T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MORREY UZAYLARINDA YAKLAŞIM TEORİSİNİN BAZI PROBLEMLERİ

DOKTORA TEZİ

Nuriye Pınar TOZMAN

Balıkesir, Ocak-2009

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MORREY UZAYLARINDA YAKLAŞIM TEORİSİNİN BAZI PROBLEMLERİ

DOKTORA TEZİ

Nuriye Pınar TOZMAN

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Daniyal M. İSRAFİLOV

Sınav Tarihi: 30.01.2009

Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Daniyal M. İSRAFİLOV (Danışman-BAÜ)

Doç. Dr. Osman BİZİM (UÜ)

Doç. Dr. Ali GÜVEN (BAÜ)

Doç. Dr. İlkay KARACA (EÜ)

Doç. Dr. Recep ŞAHİN (BAÜ)

Balıkesir, Ocak-2009

ÖZET

MORREY UZAYLARINDA YAKLAŞIM TEORİSİNİN BAZI PROBLEMLERİ

Nuriye Pınar TOZMAN
Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı

(Doktora Tezi / Tez Danışmanı : Prof. Dr. Daniyal M. İSRAFİLOV)
Balıkesir, 2009

Bu çalışmanın amacı Morrey uzayları ve Morrey-Smirnov sınıflarında yaklaşım teorisinin bazı problemlerini incelemektir.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, yaklaşım teorisi ve bu teorinin gelişimi ile ilgili bir kronolojik bilgi içermektedir.

İkinci bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak olan temel kavramlara yer verilmiştir. Ayrıca bu bölümde, fonksiyon uzaylarının tanımı, Faber serileri ve Faber operatörü hakkında genel bilgiler bulunmaktadır.

Üçüncü bölüm, iki kesimden oluşmaktadır. Birinci kesimde, Morrey uzaylarında yaklaşım teorisinin düz ve ters teoremleri ispatlanmıştır. İkinci kesimde ise, bu teoremlerin iyileştirmeleri yapılmıştır.

Dördüncü bölüm, iki kesime ayrılmaktadır. Birinci kesimde, Morrey-Smirnov sınıflarında düz ve ters teoremler incelenmiştir. İkinci kesimde, bu teoremlerin iyileştirmeleri yer almaktadır.

Son bölüm, bu tezde elde edilen sonuçların özetinden oluşmaktadır.

ANAHTAR SÖZCÜKLER : Morrey uzayı, Morrey-Smirnov sınıfı, Faber serisi, Faber operatörü, düz teorem, ters teorem.

ABSTRACT

SOME PROBLEMS OF APPROXIMATION THEORY IN THE MORREY SPACES

Nuriye Pınar TOZMAN
Balıkesir University, Institute of Science, Department of Mathematics

(Ph. D. Thesis / Supervisor : Prof. Dr. Daniyal M. ISRAFILOV)
Balıkesir-Turkey, 2009

The purpose of this work is to investigate some problems of approximation theory in the Morrey spaces and the Morrey-Smirnov classes.

This thesis consists of five chapters. The first chapter includes some chronological information about the approximation theory and its progress.

The second chapter is assigned for basic consepts related to other chapters. Furthermore, it contains the definition of function spaces, general properties of the Faber series and the Faber operator.

The third chapter consists of two sections. In the first section, direct and inverse theorems of approximation theory in the Morrey spaces are proved. In the second section, these theorems are improved.

The fourth chapter is seperated into two sections. In the first section, direct and inverse theorems in the Morrey-Smirnov classes are investigated. In the second section, the improvement of these theorems is obtained.

Last chapter provides the summary of all the results obtained in this thesis.

KEY WORDS : Morrey spaces, Morrey-Smirnov classes, Faber series, Faber operator, direct theorem, inverse theorem.

İÇİNDEKİLER

SEMBOL LİSTESİ

SİMGE	**TANIMI**	**SAYFA**
$\mathbb{C},\mathbb{R}$	Kompleks düzlem, Reel eksen	4
$\mathbb{N},\mathbb{N}^{+}$	Doğal sayılar, Pozitif doğal sayılar	14
$\boldsymbol{T}$	Birim çember veya $(0,2\pi)$	4
$\boldsymbol{D},\boldsymbol{D}^{-}$	Birim disk, Birim çemberin sınırsız bileşeni	4
$L^{p,\alpha}(\Gamma)$	Morrey uzayı	4
$E^{p,\alpha}(G)$	Morrey-Smirnov sınıfı	5
$H^{p,\alpha}(\boldsymbol{D})$	Morrey-Hardy uzayı	6
$E_n(f)_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})}$	$L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})$ uzayında en iyi yaklaşım sayısı	7
$E_n(f)_{E^{p,\alpha}(G)}$	$E^{p,\alpha}(G)$ sınıfında en iyi yaklaşım sayısı	7
M	Hardy-Littlewood maximal fonksiyon	8
S	Cauchy singüler operatörü	10
F_k	k dereceli Faber polinomu	10
$P,P(\boldsymbol{D})$	Polinomlar ailesi, Polinomlar ailesinin $\boldsymbol{D}$ deki izi	11
L	Faber Operatörü	12
$\omega^{r}_{p,\alpha}(f,t)$	$L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})$ uzayında r. düzgünlük modülü	13
$\Omega^{r}_{p,\alpha}(f,t)$	$E^{p,\alpha}(G)$ sınıfında r. düzgünlük modülü	37
$Lip_{\alpha,p}(\beta)$	Genelleşmiş Lipschitz sınıfı	47

ÖNSÖZ

Doktora çalışmam boyunca bana değerli zamanını ayıran ve emeğini hiç bir zaman esirgemeyen değerli hocam Prof. Dr. Daniyal M. İSRAFİLOV'a çok teşekkür ederim.

Kıymetli yardımlarından dolayı sayın hocam Doç. Dr. Ali GÜVEN'e sonsuz teşekkürlerimi özellikle belirtmek isterim. Ayrıca yetişmemde emeği olan Balıkesir Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine şükranlarımı sunarım.

Büyük bir özveriyle beni yetiştiren sevgili annem ile babama ve anlayışından dolayı sevgili eşim Gökhan'a çok teşekkürler.

Balıkesir, 2009 **N. Pınar TOZMAN**

1. GİRİŞ

Yaklaşım teorisinde, bir takım özelliklere sahip fonksiyonlara daha iyi özelliklere sahip, basit fonksiyonlarla yaklaşım problemleri araştırılmaktadır. Çoğunlukla bu basit fonksiyonlar kümesi olarak araştırılan fonksiyonlar uzayının bir alt uzayı alınır. Basit ve iyi özelliklere sahip oldukları için polinomlar ve rasyonel fonksiyonlar kümesi bu tip alt uzaylar olarak düşünülebilir.

Yaklaşım teorisinin temel problemlerinden biri yaklaşım hızının değerlendirilmesidir. Bununla birlikte fonksiyonların yaklaşım hızı verildiğinde, bu fonksiyonların önemli özelliklerinin araştırılması problemi de diğer temel problemlerden biridir. Temel uzaydaki fonksiyonların özelliklerine göre yaklaşım hızının üstten değerlendirilmesi ile ilgili problemlere yaklaşım teorisinin düz problemleri, bunun tam tersi olan yani fonksiyonun yaklaşım özelliklerine göre bu fonksiyonun özellikleriyle ilgili bilgi veren problemlere ise yaklaşım teorisinin ters problemleri denir. İstenilen durum, düz ve ters teoremlerin gerek ve yeter koşul olarak ifade edilebilmesidir.

Bu tezde Morrey uzayları ve Morrey-Smirnov sınıflarında yaklaşım teorisinin düz ve ters problemleri incelenmektedir. 1938 yılında Morrey tarafından tanımlanan Morrey uzayları, ağırlıklı Lebesgue uzaylarıyla birlikte eliptik diferansiyel denklemlerin çözümünde, potansiyel teoride, maximal ve singüler operatör teorisinde ve uygulamalı matematiğin birçok mekanik problemlerinde önemli bir rol oynamaktadır. Bildiğimiz kadarıyla literatürde bu uzaylarda yaklaşım problemleriyle ilgili bir sonuç bulunmamaktadır. Tezin esas amacı bu boşluğu biraz da olsa doldurmaktır. Temel uzay olarak alınan Morrey uzayları Lebesgue uzaylarının, Morrey-Smirnov sınıfları ise klasik Sminov sınıfının genelleştirmeleridir.

$\boldsymbol{T} := (0, 2\pi)$ aralığında tanımlı $L^p(\boldsymbol{T})$ Lebesgue uzaylarında polinomlarla yaklaşımın hızı pek çok matematikçi tarafından araştırılmıştır. 1951 yılında Stechkin tarafından düz teorem ispatlanmış $[1]$, 1966 yılında ise M. F. Timan tarafından bu teoremin iyileştirmesi yapılmıştır $[2]$. Bu uzaylarda ters teorem 1950 yılında A. F. Timan ve M. F. Timan tarafından verilmiş $[3]$, 1958 yılında ise M. F. Timan tarafından bu ters teoremin iyileştirmesi ispatlanmıştır $[4]$.

$E^p(G)$, $p \geq 1$ Smirnov sınıflarında polinomlarla yaklaşımın hızı çok sayıda matematikçi tarafından incelenmiştir. Sınırı analitik eğri olan, basit bağlantılı ve sınırlı G bölgesi durumunda, $E^p(G)$ sınıfındaki düz teorem Walsh ve Russel tarafından 1959 yılında ispatlanmıştır $[5]$.

Γ düzgün Jordan eğrisi, l ise Γ nın uzunluğu ve $z = z(s)$ bu eğrinin yay uzunluğuna göre parametrizasyonu, $\theta(s)$, $0 \leq s \leq l$, Γ üzerinde s parametresine karşılık gelen noktadaki teğet ile reel eksenin pozitif yönü arasındaki açı olsun. θ fonksiyonunun $\omega(\theta, s)$ süreklilik modülünün

$$\int_0^l \frac{\omega(\theta, s)}{s} ds < \infty, \quad l > 0 \tag{1.1}$$

koşulunu sağladığı durumda $E^p(G)$ sınıfında düz ve ters teoremler 1960 yılında Al'per tarafından ispatlanmıştır $[6]$. Al'per'in sonuçları, 1969 yılında $p > 1$ için Kokilashvili $[7]$, 1977 yılında $p \geq 1$ için Anderson $[8]$ tarafından genişletilmiştir. 1987 yılında Israfilov, Faber polinomlarının yaklaşım özelliklerini kullanarak, $E^p(G)$, $1 < p < \infty$, sınıfında bir düz teorem ispatlamıştır $[9]$. Bölge sınırının Carleson eğrisi olması durumunda, Israfilov ve Çavuş $L^p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$, Lebesgue uzaylarında düz teoremi elde etmişlerdir $[10]$. Bu sonuçlar Israfilov ve Güven tarafından ağırlıklı Lebesgue ve ağırlıklı Smirnov sınıflarına da taşınmıştır $[11]$, $[12]$, $[13]$, $[14]$.

Bu tezin ikinci bölümünde temel tanımlar ve yaklaşan polinomların bulunmasında kullanacağımız Faber serileri tanımlanmıştır. Tezin 3. ve 4. bölümleri yeni bilimsel çalışma niteliği taşımaktadır; üçüncü bölümünde $L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})$, $0 \leq \alpha \leq 2$, $1 \leq p < \infty$, Morrey uzaylarında düz ve ters teoremler ispatlanmış ve bu teoremlerin iyileştirmeleri yapılmıştır. Dördüncü bölümde (1.1) koşulunu sağlayan eğrilerle sınırlı G bölgelerinde tanımlı $E^{p,\alpha}(G)$, $0 \leq \alpha \leq 2$, $1 \leq p < \infty$, Morrey-Smirnov sınıflarında düz ve ters teoremler incelenmiş ve bu teoremlerin mümkün olan iyileştirmeleri ispatlanmıştır.

2. ÖN BİLGİLER

2.1 Tanımlar ve Fonksiyon Sınıfları

$[a,b]\subset\mathbb{R}$ olmak üzere sürekli bir $\Gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ fonksiyonuna $\mathbb{C}$ 'de eğri denir. Γ kompleks düzlemde bir eğri olsun. Eğer Γ bir çembere homeomorfik (topolojik eşyapılı) ise buna bir Jordan eğrisi denir. Γ eğrisinin sınırlı değişimli bir parametrizasyonu varsa bu eğriye sonlu uzunluklu eğri denir. Γ kompleks düzlemde sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi olsun. Jordan eğri teoremine göre, her Jordan eğrisi kompleks düzlemi biri sınırlı diğeri sınırsız olan iki basit bağlantılı bölgeye ayırır. G ile Γ eğrisinin iç bölgesini, G^- ile Γ eğrisinin dış bölgesini gösterelim, yani $G:=Int\Gamma$ ve $G^-:=Ext\Gamma$ olsun. Genelliği kaybetmeden $0\in G$ alacağız. Ayrıca $\boldsymbol{T}:=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$ veya $\boldsymbol{T}:=(0,2\pi)$, $\boldsymbol{D}:=Int\boldsymbol{T}$ ve $\boldsymbol{D}^-:=Ext\boldsymbol{T}$ olsun. $w=\varphi(z)$, G^- den $\boldsymbol{D}^-$ ye

$$\varphi(\infty)=\infty\,,\quad \lim_{z\to\infty}\frac{\varphi(z)}{z}>0$$

koşullarını sağlayan konform dönüşüm olsun. ψ, φ 'nin ters dönüşümünü göstersin.

2.1.1 Tanım: Γ kompleks düzlemde sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi olsun. $0\le\alpha\le 2$ ve $p\ge 1$ olmak üzere

$$\|f\|_{L^{p,\alpha}(\Gamma)}:=\left\{\sup_{B}\frac{1}{|B\cap\Gamma|^{1-\frac{\alpha}{2}}}\int_{B\cap\Gamma}|f(z)|^p\,|dz|\right\}^{\frac{1}{p}}<\infty$$

koşulunu sağlayan $f \in L^p_{loc}(\Gamma)$ fonksiyonlarının kümesine $L^{p,\alpha}(\Gamma)$ *Morrey uzayı* denir. Buradaki supremum $\mathbb{C}$ 'nin tüm B yuvarları üzerinden alınır. Bu uzay bir Banach uzayıdır ve $\alpha = 2$ olduğu durumda $L^p(\Gamma)$ uzayıyla, $\alpha = 0$ olduğu durumda da $L^\infty(\Gamma)$ uzayıyla çakışır. $f \in L^{p,\alpha}(\Gamma)$ ise $f \in L^p(\Gamma)$ dır.

