T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

TOPOLOJİK UZAYLARDA BAZI SÜREKLİ ÇOĞUL DEĞERLİ FONKSİYONLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SEDA GÖKTEPE

BALIKESİR, MAYIS - 2013

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

TOPOLOJİK UZAYLARDA BAZI SÜREKLİ ÇOĞUL DEĞERLİ FONKSİYONLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SEDA GÖKTEPE

BALIKESİR, MAYIS - 2013

KABUL VE ONAY SAYFASI

Seda GÖKTEPE tarafından hazırlanan "**TOPOLOJİK UZAYLARDA BAZI SÜREKLİ ÇOĞUL DEĞERLİ FONKSİYONLAR**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 31.05.2013 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Doç. Dr. Ahu AÇIKGÖZ	A. Açıkgöz ....
Üye Prof. Dr. Nihal YILMAZ ÖZGÜR	....
Üye Doç. Dr. Özden KORUOĞLU	....

Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez BAÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Prof. Dr. Hilmi NAMLI ....

ÖZET

TOPOLOJİK UZAYLARDA BAZI SÜREKLİ ÇOĞUL DEĞERLİ FONKSİYONLAR
YÜKSEK LİSANS TEZİ
SEDA GÖKTEPE
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI:DOÇ. DR. AHU AÇIKGÖZ)
BALIKESİR, MAYIS - 2013

Çeşitli küme kavramları, $\beta^* g$-sürekli çoğul değerli fonksiyonlar, çoğul değerli fonksiyonların süreklilikleri ve bunlar arasındaki ilişkiler, fuzzy çoğul değerli fonksiyonlar için bazı süreklilik kavramlarını sunmayı amaçlayan bu tez 6 bölümden oluşmaktadır.

Giriş bölümü olan birinci bölüm ve ikinci bölümde tez için gerekli olan ön bilgiler ile bu konuyla ilgili olarak yapılmış bazı çalışmalardan alınan önemli tanımlar ve teoremlerden bahsedilmiştir.

Üçüncü bölümde, Açıkgöz'ün 2011 yılında tek değerli fonksiyonlar için verdiği $\beta^* g$-süreklilik kavramı çoğul değerli fonksiyonlara genişletilerek yeni karakterizasyonlar verilmiştir. Ayrıca bazı sürekli çoğul değerli fonksiyon çeşitleriyle karşılaştırılması yapılarak gerekli ters örnekler verilerek bir diyagram oluşturulmuştur.

Dördüncü bölümde, fuzzy küme, fuzzy nokta, fuzzy eleman olma kavramları verilmiştir.

Beşinci bölümde fuzzy topolojik uzaylar ve altıncı bölümde, fuzzy çoğul değerli fonksiyonlardaki süreklilik çeşitleri ve karakterizasyonları ele alınmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: çoğul değerli fonksiyonlar, fuzzy kümeler, sürekli fonksiyonlar, $\beta^* g$-kapalı kümeler, fuzzy çoğul değerli fonksiyonlar, fuzzy $\beta^* g$-süreklilik.

ABSTRACT

SOME CONTINUOUS MULTIFUNCTIONS IN TOPOLOGICAL SPACES
MSC THESIS
SEDA GÖKTEPE
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS
(SUPERVISOR: ASSOC.PROF.DR. AHU AÇIKGÖZ)
BALIKESİR, MAY 2013

This thesis that aims to present some different sets concepts, $\beta^{*}g$-continuous multifunctions, continuity of multifunctions and the relations between them, some continuity notions for fuzzy multifunctions consists of six sections.

In the first section that is introduction section and in the second section, definitions and theorems taken from important studies and preliminary informations required for this thesis are given.

In the third section, new characterizations by extending $\beta^{*}g$-continuity introduced by Açıkgöz in 2011 to multifunctions are obtained. Also, we formed a diagram by comparing some types of continuous multifunctions and giving required counter examples.

In the forth section, we have given the concepts of fuzzy sets, fuzzy points and fuzzy elements.

In the fifth section, we have introduced fuzzy topological spaces and in the last section, some kinds of fuzzy multifunctions and their charcterizations are obtained.

KEYWORDS: multifunctions, fuzzy sets, continuous functions, $\beta^{*}g$-closed sets, fuzzy multifunctions, fuzzy $\beta^{*}g$-continuity.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

$\forall$	: Her
$\in$	: Ait
$\notin$	: Ait değil
$\neq$	: Eşit değil
$\Longrightarrow$	: Gerektirir
$\Longleftarrow$	: Yeterlidir
$\boldsymbol{\alpha\ q\ \beta}$	: α ile β çakığımsıdır
$\boldsymbol{\alpha\ \not{q}\ \beta}$	: α ile β çakığımsı değildir
$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\tau})$	: Topolojik uzay
$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\tau_x})$	: Fuzzy topolojik uzay
$\boldsymbol{I^X}$	: X' in fuzzy kümeler ailesi
$\boldsymbol{Cl}(\boldsymbol{A})$	: A kümesinin kapanışı
$\boldsymbol{int}(\boldsymbol{A})$	: A kümesinin içi
$\boldsymbol{pCl}(\boldsymbol{A})$	: A kümesinin pre kapanışı
$\boldsymbol{sCl}(\boldsymbol{A})$	: A kümesinin semi kapanışı
$\boldsymbol{\beta^* g}$- $\boldsymbol{Cl}(\boldsymbol{A})$	: A kümesinin $\beta^* g$-kapanışı
$\boldsymbol{\beta^* g}$- $\boldsymbol{int}(\boldsymbol{A})$	: A kümesinin $\beta^* g$-içi
$\boldsymbol{f}$- $\boldsymbol{Cl}(\boldsymbol{\mu})$	: µ fuzzy kümesinin kapanışı
$\boldsymbol{f}$- $\boldsymbol{int}(\boldsymbol{\mu})$	: µ fuzzy kümesinin içi
$\boldsymbol{F^-}(\boldsymbol{A})$	: A kümesinin alt tersi
$\boldsymbol{F^+}(\boldsymbol{A})$	: A kümesinin üst tersi
$\boldsymbol{F^-}(\boldsymbol{\mu})$	: µ fuzzy kümesinin alt tersi
$\boldsymbol{F^+}(\boldsymbol{\mu})$	: µ fuzzy kümesinin üst tersi

ÖNSÖZ

Bu çalışmada β^*g -sürekli fonksiyonlar çoğul değerli fonksiyonlara genişletilmiş ve bu çoğul değerli fonksiyonların bazı özellikleri fuzzy topolojik uzaylarda incelenmiştir.

Yüksek lisans çalışmamın her aşamasında bana daima destek olan, zaman ayıran, yol gösteren değerli hocam ve tez danışmanım Doç. Dr. Ahu AÇIKGÖZ'e içtenlikle teşekkür ederim.

Yüksek lisans eğitimim boyunca destek sağlayan TÜBİTAK-Bilim İnsanı Destekleme Daire Baskanlığı (BİDEB)'e teşekkür ederim.

Bana her zaman inanan, güvenen ve destek olan sevgili anneme, babama, kardeşime ve ikiz kardeşim Arş. Gör. Sevda GÖKTEPE' ye sonsuz şükranlarımı sunarım.

1. GİRİŞ

Kapalı kümeler ve bu kümelerden elde edilen kavramlar üzerine bu zamana kadar çok sayıda araştırma yapılmıştır. g-kapalı kümeler kavramı Levine tarafından verilmiş, kapalı kümeler ve g-kapalı kümeleri içeren $T_{1/2}$uzayını elde etmek için kullanılmıştır [1]. Ayrıca, T_0 ve T_1 uzayları arasında $T_{1/2}$, T_{gs}, πgp-$T_{1/2}$ ve $T_{3/4}$ uzayları gibi birçok yeni ayırma aksiyomları bulunmuştur. Dontchev ve Noiri , g-kapalı kümelerden daha zayıf olan rg-kapalı kümeler kavramını tanıttılar [2]. Kumar, g-kapalı kümelerin genellemesi olarak, g^* kapalı kümeyi ve g^* kapalı kümelerin uygulaması olarak $T^*_{1/2}$ ve $*\,T_{1/2}$ uzaylarını verdiler [3]. Devi ve arkadaşları g s-kapalı küme kavramını, Noiri ve arkadaşları gp-kapalı küme kavramını tanıttılar [4]. Zaitsev π-kapalı kümeyi, Mashhour ve arkadaşları pre kapalı kümeyi ve Levine semi kapalı kümeyi tanıttılar [5]. Yuksel ve Beceren , β^* kümeyi tanıttılar ve sürekliliğin bir ayrışımını verdiler [6]. Açıkgöz, kapalı kümeler ile g-kapalı kümeler arasında bulunan $\beta^* g$-kapalı küme kavramını çalıştı ve $\beta^* T_{1/2}$ ve $\beta^{**} T_{1/2}$ olan iki yeni ayırma aksiyomunu ortaya koydu. Ayrıca, $\beta^* g$-süreklilik ve $\beta^* g$-irresolute kavramlarını verdi [7].

Fuzzy mantığı ilk kez Zadeh tarafından 1965 yılında fuzzy (belirsiz) küme kavramı tanımıyla ortaya çıkmıştır [8]. Fuzzy küme kavramı kullanılarak fuzzy topolojik uzaylar konusunda da çalışılmıştır. Chang 1968 yılında fuzzy topolojik uzay kavramını tanıtmıştır [9]. Sonrasında da genel topolojideki birçok kavram da fuzzy topolojiye göre düzenlenmiştir. Bu bağlamda, genel topolojideki süreklilik kavramlarının çoğu farklı araştırmacılar tarafından fuzzy topolojiye aktarılmıştır. İlk olarak 1985 yılında Papageorgio fuzzy çoğul değerli fonksiyon fikrini ortaya atmış [10] ve 1991 yılında da Mukherjee ve Malakar çakışığımsı kavramını kullanarak fuzzy çoğul değerli fonksiyonlarda semi-süreklilik, hemen hemen süreklilik ve zayıf süreklilik kavramlarını incelemişlerdir [11]. 1997 yılında da Yıldırım fuzzy çoğul değerli fonksiyonlarda hemen hemen zayıf süreklilik üzerine bir çalışma yapmıştır [12].

Bu tezin amacı da, $\beta^{*}g$-sürekli fonksiyonları çoğul değerli fonksiyonlara genişletmek ve bu çoğul değerli fonksiyonların bazı özelliklerini fuzzy topolojik uzaylarda da incelemektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezin diğer bölümlerinde kullanılacak olan bazı temel kavramlardan bahsedilmiştir.

2.1 Çeşitli Açık ve Kapalı Küme Kavramları

Bu bölümde tez için kullanılacak olan açık küme ve kapalı küme çeşitleri tanıtılmıştır.

2.1.1 Tanım

(X,τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer,

a) $A = int\left(cl(A)\right)$ ise; A kümesine regüler açık küme [13],

b) Regüler açık kümelerin sonlu birleşimine ise π-açık küme denir. Bir π-açık kümenin tümleyenine π-kapalı küme denir [5].

c) $A \subset int\left(cl(A)\right)$ ise; A kümesine pre açık küme denir. Bir pre açık kümenin tümleyenine pre kapalı küme denir. A kümesini kapsayan tüm pre kapalı kümelerin kesişimine, A kümesinin pre kapanışı denir ve $pcl(A)$ ile gösterilir [14].

d) $A \subset cl\left(int(A)\right)$ ise; A kümesine semi açık küme denir. Bir semi açık kümenin tümleyenine semi kapalı küme denir. A kümesini kapsayan tüm semi kapalı kümelerin kesişimine, A kümesinin semi kapanışı denir ve $scl(A)$ ile gösterilir [15].

2.1.2 Tanım

(X,τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer,

a) $A \subset U$ ve U açık küme iken $cl(A) \subset U$ oluyorsa; A kümesine g-kapalı küme [1],

b) $A \subset U$ ve U g-açık küme iken $cl(A) \subset U$ oluyorsa; A kümesine g^*-kapalı küme [3],

c) $A \subset U$ ve U π-açık küme iken $cl(A) \subset U$ oluyorsa; A kümesine πg-kapalı küme [2] denir.

2.1.3 Tanım

(X, τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer,

a) $A \subset U$ ve U açık küme iken $pcl(A) \subset U$ oluyorsa; A kümesine gp-kapalı küme [16],

b) $A \subset U$ ve U açık küme iken $scl(A) \subset U$ oluyorsa; A kümesine gs-kapalı küme [17] denir.

2.1.4 Tanım

(X, τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer,

a) $A \subset U$ ve U π-açık küme iken $pcl(A) \subset U$ oluyorsa ; A kümesine πgp-kapalı küme [18],

b) $A \subset U$ ve U π-açık küme iken $scl(A) \subset U$ oluyorsa ; A kümesine πgs-kapalı küme [19] denir.

Eğer bir $A \subset X$ kümesinin tümleyeni g-kapalı (g^*-kapalı, πg-kapalı, gp-kapalı, gs-kapalı, πgp-kapalı,πgs-kapalı) ise, A kümesi g-açık (g^*-açık, πg-açık, gp-açık, gs-açık, πgp-açık, πgs-açık) tır denir.

2.1.5 Tanım

(X, τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer,

a) U açık küme ve V kapalı küme iken $A = U \cap V$ oluyorsa ; A kümesine lokal kapalı küme (kısaca L.C) [20],

b) U açık küme ve $int(V) = cl(int(V))$ iken $A = U \cap V$ oluyorsa ; A kümesine β^*-küme [6],

c) $A \subset U$ ve U β^*-küme iken $cl(A) \subset U$ oluyorsa; A kümesine β^*g-kapalı küme [7],

d) $A \subset U$ ve U β^*-küme iken $scl(A) \subset U$ oluyorsa; A kümesine β^*gs-kapalı küme [7],

e) $A \subset U$ ve U β^*-küme iken $pcl(A) \subset U$ oluyorsa; A kümesine β^*gp-kapalı küme [7] denir.

Bir $x \in X$ noktasını içeren tüm β^*g-açık kümelerinin ailesi $\beta^*gO(X,x)$ ile gösterilir. Bir (X,τ) topolojik uzayının tüm β^*g-açık (β^*g-kapalı) kümelerinin ailesi $\beta^*gO(X)$ ($\beta^*gC(X)$) ile gösterilir.

2.1.6 Tanım

(X,τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Bir kümenin β^*g-kapanışını aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz:

β^*g-$cl(A) = \bigcap\{F: A \subset F \ ve\ F,\ \beta^*g$-kapalı$\}$ [7].

2.1.7 Tanım

(X,τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Bir kümenin β^*g-içini aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz:

β^*g-$int(A) = \bigcup\{G: G \subset A\ \ ve\ G,\ \beta^*g$-açık$\}$.

2.2 Çoğul Değerli Fonksiyonlar ile İlgili Bazı Temel Kavramlar

Çoğul değerli fonksiyonlar genellikle F, G, H ... gibi büyük harflerle gösterilirler. $F: X \to Y$ çoğul değerli bir fonksiyon olmak üzere;

a) $\forall x \in X$ için, $F(x) \neq \emptyset$ dir.

b) $\forall A \subseteq X$ için, $F(A) = \bigcup\{F(x): x \in A\}$ şeklindedir.

Eğer her $y \in Y$ için $y \in F(x)$ olacak şekilde bir $x \in X$ noktası varsa veya $F(X) = Y$ oluyorsa F çoğul değerli fonksiyonu örtendir denir. $F: X \to Y$ ve $G: Z \to T$ çoğul değerli fonksiyonlar ve $A \subseteq X, B \subseteq Z$ olmak üzere;

a) $(F \times G)^{+}(A \times B) = F^{+}(A) \times G^{+}(B)$

b) $(F \times G)^{-}(A \times B) = F^{-}(A) \times G^{-}(B)$ dir.

2.2.1 Tanım

$F: X \to Y$ bir çoğul değerli fonksiyon ve $B \subseteq Y$ olsun.

$F^{-}(B) = \{x: F(x) \cap B \neq \emptyset\}$, $F^{+}(B) = \{x: F(x) \subseteq B\}$ kümelerine sırasıyla B kümesinin F altındaki alt ters görüntüsü ve B kümesinin F altındaki üst ters görüntüsü denir [21, 22].

2.2.2 Tanım

(X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere, $F: (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ çoğul değerli fonksiyonu verilsin. Eğer $\forall\, V \in \sigma$ için,

a) $F^{+}(V)$, (X, τ) uzayında açık küme oluyorsa; bu taktirde F çoğul değerli fonksiyonuna üstten semi sürekli [23] (yeniden adlandırılmışı üstten sürekli [24]),

b) $F^{-}(V)$, (X, τ) uzayında açık küme oluyorsa; bu taktirde F çoğul değerli fonksiyonuna alttan semi sürekli [23] (yeniden adlandırılmışı alttan sürekli [24]) denir.

