

**T.C.  
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**



**LİNEER OLMAYAN FOURIER TABANLI YAKLAŞIM**

**DOKTORA TEZİ**

**HATİCE ASLAN**

**BALIKESİR, ARALIK - 2016**



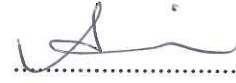
## KABUL VE ONAY SAYFASI

Hatice ASLAN tarafından hazırlanan "LINEER OLMAYAN FOURIER TABANLI YAKLAŞIM" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 20.12.2016 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği /oy çokluğu ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

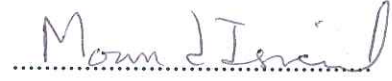
Jüri Üyeleri

İmza

Danışman  
Prof. Dr. Ali GÜVEN



Eş Danışman  
Prof. Dr. Mourad E. H. İSMAİL




Üye  
Prof. Dr. Daniyal İSRAFİLZADE



Üye  
Prof. Dr. İlkay KARACA




Üye  
Prof. Dr. Ramazan AKGÜN



Üye  
Doç. Dr. Yunus Emre YILDIRIR



Üye  
Yrd. Doç. Dr. Fulya ŞAHİN



Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Doç. Dr. Necati ÖZDEMİR

.....

**Bu tez çalışması Türkiye Bilimsel Ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) tarafından 2214-A Yurtdışı Doktora Sırası Araştırma Burs Programı ile desteklenmiştir.**

## ÖZET

**LİNEER OLMAYAN FOURIER TABANLI YAKLAŞIM  
DOKTORA TEZİ  
HATİCE ASLAN  
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI  
(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. ALİ GÜVEN)  
(EŞ DANIŞMAN: PROF. DR. MOURAD E. H. ISMAIL)  
BALIKESİR, ARALIK - 2016**

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm, Fourier serileri ve lineer operatörler ile yaklaşım teorisi ve bu teorilerin gelişimi ile ilgili bir kronolojik bilgi içermektedir.

İkinci bölümde bu çalışmada kullanılan temel tanım ve teoremler ile gerekli eşitsizlikler verilmiştir.

Üçüncü bölümde önce lineer olmayan Fourier tabanlı seriler tanıtılmıştır. Sonra bu serilerin kısmi toplamlarının ve Cesàro ortalamalarının yakınsaklığı incelenmiştir. Ayrıca lineer olmayan Fourier tabanlı serilerin kısmi toplamlarının, genelleştirilmiş de la Vallée Poussin ortalamalarının ve Cesàro ortalamalarının düzgün norm ve Hölder normunda yaklaşım problemleri çalışılmıştır.

Dördüncü bölümde yeni bir  $\{T_\lambda(f, \cdot)\}$  pozitif lineer operatörler ailesi tanımlanmış, bu operatörlerin bazı yaklaşım özellikleri incelenmiş ve Voronovskaya tipi yaklaşım teoremi verilmiştir. Ayrıca derecesi  $N$ 'yi aşmayan polinomlar uzayında sınırlandırılmış  $T_\lambda(f, x)$  operatörünün ve kuadratik değişkenli genelleştirilmiş üstel operatörlerin özdeğerleri ve özfonksiyonları incelenmiştir.

Son bölüm bu tezde elde edilen sonuçların özeti, açık problemler ve önerilerden oluşmaktadır.

**ANAHTAR KELİMELER:** Bernstein tipi operatör, genelleştirilmiş de la Vallée Poussin ortalaması, Hölder sınıfı, Lineer olmayan Fourier tabanlı seriler, özdeğer, üstel operatör.

## ABSTRACT

**APPROXIMATION BY NONLINEAR FOURIER BASIS  
PH. D. THESIS  
HATİCE ASLAN  
BALIKESİR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE  
MATHEMATICS  
(SUPERVISOR: PROF. DR. ALİ GÜVEN)  
(CO-SUPERVISOR: PROF. DR. MOURAD E. H. ISMAIL)  
BALIKESİR, DECEMBER 2016**

This thesis consists of five chapters.

The first chapter includes some chronological information about approximation theory and linear operator theory and their progress.

In second chapter some basic definitions, theorems and inequalities which are used are given.

In third chapter, firstly we define Fourier series by nonlinear basis. Later we give convergence of partial sums and Cesàro means of Fourier series by nonlinear basis. Furthermore approximation problems for Cesàro means, generalized de la Vallée Poussin means and for partial sums of nonlinear Fourier series are investigated in uniform and Hölder norms.

In fourth chapter a new positive linear operator family  $\{T_\lambda(f, x)\}$  is introduced and some approximation properties, Voronovskaya-type theorem is given for this family. Additionally eigenvalues and eigenfunctions of the restriction of  $T_\lambda(f, x)$  operators and general exponential operators with quadratic variance to the space of polynomials of degree at most  $N$  are investigated.

Last chapter provides the summary of all results obtained in this thesis and suggests open problems for next studies.

**KEYWORDS:** Bernstein type operator, generalized de la Vallée Poussin mean, Hölder class, series with nonlinear basis, Eigenvalue, Exponential operator.

# İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
İÇİNDEKİLER.....	iii
SEMBOL LİSTESİ.....	iv
ÖNSÖZ.....	v
1. GİRİŞ.....	1
2. ÖN BİLGİLER.....	6
2.1 Bazı Fonksiyon Sınıfları ve Önemli Tanımlar.....	6
2.2 Lineer ve Lineer olmayan Fourier Tabanlı Seriler.....	10
2.3 Pozitif Lineer Operatörler.....	17
3. LİNEER OLMAYAN FOURIER TABANLI YAKLAŞIM.....	22
3.1 Lineer Olmayan Fourier Tabanlı Seriler.....	22
3.2 Lineer Olmayan Fourier Tabanlı Serilerin Yakınsaklığı.....	24
3.3 Lineer Olmayan Fourier Tabanlı Serilerin Cesàro Toplanabilirliği.....	36
3.4 Lineer Olmayan Fourier Tabanlı Serilerin Genelleştirilmiş de la Vallée Poussin Ortalaması ile Yaklaşım.....	42
3.5 Lineer Olmayan Fourier Tabanlı Serilerin Kısmi Toplamları ile Yaklaşım.....	49
4. BERNSTEIN TİPİ OPERATÖR.....	51
4.1 $T_\lambda$ Operatörünün Yaklaşım Özellikleri.....	51
4.2 $T_\lambda$ Operatörünün Yaklaşım Hızı.....	58
4.3 Voronovskaya Tipi Teorem.....	66
4.4 Bernstein Operatörünün Özyapısı.....	68
4.5 $T_\lambda$ Operatörünün Özyapısı.....	70
4.6 Üstel Operatörlerin Özyapısı.....	76
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	77
6. KAYNAKLAR.....	79

## SEMBOL LİSTESİ

<u>Simge</u>	<u>Tanımı</u>
$E_n(f)_X$	$X$ uzayında en iyi yaklaşım
$\tau^n$	Derecesi $n$ 'yi aşmayan trigonometrik polinomların sınıfı
$E_n^a(f)_X$	$X$ uzayında $\tau_a^n$ 'nin elemanları ile en iyi yaklaşım
$\tau_n^a$	Derecesi $n$ 'yi aşmayan lineer olmayan trigonometrik polinomların sınıfı
$\mathbb{Z}, \mathbb{N}$	Tam sayılar, Pozitif tam sayılar
$\mathbb{R}, \mathbb{R}_+$	Reel sayılar kümesi, Pozitif reel sayılar kümesi
$\Pi$	Birim çember veya $[0, 2\pi]$
$C(\Pi)$	$\mathbb{R}$ üzerinde $2\pi$ -periyotlu sürekli fonksiyonların kümesi
$L_p(\Pi)$	$\Pi$ üzerinde $p$ . dereceden integrallenebilen fonksiyonlar
$\omega_k(f, \cdot)_p$	$L_p(\Pi)$ uzayında $k$ . derece düzgünlük modülü
$\Delta_h^r f$	$f$ fonksiyonunun $h$ adımlı $r$ . farkı
$H_p^\alpha$	$L_p$ uzayında Hölder sınıfı
$H^\alpha$	Sürekli fonksiyonların Hölder uzayı
$K_r(f, \cdot)_p$	$L_p \in [a, b]$ için $r$ . derece Peetre K-fonksiyoneli
$C^r[a, b]$	$[a, b]$ aralığında $r$ . dereceden sürekli diferensiyellenebilir fonksiyon uzayı
$D_n$	Dirichlet çekirdeği
$K_n$	Fejér çekirdeği
$\Gamma$	Gamma fonksiyonu
$B$	Beta fonksiyonu
$R_\lambda(T)$	$T$ operatörünün resolvent operatörü
$S_{k,j}$	1. Stirling sayısı
$\mathcal{S}_{k,j}$	2. Stirling sayısı
$(x)_k$	Pochhammer sembolü
$\pi_N$	Derecesi en fazla $N$ olan cebirsel polinomların uzayı
$AC(\Pi)$	Mutlak sürekli fonksiyonların uzayı
$W_p^r(\Pi)$	Sobolev uzayı



## **ÖNSÖZ**

Tez konumu veren, yöneten çalışmalarında bana gerekli imkanları sağlayan, destek ve yardımlarını esirgemeyen çok değerli danışmanlarım Prof. Dr. Mourad E. H. ISMAIL ve Prof. Dr. Ali GÜVEN'e, ayrıca her zaman ilgi gösteren çok değerli sayın hocam Prof. Dr. Daniyal M. İSRAFİLZADE'ye en içten teşekkürlerimi sunarım. Bu tez çalışmasında "2214-A Yurtdışı Doktora Sırası Araştırma Bursu Programı" kapsamında verdiği destekten dolayı Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK)'a teşekkür ederim. Son olarak, hayatım boyunca gösterdikleri destek ve anlayıştan dolayı annem, babam ve biricik kardeşime teşekkürü bir borç bilirim.

**Balıkesir, 2016**

**Hatice ASLAN**

# 1. GİRİŞ

## 1.1 Lineer Olmayan Fourier Tabanlı Yaklaşım

Yaklaşım teorisi; nitelikleri daha az bilinen (çalışılması zor olan) bir fonksiyona, nitelikleri daha iyi bilinen (çalışılması kolay olan, örneğin polinomlar gibi) ve daha basit yapıda olan fonksiyonlarla yaklaşım sağlanabilir mi ve bu yaklaşım en iyi nasıl elde edilir sorularına cevap arayan çalışmaları kapsamaktadır.

Yaklaşım teorisinde Fourier serileri oldukça önemlidir. Matematikte, Fourier serileri bir periyodik fonksiyonu basit dalgalı fonksiyonların (sinüs ve kosinüs) toplamına çevirir, bir başka deyişle kompleks üstel fonksiyona,  $e^{ikx}$ 'li forma çevirir. Fourier serileri Fourier analizinin bir koludur.

Fourier serileri 1768-1830'da Joseph Fourier tarafından bir metal çubuk veya levhadaki ısı denklemlerinin çözümü için kullanılmıştır. Bir ısı denklemi, parçalı bir diferansiyel denklemdir. Fourier'in bu çalışmasından önce, bu tür ısı denklemlerine genel bir çözüm yoktu. Her ne kadar parçalı yaklaşımlar olsa da yeterli değildir. Çünkü bu yaklaşımlar ısı dağılımının basit denklemlere göre dağıldığını varsayarak probleme yaklaşıyordu. (Örneğin: Eğer ısı kaynağı bir sinüs veya kosinüs denklemiyse...). Fourier'in düşüncesi basit denklemleri (sin ve cos) katsayılarla üst üste ekleyerek karmaşık ısı kaynağı kombinasyonları oluşturmaktı. Bu yüzden denklemlerin belli katsayılarla toplamı Fourier Serisi diye adlandırılır.

Her ne kadar başlarda bu yöntem ısı problemlerinin çözümü için uygulanmışsa da daha sonraları görülmektedir ki çok geniş bir perspektifteki fonksiyonlara

aynı yöntem uygulanabilmektedir. Basit örneklerin anlaşılması teoremin modern halinin kullanılmasıyla epey basitleşmiştir.

Fourier serileri elektrik mühendisliğinde, titreşim analizinde, akustiklerde, sinyal işleminde, resim işleminde, kuantum mekaniğinde ve ekonomi hesaplamaları gibi birçok alanda kullanılmaktadır. Fourier tabanları sabit sinyal işleminde kullanılan çok güçlü bir araçtır. Son yıllarda lineer olmayan ve sabit olmayan sinyal işleminde çok gelişmiştir. Lineer olmayan Fourier tabanı ailesi klasik Fourier tabanının genişletilmiş bir ailesi olarak düşünüldüğünde sinyal işleme ve oluşturmada kendine geniş bir uygulama sahası bulmuştur.

Bu tezin üçüncü kısmında, yaklaşım teorisinde çokça çalışılan Cesàro ve genelleştirilmiş de la Vallée Poussin gibi toplanabilme metotları ele alınacak ve bunlar lineer olmayan tabana genişletilecektir. Elde edilen tüm sonuçlar çeşitli fonksiyon uzaylarına taşınacak ve böylece daha genel tabanlı yaklaşıma geçilerek bazı fonksiyon uzaylarının elemanlarının özellikleri incelenecektir.

Bunun için öncelikle toplanabilme teorisi hakkında kısa bir bilgi hatırlatalım. Augustin Louis Cauchy 1821 yılında yayınladığı *Analyse Algébrique* adlı çalışmasında, yakınsak bir dizinin aritmetik ortalamasının da yakınsak ve dizi ile aynı limite sahip olduğunu ispatlayarak toplanabilme teorisinin temelini atan ilk matematikçilerden biri olmuştur. Ancak daha önce Leibniz, Newton ve çağdaşları sonsuz dizi ve serilerle ilgilenmişlerdir. Özellikle sonsuz serileri için yapılan hesapların doğal bir sonucu gibi görmüşlerdir. Bu görüşün sonucu olarak, James Bernoulli 1696 yılında

$$1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1 - x}$$

bağıntısını kullanmıştır. Daha sonra 18. yüzyılın ortalarında Leonhard Euler, bu

eşitlikte  $x = -1$  alarak, bir paradoks olduğunu kabul ettiği şu eşitliği yazmıştır:

$$1 - 1 + 1 + \dots = \frac{1}{2}$$

Buna yönelik titiz bir açıklama çok sonraları yapılabildiği. Ernesto Cesàro, 1890'dan itibaren Euler'in girişimlerine yeni yorumlar getirecek şekilde, ıraksak serilere bir toplam karşılık getirmek için yöntemler araştırmışlardır. Yakınsaklık kavramının aydınlatılmasından çok önce sezgisel olarak bulunan bu sonuçlar yakınsaklık tanımından ve Cauchy'nin yukarıdaki teoreminden sonra anlam kazanmış ve böylece toplanabilme teorisinin temelleri atılmıştır. 1890 yılında E. Cesàro  $\mathcal{C}_1$  yakınsaklık kavramını vermiştir. Buna göre bir serinin kısmi toplam dizisi olan  $(S_n)$  dizisinin aritmetik ortalaması, bir  $L$  değerine yakınsak ise  $(S_n)$  dizisi  $L$  değerine  $\mathcal{C}_1$  yakınsaktır veya serinin kendisi,  $L$  değerine Cesàro toplanabilir denir.  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$  serisinin kısmi toplam dizisi olan  $(S_n) = \left(\frac{1}{2}[1 + (-1)^n]\right)$  dizisi, yakınsak olmadığı halde aritmetik ortalaması  $1/2$  değerine yakınsaktır. Bu sonucun Euler tarafından verilen sonuç ile aynı olduğu görülmüş ve ıraksak seriler ile ilgili çalışmalar devam etmiştir. Buradan da anlaşılacağı gibi toplanabilme, ıraksak serilerin incelenmesinde ıraksak seriye toplam karşılık getirme fikridir. Temel amaç, yakınsak olmayan bir diziye bir limit karşılık getirmektir.

## 1.2 Lineer Pozitif Operatörler

Uygulamalı matematik ve fonksiyonel analizin arakesitinde yer alan araştırma alanlarından biri de lineer pozitif operatörlerle yaklaşım konusudur ve matematiğin birçok dalıyla ilişkilidir.

$f$ ,  $[0, 1]$  kapalı aralığı üzerinde tanımlı reel değerli bir fonksiyon olsun.  $f$  fonksiyonunun  $n$ . *Bernstein operatörü*  $B_n(f)$

$$p_{n,k}(x) := \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n$$

olmak üzere  $n \in \mathbb{N}$  için

$$B_n(f, x) := \sum_{k=0}^n p_{n,k}(x) f\left(\frac{k}{n}\right), \quad x \in [0, 1],$$

biçiminde tanımlanır.

Alman matematikçi Weierstrass sonlu aralıkta sürekli olan her fonksiyona bu aralıkta yakınsayan bir polinomun varlığını ispatlamıştır [1]. 1912'de S. N. Bernstein, Weierstrass yaklaşım teoreminin ispatını verirken Bernstein polinomlarını tanıtmıştır [2].

Bernstein, Bernstein tipi polinomlar ve analizin çeşitli dallarında, örneğin konveks ve nümerik analiz, genel pozitiflik ve monoton operatör teorisinde yoğun olarak ele almıştır. Bernstein polinomlarının temel kavramları ve bunların genelleştirmeleri [3], [4], [5], [6], [7], [8] kaynaklarında bulunabilir.

Tezin dördüncü bölümünde, Bernstein tipi yeni bir operatör tanımlanmış ve bu operatörün 1. ve 2. süreklilik modülü ve Peetre K-fonksiyoneli ile yaklaşımın derecesi incelenip, ek olarak Voronovskaya tipi teorem verilmiştir. Ayrıca yeni operatörümüzün  $\mathcal{C}$  üzerindeki  $N$ -dereceli polinomların  $(N+1)$ -boyutlu özdeğer ve özfonksiyonları belirlenmiştir. Ayrıca,  $T_\lambda$  operatörünün özdeğerleri ve spektral tekilliği incelenmiştir. Bunların dışında, Bernstein operatörünün özyapısı da incelenmiştir.

Ayrıca üstel operatörler de çalışılmıştır. Önceleri May [9] makalesinde  $p$  polinomunun en çok 2. dereceden polinom olduğu durumu ele almış ve Szász, Baskakov, Gauss-Weierstrass, Bernstein (polinomları) operatörlerinin sırasıyla  $p(t) = t$ ,  $t(1+t)$ ,  $t(1-t)$ ,  $1$ ,  $t^2$  durumları olduğunu göstermiştir.  $p(t) = 1+t^2$  durumundaki genelleştirilmiş operatör daha sonraları May ve İsmail

tarafından [10] makalesinde incelenmiştir. Üstel operatörler 1978'de [10] makalesinde tanımlanmışlardır. Daha sonra Morris [11]'de, kuadratik değişkenli doğal üstel dağılımın ailesini tanıtmıştır. Bunlar C. P. May'in makalesi olan [9]'daki  $W$  ile aynıdır. Bunun için  $p(t) = 1 + t^2$  ile değişmeli olan IM operatörü tanımlanır.

Son olarak da, sabit bir  $N$  için derecesi en fazla  $N$  olan kuadratik değişkenli genelleştirilmiş üstel bir operatörün özdeğerlerini inceleyecek ve özdeğerlerinin sadece  $p(t)$  polinomundaki  $t^2$ 'nin katsayısına bağlı olduğunu göreceğiz. Bu şaşırtıcıdır. Çünkü bu Baskakov, Post-Widder ve Ismail-May operatörlerinin özdeğerlerinin aynı olduğunu gösterir. Benzer olarak Szász ve Gauss-Weierstrass operatörlerinin özdeğerleri de aynı olur.

## 2. ÖNBİLGİLER

### 2.1 Bazı Fonksiyon Sınıfları ve Yardımcı Tanımlar

$\mathbb{R}$  tüm reel sayılar ve  $\mathbb{Z}$  tam sayılar kümesini göstermek üzere  $\Pi := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  olsun.  $\mathbb{N}$  tüm pozitif sayıların kümesi ve  $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$  olsun.  $\mathcal{C}(\Pi)$ ,  $\Pi$  üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonların kümesi olmak üzere,  $\mathcal{C}(\Pi)$  üzerindeki norm

$$\|f\|_\infty := \sup_{t \in \Pi} |f(t)|$$

şeklinde tanımlıdır.  $1 \leq p < \infty$  olmak üzere  $L^p(\Pi)$ ,  $\Pi$  üzerinde  $p$ . dereceden Lebesgue integrallenebilen fonksiyonları gösterebilir ve  $L^p(\Pi)$  üzerindeki norm

$$\|f\|_p := \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\Pi} |f(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

şeklinde gösterilebilir. Gösterimde kolaylık adına iki kümeyi aşağıdaki biçimde gösterilebilir:

$$X^p(\Pi) := \begin{cases} L^p(\Pi), & 1 \leq p < \infty; \\ \mathcal{C}(\Pi), & p = \infty. \end{cases}$$

Bir  $f \in X^p(\Pi)$  fonksiyonuna  $X^p(\Pi)$ 'nin bir alt uzayının fonksiyonları ile yapılan yaklaşımın hatasını tahmin etme bir klasik bir yaklaşım problemidir. Tipik bir yaklaşım uzayı derecesi  $n$ 'yi aşmayan az trigonometrik polinomların uzayıdır. Bu uzay  $\mathcal{T}_n := \text{span}\{e^{ikt} : |k| \leq n\}$  biçiminde gösterilebilir. Bu durumda  $\{e^{ikt} : k \in \mathbb{Z}\}$  kümesine *Fourier tabanı* denir.