$\Gamma = \boldsymbol{T} = (0, 2\pi)$ olduğu durumda bu tanım aşağıdaki gibi de verilebilir.

$0 \le \alpha \le 2$ ve $p \ge 1$ olmak üzere

$$\|f\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})} := \left\{ \sup_I \frac{1}{|I|^{1-\frac{\alpha}{2}}} \int_I |f(\theta)|^p \, |d\theta| \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty$$

koşulunu sağlayan $f \in L^p_{loc}(\boldsymbol{T})$ fonksiyonlarının kümesine $L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})$ *Morrey uzayı* denir. Buradaki supremum tüm $I \subset \boldsymbol{T}$ aralıkları üzerinden alınır.

2.1.2 Tanım: Γ_r, $0 < r < 1$, $\boldsymbol{D}$ diskinin G bölgesi üzerine konform dönüşümü altında $\{w : |w| = r,\ 0 < r < 1\}$ çemberinin görüntüsü ve $1 \le p < \infty$ olsun. G bölgesinde analitik olan ve

$$\sup_{0<r<1} \int_{\Gamma_r} |f(z)|^p \, |dz| < \infty$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonlarının kümesine $E^p(G)$ *Smirnov sınıfı* denir $[15]$.

Her $f \in E^p(G)$ fonksiyonu Γ üzerinde hemen her yerde açısal limit değerine sahiptir ve eğer f 'nin açısal limiti için aynı notasyon kullanılırsa $f \in L^p(\Gamma)$ dır. Ayrıca $G = \boldsymbol{D}$ olduğu durumda, $H^p(\boldsymbol{D}) := E^p(\boldsymbol{D})$ olarak tanımlanan uzaya *Hardy uzayı* denir.

2.1.3 Tanım: $0 \le \alpha \le 2$ ve $p \ge 1$ olsun. G bölgesinde analitik olan ve

$$E^{p,\alpha}(G) := \left\{ f \in E^1(G) : f \in L^{p,\alpha}(\Gamma) \right\}$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonlarının kümesine $E^{p,\alpha}(G)$ *Morrey-Smirnov sınıfı* denir.

$E^{p,\alpha}(G)$ sınıfı, $0 \le \alpha \le 2$ ve $p \ge 1$ olduğunda

$$\|f\|_{E^{p,\alpha}(G)} := \|f\|_{L^{p,\alpha}(\Gamma)}$$

normuyla bir Banach uzayıdır; $\alpha = 2$ için klasik $E^p(G)$ Smirnov sınıfıyla, $\alpha = 0$ durumunda ise $E^\infty(G)$ ile çakışır. Ayrıca $G = \boldsymbol{D}$ olduğu durumda, $H^{p,\alpha}(\boldsymbol{D}) := E^{p,\alpha}(\boldsymbol{D})$ olarak tanımlanan uzaya *Morrey-Hardy uzayı* denir.

Eğer, Γ (1.1) koşulunu sağlıyor ise $\boldsymbol{T}$ üzerinde hemen her yerde $[16]$ gereğince

$$0 < c_1 \le \left|\psi'(w)\right| \le c_2 < \infty \tag{2.1}$$

koşulu sağlanır, ve dolayısıyla her $B \subset \mathbb{C}$ yuvarı için

$$\left|B \cap \Gamma\right| \ge c_3 \left|B_0 \cap \boldsymbol{T}\right| \tag{2.2}$$

olacak şekilde $B_0 \subset \mathbb{C}$ yuvarı ve $c_3 > 0$ sayısı vardır. Bu eşitsizlik bize $f \in L^{p,\alpha}(\Gamma)$ iken $f_0 := f \circ \psi \in L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})$ olduğunu verir.

2.1.4 Tanım: Γ sonlu uzunluklu Jordan eğrisi olsun. Her $r > 0$ için

$$\sup\left\{\left|\Gamma \cap D(z,r)\right| : z \in \Gamma\right\} \le cr,$$

olacak şekilde $c > 0$ sayısı varsa Γ eğrisine bir *Carleson eğrisi* denir. Burada $D(z,r)$, z merkezli r yarıçaplı bir açık disk ve $\left|\Gamma \cap D(z,r)\right|$, $\Gamma \cap D(z,r)$ kümesinin yay uzunluğudur $[17]$.

2.1.5 Tanım: $f \in L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})$, $0 \le \alpha \le 2$ ve $p \ge 1$, için

$$E_n(f)_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})} := \inf_{t_n} \left\| f - t_n \right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})},$$

sayısına derecesi n'yi aşmayan trigonometrik polinomlar üzerinden f'nin en iyi yaklaşım hatası denir.

2.1.6 Tanım: $f \in E^{p,\alpha}(G)$, $0 \le \alpha \le 2$ ve $p \ge 1$, için

$$E_n(f)_{E^{p,\alpha}(G)} := \inf_{p_n} \left\| f - p_n \right\|_{L^{p,\alpha}(\Gamma)},$$

sayısına derecesi n'yi aşmayan cebirsel polinomlar üzerinden f'nin en iyi yaklaşım hatası denir.

2.1.7 Tanım: Γ sonlu uzunluklu bir eğri olsun. Eğer $\omega : \Gamma \to [0,\infty]$ ölçülebilir fonksiyonu için $\omega^{-1}(\{0,\infty\})$ kümesinin ölçümü 0 ise ω fonksiyonuna bir *ağırlık* fonksiyonu denir.

2.1.8 Tanım: $p \in (1,\infty)$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Γ üzerinde tanımlı ve

$$\sup_{t\in\Gamma}\sup_{\varepsilon>0}\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\Gamma(t,\varepsilon)}\omega^{p}(\tau)|d\tau|\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\Gamma(t,\varepsilon)}\omega^{-q}(\tau)|d\tau|\right)^{\frac{1}{q}}<\infty \qquad (*)$$

koşulunu sağlayan ω ağırlık fonksiyonlarının sınıfı $A_p(\Gamma)$ ile gösterilir. $(*)$ koşuluna *Muckenhoupt-* A_p koşulu denir. Burada $\Gamma(t,\varepsilon)=\{\tau\in\Gamma:|\tau-t|<\varepsilon\}$ dur $[17]$.

2.1.9 Tanım: Γ kompleks düzlemde sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi olsun. $f\in L^1_{loc}(\Gamma)$ olmak üzere

$$M(f)(z):=\sup_{B\ni z}\frac{1}{|B\cap\Gamma|}\int_{B\cap\Gamma}|f(t)|\,dt,\quad z\in\Gamma$$

fonksiyonuna f fonksiyonunun *Hardy-Littlewood maximal fonksiyonu* denir. Buradaki supremum $\mathbb{C}$'nin tüm B yuvarları üzerinden alınmaktadır $[18]$.

2.1.10 Tanım: ω, Γ üzerinde tanımlı bir ağırlık fonksiyonu olsun. Hemen her yerde

$$M(\omega)(z)\le c\omega(z),\quad z\in\Gamma$$

olacak şekilde $c>0$ sayısı varsa ω'ya $A_1(\Gamma)$ *Muckenhoupt ağırlığı* denir $[19]$.

2.1.11 Tanım: $u_1,u_2,...,u_n$ ve $m_1,m_2,...,m_n$, $n\in\mathbb{N}^+$, reel sayıların dizileri olmak üzere

$$\sum_{\nu=1}^{n}u_\nu m_\nu=\sum_{\nu=1}^{n-1}U_\nu\left(m_\nu-m_{\nu+1}\right)+U_n m_n$$

formülüne Abel transformu denir. Burada $U_k = u_1 + u_2 + ... + u_k$, $k = 1,2,...,n$, dır $[20]$.

Γ sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi, $G := Int\Gamma$ ve $G^- := Ext\Gamma$ olsun. $f \in L^1(\Gamma)$ için

$$f^+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in G$$

ve

$$f^-(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in G^-$$

şeklinde tanımlanan f^+ ve f^- fonksiyonları, sırasıyla G ve G^- de analitiktir ve $f^-(\infty) = 0$ dır.

2.1.12 Tanım: $f \in L^1(\Gamma)$ fonksiyonunun bir $z \in \Gamma$ noktasındaki *Cauchy singüler integrali,*

$$S(f)(z) := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma \setminus \overline{D}(z,\varepsilon)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \Gamma$$

olarak tanımlanır. Buradaki $\overline{D}(z,\varepsilon)$, z merkezli ε yarıçaplı kapalı disktir $[17]$.

f^+ ve f^- fonksiyonlarından birinin Γ üzerinde hemen her yerde açısal limit değerleri varsa, $S(f)(z)$ Cauchy singüler integrali Γ üzerinde hemen her yerde vardır ve f^+ ve f^- fonksiyonlarından diğerinin de Γ üzerinde hemen her yerde açısal limit değeri vardır. Tersine, $S(f)(z)$ Cauchy singüler integrali Γ üzerinde hemen her yerde varsa, f^{+} ve f^{-} fonksiyonlarının Γ üzerinde hemen her yerde açısal limit değerleri vardır. Her iki durumda da hemen her $z \in \Gamma$ için $[21]$ gereğince

$$f^{+}(z) = S(f)(z) + \frac{1}{2} f(z)$$
$$f^{-}(z) = S(f)(z) - \frac{1}{2} f(z)$$

eşitlikleri sağlanır ve dolayısıyla Γ üzerinde hemen her yerde

$$f = f^{+} - f^{-}$$

olur.

$S : f \to S(f)$ lineer operatörüne *Cauchy singüler operatörü* denir.

2.2 Faber Serileri ve Faber Operatörleri

Γ kompleks düzlemde sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi olsun. G ile Γ eğrisinin iç bölgesini gösterelim. $[22]$'den bilindiği gibi,

$$\frac{\psi'(w)}{\psi(w) - z}, \quad z \in G$$

fonksiyonu $\boldsymbol{D}^{-}$ de analitiktir ve

$$\frac{\psi'(w)}{\psi(w)-z}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{F_k(z)}{w^{k+1}}, \quad z\in G \; ve \; w\in \boldsymbol{D}^- \tag{2.3}$$

açılımı geçerlidir. Burada $F_k(z)$, G^- için $k=0,1,...$ dereceli *Faber polinomu* olup

$$F_k(z)=\varphi^k(z)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi^k(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta, \quad z\in G^-, \quad k=0,1,2... \tag{2.4}$$

integral gösterimine sahiptir. Eğer $f\in E^{p,\alpha}(G)$ ise $f\in E^1(G)$ ve dolayısıyla Cauchy integral gösteriminden

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{\boldsymbol{T}}f(\psi(w))\frac{\psi'(w)dw}{\psi(w)-z}, \quad z\in G \tag{2.5}$$

dir. Şimdi

$$a_k=a_k(f):=\frac{1}{2\pi i}\int_{\boldsymbol{T}}\frac{f_0(w)}{w^{k+1}}dw, \quad k=0,1,2,...$$

ile $f\in E^{p,\alpha}(G)$ fonksiyonunun *Faber katsayılarını* tanımlayalım. Burada

$$f_0(w):=f(\psi(w)), \quad |w|=1$$

dir. (2.3) ve (2.5) gösterimleri göz önüne alınırsa, $f\in E^{p,\alpha}(G)$ fonksiyonu için

$$f(z)\sim\sum_{k=0}^{\infty}a_k(f)F_k(z)$$

seri gösterimi elde edilir. Bu seriye f fonksiyonunun *Faber serisi* denir.

P ile derece kısıtlaması olmadan bütün polinomların ailesini, $P(\boldsymbol{D})$ ile bu ailenin $\boldsymbol{D}$ üzerindeki izini gösterelim. $P(\boldsymbol{D})$ üzerinde bir $L(P)$ operatörünü

$$L(P)(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{P(w)\psi'(w)}{\psi(w)-z}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{P(\varphi(\zeta))}{\zeta - z}d\zeta, \quad z \in G \tag{2.6}$$

olarak tanımlayalım.

$$L\left(\sum_{k=0}^{n} a_k w^k\right) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{n} a_k \int_T \frac{w^k \psi'(w)}{\psi(w)-z}dw = \sum_{k=0}^{n} a_k F_k(z)$$

eşitliğinin doğruluğu kolayca görülür.

Eğer $z' \in G$ iken Γ 'nın içinden açısal yollar boyunca $z' \to z$ limiti alınırsa, Γ üzerinde hemen her yerde

$$L(P)(z) = S(P \circ \varphi)(z) + \frac{1}{2}(P \circ \varphi)(z) \tag{2.7}$$

eşitliği bulunur.

3. MORREY UZAYLARINDA YAKLAŞIM

3.1 Morrey Uzaylarında Düz ve Ters Teoremler

3.1.1 Yardımcı Sonuçlar

$f \in L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})$, $0 \le \alpha \le 2$ ve $p \ge 1$ olsun.

$$\omega_{p,\alpha}^{r}(f,t) := \sup_{|h| \le t} \left\| \Delta_h^r(f,\cdot) \right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})}, \; h > 0 \,, \; r = 1,2,...$$

şeklinde tanımlanan $\omega_{p,\alpha}^{r}(f,\cdot) : (0,+\infty) \to [0,+\infty)$ fonksiyonuna f fonksiyonunun r. mertebeden *düzgünlük modülü* denir. Burada

$$\Delta_h^r(f,x) = \sum_{k=0}^{r} (-1)^{r-k} \binom{r}{k} f(x+kh)$$

dir.