$\beta^* g$-kapalı kümelerin özelliklerinden faydalanarak literatürde tanımlanmış olan süreklilik çeşitlerini çoğul değerli fonksiyonlara aşağıdaki gibi genişletebiliriz.

2.2.3 Tanım

(X,τ) ve (Y,σ) topolojik uzaylar olmak üzere, $F:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ çoğul değerli fonksiyonu verilsin. Eğer

a) Eğer her $S\subset Y$ açık kümesi için $X-F^-(S)$, X uzayında $\beta^* g$ -kapalı oluyorsa; bu takdirde F çoğul değerli fonksiyonuna X üzerinde alttan $\beta^* g$-süreklidir denir.

b) Eğer her $S\subset Y$ kapalı kümesi için $F^-(S)$, X uzayında $\beta^* g$-kapalı oluyorsa; bu takdirde F çoğul değerli fonksiyonuna X üzerinde üstten $\beta^* g$-süreklidir denir.

c) Eğer F çoğul değerli fonksiyonu hem alttan $\beta^* g$-sürekli hem de üstten $\beta^* g$-sürekli ise $\beta^* g$-süreklidir denir.

Şimdi, alttan (üstten) $\beta^* g$-sürekli çoğul değerli fonksiyonların sağladığı özellikleri inceleyelim.

2.2.4 Teorem

$F: X\to Y$ çoğul değerli fonksiyonu için aşağıdakiler denktir:

(1) F çoğul değerli fonksiyonu alttan $\beta^* g$-süreklidir,

(2) Bir $U\subset Y$ açık kümesi ve $x\in X$ noktası için $x\in F^-(U)$ ise, bazı $V\in\beta^* gO(X)$ için $V\subset F^-(U)$ olur,

(3) Bir $D\subset Y$ kapalı kümesi ve $x\in X$ noktası için $x\notin F^+(D)$ ise, $x\notin K$ olan bazı $K\in\beta^* gC(X)$ için $F^+(D)\subset K$ olur,

(4) Her $U\subset Y$ açık kümesi için $F^-(U)\in\beta^* gO(X)$,

(5) Her $V\subset Y$ kapalı kümesi için $F^+(V)\in\beta^* gC(X)$,

(6) Her $A\subset X$ alt kümesi için $F(\beta^* g\text{-}Cl\,(A))\subset Cl\big(F(A)\big)$,

(7) Her $B\subset Y$ alt kümesi için $\beta^* g\text{-}Cl\big(F^+(B)\big)\subset F^+\big(Cl(B)\big)$.

İspat

(1) $\Longrightarrow$(4) Bir $U \subset Y$ açık kümesi alalım. (1) den, $X - F^{-}(U)$ kümesi X uzayında $\beta^{*}g$-kapalıdır. Böylece $F^{-}(U) \in \beta^{*}gO(X)$ olur.

(4) $\Longrightarrow$ (5) Bir $V \subset Y$ kapalı kümesi alalım. $Y - V \subset Y$ açık kümedir. (4) den, $F^{-}(Y - V) \subset X$, $\beta^{*}g$ -açıktır. $F^{-}(Y - V) = X - F^{+}(V)$ olduğundan $F^{+}(V) \subset X$, $\beta^{*}g$-kapalıdır.

(5) $\Longrightarrow$ (6) Her $A \subset X$ alt kümesi için, $Cl(F(A))$, Y uzayında kapalıdır. O halde $A \subset F^{+}(F(A)) \subset F^{+}\left(Cl(F(A))\right)$ dır ve $\beta^{*}g$ - $Cl(A) \subset F^{+}\left(Cl(F(A))\right)$ dır. Böylece $F(\beta^{*}g\text{-}Cl\ (A)) \subset Cl(F(A))$ ifadesini elde etmiş oluruz.

(6) $\Longrightarrow$ (7) Bir $B \subset Y$ alt kümesi alalım. (6) dan $F\,(\beta^{*}g\text{-}Cl\ (F^{+}(B)))\subset Cl\left(F(F^{+}(B))\right) \subset Cl(B)$olur. Böylece $\beta^{*}g$- $Cl(F^{+}(B)) \subset F^{+}(Cl(B))$ olduğu elde edilmiş olur.

(7) $\Longrightarrow$ (1) Bir $V \subset Y$ açık kümesini alalım. $Y - V \subset Y$ kapalı kümedir.

(7) den $\beta^{*}g$- $Cl(F^{+}(Y - V)) \subset F^{+}(Cl(Y - V)) = F^{+}(Y - V)$ dir.

$F^{+}(Y - V) = X - F^{-}(V)$ $\beta^{*}g$-kapalıdır.

(4) $\Longrightarrow$ (2) Bir $U \subset Y$ açık kümesi ve $x \in F^{-}(U)$ alalım. (4) den , $F^{-}(U) \in \beta^{*}gO(X)$ dir. $V = F^{-}(U)$ diyelim. O halde $V \in \beta^{*}gO(X)$ ve $V \subset F^{-}(U)$ olur.

(2) $\Longrightarrow$ (3) Bir $D \subset Y$ kapalı kümesi ve $x \notin F^{+}(D)$ alalım. $Y - D \subset Y$ açıktır ve $x \in X - F^{+}(D) = F^{-}(Y - D)$ dir. Bu yüzden , $V \subset F^{-}(Y - D)$ olacak şekilde $V \in \beta^{*}gO(X)$ vardır.$K = X - V$diyelim. O halde $x \notin K$, $K \in \beta^{*}gC(X)$ ve $K = X - V \supset X - F^{-}(Y - D) = F^{+}(D)$ dir.

(3) $\Longrightarrow$(1) Her $H \subset Y$ kapalı kümesi için $F^{+}(H)$ kümesinin $\beta^{*}g$ -kapalı olduğunu göstermiştik. H bir kapalı küme ve $x \notin F^{+}(H)$ olsun. (3) den , $x \notin K$ ve $F^{+}(H) \subset K$ olacak şekilde K, $\beta^{*}g$-kapalı kümesi vardır. Bu yüzden, $F^{+}(H) \subset \beta^{*}g$ -$Cl(F^{+}(H)) \subset K$ dır. $x \notin K$ olduğundan, $x \notin \beta^{*}g$- $Cl(F^{+}(H))$ dır. Bu da gösterir ki $\beta^{*}g$ - $Cl(F^{+}(H)) \subset F^{+}(H)$ dır. $F^{+}(H) \subset \beta^{*}g$ - $Cl(F^{+}(H))$ ifadesi her

zaman sağlandığından, $F^{+}(H) = \beta^{*}g\text{-}\ Cl\big(F^{+}(H)\big)$ elde edilir. Böylelikle, her $H \subset Y$ kapalı kümesi için $F^{+}(H)$ kümesi $\beta^{*}g$-kapalıdır.

2.2.5 Teorem

$F: X \rightarrow Y$ çoğul değerli fonksiyonu için aşağıdakiler denktir:

(1) F çoğul değerli fonksiyonu üstten $\beta^{*}g$-süreklidir,

(2) Bir $V \subset Y$ açık kümesi ve $x \in X$ noktası için $x \in F^{+}(V)$ ise, bazı $U \in \beta^{*}gO(X)$ için $F(U) \subset V$ olur,

(3) Bir $D \subset Y$ kapalı kümesi ve $x \in X$ noktası için $x \notin F^{-}(D)$ ise, $x \notin K$ olan bazı $K \in \beta^{*}gC(X)$ için $F^{-}(D) \subset K$ olur,

(4) Her $U \subset Y$ açık kümesi için $F^{+}(U) \in \beta^{*}gO(X)$,

(5) Her $V \subset Y$ kapalı kümesi için $F^{-}(V) \in \beta^{*}gC(X)$,

(6) Her $A \subset X$ alt kümesi için $F(\beta^{*}g\text{-}Cl\ (A)) \subset Cl\big(F(A)\big)$,

(7) Her $B \subset Y$ alt kümesi için $\beta^{*}g\text{-}\ Cl\big(F^{-}(B)\big) \subset F^{-}(Cl(B))$.

İspat

Teorem 2.2.5’ e benzer olarak yapılabilir.

3. $\beta^* g$ -SÜREKLİ ÇOĞUL DEĞERLİ FONKSİYONLARIN BAZI ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde üstten (alttan) $\beta^* g$ -sürekli çoğul değerli fonksiyon olarak adlandırdığımız yeni bir fonksiyon kavramını verip, bu fonksiyonun bazı sürekli fonksiyon türleriyle karşılaştırması yapılmıştır. Ayrıca, bu fonksiyonun karakterizasyonunu elde edilip, sağladığı özellikler incelenmiştir.

3.1 Tanım

Bir (X, τ) topolojik uzayında her $\beta^* g$-kapalı küme kapalı küme ise, bu uzaya $\beta^* T_{1/2}$-uzay denir [7].

3.2 Tanım

Bir $F: X \to Y$ çoğul değerli fonksiyon olmak üzere, her $V \subset Y$ $\beta^* g$-kapalı kümesi için $F^-(V)$ $(F^+(V)) \subset X$, $\beta^* g$-kapalı küme ise; F çoğul değerli fonksiyonu üstten (alttan) $\beta^* g$-irresolutedir denir.

3.3 Teorem

$F: (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ ve $G: (Y, \sigma) \to (Z, \rho)$ çoğul değerli fonksiyonlar olsunlar.

a) Eğer G üstten (alttan) sürekli ve F üstten (alttan) $\beta^* g$-sürekli ise, $G \circ F$ üstten (alttan) $\beta^* g$-süreklidir.

b) Eğer G üstten (alttan) $\beta^* g$-irresolute ve F üstten (alttan) $\beta^* g$-irresolute ise, $G \circ F$ üstten (alttan) $\beta^* g$-irresolutedir.

c) Eğer G üstten (alttan) $\beta^* g$-sürekli ve F üstten (alttan) $\beta^* g$-irresolute ise, $G \circ F$ üstten (alttan) $\beta^* g$-süreklidir.

d) Eğer G üstten (alttan) $\beta^* g$-sürekli ve F üstten (alttan) $\beta^* g$-sürekli ve Y, $\beta^* T_{1/2}$-uzay ise, $G \circ F$ üstten (alttan) $\beta^* g$-süreklidir.

İspat

a) (Z, ρ) topolojik uzayında V açık kümesi alalım. G üstten sürekli olduğundan, $G^+(V)$, (Y, σ) topolojik uzayında açıktır. F üstten $\beta^* g$-sürekli olduğundan, $F^+\big(G^+(V)\big)$, (X, τ) topolojik uzayında $\beta^* g$-açıktır. O halde, $G \circ F$ üstten $\beta^* g$-süreklidir.

b) (Z, ρ) topolojik uzayında V $\beta^* g$-kapalı kümesini alalım. G üstten $\beta^* g$-irresolute olduğundan, $G^-(V)$, (Y, σ) topolojik uzayında $\beta^* g$-kapalıdır. F üstten $\beta^* g$-irresolute olduğundan, $F^-\big(G^-(V)\big)$, (X, τ) topolojik uzayında $\beta^* g$-kapalıdır. O halde, $G \circ F$ üstten $\beta^* g$-irresolutedir.

c) (Z, ρ) topolojik uzayında V kapalı kümesini alalım. G üstten $\beta^* g$-sürekli olduğundan, $G^-(V)$ (Y, σ) topolojik uzayında $\beta^* g$-kapalıdır. F üstten $\beta^* g$-irresolute olduğundan, $F^-\big(G^-(V)\big)$, (X, τ) topolojik uzayında $\beta^* g$-kapalıdır. O halde , $G \circ F$ üstten $\beta^* g$-süreklidir.

d) (Z, ρ) topolojik uzayında V kapalı kümesini alalım. G üstten $\beta^* g$-sürekli olduğundan, $G^-(V)$ (Y, σ) topolojik uzayında $\beta^* g$-kapalıdır. (Y, σ) $\beta^* T_{1/2}$-uzay olduğundan, $G^-(V)$ (Y, σ) topolojik uzayında kapalıdır. F nin üstten $\beta^* g$-sürekli oluşundan, $F^-\big(G^-(V)\big)$ (X, τ) topolojik uzayında $\beta^* g$-kapalıdır. O halde , $G \circ F$ üstten $\beta^* g$-süreklidir.

Alttan $\beta^* g$-süreklilik ve alttan $\beta^* g$-irresolute fonksiyon ile ilgili ispatlar da benzer olarak yapılabilir.

3.4 Tanım

Bir $F: (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ çoğul değerli fonksiyonu

a) Eğer (Y, σ) topolojik uzayının her V kapalı kümesi için $F^-(V)$ $\big(F^+(V)\big)$, (X, τ) topolojik uzayında π-kapalı (sırasıyla πg-kapalı, πgp-kapalı, πgs-kapalı) ise üstten (alttan) π-sürekli (sırasıyla πg-sürekli, πgp-sürekli, πgs-sürekli) dir denir,

b) Eğer (Y,σ) topolojik uzayının her V kapalı kümesi için $F^{-}(V)\big(F^{+}(V)\big)$, (X,τ) topolojik uzayında LC-küme ise üstten (alttan) LC-sürekli dir denir,

c) Eğer (Y,σ) topolojik uzayının her V kapalı kümesi için $F^{-}(V)\big(F^{+}(V)\big)$, (X,τ) topolojik uzayında g^{*}-kapalı (sırasıyla $\beta^{*}gp$-kapalı, $\beta^{*}gs$-kapalı) ise üstten (alttan) g^{*}-sürekli (sırasıyla $\beta^{*}gp$-sürekli, $\beta^{*}gs$-sürekli) dir denir,

d) Eğer (Y,σ) topolojik uzayının her V kapalı kümesi için $F^{-}(V)\big(F^{+}(V)\big)$, (X,τ) topolojik uzayında g-kapalı (sırasıyla gp-kapalı, gs-kapalı) ise üstten (alttan) g-sürekli (sırasıyla gp-sürekli, gs-sürekli) dir denir.

Şimdi, $\beta^{*}g$ -kapalı kümenin diğer bazı küme çeşitleri ile karşılaştırmasını inceleyelim [7].

3.5 Teorem

(X,τ) bir topolojik uzay olsun. O halde [7],

a) Her kapalı küme $\beta^{*}g$-kapalı kümedir.

b) Her $\beta^{*}g$-kapalı küme g-kapalı kümedir.

c) Her $\beta^{*}g$-kapalı küme $\beta^{*}gp$-kapalı kümedir.

d) Her $\beta^{*}g$-kapalı küme $\beta^{*}gs$-kapalı kümedir.

Şimdi, Tanım 2.1.5' te geçen kümeleri esas alan bazı sürekli fonksiyon kavramları arasındaki geçişleri verelim.

3.6 Teorem

Bir $F:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ çoğul değerli fonksiyonu için aşağıdakiler vardır:

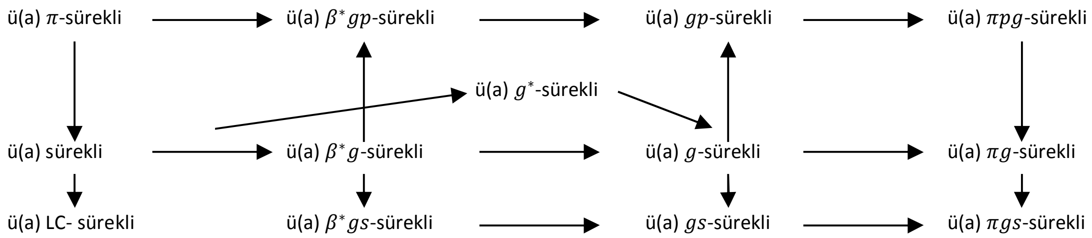
a) F üstten (alttan) sürekli ise, F üstten (alttan) $\beta^{*}g$-süreklidir.

b) F üstten (alttan) $\beta^{*}g$-sürekli ise, F üstten (alttan) g-süreklidir.

c) F üstten (alttan) $\beta^{*}g$-sürekli ise, F üstten (alttan) $\beta^{*}gp$-süreklidir.

d) F üstten (alttan) $\beta^{*}g$-sürekli ise, F üstten (alttan) $\beta^{*}gs$-süreklidir.

Teorem 3.6 dan yararlanarak aşağıdaki diyagram elde edilir.



Şekil 3.1: Diyagram

Aşağıdaki örneklerden de görüleceği gibi Teorem 3.6 daki geçişlerin tersleri her zaman doğru olmayabilir.

3.7 Örnek

$X = \{a, b, c, d\}$ ve $\tau = \{X, \emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}\}$, $\sigma = \{X, \emptyset, \{b, d\}\}$ olsun. $F: (X, \tau) \to (X, \sigma)$ çoğul değerli fonksiyonu $F(a) = \{a, b\}$, $F(b) = \{a, c\}$, $F(c) = \{b\}$ ve $F(d) = \{d\}$ şeklinde tanımlansın. O halde, F üstten $\beta^* g$-süreklidir ancak üstten sürekli değildir.

