\beta^k| < \sqrt{m}$$

elde edilir. ■

3.2.24 Önerme: $\{V_k\}$ genelleştirilmiş Pell-Lucas dizisi olsun. Bu durumda her $k \geq 2$ tamsayısı için,

$$V_k = \lfloor \alpha^k + \sqrt{m} \rfloor$$

İspat: Binet formülünden, Her k için $V_k = \alpha^k + \beta^k$ olduğundan,

$$|V_k - \alpha^k| = |\alpha^k + \beta^k - \alpha^k| = |\beta^k| < \sqrt{m}$$

elde edilir. ■

3.2.25 Önerme: $\{V_k\}$ genelleştirilmiş Pell-Lucas dizisi olsun. Bu durumda her $k \geq 2$ tamsayısı için,

$$V_{k+1} = \left\lfloor \alpha V_k + 2\sqrt{m(m+1)} \right\rfloor$$

İspat: Her $k \geq 2$ için,

$$|V_{k+1} - \alpha V_k| = |\alpha^{k+1} + \beta^{k+1} - \alpha(\alpha^k + \beta^k)| = |\beta^k(\beta - \alpha)| = \left|\beta^k(-2\sqrt{m+1}\right|$$

$$= \left|2\sqrt{m+1}\right|.|\beta^k| < 2\sqrt{m(m+1)}$$

elde edilir. ■

3.3 $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ Cisminde A^k ve B^k nın Sabit Noktaları

Bu bölümde, bir önceki bölümde tanımlanmış olan A^k ve B^k matrislerinin $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ cismindeki sabit noktaları incelenmiştir.

İlk olarak cisim genişlemesi ve sabit nokta tanımını verelim.

3.3.1 Tanım: F bir cisim olsun ve f , $F[x]$ de n . dereceden monik indirgenemez bir polinom olsun. u, f polinomunun bir kökü olmak üzere F ye u

nun eklenmesiyle elde edilen $K = F[u]$ cismine F nin basit bir genişlemesi denir. Burada u ya F üzerinde cebirseldir denir, [37].

Örneğin 7, $\sqrt{2}$ ve i sayıları $\mathbb{Q}$ üzerinde cebirseldir. Çünkü bu sayılar $x - 7$, $x^2 - 2$ ve $x^2 + 1$ polinomunun kökleridir. Burada K nın her v elemanının

$$v = a_0 + a_1 u + \cdots + a_{n-1} u^{n-1}, a_i \in F, i = 0, 1, \ldots, n-1$$

şeklinde bir gösterime sahip olduğu bilinen bir sonuçtur.

Bir cismin basit bir genişlemesinin varlığı ile ilgili olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

3.3.2 Teorem: F bir cisim ve f, $F[x]$ de n. dereceden indirgenemez bir polinom olsun. Bu durumda u nun f polinomunun kökü olarak F üzerinde cebirsel olduğu F nin basit bir $K = F[u]$ genişlemesi vardır, [37].

3.3.3 Tanım: Herhangi bir $T(z) \in PSL(2, \mathbb{R})$ dönüşümü için $T(z) = z$ eşitliğini gerçekleyen z noktalarına T nin sabit noktaları denir.

3.3.4 Teorem: $PSL(2, \mathbb{R})$ deki herhangi bir dönüşümün en fazla iki sabit noktası vardır. G' kümesinin elemanlarının ise ya iki sabit noktası vardır ya da sabit noktalarının kümesi bir çemberdir, [38].

Şimdi bir önceki bölümde tanımlanmış olan A^k ve B^k matrislerinin $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ cismindeki sabit noktaları aşağıdaki gibidir:

3.3.5 Sonuç: Eğer $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ ve B^k matrisi α noktasında sabit ise,

$$\frac{U_{2k+1}\alpha + U_{2k}}{U_{2k}\alpha + U_{2k-1}} = \alpha$$

olur. Böylece her $k \geq 1$ tamsayısı için $U_{2k}\left(\alpha^2 - 2\sqrt{m}\alpha - 1\right) = 0$ ve burada $\alpha = \sqrt{m} \pm \sqrt{m+1}$ dır. Şimdi üç durum söz konusudur.

i) Eğer $m = 1$ ise [35] kaynağına bakınız.

ii) Eğer $m = 2$ ise $\alpha = \sqrt{2} \pm \sqrt{3}$ ve böylece $d = 2$ veya 3 tür.

iii) Eğer $m = 3$ ise $\alpha = \sqrt{3} \pm 2$ ve böylece $d = 3$ tür.

3.3.6 Sonuç: Eğer $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ ve A^k matrisi α noktasında sabit ise,

$$\frac{U_{2k-1}\alpha + U_{2k}}{U_{2k}\alpha + U_{2k+1}} = \alpha$$

olur. Böylece her $k \geq 1$ tamsayısı için $U_{2k}\left(\alpha^2 + 2\sqrt{m}\alpha - 1\right) = 0$ ve burada $\alpha = -\sqrt{m} \pm \sqrt{m+1}$ dır. Şimdi üç durum söz konusudur.

$\boldsymbol{i}$) Eğer $m = 1$ ise [35] kaynağına bakınız.

$\boldsymbol{ii}$) Eğer $m = 2$ ise $\alpha = -\sqrt{2} \pm \sqrt{3}$ ve böylece $d = 2$ veya 3 tür.

$\boldsymbol{iii}$) Eğer $m = 3$ ise $\alpha = -\sqrt{3} \pm 2$ ve böylece $d = 3$ tür.

Bütün m durumları için, eğer

$$\alpha = \tau = \sqrt{m} + \sqrt{m+1}$$

ise

$$\tau^{-1} = -\sqrt{m} + \sqrt{m+1}$$

ve eğer

$$\bar{\tau} = \sqrt{m} - \sqrt{m+1}$$

ise

$$\bar{\tau}^{-1} = -\sqrt{m} - \sqrt{m+1}$$

olur. Böylece $k \geq 1$ için $((TS^{-1})^2(TS)^2)^k$ veya $((TS)^2(TS^{-1})^2)^k$ çarpımları $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ cisminde sabit eleman ise, sırasıyla $m = 1, 2, 3$ için $d = 2, 2$ veya $3, 3$ değerlerini alır.

3.3.7 Sonuç: Eğer α reel kuadratik irrasyonel sayı ve $k \geq 1$ için $((TS^{-1})^2(TS)^2)^k \in H(\sqrt{m})$ ise,

$$A^k = \begin{bmatrix} U_{2k-1} & U_{2k} \\ U_{2k} & U_{2k+1} \end{bmatrix}$$

olur. Burada U_k, genelleştirilmiş k. Pell sayısı ve

$$tr(A^k) = 2\sqrt{m}U_{2k} + 2U_{2k-1}$$

dir.

3.4 Genelleştirilmiş Pell Sayısının Genişletilmiş Modüler Grupta Bir Uygulaması

Bu bölümde bir önceki bölümde tanımladığımız genelleştirilmiş Pell ve genelleştirilmiş Pell-Lucas sayılarının $\overline{H}(\lambda_3)$ genişletilmiş modüler grupta bir uygulaması verilmiştir.

[39, 40, 41] kaynaklarından, modüler grup ve genişletilmiş modüler grupta bloklar,

$$TS = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$TS^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

biçiminde olduğu verilmiştir. Ayrıca 3.2 bölümden, Γ_2 temel denklik altgrubunun

$$a_1 = (TS)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$a_2 = (TS^{-1})^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisleri ile üretildiğini biliyoruz.

Şimdi $W(T, S, R)$, $\overline{H}(\lambda_3)$ genişletilmiş modüler grupta bir indirgenmiş kelime (reduced word) olsun.

3.4.1 Sonuç: Eğer R çift sayıda ise, bu durumda tüm kelimeler (words)

$$(TSTS)^{m_0}(TS^2TS^2)^{n_0} \ldots (TSTS)^{m_k}(TS^2TS^2)^{n_k}T^i$$

$$(TSTS)^{m_0}(TS^2TS^2)^{n_0} \ldots (TSTS)^{m_k}(TS^2TS^2)^{n_k}S^j$$

$$(TSTS)^{m_0}(TS^2TS^2)^{n_0} \ldots (TSTS)^{m_k}(TS^2TS^2)^{n_k}T^iS^j$$

veya

$$(TSTS)^{m_0}(TS^2TS^2)^{n_0} \ldots (TSTS)^{m_k}(TS^2TS^2)^{n_k}S^jT^i$$

durumlarından birisi biçimindedir.

3.4.2 Sonuç: Eğer R tek sayıda ise, bu durumda kelimeler (words)

$$(TSTS)^{m_0}(TS^2TS^2)^{n_0} \ldots (TSTS)^{m_k}(TS^2TS^2)^{n_k}T^iR$$

$$(TSTS)^{m_0}(TS^2TS^2)^{n_0} \ldots (TSTS)^{m_k}(TS^2TS^2)^{n_k}S^jR$$
$$(TSTS)^{m_0}(TS^2TS^2)^{n_0} \ldots (TSTS)^{m_k}(TS^2TS^2)^{n_k}T^iS^jR$$

veya

$$(TSTS)^{m_0}(TS^2TS^2)^{n_0} \ldots (TSTS)^{m_k}(TS^2TS^2)^{n_k}S^jT^iR$$

durumlarından birisi biçimindedir. Burada $i = 0{,}1$ ve $j = 0{,}1{,}2$ dir. Blok üsleri m_k ve n_k pozitif tamsayılardır. Fakat m_0 ve n_k sıfır olabilir.

Bu gösterim genel bir durumdur ve [40] nolu kaynaktaki gibi kısaltma olarak BRF, yani indirgenmiş bir blok biçimi (a block reduced form) olarak adlandırılır.

Şimdi aşağıda vereceğimiz kelimeleri (words) bloklarla BRF de indirgenmiş kelime (reduced word) olarak yazalım.

i) BRF de bir kelime (word) $TSTS^2TSTSR$ olsun. Bu durumda,

$$TSTS^2TSTSR = (TSTS)(STST)SR$$

biçiminde yazılabilir. Bu kelimenin matris gösterimi,

$$(TSTS)(STST)SR = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

biçiminde olur.

ii) BRF de bir kelime (word) $STS^2TSRTRS$ olsun. Bu durumda,

$$STS^2TSRTRS = STSSTSRTRS$$

$TR = RT$ olduğundan,

$$STSSTSRTRS = STSSTSTS$$

$T^2 = I$ olduğundan,

$$STSSTSTS = STS(TT)STSTS = (STST)(TSTS)TS$$

biçiminde yazılabilir. Bu kelimenin matris gösterimi,

$$(STST)(TSTS)TS = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$

biçiminde olur.

iii) BRF de bir kelime (word) $RTSRTS^2RTSTS^2R$ olsun. Bu durumda, $TR = RT$, $RS = S^2R$ ve $R^2 = I$ olduğundan,

$$RTSRTS^2RTSTS^2R = TRRS^2TS^2TRSTRS = TS^2TS^2TRSTRS$$
$$= TS^2TS^2TS^2RRTS = TS^2TS^2TS^2TS$$

$T^2 = I$ ve $S^3 = I$ olduğundan,

$$TS^2TS^2TS^2TS = TS^2TS^2TS^2(TT)TS = TS^2TS^2TS^2(TS^2ST)TS$$
$$= (TS^2TS^2)(TS^2TS^2)S^2$$

biçiminde yazılabilir. Bu kelimenin matris gösterimi,

$$(TS^2TS^2)(TS^2TS^2)S^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

biçiminde olur.

iv) BRF de bir kelime (word) $TSRTS^2RSTSRS^2T$ olsun. Bu durumda, $T^2 = I, S^3 = I, TR = RT, RS = S^2R$ ve $R^2 = I$ olduğundan,

$$TSRTS^2RSTSRS^2T = TSTRRSSTSSRT = TSTSSTS(TT)SRT$$
$$= TSTSSTSTTS(TT)RT = TSTSSTSTTST(SS^2)TRT$$
$$= (TSTS)(STST)(TSTS)S^2TTR = (TSTS)(STST)(TSTS)S^2R$$

biçiminde yazılabilir. Bu kelimenin matris gösterimi,

$$(TSTS)(STST)(TSTS)S^2R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

biçiminde olur.

v) BRF de bir kelime (word) $TSTSTSTS^2TS^2TS$ olsun. Bu durumda, $T^2 = I$ olduğundan,

$$TSTSTSTS^2TS^2TS = TSTSTSTSSTSSTS = TSTSTSTSSTS(TT)STS$$
$$= (TSTS)(TSTS)(STST)(TSTS)$$

biçiminde yazılabilir. Bu kelimenin matris gösterimi,

$$(TSTS)(TSTS)(STST)(TSTS) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

biçiminde olur.

vi) BRF de bir kelime (word) RTS^2RTS^2R olsun. Bu durumda, $TR = RT$ ve $RS = S^2R$ olduğundan,

$$RTS^2RTS^2R = TRRSTS^2R = TSTS^2R = TSTSSR = (TSTS)SR$$

biçiminde yazılabilir. Bu kelimenin matris gösterimi,

$$(TSTS)SR = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

biçiminde olur.