Bu şekilde tanımlanan r. düzgünlük modülü tez boyunca sık sık kullanacağımız aşağıdaki özelliklere sahiptir:

1) Her $f_1, f_2 \in L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})$ için $\omega_{p,\alpha}^{r}(f_1 + f_2,\cdot) \le \omega_{p,\alpha}^{r}(f_2,\cdot) + \omega_{p,\alpha}^{r}(f_2,\cdot)$,

2) $\omega_{p,\alpha}^{r}(f,nt) \le n^r \omega_{p,\alpha}^{r}(f,t), \quad n \in \mathbb{N}$,

3) $\omega_{p,\alpha}^{r}(f,\lambda t) \le (\lambda + 1)^r \omega_{p,\alpha}^{r}(f,t), \quad \lambda > 0.$

3.1.1.1 Önerme: $f \in L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})$, $0 < \alpha \le 2$ ve $1 < p < \infty$ olsun. $k \in \mathbb{N}^{+}$ ve derecesi n'yi aşmayan her T_n trigonometrik polinomu için

$$\left\| T_n^{(k)} \right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})} \le c n^k \left\| T_n \right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})}, \quad n \in \mathbb{N}$$

olacak şekilde n'den bağımsız bir $c > 0$ sabiti vardır.

İspat: $k = 1$ durumunu ispatlayalım. Genel durum tümevarım yöntemiyle görülür. I **,** $\boldsymbol{T}$ **'nin** altaralığı, χ_I onun karakteristik fonksiyonu ve $M\chi_I$ ise χ_I nın Hardy-Littlewood maximal fonksiyonu olsun. R. Coifman-R. Rochberg'in bir sonucundan $[23]$ $M\chi_I$ fonksiyonu $\boldsymbol{T}$ üzerinde A_1 Muckenhoupt ağırlığıdır, yani $\boldsymbol{T}$ üzerinde hemen her yerde $M(M\chi_I) \le cM\chi_I$ dır. Dolayısıyla $L^p(\boldsymbol{T}, \omega)$, $\omega \in A_p(\boldsymbol{T})$, ağırlıklı Lebesgue uzaylarındaki trigonometrik polinomlar için olan Berstein eşitsizliği kullanılırsa $[24]$

$$\begin{aligned}
\int_I \left| T_n^{'}(t) \right|^p dt &= \int_{\boldsymbol{T}} \left| T_n^{'}(t) \right|^p \chi_I(t)\, dt \\
&\le c_4 \int_{\boldsymbol{T}} \left| T_n^{'}(t) \right|^p M\chi_I(t)\, dt \\
&\le c_5 \int_{\boldsymbol{T}} \left| T_n(t) \right|^p M\chi_I(t)\, dt
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$M\chi_I(t) \approx \chi_I(t) + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-2k} \chi_{\left(2^{k+1} I \setminus 2^k I\right)}(t)$$

denkliği yukarıdaki eşitsizliğe uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
\left\|T_n'\right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})}^p &= \sup_I \frac{1}{|I|^{1-\frac{\alpha}{2}}} \int_I \left|T_n'(t)\right|^p dt \\
&\le c_6 \sup_I \frac{1}{|I|^{1-\frac{\alpha}{2}}} \int_{\boldsymbol{T}} \left|T_n(t)\right|^p \left(\chi_I(t) + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-2k} \chi_{\left(2^{k+1} I \setminus 2^k I\right)}(t) \right) dt \\
&= c_6 \sup_I \frac{1}{|I|^{1-\frac{\alpha}{2}}} \int_I \left|T_n(t)\right|^p dt + c_6 \sup_I \frac{1}{|I|^{1-\frac{\alpha}{2}}} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-2k} \int_{\left(2^{k+1} I \setminus 2^k I\right)} \left|T_n(t)\right|^p dt \\
&\le c_7 \left(\left\|T_n\right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})}^p + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-2k} \sup_I \frac{1}{|I|^{1-\frac{\alpha}{2}}} \int_{2^{k+1} I} \left|T_n(t)\right|^p dt \right) \\
&\le c_7 \left\|T_n\right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})}^p + c_8 \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-2k+(k+1)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \sup_I \frac{1}{\left|2^{k+1} I\right|^{1-\frac{\alpha}{2}}} \int_{2^{k+1} I} \left|T_n(t)\right|^p dt \\
&\le c_7 \left\|T_n\right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})}^p + c_9 \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-2k+(k+1)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \sup_I \frac{1}{|I|^{1-\frac{\alpha}{2}}} \int_I \left|T_n(t)\right|^p dt \\
&\le c_7 \left\|T_n\right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})}^p + c_{10} \left\|T_n\right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})}^p \\
&\le c_{11} \left\|T_n\right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})}^p
\end{aligned}
$$

sonucuna ulaşılır. Çünkü $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-2k+(k+1)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} < \infty$ dur. □

3.1.2 Temel Sonuçlar

$L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})$, $0 \le \alpha \le 2$ ve $1 \le p \le \infty$, Morrey uzaylarındaki düz teorem aşağıdaki şekilde verilir.

3.1.2.1 Teorem: $f \in L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})$, $0 < \alpha \le 2$ ve $1 < p < \infty$, olsun. Her $r \in \mathbb{N}^{+}$ için

$$E_n(f)_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})} \leq c\left\| f(\cdot) - S_n(f,\cdot) \right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})} \leq C\omega_{p,\alpha}^r\left(f, 1/(n+1)\right), \quad n \in \mathbb{N}^+ \tag{3.1}$$

olacak şekilde $c, C > 0$ sabitleri vardır. Burada $S_n(f,\theta) := \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ik\theta}$ dır.

İspat: Teoremin ispatı, $L^p(\boldsymbol{T})$ Lebesgue uzaylarında Stechkin tarafından ispatlanan düz teoremin ispat yöntemiyle benzerdir $[1]$. □

Bu teoremin bir sonucu olarak, $H^{p,\alpha}(\boldsymbol{D})$, $0 < \alpha \leq 2$ ve $1 < p < \infty$, uzaylarındaki Taylor toplamlarının yaklaşım özelliklerini gösteren aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

3.1.2.2 Önerme: $f \in H^{p,\alpha}(\boldsymbol{D})$, $0 < \alpha \leq 2$ ve $1 < p < \infty$ olsun. Eğer $\sum_{k=0}^{n} b_k w^k$ serisi f fonksiyonunun Taylor toplamı ise

$$\left\| f(w) - \sum_{k=0}^{n} b_k w^k \right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})} \leq c\omega_{p,\alpha}^r\left(f, 1/(n+1)\right), \quad r \in \mathbb{N}^+$$

olacak şekilde bir $c > 0$ sabiti vardır.

İspat: $f \in H^{p,\alpha}(\boldsymbol{D})$, $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ik\theta}$ serisi onun sınır fonksiyonu olan $f\left(e^{i\theta}\right)$ nın Fourier serisi ve

$$S_n(f,\theta) := \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ik\theta}$$

olsun. $f \in H^p(\boldsymbol{D})$ olduğundan

$$a_k = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ b_k, & k \geq 0 \end{cases}$$

dır. Teorem 3.1.2.1'den

$$\left\| f(w) - \sum_{k=0}^{n} b_k w^k \right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})} = \left\| f\left(e^{i\theta}\right) - S_n(f,\theta) \right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})} \leq c\omega_{p,\alpha}^r \left(f, 1/(n+1) \right)$$

eşitsizliği elde edilir. □

$L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})$, $0 \leq \alpha \leq 2$ ve $1 \leq p \leq \infty$, Morrey uzaylarındaki ters teorem aşağıdaki şekilde verilir.

3.1.2.3 Teorem: $f \in L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})$, $0 < \alpha \leq 2$ ve $1 < p < \infty$ olsun. Her $r \in \mathbb{N}^+$ için

$$\omega_{p,\alpha}^r \left(f, \frac{1}{n} \right) \leq c n^{-r} \sum_{k=1}^{n} k^{r-1} E_k(f)_{L^{p,\alpha}(T)}, \quad n \in \mathbb{N}^+ \tag{3.2}$$

olacak şekilde n'den bağımsız bir $c > 0$ sabiti vardır.

İspat: Teoremin ispatı Önerme 3.1.1.1 göz önüne alınarak ve $L^p(\boldsymbol{T})$ uzaylarındaki uygun sonucun ispatı adım adım takip edilerek yapılır $[25, s.208]$. □

3.2 Morrey Uzaylarında Düz ve Ters Teoremlerin İyileştirmeleri

Bu bölümde bir önceki bölümde verilen, $L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})$, $0 \leq \alpha \leq 2$ ve $1 \leq p \leq \infty$, Morrey uzaylarındaki düz teorem Teorem 3.1.2.1 ve ters teorem Teorem 3.1.2.3'ün iyileştirmeleri yapılacaktır.

3.2.1 Yardımcı Sonuçlar

$f \in L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})$, $0 \le \alpha \le 2$ ve $p \ge 1$, fonksiyonu ve $\tilde{f}$ eşlenik foksiyonunun Fourier serileri sırasıyla

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu(f,x)$$

ve

$$\tilde{f}(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu(\tilde{f},x)$$

olsun. Burada

$$A_\mu(f,x) := a_\mu \cos \mu x + b_\mu \sin \mu x, \quad \mu = 1,2,...$$

ve

$$A_\mu(\tilde{f},x) := a_\mu \sin \mu x - b_\mu \cos \mu x, \quad \mu = 1,2,...$$

dir.

Basit hesaplardan sonra f 'nin $\Delta_h^r(f,x)$ $r.$ farkı için $h > 0$ adımla

$$\Delta_h^r(f,x) \sim \begin{Bmatrix} (-1)^{\frac{r+1}{2}} 2^r \sum_{k=1}^{\infty} A_k(\tilde{f},x) \sin^r \frac{kh}{2}, & r \text{ tek ise} \\ (-1)^{\frac{r}{2}} 2^r \sum_{k=1}^{\infty} A_k(f,x) \sin^r \frac{kh}{2}, & r \text{ çift ise} \end{Bmatrix}$$

Fourier serisi bulunur.

$$B_\mu(f,x) := \sum_{\nu=2^{\mu-1}}^{2^\mu-1} A_\nu(f,x), \quad \mu = 1,2,...$$

olsun.

3.2.1.1 Teorem: (Morrey uzaylarında Littlewood-Paley Eşitsizliği) $f \in L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})$, $0<\alpha\le 2$ ve $1<p<\infty$ olsun. Her $\nu \in \mathbb{N}^+$ için

$$c\left\|\left(\sum_{\mu=\nu}^{\infty} B_\mu^2(f,x)\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})} \le \left\|\sum_{\mu=2^{\nu-1}}^{\infty} A_\mu(f,x)\right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})} \le C\left\|\left(\sum_{\mu=\nu}^{\infty} B_\mu^2(f,x)\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})}$$

olacak şekilde sadece p ve α ’ ya bağlı $c, C > 0$ sabitleri vardır.

İspat: Öncelikle ikinci eşitsizliği ispatlayalım. I , $\boldsymbol{T}$ nin altaralığı, χ_I onun karakteristik fonksiyonu ve $M\chi_I$ ise χ_I nın Hardy-Littlewood maximal fonksiyonu olsun. R. Coifman-R. Rochberg’in bir sonucundan $[23]$ $M\chi_I$ fonksiyonu A_1 Muckenhoupt ağırlığıdır, yani $\boldsymbol{T}$ üzerinde hemen her yerde $M(M\chi_I) \le cM\chi_I$ dır. Dolayısıyla ağırlıklı Lebesgue uzaylarındaki Littlewood-Paley eşitsizliği kullanılırsa $[26, \text{Teorem } 1]$

$$\begin{aligned}\int_I \left|\sum_{\mu=2^{\nu-1}}^{\infty} A_\mu(f,x)\right|^p dx &= \int_{\boldsymbol{T}} \left|\sum_{\mu=2^{\nu-1}}^{\infty} A_\mu(f,x)\right|^p \chi_I(x)dx \\ &\le \int_{\boldsymbol{T}} \left|\sum_{\mu=2^{\nu-1}}^{\infty} A_\mu(f,x)\right|^p M\chi_I(x)dx\end{aligned}$$

$$\leq \int_{\boldsymbol{T}} \left| \sum_{\mu=\nu}^{\infty} B_{\mu}^{2}(f,x) \right|^{p/2} M\chi_I(x)dx$$

bulunur.

$$M\chi_I(x) \approx \chi_I(x) + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-2k} \chi_{\left(2^{k+1} I \setminus 2^k I\right)}(x)$$

denkliği yukarıdaki eşitsizliğe uygulanırsa

$$\int_I \left| \sum_{\mu=2^{\nu-1}}^{\infty} A_{\mu}(f,x) \right|^{p} dx$$

$$\leq c_{12} \int_{\boldsymbol{T}} \left| \sum_{\mu=\nu}^{\infty} B_{\mu}^{2}(f,x) \right|^{p/2} \left(\chi_I(x) + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-2k} \chi_{\left(2^{k+1} I \setminus 2^k I\right)}(x) \right) dx$$

$$\leq c_{13} \int_{\boldsymbol{T}} \left| \sum_{\mu=\nu}^{\infty} B_{\mu}^{2}(f,x) \right|^{p/2} \chi_I(x)dx + c_{13} \int_{\boldsymbol{T}} \left| \sum_{\mu=\nu}^{\infty} B_{\mu}^{2}(f,x) \right|^{p/2} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-2k} \chi_{\left(2^{k+1} I \setminus 2^k I\right)}(x)dx$$

$$= c_{13} \int_I \left| \sum_{\mu=\nu}^{\infty} B_{\mu}^{2}(f,x) \right|^{p/2} dx + c_{13} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-2k} \int_{2^{k+1} I \setminus 2^k I} \left| \sum_{\mu=\nu}^{\infty} B_{\mu}^{2}(f,x) \right|^{p/2} dx$$

elde edilir.