3.8 Örnek

$X = \{a, b, c\}$ ve $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$, $Y = \{a, b, c, d\}$ ve $\sigma = \{Y, \emptyset, \{c, d\}\}$ olsun. $F: (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ çoğul değerli fonksiyonu $F(a) = \{c, d\}$, $F(b) = \{c\}$ ve $F(c) = \{a, b\}$ şeklinde tanımlansın. O halde, F üstten g-süreklidir ancak üstten $\beta^* g$-sürekli değildir.

3.9 Örnek

$X = \{a,\ b,\ c\}$ ve $\tau = \{X,\ \emptyset,\ \{a\},\ \{c\},\ \{a,b\},\ \{a,c\}\}$, $Y = \{1,2,3,4\}$ ve $\sigma = \{Y,\ \emptyset,\ \{3,4\}\}$ olsun. $F: (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ çoğul değerli fonksiyonu $F(a) = \{1,2\}$, $F(b) = \{2,3,4\}$ ve $F(c) = \{3,4\}$ şeklinde tanımlansın. O halde, F üstten $\beta^* gp$-süreklidir ancak üstten $\beta^* g$-sürekli değildir.

3.10 Örnek

$X = \{a,\ b,\ c\}$ ve $\tau = \{X,\ \emptyset,\ \{a\},\ \{a,b\},\ \{b,c\}\}$, $Y = \{1,2,3\}$ ve $\sigma = \{Y,\ \emptyset,\ \{1\}\}$ olsun. $F: (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ çoğul değerli fonksiyonu $F(a) = \{1\}$, $F(b) = \{2,3\}$ ve $F(c) = \{3\}$ şeklinde tanımlansın. O halde, F üstten $\beta^* gs$-süreklidir ancak üstten $\beta^* g$-sürekli değildir.

3.11 Örnek

$X = \{a,\ b,\ c,\ d\}$ ve $\tau = \{X,\ \emptyset,\ \{b\},\ \{c\},\ \{b,c\},\ \{a,b\},\ \{a,b,c\},\ \{a,b,d\}\}$, $Y = \{1,2,3\}$ ve $\sigma = \{Y,\ \emptyset,\ \{2\}\}$ olsun. $F: (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ çoğul değerli fonksiyonu $F(a) = \{1,3\}$, $F(b) = \{1\}$ ve $F(c) = \{2\}$ şeklinde tanımlansın. O halde, F üstten $\beta^* g$-süreklidir ancak üstten g^*-sürekli değildir.

3.12 Örnek

$X = \{a,\ b,\ c\}$ ve $\tau = \{X,\ \emptyset,\ \{a\},\ \{a,b\},\ \{a,c\}\}$, $Y = \{1,2,3,4\}$ ve $\sigma = \{Y,\ \emptyset,\ \{1,3,4\}\}$ olsun. $F: (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ çoğul değerli fonksiyonu $F(a) = \{1,3\}$, $F(b) = \{1\}$ ve $F(c) = \{2\}$ şeklinde tanımlansın. O halde, F üstten $\beta^* g$-süreklidir ancak üstten g^*-sürekli değildir.

3.13 Teorem

$F: (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ üstten (alttan) $\beta^* g$-sürekli çoğul değerli fonksiyon olsun. Eğer (X, τ) $\beta^* T_{1/2}$-uzay ise, F üstten (alttan) süreklidir.

İspat

F üstten (alttan) $\beta^* g$ -sürekli çoğul değerli fonksiyon olsun. O halde $F^-(V)$ $\left(F^+(V)\right)$, (X, τ) uzayında her $V \subset Y$ kapalı kümesi için $\beta^* g$ -kapalıdır. (X, τ) $\beta^* T_{1/2}$-uzay olduğundan, $\beta^* gC(X, \tau) = C(X, \tau)$ olur. Bu yüzden, her $V \subset Y$ kapalı kümesi için, $F^-(V)\left(F^+(V)\right)$ (X, τ) uzayında kapalı kümedir ve dolayısıyla F üstten (alttan) süreklidir.

3.14 Tanım

Eğer her kapalı $V \subset X$ kümesi için $F(V)$, kapalı ($\beta^* g$-kapalı) küme ise $F: (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ çoğul değerli fonksiyonu kapalı ($\beta^* g$-kapalı) dır denir.

3.15 Teorem

$F: (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ çoğul değerli fonksiyonu örten, üstten (alttan) $\beta^* g$-irresolute ve kapalı olsun. Eğer (X, τ) , $\beta^* T_{1/2}$-uzay ise, (Y, σ) $\beta^* T_{1/2}$-uzaydır.

İspat

$U \subset Y$ herhangi bir $\beta^* g$ -kapalı küme olsun. F üstten (alttan) $\beta^* g$ -irresolute olduğundan, $F^-(U)\left(F^+(U)\right)$, X de $\beta^* g$-kapalıdır. (X, τ) , $\beta^* T_{1/2}$-uzay olduğundan, $F^-(U)\left(F^+(U)\right)$, X de kapalıdır ve F kapalı, örten olduğundan $F\left(F^-(U)\right) = U$ ($F\left(F^+(U)\right) = U$) Y de kapalıdır. Bu da gösterir ki (Y, σ) $\beta^* T_{1/2}$-uzaydır.

3.16 Uyarı

$F: X \to Y$ çoğul değerli fonksiyonu için , $G_F: X \to X \times Y$ graf çoğul değerli fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır:

Her $x \in X$ için $G_F(x) = \{x\} \times F(x)$ dir ve $\{\{x\} \times F(x) : x \in X\}$ alt kümesi F nin graf çoğul değerli fonksiyonu olarak adlandırılır ve G_F ile gösterilir.

3.17 Lemma

$F: X \to Y$ çoğul değerli fonksiyonu ve $A \subset X$, $B \subset Y$ kümeleri için aşağıdaki özellikler vardır [25]:

1) $G_F^+(A \times B) = A \cap F^+(B)$

2) $G_F^-(A \times B) = A \cap F^-(B)$.

Şimdi, graf çoğul değerli fonksiyonunun $\beta^* g$-sürekliliği ile ilgili sağladığı bazı özellikleri aşağıdaki üç teoremde verelim.

3.18 Teorem

$F: (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ çoğul değerli fonksiyon olsun. Graf çoğul değerli fonksiyonu G_F üstten (alttan) $\beta^* g$-sürekli ise, F üstten (alttan) $\beta^* g$-süreklidir.

İspat

$x \in X$ ve $F(x) \subset V$ olacak şekilde $V \subset Y$ açık kümesi alalım. $X \times V$ kümesi $X \times Y$ de açık kümedir. $\{x\} \times F(x) \subset X \times V$, $G_F(x) \subset X \times V$ ve G_F nin üstten (alttan) $\beta^* g$ -sürekli olduğundan, $U \subset G_F^+(X \times V)(U \subset G_F^-(X \times V))$ olacak şekilde $U \in \beta^* gO(X, x)$ vardır. Lemma 3.17 yi kullanarak, $U \subset F^+(V)(U \subset F^-(V))$ ifadesini elde ederiz. Dolayısıyla, F üstten (alttan) $\beta^* g$-süreklidir.

3.19 Teorem

$F: (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ her $x \in X$ için $F(x)$ kompakt olacak şekilde çoğul değerli bir fonksiyon olsun. F üstten $\beta^* g$-süreklidir ancak ve ancak $G_F: X \to X \times Y$ graf çoğul değerli fonksiyonu üstten $\beta^* g$-süreklidir.

İspat

$\Longrightarrow$: $F: X \to Y$ üstten $\beta^* g$ -sürekli olsun. $x \in X$ ve $G_F(x)$ noktasını içeren $W \subset X \times Y$ açık kümesini alalım. Her $y \in F(x)$ için, $(x, y) \in U(y) \times V(y) \subset W$ olacak şekilde $U(y) \subset X$ ve $V(y) \subset Y$ açık kümeleri vardır. O halde, $\{V(y): y \in F(x)\}$ ailesi, $F(x)$ in bir açık örtüsüdür. $F(x)$ kompakt olduğundan, $F(x) \subset \bigcup\{V(y_i): 1 \leq i \leq n\}$ olacak şekilde sonlu sayıda $y_1, y_{2,\dots,} y_n \in F(x)$ noktaları vardır.

$U = \bigcap\{U(y_i): 1 \leq i \leq n\}$ ve $V = \bigcup\{V(y_i): 1 \leq i \leq n\}$ diyelim. U ve V kümeleri sırasıyla X ve Y de açık kümelerdir ve $\{x\} \times F(x) \subset U \times V \subset W$ dir. F üstten $\beta^* g$-sürekli olduğundan, $F(U_0) \subset V$ olacak şekilde $U_0 \in \beta^* gO(X, x)$ vardır. Lemma 3.17 den yararlanarak,

$U \cap U_0 \subset U \cap F^+(V) = G_F^+(U \times V) \subset G_F^+(W)$ elde edilir.

O halde, $U \cap U_0 \in \beta^* gO(X, x)$ ve $G_F^+(U \cap U_0) \subset W$ bulunur. Bu da gösterir ki, $G_F: X \to X \times Y$ graf çoğul değerli fonksiyonu üstten $\beta^* g$-süreklidir.

$\Longleftarrow$: G_F graf çoğul değerli fonksiyonu üstten $\beta^* g$-sürekli olsun. $x \in X$ ve $V \subset Y$, $F(x)$ i içeren açık bir kümesini alalım. $X \times V$ kümesi $X \times Y$' de açık küme ve $G_F(x) \subset X \times Y$ olduğundan $G_F(U) \subset X \times V$ olacak şekilde $U \in \beta^* gO(X, x)$ vardır. Lemma 3.17 den, $U \subset G_F^+(X \times V) = F^+(V)$ ve $F(U) \subset V$ dir. Bu gösterir ki, F üstten $\beta^* g$-süreklidir.

3.20 Teorem

$F: (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ çoğul değerli fonksiyonu alttan $\beta^* g$-süreklidir ancak ve ancak $G_F: X \to X \times Y$ graf çoğul değerli fonksiyonu alttan $\beta^* g$-süreklidir.

İspat

$\Longrightarrow$: $F:(X,\tau)\rightarrow(Y,\sigma)$ çoğul değerli fonksiyonu alttan β^*g -sürekli olsun. $x\in X$ ve $W\subset X\times Y$, $x\in G_F^-(W)$ olacak şekilde açık kümesini alalım. $W\cap(\{x\}\times F(x))\neq\emptyset$ olduğundan, $(x,y)\in W$ olacak şekilde $y\in F(x)$ vardır ve böylece bazı $U\subset X$ ve $V\subset Y$ açık kümeleri için $(x,y)\in U\times V\subset W$ dir. $F(x)\cap V\neq\emptyset$ olduğundan, $G\subset F^-(V)$ olacak şekilde $G\in\beta^*gO(X,x)$ vardır. Lemma 3.17 den,

$U\cap G\subset U\cap F^-(V)=G_F^-(U\times V)\subset G_F^-(W)$ elde edilir.

Ayrıca $x\in U\cap G\in\beta^*gO(X,x)$ ve böylece G_F graf çoğul değerli fonksiyonu alttan β^*g-süreklidir.

$\Longleftarrow$: $G_F:X\rightarrow X\times Y$ graf çoğul değerli fonksiyonu alttan β^*g-sürekli olsun. $x\in X$ ve $V\subset Y$, $x\in F^-(V)$ olacak şekilde açık kümesini alalım. $X\times V,\ X\times Y$ de açık olduğundan $G_F(x)\cap(X\times V)=(\{x\}\times F(x))\cap(X\times V)=\{x\}\times(F(x)\cap V)\neq\emptyset$ dır. G_F fonksiyonu alttan β^*g-sürekli olduğundan, $U\subset G_F^-(X\times V)$ olacak şekilde $U\in\beta^*gO(X,x)$ vardır. Lemma 3.17 den, $U\subset G_F^-(X\times V)=F^-(V)$ ve $U\subset F^-(V)$ dir. Son ifade de gösterir ki, $F:(X,\tau)\rightarrow(Y,\sigma)$ çoğul değerli fonksiyonu alttan β^*g-süreklidir.

3.21 Teorem

(X,τ) ve (X_α,τ_α) , $\alpha\in J$ olmak üzere topolojik uzaylar verilsin. X' den $\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$ çarpım uzayına bir çoğul değerli fonksiyon $F:X\rightarrow\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$ ve $P_\alpha\big((x_\alpha)\big)=\{x_\alpha\}$ her $\alpha\in J$ için olarak tanımlanan bir projeksiyon çoğul değerli fonksiyon $P_\alpha:\prod_{\alpha\in J}X_\alpha\rightarrow X_\alpha$ olsun. Eğer F (üstten) alttan β^*g-sürekli çoğul değerli fonksiyon ise, her $\alpha\in J$ için $P_\alpha\circ F$ (üstten) alttan β^*g-süreklidir.

İspat

V_α , (X_α,τ_α) da açık bir küme olsun. O halde, $(P_\alpha\circ F)^+(V_\alpha)=F^+\big(P_\alpha^+(V_\alpha)\big)=F^+\big(V_\alpha\times\prod_{\beta\neq\alpha}X_\beta\big)$ ($(P_\alpha\circ F)^-(V_\alpha)=F^-\big(P_\alpha^-(V_\alpha)\big)=F^-\big(V_\alpha\times\prod_{\beta\neq\alpha}X_\beta\big)$) dır. F (üstten) alttan β^*g-sürekli çoğul değerli fonksiyon ve $V_\alpha\times\prod_{\beta\neq\alpha}X_\beta$ bir açık küme olduğundan, $F^{+}\left(V_\alpha \times \prod_{\beta\neq\alpha} X_\beta\right)$ $\left(F^{-}\left(V_\alpha \times \prod_{\beta\neq\alpha} X_\beta\right) \right)$ (X,τ) da $\beta^* g$ -açıktır. Böylece her $\alpha \in J$ için $P_\alpha \circ F$ (üstten) alttan $\beta^* g$-süreklidir.

Şimdi, Kartezyen çarpım için $\beta^* g$-kapalı küme ve bu kümeyi esas alan sürekli fonksiyonun bir özelliğini verelim.

3.22 Lemma

Eğer $A \in \beta^* gC(X)$ ve $B \in \beta^* gC(Y)$ ise, $A \times B \in \beta^* gC(X \times Y)$ dir.

3.23 Sonuç

$F:(X,\tau) \to (Y,\sigma)$ ve $G:(Z,\rho) \to (T,\eta)$ çoğul değerli fonksiyonlar olsunlar. $F \times G$, $F \times G: X \times Z \to Y \times T$, $x \in X$ ve $z \in Z$ için $F \times G\big((x,z)\big) = F(x) \times G(z)$ şeklinde tanımlanan çarpım çoğul değerli fonksiyonu olmak üzere, eğer F ve G (üstten) alttan $\beta^* g$-sürekli ise , $F \times G$ (üstten) alttan $\beta^* g$-süreklidir.

3.24 Uyarı

Eğer her $x \in X$ için $F(x)$ kapalı oluyorsa, $F:(X,\tau) \to (Y,\sigma)$ nokta kapalı çoğul değerli fonksiyondur denir.

Şimdi, tanımladığımız yeni uzay kavramları ve bu uzaylar arasındaki ilgiyi verip, üstten (alttan) $\beta^* g$ -sürekli fonksiyonun bu uzaylardaki sağladığı özellikleri inceleyelim.

3.25 Tanım

Eğer (X,τ) topolojik uzayındaki ayrık K ve F kapalı alt kümeleri için, $K \subset U$, $F \subset V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde U ve V $\beta^* g$-açık kümeleri varsa, X topolojik uzayına $\beta^* g$ -Normal topolojik uzay denir.

3.26 Uyarı

Her Normal topolojik uzay $\beta^* g$-Normal topolojik uzaydır.

3.27 Tanım

Eğer X in her $\beta^* g$-açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa, (X, τ) topolojik uzayına $\beta^* g$-kompakt topolojik uzay denir.

3.28 Uyarı

Her $\beta^* g$-kompakt topolojik uzay kompakt topolojik uzaydır.

3.29 Teorem

$F: (X, \tau) \to (Y, \sigma)$, her $x \in X$ için $F(x)$ kompakt olacak şekilde üstten $\beta^* g$-sürekli, örten çoğul değerli fonksiyon olsun. Eğer X, $\beta^* g$-kompakt ise, Y kompakttır.