$f \in X^p(\Pi)$  fonksiyonuna  $\mathcal{T}_n$  alt uzayının elemanlarıyla ile yapılan *en iyi yaklaşım*

$$E_n(f)_p := \inf_{T \in \mathcal{T}_n} \|f - T\|_p$$

biçiminde tanımlanır.

$1 \leq p \leq \infty$  olmak üzere, bir  $f \in X^p(\Pi)$  yaklaşımlarının derecelerini belirtmek için kullanılan önemli diğer bir kavram düzgünlük modülüdür.

**2.1.1 Tanım:**  $f \in X^p[a, b]$  için  $1 \leq p \leq \infty$  olmak üzere  $f$  fonksiyonunun *süreklilik modülü*

$$\omega(f, t)_p := \sup_{0 \leq h \leq t} \| f(\cdot + h) - f(\cdot) \|_p$$

şeklinde tanımlıdır.

Süreklilik modülü birçok özelliğe sahip olmakla birlikte bu tezde özellikle  $\delta > 0$  ve  $\mu > 0$  olmak üzere,  $[a, b]$  aralığında sınırlı bir fonksiyon için iyi bilinen bir özellik olan

$$\omega(f, \mu\delta) \leq (1 + \mu)\omega(f, \delta) \quad (2.1)$$

özelligi kullanılacaktır [12].

**2.1.2 Tanım:**  $r \in \mathbb{N}$  olmak üzere,

$$\Delta_h^r f(x) := \sum_{k=0}^r (-1)^{r-k} \binom{r}{k} f(x + kh)$$

ifadesine  $f$  fonksiyonunun  $h$  adımlı  $r$ . farkı denir. Bu durumda

$$\Delta_h^1 f(x) := f(x + kh) - f(x) \quad \Delta_h^r f(x) := \Delta_h^1 (\Delta_h^{r-1} f)(x), \quad r \geq 2 \quad (2.2)$$

gerçeklenir [12].

**2.1.3 Tanım:**  $f \in X^p[a, b]$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $r \in \mathbb{N}$  olmak üzere  $f$  fonksiyonunun  $r$ . derece düzgünlük modülü,



$$\omega_r(f, t)_p := \sup_{0 \leq h \leq t} \|\Delta_h^r f\|_p$$

şeklinde tanımlıdır [12].

$f \in X^p[a, b]$  olmak üzere,  $\omega_1(f, t)_p = \omega(f, t)_p$  olduğu açıktır. Yani, 1. derece düzgünlük modülü süreklilik modülüdür.

İkinci derece düzgünlük modülü ise  $f \in C[a, b]$  için  $r \in \mathbb{N}$  ve  $r$ . dereceden sürekli diferensiyellenebilir fonksiyonların kümesini  $C^r[a, b]$  olmak üzere  $f \in C^r[a, b]$  için aşağıdaki biçimde tanımlanır ve *Zygmund modülü* olarak bilinir.

$$\omega_2(f, \delta) := \sup_{0 \leq h \leq \delta} \sup_{0 \leq x \leq 1-2h} \{ |f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)| \} \quad (2.3)$$

Süreklilik ve düzgünlük modülü kavramları  $X^p(\Pi)$  uzayı içinde aynı şekilde tanımlanır.

$X_p(\Pi)$  uzayı gibi bu tez çalışması için önemli olan diğer bir Banach uzayı 1975 yılında Prösdorff tarafından  $2\pi$ -periyotlu sürekli fonksiyonların bir alt uzayı olarak ele alınmıştır. Bu uzay Hölder uzayıdır ve aşağıda tanımı verilmiştir.

**2.1.4 Tanım:**  $1 \leq p \leq \infty$  ve  $0 < \alpha \leq 1$  olmak üzere *Hölder sınıfı*

$$H_p^\alpha := \left\{ f \in X^p : \sup_{t>0} \{ t^\alpha \omega(f, t)_p \} < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır [12].

$p = \infty$  durumunda  $H_\infty^\alpha$  yerine sadece  $H^\alpha$  yazılır. Buradan  $f \in \mathcal{C}(\Pi)$  fonksiyonunun  $H^\alpha$  Hölder sınıfına ait olması için gerek ve yeter şart

$$|f(x) - f(y)| \leq K |x - y|^\alpha \quad (2.4)$$

olacak biçimde bir  $K > 0$  sayısının bulunması olur.

$H^\alpha$  uzayı  $x \neq y$  için,

$$\Delta^\alpha f(x, y) = \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}, \Delta^0 f(x, y) = 0$$

ve  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x)|$  olmak üzere

$$\|f\|_\alpha = \|f\|_\infty + \sup_{x \neq y} \Delta^\alpha f(x, y) \quad (2.5)$$

biçiminde tanımlı  $\|\cdot\|_\alpha$  normu ile bir Banach uzayıdır [16].

Yaklaşım teorisinde yaklaşım oranını tahmin etmek için, aşağıda tanımlayacağımız *Peetre K-fonksiyonelinden* yararlanılır.

**2.1.5 Tanım:**  $f \in X^p[a, b]$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  ve  $t \geq 0$ ,  $r \geq 1$ ,  $r \in \mathbb{N}$  için  $r$ . *derece Peetre K-fonksiyoneli*

$$K_r(f, t)_p := \inf\{\|f - g\|_p + t \|g\|_p : g \in \mathcal{W}_p^{(r)}[a, b]\}$$

biçiminde tanımlanır [13].

$r = 2$  durumunda  $C^2[a, b]$  nin elemanları  $f'' \in C[a, b]$  biçimindeki fonksiyonlar olacaktır. Bu durumda  $C^2[a, b]$  uzayı üzerindeki norm

$$\|f\|_{C^2[a, b]} = \|f\|_{C[a, b]} + \|f'\|_{C[a, b]} + \|f''\|_{C[a, b]}$$

ve Peetre K-fonksiyoneli [14, 15]

$$K_2(f, \delta) = \inf_{g \in C^2[a, b]} \{\|f - g\|_{C[a, b]} + \delta \|g\|_{C^2[a, b]}\} \quad (2.6)$$

biçiminde tanımlanır.

**2.1.1 Teorem:**  $1 \leq p \leq \infty$  olmak üzere her  $f \in L^p[a, b]$  için

$$C_1 \omega_r(f, t)_p \leq K_r(f, t^r)_p \leq C_2 \omega_r(f, t)_p, \quad t > 0$$

olacak şekilde sadece  $r$ 'ye bağlı  $C_1, C_2 > 0$  sabitleri vardır [14].

**2.1.2 Teorem:**  $1 \leq p \leq \infty$  olmak üzere her  $f \in L^p[a, b]$  ve  $t > 0$  için

$$\begin{aligned} C^{-1} (\min(1, t^r) \|f\|_p + \omega_r(f, t)_p) &\leq K_r(f, t^r)_p \\ &\leq C (\min(1, t^r) \|f\|_p + \omega_r(f, t)_p) \end{aligned}$$

olacak şekilde sadece  $r$ 'ye bağlı  $C_1, C_2 > 0$  sabitleri vardır [14].

## 2.2 Lineer ve Lineer Olmayan Fourier Tabanlı Seriler

Bir  $f \in L^1(\Pi)$  için,

$$a_k = a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt, \quad k = 0, 1, \dots,$$

$$b_k = b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt, \quad k = 1, 2, \dots$$

olmak üzere

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]$$

trigonometrik serisine  $f$  fonksiyonunun *Fourier serisi* denir.

**2.2.1 Tanım:**  $n \in \mathbb{N}$  ve  $t \in \mathbb{R}$  olsun.

$$D_n(t) := \sum_{k=-n}^n e^{ikt}$$

biçiminde tanımlanan  $D_n$  fonksiyonuna  $n$ -mertebeli *Dirichlet çekirdeği* denir ve  $D_n$  fonksiyonu

$$D_n(t) := 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kt)$$

biçiminde yazılabilir. Her  $n = 0, 1, 2, \dots$  için  $D_n$  fonksiyonu reel değerli,  $2\pi$ -periyotlu çift bir fonksiyondur.  $n = 0, 1, 2, \dots$  değerleri için  $D_n$  hem pozitif hem de negatif değerler alabilir [12].

**2.2.1 Teorem:** Dirichlet çekirdeğinin özellikleri aşağıdaki gibidir [12, 17].

i)  $n = 0, 1, \dots$  için,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = 1,$$

ii)  $n = 0, 1, \dots$  için,

$$|D_n(t)| \leq 2n + 1,$$

iii)  $t \neq 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$  için,

$$D_n(t) = \frac{\sin((2n+1)\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})} \quad \text{ve} \quad D_n(2k\pi) = 2n + 1,$$

iv)  $0 < |t| < \pi$  için,

$$|D_n(t)| \leq \frac{\pi}{|t|}, \quad n = 0, 1, \dots$$

**2.2.2 Tanım:**  $D_n(t)$ ,  $n$ -mertebeli Dirichlet çekirdeği olmak üzere,

$$\Lambda_n := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |D_n(t)| dt$$

ifadesine *Lebesgue sabiti* denir [18].

**2.2.2 Teorem:**  $n \in \mathbb{N}$  ve  $|r_n| \leq 3$  olsun. Bu durumda

$$\Lambda_n := \frac{4}{\pi^2} \log n + r_n$$

eşitliği sağlanır [18].

### 2.2.3 Tanım:

$$K_n(t) := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(t), n = 0, 1, \dots$$

biçiminde tanımlı  $K_n$  fonksiyonuna *n-mertebeli Fejér çekirdeği* denir ve

$$K_n(t) = 1 + 2 \sum_{k=-n}^n \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) e^{ikt}, t \neq 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

biçiminde yazılabilir. Her  $n = 0, 1, 2, \dots$  için  $K_n$  fonksiyonu reel değerli,  $2\pi$ -periyotlu ve pozitif çift bir fonksiyondur [12, 17].

**2.2.3 Teorem:** Fejér çekirdeğinin özellikleri aşağıdaki gibidir [12, 17].

(i)  $n = 0, 1, \dots$  için,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) dt = 1,$$

(ii)  $n = 0, 1, \dots$  için,

$$|K_n(t)| \leq n+1,$$

(iii)  $t \neq 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$  için,

$$K_n(t) = \frac{2}{n+1} \left[ \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2\sin(\frac{t}{2})} \right]^2, \quad K_n(2k\pi) = n+1,$$

(iv)  $0 < \delta < \pi$  için,

$$\sup_{\delta < |t| < \pi} |K_n(t)| \leq \frac{1}{(n+1)\sin^2(\frac{\delta}{2})},$$

(v)  $n = 0, 1, \dots$  için,

$$|K_n(t)| \leq \frac{1}{n+1} \frac{\pi^2}{t^2}$$

olur.

Lineer olmayan Fourier tabanlarının ailesi Fourier tabanlarının bir genişlemesidir ve bu genişleme için aşağıda tanımını vereceğimiz durum fonksiyonu kullanılır.

**2.2.4 Tanım:** Keyfi  $a = |a| e^{it_a}$ ,  $|a| < 1$  kompleks sayısı için

$$\tau_a = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

Mobiüs dönüşümünün radyal sınır değerleri yardımıyla

$$e^{i\theta_a(t)} := \tau_a(e^{it}) = \frac{e^{it} - a}{1 - \bar{a}e^{it}}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona *lineer olmayan durum fonksiyonu* denir ve " $\theta_a(t)$ " ile gösterilir.

Kolayca gösterilebilir ki durum fonksiyonu

$$\theta_a(t + 2\pi) = \theta_a(t) + 2\pi \quad (2.7)$$

özelliğini sağlar. Durum fonksiyonunun türevi

$$\theta'_a(t) = \frac{1 - |a|^2}{1 - 2|a| \cos(t - t_a) + |a|^2}$$

Poisson çekirdeği  $p_a(t)$ 'dir. Buradan  $\theta_a(t)$  kesin monoton artan fonksiyon olur ki bu  $\cos \theta_a(t)$ 'yi özel tek bileşenli bir sinyal yapar. Üstelik bu türev

$$0 < \frac{1 - |a|}{1 + |a|} \leq \theta'_a(t) \leq \frac{1 + |a|}{1 - |a|} \quad (2.8)$$

özelliğine sahiptir.

Keyfi sonlu terimleri sıfır olmayan bir  $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  dizisi için

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\Pi} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx} \right|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\Pi} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ik\theta_a(x)} \right|^2 \theta'_a(t) dt$$

olur. Bu özellik (2.8) ile birlikte düşünüldüğünde  $\{e^{in\theta_a(t)}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  lineer olmayan Fourier tabanı  $L^2(\Pi)$  için  $\sqrt{\frac{1+|a|}{1-|a|}}$  üst ve  $\sqrt{\frac{1-|a|}{1+|a|}}$  alt sınırı ile bir Riesz tabanı oluşturur. Burada  $a = 0$  olduğunda  $\{e^{in\theta_a(t)}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  Fourier tabanıdır [19].

$\tau_a^n$ , derecesi  $n$ 'e eşit veya  $n$ 'den küçük lineer olmayan trigonometrik polinomların uzayı aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\tau_a^n := \text{span}\{e^{in\theta_a(t)} : |k| \leq n\}$$

$f \in L^p(\Pi)$  için  $1 \leq p \leq \infty$  olmak üzere lineer olmayan Fourier tabanları  $\{e^{in\theta_a(t)}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  ile en iyi yaklaşım

$$E_n^a(f)_p := \inf_{T \in \tau_a^n} \|f - T\|_{L^p(\Pi)}$$

biçiminde gösterilir [19].

Bundan sonraki kısımda  $X^p(\Pi)$  uzayındaki fonksiyonlara  $\tau_a^n$  polinomları ile yaklaşım ile ilgili bazı düz ve ters teoremler verilecektir. Bunun için aşağıdaki lemmalar önemlidir.

**2.2.1 Lemma:**  $f \in C(\Pi)$  olsun. Bu durumda

$$E_n^a(f)_\infty = E_n(f \circ \theta_a^{-1})_\infty$$

olur [19].

**2.2.2 Lemma:**  $f \in C(\Pi)$  olsun. Bu durumda

$$\left(\frac{1-|a|}{2}\right) \omega(f, t)_\infty \leq \omega(f \circ \theta_a^{-1}, t)_\infty \leq \left(\frac{2}{1-|a|}\right) \omega(f, t)_\infty$$

olur [19].

**2.2.4 Teorem:**  $f \in C(\Pi)$  olsun. Bu durumda

$$E_n^a(f)_\infty \leq \left(\frac{24}{1-|a|}\right) \omega\left(f, \frac{1}{n}\right)_\infty$$

dir. Sonuç olarak  $0 < \alpha \leq 1$  olmak üzere  $f \in H^\alpha$  ise

$$E_n^a(f)_\infty \lesssim n^{-\alpha}$$

olur [19].

**2.2.5 Teorem:**  $r \in \mathbb{N}$  için  $\Pi$  üzerinde tanımlı  $r$ . dereceden sürekli diferensiyellenebilir fonksiyonların kümesini  $C^r(\Pi)$  ile gösterelim.  $0 < \alpha < 1$  olmak üzere  $f \in C^r(\Pi)$ ,  $r \in \mathbb{N}$  için  $f^{(r)} \in H^\alpha$  şartını sağlayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$E_n^a(f)_\infty \lesssim n^{-r-\alpha}$$

olur [19].

**2.2.6 Lemma:**  $1 \leq p < \infty$  olmak üzere  $f \in L^p(\Pi)$  olsun. Bu durumda

$$E_n^a(f)_p \asymp E_n(f \circ \theta_a^{-1})_p$$

olur [19].

Lemma 2.2.2'de keyfi bir  $f \in C(\Pi)$  için  $w(f \circ \theta_a^{-1}, t)_\infty$  ve  $w(f, t)_\infty$ 'nin denk olduğunu göstermiştik. Fakat  $1 \leq p < \infty$  olmak üzere keyfi bir  $f \in L^p(\Pi)$  için



$w(f \circ \theta_a^{-1}, t)_p$  ve  $w(f, t)_p$  arasında böyle bir denkleği direkt olarak çıkarmak neredeyse imkansızdır. Yine de klasik bir yaklaşım sonucunu olan aşağıda vereceğimiz sonucu kullanarak  $f \in H_p^\alpha$  olması için gerek ve yeter koşulun  $f \circ \theta_a^{-1} \in H_p^\alpha$  olması gerektiği ispatlanabilir.

$D := t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_0 + 2\pi$ ,  $\Pi$ 'yi  $I_k := [t_{k-1}, t_k)$ ,  $1 \leq k \leq N$  sonlu ayrık aralıklarına ayıran bir parçalanış olsun.  $\chi I_k$  karakteristik fonksiyon ve  $\delta_D := \max_{1 \leq k \leq N} |t_k - t_{k-1}|$  olmak üzere  $S(D) := \text{span}\{\chi I_k : 1 \leq k \leq N\}$  bu parçalanışa göre tüm parçalı sabit fonksiyonların uzayı olsun ve  $1 \leq p < \infty$  olmak üzere  $f \in L^p(\Pi)$  için

$$s(f, D)_p := \inf_{S \in S(D)} \|f - S\|_p$$

biçiminde gösterilsin.

**2.2.1 Sonuç:**  $0 < \alpha \leq 1$  olmak üzere  $f \in H_p^\alpha$  olması için gerek ve yeter şart keyfi bir  $D$  parçalanışı için  $s(f, D)_p = O(\delta_D^\alpha)$  olmasıdır [12, 20].

Bu sonuç aşağıdaki Lemma 2.2.4'ü verir.

**2.2.4 Lemma:**  $1 \leq p < \infty$  olmak üzere  $f \in L^p(\Pi)$  olsun. Bu durumda  $0 < \alpha \leq 1$  olmak üzere  $f \in H_p^\alpha$  olması için gerek ve yeter şart  $f \circ \theta_a^{-1} \in f \in H_p^\alpha$  olmasıdır [19].

**2.2.6 Teorem:**  $0 < \alpha \leq 1$  ve  $1 \leq p < \infty$  olmak üzere  $f \in H_p^\alpha$  olsun. Bu durumda

$$E_n^\alpha(f)_p \lesssim n^{-\alpha}$$

olur [19].

**2.2.7 Teorem:**  $1 \leq p < \infty$  olmak üzere  $f \in W^r L^p(\Pi)$ ,  $r \in \mathbb{N}$  ve  $0 < \alpha < 1$  için  $f^{(r)} \in H_p^\alpha$  şartını sağlayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$E_n^a(f)_p \lesssim n^{-r-\alpha}$$

olur [19].

**2.2.8 Teorem:**  $f \in C(\Pi)$  fonksiyonu  $0 < \alpha \leq 1$  olmak üzere  $r \in \mathbb{Z}_+$  için  $E_n^a(f)_\infty = \mathcal{O}(n^{-(r+\alpha)})$  koşulunu sağlasın. Bu durumda  $f \in C^r(\Pi)$  dir. Üstelik  $0 < \alpha < 1$  için  $f^{(r)} \in H^\alpha$  ve  $\alpha = 1$  için  $\omega(f^{(r)}, t)_\infty = \mathcal{O}(t | \ln t |)$  olur [19].

**2.2.9 Teorem:**  $1 \leq p < \infty$  olmak üzere  $f \in L^p(\Pi)$  olsun. Bu durumda  $0 < \alpha \leq 1$  olmak üzere  $r \in \mathbb{Z}_+$  için  $E_n^a(f)_p = \mathcal{O}(n^{-(r+\alpha)})$  ise  $f \in W^r L^p(\Pi)$  ve  $f^{(r)} \in H_p^\alpha$  olur [19].

### 2.3 Linear Pozitif Operatörler

**2.3.1 Tanım:**  $X$  ve  $Y$  reel değerli fonksiyonların iki lineer uzayı olsun.  $\forall f, g \in X$  ve  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  için

$$L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g)$$

koşulunu gerçekleyen  $L : X \rightarrow Y$  operatörüne *lineer operatör* adı verilir [21].

Eğer  $X$  uzayından alınan her  $f \geq 0$  için  $L(f) \geq 0$  koşulu gerçekleşiyorsa bu durumda  $L$  operatörüne *pozitif operatör* denir [21].