Yukarıdaki eşitsizliğin normu alınırsa,

$$\sup_I \frac{1}{|I|^{1-\frac{\alpha}{2}}} \int_I \left| \sum_{\mu=2^{\nu-1}}^{\infty} A_{\mu}(f,x) \right|^{p} dx$$

$$\leq c_{14} \left\{ \left\| \left(\sum_{\mu=\nu}^{\infty} B_{\mu}^{2}(f,x) \right)^{1/2} \right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})}^{p} + \sup_I \frac{1}{|I|^{1-\alpha/2}} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-2k} \int_{2^{k+1} I \setminus 2^k I} \left| \sum_{\mu=\nu}^{\infty} B_{\mu}^{2}(f,x) \right|^{p/2} dx \right\}$$

$$\leq c_{15}\left\{\left\|\left(\sum_{\mu=\nu}^{\infty} B_{\mu}^{2}(f,x)\right)^{1/2}\right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})}^{p}+\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-2k}\sup_{I}\frac{1}{|I|^{1-\alpha/2}}\int_{2^{k+1}I}\left|\sum_{\mu=\nu}^{\infty} B_{\mu}^{2}(f,x)\right|^{p/2} dx\right\}$$

$$\leq c_{16}\left\|\left(\sum_{\mu=\nu}^{\infty} B_{\mu}^{2}(f,x)\right)^{1/2}\right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})}^{p}$$

$$+c_{16}\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-2k+(k+1)(1-\alpha/2)}\sup_{I}\frac{1}{\left|2^{k+1}I\right|^{1-\alpha/2}}\int_{2^{k+1}I}\left|\sum_{\mu=\nu}^{\infty} B_{\mu}^{2}(f,x)\right|^{p/2} dx$$

$$\leq c_{16}\left\|\left(\sum_{\mu=\nu}^{\infty} B_{\mu}^{2}(f,x)\right)^{1/2}\right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})}^{p}$$

$$+c_{17}\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-2k+(k+1)(1-\alpha/2)}\sup_{I}\frac{1}{|I|^{1-\alpha/2}}\int_{I}\left|\sum_{\mu=\nu}^{\infty} B_{\mu}^{2}(f,x)\right|^{p/2} dx$$

$$\leq c_{18}\left\|\left(\sum_{\mu=\nu}^{\infty} B_{\mu}^{2}(f,x)\right)^{1/2}\right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})}^{p}$$

sonucuna ulaşılır. Çünkü $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-2k+(k+1)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}<\infty$ dur. Ters eşitsizlik benzer yöntemle ispatlanır. □

3.2.1.2 Teorem: (Morrey uzaylarında Marcinkiewicz Çarpan Teoremi)

$\{\lambda_{\nu}\}_{\nu=0}^{\infty}$,

$$|\lambda_{\nu}|\leq M, \qquad \sum_{2^{\nu}}^{2^{\nu+1}-1}\left|\lambda_{j}-\lambda_{j+1}\right|\leq M, \qquad \nu=0,1,...$$

koşullarını sağlayan reel sayıların bir dizisi olsun. Eğer $f \in L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})$, $0 < \alpha \leq 2$, $1 < p < \infty$ ve $f \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu e^{i\nu\theta}$ ise

$$h \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \lambda_\nu e^{i\nu\theta} \quad ve \quad \|h\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})} \leq c\|f\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})}$$

olacak şekilde $h \in L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})$ ve bir $c > 0$ sabiti vardır.

İspat: Bu teorem, Teorem 3.2.1.1'in ispat yöntemi göz önüne alınarak ve ağırlıklı Lebesgue uzaylarında Kurtz tarafından ispatlanan Marcinkiewicz Çarpan Teoremi $[26, \text{Teorem } 2]$ kullanılarak ispatlanır.

3.2.1.3 Önerme: $f \in L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})$, $0 < \alpha \leq 2$ ve $1 < p < \infty$ olsun.

(i) Eğer f 'nin Fourier serisinin $n.$ kısmi toplamı $S_n(f) := S_n(f,\theta)$ ise

$$E_n(f)_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})} \leq \|f - S_n(f)\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})} \leq cE_n(f)_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})}$$

olacak şekilde f 'den bağımsız bir $c > 0$ sabiti vardır.

(ii) Eğer f 'nin eşlenik fonksiyonu $\tilde{f}$ ise

$$\|\tilde{f}\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})} \leq c\|f\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})}$$

olacak şekilde f 'den bağımsız bir $c > 0$ sabiti vardır.

İspat: **(i)** Eşitsizliğin ilk kısmının ispatı açıktır. İkinci kısmın ispatı ise Teorem 3.2.1.1'in ispat yöntemi ve $[27, \text{Teorem } 8]$ kullanılarak yapılır.

(ii) $[27,\text{Teorem } 1]$ kullanılarak kolayca ispatlanır.

(i) deki eşitsizliğin bir sonucu olarak, her $\nu \in \mathbb{N}^+$ için

$$E_{2^{\nu-1}-1}(f)_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})} \le \left\| f - S_{2^{\nu-1}-1}(f) \right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})} = \left\| f - \sum_{\mu=0}^{2^{\nu-1}-1} A_\mu(f,\cdot) \right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})}$$

$$= \left\| \sum_{\mu=2^{\nu-1}}^{\infty} A_\mu(f,\cdot) \right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})} \le c E_{2^{\nu-1}-1}(f)_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})} \tag{3.3}$$

elde edilir.

Aşağıdaki önermenin ispatı Lebesgue uzaylarındaki genelleşmiş Minkowski eşitsizliğinin ispat yöntemi dikkate alınarak gerçekleştirilir.

3.2.1.4 Önerme: (Morrey Uzaylarında Genelleşmiş Minkowski Eşitsizliği) $0 < \alpha \le 2$ ve $1 < p < \infty$ olsun. I_1 ve I_2, $\boldsymbol{T}$ 'nin alt aralığı olmak üzere, $\theta_2 \in I_2$ için $g(\theta_2) \ge 0$ ve $I_1 \times I_2$ üzerinde $f(\theta_1, \theta_2) \ge 0$ ölçülebilir fonksiyonları için

$$\left\| \int_{I_2} g(\theta_2) f(\cdot, \theta_2) d\theta_2 \right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})} \le \int_{I_2} g(\theta_2) \left\| f(\cdot, \theta_2) \right\| d\theta_2$$

eşitsizliği geçerlidir.

3.2.2 Temel Sonuçlar

Şimdi Teorem 3.1.2.1'in iyileştirmesini gösterelim. Aşağıdaki teoremde verilen (3.4) eşitsizliği, Teorem 3.1.2.1'de verilen eşitsizlikden daha iyidir. Örneğin, $E_n(f)_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})} = \dfrac{1}{n^r}$, $n \in \mathbb{N}^+$ ve $r \in \mathbb{N}^+$ ise

(3.1) eşitsizliğinden $1 < p < \infty$ için

$$\omega_{p,\alpha}^{r}\left(f,h\right) \geq ch^{r}, \quad h > 0$$

elde edilir.

Aşağıda ispat edeceğimiz (3.4) eşitsizliğinden $1 < p \leq 2$ için

$$\omega_{p,\alpha}^{r}\left(f,h\right) \geq ch^{r}\left(\ln\frac{1}{h}\right)^{1/2}, \quad h > 0,$$

$2 \leq p < \infty$ için ise

$$\omega_{p,\alpha}^{r}\left(f,h\right) \geq ch^{r}\left(\ln\frac{1}{h}\right)^{1/p}, \quad h > 0,$$

bulunur. Buradan düzgünlük modülünün (3.4) eşitsizliğinde alttan daha iyi değerlendirildiği anlaşılır.

3.2.2.1 Teorem: $f \in L^{p,\alpha}\left(\boldsymbol{T}\right)$, $0 < \alpha \leq 2$ ve $1 < p < \infty$ olsun. Her $r \in \mathbb{N}^{+}$ için

$$\omega_{p,\alpha}^{r}\left(f,1/\left(n+1\right)\right) \geq \frac{c}{n^{r}}\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\gamma r-1}E_{\nu}^{\gamma}\left(f\right)_{L^{p,\alpha}\left(\boldsymbol{T}\right)}\right\}^{1/\gamma}, \quad n \in \mathbb{N}^{+} \tag{3.4}$$

olacak şekilde n'den bağımsız bir $c = c\left(p,r,\alpha\right) > 0$ sabiti vardır. Burada $\gamma = \max\left(p,2\right)$ dir.

İspat: Verilen bir n doğal sayısı için $2^m \le n < 2^{m+1}$ koşulunu sağlayan doğal sayı m olsun. Ayrıca

$$\delta_{n,r,\gamma} := \left\{ \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\nu^{\gamma r-1}}{n^{\gamma r}} E_\nu^\gamma \left(f \right)_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})} \right\}^{1/\gamma}, \quad 1 < \gamma < \infty, \quad r \in \mathbb{N}^+$$

olsun. (3.3) kullanılırsa

$$\delta_{n,r,\gamma} := \left\{ \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\nu^{\gamma r-1}}{n^{\gamma r}} E_\nu^\gamma \left(f \right)_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})} \right\}^{1/\gamma} \le \left\{ \sum_{\nu=1}^{m+1} \sum_{\mu=2^{\nu-1}}^{2^\nu-1} \frac{\mu^{\gamma r-1}}{n^{\gamma r}} E_\mu^\gamma \left(f \right)_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})} \right\}^{1/\gamma}$$

$$\le \left\{ \sum_{\nu=1}^{m+1} \frac{2^{\nu\gamma r}}{n^{\gamma r}} E_{2^{\nu-1}-1}^\gamma \left(f \right)_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})} \right\}^{1/\gamma}$$

$$\le \left\{ \sum_{\nu=1}^{m+1} \frac{2^{\nu\gamma r}}{n^{\gamma r}} \left\| \sum_{\mu=2^{\nu-1}}^{\infty} A_\mu \left(f, x \right) \right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})}^\gamma \right\}^{1/\gamma}$$

ve Teorem 3.2.1.1 uygulanırsa

$$\delta_{n,r,\gamma} \le \left\{ \sum_{\nu=1}^{m+1} \frac{2^{\nu\gamma r}}{n^{\gamma r}} \left\| \sum_{\mu=2^{\nu-1}}^{\infty} A_\mu \left(f, x \right) \right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})}^\gamma \right\}^{1/\gamma}$$

$$\le c_{19} \left\{ \sum_{\nu=1}^{m+1} \frac{2^{\nu\gamma r}}{n^{\gamma r}} \left\| \left(\sum_{\mu=\nu}^{\infty} B_\mu^2 \left(f, x \right) \right)^{1/2} \right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})}^\gamma \right\}^{1/\gamma} \tag{3.5}$$

elde edilir.

$1 < p \le 2$ ve $\gamma = 2$ olsun. Genelleşmiş Minkowski eşitsizliğinden

$$\delta_{n,r,2} \le c_{19} \left\{ \sum_{\nu=1}^{m+1} \frac{2^{2\nu r}}{n^{2r}} \left[\sup_I \frac{1}{|I|^{1-\alpha/2}} \int_I \left(\sum_{\mu=\nu}^{\infty} B_\mu^2(f,x) \right)^{p/2} dx \right]^{2/p} \right\}^{1/2}$$

$$\le c_{19} \left\{ \sup_I \frac{1}{|I|^{1-\alpha/2}} \int_I \left(\sum_{\nu=1}^{m+1} \frac{2^{2\nu r}}{n^{2r}} \sum_{\mu=\nu}^{\infty} B_\mu^2(f,x) \right)^{p/2} dx \right\}^{1/p} \tag{3.6}$$

bulunur.

Son eşitsizliğe Abel transformu uygulanırsa,

$$\delta_{n,r,2} \le c_{19} \left\{ \sup_I \frac{1}{|I|^{1-\alpha/2}} \int_I \left(\sum_{\nu=1}^{m} \frac{2^{2\nu r}}{n^{2r}} B_\nu^2(f,x) + \frac{2^{2r(m+1)}}{n^{2r}} \sum_{\mu=m+1}^{\infty} B_\mu^2(f,x) \right)^{p/2} dx \right\}^{1/p}$$

$$\le c_{20} \left[\sup_I \frac{1}{|I|^{1-\alpha/2}} \int_I \left(\sum_{\nu=1}^{m} \frac{2^{2\nu r}}{n^{2r}} B_\nu^2(f,x) \right)^{p/2} dx \right]^{1/p}$$

$$+ c_{20} \left[\sup_I \frac{1}{|I|^{1-\alpha/2}} \int_I \left(\sum_{\mu=m+1}^{\infty} B_\mu^2(f,x) \right)^{p/2} dx \right]^{1/p} \tag{3.7}$$

elde edilir.

Littlewood-Paley eşitsizliği, (3.3) ve Teorem 3.1.2.1 sırasıyla (3.7) eşitsizliğinin sonuncu teriminde kullanılırsa

$$\left[\sup_I \frac{1}{|I|^{1-\alpha/2}} \int_I \left(\sum_{\mu=m+1}^{\infty} B_\mu^2(f,x) \right)^{p/2} dx \right]^{1/p}$$

$$= \left\| \left(\sum_{\mu=m+1}^{\infty} B_\mu^2(f,x) \right)^{1/2} \right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})} \le c_{21} \left\| \sum_{\mu=2^m}^{\infty} A_\mu(f,x) \right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})}$$

$$= c_{21}\left\| f - \sum_{\mu=0}^{2^m-1} A_\mu(f,x)\right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})} \le c_{22} E_{2^m-1}(f)_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})}$$

$$\le c_{23}\omega_{p,\alpha}^r\left(f,1/2^m\right) \le c_{24}\omega_{p,\alpha}^r\left(f,1/(n+1)\right) \tag{3.8}$$

olduğu görülür.

(3.7)'nin ilk terimi göz önüne alınırsa,

$$\left[\sup_I \frac{1}{|I|^{1-\alpha/2}} \int_I \left(\sum_{\nu=1}^m \frac{2^{2\nu r}}{n^{2r}} B_\nu^2(f,x)\right)^{p/2} dx\right]^{1/p}$$

$$\le c_{25}\left[\sup_I \frac{1}{|I|^{1-\alpha/2}} \int_I \left|\sum_{\nu=1}^m \frac{2^{\nu r}}{n^r} B_\nu(f,x)\right|^p dx\right]^{1/p}$$

$$= c_{25}\left[\sup_I \frac{1}{|I|^{1-\alpha/2}} \int_I \left|\sum_{\nu=1}^m \sum_{\mu=2^{\nu-1}}^{2^\nu-1} \frac{2^{\nu r}}{n^r \sin^r \dfrac{\mu}{2n}} A_\mu(f,x)\sin^r\frac{\mu}{2n}\right|^p dx\right]^{1/p}$$

elde edilir.