İspat

$\{V_\lambda : \lambda \in \nabla\}$, Y nin bir açık örtüsü olsun. Her $x \in X$ için $F(x)$ kompakt olduğundan, $F(x) \subset \bigcup\{V_\lambda : \lambda \in \nabla(\mathrm{x})\}$ olacak şekilde $\nabla(\mathrm{x}) \subset \nabla$ vardır. $V(x) = \bigcup\{V_\lambda : \lambda \in \nabla\}$ diyelim. F üstten $\beta^* g$ -sürekli olduğundan, $F(U(x)) \subset V(x)$ olacak şekilde $U(x) \in \beta^* gO(X)$ vardır. $\{U(x) : x \in X\}$ ailesi, X in $\beta^* g$ -açık örtüsüdür ve $X = \bigcup\{U(x_i) : 1 \leq i \leq n\}$ olacak şekilde X de sonlu sayıda $x_1, x_2, \dots, x_n$ noktaları vardır. Dolayısıyla,

$$Y = F(X) = F(\textstyle\bigcup_{i=1}^{n} U(x_i)) = \bigcup_{i=1}^{n} F(U(x_i)) \subset \bigcup_{i=1}^{n} V(x_i) = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{\lambda \in \nabla(x_i)} V_\lambda$$

olur.

Bu gösterir ki, Y uzayı kompakttır.

3.30 Tanım

X topolojik uzayındaki birbirinden farklı x ve y noktaları için $x \in U$ ve $y \in V$ olacak şekilde ayrık, U ve V $\beta^* g$-açık kümeleri varsa, X topolojik uzayına $\beta^* g$-Hausdorff topolojik uzay [26] denir.

3.31 Uyarı

Her Hausdorff topolojik uzay $\beta^* g$-Hausdorff topolojik uzaydır.

3.32 Teorem

$F: X \to Y$, X uzayından Y Normal uzayına nokta kapalı ve üstten $\beta^* g$-sürekli bir çoğul değerli fonksiyon ve birbirinden farklı her $x, y \in X$ noktaları için $F(x) \cap F(y) = \emptyset$ olsun. Bu durumda X, $\beta^* g$-Hausdorff topolojik uzaydır.

İspat

Birbirinden farklı $x, y \in X$ noktaları alalım. O halde $F(x) \cap F(y) = \emptyset$ dir. F nokta kapalı olduğundan , $F(x)$ ve $F(y)$ kapalı kümelerdir. Y Normal uzay olduğundan, sırasıyla $F(x)$ ve $F(y)$ yi içeren ayrık, açık V ve W kümeleri vardır. F üstten $\beta^* g$-sürekli olduğundan, sırasıyla x ve y yi içeren ayrık $\beta^* g$-açık kümeleri vardır. Bu gösterir ki , X $\beta^* g$-Hausdorff topolojik uzaydır.

3.33 Tanım

Eğer X , boş kümeden farklı ve ayrık iki $\beta^* g$-açık kümenin birleşimi olarak yazılamıyorsa, X uzayına $\beta^* g$-bağlantılı topolojik uzay denir.

3.34 Uyarı

Her $\beta^* g$-bağlantılı topolojik uzay bağlantılı topolojik uzaydır.

Uyarı 3.26, 3.28, 3.31 ve 3.34' te geçen karşılaştırmaların terslerinin her zaman geçerli olmadığı [7]' de verildi.

3.35 Uyarı

$F: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ çoğul değerli fonksiyon olmak üzere her $x \in X$ için $F(x)$ bağlantılı oluyorsa, F ye noktasal bağlantılıdır denir.

3.36 Teorem

$F: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ üstten $\beta^* g$-sürekli örten çoğul değerli fonksiyon olsun. Eğer X , $\beta^* g$-bağlantılı ve F noktasal bağlantılı ise , Y bağlantılıdır.

İspat

Y bağlantılı olmasın. $Y = U \cup V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde, Y de boştan farklı U ve V açık kümeler vardır. Her $x \in X$ için $F(x)$ bağlantılı olduğundan, $F(x) \subset U$ veya $F(x) \subset V$ dir. O halde $x \in F^+(U) \cup F^+(V)$ ve böylece $F^+(U) \cup F^+(V) = X$ dir. $U \neq \emptyset$ olduğundan, $u \in U$ seçebiliriz ve F örten olduğundan $u \in F(x)$ için $x \in X$ vardır. Bu yüzden $F(x) \subset U$ ve $x \in F^+(U) \neq \emptyset$ dir. Aynı şekilde, $V \neq \emptyset$ olduğundan, $F^+(V) \neq \emptyset$ ve $F^+(U) \cap F^+(V) \neq \emptyset$ dir. Fakat F üstten $\beta^* g$ -sürekli örten çoğul değerli fonksiyon olduğundan, $F^+(U)$ ve $F^+(V)$ $\beta^* g$-açık kümelerdir. Bu da X in $\beta^* g$-bağlantılı olmasıyla çelişir. O halde, Y bağlantılıdır.

4. ve 5. bölümlerde, 6.bölüm için gerekli olan temel tanım ve özellikleri verelim.

4. FUZZY KÜME, FUZZY NOKTA VE FUZZY ELEMAN OLMA KAVRAMLARI

Bu bölümde tezin kalan kısmında yararlanılan fuzzy küme, fuzzy nokta ve fuzzy eleman olma kavramları verilmiştir.

4.1 Tanım

$X \neq \emptyset$ bir küme ve $I = [0,1]$ kapalı aralık olsun. Tüm $\alpha : X \to I$ fonksiyonların kümesi I^X olmak üzere, I^X in her elemanına , X' in bir fuzzy kümesi denir [8].

Fuzzy kümeleri $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ gibi latin harfleriyle, $\forall x \in X$ için $C_\lambda(x) = \lambda(0 \leq \lambda \leq 1)$ olmak üzere sabit fuzzy kümesini C_λ ile ve bir β fuzzy kümesinin $x \in X$ noktasındaki değerini $\beta(x)$ ile göstereceğiz. Kümeler için kullanacağımız kapsama, birleşim, kesişim ve tümleyen sembolleri yerine fuzzy kümeleri için sırasıyla $\leq$, $\vee$, $\wedge$, $'$ sembollerini kullanacağız. $\forall x \in X$ için $1 \in I$ değerini alan sabit fuzzy kümesini 1 ile, benzer şekilde $\forall x \in X$ için $0 \in I$ değerini alan fuzzy kümesini de 0 ile göstereceğiz.

4.2 Tanım

X içindeki herhangi α ve β fuzzy kümeleri için aşağıdaki özellikler vardır[8] :

1) $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \forall x \in X$ için $\alpha(x) \leq \beta(x)$

2) $\alpha = \beta \Leftrightarrow \forall x \in X$ için $\alpha(x) = \beta(x)$

3) $\mu = \alpha \vee \beta \Leftrightarrow \forall x \in X$ için $\mu(x) = Max\{\alpha(x), \beta(x)\}$

4) $\delta = \alpha \wedge \beta \Leftrightarrow \forall x \in X$ için $\delta(x) = Min\{\alpha(x), \beta(x)\}$

5) $\alpha = 1 - \beta \Leftrightarrow \forall x \in X$ için $\alpha(x) = 1 - \beta(x)$.

4.3 Tanım

X içindeki fuzzy kümelerin bir ailesi $\{\alpha_j\}_{j\in J}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler vardır [9]:

$$\mu = \bigvee_{j\in J} \alpha_j \iff \forall x \in X \text{ için } \mu(x) = Sup_{j\in J}\{\alpha_j(x)\}$$

$$\beta = \bigwedge_{j\in J} \alpha_j \iff \forall x \in X \; için \; \beta(x) = inf_{j\in J}\{\alpha_j(x)\}$$

4.4 Tanım

$x \in X$ ve $\lambda \in (0,1]$ olsun. X içindeki x_λ fuzzy noktası

$$x_\lambda(\mathrm{y}) = \begin{cases} \lambda & y = x \;\; ise \\ 0 & y \neq x \;\; ise \end{cases}$$

olarak tanımlanan X içindeki fuzzy kümesidir. x_λ fuzzy noktasının sıfırdan farklı değer aldığı $x \in X$ noktasına x_λ' nın dayanağı ve $\lambda \in (0,1]$ sayısına da x_λ'nın değeri denir [26].

4.5 Tanım

μ bir fuzzy küme ve x_λ bir fuzzy nokta olmak üzere $\lambda \leq \mu(x)$ ise $x_\lambda \in \mu$ dır [27].

4.6 Teorem

μ ve $\beta \in I^X$, x_λ bir fuzzy nokta olmak üzere aşağıdakiler vardır [11]:

1) $x_\lambda \in \mu \wedge \beta \;\Rightarrow\; x_\lambda \in \mu$ ve $x_\lambda \in \beta$

2) $x_\lambda \in \mu \vee \beta \;\Rightarrow\; x_\lambda \in \mu$ veya $x_\lambda \in \beta$

4.7 Önerme

X de bir μ fuzzy kümesi, kendi fuzzy noktalarının birleşimine eşittir [27].

4.8 Tanım

X içindeki x_λ fuzzy noktası ve β fuzzy kümesi için $\lambda + \beta(x) > 1$ ise x_λ ile β çakışığımsıdır (quasicoincident) denilir ve $x_\lambda q\ \beta$ ile gösterilir [27].

4.9 Önerme

$\{\mu_j\}_{j\in J}X$ de fuzzy kümelerin bir ailesi ve $x_\lambda$da bir fuzzy nokta olsun.

$\exists\, j_0 \in J$ için $x_\lambda\ q\mu_{j_0} \Leftrightarrow x_\lambda \mathrm{q} \bigvee_{j\in J} \mu_j$ dir [27].

4.10 Tanım

X içindeki $\alpha,\ \beta$ fuzzy kümeleri için $\alpha(x) + \beta(x) > 1$ olacak şekilde bir $x \in X$ noktası var ise α ile β çakışığımsıdır denir ve $\alpha\ q\ \beta$ ile gösterilir [27].

4.11 Önerme

$\mu,\ \beta\ \in I^X$ olsun. $\mu \le \beta$ olması için gerek ve yeter şart μ ve β' fuzzy kümelerinin çakışığımsı olmamasıdır, yani $\mu \not{q} (1-\beta)$ olmasıdır. Özellikle, $x_\lambda \in \mu$ olması için gerek ve yeter şart $x_\lambda \not{q} (1-\mu)$ olmasıdır [27].

5. FUZZY TOPOLOJİK UZAYLAR

Bu bölümde fuzzy topolojik uzay kavramı, fuzzy açık, fuzzy kapalı küme kavramları, fuzzy komşuluk kavramı ve çeşitli fuzzy kümeler tanıtılmıştır.

5.1 Tanım

X içindeki fuzzy kümelerin bir ailesi τ_x olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa τ_x' e X de bir fuzzy topoloji, (X, τ_x) ikilisine de fuzzy topolojik uzay denir.

i) 0, 1$\in \tau_x$

ii) $\alpha, \beta \in \tau_x$ise, o halde $\alpha \wedge \beta \in \tau_x$

iii) $\forall j \in J$ için $\alpha_j \in \tau_x$ ise, o halde $\bigvee_{j \in J} \alpha_j \in \tau_x$

τ_x'in her elemanına fuzzy açık küme denir. Bir fuzzy açık kümenin tümleyeni fuzzy kapalı küme olarak tanımlanır [9].

5.2 Tanım

(X, τ_x) fuzzy topolojik uzay, $B \subset \tau_x$ olsun. $\forall \mu \in \tau_x$ için, $\mu = \vee\{\beta \mid \beta \in B'\}$ olacak şekilde $B' \subset B$ alt ailesi var ise , B ailesine τ_x için bir bazdır denir [9].

5.3 Tanım

(X, τ_x) fuzzy topolojik uzay , $\delta \subset \tau_x$ olsun.

$B = \{\wedge A \mid A \in S, S \subset \delta \; ve \; S \; sonlu\}$ ailesi τ_x için bir baz ise δ ailesine τ_x in bir altbazı denir [9].

5.4 Önerme

(X, τ_x) fuzzy topolojik uzay , $B \subset \tau_x$ olsun. B ailesinin τ_x için baz olması için gerek ve yeter şart X içindeki her x_λ fuzzy noktası ve $x_\lambda q\, \mu$ olan her $\mu \in \tau_x$ için $x_\lambda q\, \beta \leq \mu$ olacak şekilde $\beta \in B$ nin var olmasıdır [27].

5.5 Tanım

(X, τ_x) fuzzy topolojik uzay ve $\mu \in I^X$ olsun.

$f\text{-}int(\mu) = \vee \{\beta : \beta \leq \mu,\ \beta \in \tau_x\}$ şeklinde tanımlanan $f\text{-}int(\mu)$ fuzzy kümesine μ'nün fuzzy içi denir [9].

5.6 Teorem

(X, τ_x) fuzzy topolojik uzay ve $\mu \in I^X$ olsun. μ' nün fuzzy açık olması için gerek ve yeter şart $\mu = f\text{-}int(\mu)$ olmasıdır [9].

5.7 Sonuç

(X, τ_x) fuzzy topolojik uzay, α ve $\beta \in I^X$ için aşağıdaki özellikler vardır [28]:

i) $f\text{-}int(1) = 1, f\text{-}int(0) = 0$

ii) $f\text{-}int(\alpha) \leq \alpha$

iii) $f\text{-}int\big(f - int(\mu)\big) = f\text{-}int(\mu)$

iv) $f\text{-}int(\alpha \wedge \beta) = f\text{-}int(\alpha) \wedge f\text{-}int(\beta)$

v) $\vee_{j \in J} f - int(\alpha_j) \leq f\text{-}int(\vee_{j \in J} \alpha_j)$

vi) $\alpha \leq \beta \Longrightarrow f\text{-}int(\alpha) \leq f\text{-}int(\beta)$.

5.8 Tanım

(X, τ_x) fuzzy topolojik uzay, $\beta \in I^{X}$ olsun. f - $cl(\beta) = \wedge \{\mu : \beta \leq \mu,\ 1 - \mu \in \tau_x\}$ şeklinde tanımlanan f-$cl(\beta)$ fuzzy kümesine, β nın fuzzy kapanışı denir [9].

5.9 Sonuç

(X, τ_x) fuzzy topolojik uzay, $\beta \in I^X$ olsun. β' nın fuzzy kapalı olması için gerek ve yeter şart $\beta = f$-$cl(\beta)$ olmasıdır [9].

5.10 Sonuç

(X, τ_x) fuzzy topolojik uzay, α ve $\beta \in I^X$ için aşağıdaki özellikler vardır [28]:

i) f-$cl(1) = 1$, f-$cl(0) = 0$

ii) $\alpha \leq f$-$cl(\alpha)$

iii) f-$cl(f$-$cl(\alpha)) = f$-$cl(\alpha)$

iv) f-$cl(\alpha \vee \beta) = f$-$cl(\alpha) \vee f$-$cl(\beta)$

v) f-$cl(\alpha_j) \leq \wedge_{j \in J} f$-$cl(\alpha_j)$

vi) $\alpha \leq \beta \Longrightarrow f$-$cl(\alpha) \leq f$-$cl(\beta)$.

5.10.1 Teorem

(X, τ_x) fuzzy topolojik uzay, $\mu \in I^X$ olsun. Bu taktirde aşağıdaki özellikler vardır [28] :

a) $1 - \big(f - int(\mu)\big) = f$-$cl(1 - \mu)$

b) $1 - \big(f - cl(\mu)\big) = f$-$int(1 - \mu)$.

5.10.2 Tanım

(X, τ_x) fuzzy topolojik uzay, $\mu \in I^X$ ve x_λ fuzzy nokta olsun. Eğer $x_\lambda \in \beta$ ve $\beta \leq \mu$ olacak şekilde bir β fuzzy açık kümesi varsa μ' ye x_λ nın bir fuzzy komşuluğu denir. x_λ nın tüm fuzzy komşuluklarının ailesi $f\text{-}N(x_\lambda)$ ile gösterilir [27].

5.10.3 Tanım

(X, τ_x) fuzzy topolojik uzay, $\mu \in I^X$ ve x_λ fuzzy nokta olsun. Eğer $x_\lambda q\, \beta$ ve $\beta \leq \mu$ ($x_\lambda q\, \beta \leq \mu$) olacak şekilde bir $\beta \in \tau_x$varsa μ'ye x_λnın q komşuluğu denir [27].

x_λ fuzzy noktasının tüm q-komşuluklarının ailesi $f\text{-}N_q(x_\lambda)$ ile gösterilir.

5.10.4 Teorem

(X, τ_x) fuzzy topolojik uzayındaki bir x_λ fuzzy noktasının q-komşuluklarının ailesi $f\text{-}N_q(x_\lambda)$ olsun. Bu taktirde aşağıdaki özellikler vardır [27]:

1) $\mu \in f\text{-}N_q(x_\lambda)$ ise $x_\lambda q\, \mu$ dir.

2) $\mu, \beta \in f\text{-}N_q(x_\lambda)$ ise $\mu \wedge \beta \in f\text{-}N_q(x_\lambda)$ dır.

3) $\mu \in f\text{-}N_q(x_\lambda)$ ve $\mu \leq \beta$ ise $\beta \in f\text{-}N_q(x_\lambda)$ dır.

4) $\mu \in f\text{-}N_q(x_\lambda)$ ise $\beta \leq \mu$ ve her $x_\lambda q\, \beta$ için $\mu \in f\text{-}N_q(x_\lambda)$ olacak şekilde bir $\beta \in f\text{-}N_q(x_\lambda)$ vardır.