**2.3.1 Uyarı:**  $\mathcal{L}(X, Y) := \{L \mid L : X \rightarrow Y \text{ lineer operatör reel vektör uzaydır.}$   
 $L : X \rightarrow Y$  pozitif lineer operatör olmak üzere aşağıdaki özellikler gerçekleşir.

- (i)  $f, g \in X$  olmak üzere  $f \leq g$  ise  $L(f) \leq L(g)$ ,
- (ii)  $f \in X$  için  $f \leq g$  ise  $L(f) \leq L(|f|)$ .

**2.3.2 Tanım:**  $X$  ve  $Y$  lineer vektör uzayları ve  $L : X \rightarrow Y$  lineer operatör olsun.  $L$  operatörünün normu  $\|L\|$  ile gösterilir ve

$$\| L \| = \sup_{f \in X, \|f\|=1} \| Lf \|$$

olarak tanımlanır [21].

### 2.3.3 Tanım:

$$\phi_{n,s}(x) = L_n((t-x)^s; x), s = 0, 1, 2, \dots$$

ile tanımlanan ifadelere  $(L_n)$  operatör dizisinin *s. merkezi momentleri* denir [4].

**2.3.1 Teorem:**  $t \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$  olsun ve  $t^i$  test fonksiyonları  $e_i(t) = t^i$  biçiminde gösterilsin. Bu durumda  $L_n$  lineer operatör dizisi ve  $\alpha_n(x)$ ,  $\beta_n(x)$ ,  $\gamma_n(x)$ ,  $[a, b]$  aralığında düzgün olarak sıfıra yakınsayan diziler olmak üzere  $\forall x \in [a, b]$  için

$$L_n(e_0; x) = 1 + \alpha_n(x)$$

$$L_n(e_1; x) = x + \beta_n(x)$$

$$L_n(e_2; x) = x^2 + \gamma_n(x)$$

koşulları sağlanıyorsa  $L_n(f; x)$ ,  $[a, b]$  aralığı üzerinde  $f(x)$ 'e düzgün olarak yakınsar. Burada  $f$ ,  $[a, b]$  aralığında sürekli  $a$ 'da sağdan  $b$ 'de soldan sürekli ve  $\mathbb{R}$ 'de sınırlı bir fonksiyondur [21].

**2.3.2 Teorem(Lusin Teoremi):**  $1 \leq p < \infty$  olmak üzere her  $f \in L^p[a, b]$  olsun. Bu durumda her  $\varepsilon > 0$  için

$$\| f - \varphi \|_p < \varepsilon$$

olacak biçimde bir  $\varphi$  sürekli fonksiyonu vardır [22].

**2.3.4 Tanım:**  $X \neq \{0\}$  kompleks normlu bir uzay  $T : \mathcal{D}(T) \subset X \rightarrow X$  lineer bir operatör olsun.  $\lambda \in \mathbb{C}$  olmak üzere  $R_\lambda(T) = (T - \lambda I)^{-1}$  operatörüne *T'nin resolvent operatörü* denir [23].

**2.3.5 Tanım:**  $R_\lambda(T)$  operatörü mevcut, sınırlı ve tanım kümesi  $X$  uzayında yoğun ise,  $\lambda \in \mathbb{C}$  sayısına  $T$  operatörünün *regüler değeri* denir.  $T$  operatörünün regüler değerlerinden oluşan kümeye ise  $T$ 'nin *resolvent cümlesi* denir [23].

**2.3.6 Tanım:**  $R_\lambda(T)$  mevcut olmayacak şekildeki  $\lambda$  kompleks sayılarının cümlesine  $T$  operatörünün *diskret spektrumu ya da nokta spektrumu* adı verilir [23].

**2.3.7 Tanım:**  $R_\lambda(T)$  mevcut, sınırsız ve  $R_\lambda(T)$  operatörünün tanım kümesi  $X$  uzayında yoğun olacak şekildeki  $\lambda$  kompleks sayılarının kümesine  $T$  operatörünün *sürekli spektrumu* denir [23].

**2.3.8 Tanım:**  $X$  bir kompleks vektör uzay ve  $T : X \rightarrow X$  lineer bir operatör olsun.  $\lambda$  kompleks sayısı için  $Tx = \lambda x$  denkleminin aşikar olmayan bir  $x \in X$  çözümü varsa  $\lambda$  sayısına  $T$  operatörünün *özdeğeri* denir. Bu  $x$  çözümüne ise,  $T$  operatörünün özdeğerine karşılık gelen *özfonksiyonu* denir [23].

**2.3.9 Tanım:** Bir  $T$  operatörünün resolvent çekirdeğinin kutup noktası olup, sürekli spektrumda bulunan ve  $T$  operatörünün özdeğeri olmayan noktalara  $T$  operatörünün *spektral tekillikleri* adı verilir [24].

**2.3.10 Tanım:**  $0 < x < \infty$  olsun. Bu durumda  $x$  değerleri için

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

biçiminde tanımlanan integrale *2. tür Euler integrali* diğer adıyla *Gamma fonksiyonu* denir.  $x > 0$  için Gamma fonksiyonu iyi tanımlıdır [25].

**2.3.11 Tanım:**  $x > 0$  ve  $y > 0$  olsun. Bu durumda  $x$  ve  $y$  değerleri için

$$B(x, y) := \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

şeklinde tanımlanan integrale *1. tür Euler integrali* veya *Beta fonksiyonu* denir [25].

**2.3.12 Tanım:**

$x \in \mathbb{C}$  için  $n \in \mathbb{N}$  olmak üzere

$$(x)_n := x(x+1)\dots(x+n-1), \quad (x)_0 := 1$$

şeklinde tanımlanan  $(x)_n$  sembolüne Pochhammer sembolü denir [25].

Ayrıca Pochhammer sembolü  $x, v \in \mathbb{C}$  olmak üzere Gamma fonksiyonu kullanılarak

$$(x)_v = \frac{\Gamma(x+v)}{\Gamma(x)}$$

şeklinde de yazılabilir [25].

**2.3.13 Tanım:**  $k, j \in I$  olmak üzere

$$(x)_k = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} s(k, j) x^j$$

biçiminde tanımlanan  $s(k, j)$  sayısına *1.tür Stirling sayısı* ve

$$x^k = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} S(k, j) (x)_j,$$

biçiminde tanımlanan  $S(k, j)$  sayısına ise *2.tür Stirling sayısı* denir [25].

**2.3.14 Tanım:**  $W(\lambda, t, u)$  operatörün çekirdeği olmak üzere

$$\frac{\partial}{\partial t} W(\lambda, t, u) = \frac{\lambda}{p(t)} W(\lambda, t, u)[u - t],$$

genelleştirilmiş diferensiyel denklemini ve

$$\int_{\mathbb{R}} W(\lambda, t, u) du = 1$$

sınır koşulunu sağlayan

$$S_\lambda(f; t) = \int_{\mathbb{R}} W(\lambda, t, u) f(u) du,$$

biçiminde tanımlanan integral operatörüne  $S_\lambda$  *üstel operatörü* denir [11].

### 3. LİNEER OLMAYAN FOURIER TABANLI YAKLAŞIM

#### 3.1 Lineer Olmayan Fourier Tabanlı Seriler

**3.1.1 Tanım:**  $f \in L^1(\Pi)$  ve  $\theta_a(t)$  durum fonksiyonu olsun. Bu durumda

$$a_k = a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(k\theta_a(t)) p_a(t) dt, \quad k = 0, 1, \dots$$

ve

$$b_k = b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(k\theta_a(t)) p_a(t) dt, \quad k = 1, 2, \dots$$

olmak üzere

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\theta_a(x)) + b_k \sin(k\theta_a(x))]$$

biçiminde tanımlanan trigonometrik seriye  $f$  fonksiyonunun *lineer olmayan Fourier tabanlı serisi* denir ve

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\theta_a(x)) + b_k \sin(k\theta_a(x))]$$

biçiminde yazılır.  $f \in L^1(\Pi)$  fonksiyonunun *lineer olmayan Fourier tabanlı serisinin kompleks biçimi*,

$$c_k = c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ik\theta_a(t)} p_a(t) dt, \quad k \in \mathbb{Z}$$

olmak üzere

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\theta_a(x)}$$

şeklindedir.

**3.1.1 Teorem:**  $f, g \in L^1(\Pi)$  olsun. Bu durumda

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\theta_a(x)}, \quad g(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{ik\theta_a(x)}$$

ise

$$(f + g)(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} (c_k + d_k) e^{ik\theta_a(x)}$$

ve

$$(\alpha f)(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\alpha c_k) e^{ik\theta_a(x)}, \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

olur.

**İspat:** Tanımdan istenen sonuç kolayca elde edilir.  $\square$

**3.1.2 Teorem:**  $f, g \in L^1(\Pi)$  olsun. Bu durumda

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\theta_a(x)}, \quad g(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{ik\theta_a(x)}$$

ise  $(f * g)(x) \in L^1(\Pi)$  ve

$$(f * g)(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1 + |a|}{1 - |a|} \right) (c_k d_k) e^{ik\theta_a(x)}$$

olur.

**İspat:** İspat durum fonksiyonunun (2.8) özelliğinden faydalanılarak tamamlanır.



Sobolev uzayı

$$W_r^p(\Pi) = \{f \in X^p(\Pi) : f, \dots, f^{(r-1)} \in \mathcal{AC}(\Pi), f^{(r)} \in X^p(\Pi)\}$$

biçiminde tanımlanır.

**3.1.3 Teorem:**  $f \in W_1^p(\Pi)$  olsun. Bu durumda

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\theta_a(x)},$$

ise

$$f'(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1+|a|}{1-|a|} \right) (ikc_k) e^{ik\theta_a(x)}$$

olur.

**İspat:** Durum fonksiyonunun (2.8) özelliğinden direkt hesaplama ile elde edilir.

### 3.2 Lineer Olmayan Fourier Tabanlı Serilerin Noktasal Yakınsaklığı

$f \in L^1(\Pi)$  ve  $k \in \mathbb{Z}$  için

$$c_k = c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ik\theta_a(t)} p_a(t) dt,$$

olmak üzere

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\theta_a(x)}$$

olsun. Bu lineer olmayan Fourier tabanlı serisinin *kısmi toplamlar dizisi*  $S_n^a(f)$  ile gösterilir. Bu durumda  $F = f \circ \theta_a^{-1}$  olmak üzere

$$S_n^a(f)(x) = S_n(F)(\theta_a(x))$$

olur. Böylece kısmi toplamlar dizisi  $k \in \mathbb{Z}$  için

$$c_k = c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ik\theta_a(t)} p_a(t) dt,$$

olmak üzere

$$S_n^a(f)(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik\theta_a(x)}$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned} S_n^a(f)(x) &= \sum_{k=-n}^n \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ik\theta_a(t)} p_a(t) dt \right\} e^{ik\theta_a(x)} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left\{ \sum_{k=-n}^n e^{ik(\theta_a(x) - \theta_a(t))} \right\} p_a(t) dt \end{aligned}$$

olur. Buradan Dirichlet çekirdeğinin tanımı göz önüne alınacak olursa

$$S_n^a(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(\theta_a(x) - \theta_a(t)) p_a(t) dt$$

olur.  $D_n$  çift fonksiyon olduğundan,

$$\begin{aligned} S_n^a(f)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(\theta_a(t) - \theta_a(x)) p_a(t) dt, & (3.1) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_a(-\pi)}^{\theta_a(\pi)} F(u) D_n(u - \theta_a(x)) du, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_a(-\pi) - \theta_a(x)}^{\theta_a(\pi) - \theta_a(x)} F(y + \theta_a(x)) D_n(y) dy, \end{aligned}$$

olur. Şimdi  $\theta_a(x)$  durum fonksiyonunun periyodik olmasından da yararlanarak

(2.7) eşitliğinden

$$S_n^a(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_a(-\pi) - \theta_a(x)}^{\theta_a(-\pi) - \theta_a(x) + 2\pi} F(y + \theta_a(x)) D_n(y) dy,$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$S_n^a(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(y + \theta_a(x)) D_n(y) dy, \quad (3.2)$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} S_n^a(f)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 F(t + \theta_a(x)) D_n(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} F(t + \theta_a(x)) D_n(t) dt, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} F(\theta_a(x) - t) D_n(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} F(\theta_a(x) + t) D_n(t) dt, \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$S_n^a(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \{F(\theta_a(x) - t) + F(\theta_a(x) + t)\} D_n(t) dt \quad (3.3)$$

eşitliği ile ifade edilebilir.

**3.2.1 Lemma:**  $F := f \circ \theta_a^{-1}$  olsun. Bu durumda

- (i)  $f \in \mathcal{C}(\Pi)$  ise  $\|F\|_{\infty} = \|f\|_{\infty}$ ,
- (ii)  $f \in L^p(\Pi)$  ise  $\|F\|_p \leq \left(\frac{1+|a|}{1-|a|}\right)^{1/p} \|f\|_p$ ,

olur.

**İspat:** (i)  $f \in \mathcal{C}(\Pi)$  ve  $F := f \circ \theta_a^{-1}$  olsun. Bu durumda

$$\|f\|_{\infty} := \sup_{x \in \Pi} |f(x)| = \sup_{\theta_a(x) \in \Pi} |F(\theta_a(x))| = \|F\|_{\infty}$$

dır.

(ii)  $f \in L^p(\Pi)$  ve  $F := f \circ \theta_a^{-1}$  olsun. Bu durumda

$$\|f\|_p := \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\Pi} |f(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

dır. Böylece basit bir hesaplama

$$\| f \|_p = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\Pi} | F(\theta_a(t)) |^p \frac{p_a(t)}{p_a(t)} dt \right)^{1/p}$$

olur.  $\theta_a(t) = u$  denilirse ve durum fonksiyonunun (2.8) özelliğinden

$$\| f \|_p \geq \left( \frac{1 - |a|}{1 + |a|} \right)^{1/p} \frac{1}{2\pi} \int_{\Pi} | F(u) |^p du = \left( \frac{1 - |a|}{1 + |a|} \right)^{1/p} \| F \|_p$$

bulunur. Böylece istenen

$$\| F \|_p \leq \left( \frac{1 + |a|}{1 - |a|} \right)^{1/p} \| f \|_p$$

eşitsizliği elde edilir.  $\square$

**3.2.1 Teorem:**  $S_n^a : C(\Pi) \rightarrow C(\Pi)$ ,  $n = 0, 1, \dots$  lineer operatörlerinin dizisini göz önüne alalım. Bu durumda

$$\| S_n^a(f) \|_{\infty} \leq \Lambda_n \| f \|_{\infty}$$

olur.

**İspat:**  $S_n^a : C(\Pi) \rightarrow C(\Pi)$ ,  $n = 0, 1, \dots$  lineer dönüşümünü göz önüne alalım. Bu durumda

$$| S_n^a(f)(x) | = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\theta_a(x) + t) D_n(t) dt \right|$$

(3.2) eşitliği ve Lemma 3.2.1'den

$$\begin{aligned} | S_n^a(f)(x) | &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} | F(\theta_a(x) + t) | | D_n(t) | dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \| F \|_{\infty} | D_n(t) | dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \| f \|_{\infty} | D_n(t) | dt \end{aligned}$$

bulunur. Böylece Tanım 2.2.1'de verilen Dirichlet çekirdeği tanımından

$$\| S_n^a(f) \|_\infty \leq \Lambda_n \| f \|_\infty$$

elde edilir.  $\square$

**3.2.1 Sonuç:** Her  $f \in C(\Pi)$  için

$$\| f - S_n^a(f) \|_\infty \lesssim \log n E_n^a(f)$$

olur.

**İspat:** Kabul edelim ki  $f \in C(\Pi)$  için en iyi yaklaşım

$$E_n^a(f) = \| f - t_n^a \|_\infty$$

olsun. O zaman,

$$\begin{aligned} \| f - S_n^a(f) \|_\infty &= \| f - t_n^a + t_n^a - S_n^a(f) \|_\infty \\ &= \| f - t_n^a + S_n^a(f)(t_n^a - f) \|_\infty \\ &\leq \| f - t_n^a \|_\infty + \| S_n^a(f)(t_n^a - f) \|_\infty \\ &= E_n^a(f) + \| S_n^a(f) \|_\infty \| f - t_n^a \|_\infty \end{aligned}$$

olur. Böylece Teorem 3.2.1'den,

$$\| f - S_n^a(f) \|_\infty \leq (1 + \Lambda_n) E_n^a(f)$$

olur ve Teorem 2.2.2'den (Lebesgue Teoreminden)

$$\| f - S_n^a(f) \|_\infty \lesssim \log n E_n^a(f)$$

elde edilir.  $\square$

**3.2.2 Sonuç:**  $f \in C(\Pi)$  olsun. Bu durumda

$$\log nE_n^a(f) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

ise lineer olmayan tabandaki Fourier serisi  $f$  fonksiyonuna düzgün yakınsar.

**3.2.2 Teorem:**  $1 \leq p < \infty$  olmak üzere,  $S_n^a : L^p(\Pi) \rightarrow L^p(\Pi)$ ,  $n = 0, 1, \dots$  lineer operatörlerinin dizisini göz önüne alalım. Bu durumda

$$\| S_n^a(f) \|_p \leq \left( \frac{1 + |a|}{1 - |a|} \right)^{2/p} \lambda_n \| f \|_p$$

olur.

**İspat:**  $1 \leq p < \infty$  olmak üzere  $S_n^a : L^p(\Pi) \rightarrow L^p(\Pi)$ ,  $n = 0, 1, \dots$  lineer dönüşümünü göz önüne alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} \| S_n^a(f) \|_p &= \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} | S_n^a(f)(x) |^p dx \right)^{1/p} \\ &= \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\theta_a(x) - t) D_n(t) dt \right|^p dx \right)^{1/p} \end{aligned}$$

olur. Böylece Genelleştirilmiş Minkowski eşitsizliğinden ve (2.7)'den

$$\begin{aligned} \| S_n^a(f) \|_p &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} | F(\theta_a(x) - t) |^p p_a(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} | D_n(t) | \left( \frac{1}{p_a(x)} \right)^{1/p} dt \\ &\leq \left( \frac{1 + |a|}{1 - |a|} \right)^{1/p} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} | F(\theta_a(x) - t) |^p p_a(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} | D_n(t) | dt \\ &\leq \left( \frac{1 + |a|}{1 - |a|} \right)^{1/p} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \| F \|_p | D_n(t) | dt \end{aligned}$$

olur. Son olarak Lemma 3.2.1 uygulanır ve Tanım 2.2.1'de verilen Dirichlet çekirdeği tanımını göz önünde bulundurulursa,

$$\| S_n^a(f) \|_p \leq \left( \frac{1 + |a|}{1 - |a|} \right)^{2/p} \lambda_n \| f \|_p$$

elde edilir.  $\square$

**3.2.3 Teorem:** Her  $f \in L^1(\Pi)$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n^a(f) = \lim_{n \rightarrow -\infty} c_n^a(f) = 0$$

olur.

**İspat:**  $\varepsilon > 0$  olsun. Bu durumda en azından bir tane  $t \in \tau_n^a$  vardır öyleki

$$\|f - t\| < \varepsilon \cdot 2\pi$$

olur. Burada  $t$ 'nin derecesi  $N$  olsun. Bu durumda

$$t(x) = \sum_{m=-N}^{m=N} d_m e^{im\theta_a(x)}$$

yazılabilir. Öyleyse  $|k| > N$  için,

$$\begin{aligned} c_k(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ik\theta_a(x)} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ik\theta_a(x)} dx - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t(x) e^{-ik\theta_a(x)} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - t(x)] e^{-ik\theta_a(x)} dx \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$|c_k(f)| \leq \frac{1}{2\pi} \|f(x) - t(x)\|_1 < \varepsilon$$

elde edilir. Bu ise istenen sonuç olur.  $\square$

**3.2.3 Sonuç :**  $f \in L^1(\Pi)$  olsun. Bu durumda her  $f$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^a(f) = \lim_{n \rightarrow -\infty} b_n^a(f) = 0$$

olur.

$$\text{İspat: } a_n^a(f) = c_n^a(f) + c_{-n}^a(f) \text{ ve } b_n^a(f) = \frac{c_n^a(f) + c_{-n}^a(f)}{i}$$

olduğu Teorem 3.2.3'te göz önünde bulundurulursa, ispat tamamlanır.  $\square$

**3.2.4 Teorem:**  $f \in L^1(\Pi)$  olsun. Bu durumda

$$\int_0^\pi \left| \frac{F(\theta_a(x) + t) + F(\theta_a(x) - t) - 2f(x)}{t} \right| dt < \infty$$

ise  $n \rightarrow \infty$  için  $S_n^a(f)(x) \rightarrow f(x)$  olur.