$\lambda_\mu := \dfrac{2^{\nu r}}{n^r \sin^r \dfrac{\mu}{2n}}$ ve $\nu = 1,2,...,m$ olmak üzere $\left\{\lambda_\mu\right\}_{2^{\nu-1}}^{2^\nu-1}$ sistemi Teorem 3.2.1.2'nin koşullarını sağlar. Dolayısıyla Teorem 3.2.1.2 uygulanırsa

$$\left[\sup_I \frac{1}{|I|^{1-\alpha/2}} \int_I \left|\sum_{\nu=1}^m \sum_{\mu=2^{\nu-1}}^{2^\nu-1} \lambda_\mu A_\mu(f,x)\sin^r\frac{\mu}{2n}\right|^p dx\right]^{1/p}$$

$$= \left[\sup_I \frac{1}{|I|^{1-\alpha/2}} \int_I \left|\sum_{\mu=1}^{2^m-1} \lambda_\mu A_\mu(f,x)\sin^r\frac{\mu}{2n}\right|^p dx\right]^{1/p}$$

$$\leq c_{26}\left[\sup_I \frac{1}{|I|^{1-\alpha/2}}\int_I \left|\sum_{\mu=1}^{2^m-1} A_\mu(f,x)\sin^r \frac{\mu}{2n}\right|^p dx\right]^{1/p}$$

$$\leq c_{27}\left[\sup_I \frac{1}{|I|^{1-\alpha/2}}\int_I \left|\sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu(f,x)\sin^r \frac{\mu}{2n}\right|^p dx\right]^{1/p}$$

$$\leq c_{28}\omega_{p,\alpha}^r\left(f,1/(n+1)\right) \tag{3.9}$$

bulunur.

Böylece (3.9), (3.8) ve (3.7) eşitsizlikleri kullanılırsa

$$\delta_{n,r,2} \leq c\omega_{p,\alpha}^r\left(f,\frac{1}{n+1}\right)$$

olduğu görülür.

$2 \leq p < \infty$ ve $\gamma = p$ olsun. (3.5) eşitsizliği göz önüne alınırsa

$$\delta_{n,r,p} \leq c_{19}\left\{\sum_{\nu=1}^{m+1}\frac{2^{\nu pr}}{n^{pr}}\left\|\left(\sum_{\mu=\nu}^{\infty} B_\mu^2(f,x)\right)^{1/2}\right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbf{T})}^p\right\}^{1/p}$$

$$= c_{19}\left\{\sup_I \frac{1}{|I|^{1-\alpha/2}}\int_I \sum_{\nu=1}^{m+1}\frac{2^{\nu pr}}{n^{pr}}\left(\sum_{\mu=\nu}^{\infty} B_\mu^2(f,x)\right)^{p/2} dx\right\}^{1/p}$$

$$\leq c_{29}\left\{\sup_I \frac{1}{|I|^{1-\alpha/2}}\int_I \left(\sum_{\nu=1}^{m+1}\frac{2^{2\nu r}}{n^{2r}}\sum_{\mu=\nu}^{\infty} B_\mu^2(f,x)\right)^{p/2} dx\right\}^{1/p} \tag{3.10}$$

elde edilir.

(3.10) ile (3.6) eşitsizlikleri aynı olduğundan dolayı, $1 < p \le 2$ durumunda izlenen yol takip edilerek ispat tamamlanır. □

Şimdi Teorem 3.1.2.3'ün iyileştirmesini gösterelim. Aşağıdaki teoremde verilen (3.11) eşitsizliği Teorem 3.1.2.3'de verilen (3.2) eşitsizliğinden daha iyidir. Örneğin, $E_n(f)_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})} = \dfrac{1}{n^r}$, $n \in \mathbb{N}^+$ ve $r \in \mathbb{N}^+$ ise

Teorem 3.1.2.3'den $1 < p < \infty$ için

$$\omega_{p,\alpha}^r(f,h) \le ch^r \ln\frac{1}{h}, \quad h > 0$$

elde edilir.

Aşağıda ispat edeceğimiz (3.11) eşitsizliğinden $1 < p \le 2$ için

$$\omega_{p,\alpha}^r(f,h) \le ch^r \left(\ln\frac{1}{h}\right)^{1/p}, \quad h > 0,$$

$2 \le p < \infty$ için ise

$$\omega_{p,\alpha}^r(f,h) \le ch^r \left(\ln\frac{1}{h}\right)^{1/2}, \quad h > 0,$$

bulunur. Buradan düzgünlük modülünün (3.11) eşitsizliğinde üstten daha iyi değerlendirilmiş olduğu anlaşılır.

3.2.2.2 Teorem: $f \in L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T}), 0 < \alpha \le 2$ ve $1 < p < \infty$ olsun. Her $r \in \mathbb{N}^+$ için

$$\omega_{p,\alpha}^{r}\left(f,1/n\right)\leq\frac{c}{n^{r}}\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\beta r-1}E_{\nu}^{\beta}\left(f\right)_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})}\right\}^{1/\beta},\quad n\in\mathbb{N}^{+}\tag{3.11}$$

olacak şekilde n'den bağımsız bir $c=c\left(p,r,\alpha\right)>0$ sabiti vardır. Burada $\beta=\min\left(p,2\right)$ dir.

İspat: Verilen bir n doğal sayısı için $2^{m}\leq n<2^{m+1}$ koşulunu sağlayan doğal sayı m ve $h>0$ olsun. Her $r\in\mathbb{N}^{+}$ için

$$\begin{aligned}\Delta_{h}^{r}\left(f,x\right)&=\Delta_{h}^{r}\left(f,x\right)-\Delta_{h}^{r}\left(S_{2^{m-1}}f,x\right)+\Delta_{h}^{r}\left(S_{2^{m-1}}f,x\right)\\&=\Delta_{h}^{r}\left(f-S_{2^{m-1}}f,x\right)+\Delta_{h}^{r}\left(S_{2^{m-1}}f,x\right)\end{aligned}\tag{3.12}$$

olur. Önerme 3.2.1.3 (i) kullanılırsa

$$\begin{aligned}\left\|\Delta_{h}^{r}\left(f-S_{2^{m-1}}f,\cdot\right)\right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})}&\leq c_{30}\left\|f-S_{2^{m-1}}f\right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})}\\&\leq c_{31}E_{2^{m-1}}\left(f\right)_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})}\end{aligned}\tag{3.13}$$

bulunur.

Eğer r tek ise (çift olduğu durum da benzer şekilde ispatlanır.), Littlewood-Paley eşitsizliği kullanılarak (3.12)'nin ikinci terimi için

$$\begin{aligned}\left\|\Delta_{h}^{r}\left(S_{2^{m-1}}f,\cdot\right)\right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})}&=\left\|2^{r}\sum_{\nu=1}^{2^{m-1}}\sin^{r}\frac{\nu h}{2}A_{\nu}\left(\tilde{f},\cdot\right)\right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})}\\&\leq c_{32}\left\|\left(\sum_{\mu=1}^{m}B_{\mu}^{2}\left(\tilde{f},\cdot;r,h\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})}\end{aligned}\tag{3.14}$$

elde edilir. Burada $B_\mu\left(\tilde{f},\cdot;r,h\right):=\sum_{\nu=2^{\mu-1}}^{2^\mu-1}\sin^r\frac{\nu h}{2}A_\nu\left(\tilde{f},\cdot\right)$ dir.

Basit hesaplamalardan sonra,

$$\left\|\left(\sum_{\mu=1}^{m}B_\mu^2\left(\tilde{f},\cdot;r,h\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})}\le\begin{cases}\left(\sum_{\mu=1}^{m}\left\|B_\mu\left(\tilde{f},\cdot;r,h\right)\right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})}^2\right)^{1/2}, & p>2\\ \left(\sum_{\mu=1}^{m}\left\|B_\mu\left(\tilde{f},\cdot;r,h\right)\right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})}^p\right)^{1/p}, & p\le 2\end{cases}$$

olduğu kolayca görülür. Yani $\beta:=\min\left(p,2\right)$ için

$$\left\|\left(\sum_{\mu=1}^{m}B_\mu^2\left(\tilde{f},\cdot;r,h\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})}\le\left(\sum_{\mu=1}^{m}\left\|B_\mu\left(\tilde{f},\cdot;r,h\right)\right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})}^\beta\right)^{1/\beta} \tag{3.15}$$

olur.

Şimdi $\left\|B_\mu\left(\tilde{f},\cdot;r,h\right)\right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})}$ ifadesi göz önüne alınırsa, Abel transformundan

$$\begin{aligned}B_\mu\left(\tilde{f},\cdot;r,h\right)&=\sum_{\nu=2^{\mu-1}}^{2^\mu-1}\sin^r\frac{\nu h}{2}A_\nu\left(\tilde{f},\cdot\right)\\&=\sum_{\nu=2^{\mu-1}}^{2^\mu-2}\left\{\left[\sin^r\frac{\nu h}{2}-\sin^r\frac{\left(\nu+1\right)h}{2}\right]\sum_{j=2^{\mu-1}}^{\nu}A_j\left(\tilde{f},\cdot\right)\right\}\\&+\sin^r\frac{\left(2^\mu-1\right)h}{2}\sum_{\nu=2^{\mu-1}}^{2^\mu-1}A_\nu\left(\tilde{f},\cdot\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\left\| B_\mu\left(\tilde{f},\cdot;r,h\right)\right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})} \le \sum_{\nu=2^{\mu-1}}^{2^\mu-2}\left\{\left|\sin^r\frac{\nu h}{2}-\sin^r\frac{(\nu+1)h}{2}\right|\left\|\sum_{j=2^{\mu-1}}^{\nu}A_j\left(\tilde{f},\cdot\right)\right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})}\right\}$$

$$+\left|\sin^r\frac{\left(2^\mu-1\right)h}{2}\right|\left\|\sum_{\nu=2^{\mu-1}}^{2^\mu-1}A_\nu\left(\tilde{f},\cdot\right)\right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})} \tag{3.16}$$

bulunur.

Önerme 3.2.1.3 (i) ve $\left\|\tilde{f}-S_n\left(\tilde{f}\right)\right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})} \le cE_n\left(\tilde{f}\right)_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})}$, $n\in\mathbb{N}^+$, eşitsizliği göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{j=2^{\mu-1}}^{\nu}A_j\left(\tilde{f},\cdot\right)\right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})} &= \left\|\sum_{j=2^{\mu-1}}^{\infty}A_j\left(\tilde{f},\cdot\right)-\sum_{j=\nu+1}^{\infty}A_j\left(\tilde{f},\cdot\right)\right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})}\\
&\le \left\|\sum_{j=2^{\mu-1}}^{\infty}A_j\left(\tilde{f},\cdot\right)\right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})}+\left\|\sum_{j=\nu+1}^{\infty}A_j\left(\tilde{f},\cdot\right)\right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})}\\
&\le c_{33}E_{2^{\mu-1}-1}\left(\tilde{f}\right)_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})}+c_{33}E_\nu\left(\tilde{f}\right)_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})}\\
&\le c_{34}E_{2^{\mu-1}-1}\left(\tilde{f}\right)_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Burada $E_n\left(\tilde{f}\right)_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})} \le cE_n\left(f\right)_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})}$ kullanılırsa

$$\left\|\sum_{j=2^{\mu-1}}^{\nu}A_j\left(\tilde{f},\cdot\right)\right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})} \le c_{35}E_{2^{\mu-1}-1}\left(f\right)_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\left\| \sum_{\nu=2^{\mu-1}}^{2^{\mu}-1} A_{\nu}\left(\tilde{f},\cdot\right) \right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})} \leq c_{36} E_{2^{\mu-1}-1}\left(f\right)_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})}$$

olduğu görülür.

Son iki eşitsizlik (3.16)'da kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\left\| B_{\mu}\left(\tilde{f},\cdot;r,h\right) \right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})} &\leq c_{35} E_{2^{\mu-1}-1}\left(f\right)_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})} \sum_{\nu=2^{\mu-1}}^{2^{\mu}-2} \left[\sin^{r} \frac{(\nu+1)h}{2} - \sin^{r} \frac{\nu h}{2} \right] \\
&+ c_{36} E_{2^{\mu-1}-1}\left(f\right)_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})} \left| \sin^{r} \frac{\left(2^{\mu}-1\right)h}{2} \right| \\
&\leq c_{37} E_{2^{\mu-1}-1}\left(f\right)_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})} h^{r} 2^{\mu r} + c_{38} E_{2^{\mu-1}-1}\left(f\right)_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})} h^{r} 2^{\mu r} \\
&\leq c_{39} E_{2^{\mu-1}-1}\left(f\right)_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})} h^{r} 2^{\mu r} \qquad (3.17)
\end{aligned}$$

elde edilir.

(3.15) ve (3.17) eşitsizlikleri sırasıyla (3.14)'e uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\left\| \Delta_{h}^{r}\left(S_{2^{m-1}} f,\cdot\right) \right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})} &\leq c_{32} \left(\sum_{\mu=1}^{m} \left\| B_{\mu}\left(\tilde{f},\cdot\right) \right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})}^{\beta} \right)^{1/\beta} \\
&\leq c_{40} \left\{ \sum_{\mu=1}^{m} E_{2^{\mu-1}-1}^{\beta}\left(f\right)_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})} h^{r\beta} 2^{r\mu\beta} \right\}^{1/\beta} \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

bulunur.

(3.12), (3.13) ve (3.18)'den

$$\left\|\Delta_h^r(f,\cdot)\right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})} \le c_{41}\left\{E_{2^{m-1}}(f)_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})} + h^r\left[\sum_{\mu=1}^{m} 2^{r\mu\beta} E_{2^{\mu-1}-1}^{\beta}(f)_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})}\right]^{1/\beta}\right\}$$

olduğu görülür ve modülün tanımından

$$\omega_{p,\alpha}^r(f,1/n) \le c_{42}\left\{E_{2^{m-1}}(f)_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})} + \frac{1}{n^r}\left[\sum_{\mu=1}^{m} 2^{r\mu\beta} E_{2^{\mu-1}-1}^{\beta}(f)_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})}\right]^{1/\beta}\right\}$$

bulunur.