5.10.5 Teorem

(X, τ_x) fuzzy topolojik uzay ve $\mu \in I^X$ olsun. μ'nün fuzzy açık olması için gerek ve yeter şart μ ile çakışığımsı olan her x_λ fuzzy noktası için $\mu \in f\text{-}N_q(x_\lambda)$ olmasıdır [27].

5.10.6 Önerme

(X, τ_x) fuzzy topolojik uzay ve $\mu \in I^X$ ve x_λ bir fuzzy nokta olsun. Bu taktirde $\mu \in f\text{-}N_q(x_\lambda)$ ise $f\text{-}int(\mu) \in f\text{-}N_q(x_\lambda)$ dır [27].

5.10.7 Teorem

(X, τ_x) fuzzy topolojik uzay, $\mu \in I^X$ ve x_λ bir fuzzy nokta olsun. $x_\lambda \in f\text{-}cl(\mu)$ olması için gerek ve yeter şart x_λ nın her bir q-komşuluğunun μ ile çakışığımsı olmasıdır [27].

5.10.8 Önerme

(X, τ_x) fuzzy topolojik uzay, $\mu \in I^X$ ve $\mu \neq 0$ olsun.$f\text{-}cl(\mu) = 1$ olması için gerek ve yeter şart τ_x in her elemanının μ ile çakışığımsı olmasıdır [27].

5.10.9 Tanım

(X, τ_x) fuzzy topolojik uzay, $\mu \in I^X$ ve x_λ bir fuzzy nokta olsun. x_λ nın her q-komşuluğu μ ile çakışığımsı ise, x_λ ya μ fuzzy kümesinin fuzzy değme noktası denir [27].

5.10.10 Tanım

(X, τ_x) fuzzy topolojik uzay, $\mu \in I^X$ olsun. Eğer $\mu \leq f\text{-}int(f\text{-}cl(\mu))$ ise , μ' ye fuzzy pre açık küme denir. Bir fuzzy pre açık kümenin tümleyenine fuzzy pre kapalı küme denir. Her fuzzy açık küme fuzzy pre açık kümedir [28].

5.10.11 Tanım

(X, τ_x) fuzzy topolojik uzay, $\mu \in I^X$ olsun. Eğer $\mu = f\text{-}int(f\text{-}cl(\mu))$ ise , μ' ye fuzzy regüler açık küme ve $\mu = f\text{-}cl(f\text{-}int(\mu))$ ise , μ' ye fuzzy regüler kapalı küme denir [29].

5.10.12 Teorem

a) Bir fuzzy açık kümenin kapanışı fuzzy regüler kapalı kümedir [29].
b) Bir fuzzy kapalı kümenin içi fuzzy regüler açık kümedir [29].

5.10.13 Tanım

(X, τ_x) fuzzy topolojik uzay, $\mu \in I^X$ olsun. Eğer $\mu \leq f\text{-}cl(f\text{-}int(\mu))$ ise , μ' ye fuzzy semi açık küme denir [29].

5.10.14 Tanım

(X, τ_x) fuzzy topolojik uzay olsun. X içindeki her x_λ fuzzy noktası ve x_λ ile çakışığımsı olan her μ fuzzy açık kümesi için $x_\lambda\, \mathrm{q}\beta \leq f\text{-}cl(\beta) \leq \mu$ olacak şekilde bir β fuzzy açık kümesi varsa, X'e fuzzy regüler uzay denir [30].

6. FUZZY ÇOĞUL DEĞERLİ FONKSİYONLARDA FUZZY SEMİ SÜREKLİLİK, FUZZY $\beta^* g$-SÜREKLİLİK, FUZZY ZAYIF $\beta^* g$-SÜREKLİLİK

Bu bölümde, $\beta^* g$ -kapalı kümeyi esas alan yeni süreklilik türleri tanımlanmış, karakterizasyonları ve özellikleri fuzzy topolojik uzaylarda elde edilmiştir. Ayrıca bu fonksiyon türlerinin karşılaştırmasını yapılarak, gerekli ters örnekler verilmiştir.

6.1 Fuzzy Çoğul Değerli Fonksiyonlar

Bu bölümde, fuzzy çoğul değerli fonksiyonlar tanıtılarak, bir fuzzy küme için alt (üst) ters kavramları verilmiştir.

6.1.1 Tanım

(X, τ) bir topolojik uzay ve (Y, τ_Y) bir fuzzy topolojik uzay olsun. Her $x \in X$ için $F(x)$ bir fuzzy küme olacak şekilde bir $F: (X, \tau) \to (Y, \tau_Y)$ fonksiyonuna fuzzy çoğul değerli fonksiyon denir [10].

6.1.2 Tanım

$F: (X, \tau) \to (Y, \tau_Y)$ fuzzy çoğul değerli fonksiyon olsun. Y içindeki μ fuzzy kümesi için $F^+(\mu)$ üst ters ve $F^-(\mu)$ alt ters kümeleri sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır.

$F^+(\mu) = \{x \in X : F(x) \leq \mu\}$, $F^-(\mu) = \{x \in X : F(x)\ q\ \mu\}$ [11].

6.1.3 Teorem

$F: (X, \tau) \to (Y, \tau_Y)$ fuzzy çoğul değerli fonksiyon ve $\beta \in I^Y$olsun. O halde,

$F^-(1-\beta) = X - F^+(\beta)$ dır [11].

İspat

$x \notin F^-(1-\beta)$ olsun. Bu durumda $F(x) \not q (1-\beta)$dır.O halde $F(x) \leq \beta$ dır. Tanım 6.1.2 den $x \in F^+(\beta)$ ve $x \notin X - F^+(\beta)$ olur.

$x \in F^-(1-\beta)$ ise $F(x) q (1-\beta)$ dır. Bu durumda $F(x) \nleq \beta$ ve $x \notin F^+(\beta)$ dir. Tanım 6.1.2 den $x \in X - F^+(\beta)$ olur. O halde, $F^-(1-\beta) = X - F^+(\beta)$ elde edilir.

6.2 Fuzzy Semi Sürekli Çoğul Değerli Fonksiyonlar

Bu bölümde, fuzzy alttan (üstten) semi sürekli çoğul değerli fonksiyon kavramı tanıtılarak bir karakterizasyonu verilmiştir.

6.2.1 Tanım

$F: (X, \tau) \to (Y, \tau_Y)$ fuzzy çoğul değerli fonksiyon ve $x \in X$ olsun.

a) $x \in F^+(\mu)$ olan her bir $\mu \in \tau_Y$ için $U \subset F^+(\mu)$ olacak şekilde x noktasının bir U açık komşuluğu var ise, F' ye x noktasında fuzzy üstten semi-sürekli çoğul değerli fonksiyon denir [11],

b) $x \in F^-(\mu)$ olan her bir $\mu \in \tau_Y$ için $U \subset F^-(\mu)$ olacak şekilde x noktasının bir U açık komşuluğu var ise, F' ye x noktasında fuzzy alttan semi-sürekli çoğul değerli fonksiyon denir [11],

c) F fuzzy çoğul değerli fonksiyonu her $x \in X$ noktasında fuzzy alttan (üstten) semi-sürekli ise F'ye X üzerinde fuzzy alttan (üstten) semi-süreklidir denir [11].

6.2.2 Teorem

$F:(X,\tau)\rightarrow(Y,\tau_Y)$ fuzzy çoğul değerli fonksiyonunun fuzzy alttan (üstten) semi-sürekli olması için gerek ve yeter şart her $\mu\in\tau_Y$ için $F^-(\mu)$ $(F^+(\mu))$ kümesinin X içinde açık olmasıdır [11].

İspat

$\Longrightarrow$: F, fuzzy alttan (üstten) semi-sürekli ve $x\in F^-(\mu)$ olacak şekilde $\mu\in\tau_Y$ olsun. O halde $x\in U\subset F^-(\mu)$ $(x\in U\subset F^+(\mu))$ olacak biçimde X içinde U açık kümesi vardır. Bu ise $x\in int(F^-(\mu))$ $(x\in int(F^+(\mu)))$ dır. O halde, $F^-(\mu)=int(F^-(\mu))$ $(F^+(\mu)=int(F^+(\mu)))$ elde edilir. Sonuç olarak $F^-(\mu)(F^+(\mu))$, X içinde açıktır.

$\Longleftarrow$: $\forall\,\mu\in\tau_Y$ için $F^-(\mu)(F^+(\mu))$ X içinde açık küme, $x\in X$ ve $x\in F^-(\mu)$ $(x\in F^+(\mu))$ olsun. $F^-(\mu)=U$ $(F^+(\mu)=U)$ denilirse; $x\in U\subset F^-(\mu)$ $(x\in U\subset F^+(\mu))$ olur ki, F fuzzy çoğul değerli fonksiyonu $x\in X$ noktasında (alttan) üstten semi süreklidir. O halde F, X de (alttan) üstten fuzzy semi süreklidir.

6.3 Fuzzy Semi $\boldsymbol{\beta^*g}$-Sürekli Çoğul Değerli Fonksiyonlar

Bu bölümde fuzzy alttan (üstten) semi β^*g-sürekli çoğul değerli fonksiyon kavramı tanıtılarak bir karakterizasyonu verilmiştir.

6.3.1 Tanım

$F:(X,\tau)\rightarrow(Y,\tau_Y)$ fuzzy çoğul değerli fonksiyon ve $x\in X$ olsun.

a) $x\in F^+(\mu)$ olan her bir $\mu\in\tau_Y$ için $U\subset F^+(\mu)$ olacak şekilde x noktasının bir U β^*g-açık komşuluğu var ise, F' ye x noktasında fuzzy üstten semi β^*g-sürekli çoğul değerli fonksiyon denir.

b) $x \in F^{-}(\mu)$ olan her bir $\mu \in \tau_Y$ için $U \subset F^{-}(\mu)$ olacak şekilde x noktasının bir U $\beta^{*}g$-açık komşuluğu var ise , F' ye x noktasında fuzzy alttan semi $\beta^{*}g$-sürekli çoğul değerli fonksiyon denir.

c) F fuzzy çoğul değerli fonksiyonu her $x \in X$ noktasında fuzzy alttan (üstten) semi $\beta^{*}g$-sürekli ise F'ye X üzerinde fuzzy alttan (üstten) semi $\beta^{*}g$-süreklidir denir.

6.3.2 Teorem

$F: (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ fuzzy çoğul değerli fonksiyonunun fuzzy alttan semi $\beta^{*}g$-sürekli olması için gerek ve yeter şart her $\mu \in \tau_Y$ için $F^{-}(\mu)$ kümesinin X içinde $\beta^{*}g$-açık olmasıdır.

İspat

$\Longrightarrow$: F , fuzzy alttan semi $\beta^{*}g$-sürekli ve $\mu \in \tau_Y$ için $x \in F^{-}(\mu)$ olsun. O halde $x \in U \subset F^{-}(\mu)$ olacak şekilde X içinde U $\beta^{*}g$-açık kümesi vardır. Bu ise $x \in \beta^{*}g\text{-}int(F^{-}(\mu))$ dır. O halde, $F^{-}(\mu) = \beta^{*}g\text{-}int(F^{-}(\mu))$ elde edilir. Sonuç olarak $F^{-}(\mu)$, X içinde $\beta^{*}g$-açıktır.

$\Leftarrow$: $\forall\, \mu \in \tau_Y$ için $F^{-}(\mu)$ X içinde $\beta^{*}g$-açık küme, $x \in X$ ve $x \in F^{-}(\mu)$ olsun. $F^{-}(\mu) = U$ denilirse $x \in U \subset F^{-}(\mu)$ olur ki, F fuzzy çoğul değerli fonksiyonu $x \in X$ noktasında üstten semi $\beta^{*}g$-süreklidir. O halde F, X de üstten fuzzy semi $\beta^{*}g$-süreklidir.

6.3.3 Teorem

$F: (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ fuzzy çoğul değerli fonksiyonunun fuzzy üstten semi $\beta^{*}g$-sürekli olması için gerek ve yeter şart her $\mu \in \tau_Y$ için $F^{+}(\mu)$ kümesinin X içinde $\beta^{*}g$-açık olmasıdır.

İspat

$\Longrightarrow$: F, fuzzy üstten semi $\beta^* g$-sürekli ve $\mu \in \tau_Y$ için $x \in F^+(\mu)$ keyfi herhangi bir nokta olsun. O halde, $x \in U \subset F^+(\mu)$ olacak şekilde X içinde U $\beta^* g$-açık kümesi vardır. Bu ise $x \in$ $\beta^* g$ - $int\big(F^+(\mu)\big)$ dır. O halde, $F^+(\mu) = \beta^* g$ - $int\big(F^+(\mu)\big)$ elde edilir. Sonuç olarak $F^+(\mu)$, X içinde $\beta^* g$-açıktır.

$\Longleftarrow$: $\forall$ $\mu \in \tau_Y$ için $F^+(\mu)$ X içinde $\beta^* g$-açık küme,$x \in X$ ve $x \in F^+(\mu)$ olsun. $F^+(\mu) = U$ denilirse $x \in U \subset F^+(\mu)$ olur ki, F fuzzy çoğul değerli fonksiyonu $x \in X$ noktasında üstten semi $\beta^* g$-süreklidir. O halde F, X de üstten fuzzy semi $\beta^* g$-süreklidir.

6.4 Fuzzy Hemen Hemen $\beta^* g$-Sürekli Çoğul Değerli Fonksiyonlar

Bu bölümde, fuzzy alttan (üstten) hemen hemen $\beta^* g$-sürekli çoğul değerli fonksiyon kavramı tanıtılmış ve çeşitli karakterizasyonları ele alınmıştır.

6.4.1 Tanım

$F: (X, \tau) \to (Y, \tau_Y)$ fuzzy çoğul değerli fonksiyon ve $x \in X$ olsun.

a) $x \in F^+(\mu)$ olan her bir $\mu \in \tau_Y$ için $U \subset F^+(f\text{-}int(f\text{-}cl(\mu)))$ olacak şekilde x noktasının bir U $\beta^* g$-açık komşuluğu var ise , F' ye x noktasında fuzzy üstten hemen hemen $\beta^* g$-sürekli çoğul değerli fonksiyon denir.

b) $x \in F^-(\mu)$ olan her bir $\mu \in \tau_Y$ için $U \subset F^-(f\text{-}int(f\text{-}cl(\mu)))$ olacak şekilde x noktasının bir U $\beta^* g$-açık komşuluğu var ise , F' ye x noktasında fuzzy alttan hemen hemen $\beta^* g$-sürekli çoğul değerli fonksiyon denir.

c) F fuzzy çoğul değerli fonksiyonu her $x \in X$ noktasında fuzzy alttan (üstten) hemen hemen $\beta^* g$-sürekli ise F'ye X üzerinde fuzzy alttan (üstten) hemen hemen $\beta^* g$-süreklidir denir.

6.4.2 Teorem

$F: (X, \tau) \to (Y, \tau_Y)$ fuzzy çoğul değerli fonksiyonu için aşağıdakiler denktir.

(1) F, fuzzy alttan hemen hemen $\beta^* g$-süreklidir.

(2) $\forall \mu \in \tau_Y$ için $F^-(\mu) \subset \beta^* g\text{-}int(F^-(f\text{-}int(f\text{-}cl(\mu))))$ dir.

(3) Y içindeki her μ fuzzy regüler açık kümesi için $F^-(\mu)$, X içinde $\beta^* g$-açıktır.

(4) $\forall \mu \in \tau_Y$ için $F^-(f\text{-}int(f\text{-}cl(\mu)))$ kümesi X içinde $\beta^* g$-açıktır.

(5) Y içindeki her β fuzzy kapalı kümesi için $\beta^* g$-cl$(F^+(f\text{-}cl(f\text{-}int(\beta)))) \subset F^+(\beta)$ dir.

(6) Y içindeki her β fuzzy regüler kapalı kümesi için $F^+(\beta)$ X içinde $\beta^* g$-kapalıdır.

İspat

(1)⟹(2) $\mu \in \tau_Y$ ve $x \in F^-(\mu)$ olsun. (1) den x noktasının öyle bir U , $\beta^* g$-açık komşuluğu vardır ki $x \in U \subset F^-(f\text{-}int(f\text{-}cl(\mu)))$ olur. O halde $x \in \beta^* g\text{-}int(F^-(f\text{-}int(f\text{-}cl(\mu))))$ dir. Dolayısıyla, $F^-(\mu) \subset \beta^* g\text{-}int(F^-(f\text{-}int(f\text{-}cl(\mu))))$.