**İspat:** Kabul edelim ki  $f \in L^1(\Pi)$  olsun. (3.3) eşitliğinden

$$S_n^a(f)(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \{F(\theta_a(x) + t) + F(\theta_a(x) - t) - 2f(x)\} D_n(t) dt$$

yazabiliriz. Buradan Teorem 2.2.1'den

$$S_n^a(f)(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left\{ \frac{F(\theta_a(x) + t) + F(\theta_a(x) - t) - 2f(x)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \right\} \\ \times \sin\left(\left(\frac{2n+1}{2}\right)t\right) dt$$

buluruz. Şimdi

$$\phi_x^a(t) = F(\theta_a(x) + t) + F(\theta_a(x) - t) - 2f(x)$$

diyelim. Bu durumda son eşitlik

$$S_n^a(f)(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left\{ \frac{\phi_x^a(t)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) \right\} dt$$



biçiminde yazılabilir. Ayrıca hipotezden  $\phi_x^a(t) \in L^1(\Pi)$ 'dir. Dolayısıyla

$$\int_0^\pi \left| \frac{\phi_x^a(t)}{t} \right| dt < \infty$$

olur ve Jordan eşitsizliğinden

$$\int_0^\pi \left| \frac{\phi_x^a(t)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \right| dt < \infty$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned} S_n^a(f)(x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left\{ \frac{\phi_x^a(t)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \right\} \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left\{ \frac{\phi_x^a(t)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \right\} \sin(nt) \cos\left(\frac{t}{2}\right) dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left\{ \frac{\phi_x^a(t)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \right\} \cos(nt) \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt \end{aligned}$$

olur. Burada

$$g_x^a(t) = \left\{ \frac{\phi_x^a(t)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \right\} \cos\left(\frac{t}{2}\right)$$

denilirse  $g_x^a(t) \in L^1(\Pi)$  olur. Bu durumda

$$\begin{aligned} b_n(g_x^a(t)) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi g_x^a(t) \sin(nt) dt \\ a_n(\phi_x^a(t)) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi \phi_x^a(t) \cos(nt) dt \end{aligned}$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$S_n^a(f) - f(x) = \frac{1}{4} (b_n(g_x^a(t))) + a_n(\phi_x^a(t))$$

olur. Böylece Sonuç 3.2.3 ve Riemann-Lebesgue Lemma'dan  $|n| \rightarrow \infty$  için

$$b_n(g_x^a(t)) \rightarrow 0 \quad \text{ve} \quad a_n(\phi_x^a(t)) \rightarrow 0$$

olduğundan  $n \rightarrow \infty$  için  $S_n^a(f)(x) \rightarrow f(x)$  elde edilir.  $\square$

**3.2.4 Sonuç:**  $f \in L^1(\Pi)$  olsun. Bu durumda  $|F(x) - F(y)| \leq M |x - y|^\alpha$  ise

$$S_n^a(f)(x) \rightarrow f(x), \quad n \rightarrow \infty$$

olur.

**İspat:** Kabul edelim ki  $f \in L^1(\Pi)$  olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} & \left| \frac{F(\theta_a(x) + t) + F(\theta_a(x) - t) - 2f(x)}{t} \right| \\ & \leq \frac{|F(\theta_a(x) + t) - f(x)| + |F(\theta_a(x) - t) - f(x)|}{t} \\ & \leq \frac{2Mt^\alpha}{t} = 2Mt^{\alpha-1} \end{aligned}$$

olur. Buradan  $\int_0^\pi t^{\alpha-1} dt = \frac{\pi^\alpha}{\alpha}$  olduğu göz önüne alırsa, karşılaştırma testinden

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left| \frac{F(\theta_a(x) + t) + F(\theta_a(x) - t) - 2f(x)}{t} \right| dt < \infty$$

elde edilir. Böylece Teorem 3.2.4'den  $S_n^a(f)(x) \rightarrow f(x)$ ,  $n \rightarrow \infty$  elde edilir.  $\square$

**3.2.5 Sonuç:**  $f \in L^1(\Pi)$  fonksiyonu bir  $x \in \Pi$  için türevlenebiliyorsa

$$S_n^a(f)(x) \rightarrow f(x), \quad n \rightarrow \infty$$

olur.

**İspat:**  $f \in L^1(\Pi)$  olsun. Bu durumda

$$F'(\theta_a(x)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(\theta_a(x) + t) - F(\theta_a(x))}{t}$$

dir.  $\exists \delta > 0 \ni 0 < |t| < \delta$  için

$$\left| \frac{F(\theta_a(x) + t) - F(\theta_a(x))}{t} - F'(\theta_a(x)) \right| < 1$$

olur. Buradan

$$\frac{|F(\theta_a(x) + t) - F(\theta_a(x))|}{|t|} < |F'(\theta_a(x))|$$

elde edilir. Böylece  $|t| > \delta$  için

$$\frac{|F(\theta_a(x) + t) - F(\theta_a(x))|}{|t|} < \frac{|F(\theta_a(x) + t) - F(\theta_a(x))|}{|\delta|}$$

dır. Böylece

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \left| \frac{F(\theta_a(x) + t) + F(\theta_a(x) - t) - 2f(x)}{t} \right| dt \\ &= \int_{0 < t < \delta} \left| \frac{F(\theta_a(x) + t) + F(\theta_a(x) - t) - 2f(x)}{t} \right| dt \\ &+ \int_{\delta \leq t \leq \pi} \left| \frac{F(\theta_a(x) + t) + F(\theta_a(x) - t) - 2f(x)}{t} \right| dt \\ &\leq \int_{0 < t < \delta} \left| \frac{F(\theta_a(x) + t) - f(x)}{t} \right| dt + \int_{0 < t < \delta} \left| \frac{F(\theta_a(x) - t) - f(x)}{t} \right| dt \\ &+ \int_{\delta \leq t \leq \pi} \left| \frac{F(\theta_a(x) + t) + F(\theta_a(x) - t) - 2f(x)}{t} \right| dt \\ &\leq \int_{0 < t < \delta} |t| F'(\theta_a(x)) dt + \int_{0 < t < \delta} |t| F'(\theta_a(x)) dt \\ &+ \int_{\delta \leq t \leq \pi} \left| \frac{F(\theta_a(x) + t) + F(\theta_a(x) - t) - 2f(x)}{\delta} \right| dt \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla Teorem 3.2.4'den

$$S_n^a(f)(x) \rightarrow f(x), \quad n \rightarrow \infty$$

elde edilir.  $\square$

Şimdi lineer olmayan Fourier tabanlı serilerin Kısmi Toplamlar ile yaklaşımını  $L^p(\Pi)$  uzayında inceleyelim.

**3.2.5 Teorem:**  $1 \leq p < \infty$  olsun. Her  $f \in L^p(\Pi)$  için

$$\| f - S_n^a(f)(x) \|_p \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

olması için gerek ve yeter koşul,

$$\| S_n^a(f)(x) \|_p \leq M \| f \|_p$$

olacak biçimde sadece  $p$ 'ye bağlı bir  $M > 0$  sabitinin bulunmasıdır.

**İspat:** ( $\Rightarrow$ ): Her  $f \in L^p(\Pi)$  için  $\| f - S_n^a(f)(x) \|_p \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$  olsun. Bu durumda her  $f \in L^p(\Pi)$  için  $(S_n^a(f))$  dizisi  $L^p(\Pi)$  normlu uzayında yakınsak olduğundan sınırlıdır. Yani  $\forall f \in L^p(\Pi)$  için  $\exists M_f > 0$  vardır, öyleki  $\| S_n^a(f) \|_p < M_f$  olur. Buradan düzgün sınırlılık prensibi gereğince

$$\sup \{ \| S_n^a \| : n = 0, 1, 2, \dots \} < \infty$$

dır. Burada  $M = \sup \{ \| S_n^a \| : n = 0, 1, 2, \dots \} < \infty$  seçersek her  $f \in L^p(\Pi)$  için

$$\| S_n^a(f)(x) \|_p \leq M \| f \|_p$$

elde ederiz.

( $\Leftarrow$ ):  $\| S_n^a(f)(x) \|_p \leq M \| f \|_p$  olsun. Bu durumda  $f \in L^p(\Pi)$  ve  $n = 0, 1, 2, \dots$  için

$$E_n^a(f)_p = \| f - t_n^a \|_p$$

olsun. Böylece

$$\begin{aligned} \| f - S_n^a(f)(x) \|_p &= \| f - t_n^a + t_n^a + S_n^a(f)(x) \|_p \\ &\leq \| f - t_n^a \|_p + \| S_n^a(f - t_n^a) \|_p \leq (M + 1)E_n^a(f)_p \end{aligned}$$

dir. Buradan

$$E_n^a(f)_p \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

bulunur. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.  $\square$

### 3.3 Lineer Olmayan Fourier Tabanlı Serilerin Cesàro Toplanabilirliği

$f \in L^1(\Pi)$  ve

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\theta_a(x)) + b_k \sin(k\theta_a(x))]$$

olsun. Bu lineer olmayan tabanlı Fourier serisinin kısmi toplamlar dizisini  $S_n^a(f)$  ile gösterelim. Bu durumda

$$\sigma_n^a(f)(x) := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k^a(f)(x)$$

ifadesine  $f$  fonksiyonunun lineer olmayan Fourier tabanındaki  $n$ . *Fejer (Cesàro) ortalaması* denir. Böylece eğer

$$S_n^a(f)(x) \rightarrow f(x) \quad ise \quad \sigma_n^a(f)(x) \rightarrow f(x)$$

olur. Şimdi tanımdan yola çıkarak lineer olmayan Fourier tabanındaki Cesàro ortalaması için yeni ifadeler bulalım.

$$\sigma_n^a(f)(x) := \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n S_k^a(f)(x)$$

olduğundan (3.1) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\sigma_n^a(f)(x) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(\theta_a(t) - \theta_a(x)) p_a(t) dt \right\} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left\{ \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n D_n(\theta_a(t) - \theta_a(x)) \right\} p_a(t) dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) K_n(\theta_a(t) - \theta_a(x)) p_a(t) dt,
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada da durum fonksiyonunun periyodik olmasından faydalanılırsa

$$\begin{aligned}
\sigma_n^a(f)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_a(-\pi) - \theta_a(x)}^{\theta_a(-\pi) - \theta_a(x) + 2\pi} F(y + \theta_a(x)) K_n(y) dy, \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(y + \theta_a(x)) K_n(y) dy,
\end{aligned}$$

olur. Yani ifademiz

$$\sigma_n^a(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\theta_a(x) + t) K_n(t) dt, \quad (3.4)$$

biçiminde yazılabilir. Buaradan  $K_n$  çift olduğundan

$$\sigma_n^a(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\theta_a(x) - t) K_n(t) dt, \quad (3.5)$$

olur. Şimdi integrali ikiye ayıralım.

$$\begin{aligned}
\sigma_n^a(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 F(\theta_a(x) - t) K_n(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} F(\theta_a(x) - t) K_n(t) dt, \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} F(\theta_a(x) + t) K_n(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} F(\theta_a(x) - t) K_n(t) dt,
\end{aligned}$$

olur. Buradan ise kullanışlı bir eşitlik olan

$$\sigma_n^a(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \{F(\theta_a(x) + t) + F(\theta_a(x) - t)\} K_n(t) dt, \quad (3.6)$$

elde edilir. Bu (3.6) eşitliğinden ve Teorem 2.2.3'te verilen Fejer çekirdeği için  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi K_n(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi K_n(t) dt$  olmasından yararlanıp

$$\sigma_n^a(f)(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \{F(\theta_a(x) + t) + F(\theta_a(x) - t) - 2f(x)\} K_n(t) dt, \quad (3.7)$$

yazılabilir.

Şimdi  $\sigma_n^a(f)$  operatörünün  $C(\Pi)$  ve  $L^p(\Pi)$  uzaylarındaki sınırlılığını inceleyelim.

**3.3.1 Teorem:**  $\sigma_n^a : C(\Pi) \rightarrow C(\Pi)$ ,  $n = 0, 1, \dots$  lineer operatörler dizisini göz önüne alalım. Bu durumda her  $f \in C(\Pi)$  için

$$\| \sigma_n^a(f) \|_\infty \leq \| f \|_\infty$$

olur.

**İspat:**  $\sigma_n^a : C(\Pi) \rightarrow C(\Pi)$ ,  $n = 0, 1, \dots$  lineer dönüşümünü göz önüne alalım. Bu durumda (3.5) eşitliğinden

$$\begin{aligned} | \sigma_n^a(f)(x) | &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi F(\theta_a(x) - t) K_n(t) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi | F(\theta_a(x) - t) | | K_n(t) | dt \end{aligned}$$

Fejér çekirdeği daima pozitif olduğundan,

$$| \sigma_n^a(f)(x) | \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi \| F \|_\infty K_n(t) dt$$

ve son eşitlikte Lemma 3.2.1 (i) göz önünde bulundurulursa,

$$|\sigma_n^a(f)(x)| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|f\|_{\infty} K_n(t) dt$$

olur. Son olarak Teorem 2.2.3'te verilen Fejer çekirdeğinin 1. özelliğinden,

$$\|\sigma_n^a(f)\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty}$$

sonucu elde edilir.  $\square$

**3.3.2 Teorem:**  $1 \leq p < \infty$  olmak üzere  $\sigma_n^a : L^p(\Pi) \rightarrow L^p(\Pi)$ ,  $n = 0, 1, \dots$  lineer operatörler dizisini göz önüne alalım. Bu durumda her  $f \in L^p(\Pi)$  için

$$\|\sigma_n^a(f)\|_p \leq \left( \frac{1+|a|}{1-|a|} \right)^{1/p} \|f\|_p$$

olur.

**İspat:**  $1 \leq p < \infty$  olmak üzere  $\sigma_n^a : L^p(\Pi) \rightarrow L^p(\Pi)$ ,  $n = 0, 1, \dots$  lineer dönüşümünü göz önüne alalım. Bu durumda

$$\|\sigma_n^a(f)\|_p = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sigma_n^a(f)(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

Bu durumda (3.5) eşitliğinden

$$\|\sigma_n^a(f)\|_p = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F(\theta_a(x) - t) K_n(t) dt|^p dx \right)^{1/p}$$

olur. Böylece Minkowski integral eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \|\sigma_n^a(f)\|_p &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F(\theta_a(x) - t)|^p dx \right)^{1/p} K_n(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|F\|_p K_n(t) dt \end{aligned}$$

bulunur. Buradan da Lemma 3.2.1 (ii) kullanılırsa



$$\| \sigma_n^a(f) \|_p \leq \left( \frac{1+|a|}{1-|a|} \right)^{1/p} \| f \|_p$$

elde edilir.  $\square$

Böylece Teorem 3.3.1 ve Teorem 3.3.2'den  $\sigma_n^a(f)$  operatörü  $C(\Pi)$  ve  $L^p(\Pi)$  uzaylarında sınırlıdır.

**3.3.3 Teorem:**  $f \in C(\Pi)$  olsun. Bu durumda

$$\| f - \sigma_n^a(f) \|_\infty \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

olur.

**İspat:**  $\sigma_n^a : C(\Pi) \rightarrow C(\Pi)$ ,  $n = 0, 1, \dots$  lineer dönüşümünü göz önüne alalım.

Bu durumda (3.5) eşitliğinden

$$\begin{aligned} |f(x) - \sigma_n^a(f)(x)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - F(\theta_a(x) - t)] K_n(t) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|t| < \delta} |f(x) - F(\theta_a(x) - t)| K_n(t) dt \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} |f(x) - F(\theta_a(x) - t)| K_n(t) dt \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu durumda  $f \in C(\Pi)$  olduğundan

$$\begin{aligned} |f(x) - \sigma_n^a(f)(x)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|t| < \delta} \frac{\varepsilon}{2} K_n(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} |f(x) - F(\theta_a(x) - t)| K_n(t) dt \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_{|t| < \delta} K_n(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} [|f(x)| + |F(\theta_a(x) - t)|] K_n(t) dt \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4\pi} + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} [\|f\|_\infty + \|F\|_\infty] K_n(t) dt \end{aligned}$$

yazılır. Lemma 3.2.1 ve Fejer çekirdeğinin özelliğini kullanacak olursak

$$\begin{aligned}
|f(x) - \sigma_n^a(f)(x)| &\leq \frac{\varepsilon}{4\pi} + \frac{1}{2\pi} 2 \|f\|_\infty \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} K_n(t) dt \\
&\leq \frac{\varepsilon}{4\pi} + \frac{1}{\pi} \|f\|_\infty \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} \frac{1}{n+1} \frac{1}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} dt \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\|f\|_\infty}{\pi(n+1)\sin^2 \frac{\delta}{2}} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} dt \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2\|f\|_\infty}{\pi(n+1)\sin^2 \frac{\delta}{2}}
\end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece  $n \rightarrow \infty$  için

$$\frac{2\|f\|_\infty}{\pi(n+1)\sin^2 \frac{\delta}{2}} \rightarrow 0$$

olduğundan  $\exists N \in \mathbb{N} : n \geq N$  için

$$\frac{2\|f\|_\infty}{\pi(n+1)\sin^2 \frac{\delta}{2}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

elde edilir. Buradan  $\exists N \in \mathbb{N} : n \geq N$  ve  $\forall x \in \Pi$  için

$$|f(x) - \sigma_n^a(f)(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

dir. Dolayısıyla  $n \rightarrow \infty$  için  $\sigma_n^a(f) \rightarrow f$  (Düzgün) olur.  $\square$

**3.3.4 Teorem:**  $1 \leq p < \infty$  olsun. Bu durumda her  $f \in L^p(\Pi)$  için

$$\|f - \sigma_n^a(f)\|_p \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

olur.

**İspat:**  $\sigma_n^a : L_p(\Pi) \rightarrow L_p(\Pi), n = 0, 1, \dots$  lineer dönüşüm ve  $f \in L_p(\Pi)$  olsun.  $\varepsilon > 0$  alalım. Bu durumda  $\exists g \in C(\Pi)$  öyleki

$$\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$$

olur. Ayrıca Teorem 3.3.3'den  $g \in C(\Pi)$  olmak üzere  $n \rightarrow \infty$  için  $\sigma_n^a(g) \rightarrow g$  düzgün yakınsar. Buradan Teorem 2.3.2 (Lusin teoremi)'den  $\exists n \geq N$  için  $\|\sigma_n^a(g) - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$  olur. Bu durumda

$$\begin{aligned} \|f - \sigma_n^a(f)\|_p &= \|f - g + g - \sigma_n^a(g) + \sigma_n^a(g) - \sigma_n^a(f)\|_p \\ &\leq \|f - g\|_p + \|g - \sigma_n^a(g)\|_p + \|\sigma_n^a(f - g)\|_p \end{aligned}$$

operatörün sınırlılığını veren Teorem 3.3.2'den

$$\begin{aligned} \|f - \sigma_n^a(f)\|_p &\leq \|f - g\|_p + \|g - \sigma_n^a(g)\|_p + \left(\frac{1 + |a|}{1 - |a|}\right)^{1/p} \|f - g\|_p \\ &\leq \left(\left(\frac{1 + |a|}{1 - |a|}\right)^{1/p} + 1\right) \|f - g\|_p + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon \end{aligned}$$

bulur ki bu teoremin ispatını tamamlar.  $\square$

### 3.4 Lineer Olmayan Fourier Tabanlı Serilerin Genelleştirilmiş De La Vallée Poussin Ortalaması ile Yaklaşım

$\sum c_n$  sonsuz seri ve  $S_n^a$  bu serinin kısmi toplamını gösterebiliriz.  $\lambda = \{\lambda_n\}$ ,  $\lambda_1 = 1$  ve  $\lambda_{n+1} - \lambda_n \leq 1$  olmak üzere tamsayıların bir dizisi olsun.  $S_n^a$  dizisinin  $\{\lambda_n\}$  dizisi ile üretilen *lineer olmayan Fourier tabanında*  $n$ . genelleştirilmiş de la Vallée Poussin ortalaması  $V_n^a(\lambda; x) = V_n^a(f, \lambda; x)$

$$V_n^a(\lambda) = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=n-\lambda_n}^{n-1} S_k^a \quad (n \geq 1)$$

biçiminde tanımlanır.

$V_n^a(\lambda)$  serisi yakınsak ise  $\sum c_n$  sonsuz serisi  $(V^a, \lambda)$ -toplanabilir ve eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} |V_{n+1}^a(\lambda) - V_n^a(\lambda)|$$

yakınsak ise  $|V^a, \lambda|$ -mutlak toplanabilirdir denir.