Kolayca görmek mümkündür ki

$$E_{2^{m-1}}^{\beta}(f)_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})} \le \frac{2^{2r\beta}}{2^{mr\beta}} \sum_{\nu=2^{m-2}+1}^{2^{m-1}} \nu^{r\beta-1} E_{\nu}^{\beta}(f)_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})}$$

ve $2^m \le n < 2^{m+1}$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\omega_{p,\alpha}^r(f,1/n) &\le c_{43}\frac{2^{3r}}{n^r}\left[\sum_{\nu=2^{m-2}+1}^{2^{m-1}} \nu^{r\beta-1} E_{\nu}^{\beta}(f)_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})}\right]^{1/\beta} \\
&\quad + c_{44}\frac{2^{3r}}{n^r}\left[\sum_{\nu=1}^{2^{m-2}} \nu^{r\beta-1} E_{\nu}^{\beta}(f)_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})}\right]^{1/\beta} \\
&\le \frac{c}{n^r}\left[\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{r\beta-1} E_{\nu}^{\beta}(f)_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})}\right]^{1/\beta}
\end{aligned}$$

elde edilir. □

4. MORREY-SMIRNOV SINIFLARINDA YAKLAŞIM

4.1 Morrey Smirnov Sınıflarında Düz ve Ters Teoremler

4.1.1 Yardımcı Sonuçlar

4.1.1.1 Önerme: Γ bir Carleson eğrisi ve $f \in L^{p,\alpha}(\Gamma)$, $0 < \alpha \le 2$, $1 < p < \infty$ olsun. Bu durumda

$$\|S(f)\|_{L^{p,\alpha}(\Gamma)} \le c\|f\|_{L^{p,\alpha}(\Gamma)}$$

olacak şekilde $c = c(p,\alpha,\Gamma) > 0$ sayısı vardır.

İspat: B kompleks düzlemde bir yuvar, χ_B onun karakteristik fonksiyonu ve $M\chi_B$ ise χ_B nin Hardy-Littlewood maximal fonksiyonu olsun. R. Coifman-R. Rochberg'in bir sonucundan $[23]$, $M\chi_{B\cap\Gamma}$ fonksiyonu Γ üzerinde A_1 Muckenhoupt ağırlığıdır, yani hemen her yerde $M(M\chi_{B\cap\Gamma}) \le cM\chi_{B\cap\Gamma}$ dir. Dolayısıyla $S(f)$ singüler operatörünün $L^p(\Gamma,\omega)$, $\omega \in A_p(\Gamma)$, ağırlıklı Lebesgue uzaylarındaki sınırlılığı kullanılırsa $[28]$

$$\begin{aligned}\int_{B\cap\Gamma} |S(f)(z)|^p |dz| &= \int_{\Gamma} |S(f)(z)|^p \chi_{B\cap\Gamma}(z)|dz| \\ &\le c_{45} \int_{\Gamma} |S(f)(z)|^p M\chi_{B\cap\Gamma}(z)|dz| \\ &\le c_{46} \int_{\Gamma} |f(z)|^p M\chi_{B\cap\Gamma}(z)|dz|\end{aligned}$$

elde edilir.

$$M\chi_{B\cap\Gamma}(z)\approx\chi_{B\cap\Gamma}(z)+\sum_{k=0}^{\infty}2^{-2k}\chi_{\left(2^{k+1}B\backslash 2^{k}B\right)\cap\Gamma}(z)$$

denkliği yukarıdaki eşitsizliğe uygulanırsa,

$$\sup_{B}\frac{1}{\left|B\cap\Gamma\right|^{1-\frac{\alpha}{2}}}\int_{B\cap\Gamma}\left|S(f)(z)\right|^{p}|dz|$$

$$\leq c_{47}\sup_{B}\frac{1}{\left|B\cap\Gamma\right|^{1-\frac{\alpha}{2}}}\int_{\Gamma}\left|f(z)\right|^{p}\left(\chi_{B\cap\Gamma}(z)+\sum_{k=0}^{\infty}2^{-2k}\chi_{\left(2^{k+1}B\backslash 2^{k}B\right)\cap\Gamma}(z)\right)|dz|$$

$$=c_{47}\sup_{B}\frac{1}{\left|B\cap\Gamma\right|^{1-\frac{\alpha}{2}}}\int_{B\cap\Gamma}\left|f(z)\right|^{p}|dz|$$

$$+c_{47}\sup_{B}\frac{1}{\left|B\cap\Gamma\right|^{1-\frac{\alpha}{2}}}\sum_{k=0}^{\infty}2^{-2k}\int_{\left(2^{k+1}B\backslash 2^{k}B\right)\cap\Gamma}\left|f(z)\right|^{p}|dz|$$

$$\leq c_{47}\left(\left\|f\right\|_{L^{p,\alpha}(\Gamma)}^{p}+\sum_{k=0}^{\infty}2^{-2k}\sup_{B}\frac{1}{\left|B\cap\Gamma\right|^{1-\frac{\alpha}{2}}}\int_{2^{k+1}B\cap\Gamma}\left|f(z)\right|^{p}|dz|\right)$$

$$\leq c_{47}\left\|f\right\|_{L^{p,\alpha}(\Gamma)}^{p}+c_{47}\sum_{k=0}^{\infty}2^{-2k+(k+1)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\sup_{B}\frac{1}{\left|2^{k+1}B\cap\Gamma\right|^{1-\frac{\alpha}{2}}}\int_{2^{k+1}B\cap\Gamma}\left|f(z)\right|^{p}|dz|$$

$$\leq c_{47}\left\|f\right\|_{L^{p,\alpha}(\Gamma)}^{p}+c_{48}\sum_{k=0}^{\infty}2^{-2k+(k+1)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\sup_{B}\frac{1}{\left|B\cap\Gamma\right|^{1-\frac{\alpha}{2}}}\int_{B\cap\Gamma}\left|f(z)\right|^{p}|dz|$$

$$\leq c_{47}\left\|f\right\|_{L^{p,\alpha}(\Gamma)}^{p}+c_{49}\left\|f\right\|_{L^{p,\alpha}(\Gamma)}^{p}$$

$$\leq c_{50}\left\|f\right\|_{L^{p,\alpha}(\Gamma)}^{p},$$

çünkü $\sum_{k=0}^{\infty}2^{-2k+(k+1)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}<\infty$ dur. □

4.1.1.2 Sonuç: $f \in L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})$, $0<\alpha\leq 2$ ve $1<p<\infty$ ise $f^{+} \in H^{p,\alpha}(\boldsymbol{D})$ dir.

İspat: $f \in L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})$ ise $f \in L^{p}(\boldsymbol{T})$ dir. Dolayısıyla $f^{+} \in H^{p}(\boldsymbol{D})$ ve f^{+} fonksiyonu $\boldsymbol{T}$ üzerinde hemen her yerde

$$f^{+}(w)=\frac{1}{2}f(w)+S(f)(w)$$

açısal limit değerlerine sahiptir. Bu eşitlik ve Önerme 4.1.1.1 kullanılırsa $f^{+} \in L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})$ elde edilir. $H^{p,\alpha}(\boldsymbol{D})$ nin tanımından $f^{+} \in H^{p,\alpha}(\boldsymbol{D})$ olduğu görülür. □

Bunun aracılığıyla, eğer $f \in E^{p,\alpha}(G)$ ise $f_0(w)=f[\psi(w)]$ olduğundan

$$\begin{aligned} f_0^{+}(w) &:= \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{f_0(\tau)\,d\tau}{\tau-w}, \quad w\in \boldsymbol{D} \\ f_0^{-}(w) &:= \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{f_0(\tau)\,d\tau}{\tau-w}, \quad w\in \boldsymbol{D}^{-} \end{aligned} \tag{4.1}$$

fonksiyonlarının sırasıyla $H^{p,\alpha}(\boldsymbol{D})$ ve $H^{p,\alpha}(\boldsymbol{D}^{-})$ ye ait olduğu görülür.

$f \in E^{p,\alpha}(G)$, $0\leq\alpha\leq 2$ ve $p\geq 1$, fonksiyonu için $r.$ düzgünlük modülü

$$\Omega_{p,\alpha}^{r}(f,t):=\omega_{p,\alpha}^{r}(f_0^{+},t), \quad r=1,2,...$$

olarak tanımlanır.

4.1.1.3 Önerme: Γ (1.1) koşulunu sağlıyor ise $L:P(\boldsymbol{D})\rightarrow E^{p,\alpha}(G)$, $0<\alpha\leq 2$ ve $1<p<\infty$, lineer operatörü sınırlıdır.

İspat: (2.7) den Γ üzerinde hemen her yerde

$$L(P)(z)=S(P\circ\varphi)(z)+\frac{1}{2}(P\circ\varphi)(z)$$

eşitliğinin doğru olduğu biliniyor. Önerme 4.1.1.1 ve (2.1) eşitsizliği üstteki eşitliğe uygulanırsa

$$\|L(P)\|_{L^{p,\alpha}(\Gamma)}\leq c_{51}\|(P\circ\varphi)\|_{L^{p,\alpha}(\Gamma)}\leq c_{52}\|P\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})}$$

bulunur. □

$L:P(\boldsymbol{D})\rightarrow E^{p,\alpha}(G)$, $0<\alpha\leq 2$ ve $1<p<\infty$ operatörü $P(\boldsymbol{D})$ den $H^{p,\alpha}(\boldsymbol{D})$ ye sınırlı ve lineer operatör olarak genişletilebilir ve $L:H^{p,\alpha}(\boldsymbol{D})\rightarrow E^{p,\alpha}(G)$, genişletilmiş operatörü için

$$L(f)(z):=\frac{1}{2\pi i}\int_{T}\frac{f(w)\psi'(w)}{\psi(w)-z}dw,\quad z\in G,\quad f\in H^{p,\alpha}(\boldsymbol{D}) \tag{4.2}$$

gösterimi geçerlidir.

4.1.1.4 Önerme: Eğer Γ (1.1) koşulunu sağlıyor ise

$$L:H^{p,\alpha}(\boldsymbol{D})\rightarrow E^{p,\alpha}(G),\ 0<\alpha\leq 2 \text{ ve } 1<p<\infty$$

lineer operatörü bire bir ve örtendir.

İspat: $f\in H^{p,\alpha}(\boldsymbol{D})$ ve

$$f(w)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k w^k, \quad w\in \boldsymbol{D}$$

f 'nin Taylor açılımı olsun. $f_r(w):=f(rw),\quad 0<r<1$ olmak üzere her $B\subset\mathbb{C}$ yuvarı için

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\left|B\cap \boldsymbol{T}\right|^{1-\frac{\alpha}{2}}}\int_{B\cap \boldsymbol{T}}\left|f_r(w)-f(w)\right|^p\left|dw\right| \\
&=\frac{1}{\left|B\cap \boldsymbol{T}\right|^{1-\frac{\alpha}{2}}}\int_{\boldsymbol{T}}\left|f_r(w)-f(w)\right|^p\chi_{B\cap \boldsymbol{T}}(w)\left|dw\right| \\
&\le\frac{1}{\left|B\cap \boldsymbol{T}\right|^{1-\frac{\alpha}{2}}}\int_{\boldsymbol{T}}\left|f_r(w)-f(w)\right|^p M\chi_{B\cap \boldsymbol{T}}(w)\left|dw\right|
\end{aligned} \tag{4.3}$$

olur. Daha öncede belirttiğimiz gibi R. Coifman-R. Rochberg in bir sonucundan $[23]$, $M\chi_{B\cap \boldsymbol{T}}\in A_1(\boldsymbol{T})$ dir. Üstelik $f\in H^{p,\alpha}(\boldsymbol{D})$ fonksiyonu, sınır fonksiyonu olan $f\in L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})$ fonksiyonunun Poisson integralidir. $[29]$'deki Teorem 10 göz önüne alınırsa

$$\lim_{r\to 1}\int_{\boldsymbol{T}}\left|f_r(w)-f(w)\right|^p M\chi_{B\cap \boldsymbol{T}}(w)\left|dw\right|=0$$

bulunur. Dolayısıyla (4.3) den

$$\lim_{r\to 1}\left\|f_r-f\right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})}=0$$

olur. $L:H^{p,\alpha}(\boldsymbol{D})\to E^{p,\alpha}(G)$, $0<\alpha\le 2$ ve $1<p<\infty$, operatörünün sınırlılığından

$$\lim_{r\to 1}\left\|L(f_r)-L(f)\right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})}=0 \tag{4.4}$$

elde edilir.

$\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k w^k$ serisi $|w| = r < 1$ diskinde düzgün yakınsak olduğundan, $\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k r^k w^k$ serisi $\boldsymbol{T}$ üzerinde düzgün yakınsaktır. Dolayısıyla $z \in G$ için

$$\begin{aligned}
L(f_r)(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\boldsymbol{T}} \frac{f_r(w)\psi'(w)}{\psi(w)-z}dw \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k r^k \frac{1}{2\pi i}\int_{\boldsymbol{T}} \frac{w^k\psi'(w)}{\psi(w)-z}dw \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k r^k F_k(z)
\end{aligned}$$

olur. Γ içinde açısal yollar boyunca $z' \to z \in \Gamma$ limiti alınırsa

$$L(f_r)(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k r^k F_k(z), \quad z \in \Gamma$$

bulunur.