4. GENİŞLETİLMİŞ HECKE GRUBUNUN DENKLİK ALTGRUBUNUN KUVVET ALTGRUPLARI

Bu bölümde, bir önceki bölümde verilen $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grubunun 2 seviyeli temel denklik altgruplarının 2. kuvvet altgrupları (kareleri) incelenmiştir. Bu bölümde verilen bazı temel bilgiler [10, 18, 42, 43] nolu kaynaklarda bulunabilir. Ayrıca bu bölümde verilen 4.1.2 Teorem, 4.1.3 Teorem, 4.1.4 Teorem, 4.1.5 Teorem tamamen özgündür.

4.1 Genişletilmiş Hecke Grubunun Denklik Altgrubunun Kareleri

4.1.1 Tanım: $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grubunun tüm elemanlarının m. kuvveti alınarak üretilen altgruba $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grubunun m. kuvvet altgrubu denir ve bu altgrup $\overline{H}^m(\lambda_q)$ ile gösterilir, [18].

Şimdi $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grubunun kuvvet altgruplarını inceleyelim. Bunu yapabilmek için $\overline{H}(\lambda_q)/\overline{H}^m(\lambda_q)$ bölüm grubunun gösterimini verelim. Burada $\overline{H}(\lambda_q)/\overline{H}^m(\lambda_q)$ grubunun mertebesi, indeksi verir.

$$\begin{aligned}&\overline{H}(\lambda_q)/\overline{H}^m(\lambda_q)\\ &\qquad\cong \langle T,S,R \mid T^2 = S^q = R^2 = (TR)^2 = (SR)^2 = T^m = S^m = R^m\\ &\qquad= (TR)^m = (SR)^m = \cdots = I\rangle\end{aligned}$$

biçiminde bir gösterime sahip olur, [18]. $\overline{H}^m(\lambda_q)$ kuvvet altgrubunun gösterimini bulabilmek için Reidemeister-Schreier metodu kullanılmıştır.

Bir önceki bölümden ve [41] nolu kaynaktan, $q \geq 3$ tamsayısı için

$$\overline{H}_2(\lambda_q) = \langle TR\rangle * \langle RSTS\rangle * \ldots * \langle RS^{q-1}TS^{q-1}\rangle$$

olduğunu biliyoruz. Buna göre $q \geq 3$ tamsayısı için kuvvet altgrupları incelenebilir. Bu bölümde 2. kuvveti yani kareleri incelenmiştir. [43] nolu kaynakta $q = 3$ durumu incelenmiştir ve $(\overline{H}_2)^2(\lambda_3) = \overline{H}_4(\lambda_3)$ olduğu gösterilmiştir.

Şimdi $q > 3$ tamsayısı için 2. kuvvetini inceleyelim.

4.1.2 Teorem: $\boldsymbol{i}$) $|\overline{H}_2(\lambda_4) : (\overline{H}_2)^2(\lambda_4)| = 16$

$\boldsymbol{ii}$) $(\overline{H}_2)^2(\lambda_4) \subsetneq \overline{H}_4(\lambda_4)$.

İspat: $\boldsymbol{i}$) Kolaylık olması için $a = TR, b = RSTS, c = RS^2TS^2, d = RS^3TS^3$ diyelim. Bölüm grubu,

$$\overline{H}_2(\lambda_4) \,/\, (\overline{H}_2)^2(\lambda_4) \cong \langle a, b, c, d | a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = I \rangle \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$$

biçiminde tanımlıdır ve $|\overline{H}_2(\lambda_4) : (\overline{H}_2)^2(\lambda_4)| = 16$ dır.

$\boldsymbol{ii}$) Eğer $(\overline{H}_2)^2(\lambda_4)$ için Schreier transversali

$$\{I, a, b, c, d, ab, ac, ad, bc, bd, cd, abc, abd, bcd, acd, abcd\}$$

seçersek, bu durumda olası bütün çarpımlar,

$I.a.(a)^{-1} = I,$	$I.b.(b)^{-1} = I$
$a.a.(I)^{-1} = I,$	$a.b.(ab)^{-1} = I,$
$b.a.(ab)^{-1} = baba,$	$b.b.(I)^{-1} = I,$
$c.a.(ac)^{-1} = caca,$	$c.b.(bc)^{-1} = cbcb,$
$d.a.(ad)^{-1} = dada,$	$d.b.(bd)^{-1} = dbdb,$
$ab.a.(b)^{-1} = abab,$	$ab.b.(a)^{-1} = I,$
$ac.a.(c)^{-1} = acac,$	$ac.b.(abc)^{-1} = acbcba,$
$ad.a.(d)^{-1} = adad,$	$ad.b.(abd)^{-1} = adbdba,$
$bc.a.(abc)^{-1} = bcacba,$	$bc.b.(c)^{-1} = bcbc,$
$bd.a.(abd)^{-1} = bdadba,$	$bd.b.(d)^{-1} = bdbd,$
$cd.a.(acd)^{-1} = cdadca,$	$cd.b.(bcd)^{-1} = cdbdcb,$
$abc.a.(bc)^{-1} = abcacb,$	$abc.b.(ac)^{-1} = abcbca,$
$abd.a.(bd)^{-1} = abdadb,$	$abd.b.(ad)^{-1} = abdbda,$
$bcd.a.(abcd)^{-1} = bcdadcba,$	$bcd.b.(cd)^{-1} = bcdbdc,$
$acd.a.(cd)^{-1} = acdadc,$	$acd.b.(abcd)^{-1} = acdbdcba,$
$abcd.a.(bcd)^{-1} = abcdadcb,$	$abcd.b.(acd)^{-1} = abcdbdca,$
$I.c.(c)^{-1} = I,$	$I.d.(d)^{-1} = I$
$a.c.(ac)^{-1} = I,$	$a.d.(ad)^{-1} = I,$
$b.c.(bc)^{-1} = I,$	$b.d.(bd)^{-1} = I,$
$c.c.(I)^{-1} = I,$	$c.d.(cd)^{-1} = I,$
$d.c.(cd)^{-1} = dcdc,$	$d.d.(I)^{-1} = I,$

$ab.c.(abc)^{-1} = I,$ $ab.d.(abd)^{-1} = I,$

$ac.c.(a)^{-1} = I,$ $ac.d.(acd)^{-1} = I,$

$ad.c.(acd)^{-1} = adcdca,$ $ad.d.(a)^{-1} = I,$

$bc.c.(b)^{-1} = I,$ $bc.d.(bcd)^{-1} = I,$

$bd.c.(bcd)^{-1} = bdcdcb,$ $bd.d.(b)^{-1} = I,$

$cd.c.(d)^{-1} = cdcd,$ $cd.d.(c)^{-1} = I,$

$abc.c.(ab)^{-1} = I,$ $abc.d.(abcd)^{-1} = I,$

$abd.c.(abcd)^{-1} = abdcdcba,$ $abd.d.(ab)^{-1} = I,$

$bcd.c.(bd)^{-1} = bcdcdb,$ $bcd.d.(bc)^{-1} = I,$

$acd.c.(ad)^{-1} = acdcda,$ $acd.d.(ac)^{-1} = I,$

$abcd.c.(abd)^{-1} = abcdcdba,$ $abcd.d.(abc)^{-1} = I,$

biçiminde olur.

Burada $(baba)^{-1} = abab$, $(caca)^{-1} = acac$, $(dada)^{-1} = adad$, $(bcacba)^{-1} = abcacb$, $(bdadba)^{-1} = abdadb$, $(cdadca)^{-1} = acdadc$, $(bcdadcba)^{-1} = abcdadcb$, $(cbcb)^{-1} = bcbc$, $(dbdb)^{-1} = bdbd$, $(acbcba)^{-1} = abcbca$, $(adbdba)^{-1} = abdbda$, $(cdbdcb)^{-1} = bcdbdc$, $(acdbdcba)^{-1} = abcdbdca$, $(dcdc)^{-1} = cdcd$, $(adcdca)^{-1} = acdcda$, $(bdcdcb)^{-1} = bcdcdb$, $(abdcdcba)^{-1} = abcdcdba$ olduğundan $(\overline{H}_2)^2(\lambda_4)$ grubunun üreteçlerinin tümü aşağıdaki gibi olur:

$$abab = \begin{pmatrix} 1 & 4\sqrt{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$acac = \begin{pmatrix} 17 & 12\sqrt{2} \\ 12\sqrt{2} & 17 \end{pmatrix},$$

$$adad = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix},$$

$$abcacb = \begin{pmatrix} -31 & -40\sqrt{2} \\ -12\sqrt{2} & -11 \end{pmatrix},$$

$$abdadb = \begin{pmatrix} -15 & -28\sqrt{2} \\ -4\sqrt{2} & -15 \end{pmatrix},$$

$$acdadc = \begin{pmatrix} -31 & -20\sqrt{2} \\ -24\sqrt{2} & -31 \end{pmatrix},$$

$$abcdadcb = \begin{pmatrix} 65 & 88\sqrt{2} \\ 24\sqrt{2} & 65 \end{pmatrix},$$

$$bcbc = \begin{pmatrix} 9 & 8\sqrt{2} \\ -4\sqrt{2} & -7 \end{pmatrix},$$

$bdbd = \begin{pmatrix} 41 & 12\sqrt{2} \\ -12\sqrt{2} & -7 \end{pmatrix}$,

$acbcba = \begin{pmatrix} -7 & 8\sqrt{2} \\ -4\sqrt{2} & 9 \end{pmatrix}$,

$adbdba = \begin{pmatrix} -7 & 12\sqrt{2} \\ -12\sqrt{2} & 41 \end{pmatrix}$,

$bcdbdc = \begin{pmatrix} -111 & -68\sqrt{2} \\ -40\sqrt{2} & 49 \end{pmatrix}$,

$abcdbdca = \begin{pmatrix} -111 & 68\sqrt{2} \\ -40\sqrt{2} & 49 \end{pmatrix}$,

$cdcd = \begin{pmatrix} 9 & 4\sqrt{2} \\ -8\sqrt{2} & -7 \end{pmatrix}$,

$acdcda = \begin{pmatrix} 9 & -4\sqrt{2} \\ 8\sqrt{2} & -7 \end{pmatrix}$,

$bcdcdb = \begin{pmatrix} -23 & -36\sqrt{2} \\ 8\sqrt{2} & 25 \end{pmatrix}$,

$abcdcdba = \begin{pmatrix} -23 & 68\sqrt{2} \\ -40\sqrt{2} & 49 \end{pmatrix}$,

biçiminde olur. Burada dikkat edilirse bütün üreteçler $\overline{H}_4(\lambda_4)$ grubundadır yani $(\overline{H}_2)^2(\lambda_4) \subsetneq \overline{H}_4(\lambda_4)$. Ancak [10] nolu kaynaktan $|\overline{H}_2(\lambda_4) : \overline{H}_4(\lambda_4)| = 8$ olur. Böylece $(\overline{H}_2)^2(\lambda_4) \neq \overline{H}_4(\lambda_4)$ dir.