Bu bölümdeki amacımız lineer olmayan Fourier tabanındaki serilerinin kısmi toplamlar ve Cesàro ortalaması için verilen bazı Lipchitz sınıflarında klasik yaklaşım teoremlerini  $(V, \lambda)$ -toplanabilirliği için incelemektir. Üstelik görmek kolaydır ki genelleştirilmiş de la Vallée Poussin ortalaması  $\lambda = \lambda_n$  uygun seçimler yapıldığında örneğin  $\lambda_n \equiv 1$ , için  $V_{n+1}^a(\lambda) = S_n^a$  kısmi toplamlar dizisini ve  $\lambda_n \equiv n$  için ise  $V_{n+1}^a(\lambda) = \sigma_n^a$  Cesàro ortalamasını verir.

**3.4.1 Lemma:**  $f \in H^\alpha$ ,  $g(t) = \{F(\theta(a) + t) - F(\theta(a) - t)\}$  ve  $g(t) \in L(0, \frac{\pi}{2})$  olsun. Bu durumda  $\delta \leq \frac{\pi}{2}$  için  $(0, \delta)$  aralığında  $f \in H^\alpha$  ise  $J(g, \delta)$ ,  $\lambda_n$ 'den bağımsız ve  $J(g, \frac{\pi}{2}) = 0$  olmak üzere

$$\begin{aligned} I(g, \lambda_n) &\equiv \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t) \frac{|\sin \lambda_n t \sin(2n - \lambda_n)t|}{\lambda_n \sin^2 t} dt \\ &\leq M \left( \frac{1 + |a|}{1 - |a|} \right)^\alpha \left( 3 + \log \left( \frac{2n - \lambda_n}{\lambda_n} \right) \right) + \frac{1}{\lambda_n} J(g, \delta) \end{aligned}$$

olur.

**İspat:** Kabul edelim ki  $\alpha_1 = \alpha_1(n) = \min \left( \frac{2}{\pi(2n - \lambda_n)}, \delta \right)$  ve  $\alpha_2 = \alpha_2(n) = \min \left( \frac{2}{\pi\lambda_n}, \delta \right)$  olsun. Aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$I(g, \lambda_n) = \int_0^{\alpha_1} + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} + \int_{\alpha_2}^{\delta} + \int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}} \equiv I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

Buradan her  $I_i$  terimi için  $|\sin nt| \leq n |\sin t|$  ve  $|\sin t| \geq \frac{2}{\pi}t$  eşitsizlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq \frac{1}{\lambda_n} (2n - \lambda_n) \int_0^{\alpha_1} dt \leq \frac{2}{\pi} M, \\
I_2 &\leq \frac{1}{\lambda_n} \frac{\pi}{2} \lambda_n \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{1}{t} dt \leq \frac{\pi}{2} M \log \left( \frac{2n - \lambda_n}{\lambda_n} \right), \\
I_3 &\leq \frac{1}{\lambda_n} \frac{\pi^2}{4} \lambda_n M \int_{\alpha_2}^{\delta} \frac{1}{t^2} dt \leq \frac{\pi^3}{8} M, \\
I_4 &\leq \frac{1}{\lambda_n} \frac{\pi^2}{4} \lambda_n \int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{g(t)}{t^2} dt \leq \frac{1}{\lambda_n} J(g, \delta),
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu eşitsizlikleri toplayarak istenen sonuç elde edilir.  $\square$

**3.4.1 Teorem:**  $f \in H^\alpha$  olsun. Bu durumda  $V_n^a(\lambda, f)$  genelleştirilmiş de la Vallée Poussin Ortalaması,

$$\|V_n^a(\lambda, f)\|_\infty \lesssim \left( \frac{1+|a|}{1-|a|} \right)^\alpha \left( 3 + \log \frac{2n - \lambda_n}{\lambda_n} \right)$$

eşitsizliğini sağlar.

Eğer  $\lambda_n = 1$  ve  $\lambda_n = n$  alınırsa bu teorem sırasıyla lineer olmayan Fourier tabanında Lebesgue ve Fejer sonuçlarına yani sırasıyla Teorem 3.2.1 ve Teorem 3.3.1'e indirgenebilir.

**İspat:** Kabul edelim ki  $f \in H^\alpha$  olsun. Aşağıdaki gibi standart bir hesaplama ile

$$\begin{aligned}
V_n^a(\lambda, f)(x) &= \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=n-\lambda_n}^{n-1} S_k^a(f)(x) \\
&= \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=n-\lambda_n}^{n-1} \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \{F(\theta_a(x) + t) - F(\theta_a(x) - t)\} D_k(t) dt \\
&= \frac{1}{\pi \lambda_n} \int_{-\pi}^\pi \{F(\theta_a(x) + t) - F(\theta_a(x) - t)\} \left( \sum_{k=n-\lambda_n}^{n-1} D_k(t) \right) dt \\
&= \frac{1}{\pi \lambda_n} \int_{-\pi}^\pi \{F(\theta_a(x) + t) - F(\theta_a(x) - t)\} \frac{\sin \lambda_n t \sin(2n - \lambda_n)t}{\sin^2 t} dt
\end{aligned}$$

Buradan da

$$V_n^a(\lambda, f)(x) = \frac{1}{\pi\lambda_n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{F(\theta_a(x) + 2t) - F(\theta_a(x) - 2t)\} \frac{\sin \lambda_n t \sin(2n - \lambda_n)t}{\sin^2 t} dt$$

elde edilir. Burada  $g(t) = F(\theta_a(x) + 2t) - F(\theta_a(x) - 2t)$  denilirse,  $g(t)$  fonksiyonuna Lemma 3.4.1'i  $\delta = \frac{\pi}{2}$  alınıp uygulanırsa istenen eşitsizlik elde edilmiş olur.  $\square$

**3.4.2 Teorem:**  $f \in H^\alpha$  olsun. Bu durumda her  $x$  için

$$\|V_n^a(\lambda, f) - f\|_\infty \lesssim \begin{cases} \left(\frac{1+|a|}{1-|a|}\right)^\alpha \frac{1}{\lambda_n^\alpha}, & \alpha < 1; \\ \left(\frac{1+|a|}{1-|a|}\right) \frac{1+\log \lambda_n}{\lambda_n}, & \alpha = 1. \end{cases}$$

olur.

**İspat:**  $f \in H^\alpha$  olsun. Kabul edelim ki burada

$$\phi_x^a(2t) = F(\theta_a(x) + 2t) - F(\theta_a(x) - 2t) - 2f(x)$$

denilirse,  $f \in H^\alpha$  olduğundan

$$|\phi_x^a(t)| \leq M \left(\frac{1+|a|}{1-|a|}\right)^\alpha t^\alpha \quad (3.8)$$

olur. Şimdi yakınsaklığı inceleyelim.

$$\begin{aligned} |V_n^a(\lambda, f)(x) - f(x)| &= \frac{1}{\pi\lambda_n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\phi_x^a(t)| \frac{\sin \lambda_n t \sin(2n - \lambda_n)t}{\sin^2 t} dt \\ &\leq \frac{1}{\pi\lambda_n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\phi_x^a(t)| \frac{|\sin \lambda_n t \sin(2n - \lambda_n)t|}{\sin^2 t} dt \end{aligned}$$

olduğundan (3.8) eşitsizliği ve  $|\sin t| \geq \frac{2}{\pi}t$  kullanıldığında

$$|V_n^a(\lambda, f)(x) - f(x)| \lesssim \left(\frac{1+|a|}{1-|a|}\right)^\alpha \frac{1}{\pi\lambda_n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^\alpha \frac{|\sin \lambda_n t \sin(2n - \lambda_n)t|}{\sin^2 t} dt$$

elde edilir. Şimdi integrali üç parçaya ayırırsa,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} = \int_0^{\frac{1}{2n-\lambda_n}} + \int_{\frac{1}{2n-\lambda_n}}^{\frac{1}{\lambda_n}} + \int_{\frac{1}{\lambda_n}}^{\frac{\pi}{2}} \equiv I_1 + I_2 + I_3$$

yazılabilir. Burada  $I_1$  ve  $I_2$  keyfi bir  $\alpha \leq 1$  için aşağıdaki gibi kolayca hesaplanabilir.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_n} I_1 &\leq \frac{1}{\lambda_n} \int_0^{\frac{1}{2n-\lambda_n}} t^\alpha \lambda_n (2n - \lambda_n) dt \leq \frac{1}{(2n - \lambda_n)^\alpha} \leq \frac{1}{\lambda_n^\alpha}, \\ \frac{1}{\lambda_n} I_2 &\leq \frac{1}{\lambda_n} \int_{\frac{1}{2n-\lambda_n}}^{\frac{1}{\lambda_n}} t^{\alpha-1} \lambda_n dt \leq \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\lambda_n^\alpha} \end{aligned}$$

Fakat  $I_3$ 'ün  $\alpha < 1$  ve  $\alpha = 1$  için yaklaşık değerleri farklıdır:

$$\frac{1}{\lambda_n} I_3 \leq \begin{cases} \left(\frac{1}{1-\alpha}\right) \frac{1}{\lambda_n^\alpha}, & \alpha < 1; \\ \frac{1+\log \lambda_n}{\lambda_n}, & \alpha = 1. \end{cases}$$

Böylece sonuçlar toplanarak teoremin ispatı tamamlanır.  $\square$

**3.4.1 Sonuç:**  $f \in H^\alpha$  olmak üzere her  $x$  için

$$\| \sigma_n^\alpha(f) - f \|_\infty \lesssim \begin{cases} \left(\frac{1+|a|}{1-|a|}\right)^\alpha \frac{1}{n^\alpha}, & \alpha < 1; \\ \left(\frac{1+|a|}{1-|a|}\right) \frac{1+\log n}{n}, & \alpha = 1. \end{cases}$$

şeklindedir.

**İspat:** Kabul edelim ki  $f \in H^\alpha$  olsun. Bu durumda Teorem 3.4.1'de  $\lambda_n \equiv n$  olursa, istenen sonuç elde edilir.  $\square$

$\phi$ ,  $(0, \infty)$  aralığında pozitif artan bir fonksiyon olmak üzere  $\phi$ -normu

$$\| f \|_\phi = \| f \|_\infty + \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{\phi(|x - y|)} = \| f \|_\infty + \sup_{\delta > 0} \frac{\| f(\cdot) - f(\cdot + \delta) \|_\infty}{\phi(\delta)}$$

biçiminde tanımlanır [26].

$\{A_n\}$ ,  $\mathcal{C}(\Pi)$ 'den  $\mathcal{C}(\Pi)$  içine, lineer konvolüsyon operatörlerinin bir dizisi ve  $\| A_n \|$  operatör normu olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \| A_n(f) - f \|_{\phi} &\leq \| A_n(f) - f \|_{\infty} \left( 1 + 2/\phi \left( \frac{1}{n} \right) \right) \\ &+ \sup_{0 < \delta \leq 1/n} \frac{2\omega(f, \delta)}{\phi(\delta)} (1 + \| A_n(f) \|) \end{aligned} \quad (3.9)$$

olur. Bu son eşitsizlikten yararlanılarak aşağıdaki teoremlerin ispatları kolayca verilebilir [26].

**3.4.3 Teorem:**  $0 < \alpha \leq 1$  ve  $0 \leq \beta < \alpha$  olsun. Bu durumda her  $f \in H^{\alpha}$  için,

$$\| V_n^a(\lambda, f) - f \|_{\beta} \lesssim \begin{cases} \left( \frac{1+|a|}{1-|a|} \right)^{\alpha} \frac{n^{\beta}}{\lambda_n^{\alpha}}, & \alpha < 1; \\ \left( \frac{1+|a|}{1-|a|} \right) n^{\beta-1} \log \left( \frac{2n-\lambda_n}{\lambda_n} \right), & \alpha = 1. \end{cases}$$

olur.

**İspat:** Kabul edelim ki  $0 \leq \beta < \alpha \leq 1$  olmak üzere  $f \in H^{\alpha}$  olsun. (3.9) eşitliğinde  $A_n = V_n^a$  ve  $\phi(\delta) = \delta^{\beta}$  alınırsa  $\| f \|_{\phi} = \| f \|_{\beta}$  olur. Buradan (3.9) eşitsizliği

$$\| V_n^a(f) - f \|_{\beta} \leq \| V_n^a(f) - f \|_{\infty} \left( 1 + \frac{2}{1/n^{\beta}} \right) + \sup_{0 < \delta \leq \frac{1}{n}} 2 \frac{\omega(f, \delta)}{\delta^{\beta}} (1 + \| V_n^a \|_{\infty})$$

eşitliğini verir.  $\alpha < 1$  için Teorem 3.4.1 ve Teorem 3.4.2'den

$$\begin{aligned} \| V_n^a(f) - f \|_{\beta} &\lesssim \left( \frac{1+|a|}{1-|a|} \right)^{\alpha} \frac{1}{\lambda_n^{\alpha}} (1 + 2n^{\beta}) \\ &+ \sup_{0 < \delta \leq \frac{1}{n}} 2 \frac{\delta^{\alpha}}{\delta^{\beta}} \left( \frac{1+|a|}{1-|a|} \right)^{\alpha} \left( 3 + \log \left( \frac{2n-\lambda_n}{\lambda_n} \right) \right) \| f \|_{\infty} \end{aligned}$$

elde edilir.  $\alpha = 1$  için ise

$$\begin{aligned} \| V_n^a(f) - f \|_{\beta} &\lesssim \left( \frac{1+|a|}{1-|a|} \right) \left( \frac{1 + \log \lambda_n}{\lambda_n} \right) (1 + 2n^{\beta}) \\ &+ \sup_{0 < \delta \leq \frac{1}{n}} 2\delta^{\alpha-\beta} \left( \frac{1+|a|}{1-|a|} \right) \left( 3 + \log \left( \frac{2n-\lambda_n}{\lambda_n} \right) \right) \| f \|_{\infty} \end{aligned}$$



elde edilir ve buradan da sonuç olarak

$$\|V_n^a(f) - f\|_\beta \lesssim \begin{cases} \left(\frac{1+|a|}{1-|a|}\right)^\alpha \frac{n^{\beta-\alpha}}{\lambda_n^\alpha}, & \alpha < 1; \\ \left(\frac{1+|a|}{1-|a|}\right) \frac{n^{\beta-1}}{\lambda_n} \log(2n - \lambda_n), & \alpha = 1. \end{cases}$$

bulunur. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.  $\square$

**3.4.2 Sonuç:**  $0 < \alpha \leq 1$  and  $0 \leq \beta < \alpha$  olsun. Bu durumda her  $f \in H^\alpha$  için,

$$\|\sigma_n^a(f) - f\|_\beta \lesssim \begin{cases} \left(\frac{1+|a|}{1-|a|}\right)^\alpha n^{\beta-\alpha}, & 0 < \alpha \leq 1; \\ \left(\frac{1+|a|}{1-|a|}\right) n^{\beta-1} \log n, & \alpha = 1. \end{cases}$$

olur.

**İspat:**  $\phi(\delta) = \delta^\alpha$ ,  $\|f\|_\phi = \|f\|_\beta$  durumunda,  $f \in H^\alpha$ ,  $0 \leq \beta < \alpha \leq 1$ ,  $A_n = \sigma_n^a$  alınırsa (3.9) eşitsizliği,

$$\|\sigma_n^a(f) - f\|_\beta \leq \|\sigma_n^a(f) - f\|_\infty \left(1 + \frac{2}{1/n^\beta}\right) + \sup_{0 < \delta \leq \frac{1}{n}} 2 \frac{\omega(f, \delta)}{\delta^\beta} (1 + \|\sigma_n^a\|_\infty)$$

eşitsizliğini verir. Sonuç 3.4.1 ve Teorem 3.3.1'den  $\alpha < 1$  için

$$\|\sigma_n^a(f) - f\|_\beta \lesssim \left(\frac{1+|a|}{1-|a|}\right)^\alpha \left(\frac{1}{n^\alpha}\right) (1 + 2n^\beta) + \sup_{0 < \delta \leq \frac{1}{n}} 2 \frac{\delta^\alpha}{\delta^\beta} \|f\|_\infty$$

olur.  $\alpha = 1$  için ise

$$\|\sigma_n^a(f) - f\|_\beta \lesssim \left(\frac{1+|a|}{1-|a|}\right) \left(\frac{1 + \log n}{n}\right) (1 + 2n^\beta) + \sup_{0 < \delta \leq \frac{1}{n}} 2\delta^{1-\beta} \|f\|_\infty$$

elde edilir ve buradan da sonuç olarak

$$\|\sigma_n^a(f) - f\|_\beta \lesssim \begin{cases} \left(\frac{1+|a|}{1-|a|}\right)^\alpha n^{\beta-\alpha}, & \alpha < 1; \\ \left(\frac{1+|a|}{1-|a|}\right) n^{\beta-1} \log n, & \alpha = 1. \end{cases}$$

bulunur. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.  $\square$

### 3.5 Linear Olmayan Fourier Tabanlı Serilerin Kısmi Toplamları ile Yaklaşım

**3.5.1 Teorem:**  $0 < \alpha \leq 1$  ve  $0 \leq \beta < \alpha$  olsun. Bu durumda her  $f \in H^\alpha$  için

$$\| f - S_n^a(f) \|_\infty \lesssim \left( \frac{24}{1 - |a|} \right) \frac{\log n}{n^\alpha}$$

olur.

**İspat:**  $0 < \alpha \leq 1$  ve  $0 \leq \beta < \alpha$  olsun. Bu durumda Sonuç 3.2.1'den her  $f \in C(\Pi)$  için

$$\| f - S_n^a(f) \|_\infty \lesssim \log n E_n^a(f)$$

olur. Bu durumda [19] makalesindeki Teorem 2.3'ten ve  $f \in H^\alpha$  olduğundan

$$\| f - S_n^a(f) \|_\infty \lesssim \left( \frac{24}{1 - |a|} \right) \frac{\log n}{n^\alpha}$$

elde edilir.  $\square$

**3.5.2 Teorem:**  $0 < \alpha \leq 1$  ve  $0 \leq \beta < \alpha$  olsun. Bu durumda her  $f \in H^\alpha$  için

$$\| S_n^a(f) - f \|_\beta \lesssim \left( \frac{48}{1 - |a|} \right) n^{\beta - \alpha} \log n$$

dır. Böylece  $n \rightarrow \infty$  için

$$\| S_n^a(f) - f \|_\beta \rightarrow 0,$$

olur.

**İspat:**  $0 \leq \beta < \alpha \leq 1$  olmak üzere  $f \in H^\alpha$  olsun. (3.9) eşitliğinde  $A_n = S_n^a$  ve  $\phi(\delta) = \delta^\beta$  alınırsa  $\| f \|_\phi = \| f \|_\beta$  olur. Buradan (3.9) eşitsizliği

$$\| S_n^a(f) - f \|_\beta \leq \| S_n^a(f) - f \|_\infty \left( 1 + \frac{2}{1/n^\beta} \right) + \sup_{0 < \delta \leq \frac{1}{n}} 2 \frac{\omega(f, \delta)}{\delta^\beta} (1 + \| S_n^a \|_\infty)$$

eşitsizliğini verir. Böylece Teorem 3.5.1'den

$$\begin{aligned} \| S_n^a(f) - f \|_{\beta} &\leq c \left( \frac{24}{1 - |a|} \right) \frac{\log n}{n^\alpha} (1 + 2n^\beta) + \sup_{0 < \delta \leq \frac{1}{n}} 2 \frac{\delta^\alpha}{\delta^\beta} (1 + \Lambda_n \|f\|_\infty) \\ &\leq c \log n \left( \frac{24}{1 - |a|} \right) \frac{1}{n^\alpha} (1 + 2n^\beta) + \sup_{0 < \delta \leq \frac{1}{n}} 2\delta^{\alpha-\beta} (1 + \Lambda_n \|f\|_\infty) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.  $f \in H^\alpha$  olduğundan son eşitsizlik

$$\| S_n^a(f) - f \|_{\beta} \lesssim \log n \left( \frac{24}{1 - |a|} \right) \frac{1}{n^\alpha} (1 + 2n^\beta) + \sup_{0 < \delta \leq \frac{1}{n}} 2\delta^{\alpha-\beta} (1 + \Lambda_n \|f\|_\infty)$$

biçiminde yazabilir. Buradan da Teorem 2.2.3'ü (Lebesgue sabiti Teoremi)

kullanılırsa  $|r_n| \leq 3$  için

$$\begin{aligned} \| S_n^a(f) - f \|_{\beta} &\lesssim \log n \left( \frac{24}{1 - |a|} \right) \frac{1}{n^\alpha} (1 + 2n^\beta) \\ &\quad + \sup_{0 < \delta \leq \frac{1}{n}} 2\delta^{\alpha-\beta} \left( 1 + \left( \frac{4}{\pi^2} \log n + r_n \right) \|f\|_\infty \right) \end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak

$$\| S_n^a(f) - f \|_{\beta} \lesssim n^{\beta-\alpha} \left( \frac{48}{1 - |a|} \right) \log n$$

elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.  $\square$

## 4. BERNSTEIN TİPİ OPERATÖR

### 4.1 $T_\lambda$ Operatörünün Yaklaşım Özellikleri

$\lambda > 0$  olsun.  $x \in (0, 1)$  olmak üzere  $L^1$ 'deki sınırlı fonksiyonlar için  $T_\lambda(f, x)$ , Bernstein tipli operatörünü

$$T_\lambda(f, x) := \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda x)\Gamma(\lambda(1-x))} \int_0^1 t^{\lambda x-1} (1-t)^{\lambda(1-x)-1} f(t) dt \quad (4.1)$$

biçiminde sınır noktalarındaki limiti ise

$$\lim_{x \rightarrow 0} T_\lambda(f, x) = f(0), \quad \text{ve} \quad \lim_{x \rightarrow 1} T_\lambda(f, x) = f(1)$$

olarak tanımlayalım. Böyle bir tanım için  $f$  fonksiyonunun,  $x = 0$  ve  $x = 1$  noktalarında sürekli olmasına ihtiyaç vardır.