$[30, s.43]$'deki Lemma 3 kullanılırsa, $L(f_r)$'nin $a_k\left(L(f_r)\right)$ Faber katsayıları için

$$\begin{aligned}
a_k\left(L(f_r)\right) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\boldsymbol{T}} \frac{L(f_r)\circ\psi(w)}{w^{k+1}}dw \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k r^k \frac{1}{2\pi i}\int_{\boldsymbol{T}} \frac{F_k\circ\psi(w)}{w^{k+1}}dw = \alpha_k r^k, \quad k \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

ve buradan

$$a_k\left(L(f_r)\right)\to\alpha_k,\quad r\to 1^- \tag{4.5}$$

bulunur. Şimdi Hölder eşitsizliği ve (2.1) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\left|a_k\left(L(f_r)\right)-a_k\left(L(f)\right)\right| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\boldsymbol{T}}\frac{\left[L(f_r)-L(f)\right]\circ\psi(w)}{w^{k+1}}dw\right| \\
&\le \frac{1}{2\pi}\int_{\boldsymbol{T}}\left|\left[L(f_r)-L(f)\right]\circ\psi(w)\right||dw| \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\left|\left[L(f_r)-L(f)\right](z)\right||\varphi'(z)||dz| \\
&\le \frac{c_{53}}{2\pi}\int_{\Gamma}\left|\left[L(f_r)-L(f)\right](z)\right||dz| \\
&\le c_{54}\left\|L(f_r)-L(f)\right\|_{L^p(\Gamma)} \\
&\le c_{55}\left\|L(f_r)-L(f)\right\|_{L^{p,\alpha}(\Gamma)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ve (4.4) bize, $r\to 1^-$ iken $a_k\left(L(f_r)\right)\to a_k\left(L(f)\right)$ yakınsamasını verir ve (4.5) kullanılarak $a_k\left(L(f)\right)=\alpha_k$, $k\in\mathbb{N}$ bulunur. Eğer $L(f)=0$ ise $\alpha_k=a_k\left(L(f)\right)$, $k\in\mathbb{N}$ ve böylece $f=0$ olduğu görülür. Bu ise L operatörünün birebir olması anlamına gelir.

Örtenliği göstermek için $f\in E^{p,\alpha}(G)$ fonksiyonu alıp $f_0=f\circ\psi\in L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})$ fonksiyonunu göz önüne alalım. (4.1) de tanımlanan f_0^+ ve f_0^- fonksiyonlarının açısal sınır değerlerinin $\boldsymbol{T}$ üzerinde hemen her yerde

$$f_0^+(w)=S(f_0)(w)+f_0(w)/2,\quad f_0^-(w)=S(f_0)(w)-f_0(w)/2$$

gösterimlerine sahip olduğu görülür ve dolayısıyla $\boldsymbol{T}$ üzerinde hemen her yerde

$$f_0(w) = f_0^+(w) - f_0^-(w)$$

olur. $f_0^-(\infty) = 0$ ve $f_0^- \in H^1(\boldsymbol{D})$ olduğundan, $a_k(f)$, $k \in \mathbb{N}$ Faber katsayıları için

$$\begin{aligned}
a_k(f) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\boldsymbol{T}} \frac{f_0(w)}{w^{k+1}} dw \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\boldsymbol{T}} \frac{f_0^+(w)}{w^{k+1}} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{\boldsymbol{T}} \frac{f_0^-(w)}{w^{k+1}} dw \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\boldsymbol{T}} \frac{f_0^+(w)}{w^{k+1}} dw = a_k\left(f_0^+\right)
\end{aligned}$$

bulunur. Bu ise bize f 'nin $a_k(f)$, $k \in \mathbb{N}$, Faber katsayılarının, f_0^+ nın orjindeki Taylor katsayıları olduğunu verir. Yani

$$f_0^+(w) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k, \quad w \in \boldsymbol{D}$$

dir. Ayrıca ispatın ilk kısmından

$$L\left(f_0^+\right) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f) F_k$$

olduğu görülür. $E^p(G)$ uzayında aynı Faber katsayılarına sahip iki farklı fonksiyon olamayacağından $L\left(f_0^+\right) = f$ olur ve böylece L operatörü örtendir. □

4.1.2 Temel Sonuçlar

Morrey-Smirnov sınıflarındaki düz teorem aşağıdaki şekilde verilir.

4.1.2.1 Teorem: $G \subset \mathbb{C}$, (1.1) koşulunu sağlayan Γ eğrisiyle sınırlı basit bağlantılı bölge olsun. $f \in E^{p,\alpha}(G)$, $0 < \alpha \le 2$ ve $p > 1$ ise $r \in \mathbb{N}^{+}$ için

$$E_n(f)_{E^{p,\alpha}(G)} \le c\Omega^{r}_{p,\alpha}\left(f, 1/(n+1)\right), \quad n \in \mathbb{N}^{+}$$

olacak şekilde n'den bağımsız bir $c > 0$ sayısı vardır.

İspat: Önerme 3.1.2.2 göz önüne alınırsa

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{n} a_k F_k \right\|_{L^{p,\alpha}(\Gamma)} \le c \left\| f_0^{+} - \sum_{k=0}^{n} a_k w^k \right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})}$$

eşitsizliğini sağlayan $c > 0$ sayısının var olduğunu göstermek yeterlidir.

$$f_0(w) = f_0^{+}(w) - f_0^{-}(w), \quad w \in \boldsymbol{T}$$

eşitliğinde $w = \varphi(z)$ yazılırsa Γ üzerinde hemen her yerde

$$f(z) = f_0^{+}(\varphi(z)) - f_0^{-}(\varphi(z)) \tag{4.6}$$

elde edilir. $z' \in G^{-}$ olsun. (4.6) ve (2.4) gösterimi kullanılırsa

$$\sum_{k=0}^{n} a_k F_k(z') = \sum_{k=0}^{n} a_k \left\{ \left[\varphi(z')\right]^k + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\left[\varphi(\zeta)\right]^k}{\zeta - z'} d\zeta \right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k \left[\varphi(z')\right]^k + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k \left[\varphi(\zeta)\right]^k}{\zeta - z'} d\zeta$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\left(\frac{-f_0^{+}\left(\varphi(\zeta)\right)}{\zeta-z'}+\frac{f_0^{-}\left(\varphi(\zeta)\right)}{\zeta-z'}\right)d\zeta$$

$$=\sum_{k=0}^{n}a_k\left[\varphi(z')\right]^k+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f_0^{-}\left(\varphi(\zeta)\right)}{\zeta-z'}d\zeta$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\sum_{k=0}^{n}a_k\left[\varphi(\zeta)\right]^k-f_0^{+}\left(\varphi(\zeta)\right)}{\zeta-z'}d\zeta$$

bulunur. $f_0^{-}\circ\varphi\in E^p\left(G^{-}\right)$ ve $\left(f_0^{-}\circ\varphi\right)(\infty)=0$ olduğundan, sınırsız bölgeler için olan $\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f_0^{-}\left(\varphi(\zeta)\right)}{\zeta-z'}d\zeta=-f_0^{-}\left(\varphi(z')\right)$ Cauchy integral gösterimi kullanılırsa

$$\sum_{k=0}^{n}a_kF_k(z')=\sum_{k=0}^{n}a_k\left[\varphi(z')\right]^k-f_0^{-}\left(\varphi(z')\right)$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\sum_{k=0}^{n}a_k\left[\varphi(\zeta)\right]^k-f_0^{+}\left(\varphi(\zeta)\right)}{\zeta-z'}d\zeta$$

elde edilir. Γ nın dışından açısal yollar boyunca $z'\to z$ limiti alınıp

$$f(z)=f^{+}(z)-f^{-}(z),\quad f^{-}(z)=S(f)(z)-\frac{1}{2}f(z)$$

eşitlikleri ve (4.6) kullanılırsa Γ üzerinde hemen her yerde

$$f(z)-\sum_{k=0}^{n}a_kF_k(z)=\frac{1}{2}\left[f_0^{+}\left(\varphi(z)\right)-\sum_{k=0}^{n}a_k\left[\varphi(z)\right]^k\right]$$

$$+S\left[f_0^{+}\left(\varphi(z)\right)-\sum_{k=0}^{n}a_k\left[\varphi(z)\right]^k\right] \tag{4.7}$$

bulunur.

Γ, (1.1) koşulunu sağladığından (2.1) uygulanırsa

$$\int_{B\cap\Gamma}\left|f_0^+\left(\varphi(z)\right)-\sum_{k=0}^{n}a_k\left[\varphi(z)\right]^k\right|^p|dz|=\int_{B_0\cap\boldsymbol{T}}\left|f_0^+(w)-\sum_{k=0}^{n}a_kw^k\right|^p|\psi'(w)||dw|$$

$$\le c_{56}\int_{B_0\cap\boldsymbol{T}}\left|f_0^+(w)-\sum_{k=0}^{n}a_kw^k\right|^p|dw|$$

ve (2.2) kullanılırsa

$$\sup_B\frac{1}{|B\cap\Gamma|^{1-\frac{\alpha}{2}}}\int_{B\cap\Gamma}\left|f_0^+\left(\varphi(z)\right)-\sum_{k=0}^{n}a_k\left[\varphi(z)\right]^k\right|^p|dz|$$

$$\le c_{57}\sup_{B_0}\frac{1}{|B_0\cap\boldsymbol{T}|^{1-\frac{\alpha}{2}}}\int_{B_0\cap\boldsymbol{T}}\left|f_0^+(w)-\sum_{k=0}^{n}a_kw^k\right|^p|dw|$$

elde edilir. Buradan

$$\left\|f_0^+\left(\varphi(z)\right)-\sum_{k=0}^{n}a_k\left[\varphi(z)\right]^k\right\|_{L^{p,\alpha}(\Gamma)}\le c\left\|f_0^+(w)-\sum_{k=0}^{n}a_kw^k\right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})}$$

olduğu görülür.

Önerme 4.1.1.1 ve yukarıdaki eşitsizlik sırasıyla (4.7)'e uygulanırsa

$$\left\|f(z)-\sum_{k=0}^{n}a_kF_k(z)\right\|_{L^{p,\alpha}(\Gamma)}\le c\left\|f_0^+(w)-\sum_{k=0}^{n}a_kw^k\right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})}$$

olacak şekilde $c>0$ sayısı bulunur. Önerme 3.1.2.2 teoremin ispatını tamamlar. □

Morrey-Smirnov sınıflarındaki ters teorem aşağıdaki şekilde verilir.

4.1.2.2 Teorem: $G \subset \mathbb{C}$, (1.1) koşulunu sağlayan Γ eğrisiyle sınırlı basit bağlantılı bölge olsun. $f \in E^{p,\alpha}(G)$, $0 < \alpha \le 2$ ve $p > 1$ ise $r \in \mathbb{N}^{+}$ için

$$\Omega^{r}_{p,\alpha}\left(f, \frac{1}{n}\right) \le \frac{c}{n^{r}} \sum_{k=1}^{n} k^{r-1} E_k(f)_{E^{p,\alpha}(G)}, \quad n \in \mathbb{N}^{+}$$

olacak şekilde n den bağımsız bir $c > 0$ sabiti vardır.

İspat: $f \in E^{p,\alpha}(G)$ olsun. Önerme 4.1.1.4 den $L\left(f_0^{+}\right) = f$ dir. $L : H^{p,\alpha}(\boldsymbol{D}) \to E^{p,\alpha}(G)$ operatörü sınırlı, lineer, birebir, örten olduğundan

$$L^{-1} : E^{p,\alpha}(G) \to H^{p,\alpha}(\boldsymbol{D})$$

operatörü de sınırlıdır. $P_k^{*} \in P_k$, $k \in \mathbb{N}$, $E^{p,\alpha}(G)$ de f'e en iyi yaklaşan polinomlar olsun. $L^{-1}\left(P_k^{*}\right) \in P_k(\boldsymbol{D})$ olduğu açıktır ve böylece

$$\begin{aligned} E_k\left(f_0^{+}\right)_{H^{p,\alpha}(\boldsymbol{D})} &\le \left\| f_0^{+} - L^{-1}\left(P_k^{*}\right) \right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})} \\ &= \left\| L^{-1}(f) - L^{-1}\left(P_k^{*}\right) \right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})} \\ &\le \left\| L^{-1} \right\| \left\| f - P_k^{*} \right\|_{L^{p,\alpha}(\Gamma)} \\ &= \left\| L^{-1} \right\| E_k(f)_{E^{p,\alpha}(G)} \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitsizlik ve $H^{p,\alpha}(\boldsymbol{D})$ durumunda Teorem 3.1.2.3 uygulanırsa

$$\begin{aligned}\Omega_{p,\alpha}^{r}\left(f,\frac{1}{n}\right)&=\omega_{p,\alpha}^{r}\left(f_{0}^{+},\frac{1}{n}\right)\\&\leq cn^{-r}\sum_{k=1}^{n}k^{r-1}E_{k}\left(f_{0}^{+}\right)_{H^{p,\alpha}(\mathbf{D})}\\&\leq cn^{-r}\left\|L^{-1}\right\|\sum_{k=1}^{n}k^{r-1}E_{k}\left(f\right)_{E^{p,\alpha}(G)}\\&\leq cn^{-r}\sum_{k=1}^{n}k^{r-1}E_{k}\left(f\right)_{E^{p,\alpha}(G)}\end{aligned}$$

elde edilir. □

$\beta>0$ ve $r:=[\beta]+1$ olsun. Bu durumda

$$Lip_{\alpha,p}(\beta):=\left\{f\in E^{p,\alpha}(G):\ \ \Omega_{p,\alpha}^{r}(f,\delta)=O\left(\delta^{\beta}\right),\quad \delta>0\right\}$$

ile $Lip_{\alpha,p}(\beta)$, $0\leq\alpha\leq 2$ ve $p>1$, *genelleşmiş Lipschitz sınıfını* tanımlayalım.

4.1.2.3 Sonuç: Teorem 4.1.2.2'nin koşulları altında, eğer

$$E_{n}(f)_{E^{p,\alpha}(G)}=O\left(n^{-\beta}\right),\quad \beta>0,\quad n\in\mathbb{N}^{+}$$

ise $r\in\mathbb{N}^{+}$ ve $\delta>0$ için

$$\Omega_{p,\alpha}^{r}(f,\delta)=\begin{cases}O\left(\delta^{\beta}\right) & , \quad r>\beta\\ O\left(\delta^{\beta}\log(1/\delta)\right) & , \quad r=\beta\\ O\left(\delta^{r}\right) & , \quad r<\beta\end{cases}$$

olur.

4.1.2.4 Sonuç: Teorem 4.1.2.2'nin koşulları altında, eğer

$$E_n(f)_{E^{p,\alpha}(G)} = O\left(n^{-\beta}\right), \quad \beta > 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

ise $f \in Lip_{\alpha,p}(\beta)$ olur.