4.1.3 Teorem: $\boldsymbol{i}$) $|\overline{H}_2(\lambda_5) : (\overline{H}_2)^2(\lambda_5)| = 32$

$\boldsymbol{ii}$) $(\overline{H}_2)^2(\lambda_5) = \overline{H}_4(\lambda_5)$.

İspat: $\boldsymbol{i}$) Kolaylık olması için $k_0 = TR$, $k_1 = RSTS$, $k_2 = RS^2TS^2$, $k_3 = RS^3TS^3$ ve $k_4 = RS^4TS^4$ diyelim. Bölüm grubu,

$$\begin{aligned} \overline{H}_2(\lambda_5) \,/\, (\overline{H}_2)^2(\lambda_5) &\cong \langle k_0, k_1, k_2, k_3, k_4 | {k_0}^2 = {k_1}^2 = {k_2}^2 = {k_3}^2 = {k_4}^2 = I \rangle \\ &\cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 \end{aligned}$$

biçiminde tanımlıdır ve $|\overline{H}_2(\lambda_5) : (\overline{H}_2)^2(\lambda_5)| = 32$ dir.

$\boldsymbol{ii}$) Eğer $(\overline{H}_2)^2(\lambda_5)$ için Schreier transversali

$$\begin{Bmatrix} I, k_0, k_1, k_2, k_3, k_4, k_0k_1, k_0k_2, k_0k_3, k_0k_4, k_1k_2, k_1k_3, \\ k_1k_4, \dots, k_3k_4, k_0k_1k_2, k_0k_1k_3, k_0k_1k_4, \dots, k_0k_1k_2k_3k_4 \end{Bmatrix}$$

seçelim. Reidemeister metodu ile,

${k_i}^2, i \in \{0,1,2,3,4\}$ biçiminde $1 \times C(4,1) = \binom{4}{1}$ tane,

$k_i k_j k_i {k_j}^{-1}, k_j k_i k_j {k_i}^{-1}, k_j k_i {k_j}^{-1} {k_i}^{-1}, i < j,\ i,j \in \{0,1,2,3,4\}$ biçiminde

$3 \times C(4,2) = 3 \times \binom{4}{2}$ tane,

$k_i k_j k_l k_i {k_l}^{-1} {k_j}^{-1}, k_i k_j k_l k_j {k_l}^{-1} {k_i}^{-1}, k_i k_j k_l k_l {k_j}^{-1} {k_i}^{-1}, k_i k_l k_j {k_l}^{-1} {k_j}^{-1} {k_i}^{-1}, k_j k_l k_i {k_l}^{-1} k_j {k_i}^{-1},$

$i < j < l,\ i,j,l \in \{0,1,2,3,4\}$ biçiminde $5 \times C(4,3) = 5 \times \binom{4}{3}$ tane,

$k_i k_j k_l k_n k_i {k_n}^{-1} {k_l}^{-1} {k_j}^{-1}, k_i k_j k_l k_n k_j {k_n}^{-1} {k_l}^{-1} {k_i}^{-1}, k_i k_j k_l k_n k_t {k_n}^{-1} {k_j}^{-1} {k_i}^{-1},$

$k_i k_j k_l k_n k_n {k_l}^{-1} {k_j}^{-1} {k_i}^{-1}, k_j k_l k_n k_i {k_n}^{-1} {k_l}^{-1} {k_j}^{-1} {k_i}^{-1}, k_i k_l k_n k_j {k_n}^{-1} {k_l}^{-1} {k_j}^{-1} {k_i}^{-1},$

$k_i k_j k_n k_l {k_n}^{-1} {k_l}^{-1} {k_j}^{-1} {k_i}^{-1}, i < j < l < n,\ i,j,l,n \in \{0,1,2,3,4\}$ biçiminde

$7 \times C(4,4) = 7 \times \binom{4}{4}$ tane eleman vardır. Buna göre $(\bar{H}_2)^2(\lambda_5)$ altgrubunun toplam üreteç sayısı 49 tanedir.

Ayrıca 3. bölümden ve 4.1.3 teoremin i kısmından,

$$|\bar{H}(\lambda_5):(\bar{H}_2)^2(\lambda_5)| = |\bar{H}(\lambda_5):\bar{H}_2(\lambda_5)|.|\bar{H}_2(\lambda_5):(\bar{H}_2)^2(\lambda_5)| = 10.32 = 320$$

olur ve [10] nolu kaynaktan $|H(\lambda_5):H_4(\lambda_5)| = 160$ olduğu verilmiştir. Buna göre 3. bölümden $G \cong H(\lambda_5)/H_4(\lambda_5)$ olmak üzere $\bar{H}(\lambda_5)/\bar{H}_4(\lambda_5) = \bar{H}(\lambda_5)/H_4(\lambda_5) \cong C_2 \times G$ olduğundan $|\bar{H}(\lambda_5):\bar{H}_4(\lambda_5)| = 320$ olur ki bu durum $(\bar{H}_2)^2(\lambda_5) = \bar{H}_4(\lambda_5)$ olduğunu gösterir. ■

4.1.4 Teorem: $q \geq 3$ asal sayı olsun.

i) $|\bar{H}_2(\lambda_q):(\bar{H}_2)^2(\lambda_q)| = 2^q$

ii) $(\bar{H}_2)^2(\lambda_q)$ rankı $1 + (q-2)2^{q-1}$ olan serbest bir gruptur.

iii) $(\bar{H}_2)^2(\lambda_q) = \bar{H}_4(\lambda_q)$.

İspat: ***i***) Kolaylık olması için $k_0 = TR$, $k_1 = RSTS$, $k_2 = RS^2TS^2$, $k_3 = RS^3TS^3$ ve $k_4 = RS^4TS^4, \dots, k_{q-1} = RS^{q-1}TS^{q-1}$ diyelim. Bölüm grubu,

$$\begin{aligned} &\bar{H}_2(\lambda_q)/(\bar{H}_2)^2(\lambda_q) \\ &\cong \langle k_0, k_1, k_2, k_3, k_4, \dots, k_{q-1} \mid {k_0}^2 = {k_1}^2 = {k_2}^2 = \cdots = {k_{q-1}}^2 = I \rangle \\ &\cong \underbrace{\mathbb{Z}_2 * \dots * \mathbb{Z}_2}_{q \text{ tane}} \end{aligned}$$

biçiminde tanımlıdır ve $|\bar{H}_2(\lambda_q):(\bar{H}_2)^2(\lambda_q)| = 2^q$ olur.

$\boldsymbol{ii}$) Eğer $(\overline{H}_2)^2(\lambda_q)$ için Schreier transversali

$$\begin{Bmatrix} I, k_0, k_1, \dots, k_{q-1}, k_0k_1, k_0k_2, \dots, k_0k_{q-1}, k_1k_2, k_1k_3, \dots, k_1k_{q-1}, \\ \dots, k_{q-2}k_{q-1}, k_0k_1k_2, k_0k_1k_3, \dots, k_0k_1k_{q-1}, \dots, k_0k_1 \dots k_{q-1} \end{Bmatrix}$$

seçelim. Reidemeister metodu ile,

${k_i}^2, i \in \{0,1,\dots,q-1\}$ biçiminde $1 \times C(q-1,1) = \binom{q-1}{1}$ tane,

$k_ik_jk_ik_j{}^{-1}, k_jk_ik_jk_i{}^{-1}, k_jk_ik_j{}^{-1}k_i{}^{-1}, i < j,\ i,j \in \{0,1,\dots,q-1\}$ biçimindeki ifadelerden $3 \times C(q-1,2) = 3 \times \binom{q-1}{2}$ tane,

$k_ik_jk_lk_ik_l{}^{-1}k_j{}^{-1}, k_ik_jk_lk_jk_l{}^{-1}k_i{}^{-1}, k_ik_jk_lk_lk_j{}^{-1}k_i{}^{-1}, k_ik_lk_jk_l{}^{-1}k_j{}^{-1}k_i{}^{-1}, k_jk_lk_ik_l{}^{-1}k_jk_i{}^{-1}$, $i < j < l,\ i,j,l \in \{0,1,\dots,q-1\}$ biçimindeki ifadelerden $5 \times C(q-1,3) = 5 \times \binom{q-1}{3}$ tane,

$$k_ik_jk_lk_nk_ik_n{}^{-1}k_l{}^{-1}k_j{}^{-1}, k_ik_jk_lk_nk_jk_n{}^{-1}k_l{}^{-1}k_i{}^{-1}, k_ik_jk_lk_nk_tk_n{}^{-1}k_j{}^{-1}k_i{}^{-1},$$

$$k_ik_jk_lk_nk_nk_l{}^{-1}k_j{}^{-1}k_i{}^{-1}, k_jk_lk_nk_ik_n{}^{-1}k_l{}^{-1}k_j{}^{-1}k_i{}^{-1}, k_ik_lk_nk_jk_n{}^{-1}k_l{}^{-1}k_j{}^{-1}k_i{}^{-1},$$

$k_ik_jk_nk_lk_n{}^{-1}k_l{}^{-1}k_j{}^{-1}k_i{}^{-1}, i < j < l < n,\ i,j,l,n \in \{0,1,\dots,q-1\}$ biçimindeki ifadelerden $7 \times C(q-1,4) = 7 \times \binom{q-1}{4}$ tane,

$$\vdots$$

$$k_0k_1 \dots k_{q-1}k_0k_{q-1}{}^{-1}k_{q-2}{}^{-1} \dots k_1{}^{-1}, k_0k_1 \dots k_{q-1}k_1k_{q-1}{}^{-1}k_{q-2}{}^{-1} \dots k_2{}^{-1}k_0{}^{-1}, \dots,$$

$$k_0k_1 \dots k_{q-1}k_{q-1}k_{q-1}k_{q-2}{}^{-1} \dots k_1{}^{-1}k_0{}^{-1}, k_0k_1 \dots k_{q-1}k_0k_{q-1}{}^{-1}k_{q-2}{}^{-1} \dots k_1{}^{-1}k_0{}^{-1},$$

$$k_0k_2 \dots k_{q-1}k_1k_{q-2}{}^{-1} \dots k_1{}^{-1}k_0{}^{-1}, \dots, k_0k_1 \dots k_{q-1}k_{q-2}k_{q-1}{}^{-1}k_{q-2}{}^{-1} \dots k_1{}^{-1}k_0{}^{-1}$$

biçimindeki ifadelerden $(2q-3) \times C(q-1,q-1) = (2q-3) \times \binom{q-1}{q-1}$ tane eleman vardır. Buna göre $(\overline{H}_2)^2(\lambda_q)$ altgrubunun toplam üreteç sayısı $1 + (q-2)2^{q-1}$ tanedir.