Ayrıca  $T_\lambda(x^n, x) = \frac{(\lambda x)_n}{(\lambda)_n}$  dır. Dolayısıyla  $T_\lambda(f, x)$  polinomları polinomlara resmeder. Şimdi  $T_\lambda$  operatörleri için bazı klasik yaklaşım özellikleri ve  $T_\lambda$  pozitif operatör dizisinin sürekli fonksiyonlara yaklaşım özelliklerini verilecektir. Basit hesaplamalarla aşağıdaki lemmayı verilebilir.

**4.1.1 Lemma:**  $\lambda > 0$  olsun. Bu durumda her  $x \in (0, 1)$  ve  $k = 0, 1, 2, \dots$  için  $T_\lambda$  operatörleri

$$T_\lambda(x^k, x) = \frac{(\lambda x)_k}{(\lambda)_k}$$

eşitliğini sağlar.

**İspat:** Kabul edelim ki  $x \in (0, 1)$  ve  $k = 0, 1, 2, \dots$  olsun.  $T_\lambda$  operatörün tanımı olan (4.1) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
T_\lambda(x^k, x) &= \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda x)\Gamma(\lambda(1-x))} \int_0^1 t^{\lambda x-1}(1-t)^{\lambda(1-x)-1} t^k dt \\
&= \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda x)\Gamma(\lambda(1-x))} \int_0^1 t^{\lambda x+k-1}(1-t)^{\lambda(1-x)-1} dt.
\end{aligned}$$

dir. Buradan Beta fonksiyonu tanımını düşünülürse

$$T_\lambda(x^k, x) = \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda x)\Gamma(\lambda(1-x))} B(\lambda x + k, \lambda(1-x))$$

olur. Beta fonksiyonunun Gama fonksiyonu olan  $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$  bağıntısı kullanılarak

$$\begin{aligned}
T_\lambda(x^k, x) &= \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda x)\Gamma(\lambda(1-x))} \frac{\Gamma(\lambda x + k)\Gamma(\lambda(1-x))}{\Gamma(\lambda + k)} \\
&= \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda + k)} \frac{\Gamma(\lambda x + k)}{\Gamma(\lambda x)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$T_\lambda(x^k, x) = \frac{(\lambda x)_k}{(\lambda)_k}$$

genel formülüne ulaşılmış olur.  $\square$

**4.1.1 Sonuç:**  $x \in (0, 1)$  olsun. Bu durumda  $T_\lambda$  operatörleri her  $x \in (0, 1)$  için

$$\begin{aligned}
T_\lambda(e_0, x) &= 1, \quad T_\lambda(e_1, x) = x, \\
T_\lambda(e_2, x) &= \frac{\lambda x^2 + x}{\lambda + 1}, \\
T_\lambda(e_3, x) &= \frac{3\lambda^2 x^3 + 3\lambda x^2 + 2x}{\lambda^2 + 3\lambda + 2} \\
T_\lambda(e_4, x) &= \frac{\lambda^3 x^4 + 6\lambda^2 x^3 + 11\lambda x^2 + 6x}{\lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6} \\
T_\lambda(e_5, x) &= \frac{\lambda^4 x^5 + 10\lambda^3 x^4 + 35\lambda^2 x^3 + 50\lambda x^2 + 24x}{\lambda^4 + 10\lambda^3 + 35\lambda^2 + 50\lambda + 24}
\end{aligned}$$

eşitliklerini sağlar.

**İspat:** İleriki ispatlarda kullanılacak bu eşitlikleri ispatlamak için Lemma 4.1.1'de  $k = 1, 2, 3, 4$  almak yeterli olacaktır.  $\square$

**4.1.2 Lemma:**  $x \in (0, 1)$  olsun. Bu durumda  $T_\lambda$  operatörleri her  $x \in (0, 1)$  için

$$(i) T_\lambda((e_1 - x), x) = 0,$$

$$(ii) T_\lambda((e_1 - x)^2, x) = \frac{x(1-x)}{\lambda+1},$$

$$(iii) T_\lambda((e_1 - x)^3, x) = \frac{4x^3 - 6x^2 + 2x}{\lambda^2 + 3\lambda + 2},$$

$$(iv) T_\lambda((e_1 - x)^4, x) = \frac{(3\lambda - 18)x^4 + (-6\lambda + 36)x^3 + (3\lambda - 24)x^2 + 6x}{\lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6},$$

$$(v) T_\lambda((e_1 - x)^5, x) = \frac{(-40\lambda + 96)x^5 + (100\lambda - 240)x^4 + (-80\lambda + 240)x^3 + (20\lambda - 120)x^2 + 24x}{\lambda^4 + 10\lambda^3 + 35\lambda^2 + 50\lambda + 24}$$

eşitliklerini sağlar.

**İspat:**  $T_\lambda$  lineer olduğundan istenen sonuç Lemma 4.1.1 ve binom açılımından elde edilir.  $\square$

**4.1.3 Lemma:** Her  $\lambda > 0$  için,  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} c_\lambda(x) = 4$  olmak üzere

$$T_\lambda((e_1 - x)^4, x) \leq \frac{3\lambda}{\lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6} c_\lambda(x), \quad x \in (0, 1),$$

olur.

**İspat:**  $x \in (0, 1)$  olsun. Lemma 4.1.2'den,

$$\begin{aligned} T_\lambda((e_1 - x)^4, x) &\leq \frac{3\lambda}{\lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6} \\ &\times \left[ \left(1 - \frac{6}{\lambda}\right) x^4 + \left(2 + \frac{12}{\lambda}\right) x^3 + \left(1 - \frac{8}{\lambda}\right) x^2 + \frac{2}{\lambda} x \right], \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla buradan

$$T_\lambda((e_1 - x)^4, x) \leq \frac{3\lambda}{\lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6} c_\lambda(x)$$

elde edilir.  $\square$

**4.1.1 Önerme:**  $\lambda > 0$  ve  $r = 0, 1, 2, \dots$  olsun.

$$K_\lambda(x, t) := \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda x)\Gamma(\lambda(1-x))} t^{\lambda x-1} (1-t)^{\lambda(1-x)-1}$$

$T_\lambda$  operatörlerinin çekirdeği olmak üzere

$$S_{\lambda,r}(x) := T_\lambda((t-x)^r, x) = \int_0^1 (t-x)^r K_\lambda(x, t) dt,$$

$$M_{\lambda,r}(x) := (\lambda)_r S_{\lambda,r}(x),$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda sabit bir  $r > 0$  için

$$M_{\lambda,0}(x) = 0,$$

$$M_{\lambda,1}(x) = \lambda \frac{x(1-x)}{\lambda+1},$$

$$M_{\lambda,2}(x) = (\lambda)_2 \frac{(4x^3 - 6x^2 + 2x)}{\lambda^2 + 3\lambda + 2},$$

$$M_{\lambda,3}(x) = (\lambda)_3 \frac{(3\lambda - 18)x^4 + (-6\lambda + 36)x^3 + (3\lambda - 24)x^2 + 6x}{\lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6},$$

$$M_{\lambda,4}(x) = (\lambda)_4 \frac{(-40\lambda + 96)x^5 + (100\lambda - 240)x^4 + (-80\lambda + 240)x^3}{\lambda^4 + 10\lambda^3 + 35\lambda^2 + 50\lambda + 24} + \frac{(20\lambda - 120)x^2 + 24x}{\lambda^4 + 10\lambda^3 + 35\lambda^2 + 50\lambda + 24}$$

olur.

$M_{\lambda,r}(x)$  ile ilgili daha fazla bilgi aşağıdaki teorem ile verilebilir.

**4.1.1 Teorem:**  $r$  bir sabit sayı,  $M_{\lambda,r}(x)$ ,  $x$  ve  $\lambda$  değişkenli bir polinom olsun.

Bu durumda  $\phi_{r,r-i}(x)$ ,  $r$ . dereceden  $x$ 'e bağlı ve  $\lambda$ 'dan bağımsız bir polinom olmak üzere

$$M_{\lambda,r}(x) = \phi_{r,r}(x)\lambda^r + \phi_{r,r-1}(x)\lambda^{r-1} + \phi_{r,r-2}(x)\lambda^{r-2} + \dots + \phi_{r,1}(x)\lambda$$

olur.

**İspat:**  $r$  bir sabit sayı,  $M_{\lambda,r}(x)$ ,  $x$  ve  $\lambda$  değişkenli bir polinom olsun. Açık ki

$$S_{\lambda,r}(x) = \int_0^1 (t-x)^r K_{\lambda}(x,t) dt$$

eşitliğinde Binom açılımını kullanılacak olursa

$$S_{\lambda,r}(x) = \int_0^1 K_{\lambda}(x,t) \left[ \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} t^k (-x)^{r-k} \right] dt$$

Lemma 4.1.1'den ve Stirling sayısının tanımı kullanıldığında

$$\begin{aligned} S_{\lambda,r}(x) &= \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-x)^{r-k} \frac{(\lambda x)_k}{(\lambda)_k} dt \\ &= \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^{r-k} \frac{x^{r-k}}{(\lambda)_k} \left[ \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} s(k,j) \lambda^j x^j \right] \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$S_{\lambda,r}(x) = \sum_{k,j=0}^r \binom{r}{k} (-1)^{r-j} x^{r+j-k} s(k,j) \frac{\lambda^j}{(\lambda)_k}$$

elde edilir. Dolayısıyla son eşitlikten

$$M_{\lambda,r}(x) = \sum_{k,j=0}^r \binom{r}{k} (-1)^{r-j} x^{r+j-k} s(k,j) \frac{\lambda^j (\lambda)_r}{(\lambda)_k}$$

sonucununa varılır.  $\square$

**4.1.2 Teorem:**  $0 \leq x \leq 1$  olsun. Bu durumda her  $r > 0$  sabiti sayısı için

$$0 \leq M_{\lambda,2r}(x) \leq A_r \lambda^{-r}$$

olacak biçimde sadece  $r$ 'ye bağlı bir  $A_r$  sabiti vardır.



**İspat:** Theorem 4.1.1'den, her  $r$  için  $0 \leq x \leq 1$  olmak üzere

$$M_{\lambda,r}(x) = \sum_{k,j=0}^r \binom{r}{k} (-1)^{r-j} x^{r+j-k} s(k, j) \frac{\lambda^j (\lambda)_r}{(\lambda)_k}$$

olacak biçimde sadece  $r$ 'ye bağlı bir  $A_r$  sabiti vardır.  $k = k + j$  alınırsa

$$\begin{aligned} M_{\lambda,r}(x) &= \sum_{k,j=0}^r \binom{r}{k+j} (-1)^{r-j} x^{r-k} s(k+j, j) \lambda^j \frac{(\lambda)_r}{(\lambda)_{k+j}} \\ &= \sum_{k,j=0}^r \binom{r}{k+j} (-1)^{r-j} x^{r-k} s(k+j, j) \lambda^j \frac{\Gamma(\lambda+r)}{\Gamma(\lambda+k+j)} \end{aligned}$$

elde edilir. [28] kitabındaki Theorem 3 kullanılacak olursa  $0 \leq \frac{1}{2}(r+k)$  için

$$g(\lambda; k', r, 0) = \lambda^j \frac{\Gamma(\lambda+r)}{\Gamma(\lambda+k')}$$

fonksiyonunun  $\alpha := \max(-k-1, 0)$  olmak üzere  $(\alpha, \infty)$  aralığı üzerinde tamamen monoton olduğunu söylenebilir. Böylece  $x \in (0, 1)$  için

$$\| M_{\lambda,r}(x) \| = \sum_{k,j=0}^r \binom{r}{k+j} \| s(k+j, j) \| C \lambda^r$$

yazılır.  $A_r := \binom{r}{k+j} \| s(k+j, j) \|$  denilirse

$$0 \leq M_{\lambda,2r}(x) \leq A_r \lambda^{-r}$$

bulunur. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.  $\square$

**4.1.2 Sonuç:**  $\delta = \lambda^{-\alpha}$ ,  $0 < \alpha < \frac{1}{2}$  ve  $r$  yeterince büyük olsun. Bu durumda her  $k > 0$  için

$$\int_{|t-x|>\lambda^{-\alpha}} K_{\lambda}(x, t) dt \leq C \lambda^{-k}$$

olur.

**İspat:** Teorem 4.1.2'den,  $0 \leq x \leq 1$  olmak üzere her  $r$  için,

$$0 \leq M_{\lambda,2r}(x) \leq A_r \lambda^{-r}$$

olacak biçimde sadece  $r$ 'ye bağlı bir  $A_r$  sabiti vardır. Buradan herbir  $\delta > 0$  için

$$\begin{aligned} \int_{|t-x|>\delta} K_\lambda(x,t) dt &\leq \delta^{-2r} \int_{|t-x|>\delta} (\lambda)_{2r} (t-x)^{2r} K_\lambda(x,t) dt \\ &\leq \delta^{-2r} M_{\lambda,2r}(x) \leq \delta^{-2r} A_r \lambda^{-r} \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitsizlikte özel olarak  $\delta = \lambda^{-\alpha}$  seçilirse,  $0 < \alpha < \frac{1}{2}$  ve  $r$  yeterince büyük olmak üzere herbir  $k > 0$  için

$$\int_{|t-x|>\lambda^{-\alpha}} K_\lambda(x,t) dt \leq C \lambda^{-k}$$

bulunur. Bu eşitsizlikte  $C$  sabiti sadece  $\alpha$  ve  $k$ 'ya bağlıdır.  $\square$

**4.1.3 Teorem:**  $f \in C[0,1]$  olsun. Bu durumda  $T_\lambda(f,x)$  operatörleri  $f$  fonksiyonuna  $(0,1)$  aralığında düzgün yakınsar.

**İspat:**  $f \in C[0,1]$  olsun. Sonuç 4.1.1'de verilenler Teorem 2.3.1 (Korovkin Teoremi)'e uygulanırsa istenilen sonuca ulaşılır.  $\square$

Aşağıdaki teorem  $T_\lambda(f,x)$  operatörlerinin noktasal yakınsaklığını verir.

**4.1.4 Teorem:**  $f \in L^1(0,1)$  olmak üzere  $f$  fonksiyonu  $x = 0$  ve  $x = 1$  noktalarında sürekli ve  $[0,1]$  üzerinde sınırlı olsun. Bu durumda  $\lambda \rightarrow \infty$  için  $T_\lambda(f,x)$  operatörleri  $f(x)$  fonksiyonuna noktasal olarak yakınsar.

**İspat:** Kabul edelim ki  $f \in L^1(0,1)$  olmak üzere  $f$  fonksiyonu  $x = 0$  ve  $x = 1$  noktalarında sürekli ve  $[0,1]$  üzerinde sınırlı olsun. Açıkça görülür ki

$$|T_\lambda(f,x) - f(x)| = \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda x)\Gamma(\lambda(1-x))} \left| \int_0^1 t^{\lambda x-1} (1-t)^{\lambda(1-x)-1} [f(t) - f(x)] dt \right|$$

$$\leq \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda x)\Gamma(\lambda(1-x))} \int_0^1 t^{\lambda x-1}(1-t)^{\lambda(1-x)-1} |f(t) - f(x)| dt$$

dir. Bu durumda  $\varepsilon > 0$  için  $|x - t| < \delta$  olduğunda  $|f(x) - f(t)| < \varepsilon/2$  olacak biçimde  $\delta > 0$  vardır. Şimdi  $[0, 1]$  üzerindeki integrali  $|t - x| < \delta$  ve  $|t - x| \geq \delta$  toplamı üzerinden alalım. İlk integral için  $|f(x) - f(t)| < \varepsilon$  ve ikinci integral içinde  $u \in [0, 1]$  için  $|f(u)| \leq M$  olması kullanılır. Daha sonra integrali  $(x - t)^2/\delta^2 \geq 1$  ile çarpılır. Böylece

$$|T_\lambda(f, x) - f(x)| \leq \varepsilon/2 + \frac{2M}{\delta^2} T_\lambda((e_1 - x)^2, x)$$

olur ve Sonuç 4.1.1'den

$$|T_\lambda(f, x) - f(x)| \leq \varepsilon/2 + \frac{2M}{\delta^2} \frac{x(1-x)}{\lambda+1}$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.  $\square$

## 4.2 $T_\lambda$ Operatörünün Yaklaşım Hızı

Bu bölümde,  $T_\lambda$  operatör dizilerinin  $f$  fonksiyonuna yakınsama hızı, 1. ve 2. süreklilik modülleri ve Peetré  $K$ -fonksiyoneliinden yararlanarak hesaplanılacaktır.

**4.2.1 Teorem:**  $f$ ,  $(0, 1)$  üzerinde sınırlı ve integrallenebilen bir fonksiyon olsun. Bu durumda  $T_\lambda(f, x)$  operatörleri  $\delta_\lambda := \sqrt{\frac{1}{\lambda}}$  olmak üzere her  $x \in (0, 1)$  için,

$$|T_\lambda(f, x) - f(x)| \leq \frac{3}{2} \omega(f, \delta_\lambda)$$

eşitsizliğini sağlarlar. Böylece  $f \in C[0, 1]$  ise  $\lambda \rightarrow \infty$  için  $E_\lambda(f) \rightarrow 0$  olur.

**İspat:**  $f$ ,  $(0, 1)$  üzerinde sınırlı ve integrallenebilen bir fonksiyon olsun. Bu durumda  $T_\lambda(f, x)$  operatörlerinin lineerliği ve monotonluğundan,  $\lambda > 0$  ve  $x \in (0, 1)$  için,

$$|T_\lambda(f, x) - f(x)| \leq T_\lambda(|f(t) - f(x)|, x) \quad (4.2)$$

olur. Burada (2.1) eşitsizliği (4.2) eşitsizliğinde  $\mu = \sqrt{\lambda} |t - x|$  ve  $\delta = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$  olarak kullanılacak olursa

$$|T_\lambda(f, x) - f(x)| \leq \omega\left(f, \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \left[1 + \sqrt{\lambda} T_\lambda(|e_1 - x|, x)\right] \quad (4.3)$$

elde edilir. Böylece pozitif operatörler için Cauchy-Schwarz Eşitsizliği ile (4.3)'den

$$|T_\lambda(f, x) - f(x)| \leq \left(1 + \frac{1}{\delta} \sqrt{T_\lambda((e_1 - x)^2, x)}\right) \omega(f, \delta).$$

olur. Son eşitsizliğe Lemma 4.1.2 uygulanırsa

$$|T_\lambda(f, x) - f(x)| \leq \omega\left(f, \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \left[1 + \sqrt{\lambda} \sqrt{\frac{x(1-x)}{\lambda+1}}\right]$$

elde edilir. Böylece  $[0, 1]$  üzerinde  $x(1-x) < \frac{1}{4}$  olduğundan istenen sonuca ulaşılr.

□

**4.2.2 Teorem:**  $f \in L^1[0, 1]$  ve  $[0, 1]$  üzerinde sınırlı fonksiyon olmak üzere (4.1) ile tanımlanan  $T_\lambda(f, x)$  operatörleri her  $x \in (0, 1)$  ve  $\delta_\lambda = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$  için

$$|T_\lambda(f, x) - f(x)| \leq \frac{3}{4} \delta_\lambda \omega(f', \delta_\lambda)$$

eşitsizliğini sağlarlar.