(2)⟹(3) μ fuzzy düzenli açık küme, yani $\mu = f\text{-}int(f\text{-}cl(\mu))$ olsun. (2) den, $\mu \in \tau_Y$ için $F^-(\mu) \subset \beta^* g\text{-}int(F^-(f\text{-}int(f\text{-}cl(\mu)))) \subset \beta^* g\text{-}int(F^-(\mu))$ olur. Bu durumda, $F^-(\mu) = \beta^* g\text{-}int(F^-(\mu))$ elde edilir. Dolayısıyla, $F^-(\mu)$ X içinde $\beta^* g$-açıktır.

(3)⟹(4) μ ,Y içinde fuzzy açık küme olsun. O halde $f\text{-}int(f\text{-}cl(\mu))$, Y içinde fuzzy regüler açık kümedir. (3) den, $F^-(f\text{-}int(f\text{-}cl(\mu)))$ kümesi, X içinde $\beta^* g$-açıktır.

(4)⟹(1) $x \in F^-(\mu)$ olacak şekilde μ ,Y içinde fuzzy açık küme olsun. (4) den, $F^-(f\text{-}int(f\text{-}cl(\mu)))=U$ denilirse, U, X içinde $\beta^* g$-açık olur. $\mu \leq f\text{-}int(f\text{-}cl(\mu))$ ve $x \in F^-(\mu)$ den , $x \in F^-(f\text{-}int(f\text{-}cl(\mu)))$ elde edilir. O halde, $x \in F^-(\mu)$ olduğunda $x \in F^-(f\text{-}int(f\text{-}cl(\mu)))$ olmaktadır. Yani, F fuzzy alttan hemen hemen $\beta^* g$-süreklidir.

(2)⟹(5) β, Y içinde fuzzy kapalı küme olsun. (2) den,

$F^{-}(1-\beta) \subset \beta^{*}g\text{-}int(F^{-}(f\text{-}int(f\text{-}cl(1-\beta))))$

$= \beta^{*}g\text{-}int(F^{-}(f\text{-}int(1-\ f\text{-}int(\beta))))$

$= \beta^{*}g\text{-}int(F^{-}(1-(f\text{-}cl(f\text{-}int(\beta)))))$

$F^{-}(1-\beta) = X - F^{+}(\beta)$ eşitliğinden yararlanarak,

$X - F^{+}(\beta) \subset \beta^{*}g\text{-}int(F^{-}(1-(f\text{-}cl(f\text{-}int(\beta)))))$

$= \beta^{*}g\text{-}int(X - F^{+}(f\text{-}cl(f\text{-}int(\beta))))$

$X - F^{+}(\beta) \subset\ X -(\beta^{*}g\text{-}cl(F^{+}(f\text{-}cl(f\text{-}int(\beta)))))$ bulunur.

Sonuç olarak,

$\beta^{*}g\text{-}cl(F^{+}(f\text{-}cl(f\text{-}int(\beta))))\subset F^{+}(\beta)$ elde edilir.

(5)$\Longrightarrow$(6) β, Y içinde fuzzy regüler kapalı küme olsun. Bu durumda, β Y içinde fuzzy kapalı küme olur. (5) ten, $\beta^{*}g\text{-}cl(F^{+}(f\text{-}cl(f\text{-}int(\beta))))\subset F^{+}(\beta)$ ve β, fuzzy regüler kapalı olduğundan, $\beta = f\text{-}cl(f\text{-}int(\beta))$ dir. Bu durumda, $\beta^{*}g\text{-}cl(F^{+}(\beta)) \subset F^{+}(\beta)$ olur. O halde , $F^{+}(\beta)$ X içinde $\beta^{*}g$-kapalıdır.

(6)$\Longrightarrow$(3) μ, Y içinde fuzzy regüler açık küme olsun. $1-\mu$, Y içinde fuzzy regüler kapalı olur. (6) dan, $F^{+}(1-\mu)$, X içinde $\beta^{*}g$-kapalıdır. $F^{+}(1-\mu) = X - F^{-}(\mu)$ eşitliğinden, $F^{-}(\mu)$ X içinde $\beta^{*}g$-açık bir kümedir.

6.4.3 Teorem

$F: (X,\tau) \rightarrow (Y,\tau_{Y})$ fuzzy çoğul değerli fonksiyonu için aşağıdakiler denktir.

(1) F, fuzzy üstten hemen hemen $\beta^{*}g$-süreklidir.
(2) $\forall\mu \in \tau_{Y}$ için $F^{+}(\mu) \subset \beta^{*}g\text{-}int(F^{+}(f\text{-}int(f\text{-}cl(\mu))))$ dir.
(3) Y içindeki her μ fuzzy regüler açık kümesi için $F^{+}(\mu)$, X içinde $\beta^{*}g$-açıktır.
(4) $\forall\mu \in \tau_{Y}$ için $F^{+}(f\text{-}int(f\text{-}cl(\mu)))$ kümesi X içinde $\beta^{*}g$-açıktır.

(7) Y içindeki her β fuzzy kapalı kümesi için $\beta^{*}g$-cl($F^{-}(f\text{-}cl(f\text{-}int(\beta))))\subset$ $F^{-}(\beta)$ dir.

(5) Y içindeki her β fuzzy regüler kapalı kümesi için $F^{-}(\beta)$ X içinde $\beta^{*}g$-kapalıdır.

İspat

(1)⟹(2) F, fuzzy üstten hemen hemen $\beta^{*}g$-sürekli, $\mu \in \tau_Y$ ve $x \in F^{-}(\mu)$ olsun. (1) den x noktasının öyle bir U , $\beta^{*}g$-açık komşuluğu vardır ki $x \in U \subset F^{+}(f\text{-}int(f\text{-}cl(\mu)))$ olur. O halde $x \in \beta^{*}g\text{-}int(F^{+}(f\text{-}int(f\text{-}cl(\mu))))$ dir. Dolayısıyla, $F^{+}(\mu) \subset \beta^{*}g\text{-}int(F^{+}(f\text{-}int(f\text{-}cl(\mu))))$.

(2)⟹(3) μ fuzzy düzenli açık küme, yani $\mu = f\text{-}int(f\text{-}cl(\mu))$ olsun. (2) den, $\mu \in \tau_Y$ için $F^{+}(\mu) \subset \beta^{*}g\text{-}int(F^{+}(f\text{-}int(f\text{-}cl(\mu))))\subset \beta^{*}g\text{-}int(F^{+}(\mu))$ olur. Bu durumda, $F^{+}(\mu) = \beta^{*}g\text{-}int(F^{+}(\mu))$ elde edilir. Dolayısıyla, $F^{+}(\mu)$ X içinde $\beta^{*}g$-açıktır.

(3)⟹(4) μ ,Y içinde fuzzy açık küme olsun. O halde $f\text{-}int(f\text{-}cl(\mu))$, Y içinde fuzzy regüler açık kümedir. (3) den, $F^{-}(f\text{-}int(f\text{-}cl(\mu)))$ kümesi, X içinde $\beta^{*}g$-açıktır.

(4)⟹(1) $x \in F^{+}(\mu)$ olacak şekilde μ ,Y içinde fuzzy açık küme olsun. (4) den, $F^{+}(f\text{-}int(f\text{-}cl(\mu)))=U$ denilirse, U, X içinde $\beta^{*}g$-açık olur. $\mu \le f\text{-}int(f\text{-}cl(\mu))$ ve $x \in F^{+}(\mu)$ den , $x \in F^{+}(f\text{-}int(f\text{-}cl(\mu)))$ elde edilir. O halde, $x \in F^{+}(\mu)$ olduğunda $x \in F^{+}(f\text{-}int(f\text{-}cl(\mu)))$ olmaktadır. Yani, F fuzzy üstten hemen hemen $\beta^{*}g$-süreklidir.

(2)⟹(5) β, Y içinde fuzzy kapalı küme olsun. (2) den,

$$F^{+}(1-\beta) \subset \beta^{*}g\text{-}int(F^{+}(f\text{-}int(f\text{-}cl(1-\beta))))$$

$$= \beta^{*}g\text{-}int(F^{+}(f\text{-}int(1- f\text{-}int(\beta))))$$

$$= \beta^{*}g\text{-}int(F^{+}(1-(f\text{-}cl(f\text{-}int(\beta)))))$$

$F^{+}(1-\beta) = X - F^{-}(\beta)$ eşitliğinden yararlanarak,

$X - F^{-}(\beta) \subset \beta^{*}g\text{-}int(F^{+}(1-(f\text{-}cl(f\text{-}int(\beta)))))$

$= \beta^{*}g\text{-}int(X - F^{-}(f\text{-}cl(f\text{-}int(\beta))))$

$X - F^{-}(\beta) \subset X - (\beta^{*}g\text{-}cl(F^{-}(f\text{-}cl(f\text{-}int(\beta)))))$ bulunur.

Sonuç olarak,

$\beta^{*}g\text{-}cl(F^{-}(f\text{-}cl(f\text{-}int(\beta)))) \subset F^{-}(\beta)$ elde edilir.

(5)$\Longrightarrow$(6) β, Y içinde fuzzy regüler kapalı küme olsun. Bu durumda, β Y içinde fuzzy kapalı küme olur. (5) ten, $\beta^{*}g\text{-}cl(F^{-}(f\text{-}cl(f\text{-}int(\beta)))) \subset F^{-}(\beta)$ ve β, fuzzy regüler kapalı olduğundan, $\beta = f\text{-}cl(f\text{-}int(\beta))$ dir. Bu durumda, $\beta^{*}g\text{-}cl(F^{-}(\beta)) \subset F^{-}(\beta)$ olur. O halde , $F^{-}(\beta)$ X içinde $\beta^{*}g$-kapalıdır.

(6)$\Longrightarrow$(3) μ, Y içinde fuzzy regüler açık küme olsun. $1-\mu$, Y içinde fuzzy regüler kapalı olur. (6) dan, $F^{-}(1-\mu)$, X içinde $\beta^{*}g$-kapalıdır. $F^{-}(1-\mu) = X - F^{+}(\mu)$ eşitliğinden, $F^{+}(\mu)$ X içinde $\beta^{*}g$-açık bir kümedir.

6.4.4 Teorem

$F: (X,\tau) \to (Y,\tau_Y)$ fuzzy çoğul değerli fonksiyon olsun. F nin fuzzy alttan hemen hemen $\beta^{*}g$-sürekli olması için gerek ve yeter şart Y içindeki her bir μ fuzzy semi açık kümesi için, $\beta^{*}g\text{-}cl((F^{+}(\mu)) \subset F^{+}(f\text{-}cl(\mu))$ olmasıdır.

İspat

$\Rightarrow$: F, fuzzy alttan hemen hemen $\beta^{*}g$-sürekli ve μ , Y içinde fuzzy semi açık küme olsun. O halde $\mu \leq f\text{-}cl(f\text{-}int(\mu))$ ve $\beta = f\text{-}cl(f\text{-}int(\mu))$ alınırsa β , Y içinde fuzzy regüler kapalıdır. Teorem 6.4.3 (6) dan, $F^{+}(\beta)$ X de $\beta^{*}g$-kapalıdır. O halde
$\beta^{*}g\text{-}cl(\big(F^{+}(\mu)\big) \subset \beta^{*}g\text{-}cl(\big(F^{+}(\beta)\big) = F^{+}(\beta)$
$F^{+}(\beta) \subset F^{+}(f\text{-}cl(\mu))$ ise $\beta^{*}g\text{-}cl(\big(F^{+}(\mu)\big) \subset F^{+}(f\text{-}cl(\mu))$ olur.

$\Leftarrow$: Her fuzzy regüler kapalı küme aynı zamanda fuzzy semi açıktır. β Y içinde fuzzy regüler kapalı olsun. Bu durumda $\beta^{*}g\text{-}cl(\big(F^{+}(\mu)\big) \subset F^{+}(f\text{-}cl(\mu))$

$= F^{+}(\mu)$ elde edilir ve $F^{+}(\beta)$ X de $\beta^{*}g$-kapalıdır. Teorem 6.4.3 den F, fuzzy alttan hemen hemen $\beta^{*}g$-süreklidir.

6.4.5 Teorem

$F: (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ fuzzy çoğul değerli fonksiyon olsun. F nin fuzzy üstten hemen hemen $\beta^{*}g$-sürekli olması için gerek ve yeter şart Y içindeki her bir μ fuzzy semi açık kümesi için, $\beta^{*}g\text{-}cl\big(\big(F^{-}(\mu)\big)\big) \subset F^{-}(f\text{-}cl(\mu))$ olmasıdır.

İspat

Teorem 6.4.4 ün ispatına benzer olarak kolayca ispatlanabilir.

6.5 Fuzzy Zayıf $\boldsymbol{\beta^{*}g}$-Sürekli Çoğul Değerli Fonksiyonlar

Bu bölümde fuzzy alttan (üstten) zayıf $\beta^{*}g$-sürekli çoğul değerli fonksiyon kavramı tanıtılmış ve çeşitli karakterizasyonları elde edilmiştir.

6.5.1 Tanım

$F: (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ fuzzy çoğul değerli fonksiyon olsun.

a) $x \in F^{-}(\mu)$ olan her bir $\mu \in \tau_Y$ için $U \subset F^{-}(f\text{-}cl(\mu))$ olacak şekilde x noktasının bir U $\beta^{*}g$-açık komşuluğu var ise, F ye x noktasında fuzzy alttan zayıf $\beta^{*}g$-sürekli denir.

b) $x \in F^{+}(\mu)$ olan her bir $\mu \in \tau_Y$ için $U \subset F^{+}(f\text{-}cl(\mu))$ olacak şekilde x noktasının bir U $\beta^{*}g$-açık komşuluğu var ise, F ye x noktasında fuzzy üstten zayıf $\beta^{*}g$-sürekli denir.

c) F, fuzzy çoğul değerli fonksiyonu her bir $x \in X$ noktasında fuzzy alttan (üstten) zayıf $\beta^{*}g$ -sürekli ise F ye X üzerinde fuzzy alttan (üstten) zayıf $\beta^{*}g$-sürekli denir.

6.5.2 Teorem

$F: (X,\tau) \to (Y,\tau_Y)$ fuzzy çoğul değerli fonksiyonunun fuzzy alttan zayıf β^*g-sürekli olması için gerek ve yeter şart Y içindeki her bir μ fuzzy açık kümesi için

$F^-(\mu) \subset \beta^*g\text{-}\ int(F^-(f\text{-}cl(\mu)))$ olmasıdır.

İspat

$\Rightarrow$: $x \in F^-(\mu)$ olacak şekilde $\mu \in \tau_Y$ olsun. Hipotezden $U \subset F^-(f\text{-}cl(\mu))$ olacak şekilde x noktasının bir U β^*g-açık kümesi vardır. U, X de β^*g-açık olduğundan $U \subset \beta^*g\text{-}\ int(F^-(f\text{-}cl(\mu)))$ ve $x \in \beta^*g\text{-}\ int(F^-(f\text{-}cl(\mu)))$ dir. O halde, $F^-(\mu) \subset \beta^*g\text{-}\ int(F^-(f\text{-}cl(\mu)))$ bulunur.

$\Leftarrow$: Y içindeki her bir μ fuzzy açık kümesi için $F^-(\mu) \subset \beta^*g\text{-}\ int(F^-(f\text{-}cl(\mu)))$ olsun. $\beta^*g\text{-}\ int(F^-(f\text{-}cl(\mu))) = U$ diyelim. $x \in F^-(\mu)$ olacak şekilde Y içinde μ fuzzy açık kümesini alalım. U, x noktasının β^*g-açık komşuluğudur ve $x \in U \subset F^-(f\text{-}cl(\mu))$ olur. O halde F, fuzzy alttan zayıf β^*g-süreklidir.

6.5.3 Teorem

$F: (X,\tau) \to (Y,\tau_Y)$ fuzzy çoğul değerli fonksiyonunun fuzzy üstten zayıf β^*g-sürekli olması için gerek ve yeter şart Y içindeki her bir μ fuzzy açık kümesi için $F^+(\mu) \subset \beta^*g\text{-}\ int(F^+(f\text{-}cl(\mu)))$ olmasıdır.

İspat

$\Rightarrow$: $x \in F^+(\mu)$ olacak şekilde Y içinde μ fuzzy açık kümesini alalım. F, fuzzy üstten zayıf β^*g-sürekli olduğundan $U \subset F^+(f\text{-}cl(\mu))$ olacak şekilde x noktasının U β^*g-açık komşuluğu vardır. U, X de β^*g-açık olduğundan $U \subset \beta^*g\text{-}\ int(F^+(f\text{-}cl(\mu)))$ elde edilir. O halde $x \in U$ ve $x \in \beta^*g\text{-}\ int(F^+(f\text{-}cl(\mu)))$ dir. Dolayısıyla $F^+(\mu) \subset \beta^*g\text{-}\ int(F^+(f\text{-}cl(\mu)))$ bulunur.