$\boldsymbol{iii}$) 3. bölümden ve 4.1.4 teoremin i kısmından,

$$\left|\overline{H}(\lambda_q) : (\overline{H}_2)^2(\lambda_q)\right| = \left|\overline{H}(\lambda_q) : \overline{H}_2(\lambda_q)\right| . \left|\overline{H}_2(\lambda_q) : (\overline{H}_2)^2(\lambda_q)\right| = 2q . 2^q = q . 2^{q+1}$$

olur ve [10] nolu kaynaktan $\left|H(\lambda_q) : H_4(\lambda_q)\right| = q . 2^q$ olduğu verilmiştir. Buna göre 3. bölümden $\overline{H}(\lambda_q)/\overline{H}_4(\lambda_q) = \overline{H}(\lambda_q)/H_4(\lambda_q) \cong C_2 \times G, G \cong H(\lambda_q)/H_4(\lambda_q)$ olduğundan $\left|\overline{H}(\lambda_q) : \overline{H}_4(\lambda_q)\right| = q . 2^q$ olur ki bu durum $(\overline{H}_2)^2(\lambda_q) = \overline{H}_4(\lambda_q)$ olduğunu gösterir. ■

4.1.5 Teorem: $q \geq 3$ asal sayı olsun. $(\overline{H}_N)^2(\lambda_q)$ denklik altgrubu olması için gerekli ve yeterli şart $N \leq 2$ olmasıdır.

5. GENİŞLETİLMİŞ HECKE GRUBUNUN KUVVET ALTGRUPLARI

Bu bölümde $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grubunun kuvvet altgrupları incelenmiştir. Burada q sayısının tek sayı veya çift sayı olma durumuna göre kuvvet altgrupları incelenmiştir.

Bu bölümde verilen bazı bilgiler [7, 18, 19, 42, 44-46] nolu kaynaklarda bulunabilir. Bununla birlikte bu bölümde verilen 5.1.12 Teorem, 5.1.13 Teorem, 5.1.14 Teorem, 5.1.16 Sonuç, 5.1.17 Teorem ve 5.1.18 Sonuç tamamen özgündür.

5.1 Genişletilmiş Hecke Grubunun Kuvvet Altgrupları

Hecke grubunun ve genişletilmiş Hecke grubunun kuvvet altgrupları [7, 18, 19, 42, 44-46] nolu kaynaklarda çalışılmıştır. Genişletilmiş Hecke grubunun $q \geq 3$ tek sayısı için kuvvet altgrupları [42] nolu kaynakta çalışılmıştır. Ancak, literatürde genişletilmiş Hecke grubunun $q \geq 4$ çift sayısı için çalışma yapılmamıştır. Bu çalışmada $q \geq 3$ tamsayısı için $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grubunun kuvvet altgrupları ele alınmıştır. Bunun için ilk olarak, $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grubunun kuvvet altgrupları ile $\overline{H}_2(\lambda_q)$ temel denklik altgrubu arasındaki bağlantıyı verelim.

5.1.1 Lemma: $q \geq 3$ asal sayı olsun. Bu durumda, $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grubunun indeksi 2 olan 3 tane normal altgrubu vardır. Bu altgruplar,

$$H(\lambda_q) = \langle T, S \mid T^2 = S^q = I \rangle \cong C_2 * C_q$$

$$\overline{H}_0(\lambda_q) = \langle R, S, TST \mid R^2 = S^q = (TST)^q = (RS)^2 = (RTST)^2 = I \rangle \cong D_q *_{\mathbb{Z}_2} D_q$$

$$\alpha\left(H(\lambda_q)\right) = \langle TR, S \mid (TR)^2 = S^q = I \rangle \cong C_2 * C_q$$

biçiminde tanımlıdır, [42].

5.1.2 Lemma: $q \geq 3$ asal sayı olsun. Bu durumda, $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grubunun indeksi $2q$ olan 2 tane normal altgrubu vardır. Bu altgruplar,

$$H^q(\lambda_q) = \langle T \rangle * \langle STS^{q-1} \rangle * \dots * \langle S^{q-1}TS \rangle$$
$$\overline{H}_2(\lambda_q) = \langle TR \rangle * \langle RSTS \rangle * \dots * \langle RS^{q-1}TS^{q-1} \rangle$$
biçiminde tanımlıdır. Ayrıca
$$\alpha\left(\overline{H}_2(\lambda_q)\right) = H^q(\lambda_q)$$
olur, [42].

İlk olarak $q \geq 3$ tek sayı olsun.

5.1.3 Teorem: $q \geq 3$ tek sayı olsun. $\overline{H}^2(\lambda_q)$ normal altgrubu q mertebeli iki tane sonlu devirli grubun serbest çarpımıdır. Ayrıca,
$$\overline{H}(\lambda_q)/\overline{H}^2(\lambda_q) \cong C_2 \times C_2$$
$$\overline{H}(\lambda_q) = \overline{H}^2(\lambda_q) \cup T\overline{H}^2(\lambda_q) \cup R\overline{H}^2(\lambda_q) \cup TR\overline{H}^2(\lambda_q)$$
$$\overline{H}^2(\lambda_q) = \langle S \rangle * \langle TST \rangle$$
biçimindedir.

İspat: Kuvvet altgrup tanımından,
$$\begin{aligned}\overline{H}(\lambda_q)/\overline{H}^2(\lambda_q) &\\ &\cong \langle T,S,R \mid T^2 = S^q = R^2 = (TR)^2 = (SR)^2 = T^2 = S^2 = R^2 \\ &= (TR)^2 = (SR)^2 = \cdots = I \rangle\end{aligned}$$
olur. q tek olduğundan $(2,q) = 1$ ve $S^q = S^2$ eşitliğinden $S = I$ dır. Böylece
$$\overline{H}(\lambda_q)/\overline{H}^2(\lambda_q) \cong \langle T,R \mid T^2 = R^2 = (TR)^2 = I \rangle \cong C_2 \times C_2$$
ve
$$\left|\overline{H}(\lambda_q) : \overline{H}^2(\lambda_q)\right| = 4$$
olur. Şimdi Schreier transversalini $\{I,T,R,TR\}$ biçiminde seçelim. Böylece tüm çarpımlar,
$$I.T.(T)^{-1} = I$$
$$T.T.(I)^{-1} = I$$
$$R.T.(TR)^{-1} = RTRT$$
$$TR.T.(R)^{-1} = TRTR$$
$$I.S.(I)^{-1} = S$$
$$T.S.(T)^{-1} = TST^{-1}$$
$$R.S.(R)^{-1} = RSR^{-1}$$

$$TR.S.(TR)^{-1} = TRSR^{-1}T^{-1}$$
$$I.R.(R)^{-1} = I$$
$$T.R.(TR)^{-1} = I$$
$$R.R.(I)^{-1} = I$$
$$TR.R.(T)^{-1} = I$$

olur. Burada $T^2 = R^2 = I$ olduğundan $T = T^{-1}$ ve $R = R^{-1}$ ve $TR = RT$ olduğundan $RTRT = TRTR = I$ ve $TRSR^{-1}T^{-1} = TS^{-1}T = (TST)^{-1}$ olur. Böylece $\overline{H}^2(\lambda_q)$ grubunun üreteçleri S ve TST dir. Bu durumda,

$$\overline{H}^2(\lambda_q) = \langle S\rangle * \langle TST\rangle$$

ve

$$\overline{H}(\lambda_q) = \overline{H}^2(\lambda_q) \cup T\overline{H}^2(\lambda_q) \cup R\overline{H}^2(\lambda_q) \cup TR\overline{H}^2(\lambda_q)$$

ve

$$\overline{H}^2(\lambda_q) \cong \langle S, TST | S^q = (TST)^q = I\rangle \cong C_q * C_q$$

olduğu görülür. Burada permütasyon metodu ve Riemann-Hurwitz formülü kullanılarak $\overline{H}^2(\lambda_q)$ nin işareti $(0; q^{(2)}, \infty)$ olur. ■

5.1.4 Sonuç: $q \geq 3$ tek sayı ve m pozitif tamsayısı için $(m, 2) = 2$ ve $(m, q) = 1$ olsun. $\overline{H}^m(\lambda_q)$ normal altgrubu, $\overline{H}^2(\lambda_q)$ normal altgrubuna izomorftur. Yani,

$$\overline{H}^m(\lambda_q) \cong \overline{H}^2(\lambda_q)$$

olur.

5.1.5 Teorem: $q \geq 3$ tek sayı olsun. Bu durumda,

$$\overline{H}^q(\lambda_q) = \overline{H}(\lambda_q)$$

olur.

İspat: Öncelikle bölüm grubunu bulalım.

$$\begin{aligned}\overline{H}(\lambda_q)/\overline{H}^q(\lambda_q) & \\ &\cong \langle T, S, R | T^2 = S^q = R^2 = (TR)^2 = (SR)^2 = T^q = S^q = R^q \\ &= (TR)^q = (SR)^q = \cdots = I\rangle\end{aligned}$$

olur. q tek olduğundan $T^2 = T^q$, $R^2 = R^q$ ve $(SR)^2 = (SR)^q$ bağıntılarından $T = S = R = I$ olur. Böylece

$$\left|\bar{H}(\lambda_q):\bar{H}^q(\lambda_q)\right| = 1$$

dir. Yani,

$$\bar{H}^q(\lambda_q) = \bar{H}(\lambda_q)$$

olur. ■

5.1.6 Teorem: $q \geq 3$ tek sayı ve m pozitif tamsayısı için $(m,2) = 1$ ve $(m,q) = d$ olsun. $\bar{H}^m(\lambda_q)$ normal altgrubu 2 mertebeli $2d$ tane sonlu devirli grubun ve q/d mertebeli sonlu devirli grubun serbest çarpımıdır. Ayrıca,

$$\bar{H}(\lambda_q)/\bar{H}^m(\lambda_q) \cong C_d$$

$$\bar{H}(\lambda_q) = \bar{H}^m(\lambda_q) \cup S\bar{H}^m(\lambda_q) \cup S^2\bar{H}^m(\lambda_q) \cup \ldots \cup S^{d-1}\bar{H}^m(\lambda_q)$$

$$\bar{H}^m(\lambda_q) = \langle T\rangle * \langle STS^{q-1}\rangle * \langle S^2TS^{q-2}\rangle \ldots * \langle S^{d-1}TS^{q-d+1}\rangle * \langle R\rangle * \langle SRS^{q-1}\rangle$$
$$* \langle S^2RS^{q-2}\rangle \ldots * \langle S^{d-1}RS^{q-d+1}\rangle * \langle S^d\rangle$$

biçimindedir.