**İspat:**  $f \in L^1[0, 1]$  ve  $[0, 1]$  üzerinde sınırlı fonksiyon olsun. Ortalama değer teoreminden

$$f(t) - f(x) = (t - x)f'(\xi)$$

olacak biçimde  $\xi \in (t, x)$  vardır.  $T_\lambda$  operatörleri pozitif olduğundan Lemma 4.1.2 ile  $\xi_{t,x} \in (\min\{t, x\}, \max\{t, x\})$  olduğunda

$$\begin{aligned} |T_\lambda(f, x) - f(x)| &= |T_\lambda((e_1 - x)f'(\xi), x)| \\ &= |T_\lambda((e_1 - x)(f'(\xi_{t,x}) - f'(x)), x)| + |f'(x)T_\lambda((e_1 - x), x)| \end{aligned}$$

dır. Süreklilik modülünün özelliği kullanılarak

$$|f'(\xi_x) - f'(x)| \leq \omega(f', \delta) \left(1 + \frac{1}{\delta} |\xi_x - x|\right) \leq \omega(f', \delta) \left(1 + \frac{1}{\delta} |t - x|\right)$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\begin{aligned} |T_\lambda(f, x) - f(x)| &\leq |f'(x)T_\lambda((e_1 - x), x)| \\ &+ \omega(f', \delta)T_\lambda\left(|e_1 - x| \left(1 + \frac{1}{\delta} |e_1 - x|\right), x\right) \\ &= \omega(f', \delta)T_\lambda\left(|e_1 - x| + \frac{1}{\delta}(e_1 - x)^2, x\right) \\ &= \omega(f', \delta) \left\{ T_\lambda(|e_1 - x|, x) + \frac{1}{\delta} T_\lambda((e_1 - x)^2, x) \right\} \end{aligned}$$

olur. Buradan son eşitsizliğe Cauchy-Schwartz eşitsizliği ve Lemma 4.1.2'i uygulanacak olursa

$$\begin{aligned} |T_\lambda(f, x) - f(x)| &\leq \omega(f', \delta) \left\{ \sqrt{T_\lambda((e_1 - x)^2, x)} + \frac{1}{\delta} T_\lambda((e_1 - x)^2, x) \right\} \\ &\leq \omega(f', \delta) \sqrt{\frac{x(1-x)}{\lambda+1}} \left(1 + \frac{1}{\delta} \sqrt{\frac{x(1-x)}{\lambda+1}}\right) \end{aligned}$$

bulunur. Burada  $\delta_\lambda = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$  seçilirse

$$|T_\lambda(f, x) - f(x)| \leq \frac{3}{4} \delta_\lambda \omega(f', \delta_\lambda)$$

eşitsizliğine ulaşılır. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.  $\square$

**4.2.3 Teorem:**  $f \in H^\alpha$  olsun. Bu durumda  $T_\lambda(f, x)$  operatörleri  $\delta_\lambda = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$  olmak üzere her  $x \in (0, 1)$  için,

$$|T_\lambda(f, x) - f(x)| \leq M \delta_\lambda^\alpha$$

eşitsizliğini sağlarlar.

**İspat:**  $f \in H^\alpha$  olsun.  $T_\lambda$  operatörüne (2.4) eşitsizliği uygulanırsa

$$|T_\lambda(f, x) - f(x)| \leq T_\lambda(|f(t) - f(x)|, x) \leq MT_\lambda(|t - x|^\alpha, x)$$

elde edilir. Buradan

$$|T_\lambda(f, x) - f(x)| \leq MT_\lambda(|t - x|^\alpha, x) \quad (4.4)$$

olur. (4.4)'e  $p = \frac{2}{\alpha}$ ,  $q = \frac{2}{2-\alpha}$  için Hölder eşitsizliği uygulandığında

$$\begin{aligned} & |T_\lambda(f, x) - f(x)| \\ & \leq M \left[ \left( \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda x) \Gamma(\lambda(1-x))} \int_0^1 |t^{\lambda x-1} (1-t)^{\lambda(1-x)-1}|^{\frac{\alpha}{2}} |t-x|^\alpha dt \right)^{\frac{\alpha}{2}} \right. \\ & \quad \left. \times \left( \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda x) \Gamma(\lambda(1-x))} \int_0^1 |t^{\lambda x-1} (1-t)^{\lambda(1-x)-1}|^{\frac{2-\alpha}{2}} dt \right)^{\frac{2-\alpha}{2}} \right] \\ & \leq M \left[ \left( \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda x) \Gamma(\lambda(1-x))} \int_0^1 t^{\lambda x-1} (1-t)^{\lambda(1-x)-1} (t-x)^2 dt \right)^{\frac{\alpha}{2}} \right. \\ & \quad \left. \times \left( \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda x) \Gamma(\lambda(1-x))} \int_0^1 t^{\lambda x-1} (1-t)^{\lambda(1-x)-1} dt \right)^{\frac{2-\alpha}{2}} \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan  $T_\lambda(e_0, x) = 1$  olduğu düşünülürse

$$|T_\lambda(f, x) - f(x)| \leq M [T_\lambda((e_1 - x)^2, x)]^{\frac{\alpha}{2}} = M\delta_\lambda^\alpha$$

bulunur. Buradan ispat tamamlanmış olur.  $\square$

**4.2.4 Teorem:**  $f \in C^2[0, 1]$  olsun. Bu durumda her  $\lambda > 0$  için

$$|T_\lambda(f, x) - f(x)| \leq \frac{\|f''\|}{8\lambda}$$

eşitsizliği sağlanır.

**İspat:**  $f \in C^2[0, 1]$  ve  $\lambda > 0$  olsun. Taylor formülü

$$R_{f,x}(t) = \int_x^t (t-v)f''(v)dv$$

olmak üzere

$$f(t) = f(x) + f'(x)(t-x) + R_{f,x}(t) \quad (4.5)$$

dir. Buradan ortalama değer teoreminden

$$R_{f,x}(t) = \frac{f''(\xi_{t,x})}{2}(t-x)^2$$

eşitliği sağlayan bir  $\xi_{t,x} \in (\min\{x, t\}, \max\{x, t\})$  vardır. Böylece (4.5) eşitliği

$$f(t) = f(x) + f'(x)(t-x) + \frac{f''(\xi_{t,x})}{2}(t-x)^2 \quad (4.6)$$

biçiminde yazılabilir.  $T_\lambda$  operatörlerini (4.6) eşitliğine uygulanırsa Lemma 4.1.2'den

$$|T_\lambda(f, x) - f(x)| \leq T_\lambda\left(\left|\frac{f''(\xi_{t,x})}{2}\right|(e_1 - x)^2, x\right)$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{\|f''\|}{2} T_\lambda((e_1 - x)^2, x) \\ &= \frac{\|f''\|}{2} \frac{x(1-x)}{\lambda+1} \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece her  $\lambda > 0$  için

$$|T_\lambda(f, x) - f(x)| \leq \frac{\|f''\|}{8\lambda}$$

elde edilir.  $\square$

**4.2.5 Teorem:**  $f \in C^2[0, 1]$  olsun. Bu durumda her  $\lambda > 0$  için

$$|T_\lambda(f, x) - f(x)| \leq \frac{9}{4} \omega_2(f, \delta_\lambda)$$

eşitsizliği sağlanır.

**İspat:**  $f \in C^2[0, 1]$  olmak üzere  $0 < h \leq \frac{1}{2} \min\{x, 1-x\}$  için

$$g_h(x) = \frac{1}{h^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left\{ 2f(x+t_1+t_2) - f(x+2t_1+2t_2) \right\} dt_1 dt_2$$

biçiminde tanınsın. Buradan

$$|g_h''(x)| = \left| \left\{ 2f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x) \right\} + \left\{ f(x-2h) - 2f(x-h) + f(x) \right\} \right|$$

elde edilir. Böylece

$$|g_h''(x)| \leq \frac{2}{\delta^2} \omega_2(f, \delta)$$

ve



$$\left| \int_{-\alpha}^{\alpha} h(t) dt \right| \leq 2\alpha \sup_{u \in [-\alpha, \alpha]} |h(u)|$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} |f(x) - g_h(x)| &= \left| \frac{1}{h^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left\{ f(x + t_1 + t_2) - 2f(x + 2t_1 + 2t_2) + f(x) \right\} dt_1 dt_2 \right| \\ &\leq \frac{1}{h^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} |f(x + t_1 + t_2) - 2f(x + 2t_1 + 2t_2) + f(x)| dt_1 dt_2 \leq \omega_2(f, \delta) \end{aligned}$$

olur. Son eşitsizlik ve Teorem 4.2.4 kullanılırsa

$$\begin{aligned} \|T_\lambda(f) - f\| &\leq \|T_\lambda(f - g_h)\| + \|T_\lambda(g_h) - g_h\| + \|f - g_h\| \\ &\leq \|T_\lambda\| \|f - g_h\| + \|T_\lambda(g_h) - g_h\| + \|f - g_h\| \\ &= 2 \|f - g_h\| + \|T_\lambda(g_h) - g_h\| \leq 2\omega_2(f, \delta) + \frac{\|g_h''\|}{8\lambda} \\ &\leq 2\omega_2(f, \delta) + \frac{1}{8\lambda} \frac{2}{\delta^2} \omega_2(f, \delta) = \omega_2(f, \delta) \left( 2 + \frac{1}{4\lambda\delta^2} \right) \end{aligned}$$

olur. Böylece  $\delta_\lambda = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$  seçerek istenilen sonuca ulaşılır.  $\square$

**4.2.6 Teorem:**  $K(f, \delta_\lambda)$ , (2.6) ile tanımlanan Peetre  $K$ -fonksiyoneli ve  $\delta_\lambda = \frac{1}{\lambda}$  olsun. Bu durumda her  $f \in C[0, 1]$  ve  $t \in [0, 1]$  sabit değeri için

$$\|T_\lambda(f) - f\|_{C[0,1]} \leq 2K(f, \delta_\lambda)$$

olur.

**İspat:**  $K(f, \delta_\lambda)$ , (2.6) ile tanımlanan Peetre  $K$ -fonksiyoneli ve  $\delta_\lambda = \frac{1}{\lambda}$  olsun. Bir  $g \in C^2[0, 1]$  için  $u_{t,x} \in (\min\{x, t\}, \max\{x, t\})$  olmak üzere

$$g(t) - g(x) = g'(x)(t - x) + \frac{g''(u)}{2!}(t - x)^2$$

olur. Bu durumda  $t \in [0, 1]$  için  $T_\lambda$  operatörünü bu eşitliğin iki tarafına uygulanacak olursa

$$\begin{aligned} |T_\lambda(g, x) - g(x)| &\leq |g'(x)| |T_\lambda((e_1 - x), x)| \\ &+ \frac{1}{2} |g''(x)| |T_\lambda((e_1 - x)^2, x)| \end{aligned} \quad (4.7)$$

elde edilir. Buradan Lemma 4.1.2 göz önüne alırsa (4.7) eşitsizliği

$$|T_\lambda(g, x) - g(x)| \leq \frac{1}{2} |g''(x)| \frac{x(1-x)}{\lambda+1}.$$

biçiminde yazılabilir. Böylece

$$\|T_\lambda(g) - g\|_{C[0,1]} \leq \|g''\|_{C[0,1]} \frac{1}{2\lambda} \leq \|g\|_{C^2[0,1]} \frac{1}{2\lambda} \quad (4.8)$$

olur. Diğer taraftan  $T_\lambda$  operatörleri lineer operatörler olduğundan

$$|T_\lambda(g, x) - g(x)| \leq |T_\lambda(f - g, x)| + |f(x) - g(x)| + |T_\lambda(g, x) - g(x)|$$

bulunur. Buradan da

$$\|T_\lambda(f) - f\|_{C[0,1]} \leq 2 \|f - g\|_{C[0,1]} + \|T_\lambda(g) - g\|_{C[0,1]} \quad (4.9)$$

olur. (4.9), (4.8) ile göz önüne alındığında ise, son eşitsizlik

$$\|T_\lambda(g) - g\|_{C[0,1]} \leq 2 \left\{ \|f - g\|_{C[0,1]} + \|g(x)\|_{C[0,1]} \frac{1}{2\lambda} \right\} \quad (4.10)$$

biçiminde yeniden yazılabilir. Eğer (4.10) eşitsizliğinin iki tarafının  $g \in C^2[0, 1]$  olmak üzere  $\delta_\lambda = \frac{1}{\lambda}$  için infimumunu alınacak olursa ispat tamamlanır. Burada dikkat edilmelidir ki  $\lambda \rightarrow \infty$  olduğunda  $\delta_\lambda \rightarrow 0$  olur.  $\square$

Sıradaki teorem  $T_\lambda$  operatör dizisinin  $f$  fonksiyonuna Zygmund modülü ile yaklaşım hızını verir.

**4.2.7 Teorem:**  $f \in C[0, 1]$  olsun. Bu durumda her  $0 \leq \delta \leq 1$  ve  $t \in [0, 1]$  sabit değeri için

$$\| T_\lambda(f) - f \|_{C[0,1]} \leq C_f \max \left\{ \omega_2 \left( f, \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right), \frac{1}{\lambda} \right\} \quad (4.11)$$

olur.

**İspat:**  $f \in C[0, 1]$  olmak üzere her  $0 \leq \delta \leq 1$  ve  $t \in [0, 1]$  sabit olsun. Teorem 2.1.6'daki eşitsizlik, Teorem 4.2.6'ye uygulanırsa

$$K(f, \delta) \leq C \left[ \omega_2 \left( f, \sqrt{\delta} \right) + \min\{1, \delta\} \| f \|_{C[0,1]} \right],$$

ve buradan da  $\delta = \frac{1}{\lambda}$  seçilirse,

$$\| T_\lambda(f, x) - f(x) \|_{C[0,1]} \leq 2C \left[ \omega_2 \left( f, \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right) + \frac{1}{\lambda} \| f \|_{C[0,1]} \right] \quad (4.12)$$

elde edilir. Böylece  $\frac{1}{\lambda} < \omega_2 \left( f, \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right)$  ise (4.12) eşitsizliği,

$$\| T_\lambda(f, x) - f(x) \|_{C[0,1]} \leq 2C (1 + \| f \|_{C[0,1]}) \omega_2 \left( f, \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right) \quad (4.13)$$

verir. Aksi takdirde  $\omega_2 \left( f, \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right) < \frac{1}{\lambda}$  ise, (4.12) eşitsizliği,

$$\| T_\lambda(f, x) - f(x) \|_{C[0,1]} \leq 2C (1 + \| f \|_{C[0,1]}) \frac{1}{\lambda} \quad (4.14)$$

olur. Böylece (4.13) ve (4.14)'de  $2C (1 + \| f \|_{C[0,1]}) = C_f$  seçilirse (4.11) elde edilir.  $\square$

### 4.3 Voronovskaya Tipi Teorem

Önemli asimptotik formüllerden biri [4, 21] kaynaklarında Bernstein operatörleri için Voronovskaya teoremini ispat eden Voronovskaya tarafından verilmiştir. Pozitif operatör dizileri için benzer tip teoremler [29, 30] kaynaklarında bulunabilir. Bu bölümde yeni tanımlanan  $T_\lambda$  operatör dizisi için Voronovskaya-tipi bir teorem verilmiştir.

**4.3.1 Teorem:**  $f \in C^2[0, 1]$  olsun. Bu durumda her  $x \in (0, 1)$  sabiti için

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda [T_\lambda(f, x) - f(x)] = \frac{1}{2}x(1-x)f''(x)$$

olur.

**İspat:**  $f \in C^2[0, 1]$  olsun. Bir  $x \in (0, 1)$  sabit noktası için Taylor formülünü kullanırsak her  $t \in (0, 1)$  için,  $g(t, x)$  kalıntısının Peano formu ve  $g(t, x) \in C^2[0, 1]$  için  $\lim_{t \rightarrow x} g(t, x) = 0$  olmak üzere

$$f(t) = f(x) + f'(x)(t-x) + \frac{1}{2}f''(x)(t-x)^2 + g(t, x)(t-x)^2$$

dir. Sonuç 4.1.1'de verilen  $T_\lambda(e_0, x) = 1$  eşitliğinden

$$\begin{aligned} T_\lambda(f, x) - f(x) &= f'(x)T_\lambda((e_1 - x), x) + \frac{1}{2}f''(x)T_\lambda((e_1 - x)^2, x) \\ &\quad + T_\lambda(g(t, x)(e_1 - x)^2, x) \end{aligned}$$

olur. Buradan Cauchy-Schwarz eşitsizliği ile

$$T_\lambda(g(t, x)(t-x)^2, x) \leq [T_\lambda((e_1 - x)^4, x)]^{\frac{1}{2}} [T_\lambda(g^2(t, x), x)]^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir.  $\varphi(t, x) = g^2(t, x)$  fonksiyonu  $t \in [0, 1]$  için Teorem 4.1.3'in koşullarını sağladığından

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} T_\lambda(g^2(t, x), x) = 0$$

dir. Üstelik Lemma 4.1.3 göz önüne alırsa,

$$\lambda T_\lambda (g(\cdot, x)(e_1 - x)^2, x)$$

ve buradanda

$$\leq \left[ \lambda^2 \frac{3\lambda}{\lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6} c_\lambda(x) \right]^{\frac{1}{2}} [T_\lambda(g^2(\cdot, x), x)]^{\frac{1}{2}}$$

bulunur. Bu son eşitsizlik ise

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda T_\lambda (g(\cdot, x)(e_1 - x)^2, x) = 0$$

sonucunu verir. Böylece yukarıdaki sonuçlar ve Lemma 4.1.2'den

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda [T_\lambda(f, x) - f(x)] = \frac{1}{2}x(1-x)f''(x)$$

elde edilir.  $\square$

#### 4.4 Bernstein Operatörünün Özyapısı

$n = 1, 2, \dots$  için klasik  $B_n : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$  Bernstein operatörleri olsun.  $\lambda_k^{(n)}$  Bernstein operatörlerinin özdeğerleri olmak üzere

$$\lambda_k^{(n)} := \frac{n!}{(n-k)!n^k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

olur [31]. Özfonksiyon eşitliği  $\pi_n$  dereceden  $n$ 'yi aşmayan polinomların kümesi ve  $b_j$ 'nin derecesi  $j$  olmak üzere  $\{b_0, b_1, \dots, b_n\}$  tabanına göre,

$$B_n p_k^{(n)} = \lambda_k^n p_k^{(n)}$$

biçiminde yazılırsa  $B_n(f)$  operatörünün taşıdığı polinomun derecesini azalttığı görülür. Bu ise bize bir üst üçgen matris sistemini verir.  $b_j$ 'ler  $e_j$  monomileri olduğunda aşağıdaki köşegenleştirme teoremi Cooper [31] makalesinde vermiştir. Bu notun amacı operatörün öz yapısına dair ek bilgi vermektir.

$B_n(f)(x), \sum_{j=0}^N b_j x^j$  biçiminde bir polinom olmak üzere

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{n} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{n^{N-1}} \\ 0 & 0 & \frac{(n-1)}{n} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{S(N,2)(n-1)}{n^N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{n!}{n^N(n-N)!} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

olsun. Diğer bir deyişle  $\vec{b} = P\vec{a}$ ,  $P = (t_{jk}) = S(k, j) \frac{n!}{n^k(n-j)!}$  olsun. Bu üst üçgen matris  $B_n$  nin  $\pi_N$ 'ye kısıtlamasının bir matris gösterimidir. Açık ki özdeğerler bu matrisin köşegeni üzerindeki elemanlarıdır. Buradan  $B_n f = \lambda f$  olması için gerek ve yeter koşul  $n = 1, 2, \dots$  olmasıdır.  $\lambda = 1$  özdeğer uzayı iki boyutludur fakat geri kalan özdeğerlerin uzaylar çok boyutlu değildir.

Ayrıca bu matrisin  $P^{-1} = (l_{ik}) = (-1)^{k-i} s(k, i) \frac{n^k(n-j)!}{n!}$  biçiminde bir tersi vardır.

$$\begin{aligned} PP^{-1} &= \sum_{k=0}^N t_{jk} l_{ki} \\ &= \sum_{k=0}^N \left( S(k, j) \frac{n!}{n^k(n-j)!} \right) \left( (-1)^{k-i} s(k, i) \frac{n^k(n-j)!}{n!} \right) = \delta_{ij} \end{aligned}$$

olduğu için ters matris

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{n-1} & \frac{2}{(n-1)(n-2)} & \dots & (-1)^{N-1} n^{N-1} \\ 0 & 0 & \frac{n}{n-1} & \frac{3n}{(n-1)(n-2)} & \dots & \frac{(-1)^{N-2} s(N,2)}{n^{N-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{-s(N,N-1)n^N(n-N+1)!}{n!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{n^N(n-N)!}{n!} \end{pmatrix}$$

dir.

Şimdi  $\lambda = 1$ 'in geometrik yapısını inceleyelim.  $B_n - I$  matrisi

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n^{N-1}} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{n} & \dots & \frac{S(N,2)(n-1)}{n^N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{n!}{n^N(n-N)!} - 1 \end{pmatrix}$$

olsun. Bu matrisi eşolonlaştırırsak  $B_n$ 'nin rankının  $N - 1$  olduğunu görülür.  $\lambda = 1$ 'nin özuzayı iki boyutlu ve diğer bütün özdeğerlerin özuzayları ise bir boyutludur.