4.1.2.5 Teorem: Teorem 4.1.2.2'nin koşulları altında, eğer $\beta > 0$ ise aşağıdakiler denktir:

(1) $f \in Lip_{\alpha,p}(\beta)$

(2) $E_n(f)_{E^{p,\alpha}(G)} = O\left(n^{-\beta}\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}^+.$

4.2 Morrey-Smirnov Sınıflarında Düz ve Ters Teoremlerin İyileştirmeleri

Bu bölümde bir önceki bölümde verilen, $E^{p,\alpha}(G)$, $0 \le \alpha \le 2$ ve $p \ge 1$, Morrey-Smirnov sınıflarındaki düz teorem Teorem 4.1.2.1 ve ters teorem Teorem 4.1.2.2'nin iyileştirmeleri yapılacaktır. Sonuçların gerçekten bir iyileştirme olduğu Bölüm 3.2.2'deki uygun sonuçların ispatlarında izlenen yol takip edilerek görülür.

4.2.1 Temel Sonuçlar

Aşağıdaki teorem Teorem 4.1.2.1'in iyileştirmesidir.

4.2.1.1 Teorem: $G \subset \mathbb{C}$, (1.1) koşulunu sağlayan Γ eğrisiyle sınırlı basit bağlantılı bölge olsun. $f \in E^{p,\alpha}(G)$, $0 < \alpha \le 2$ ve $p > 1$ ise $r \in \mathbb{N}^+$ için

$$\Omega_{p,\alpha}^{r}\left(f,\frac{1}{n+1}\right)\geq\frac{c}{\left(n+1\right)^{r}}\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\gamma r-1}E_{\nu}^{\gamma}\left(f\right)_{E^{p,\alpha}(G)}\right\}^{\frac{1}{\gamma}},\quad n\in\mathbb{N}^{+}\tag{4.8}$$

olacak şekilde n den bağımsız bir $c>0$ sabiti vardır. Burada $\gamma=\max\left(p,2\right)$ dir.

İspat: $f\in E^{p,\alpha}\left(G\right)$ olsun. Önerme 4.1.1.4'den $L\left(f_0^+\right)=f$ dir. Buradaki f_0^+ fonksiyonu (4.1)'de tanımlanan fonksiyondur. Teorem 3.2.2.1'den

$$\Omega_{p,\alpha}^{r}\left(f,\frac{1}{n+1}\right)=\omega_{p,\alpha}^{r}\left(f_0^+,\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\geq\frac{c}{\left(n+1\right)^{r}}\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\gamma r-1}E_{\nu}^{\gamma}\left(f_0^+\right)_{L^{p,\alpha}(\mathbf{T})}\right\}^{1/\gamma},\quad n\in\mathbb{N}^{+}\tag{4.9}$$

olacak şekilde n'den bağımsız bir $c=c\left(p,r,\alpha\right)>0$ sabiti vardır. Burada $\gamma=\max\left(p,2\right)$ dir.

$f_0^+\sim\sum_{k=0}^{\infty}a_k\left(f_0^+\right)w^k$ olsun. (4.2) ve (2.3) gösterimleri kullanılırsa

$$f=L\left(f_0^+\right)\sim\sum_{k=0}^{\infty}a_k\left(f\right)F_k$$

ve dolayısıyla

$$L\left(S_\nu^+,f_0^+\right)\sim\sum_{k=0}^{\nu}a_k\left(f\right)F_k$$

elde edilir. Burada S_ν^+, f_0^+ nın Taylor serisinin kısmi toplamıdır. Bunlarla birlikte L

operatörünün sınırlılığı da kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
E_\nu(f)_{E^{p,\alpha}(G)} &\le \left\| f - S_\nu(f) \right\|_{L^{p,\alpha}(\Gamma)} \\
&= \left\| L\left(f_0^+\right) - L\left(S_\nu^+, f_0^+\right) \right\|_{L^{p,\alpha}(\Gamma)} \\
&\le \|L\| \left\| f_0^+ - S_\nu^+\left(f_0^+\right) \right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})} \\
&\le c\|L\| E_\nu\left(f_0^+\right)_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})} \qquad (4.10)
\end{aligned}
$$

bulunur.

(4.10) eşitsizliği (4.9)' da kullanılırsa,

$$
\Omega_{p,\alpha}^r\left(f, \frac{1}{n+1}\right) \ge \frac{c}{(n+1)^r} \left\{ \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{\gamma r-1} E_\nu^\gamma(f)_{E^{p,\alpha}(G)} \right\}^{\frac{1}{\gamma}}, \quad n \in \mathbb{N}^+
$$

elde edilir. □

Aşağıdaki teorem Teorem 4.1.2.2'nin iyileştirmesidir.

4.2.1.2 Teorem: $G \subset \mathbb{C}$, (1.1) koşulunu sağlayan Γ eğrisiyle sınırlı basit bağlantılı bölge olsun. $f \in E^{p,\alpha}(G)$, $0 < \alpha \le 2$ ve $p > 1$ ise $r \in \mathbb{N}^+$ için

$$
\Omega_{p,\alpha}^r\left(f, \frac{1}{n}\right) \le \frac{c}{n^r} \left\{ \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{\beta r-1} E_\nu^\beta(f)_{E^{p,\alpha}(G)} \right\}^{\frac{1}{\beta}}, \quad n \in \mathbb{N}^+ \qquad (4.11)
$$

olacak şekilde n den bağımsız bir $c > 0$ sabiti vardır. Burada $\beta = \min(p, 2)$ dir.

İspat: $L: H^{p,\alpha}(\boldsymbol{D}) \to E^{p,\alpha}(G)$ operatörü sınırlı, 1-1 ve örten olduğundan, $L^{-1}: E^{p,\alpha}(G) \to H^{p,\alpha}(\boldsymbol{D})$ lineer operatörü de sınırlıdır.

$f \in E^{p,\alpha}(G)$ fonksiyonuna en iyi yaklaşan polinomlar $P_\nu^* \in P_\nu$, $\nu \in \mathbb{N}^+$, olsun. Yani

$$E_\nu(f)_{E^{p,\alpha}(G)} = \left\| f - P_\nu^* \right\|_{L^{p,\alpha}(\Gamma)}.$$

$L^{-1}(P_\nu^*) \in P_\nu(\boldsymbol{D})$, ν dereceli bir polinom olduğundan, L^{-1} operatörünün sınırlılığı kullanılarak

$$\begin{aligned}
E_\nu(f_0^+)_{H^{p,\alpha}(\boldsymbol{D})} &\le \left\| f_0^+ - L^{-1}(P_\nu^*) \right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})} \\
&= \left\| L^{-1}(f) - L^{-1}(P_\nu^*) \right\|_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})} \\
&\le \left\| L^{-1} \right\| \left\| f - P_\nu^* \right\|_{L^{p,\alpha}(\Gamma)} \\
&= \left\| L^{-1} \right\| E_\nu(f)_{E^{p,\alpha}(G)}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

elde edilir.

(4.12), Teorem 3.2.2.2 ve $E_\nu(f_0^+)_{L^{p,\alpha}(\boldsymbol{T})} = E_\nu(f_0^+)_{H^{p,\alpha}(\boldsymbol{D})}$ eşitliği göz önüne alınırsa

$$\Omega_{p,\alpha}^r\left(f, \frac{1}{n}\right) = \omega_{p,\alpha}^r\left(f_0^+, \frac{1}{n}\right)$$

$$\leq \frac{c}{n^r}\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\beta r-1}E_\nu^\beta\left(f_0^+\right)_{L^{p,\alpha}(\mathbf{T})}\right\}^{\frac{1}{\beta}}$$

$$\leq \frac{c\left\|L^{-1}\right\|}{n^r}\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\beta r-1}E_\nu^\beta\left(f\right)_{E^{p,\alpha}(G)}\right\}^{\frac{1}{\beta}}$$

$$\leq \frac{c}{n^r}\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\beta r-1}E_\nu^\beta\left(f\right)_{E^{p,\alpha}(G)}\right\}^{\frac{1}{\beta}}$$

bulunur. □

5. SONUÇ

Bu çalışmada elde edilen yeni sonuçlar üçüncü ve dördüncü bölümlerde yer almaktadır.

Üçüncü bölümde Morrey uzaylarında yaklaşım teorisinin düz ve ters teoremleri ispatlanmış ve bu teoremlerin iyileştirmeleri elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde ise Morrey-Smirnov sınıflarında yaklaşım teorisinin düz ve ters teoremleri ispatlanmış ve bu teoremlerin iyileştirmeleri verilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] Stechkin, S. B., “On the order of approximation of continuous function”, Izv. 15 (1951), 219-242.

[2] Timan, M. F., “On Jackson’s Theorem in L_p Spaces”, Ukrainian Math. J. 18 (1966), 134-137.

[3] Timan A. F., Theory of Approximation of Functions of Real Variable, English translation (1963), Pergamon Press, The MacMillan Co, Russian orginal published in Moscow by Fizmatgiz (1960).

[4] Timan, M. F., “Converse Theorems of the Constructive Theory of Function”, Mat. Sborn. 46 (1958), 125-132.

[5] Walsh, J. l. ve Russel H. C., “Integrated continuity conditions and degree of approximation by polynomials or by bounded analytic functions”, Trans. Amer. Math. Soc. 92 (1959), 355-370.

[6] Al’per, L. Y., “Approximation in the mean of analytic functions of class E^p”, Gos. Izdat. Fiz.-Mat. Lit. (1960), 272-286.

[7] Kokilashvili, V. M., “A direct theorem on mean approximation of analytic functions by polinomials”, Soviet Math. Dokl. 10 (1969), 411-414.

[8] Andersson, J. E., “On the degree of polynomial approximation in $E^p(D)$”, Journal of Approximation Theory 19 (1) (1977), 61-68.

[9] Israfilov, D. M., “Approximate properties of the generalized Faber series in an integral metric”, Izv. Akad. Nauk Az. SSR, Ser. Fiz. Tekh. Math. Nauk 2 (1987), 10-14.

[10] Çavuş, A. ve Israfilov, D. M., "Approximation by Faber-Laurent rational functions in the mean of functions of the class $L_p(\Gamma)$ with $1 < p < \infty$", Approximation Theory App. 11 (1) (1995), 105-118.

[11] Israfilov, D. M., "Approximation by p-Faber-Laurent rational functions in the weighted Lebesgue spaces", Czechoslovak Math. J. 54 (2004), 751-765.

[12] Israfilov, D. M., "Approximation by p-Faber polynomials in the weighted Smirnov class $E_p(G,\omega)$ and the Bieberbach polynomials", Constr. Approx. 17 (2001), 335-351.

[13] Israfilov, D. M. ve Guven, A., "Approximation in Weighted Smirnov Classes", East J. Approx. 11 (2005), 91-102.

[14] Guven A. ve Israfilov, D. M., "Improved Inverse Theorems in Weighted Lebesgue and Smirnov Spaces", Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 14 (2007), 681-692.

[15] Duren, P. L., Theory of H^p Spaces, Academic Press, New York, (1970).

[16] Warschawski, S. E., "Über das ranverhalten der Ableitung der Abildungsfunktion bei konformer Abbildung", Math. Z. (35) (1932), 321.

[17] Böttcher, A. ve Karlovich, Y. A., Carleson Curves, Muckenhoupt Weights, and Toeplitz Operators, 154, Proogress in Mathematics, Birkhauser Verlag, Cambridge, (1997).

[18] Bennett, C. ve Sharpley, R., Interpolation of Operators, Academic Press, New York, (1988).

[19] Duoandikoetxea, J., "Weights for maximal functions and singular integrals", NCTH 2005 Summer School on Harmonic Analysis in Taiwan.

[20] Zygmund, A., Trigonometric Series, Volume I, Cambridge, (1959).

[21] Goluzin, G. M., Geometric Theory of Functions of a Complex Variable, Translation of Mathematical Monographs, 26, AMS, Providence, (1969).

[22] Suetin, P. K., Series of Faber Polinomials, Gordan and Breach, Australia, (1998).

[23] Coifman, R. ve Rochberg, R., "Another characterization of BMO", Proc. Amer. Math. Soc. 79 (1980), 249-254.

[24] Ky, N. X., "On approximation by trigonometric polynomials in L_u^p -spaces", Studia Sci. Math. Hungar 28 (1993), 183-188.

[25] Devore, R. A. ve Lorentz, G. G., Constructive Approximation, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, (1993).

[26] Kurtz, D. S., "Littlewood-Paley and Multiplier Theorems on Weighted L^p Spaces", Trans. Amer. Math. Soc. 259 (1980), 235-254.

[27] Hunt, R., Muckenhoupt, B. ve Wheeden, R., "Weighted Norm Inequalities for the conjugate Function and Hilbert Transform", Trans. Amer. Math. Soc. 176 (1973), 227-251.

[28] Dyn'kin, E. M. ve Osilenker, B. P., "Weighted estimates for singular integrals and their applications", Mathematical Analysis, Moscow: Akad Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform. 21 (1983), 42-129.

[29] Muckenhoupt, B., "Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function", Trans. Amer. Math. Soc. 165 (1972), 207-226.

[30] Gaier, D., Lectures on Complex Approximation, Birkhauser-Verlag (1987).

[31] Israfilov, D. M. ve Tozman, N. P., "Approximation by polynomials in Morrey-Smirnov classes", East J. Approx., 14 (3) (2008), 255-269.

[32] Israfilov, D. M. ve Tozman, N. P., "Approximation in Morrey-Smirnov classes", yayına sunuldu.

[33] Israfilov, D. M. ve Tozman, N. P., “Improved Direct and Inverse Theorems in Morrey Spaces”, yayına sunuldu.

[34] Haciyeva, E. A., “Investigation of the properties of functions with quasimonotone Fourier coefficients in generalized Nikolskii-Besov spaces”, Author’s summary of candidate dissertation, Tbilisi, (1986).

[35] Charenza, F. ve Frasca, M., “Morrey spaces and Hardy-Littlewood maximal function”, Rend. Math. 7 (1987), 273-279.