İspat: Bölüm grubu,

$$\bar{H}(\lambda_q)/\bar{H}^m(\lambda_q)$$
$$\cong \langle T,S,R \mid T^2 = S^q = R^2 = (TR)^2 = (SR)^2 = T^m = S^m = R^m$$
$$= (TR)^m = (SR)^m = \cdots = I\rangle$$

olur. $(m,2) = 1$ ve $(m,q) = d$ olduğundan $T^2 = T^m = I$, $R^2 = R^m = I$ ve $S^q = S^m = I$ bağıntılarından $T = R = I$ ve $S^d = I$ olur. Böylece

$$\bar{H}(\lambda_q)/\bar{H}^m(\lambda_q) \cong \langle S \mid S^d = I\rangle \cong C_d$$

ve

$$\left|\bar{H}(\lambda_q):\bar{H}^m(\lambda_q)\right| = d$$

olur. Şimdi Schreier transversalini $\{I,S,S^2,\ldots,S^{d-1}\}$ biçiminde seçelim. Böylece tüm çarpımlar,

$$I.T.(I)^{-1} = T$$
$$S.T.(S)^{-1} = STS^{q-1}$$
$$S^2.T.(S^2)^{-1} = S^2TS^{q-2}$$
$$\vdots$$
$$S^{d-1}.T.(S^{d-1})^{-1} = S^{d-1}TS^{q-d+1}$$
$$I.S.(S)^{-1} = I$$
$$S.S.(I)^{-1} = I$$

$$S^2.S.(S^3)^{-1} = I$$
$$\vdots$$
$$S^{d-1}.S.(I)^{-1} = S^d$$
$$I.R.(I)^{-1} = R$$
$$S.R.(S)^{-1} = SRS^{q-1}$$
$$S^2.R.(S^2)^{-1} = SRS^{q-2}$$
$$\vdots$$
$$S^{d-1}.R.(S^{d-1})^{-1} = S^{d-1}RS^{q-d+1}$$

olur. Buna göre $\overline{H}^m(\lambda_q)$ grubunun üreteçleri

$$T, STS^{q-1}, S^2TS^{q-2}, \dots, S^{d-1}TS^{q-d+1}, R, SRS^{q-1}, S^2RS^{q-2}, \dots, S^{d-1}RS^{q-d+1}, S^d$$

dir. Bu durumda,

$$\overline{H}^m(\lambda_q) = \langle T\rangle * \langle STS^{q-1}\rangle * \langle S^2TS^{q-2}\rangle \dots * \langle S^{d-1}TS^{q-d+1}\rangle * \langle R\rangle * \langle SRS^{q-1}\rangle$$
$$* \langle S^2RS^{q-2}\rangle \dots * \langle S^{d-1}RS^{q-d+1}\rangle * \langle S^d\rangle$$

ve

$$\overline{H}(\lambda_q) = \overline{H}^m(\lambda_q) \cup S\overline{H}^m(\lambda_q) \cup S^2\overline{H}^m(\lambda_q) \cup \dots \cup S^{d-1}\overline{H}^m(\lambda_q)$$

olduğu görülür. Burada permütasyon metodu ve Riemann-Hurwitz formülü kullanılarak $\overline{H}^m(\lambda_q)$ nin işareti $(0; 2^{(2d)}, q/d, \infty)$ olarak bulunur. ■

5.1.7 Sonuç: $q \geq 3$ tek sayı ve m pozitif tek tamsayısı için $(m,q) = 1$ olsun. Bu durumda,

$$\overline{H}^m(\lambda_q) \cong \overline{H}(\lambda_q)$$

olur.

Son olarak, $q \geq 3$ tek sayısı için $(m,2) = 2$ ve $(m,q) = d > 2$ olsun. Bu durumda

$$\overline{H}(\lambda_q) \to \overline{H}(\lambda_q)/\overline{H}^m(\lambda_q)$$

homomorfizması altında T, S ve TS nin görüntüleri sırasıyla t, s ve ts olmak üzere,

$$\overline{H}(\lambda_q)/\overline{H}^m(\lambda_q)$$

bölüm grubu $t^2 = s^d = (ts)^m$ bağıntılarına sahip olur. Yukarıda kullandığımız yöntem ile $\overline{H}^m(\lambda_q)$ kuvvet altgrubu hakkında bir şey söyleyemeyiz.

Burada m doğal sayı olmak üzere $\overline{H}^{2qm}(\lambda_q)$ kuvvet altgrupları için komütatör altgrupları kullanılır.

5.1.8 Tanım: G bir grup ve $a, b \in G$ olsun.

a) $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$ elemanına a ile b nin komütatörü denir.

b) $[G, G] = \langle [a, b]: a, b \in G \rangle$ grubuna G nin komütatör altgrubu denir ve G' ile gösterilir.

5.1.9 Lemma: $q \geq 3$ tek sayısı için $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grubunun $\overline{H}'(\lambda_q)$ komütatör altgrubu rankı 2 olan serbest bir gruba izomorftur. Ayrıca,

$$\overline{H}(\lambda_q)/\overline{H}'(\lambda_q) \cong C_2 \times C_2$$

$$|\overline{H}(\lambda_q) : \overline{H}'(\lambda_q)| = 4$$

$$\overline{H}'(\lambda_q) \cong \langle S, TST \mid S^q = (TST)^q = I \rangle \cong C_q * C_q$$

biçimindedir, [18].

5.1.10 Sonuç: $q \geq 3$ tek sayısı için,

$$\overline{H}^2(\lambda_q) \cong \overline{H}'(\lambda_q)$$

olur.

Şimdi $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grubunun $\overline{H}^{2qm}(\lambda_q)$ kuvvet altgruplarını inceleyelim. $\overline{H}^2(\lambda_q) > \overline{H}^{2q}(\lambda_q)$ olduğundan $\overline{H}'(\lambda_q) > \overline{H}^{2q}(\lambda_q)$ olur. $\overline{H}'(\lambda_q)$ serbest grup olduğundan $\overline{H}^{2q}(\lambda_q)$ grubu da serbest bir grup olur. Böylece m doğal bir sayı olmak üzere $\overline{H}^{2q}(\lambda_q) > \overline{H}^{2qm}(\lambda_q)$ olur.

5.1.11 Sonuç: $\overline{H}^{2qm}(\lambda_q)$ altgrupları serbesttir.

Şimdi $q \geq 4$ çift sayı olsun.

5.1.12 Teorem: $q \geq 4$ çift sayı olsun. $\overline{H}^2(\lambda_q)$ normal altgrubu $q/2$ mertebeli iki tane sonlu devirli grubun ve sonsuz devirli grubun serbest çarpımıdır. Ayrıca,

$$\overline{H}(\lambda_q)/\overline{H}^2(\lambda_q) \cong C_2 \times C_2 \times C_2$$

$$\begin{aligned}\overline{H}(\lambda_q) = \overline{H}^2(\lambda_q) \cup T\overline{H}^2(\lambda_q) \cup S\overline{H}^2(\lambda_q) \cup R\overline{H}^2(\lambda_q) \cup TR\overline{H}^2(\lambda_q) \cup TS\overline{H}^2(\lambda_q) \\ \cup SR\overline{H}^2(\lambda_q) \cup TSR\overline{H}^2(\lambda_q)\end{aligned}$$

$$\overline{H}^2(\lambda_q) = \langle S^2 \rangle * \langle TS^2T \rangle * \langle TSTS^{q-1} \rangle$$

biçimindedir.

İspat: Bölüm grubu,

$$\begin{aligned}\overline{H}(\lambda_q)/\overline{H}^2(\lambda_q) &\\ &\cong \langle T,S,R \mid T^2 = S^q = R^2 = (TR)^2 = (SR)^2 = T^2 = S^2 = R^2 \\ &= (TR)^2 = (SR)^2 = \cdots = I\rangle\end{aligned}$$

biçimindedir. $S^q = S^2 = I$ olduğundan,

$$\overline{H}(\lambda_q)/\overline{H}^2(\lambda_q) \cong \langle T,S,R \mid T^2 = S^2 = R^2 = (TR)^2 = (RS)^2 = (TS)^2 = I\rangle$$

olur ve böylece

$$\overline{H}(\lambda_q)/\overline{H}^2(\lambda_q) \cong C_2 \times C_2 \times C_2$$

ve

$$\left|\overline{H}(\lambda_q) : \overline{H}^2(\lambda_q)\right| = 8$$

olur. Şimdi Schreier transversalini $\{I, T, S, R, TS, TR, SR, TSR\}$ biçiminde seçelim. Böylece tüm çarpımlar,

$$I.T.(T)^{-1} = I$$
$$T.T.(I)^{-1} = I$$
$$S.T.(TS)^{-1} = STS^{-1}T$$
$$R.T.(TR)^{-1} = I$$
$$TS.T.(S)^{-1} = TSTS^{-1}$$
$$TR.T.(R)^{-1} = I$$
$$SR.T.(TSR)^{-1} = SRTRS^{-1}T$$
$$TSR.T.(SR)^{-1} = TSRTRS^{-1}$$
$$I.S.(S)^{-1} = I$$
$$T.S.(TS)^{-1} = I$$
$$S.S.(I)^{-1} = S^2$$
$$R.S.(SR)^{-1} = RSRS^{-1}$$
$$TS.S.(T)^{-1} = TS^2T$$
$$TR.S.(TSR)^{-1} = TRSRS^{-1}T$$
$$SR.S.(R)^{-1} = I$$
$$TSR.S.(TR)^{-1} = TSRSRT$$
$$I.R.(R)^{-1} = I$$
$$T.R.(TR)^{-1} = I$$
$$S.R.(SR)^{-1} = I$$

$$R.R.(I)^{-1} = I$$
$$TS.R.(TSR)^{-1} = I$$
$$TR.R.(T)^{-1} = I$$
$$SR.R.(S)^{-1} = I$$
$$TSR.R.(TS)^{-1} = I$$

olur. Burada $TR = RT$ olduğundan $SRTRS^{-1}T = STS^{-1}T$ ve $TSRTRS^{-1} = TSTS^{-1}$ olur. Bu durumda $TSTS^{-1} = (STS^{-1}T)^{-1}$ dir. Ayrıca $RSR = S^{-1}$ olduğundan $RSRS^{-1} = S^{-2}$ ve $TSRSRT = I$ olur. Böylece $\bar{H}^2(\lambda_q)$ grubunun üreteçleri S^2, TS^2T ve $TSTS^{q-1}$ dir. Bu durumda,

$$\bar{H}^2(\lambda_q) = \langle S^2 \rangle * \langle TS^2T \rangle * \langle TSTS^{q-1} \rangle$$

ve

$$\bar{H}(\lambda_q) = \bar{H}^2(\lambda_q) \cup T\bar{H}^2(\lambda_q) \cup S\bar{H}^2(\lambda_q) \cup R\bar{H}^2(\lambda_q) \cup TR\bar{H}^2(\lambda_q) \cup TS\bar{H}^2(\lambda_q) \cup SR\bar{H}^2(\lambda_q) \cup TSR\bar{H}^2(\lambda_q)$$

ve

$$\bar{H}^2(\lambda_q) \cong \langle S^2, TS^2T, TSTS^{q-1} | (S^2)^{q/2} = (TS^2T)^{q/2} = (TSTS^{q-1})^{\infty} = I \rangle \cong C_{q/2} * C_{q/2} * \mathbb{Z}$$

olduğu görülür. Burada permütasyon metodu ve Riemann-Hurwitz formülü kullanılarak $\bar{H}^2(\lambda_q)$ nin işareti $(g; (q/2)^{(2)}, \infty^{(2)})$ olur. ■

5.1.13 Teorem: $q \geq 4$ çift sayı ve m pozitif tek tamsayı olsun. Bu durumda,

$$\bar{H}^m(\lambda_q) = \bar{H}(\lambda_q)$$

olur.