$\Leftarrow$: $x \in F^+(\mu)$ olacak şekilde Y içinde μ fuzzy açık kümesini alalım. Hipotezden $F^+(\mu) \subset \beta^*g\text{-}\ int(F^+(f\text{-}cl(\mu)))$ dır. $U = F^+(\mu) \subset \beta^*g\text{-}\ int(F^+(f\text{-}$

$cl(\mu)))$ olsun. U, x noktasının β^*g-açık komşuluğu ve $U \subset F^+(f\text{-}cl(\mu))$ olur. O halde F, fuzzy üstten zayıf β^*g -süreklidir.

6.5.4 Teorem

$F: (X,\tau) \to (Y,\tau_Y)$ fuzzy alttan zayıf β^*g-sürekli çoğul değerli fonksiyon olsun. Bu halde Y içindeki her bir μ fuzzy pre açık kümesi için

$F^-(\mu) \subset \beta^*g\text{-} int(F^-(f\text{-}cl(\mu)))$ dır.

İspat

μ, Yiçinde fuzzy pre açık ve $x \in F^-(\mu)$olsun. $\mu \leq f\text{-}int(f\text{-}cl(\mu))$ olduğundan$x \in F^-(f\text{-}int(f\text{-}cl(\mu)))$ dir. F, fuzzy alttan zayıf β^*gsürekli olduğundan dolayı her bir $x \in F^-(f\text{-}int(f\text{-}cl(\mu)))$ için $U_x \subset F^-(f\text{-}cl(f\text{-}int(f\text{-}cl(\mu)))$ olacak şekilde x noktasının bir U_x, β^*g -açık komşuluğu vardır. $\cup\{U_X: x \in F^-(\mu)\} = V$ olsun. $F^-(\mu) \subset V \subset F^-(f\text{-}cl(\mu))$ ve$V$, X de β^*g-açık olduğundan $x \in \beta^*g\text{-}$ int$(F^-(f\text{-}cl(\mu)))$ elde edilir.

6.5.5 Teorem

$F: (X,\tau) \to (Y,\tau_Y)$ fuzzy üstten zayıf β^*g-sürekli çoğul değerli fonksiyon olsun. Bu halde Y içindeki her bir μ fuzzy pre açık kümesi için

$F^+(\mu) \subset \beta^*g\text{-} int(F^+(f\text{-}cl(\mu)))$ dir.

İspat

Bu teoremin ispatı Teorem 6.5.4 e benzer olarak kolayca yapılabilir.

6.5.6 Teorem

$F: (X,\tau) \to (Y,\tau_Y)$ fuzzy üstten zayıf β^*g-sürekli fonksiyon olsun. Y içindeki her bir μ fuzzy açık kümesi için $\beta^*g\text{-} cl(F^-(\mu)) \subset F^-(f\text{-}cl(\mu))$ dır.

İspat

$x \notin F^{-}(f - cl(\mu))$ ve $\mu \in \tau_Y$ olsun. Bu durumda $F(x) \not q\, f\text{-}cl(\mu)$ ise $F(x) \leq 1 - (f\text{-}cl(\mu))$ olmasını gerektirir. F, fuzzy üstten zayıf $\beta^{*}g$ -sürekli olduğundan x noktasının öyle bir $U,\ \beta^{*}g$-açık kümesi vardır ki, $\forall\, z \in U$ için$F(z) \leq \beta^{*}g\text{-}\ cl(1 - (f\text{-}cl(\mu)))$$\leq 1 - \mu$ dür. O halde $\forall\, z \in U$ için F(z) q μ olacak şekilde x noktasının bir $U,\ \beta^{*}g$ -açık komşuluğu vardır. Böylece $x \notin \beta^{*}g\text{-}\ cl(F^{-}(\mu))$ dır. Şu halde $\beta^{*}g$-$cl(F^{-}(\mu)) \subset F^{-}(f\text{-}cl(\mu))$ bulunur.

6.5.7 Teorem

$F\colon (X,\tau) \to (Y,\tau_Y)$ fuzzy alttan zayıf $\beta^{*}g$ -sürekli fonksiyon olsun. O halde Y içindeki her bir μ fuzzy pre açık kümesi için, $\beta^{*}g\text{-}\ cl(F^{+}(\mu)) \subset F^{+}(f\text{-}cl(\mu))$ dir.

İspat

Bu teoremin ispatı Teorem 6.5.6 ya benzer olarak kolayca yapılabilir.

6.6 Fuzzy Semi $\beta^{*}g$-Sürekli, Fuzzy Hemen Hemen $\beta^{*}g$-Sürekli ve Fuzzy Zayıf $\beta^{*}g$ -Sürekli Çoğul Değerli Fonksiyonlar Arasındaki İlişkiler

Bu bölümde fuzzy semi $\beta^{*}g$-sürekli, fuzzy hemen hemen $\beta^{*}g$-sürekli ve fuzzy zayıf $\beta^{*}g$-sürekli çoğul değerli fonksiyonlar arasındaki ilişkiler verilmiş ve bu sürekli çoğul değerli fonksiyonlar ile ilgili çeşitli teoremler ele alınmıştır.

6.6.1 Teorem

$F\colon (X,\tau) \to (Y,\tau_Y)$ fuzzy çoğul değerli fonksiyon olsun.F, fuzzy alttan (üstten) semi $\beta^{*}g$-sürekli ise, F fuzzy alttan (üstten) hemen hemen $\beta^{*}g$ -süreklidir.

İspat

Kolayca gösterilir.

6.6.2 Teorem

$F: (X, \tau) \to (Y, \tau_Y)$ fuzzy çoğul değerli fonksiyon olsun. F, fuzzy alttan (üstten) hemen hemen $\beta^* g$-sürekli ise, F fuzzy alttan (üstten) zayıf $\beta^* g$-süreklidir.

İspat

Kolayca yapılabilir.

6.6.3 Uyarı

Yukarıda verilen iki teoremin karşıtları her zaman doğru olmayabilir.

6.6.4 Teorem

$F: (X, \tau) \to (Y, \tau_Y)$ fuzzy çoğul değerli fonksiyon olsun. Y fuzzy regüler topolojik uzay ve F fuzzy alttan zayıf $\beta^* g$ -sürekli ise, F fuzzy alttan semi $\beta^* g$ -süreklidir.

İspat

$F(x)$ q μ olacak şekilde Y içinde μ fuzzy açık kümesini alalım. $(F(x))$ (y) $\neq 0$ olacak şekilde $y \in Y$ noktası vardır. $\lambda = (F(x))$ (y) olmak üzere Y içinde y_λ fuzzy noktası ile μ fuzzy kümesi çakışığımsıdırlar. Yani y_λq μ dür. Y fuzzy düzenli topolojik uzay olduğundan $y_\lambda\ q\ \beta \leq\ f\text{-}cl(\beta) \leq \mu$ olacak şekilde Y içinde β fuzzy açık kümesi vardır. F, fuzzy alttan zayıf sürekli olduğundan $\forall\ z \in U$ için $F(z)$ q $f\text{-}cl(\beta)$ olacak şekilde x noktasının bir $U, \beta^* g$-açık komşuluğu vardır. O halde $\forall\ z \in U$ için $F(z)$ qμ elde edilir. Yani $U \subset F^-(\mu)$ olur. O halde F, fuzzy alttan semi$\beta^* g$ -süreklidir.

6.6.5 Tanım

$F: (X, \tau) \to (Y, \tau_Y)$ fuzzy çoğul değerli fonksiyon olsun. Eğer X deki her bir U açık kümesi için $F(U)$, Y içinde fuzzy pre açık küme ise, F ye fuzzy pre açık çoğul değerli fonksiyon denir [11].

6.6.6 Teorem

$F: (X, \tau) \to (Y, \tau_Y)$ fuzzy çoğul değerli fonksiyonu fuzzy üstten zayıf $\beta^* g$-sürekli ve F, fuzzy pre açık olsun. O halde, F, fuzzy üstten hemen hemen $\beta^* g$-süreklidir.

İspat

Kolayca gösterilebilir.

6.6.7 Tanım

$F: (X, \tau) \to (Y, \tau_Y)$ fuzzy çoğul değerli fonksiyon olsun. Eğer her $x \in X$ için $F(x)$, Y içinde fuzzy pre açık küme ise, F ye noktasal fuzzy pre açık çoğul değerli fonksiyon denir [11].

6.6.8 Teorem

$F: (X, \tau) \to (Y, \tau_Y)$ fuzzy çoğul değerli fonksiyonu fuzzy alttan zayıf $\beta^* g$-sürekli ve noktasal fuzzy pre açık olsun. O halde F, fuzzy alttan hemen hemen $\beta^* g$-süreklidir.

İspat

Açıktır.

6.6.9 Teorem

$F: (X, \tau) \to (Y, \tau_Y)$ fuzzy çoğul değerli fonksiyonu fuzzy alttan zayıf $\beta^* g$-sürekli ve Y fuzzy regüler topolojik uzay olsun. O halde, F, fuzzy alttan hemen hemen $\beta^* g$-süreklidir.

İspat

$F(x) q \mu$ olacak şekilde Y içinde μ fuzzy açık kümesini alalım. $\big(F(x)\big)(y) \neq 0$ olacak şekilde bir $y \in Y$ vardır. $\lambda = \big(F(x)\big)(y)$ olacak şekilde Y içinde y_λ fuzzy noktası için $y_\lambda q$ f-$int(f$-$cl(\mu))$ dir. Y fuzzy regüler topolojik uzay olduğundan $y_\lambda q\beta \leq f$-$cl(\beta) \leq f$-$int(f$-$cl(\mu))$ olacak şekilde Y içinde β fuzzy açık kümesi vardır. F, fuzzy alttan zayıf $\beta^* g$-sürekli olduğundan $\forall z \in U$ için $F(z)q\,f$-$cl(\beta)$ olacak şekilde x noktasının bir U, $\beta^* g$-açık komşuluğu vardır. O halde, f-$cl(\beta) \leq f$-$int(f$-$cl(\mu))$olmasından dolayı F, fuzzy alttan hemen hemen $\beta^* g$-süreklidir.

6.7 Fuzzy Hemen Hemen Zayıf $\beta^* g$ -Sürekli Çoğul Değerli Fonksiyonlar

Bu bölümde fuzzy alttan (üstten) hemen hemen zayıf $\beta^* g$-sürekli çoğul değerli fonksiyonlar tanıtılarak bu fonksiyon çeşitlerinin kullanıldığı karakterizasyonlar ele alınmıştır.

6.7.1 Tanım

$F: (X, \tau) \to (Y, \tau_Y)$ fuzzy çoğul değerli fonksiyon ve $x \in X$ olsun.

a) $x \in F^+(\mu)$ olan her bir $\mu \in \tau_Y$ için $x \in \beta^* g$-$int(\beta^* g$-$cl(F^+(f$-$cl(\mu))))$ oluyorsa, F' ye x noktasında fuzzy üstten hemen hemen zayıf $\beta^* g$-sürekli çoğul değerli fonksiyon denir.

b) $x \in F^-(\mu)$ olan her bir $\mu \in \tau_Y$ için $x \in \beta^* g$-$int(\beta^* g$-$cl(F^-(f$-$cl(\mu))))$ oluyorsa, F' ye x noktasında fuzzy alttan hemen hemen zayıf $\beta^* g$-sürekli çoğul değerli fonksiyon denir.

c) F fuzzy çoğul değerli fonksiyonu her $x \in X$ noktasında fuzzy alttan (üstten) hemen hemen zayıf $\beta^* g$-sürekli ise F'ye X üzerinde fuzzy alttan (üstten) hemen hemen zayıf $\beta^* g$-süreklidir denir.

6.7.2 Teorem

$F: (X, \tau) \to (Y, \tau_Y)$ fuzzy üstten hemen hemen zayıf $\beta^* g$ -sürekli çoğul değerli fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler vardır:

a) Her $\mu \in \tau_Y$ için $F^+(\mu) \subset \beta^* g$-$int(\beta^* g$-$cl(F^+(f$-$cl(\mu))))$

b) Her $\mu \in \tau_Y$ için $\beta^*g\text{-}cl(\beta^*g\text{-}int(F^-(\mu))) \subset F^-(f\text{-}cl(\mu))$

İspat

a) $x \in F^+(\mu)$ olacak şekilde bir $\mu \in \tau_Y$ alalım. Bu durumda, F üstten hemen hemen zayıfβ^*g-sürekli olduğundan $x \in \beta^*g\text{-}int(\beta^*g\text{-}cl(F^+(f\text{-}cl(\mu))))$ elde edilir.

b) $\mu \in \tau_Y$ olsun. $1 -(f\text{-}cl(\mu))$ kümesi fuzzy açıktır. O halde,

$X - F^-(f\text{-}cl(\mu)) = F^+(1 - (f\text{-}cl(\mu)))$ ve (a) dan

$X - F^-(f\text{-}cl(\mu)) \subset \beta^*g\text{-}int(\beta^*g\text{-}cl(F^+(f\text{-}cl(1 - (f\text{-}cl(\mu))))))$

$X - F^-(f\text{-}cl(\mu)) \subset \beta^*g\text{-}int(\beta^*g\text{-}cl(F^+(1 - \mu)))$

$X - F^-(f\text{-}cl(\mu)) \subset X -(\beta^*g\text{-}cl(\beta^*g\text{-}int(F^-(\mu)))$

$\beta^*g\text{-}cl(\beta^*g\text{-}int(F^-(\mu)) \subset F^-(f\text{-}cl(\mu))$

elde edilir.

6.7.3 Teorem

$F\colon (X,\tau) \to (Y,\tau_Y)$ fuzzy alttan hemen hemen zayıf β^*g -sürekli çoğul değerli fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler vardır:

a) Her $\mu \in \tau_Y$ için $F^-(\mu) \subset \beta^*g\text{-}int(\beta^*g\text{-}cl(F^-(f\text{-}cl(\mu))))$

b) Her $\mu \in \tau_Y$ için $\beta^*g\text{-}cl(\beta^*g\text{-}int(F^+(\mu))) \subset F^+(f\text{-}cl(\mu))$.

İspat

a) $x \in F^-(\mu)$ olacak şekilde bir $\mu \in \tau_Y$ alalım. Bu durumda, F alttan hemen hemen zayıfβ^*g-sürekli olduğundan $x \in \beta^*g\text{-}int(\beta^*g\text{-}cl(F^-(f\text{-}cl(\mu))))$ elde edilir.

b) $\mu \in \tau_Y$ olsun. $1 -(f\text{-}cl(\mu))$ kümesi açıktır. O halde,

$X - F^+(f\text{-}cl(\mu)) = F^-(1 - (f\text{-}cl(\mu)))$ ve (a) dan

$X - F^+(f\text{-}cl(\mu)) \subset \beta^*g\text{-}int(\beta^*g\text{-}cl(F^-(f\text{-}cl(1 - (f\text{-}cl(\mu))))))$

$X - F^+(f\text{-}cl(\mu)) \subset \beta^*g\text{-}int(\beta^*g\text{-}cl(F^-(1 - \mu)))$

$X - F^+(f\text{-}cl(\mu)) \subset X -(\beta^*g\text{-}cl(\beta^*g\text{-}int(F^+(\mu)))$

$\beta^*g\text{-}cl(\beta^*g\text{-}int(F^+(\mu)) \subset F^+(f\text{-}cl(\mu))$

elde edilir.

6.7.4 Teorem

$F: (X,\tau) \to (Y,\tau_Y)$ fuzzy üstten hemen hemen zayıf $\beta^* g$ -sürekli çoğul değerli fonksiyon olsun. Y içindeki her β fuzzy kapalı kümesi için

$\beta^* g\text{-}cl(\beta^* g\text{-}int(F^-(f\text{-}int(\beta)))) \subset F^-(\beta)$ dir.

İspat

β , Y içinde fuzzy kapalı küme olsun. 1-β , Y içinde fuzzy açıktır. Teorem 6.7.2 (a) dan

$X - F^-(\beta) = F^+(1-\beta)$

$X - F^-(\beta) \subset \beta^* g\text{-}int(\beta^* g\text{-}cl(F^+(f\text{-}cl(1-\beta))))$

$X - F^-(\beta) \subset \beta^* g\text{-}int(\beta^* g\text{-}cl(F^+(1-f\text{-}int(\beta))))$

$X - F^-(\beta) \subset \beta^* g\text{-}int(\beta^* g\text{-}cl(X - F^-(f\text{-}int(\beta))))$

$X - F^-(\beta) \subset X - (\beta^* g\text{-}cl(\beta^* g\text{-}int\ (F^-(f\text{-}int(\beta))))$

Bu durumda,

$\beta^* g\text{-}cl(\beta^* g\text{-}int\ (F^-(f\text{-}int(\beta))) \subset F^-(\beta)$ bulunur.

6.7.5 Teorem

$F: (X,\tau) \to (Y,\tau_Y)$ fuzzy alttan hemen hemen zayıf $\beta^* g$ -sürekli çoğul değerli fonksiyon olsun. Y içindeki her β fuzzy kapalı kümesi için

$\beta^* g\text{-}cl(\beta^* g\text{-}int\ (F^+(f\text{-}int(\beta))) \subset F^+(\beta)$ dir.