#### 4.5 $T_\lambda$ Operatörünün Özyapısı

$T_\lambda$  operatörünün  $L_2[0,1]$  Hilbert uzayına operatör olarak etki ettiğini düşünmek ne kadar doğal görünse de operatörümüz açıkça bu uzayda sınırsızdır. Ancak  $T_\lambda$  operatörü  $C[0,1]$  Banach uzayına sınırlandırılır ise operatör sınırlı ve  $\|T_\lambda\| = 1$  olacaktır. Bazı  $c > 0$ 'ler için  $(1+c)$ - çaplı kapalı diski içeren bir bölgedeki analitik fonksiyonların uzayı üzerine kısıtlanan  $T_\lambda$ 'nin kısıtlaması ile hesaplamaya başlayalım.  $f$  orjin etrafında Taylor serisine açılacağından  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$  yazılabilir böylece aşağıdaki gibi bir hesaplama ile

$$\begin{aligned}
T_\lambda(f, x) &= \int_0^1 K_\lambda(x, t) \sum_{k=0}^{\infty} f_k t^k dt, \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} f_k \int_0^1 K_\lambda(x, t) t^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \frac{(\lambda x)_k}{(\lambda)_k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k}{(\lambda)_k} \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} s(k, j) \lambda^j x^j
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$T_\lambda(f, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k}{(\lambda)_k} \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} s(k, j) \lambda^j x^j \quad (4.16)$$

olur. Cauchy formünden yararlanılacak olursa  $M, \sup\{|f(z)| : |z| \leq 1 + c\}$  olmak üzere

$$|f_k| = \left| \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \right| \leq M(1 + c)^{-k},$$

bulunur. Böylece  $f \in \ell^2$  ve (4.16) eşitliği  $T_\lambda$ 'nın  $\ell^2$  üzerindeki matris gösteriminin etkisini ifade eder. Matris gösterimi üst üçgenseldir buradan operatörün özdeğerleri bu matrisin köşegeni üstündeki elemanlarıdır. Yani  $k = 0, 1, \dots$  için

$$\Lambda_k = \frac{\lambda^k}{(\lambda)_k}, \quad k = 0, 1, \dots$$

olur. Buradan  $0, \Lambda_k \rightarrow 0$  olduğundan bu operatörün spektrumu içindedir.

$\pi_N$ ,  $(N + 1)$ -boyutlu derecesi  $N$ 'i aşmayan polinomların kompleks uzayını gösterebilir. Şimdi  $\pi_N$  üzerinde  $T_\lambda$  operatörünün spektrumunu inceleyelim. Bunun için  $f \in \pi_N$  olsun.

$$f(z) = \sum_{k=0}^N f_k z^k$$



(4.16)'dan ve Tanım 2.3.13'ten  $T_\lambda(f, x)$ ,

$$\begin{aligned} T_\lambda(f, x) &= \sum_{k=0}^N f_k \frac{1}{(\lambda)_k} \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} s(k, j) \lambda^j x^j \\ &= \sum_{j=0}^N \sum_{k=j}^N \frac{(-1)^{k-j} \lambda^j}{(\lambda)_k} s(k, j) a_k x^j \end{aligned}$$

biçiminde gösterilebilir. Dolayısıyla  $T_\lambda(f, x)$ ,  $\sum_{j=0}^N b_j x^j$  polinomudur ve

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{\lambda+1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{(N-1)! \lambda}{(\lambda)_N} \\ 0 & 0 & \frac{\lambda^2}{(\lambda)_2} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{(-1)^{N-2} s(N, 2) \lambda^2}{(\lambda)_N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{-s(N, N-1) \lambda^{N-1}}{(\lambda)_N} \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\lambda^N}{(\lambda)_N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

biçiminde gösterilir.

Diğer bir deyişle  $\vec{b} = A \vec{a}$ ,  $A = (t_{jk}) = (-1)^{k-j} s(k, j) \frac{\lambda^j}{(\lambda)_k}$  olur.  $A$  üst üçgensel matrisi  $T_\lambda$ 'nın  $\pi_N$  kısıtlamasının bir matris gösterimini verir. Açık ki özdeğerler köşegen elemanlarıdır. Buradan  $T_\lambda f = \Lambda f$  olması için gerek ve yeter koşul  $\Lambda = 1, 2, \dots$  olmasıdır. Bu ise gösterir ki  $\Lambda = 1$  özdeğeri iki boyutlu uzaya sahip iken geri kalan tek boyutludur. Ayrıca

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= \sum_{k=0}^N t_{jk} h_{ki} \\ &= \sum_{k=0}^N \left( (-1)^{k-i} s(k, i) \frac{\lambda^i}{(\lambda)_k} \right) \times \left( (-1)^{j-k} S(j, k) \frac{(\lambda)_k}{\lambda^j} \right) = \delta_{ij} \end{aligned}$$

olduğundan matrisin inversi  $A^{-1} = (h_{ik}) = (-1)^{k-i} S(k, i) \frac{(\lambda)_i}{\lambda^k}$  olur. Bu durumda

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\lambda} & \dots & \dots & \frac{(-1)^{N-1}}{\lambda^{N-1}} \\ 0 & 0 & \frac{\lambda+1}{\lambda} & \dots & \dots & \frac{(-1)^{N-2}(2^{N-1}-1)(\lambda)_2}{\lambda^N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \frac{-S(N, N-1)(\lambda)_{N-1}}{\lambda^N} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \frac{(\lambda)_N}{\lambda^N} \end{pmatrix}$$

biçimindedir. Şimdi  $\Lambda = 1$ 'in geometrik yapısını inceleyelim.  $A - I$  matrisi

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda+1} & \dots & \dots & \frac{(-1)^{N-1}\lambda}{(\lambda)_{N-1}} & \frac{(-1)^{N-1}\lambda}{(\lambda)_N} \\ 0 & 0 & \frac{\lambda}{(\lambda)_2} - 1 & \dots & \dots & \frac{(-1)^{N-2}s(N-1,2)\lambda^2}{(\lambda)_{N-1}} & \frac{(-1)^{N-2}s(N,2)\lambda^2}{(\lambda)_N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \frac{\lambda^N}{(\lambda)_N} - 1 & \frac{-s(N, N-1)\lambda^{N-1}}{(\lambda)_N} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{\lambda^N}{(\lambda)_N} - 1 \end{pmatrix}$$

biçimindedir. Bu matrisi eşelonlaştırırsak  $T - \Lambda$ 'nın rankının  $N - 1$  olduğu görülür.

Buradan  $\Lambda = 1$ 'in özuzayı iki boyutlu ve diğeri ise bir boyutludur.

$T - \Lambda$ 'nın özdeğerleri,

$$\Lambda_k^{(\lambda)} = \frac{\lambda^k}{(\lambda)_k} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

biçiminde ifade edilir.

$p_k^{(n)}$ ,  $k$ . dereceden monik özfonksiyonları gösterebiliriz ve

$$p_0^n := 1, \quad p_1^n := x - 1/2 \quad (4.17)$$

alalım. Elde edilen bu sonuçlar aşağıda bir teorem şeklinde ifade edilmiştir.

**4.5.1 Teorem:**  $T_\lambda$  operatörü her  $f \in C[0, 1]$  için  $\Lambda_k^{(\lambda)}$  ve  $p_k^{(\lambda)}$  sırasıyla özdeğerleri ve özfonksiyonları olsun. Bu durumda

$$T_\lambda(f) = \Lambda_k^{(\lambda)} f \quad \forall f \in C[0, 1],$$

diagonal formda ifade edilebilir. Burada özdeğerler

$$\Lambda_k^{(\lambda)} = \frac{\lambda^k}{(\lambda)_k} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.18)$$

biçiminde verilir ve

$$1 = \Lambda_0^{(\lambda)} = \Lambda_1^{(\lambda)} > \Lambda_2^{(\lambda)} > \Lambda_3^{(\lambda)} > \dots > \Lambda_k^{(\lambda)} > 0$$

'i sağlarlar. Bu durumda  $\Lambda_k^{(\lambda)}$ 'nın bir özfonksiyonu  $k$ . dereceden

$$p_k^{(\lambda)}(x) = \sum_{j=0}^k c(j, k, \lambda) x^j = x^k - \frac{k}{2} x^{k-1} + \dots \quad (4.19)$$

polinomudur. Bu polinomun katsayıları ise  $j = 2, 3, \dots, k$  için

$$c(k, k, \lambda) := 1, \quad c(k-1, k, \lambda) = \frac{k}{2} \quad (4.20)$$

ve

$$c(k-j, k, \lambda) = \frac{\lambda^{2k-j}}{(\lambda)_{k-j}} \left( \frac{1}{\lambda^{k-1}} - \frac{1}{\lambda^j} \right) \sum_{i=0}^{j-1} \frac{(-1)^{j-i}}{(\lambda)_{k-i}} s(k-i, k-j) c(k-i, k, \lambda),$$

formüllerleriyle hesaplanabilir.

**İspat:**  $p_k^{(\lambda)} = \sum_{s=0}^k a_s x^s$  olsun. Bu durumda  $p_k$ 'nin özdeğerleri  $\Lambda_k = \frac{\lambda^k}{(\lambda)_k}$  olur.  $p_k^{(\lambda)}$ 'nin özdeğeri için  $T_\lambda p_k - \Lambda_k p_k = 0$  eşitliği sağlanmalıdır. Bu eşitlikten

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda^k}{(\lambda)_k} & \cdot & \cdot & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \frac{(-1)^{k-1}s(k,1)\lambda}{(\lambda)_k} & \frac{(-1)^{k-1}s(k+1,1)\lambda}{(\lambda)_{k+1}} & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \frac{(-1)^{k-2}s(k,2)\lambda^2}{(\lambda)_k} & \frac{(-1)^{k-2}s(k+1,2)\lambda^2}{(\lambda)_{k+1}} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \frac{-s(k,k-1)\lambda^{k-1}}{(\lambda)_k} & \frac{s(k+1,k-1)\lambda^{k-1}}{(\lambda)_{k+1}} & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & \frac{-s(k+1,k)\lambda^k}{(\lambda)_{k+1}} & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & \frac{\lambda^{k+1}}{(\lambda)_{k+1}} - \frac{\lambda^k}{(\lambda)_k} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{k-1} \\ a_k \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$$

olur. Bu lineer sistem ise çözülebilirdir. Dolayısıyla sadece matris eşitliği ile  $a_k \neq 0$  olduğu görülür.  $\square$

**4.5.1 Not:** Özfonksiyonların bir listesi aşağıda verilmiştir. İlk dört özfonksiyon  $\lambda$ 'dan bağımsızdır.

$$\begin{aligned} p_0(x) &= 1, & p_1(x) &= x, \\ p_2(x) &= x\left(x - \frac{1}{2}\right), & p_3(x) &= x(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right), \end{aligned}$$

Dördüncü özfonksiyon ise  $\lambda$ 'ya bağlıdır. Aşağıda beşinci özfonksiyon çarpanlarına ayrılarak verilmiştir.

$$p_4(x) = x(x-1) \left\{ \left( x - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \left( x - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) - \frac{1}{5(5\lambda+6)} \right\}$$

(4.20) kullanılırsa (4.19) için ilk katsayıları aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} c(k, k, \lambda) &= 1, & 0 \leq k \leq \lambda, \\ c(k-1, k, \lambda) &= \frac{k}{2}, & 1 \leq k \leq \lambda, \end{aligned}$$

$$c(k-2, k, \lambda) = - \left\{ \frac{s(k, k-2) + \frac{k}{2}s(k-1, k-2)(\lambda+k-1)}{(2k-3)\lambda + (k-1)(k-2)} \right\}, \quad 2 \leq k \leq \lambda.$$

## 4.6 Üstel Operatörlerin Özyapısı

Bu bölümde  $S_\lambda$  üstel operatörünün özel halinin özyapısı incelenmiştir. Bunun için Tanım 2.3.12'de  $p(t)$ ,

$$p(t) = at^2 + bt + c,$$

olsun.  $\pi_N$  derecesi en fazla  $N$  olan polinomların uzayı olmak üzere  $S_\lambda$  operatörünün  $\pi_N$  üzerindeki etkisini düşünelim. Bu uzay  $\mathcal{C}^{N+1}$ 'de  $\sum a_j t^j \rightarrow (a_0, a_1, \dots, a_N)^T$  olarak tanınsın. Bu bölümün ana teoremi aşağıda verilmiştir.

**4.6.1 Teorem:**  $S_\lambda$ 'nin  $\pi_N$ 'ye kısıtlamasının özdeğerleri 1 ve  $\prod_{j=1}^n [1 + ja/\lambda]$ ,  $n = 1, 2, \dots, (N-1)$ 'dir.  $\Lambda = 1$ 'in özuzayı 1 ve  $t$  tarafından üretilir.  $\Lambda = \prod_{j=1}^n [1 + ja/\lambda]$ 'nin özuzayı ise  $(n+1)$ . dereceden bir polinomla üretilir.

**İspat:** Açıktır ki  $n > 1$  için  $\int_{\mathbb{R}} W_\lambda(\lambda, t, u) u^n du$   $n$ . dereceden bir polinomdur. Fakat bunun esas teriminin  $\prod_{j=1}^n [1 + ja/\lambda]$  olduğu iddia edilirse tümevarımla

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}} W_\lambda(\lambda, t, u) u^n du = \frac{\lambda}{p(t)} \int_{\mathbb{R}} W_\lambda(\lambda, t, u) u^n (u-t) du$$

elde edilir. Bu ise  $S_\lambda$ 'nın  $\pi_N$ 'ye kısıtlamasının köşegen elemanları  $1, 1, \prod_{j=1}^n [1 + ja/\lambda]$ ,  $n = 1, 2, \dots, N-1$  olan bir üst üçgensel matris olduğunu gösterir. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.  $\square$

## 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada elde edilen yeni sonuçlar üçüncü ve dördüncü bölümlerde yer almaktadır.

Bu tez çalışmasının üçüncü kısmında Fourier tabanlı yaklaşımda uygulanan Kısmi, Cesàro ve genelleştirilmiş de la Vallée toplanabilme metodları lineer olmayan Fourier tabanına genişletilmiştir. Ayrıca S. Prösdorff tarafından ele alınan Hölder metriğinde trigonometrik polinomlar ile yaklaşım hızının değerlendirilmesi de lineer olmayan Fourier tabanlı seriler için incelenmiştir. Ayrıca genelleştirmeleri dikkate alarak, Hölder metriğinde, Cesàro, genelleştirilmiş de La Vallée toplanabilme metodları kullanılarak  $H_p^\alpha$ ,  $L^p(\Pi)$  ve  $C(\Pi)$  uzayında periyodik fonksiyonlara yaklaşımın hızı ile ilgili ortaya çıkan sonuçlar verilmiştir.

Yaklaşımlar teorisinde çeşitli operatörlerin yaklaşım hızları süreklilik modülleri ve K-fonksiyonelleri yardımıyla verilmektedir. Süreklilik modülü ve K-fonksiyoneli arasında da tezde verdiğimiz eşitsizlikler geçerlidir. 1-boyutlu uzaylarda bu tür yakınsama hızları bir çok çalışmada incelenmiştir. Biz de bu tezde yeni tanımladığımız  $T_\lambda$  operatörü için benzer sonuçları inceledik ve tanımlanabilecek yeni operatörler için benzer çalışmalara bir kaynak oluşturmaya çalıştık.

Bu sonuçlar ile ilgili değerlendirmeler ve açık kalan problemler ile ilgili öneriler aşağıda verilmiştir.

Bu çalışmada ele alınan uzaylarda farklı toplanabilme metodları ile lineer olmayan Fourier tabanında yukardaki problemler yeniden incelenebilir. Ayrıca

farklı fonksiyon sınıfları ve bu sınıflar üzerinde ele alınan normlara göre yaklaşımın derecesinin belirlenmesi ile ilgili problemler ele alınabilir.

Yaklaşım teorisinin bazı düz ve ters teoremleri lineer olmayan Fourier tabanına genişletilip ispatlanabilir ve bu teoremlerin iyileştirmeleri elde edilebilir.

Ayrıca  $T_\lambda$  operatörünün lineer kombinasyonları ile daha iyi yaklaşım sonuçları elde edilebilir.

## 6. Kaynaklar

- [1] Weierstrass, K., *Über die Analytische Darstellbarkeit Sogenannter Willkürlicher Functionen Einer Reellen Veränderlichen*, Sitzungsberichte der Akademiezu Berlin, 633-639, (1885).
- [2] Bernstein, S. N., "Demonstration du theoreme de Weierstrass Fondee sur le Calcul de Probabilites", *Communications of the Kharkov Mathematical Society*, 13,(2), 12, (1912).
- [3] Aral, A., Gupta, V. and Agarwal, R. P., *Applications of q-Calculus in Operator Theory*. Berlin: Springer, (2013).
- [4] Lorentz G. G., *Bernstein Polynomials*. United Kingdom: BookSurge LLC, Deganwy, (1997).
- [5] Nowak G. and Gupta V., "The rate of pointwise approximation of positive linear operators based on q-Integer", *Ukrainian Mathematical Journal*, 63(3), 350-360, (2011).
- [6] Phillips, G. M., "Bernstein polynomials based on the q-integers", *Annals of numerical Mathematics*, 4, 1-4, (1997).
- [7] Ostrovska S., "On the limit q-Bernstein operators", *Mathematica Balkanica*, 18(1-2), 165-172, (2004).
- [8] Stancu, D. D., "Approximation of functions by a new class of linear polynomial operator", *Revue Roumaine de Mathmatiques Pures et Appliques*, 13(8) 1173-1194, (1968).
- [9] May C. P. "Saturation and inverse theorems for combinations of a class of exponential-type operators", *Canad. J. Math.*, 28, 1224-1250, (1976).



- [10] Ismail, M. E. H. and May, C. P., "On a family of approximation operators", *J. Math. Anal. Appl.*, 63, 446-462, (1978).
- [11] Morris C., "Natural exponential families with quadratic variance functions", *Ann. Stat.*, 10, 65-80, (1982).
- [12] DeVore, R. A., Lorentz G G., *Constructive Approximation*, New York: Springer-Verlag, (1993).
- [13] Peetre K., *A Theory of interpolation of Normed Spaces*. Brazilia: Lecture Notes, (1963).
- [14] Bleimann, G., Butzer, P. L., Hann, L., "A Bernstein Type Operator approximating continuous functions on semi-axis", *Nederl. Akad. Wetensch Indag. Math.*, 42(3), 255-262, (1980).
- [15] Doğru, O., Özarslan, M. A., Taşdelen G., F., "On Positive Operators involving a certain class of generating functions", *Stud. Sci. Math. Hung.*, 41(4), 415-429, (2004).
- [16] Prössdorf, S., "Zur Konvergenz der Fourier reihen Hölder stetiger Funktionen", *Math.Nachr.*, 69, (1975).
- [17] Zygmund A., *Trigonometric series, 2nd ed.*, London and New York: Cambridge Univ. Press.,(1959).
- [18] Giuseppe M. and Gradimir V. M. *Interpolation Process Basic Theory and Applications*, Berlin: Springer, (2008).
- [19] Huang, C., Yang, L H., "Approximation by the nonlinear Fourier basis", *Sci China Math*, 54(6), 12071214, (2011).
- [20] DeVore, R. A., "Nonlinear approximation", *Acta Numerica*, 7, 51150, (1998).
- [21] Korovkin P. P. *Linear Operators and Approximation Theory*. Delhi:Hindustan Publishing Corporation, (1960).

- [22] Royden, H. L., *Real Analysis, second edition*, The Macmillan Co., New York; London: Collier-Macmillan Ltd, (1968).
- [23] Lusternik, L. A. and Sobolev, V. I., *Elements of Functional Analysis*. New York: Hindustan Publishing Corporation, (1974).
- [24] Naimark, M.A., "Investigation of the spectrum and the expansion in eigenfunctions of a non-selfadjoint operator of second order on a semi-axis", *AMS Translations.*, 2 (16), 103-193, (1960).
- [25] Andrews, G. E., Askey, R. A. and Roy, R. *Special Functions*. Cambridge: Cambridge University Press, (1999).
- [26] Leindler L., Meir A. and Totik V., "On approximation of Continuous functions in Lipchitz norms", *Acta Math. Hung.* (45), 441-443,(1985).
- [27] Stypinski Z., "On a generalization of the theorem of Prössdorf", *Funct. Approx. Comment. Math.*, 7, 101-104, (1979).
- [28] Brualdi, R. A., *Introductory Combinatorics, Fourth edition*. Upper Saddle River, N.J.: Pearson Prentice Hall, (2004).
- [29] Ciupa, A., "A Voronovskaya-type theorem for a positive linear operators", *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*: ID :42368, 1-7, (2006).
- [30] Rempulska, I. and Skorupka M., " The Voronovskaya Theorem for some operators of the Szasz-Mirakyan Type", *Le Matematiche*, L(9), 251-261, (1995).
- [31] Cooper, S., Waldron S., "The eigenstructure of the Bernstein Operator", *Journal of Approximation Theory*, 105, 133-165, (2000).