İspat: Bölüm grubu,

$$\bar{H}(\lambda_q)/\bar{H}^m(\lambda_q) \cong \langle T, S, R | T^2 = S^q = R^2 = (TR)^2 = (SR)^2 = T^m = S^m = R^m = (TR)^m = (SR)^m = \cdots = I \rangle$$

olur. $T^2 = T^m = I$, $R^2 = R^m = I$ ve m tek olduğundan $T = R = I$ olur. Ayrıca $(RS)^2 = (RS)^m = I$ ve m tek olduğundan $RS = I$ olur. Böylece $S = I$ dır. Buradan

$$|\bar{H}(\lambda_q) : \bar{H}^m(\lambda_q)| = 1$$

olur. Yani,

$$\bar{H}^m(\lambda_q) = \bar{H}(\lambda_q)$$

olur. ■

5.1.14 Teorem: $q \geq 4$ çift sayı ve m pozitif tamsayısı için $(m, q) = 2$ olsun. $\overline{H}^m(\lambda_q)$ normal altgrubu $q/2$ mertebeli m tane sonlu devirli grubun ve sonsuz devirli grubun serbest çarpımıdır. Ayrıca,

$$\overline{H}(\lambda_q)/\overline{H}^m(\lambda_q) \cong C_2 \times D_m$$

$$\begin{aligned}\overline{H}(\lambda_q) = {} & \overline{H}^m(\lambda_q) \cup T\overline{H}^m(\lambda_q) \cup S\overline{H}^m(\lambda_q) \cup TS\overline{H}^m(\lambda_q) \cup TST\overline{H}^m(\lambda_q) \\ & \cup TSTS\overline{H}^m(\lambda_q) \cup TSTST\overline{H}^m(\lambda_q) \dots \cup \underbrace{(TS)(TS)\dots(TS)}_{m-1 \text{ tane}}\overline{H}^m(\lambda_q) \\ & \cup R\overline{H}^m(\lambda_q) \cup TR\overline{H}^m(\lambda_q) \cup SR\overline{H}^m(\lambda_q) \cup TSR\overline{H}^m(\lambda_q) \cup TSTR\overline{H}^m(\lambda_q) \\ & \cup TSTSR\overline{H}^m(\lambda_q) \cup TSTSTR\overline{H}^m(\lambda_q) \dots \cup \underbrace{(TS)(TS)\dots(TS)}_{m-1 \text{ tane}}R\overline{H}^m(\lambda_q)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\overline{H}^m(\lambda_q) = {} & \langle \underbrace{(TS)(TS)\dots(TS)}_{m-1 \text{ tane}}TS^{-1}\rangle * \langle S^2\rangle * \langle TS^2T\rangle * \langle TSTS^2TS^{-1}T\rangle * \dots \\ & * \langle \underbrace{(TS)(TS)\dots(TS)}_{m-2 \text{ tane}}TS^2T\underbrace{(S^{-1}T)(S^{-1}T)\dots(S^{-1}T)}_{m-2 \text{ tane}}\rangle\end{aligned}$$

biçimindedir.

İspat: Bölüm grubu,

$$\begin{aligned}\overline{H}(\lambda_q)/\overline{H}^m(\lambda_q) & \\ & \cong \langle T, S, R \mid T^2 = S^q = R^2 = (TR)^2 = (SR)^2 = T^m = S^m = R^m \\ & = (TR)^m = (SR)^m = \cdots = I\rangle\end{aligned}$$

olur. $(m, q) = 2$ olduğundan $T^2 = T^m = I$, $R^2 = R^m = I$ ve $S^q = S^m = S^2 = I$ olur. Böylece

$$\begin{aligned}\overline{H}(\lambda_q)/\overline{H}^m(\lambda_q) & \cong \langle T, S, R \mid T^2 = S^2 = R^2 = (TR)^2 = (SR)^2 = (TS)^m = I\rangle \\ & \cong C_2 \times D_m\end{aligned}$$

ve

$$\left|\overline{H}(\lambda_q) : \overline{H}^m(\lambda_q)\right| = 4m$$

olur. Şimdi Schreier transversalini

$$\left\{\begin{matrix} I,T,S,TS,TST,TSTS,TSTST,\ldots,\underbrace{(TS)(TS)\ldots(TS)}_{m-1\ tane}, \\ R,TR,SR,TSR,TSTR,TSTSR,TSTSTR,\ldots,\underbrace{(TS)(TS)\ldots(TS)R}_{m-1\ tane} \end{matrix}\right\}$$

biçiminde seçelim. Böylece tüm çarpımlar,

$$I.T.(T)^{-1} = I$$

$$T.T.(I)^{-1} = I$$

$$S.T.\Big(\underbrace{(TS)(TS)\ldots(TS)}_{m-1 \text{ tane}}\Big)^{-1} = ST\underbrace{(S^{-1}T)(S^{-1}T)\ldots(S^{-1}T)}_{m-1 \text{ tane}}$$

$$TS.T.(TST)^{-1} = I$$

$$TST.T.(TS)^{-1} = I$$

$$TSTS.T.(TSTST)^{-1} = I$$

$$TSTST.T.(TSTS)^{-1} = I$$

$$\vdots$$

$$\underbrace{(TS)(TS)\ldots(TS)}_{m-1 \text{ tane}}.T.(S)^{-1} = \underbrace{(TS)(TS)\ldots(TS)}_{m-1 \text{ tane}}TS^{-1}$$

$$R.T.(TR)^{-1} = I$$

$$TR.T.(R)^{-1} = I$$

$$SR.T.\Big(\underbrace{(TS)(TS)\ldots(TS)R}_{m-1 \text{ tane}}\Big)^{-1} = SRTR\underbrace{(S^{-1}T)(S^{-1}T)\ldots(S^{-1}T)}_{m-1 \text{ tane}}$$

$$TSR.T.(TSTR)^{-1} = I$$

$$TSTR.T.(TSR)^{-1} = I$$

$$TSTSR.T.(TSTSTR)^{-1} = I$$

$$TSTSTR.T.(TSTSR)^{-1} = I$$

$$\vdots$$

$$\underbrace{(TS)(TS)\ldots(TS)}_{m-1 \text{ tane}}R.T.(SR)^{-1} = \underbrace{(TS)(TS)\ldots(TS)}_{m-1 \text{ tane}}RTRS^{-1}$$

$$I.S.(S)^{-1} = I$$

$$T.S.(TS)^{-1} = I$$

$$S.S.(I)^{-1} = S^2$$

$$TS.S.(T)^{-1} = TS^2T$$

$$TST.S.(TSTS)^{-1} = I$$

$$TSTS.S.(TST)^{-1} = TSTS^2TS^{-1}T$$

$$TSTST.S.(TSTSTS)^{-1} = I$$

$$\vdots$$

$$\underbrace{(TS)(TS)\dots(TS)}_{m-1 \text{ tane}}.S.\Big(\underbrace{(TS)(TS)\dots(TS)}_{m-2 \text{ tane}}T\Big)^{-1}$$

$$= \underbrace{(TS)(TS)\dots(TS)}_{m-1 \text{ tane}}ST\underbrace{(S^{-1}T)(S^{-1}T)\dots(S^{-1}T)}_{m-2 \text{ tane}}$$

$$= \underbrace{(TS)(TS)\dots(TS)}_{m-2 \text{ tane}}TS^2T\underbrace{(S^{-1}T)(S^{-1}T)\dots(S^{-1}T)}_{m-2 \text{ tane}}$$

$$R.S.(SR)^{-1} = RSRS^{-1}$$

$$TR.S.(TSR)^{-1} = TRSRS^{-1}T$$

$$SR.S.(R)^{-1} = I$$

$$TSR.S.(TR)^{-1} = I$$

$$TSTR.S.(TSTSR)^{-1} = TSTRSRS^{-1}TS^{-1}T$$

$$TSTSR.S.(TSTR)^{-1} = I$$

$$TSTSTR.S.(TSTSTSR)^{-1} = TSTSTRSRS^{-1}TS^{-1}TS^{-1}T$$

$$\vdots$$

$$\underbrace{(TS)(TS)\dots(TS)}_{m-1 \text{ tane}}R.S.\Big(\underbrace{(TS)(TS)\dots(TS)}_{m-2 \text{ tane}}TR\Big)^{-1} = I$$

$$I.R.(R)^{-1} = I$$

$$T.R.(TR)^{-1} = I$$

$$S.R.(SR)^{-1} = I$$

$$TS.R.(TSR)^{-1} = I$$

$$TST.R.(TSTR)^{-1} = I$$

$$TSTS.R.(TSTSR)^{-1} = I$$

$$TSTST.R.(TSTSTR)^{-1} = I$$

$$\vdots$$

$$\underbrace{(TS)(TS)\dots(TS)}_{m-1 \text{ tane}}.R.\Big(\underbrace{(TS)(TS)\dots(TS)}_{m-1 \text{ tane}}R\Big)^{-1} = I$$

$$R.R.(I)^{-1} = I$$

$$TR.R.(T)^{-1} = I$$

$$SR.R.(S)^{-1} = I$$

$$TSR.R.(TS)^{-1} = I$$
$$TSTR.R.(TST)^{-1} = I$$
$$TSTSR.R.(TSTS)^{-1} = I$$
$$TSTSTR.R.(TSTST)^{-1} = I$$
$$\vdots$$
$$\underbrace{(TS)(TS)\dots(TS)}_{m-1 \text{ tane}}R.R.\Big(\underbrace{(TS)(TS)\dots(TS)}_{m-1 \text{ tane}}\Big)^{-1} = I$$

olur. Burada $TR = RT$ olduğundan

$$SRTR\underbrace{(S^{-1}T)(S^{-1}T)\dots(S^{-1}T)}_{m-1 \text{ tane}} = ST\underbrace{(S^{-1}T)(S^{-1}T)\dots(S^{-1}T)}_{m-1 \text{ tane}}$$

ve

$$\underbrace{(TS)(TS)\dots(TS)}_{m-1 \text{ tane}}RTRS^{-1} = \underbrace{(TS)(TS)\dots(TS)}_{m-1 \text{ tane}}TS^{-1}$$

dir. Böylece

$$\underbrace{(TS)(TS)\dots(TS)}_{m-1 \text{ tane}}TS^{-1} = (ST\underbrace{(S^{-1}T)(S^{-1}T)\dots(S^{-1}T)}_{m-1 \text{ tane}})^{-1}$$

olur. Ayrıca $RSR = S^{-1}$ olduğundan $RSRS^{-1} = S^{-2}$, $TRSRS^{-1}T = TS^{-2}T$, $TSTSTRSRS^{-1}TS^{-1}TS^{-1}T = TSTS^{-2}TS^{-1}T$ ve $TSTSTRSRS^{-1}TS^{-1}TS^{-1}T = TSTSTS^{-2}TS^{-1}TS^{-1}T$ olur. Böylece
$S^2 = (S^{-2})^{-1}$, $TS^2T = (TS^{-2}T)^{-1}$, $TSTS^2TS^{-1}T = (TSTS^{-2}TS^{-1}T)^{-1}$ ve $TSTSTS^2TS^{-1}TS^{-1}T = (TSTSTS^{-2}TS^{-1}TS^{-1}T)^{-1}$ olduğundan $\overline{H}^m(\lambda_q)$ grubunun üreteçleri,

$$a_1 = \underbrace{(TS)(TS)\dots(TS)}_{m-1 \text{ tane}}TS^{-1}$$
$$a_2 = S^2$$
$$a_3 = TS^2T$$
$$a_4 = TSTS^2TS^{-1}T$$
$$\vdots$$
$$a_{m+1} = \underbrace{(TS)(TS)\dots(TS)}_{m-2 \text{ tane}}TS^2T\underbrace{(S^{-1}T)(S^{-1}T)\dots(S^{-1}T)}_{m-2 \text{ tane}}$$