İspat

β , Y içinde fuzzy kapalı küme olsun. 1-β , Y içinde fuzzy açıktır. Teorem 6.7.3 (a) dan

$X - F^+(\beta) = F^-(1-\beta)$

$X - F^+(\beta) \subset \beta^* g\text{-}int(\beta^* g\text{-}cl(F^-(f\text{-}cl(1-\beta))))$

$X - F^+(\beta) \subset \beta^* g\text{-}int(\beta^* g\text{-}cl(F^-(1-f\text{-}int(\beta))))$

$X - F^{+}(\beta) \subset \beta^{*}g\text{-}int(\beta^{*}g\text{-}cl(X - F^{+}(f\text{-}int(\beta))))$

$X - F^{+}(\beta) \subset X - (\beta^{*}g\text{-}cl(\beta^{*}g\text{-}int\ (F^{+}(f\text{-}int(\beta))))$

Bu durumda,

$\beta^{*}g\text{-}cl(\beta^{*}g\text{-}int\ (F^{+}(f\text{-}int(\beta))) \subset F^{+}(\beta)$ bulunur.

6.8 Fuzzy Hemen Hemen Zayıf $\beta^{*}g$ -Sürekli Çoğul Değerli Fonksiyonlar ile Fuzzy Semi $\beta^{*}g$-Sürekli, Fuzzy Hemen Hemen $\beta^{*}g$-Sürekli, Fuzzy Zayıf $\beta^{*}g$ -Sürekli Çoğul Değerli Fonksiyonlar Arasındaki İlişkiler

Bu bölümde fuzzy hemen hemen zayıf $\beta^{*}g$-sürekli çoğul değerli fonksiyonlar ile fuzzy semi $\beta^{*}g$-sürekli, fuzzy hemen hemen $\beta^{*}g$-sürekli, fuzzy zayıf $\beta^{*}g$-sürekli çoğul değerli fonksiyonlar arasındaki ilişkiler ele alınmış ve terslerinin her zaman geçerli olmadığını gösteren ters örnekler verilmiştir.

6.8.1 Teorem

$F: (X, \tau) \to (Y, \tau_Y)$ fuzzy üstten hemen hemen zayıf $\beta^{*}g$-sürekli ve fuzzy alttan hemen hemen $\beta^{*}g$-sürekli çoğul değerli fonksiyon olsun. Bu durumda F fuzzy üstten zayıf $\beta^{*}g$-süreklidir.

İspat

μ , Y içinde fuzzy açık küme olsun. Teorem 6.7.2 (a) dan, $F^{+}(\mu) \subset \beta^{*}g\text{-}int(\beta^{*}g\text{-}cl(F^{+}(f\text{-}cl(\mu))))$ dir. μ fuzzy açık olduğundan, $f\text{-}cl(\mu)$ fuzzy düzenli kapalıdır. F, fuzzy alttan hemen hemen $\beta^{*}g$-sürekli olduğundan, $F^{+}(f\text{-}cl(\mu))$,X de $\beta^{*}g$-kapalıdır. Buradan, $F^{+}(\mu) \subset \beta^{*}g\text{-}int(F^{+}(f\text{-}cl(\mu)))$ elde edilir. F fuzzy üstten zayıf $\beta^{*}g$-süreklidir.

6.8.2 Teorem

$F:(X,\tau)\to(Y,\tau_Y)$ fuzzy alttan hemen hemen zayıf $\beta^* g$-sürekli ve fuzzy üstten hemen hemen $\beta^* g$-sürekli çoğul değerli fonksiyon olsun. Bu durumda F fuzzy alttan zayıf $\beta^* g$-süreklidir.

İspat

μ , Y içinde fuzzy açık küme olsun. Teorem 6.7.3 (a) dan, $F^-(\mu)\subset\beta^* g\text{-}int(\beta^* g\text{-}cl(F^-(f\text{-}cl(\mu))))$ dir. μ fuzzy açık olduğundan, $f\text{-}cl(\mu)$ fuzzy düzenli kapalıdır. F, fuzzy üstten hemen hemen $\beta^* g$-sürekli olduğundan, $F^-(f\text{-}cl(\mu))$, X de $\beta^* g$-kapalıdır. Buradan, $F^-(\mu)\subset\beta^* g\text{-}int(F^-(f\text{-}cl(\mu)))$elde edilir. F fuzzy alttan zayıf $\beta^* g$-süreklidir.

6.8.3 Sonuç

$F:(X,\tau)\to(Y,\tau_Y)$ fuzzy çoğul değerli fonksiyonu alttan semi $\beta^* g$-sürekli ise, F fonksiyonu fuzzy alttan hemen hemen zayıf $\beta^* g$-süreklidir. Aşağıdaki örnek bu ifadenin tersinin genelde doğru olmadığını göstermektedir.

6.8.4 Örnek

$X=\{a,b,c\}$, $\tau=\{X,\emptyset,\{a\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\}\}$ ve $Y=[0,1]$, $\tau_Y=\{C_0, C_1, C_{1/2}, C_{1/3}\}$ olsun. $F:(X,\tau)\to(Y,\tau_Y)$ çoğul değerli fonksiyonu $F(a)=C_{1/2}$, $F(b)=C_{2/3}$ ve $F(c)=C_{7/8}$ olarak tanımlansın. F fonksiyonu fuzzy alttan hemen hemen zayıf $\beta^* g$-süreklidir. Ancak $C_{1/3}$ fuzzy açık kümesi için $F^-(C_{1/3})=\{c\}$ kümesi X içinde $\beta^* g$-açık olmadığından, F fonksiyonu fuzzy alttan semi $\beta^* g$-sürekli değildir.

6.8.5 Sonuç

$F: (X, \tau) \to (Y, \tau_Y)$ fuzzy çoğul değerli fonksiyonu üstten semi $\beta^* g$ -sürekli ise, F fonksiyonu fuzzy üstten hemen hemen zayıf $\beta^* g$-süreklidir. Aşağıdaki örnek bu ifadenin tersinin genelde doğru olmadığını göstermektedir.

6.8.6 Örnek

$X = \{a, b, c\}$, $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$ ve $Y = [0,1]$, $\tau_Y = \{C_0, C_1, C_{1/4}, C_{5/6}\}$ olsun. $F: (X, \tau) \to (Y, \tau_Y)$ çoğul değerli fonksiyonu $F(a) = C_{2/3}$, $F(b) = C_{3/4}$ ve $F(c) = C_{1/7}$ olarak tanımlansın. F fonksiyonu fuzzy alttan hemen hemen zayıf $\beta^* g$-süreklidir. Ancak $C_{1/3}$ fuzzy açık kümesi için $F^-(C_{1/4}) = \{c\}$ kümesi X içinde $\beta^* g$-açık olmadığından, F fonksiyonu fuzzy alttan semi$\beta^* g$-sürekli değildir.

6.8.7 Sonuç

$F: (X, \tau) \to (Y, \tau_Y)$ fuzzy çoğul değerli fonksiyonu alttan hemen hemen $\beta^* g$-sürekli ise , F fonksiyonu fuzzy alttan hemen hemen zayıf $\beta^* g$-süreklidir. Aşağıdaki örnek bu ifadenin tersinin genelde doğru olmadığını göstermektedir.

6.8.8 Örnek

$X = \{a, b, c\}$, $\tau = \{X, \emptyset, \{b\}, \{a, c\}\}$ ve $Y = [0,1]$, $\tau_Y = \{C_0, C_1, C_{1/4}, C_{1/2}\}$ olsun. $F: (X, \tau) \to (Y, \tau_Y)$ çoğul değerli fonksiyonu $F(a) = C_{1/2}$, $F(b) = C_{1/3}$ ve $F(c) = C_{2/3}$ olarak tanımlansın. F fonksiyonu fuzzy alttan hemen hemen zayıf $\beta^* g$-süreklidir. Ancak $C_{1/2}$ fuzzy düzenli açık kümesi için $F^-(C_{1/2}) = \{c\}$ kümesi X içinde $\beta^* g$-açık olmadığından, F fonksiyonu fuzzy alttan hemen hemen $\beta^* g$-sürekli değildir.

6.8.9 Sonuç

$F: (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ fuzzy çoğul değerli fonksiyonu üstten hemen hemen $\beta^* g$-sürekli ise , F fonksiyonu fuzzy üstten hemen hemen zayıf $\beta^* g$-süreklidir. Aşağıdaki örnek bu ifadenin tersinin genelde doğru olmadığını göstermektedir.

6.8.10 Örnek

$X = \{a, b, c\}$, $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}\}$ ve $Y = [0,1], \tau_Y = \{C_0,\ C_1,\ C_{1/3}\}$ olsun. $F: (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ çoğul değerli fonksiyonu $F(a) = C_{1/4}$, $F(b) = C_{3/4}$ ve $F(c) = C_{1/2}$ olarak tanımlansın. F fonksiyonu fuzzy üstten hemen hemen zayıf $\beta^* g$-süreklidir. Ancak $C_{1/3}$ fuzzy düzenli açık kümesi için $F^-(C_{1/3}) = \{a\}$ kümesi X içinde $\beta^* g$ -açık olmadığından , F fonksiyonu fuzzy üstten hemen hemen $\beta^* g$-sürekli değildir.

6.8.11 Sonuç

$F: (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ fuzzy çoğul değerli fonksiyonu alttan zayıf $\beta^* g$ -sürekli ise, F fonksiyonu fuzzy alttan hemen hemen zayıf $\beta^* g$-süreklidir. Aşağıdaki örnek bu ifadenin tersinin genelde doğru olmadığını göstermektedir.

6.8.12 Örnek

$X = \{a, b, c\}$, $\tau = \{X, \emptyset, \{a, b\}, \{c\}\}$ ve $Y = [0,1]$, $\tau_Y = \{C_0,\ C_1,\ C_{1/3},\ C_{1/2}\}$ olsun.$F: (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ çoğul değerli fonksiyonu $F(a) = C_{3/4}$, $F(b) = C_{1/2}$, ve $F(c) = C_{2/3}$ olarak tanımlansın. F fonksiyonu fuzzy alttan hemen hemen zayıf $\beta^* g$-süreklidir. Ancak $C_{1/3}$ düzenli açık kümesi için $F^-(C_{1/3}) = \{a\}$ ve $\beta^* g - int(F^-(cl(C_{1/3}))) = \emptyset$ kümesi X içinde $\beta^* g$ -açık olmadığından, F fonksiyonu fuzzy alttan hemen hemen $\beta^* g$-sürekli değildir.

6.8.13 Sonuç

$F: (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ fuzzy çoğul değerli fonksiyonu üstten zayıf $\beta^* g$ -sürekli ise, F fonksiyonu fuzzy üstten hemen hemen zayıf $\beta^* g$-süreklidir. Aşağıdaki örnek bu ifadenin tersinin genelde doğru olmadığını göstermektedir.

6.8.14 Örnek

$X = \{a, b, c\}$, $\tau = \{X, \emptyset, \{a, b\}, \{c\}\}$ ve $Y = [0,1]$, $\tau_Y = \{C_0, C_1, C_{4/5}, C_{1/2}\}$ olsun. $F: (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ çoğul değerli fonksiyonu $F(a) = C_{2/3}$, $F(b) = C_{1/3}$, ve $F(c) = C_{3/4}$ olarak tanımlansın. F fonksiyonu fuzzy üstten hemen hemen zayıf $\beta^* g$ -süreklidir. Ancak $C_{1/2}$ açık kümesi için $F^+(C_{1/2}) = \{b\}$ ve $\beta^* g - int(F^+(cl(C_{1/2}))) = \emptyset$ kümesi X içinde $\beta^* g$ -açık olmadığından, F fonksiyonu fuzzy üstten hemen hemen $\beta^* g$-sürekli değildir.

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, üstten ve alttan β^*g -sürekli çoğul değerli fonksiyonlar tanıtılmış, bu fonksiyonlar fuzzy topolojik uzaylara genişletilmiştir.

Bundan sonraki çalışmalarda, elde edilen tanım ve özelliklerin ideal topolojik uzaylara geçişleri incelenebilir.

8. KAYNAKLAR

[1] Levine, N., "Generalized closed sets in topology", *Rend .Circ. Mat. Palermo, 19*, 89-96, (1970).

[2] Dontchev, J. and Noiri, T., "Quasi-normal spaces and πg –closed sets", *Acta. Math. Hungar.,* 89, 211-219, (2000).

[3] Kumar, M.K.R.S.V., "Between closed sets and g–closed sets", *Mem. Fac. Sci. Kochi Univ.,* 21, 1-19, (2000).

[4] Devi, R., Maki, H. and Balachandran, K., "Semi-generalized closed maps and generalized semi-closed maps", *Mem. Fac. Sci. Kochi Univ. Ser. A Math,* 14, 41-54, (1993).

[5] Zaitsav, V., "On certain classes of topological spaces and their bicompactifications", *Dokl. Akad Nauk SSSR.,* 178, 778-779, (1978).

[6] Yüksel, Ş. and Beceren, Y., "A decomposition of continuity", *Selçuk Univ. Fac. Of Arts Science J.,* 14(1), 79-83, (1997).

[7] Açıkgöz, A., "On $\beta^* g$-closed sets and new seperation axioms", *Eur. J. Pure Appl. Math.,* 4, 20-33, (2011).

[8] Zadeh, L.A., "Fuzzy sets", *İnforma. and control.,* 8, 338-353, (1965).

[9] Chang, C.L. ,"Fuzzy topological space", *J. Math. Anal. Appl.,* 24, 182-190, (1968).

[10] Papagergious, N.S., "Fuzzy topology and fuzzy multifunctions", *J. Math. Anal. Appl.,* 109, 397-425, (1985).

[11] Mukherjee, M.N. and Malakar, S., "On almost continuous and weakly continuous fuzzy multifunctions", *Fuzzy Sets and Systems,* 41, 113-125, (1991).

[12] Yıldırım, F. (1997). Fuzzy Çoğul Değerli Fonksiyonlarda Süreklilik. Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Ankara.

[13] Stone, M.H., "Applications of the theory of Boolen rings to general topology", TAMS 41, 375-381, (1937).

[14] Mashhour, A.S., "On pre continuous and weak pre continuous mappings", *Proc. Math. Phys. Soc. Egypt.,* 53, 47-53, (1982).

[15] Levine, N., “Semi-open sets and semi continuity in topological spaces”, *Amer. Math. Monthly, 70*, 36-41, (1963).

[16] Maki, H., Umehara, J. and Noiri, T., “ Every topological space is pre-$T_{1/2}$”, *Mem. Fac. Sci. Kochi Univ. Ser. A (Math),* 17, 33-42, (1996).

[17] Arya, S.P. and Nour, T., “Characterizations of s-normal spaces”, *Indian J. Pure Appl. Math.,* 21, 717-719, (1990).

[18] Park, J.H., “On pgp-closed sets in topological spaces”, *Indian J. Pure Appl.Math.,*(baskıda)

[19] Aslım, G.,Guler, C. and Noiri, T., “On πgs -closed sets in topological spaces”, *Acta. Math. Hungar.,* 112(4), 275-283, (2006).

[20] Bourbaki, N., *General Topology. Part I. Addison-Wesley. Reading Mass,* (1966).

[21] Banzaru, T., “On the upper semi continuity of the upper topological limit for multifunction nets”, *Semin. Mat. Fiz. Inst. Politeh Timisoara,* 59-64, (1983).

[22] Berge, C., *Escapes topologiques functions multivoques,* Paris: Dunod, (2011).

[23] Pnomarev, V.I., “Properties of topological spaces preserved under multivalued continuous mappings*”, Amer. Math. Soc. Trans.,* 38(2), 119-140, (1964).

[24] Noiri, T. and Popa, V., “On upper and lower M-continuous multifunctions*”, Filomat,* 14, 73-86, (2000).

[25] Noiri, T. and Popa, V., “Almost weakly continuous multifunctions*”, Demonstratio Math.,* 26(2), 363-380, (1993).

[26] Acikgoz, A. and Goktepe, S. “On strongly θ - $\beta^{*}g$ -continuous multifunctions”, *Mathematical Sciences and Applications E-Notes,*(baskıda)

[27] Ming, P.P. and Ming, L.Y., “Fuzzy topology I.neighbourhood structure of a fuzzy point and moore-smith convergence*”, J. Math. Anal. Appl.,* 76, 571-599, (1980).

[28] Bin Shahna A.S., “On fuzzy strong semi continuity and fuzzy pre-continuity”, *Fuzzy Sets and Systems*, 44, 303-308, (1991)

[29] Azad, K.K., “Fuzzy semi continuity, fuzzy almost continuity and fuzzy weakly continuity*”, J. Math. Anal. Appl.,* 82, 14-32, (1981).

[30] Mukherjee, M.N. and Sinha, S. P., "On some near-fuzzy continuous functions between fuzzy topological space*", Fuzzy Sets and Systems, 3*4, 245-254, (1990).