olur. Böylece

$$\overline{H}^m(\lambda_q) = \langle a_1 \rangle * \langle a_2 \rangle * \langle a_3 \rangle * \langle a_4 \rangle * \dots * \langle a_{m+1} \rangle$$

ve

$$\overline{H}(\lambda_q) = \overline{H}^m(\lambda_q) \cup T\overline{H}^m(\lambda_q) \cup S\overline{H}^m(\lambda_q) \cup TS\overline{H}^m(\lambda_q) \cup TST\overline{H}^m(\lambda_q) \cup TSTS\overline{H}^m(\lambda_q) \cup TSTST\overline{H}^m(\lambda_q) \dots \cup \underbrace{(TS)(TS)\dots(TS)}_{m-1 \text{ tane}}\overline{H}^m(\lambda_q)$$

$$\cup R\overline{H}^m(\lambda_q) \cup TR\overline{H}^m(\lambda_q) \cup SR\overline{H}^m(\lambda_q) \cup TSR\overline{H}^m(\lambda_q) \cup TSTR\overline{H}^m(\lambda_q) \cup TSTSR\overline{H}^m(\lambda_q) \cup TSTSTR\overline{H}^m(\lambda_q) \dots \cup \underbrace{(TS)(TS)\dots(TS)}_{m-1 \text{ tane}}R\overline{H}^m(\lambda_q)$$

ve

$$\overline{H}^m(\lambda_q) \cong \langle a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{m+1} | (a_2)^{\frac{q}{2}} = (a_3)^{\frac{q}{2}} = (a_4)^{\frac{q}{2}} = \dots = (a_{m+1})^{q/2} = I \rangle$$

olduğu görülür. Burada permütasyon metodu ve Riemann-Hurwitz formülü kullanılarak $\overline{H}^m(\lambda_q)$ nin işareti $\left(0; (q/2)^{(m)}, \infty^{(2)}\right)$ olur. ■

5.1.15 Lemma: $q \geq 4$ çift sayısı için $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grubunun $\overline{H}'(\lambda_q)$ komütatör altgrubu rankı 3 olan serbest bir gruba izomorftur. Ayrıca,

$$\overline{H}(\lambda_q)/\overline{H}'(\lambda_q) \cong C_2 \times C_2 \times C_2$$

$$\left|\overline{H}(\lambda_q) : \overline{H}'(\lambda_q)\right| = 8$$

$$\overline{H}'(\lambda_q) \cong \langle S^2, TS^2T, TSTS^{q-1} | (S^2)^{q/2} = (TS^2T)^{q/2} = (TSTS^{q-1})^\infty = I \rangle$$

$$\cong C_{q/2} * C_{q/2} * \mathbb{Z}$$

biçimindedir, [18].

5.1.16 Sonuç: $q \geq 3$ tamsayısı için $\overline{H}'(\lambda_q) \cong \overline{H}^2(\lambda_q)$ olur.

Şimdi $(m, 2) = 2$ ve $(m, q) = d > 2$ olsun. $\overline{H}^m(\lambda_q)$ kuvvet altgrubu için aşağıdaki teoremi verebiliriz.

5.1.17 Teorem: ***i***) $|\overline{H}^2(\lambda_4) : (\overline{H}^2)^2(\lambda_4)| = 8$.

ii) $(\overline{H}^2)^2(\lambda_4)$ rankı 9 olan serbest bir gruptur.

İspat: ***i***) $k_1 = S^2, k_2 = TS^2T$ ve $k_3 = TSTS^3$ olsun. Bu durumda,

$$\overline{H}^2(\lambda_4)/(\overline{H}^2)^2(\lambda_4) \cong \langle k_1, k_2, k_3 | (k_1)^2 = (k_2)^2 = (k_3)^2 = I \rangle \cong C_2 * C_2 * C_2$$

biçiminde olur ve böylece $|\overline{H}^2(\lambda_4):(\overline{H}^2)^2(\lambda_4)| = 8$ dir.

ii) Schreier transversalini

$$\{I, k_1, k_2, k_3, k_1k_2, k_1k_3, k_2k_3, k_1k_2k_3\}$$

biçiminde seçelim. Böylece tüm çarpımlar,

$$I.k_1.(k_1)^{-1} = I$$
$$k_1.k_1.(I)^{-1} = I$$
$$k_2.k_1.(k_1k_2)^{-1} = k_2k_1k_2k_1$$
$$k_3.k_1.(k_1k_3)^{-1} = k_3k_1(k_3)^{-1}k_1$$
$$k_1k_2.k_1(k_2)^{-1} = k_1k_2k_1k_2$$
$$k_1k_3.k_1.(k_3)^{-1} = k_1k_3k_1(k_3)^{-1}$$
$$k_2k_3.k_1.(k_1k_2k_3)^{-1} = k_2k_3k_1(k_3)^{-1}k_2k_1$$
$$k_1k_2k_3.k_1.(k_2k_3)^{-1} = k_1k_2k_3k_1(k_3)^{-1}k_2$$
$$I.k_2.(k_2)^{-1} = I$$
$$k_1.k_2.(k_1k_2)^{-1} = I$$
$$k_2.k_2.(I)^{-1} = I$$
$$k_3.k_2.(k_2k_3)^{-1} = k_3k_2(k_3)^{-1}k_2$$
$$k_1k_2.k_2.(k_1)^{-1} = I$$
$$k_1k_3.k_2.(k_1k_2k_3)^{-1} = k_1k_3k_2(k_3)^{-1}k_2k_1$$
$$k_2k_3.k_2.(k_3)^{-1} = k_2k_3k_2(k_3)^{-1}$$
$$k_1k_2k_3.k_2.(k_1k_3)^{-1} = k_1k_2k_3k_2(k_3)^{-1}k_1$$
$$I.k_3.(k_3)^{-1} = I$$
$$k_1.k_3.(k_1k_3)^{-1} = I$$
$$k_2.k_3.(k_2k_3)^{-1} = I$$
$$k_3.k_3.(I)^{-1} = {k_3}^2$$
$$k_1k_2.k_3.(k_1k_2k_3)^{-1} = I$$
$$k_1k_3.k_3.(k_1)^{-1} = k_1{k_3}^2k_1$$
$$k_2k_3.k_3.(k_2)^{-1} = k_2{k_3}^2k_2$$
$$k_1k_2k_3.k_3.(k_1k_2)^{-1} = k_1k_2{k_3}^2k_2k_1$$

olur. Burada $(k_2k_1k_2k_1)^{-1} = k_1k_2k_1k_2$, $(k_3k_1(k_3)^{-1}k_1)^{-1} = k_1k_3k_1(k_3)^{-1}$, $(k_2k_3k_1(k_3)^{-1}k_2k_1)^{-1} = k_1k_2k_3k_1(k_3)^{-1}k_2$, $(k_3k_2(k_3)^{-1}k_2)^{-1} = k_2k_3k_2(k_3)^{-1}$ ve $(k_1k_3k_2(k_3)^{-1}k_2k_1)^{-1} = k_1k_2k_3k_2(k_3)^{-1}k_1$ dir. Böylece $k_1 = S^2 =$

$\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$, $k_2 = TS^2T = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$, $k_3 = TSTS^3 = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$ ve ${k_3}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$ olmak üzere $(\overline{H}^2)^2(\lambda_4)$ ün bütün üreteçleri,

$$k_1k_2k_1k_2 = \begin{pmatrix} 17 & -12\sqrt{2} \\ -12\sqrt{2} & 17 \end{pmatrix}$$

$$k_1k_3k_1(k_3)^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 8\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} & -13 \end{pmatrix}$$

$$k_1k_2k_3k_1(k_3)^{-1}k_2 = \begin{pmatrix} 3 & -4\sqrt{2} \\ 8\sqrt{2} & -21 \end{pmatrix}$$

$$k_2k_3k_2(k_3)^{-1} = \begin{pmatrix} 13 & -4\sqrt{2} \\ -4\sqrt{2} & -3 \end{pmatrix}$$

$$k_1k_2k_3k_2(k_3)^{-1}k_1 = \begin{pmatrix} 69 & 44\sqrt{2} \\ -40\sqrt{2} & -51 \end{pmatrix}$$

$${k_3}^2 = \begin{pmatrix} 11 & 4\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$$

$$k_1{k_3}^2k_1 = \begin{pmatrix} 5 & 12\sqrt{2} \\ -4\sqrt{2} & -19 \end{pmatrix}$$

$$k_2{k_3}^2k_2 = \begin{pmatrix} 5 & -4\sqrt{2} \\ 12\sqrt{2} & -19 \end{pmatrix}$$

$$k_1k_2{k_3}^2k_2k_1 = \begin{pmatrix} 75 & 52\sqrt{2} \\ -44\sqrt{2} & -61 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Burada permütasyon metodu ve Riemann-Hurwitz formülü kullanılarak $(\overline{H}^2)^2(\lambda_4)$ nin işareti $\left(1; \infty^{(8)}\right)$ olarak bulunur. ■

$\overline{H}^4(\lambda_4) \leq (\overline{H}^2)^2(\lambda_4)$ olduğundan aşağıdaki sonucu verebiliriz.

5.1.18 Sonuç: $\overline{H}^{4k}(\lambda_4)$ altgrupları serbesttir.

5.1.19 Örnek: $q = 6$ olsun ve $\overline{H}(\lambda_6)$ genişletilmiş Hecke grubunu düşünelim.

$\boldsymbol{i}$) Eğer $(m, 6) = 1$ ise $\overline{H}^m(\lambda_6) = \overline{H}(\lambda_6)$.

$\boldsymbol{ii}$) Eğer $(m, 6) = 3$ ise $\overline{H}^m(\lambda_6) = \overline{H}(\lambda_6)$.

$\boldsymbol{iii}$) Eğer $(m, 6) = 2$ ise

$$\overline{H}(\lambda_6)/\overline{H}^m(\lambda_6) \cong \langle T,S,R | T^2 = S^2 = R^2 = (TR)^2 = (SR)^2 = (TS)^m = I\rangle$$
$$\cong C_2 \times D_m$$

ve

$$\left|\overline{H}(\lambda_q): \overline{H}^m(\lambda_6)\right| = 4m$$

olur. Şimdi Reidemeister-Schreier transversalini

$$\left\{\begin{matrix} I,T,S,TS,TST,TSTS,TSTST,\dots,\underbrace{(TS)(TS)\dots(TS)}_{m-1\ tane}, \\ R,TR,SR,TSR,TSTR,TSTSR,TSTSTR,\dots,\underbrace{(TS)(TS)\dots(TS)R}_{m-1\ tane} \end{matrix}\right\}$$

seçersek,

$$\overline{H}^m(\lambda_6) = \langle \underbrace{(TS)(TS)\dots(TS)}_{m-1 \text{ tane}}TS^{-1}\rangle * \langle S^2\rangle * \langle TS^2T\rangle * \langle TSTS^2TS^{-1}T\rangle * \dots$$
$$* \langle \underbrace{(TS)(TS)\dots(TS)}_{m-2 \text{ tane}}TS^2T\underbrace{(S^{-1}T)(S^{-1}T)\dots(S^{-1}T)}_{m-2 \text{ tane}}\rangle$$

olur. Şimdi $m = 2$ olsun. Buna göre,

$$\overline{H}(\lambda_6)/\overline{H}^2(\lambda_6) \cong \langle T,S,R | T^2 = S^2 = R^2 = (TR)^2 = (RS)^2 = (TS)^2 = I\rangle$$
$$\cong C_2 \times D_2$$

ve

$$\left|\overline{H}(\lambda_q): \overline{H}^2(\lambda_6)\right| = 8$$

olur. Şimdi Schreier transversalini $\{I,T,S,R,TS,TR,SR,TSR\}$ biçiminde seçelim. Böylece tüm çarpımlar,

$$I.T.(T)^{-1} = I$$
$$T.T.(I)^{-1} = I$$
$$S.T.(TS)^{-1} = STS^5T$$
$$R.T.(TR)^{-1} = I$$
$$TS.T.(S)^{-1} = TSTS^5$$
$$TR.T.(R)^{-1} = I$$
$$SR.T.(TSR)^{-1} = SRTRS^5T$$
$$TSR.T.(SR)^{-1} = TSRTRS^5$$
$$I.S.(S)^{-1} = I$$
$$T.S.(TS)^{-1} = I$$
$$S.S.(I)^{-1} = S^2$$
$$R.S.(SR)^{-1} = RSRS^5$$

$$TS.S.(T)^{-1} = TS^2T$$
$$TR.S.(TSR)^{-1} = TRSRS^5T$$
$$SR.S.(R)^{-1} = I$$
$$TSR.S.(TR)^{-1} = I$$
$$I.R.(R)^{-1} = I$$
$$T.R.(TR)^{-1} = I$$
$$S.R.(SR)^{-1} = I$$
$$R.R.(I)^{-1} = I$$
$$TS.R.(TSR)^{-1} = I$$
$$TR.R.(T)^{-1} = I$$
$$SR.R.(S)^{-1} = I$$
$$TSR.R.(TS)^{-1} = I$$

olur. Burada $TR = RT$ olduğundan $SRTRS^5T = STS^5T$ ve $TSRTRS^5 = TSTS^5$ olur. Bu durumda $TSTS^5 = (STS^5T)^{-1}$ dir. Ayrıca $RSR = S^5$ olduğundan $RSRS^5 = S^4$ ve $TRSRS^5T = TS^4T$ olur. Böylece $\overline{H}^2(\lambda_6)$ grubunun üreteçleri S^2, TS^2T ve $TSTS^5$ dir. Bu durumda,

$$\overline{H}^2(\lambda_6) = \langle S^2 \rangle * \langle TS^2T \rangle * \langle TSTS^5 \rangle$$

olur.

6. SONUÇLAR

Bu çalışmada elde edilen özgün sonuçlar üçüncü, dördüncü ve beşinci bölümde yer almaktadır ve bunlar aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

Üçüncü bölümde, $H(\lambda_q)$ Hecke grubunun ve $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grubunun bazı denklik altgrubunun ve temel denklik altgrubunun üreteçleri verilmiştir. Daha sonra temel denklik altgrup üreteçlerini kullanarak genelleştirilmiş Pell ve genelleştirilmiş Pell-Lucas sayılarının tanımları yapılmıştır ve bazı özellikleri verilmiştir. Daha sonra, bölüm içerisinde tanımlanan olan A^k ve B^k matrislerinin $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ cismindeki sabit noktaları incelenmiştir. Son olarak, genelleştirilmiş Pell ve genelleştirilmiş Pell-Lucas sayılarının $\overline{H}(\lambda_3)$ genişletilmiş modüler grupta bir uygulaması verilmiştir.

Dördüncü bölümde, üçüncü bölümde verilen $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grubunun 2 seviyeli temel denklik altgruplarının 2. kuvvet altgrupları incelenmiştir.

Beşinci bölümde, $q \geq 3$ tamsayısı için $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grubunun kuvvet altgrupları incelenmiştir.

7. KAYNAKLAR

[1] Sury, B., “The congruence subgroup problem”, *J. Indian Ins. Sci.*, Vol 87: 4, 457-465, (2007).

[2] Newman, M., “Normal congruence subgroups of the modular group”, *Amer. J. Math.*, 85, 419-427, (1963).

[3] Schoeneberg, B., “*Elliptic modular functions : an introduction*”, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, (1974).

[4] Sury, B and Venkataramana, T. N., “Generators for all principal congruence subgroups of SL(n,Z) with n ≥ 3”, *Proc. Amer. Math. Soc.* 122, 355–358, (1994).

[5] Cummins, C. J. and Pauli, S., “Congruence subgroups of PSL(2,Z) of genus less than or equal to 24”, *Experiment. Math.*, 12, no. 2, 243–255, (2003).

[6] Hecke, E., “Über die bestimmung Dirichletscher Reihen durch ihre Funktionalgleichung”, *Math. Ann.*, 112, 664-699, (1936).

[7] Cangül, İ. N., “Normal subgroups of Hecke groups”, Ph.D. Thesis, *Southampton University*, (1993).

[8] Lang, Mong-Lung, Lim, Chong-Hai; Tan, Ser Peow “Principal congruence subgroups of the Hecke groups”, *J. Number Theory*, 85, no:2, 220–230, (2000).

[9] Cangul, I. N.and Bizim, O., “Congruence subgroups of some Hecke groups”, *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica*, 30, no. 2, 115-131, (2002).

[10] I. Ivrissimtzis, and D. Singerman, “Regular maps and principal congruence subgroups of Hecke groups”, *European J. Combin.*, 26, no. 3-4, 437-456, (2005).

[11] Lang, Mong-Lung, "The signatures of the congruence subgroups $G_0(\tau)$ of the Hecke groups G_4 and G_6", *Comm. Algebra*, 28, no:8, 3691–3702, (2000).

[12] Lang, Mong-Lung, "The structure of the normalisers of the congruence subgroups of the Hecke group G_5", *Bull. Lond. Math. Soc.*, 39, no:1, 53–62, (2007).

[13] Lang, Mong-Lung, C.H. Lim and S.P. Tan, "Independent generators for congruence subgroups of Hecke groups", *Math. Z.*, 220, no:4, 569–594, (1995).

[14] C.L. May, "A family of M*-groups", *Canad. J. Math.*, 38, no:5, 1094–1109, (1986).

[15] C.L. May, "Supersolvable M∗-groups", *Glasgow Math. J.*, 30, no:1, 31–40, (1988).

[16] D.L. McQuillan, "Classification of normal subgroups of the modular group", *Amer. J. Math.*, 87, 285–296, (1965).

[17] Jones, Gareth A. and Thornton, John S. "Automorphisms and congruence subgroups of the extended modular group", *J. London Math. Soc.*,(2), 34, no:1, 26-40, (1986).

[18] Şahin, R., "Genişletilmiş Hecke grupları", Doktora Tezi, *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Matematik Anabilim Dalı, Balıkesir, (2001).

[19] Koruoğlu, Ö., "$\overline{H}(\lambda)$ ve $\overline{H}(\lambda_q)$ Genişletilmiş Hecke gruplarının bazı normal altgrupları ve sürekli kesirler", Doktora Tezi, *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Matematik Anabilim Dalı, Balıkesir, (2005).

[20] Wilkie H. C., "On non-Euclidean crystallographic groups", *Math. Z.*, 91, 87-102, (1966).

[21] Jones G. A. and Singerman D., "*Complex functions: An algebraic and geometric viewpoint*" Cambridge University Press, Cambridge, (1987).

[22] Rankin R. A., "*Modular forms and functions*", Cambridge University Press, Cambridge-New York-Melbourne, (1977).

[23] Ford, L. R., "*Automorphic functions,*", Chelsea Publishing Company, New York, (1951).

[24] Evans R., "A fundamental region for Hecke's modular group", *J. Number Theory.*, 5, 108-115, (1973).

[25] Fine, B. and Rosenberger, G., "*Algebraic generalizations of discrete groups: A path to combinatorial group theory through one-relator products*", Marcel Dekker, Inc., New York, (1999).

[26] Bujalance, E., "Normal N.E.C. signatures.", *Illinois J. Math.*, 26, no. 3, 519-530, (1982).

[27] Singerman, D., "Finitely maximal fuchsian groups", *J. London Math. Soc.*, (2), 6, 29-38, (1972).

[28] Lehner, J., "*Discontinuous groups and automorphic functions", Mathematical Surveys*, No. VIII, American Mathematical Society, Providence, R.I., (1964).

[29] Maclachlan, C., "Maximal normal Fuchsian groups", *Illinois J. Math.*, 15, 104-113, (1971).

[30] Singerman, D., "Subgroups of Fuschian groups and finite permutation groups", *Bull. London Math. Soc.*, 2, 319-323, (1970).

[31] Macbeath, A. M., "Generators of the linear fractional groups", Number Theory (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XII, Houston, Tex., 1967), 14–32, *Amer. Math. Soc.*, Providence, R.I., (1969).

[32] Sahin, R. and Bizim, O., "Some subgroups of the extended Hecke groups $\overline{H}(\lambda_q)$", *Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed.*, no. 4, 497-502, (2003).

[33] Wohlfahrt, K.; "An extension of F. Klein's level concept", *Illinois J. Math.*, 8, 529-535, (1964).

[34] Ikikardes, S., Sahin, R. and Cangül, I. N., "Principal congruence subgroups of the Hecke groups and related results", *Bull. Braz. Math. Soc. (N. S.)*, 40, no. (4), 479-494, (2009).

[35] Mushtaq, Q. and Hayat, U., "Pell numbers, Pell-Lucas numbers and modular group", *Algebra Colloq.*, 14, no. 1, 97-102, (2007).

[36] Sarıgedik, Z., "Hecke gruplarında bazı özel sayı dizileri", Yüksek Lisans Tezi, *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Matematik Anabilim Dalı, Balıkesir, (2010).

[37] Fraleigh, J. B., "*A first course in abstract algebra*", Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., (1967).

[38] İkikardeş, S., "Genelleştirilmiş M^* -gruplar", Doktora Tezi, *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Matematik Anabilim Dalı, Balıkesir, (2008).

[39] Fine, B., "Trace Classes and quadratic forms in the modular group", *Canad. Math. Bull.*, 37, no. 2, 202-212, (1994).

[40] Koruoglu, O., Sahin, R and Ikikardes, S., "Trace classes and fixed points for the extended modular group $\overline{\Gamma}$", *Turkish J. Math.*, 32, no. 1, 11-19, (2008).

[41] Koruoglu, Ö and Sahin, R., "Generalized Fibonacci sequences related to the extended Hecke groups and an application to the extended modular group", *Turk J Math*, 34, 325-332, (2010).

[42] Sahin, R., İkikardeş S. and Koruoğlu Ö.," Some normal subgroups of the extended Hecke groups $\overline{H}(\lambda_q)$", *Rocky Mountain J. Math.*, 36/3, 1033-1048, (2006).

[43] Sahin, R.and Ikikardes, S, "Squares of Congruence Subgroups of the Extended Modular Group", *Miskolc Mathematical Notes*, 14, No. 3, pp. 1031–1035, (2013).

[44] Sahin, R., Ikikardes, S., Koruoğlu, Ö., "On the power subgroups of the extended modular group $\overline{\Gamma}$", *Turkish J. Math.*, 29, 143-151, (2004).

[45] Sahin, R., Koruoğlu, Ö. and Ikikardes, S., "On the extended Hecke groups $\overline{H}(\lambda_5)$", *Algebra Colloq.*, 13, no:1, 17-23, (2006).

[46] Cangul, I. N.; Sahin, R; Ikikardes, S. and Koruoglu, O., "Power Subgroups of Some Hecke Groups II", *Houston Journal of Mathematics*, 33, No. 1, 33-42, (2007).