T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GENELLEŞTİRİLMİŞ M*-GRUPLAR

DOKTORA TEZİ

Sebahattin İKİKARDEŞ

Balıkesir, Haziran 2008

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GENELLEŞTİRİLMİŞ M*-GRUPLAR

DOKTORA TEZİ

Sebahattin İKİKARDEŞ

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Recep ŞAHİN

Sınav Tarihi : 04. 06. 2008

Jüri Üyeleri : Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL (U.Ü.)

Prof. Dr. Daniyal M. ISRAFILOV (BA.Ü.)

Doç. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK (BA.Ü.)

Doç. Dr. Osman BİZİM (U.Ü.)

Doç. Dr. Recep ŞAHİN (Danışman-BA.Ü.)

Balıkesir, 2008

ÖZET

GENELLEŞTİRİLMİŞ M*-GRUPLAR

Sebahattin İKİKARDEŞ
Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

(Doktora Tezi / Tez Danışmanı : Doç. Dr. Recep ŞAHİN)

Balıkesir, 2008

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde kompakt Klein yüzeylerinin otomorfizmleri ve bu konunun ilerlemesi ile ilgili kronolojik bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde çalışma süresince gerekli olan temel, tanımlar, kavramlar, yöntemler ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, M*-gruplar tanıtılmıştır. Genişletilmiş modüler grupta bilinen sonuçları kullanarak yeni M*-grup örnekleri verilmiştir. Bunlara ek olarak genelleştirilmiş modüler gruba yeni bir bağıntı ekleyerek, bölüm grupları elde edilmiştir. Ayrıca bu bölüm gruplarından bazılarının M*-grup olduğu gösterilmiştir.

Dördüncü bölümde, ilk olarak genelleştirilmiş M*-gruplar tanımlanmıştır. Daha sonra genelleştirilmiş M*-gruplar ile genişletilmiş Hecke grupları arasındaki ilişki verilmiştir. Son olarak bir G genelleştirilmiş M*-grubunun süper çözülebilir olması için gerekli ve yeterli koşulun $q \geq 3$ asal sayı ve r bir pozitif sayı iken $|G| = 4q^r$ olduğu gösterilmiştir.

Son bölümde, elde edilen sonuçların bir özeti verilmiştir.

ANAHTAR SÖZCÜKLER : Modüler grup, genişletilmiş modüler grup, Hecke grupları, genişletilmiş Hecke gruplar, periyodik indirgenmiş kelime, tek üreteçli bölüm grubu, Klein yüzeyi, otomorfizm grubu, NEC grup, M*-grup, genelleştirilmiş M*-gruplar.

ABSTRACT

GENERALIZED M*-GROUPS

Sebahattin İKİKARDEŞ
Balikesir University, Institute of Science
Department of Mathematics

(Ph. D. Thesis / Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Recep ŞAHİN)

Balıkesir, 2008

This thesis consists of five chapters. In the first chapter some chronological information about automorphism of compact Klein surfaces and their progress are given.

In the second chapter, the definitions, notations and theorems used in the other chapters are recalled.

In the third chapter, the notion M*-group is introduced. Then, by using known results on the extended modular group, some new examples of M*-groups are given. In addition, it has been obtained quotient of the extended modular group by adding an extra relation to the existing relator set. Also, it is shown that some of the one relator quotients of extended modular group are M*-group.

In the fourth chapter, firstly, generalized M*-groups are defined. Then, it is shown that there is a relationship between extended Hecke groups and generalized M*-groups. Finally, it is proved that a generalized M*-group G is supersoluble if and only if $|G| = 4q^r$ for $q \geq 3$, prime number, and for some positive integer r.

In the last chapter, a brief summary of the results obtained is given.

KEY WORDS: Modular group, extended modular group, Hecke groups, extended Hecke groups, cyclically reduced word, one relator quotient, Klein surface, automorphism group, NEC group, M*-group, generalized M*-groups.

İÇİNDEKİLER

SEMBOL LİSTESİ

Simge	**Adı**
$\mathbb{C}$	Karmaşık sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
Aut(C)	C eğrisinin tüm otomorfizmlerinin kümesi
PSL(2, $\mathbb{R}$)	$\{V(z) : V(z)=\frac{az+b}{cz+d};\ a,b,c,d\in\mathbb{R},\ ad\text{-}bc=1\}$
$N(G_0)$	G_0 ın normalleştiricisi
U	Üst yarı düzlem
G'	$\{U(z) : U(z)=\frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d};\ a,b,c,d\in\mathbb{R},\ ad\text{-}bc=-1\}$
Σ	Atlas
$\overline{\Gamma}$	Genişletilmiş Modüler Grup
$H(\lambda_q)$	$\lambda=\lambda_q=2\cos\frac{\pi}{q},\ 1\le\lambda<2$ için elde edilen Hecke grupları
$\overline{H}(\lambda_q)$	$\lambda=\lambda_q=2\cos\frac{\pi}{q},\ 1\le\lambda<2$ için genişletilmiş Hecke grupları
Γ	Fuchs gruplar
F	Γ Fuchs grubu için bir temel bölge
$(g;m_1,...,m_r;t;u)$	Fuchsian grupların simgesi
$\mu(\Gamma)$	Γ Fuchs grubun temel bölgesinin hiperbolik alanı
[G:H]	İndeks
(l, m, n)	Üçgen grup
C_n	n mertebeli Devirli grup
D_n	2n mertebeli Dihedral grup
S_n	$n!$ mertebeli Simetrik grup
A_n	$\frac{n!}{2}$ mertebeli Alterne grup
$P = < X \mid R^* >$	Grup sunuşu
A*B	Serbest çarpım grubu
G^m	Kuvvet alt grubu
$[x_1, x_2]$	x_1 ile x_2 elemanlarının komutatörü
G'	Birinci komutatör alt grubu
G''	İkinci komutatör alt grubu
G'''	Üçüncü komutatör alt grubu
$G^{(n)}$	n. komutatör alt grubu

ŞEKİL LİSTESİ

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın ortaya çıkarılması sırasında akademik bilgi ve birikimiyle bana destek olan, yardım ve desteğini her zaman yanımda hissettiğim danışman hocam Doç. Dr. Recep Şahin'e ve kaynaklara ulaşmamda, çalışmamın her aşamasında yardımını hiç esirgemeyen ve ilerlememiz konusunda sürekli destek gördüğüm hocam Prof. Dr. İsmail Naci Cangül'e içtenlikle teşekkür ederim.

Beni yetiştiren, her konuda destekleyen ve bu günlere gelmemde büyük emekleri olan aileme minnettarım.

Benim için herkesin ve her şeyin ötesinde olan sevgili eşim Nazlı ve oğlum Çağan'a ayrıca teşekkürlerimi sunuyorum.

Balıkesir, 2008 Sebahattin İKİKARDEŞ

1. GİRİŞ

Riemann yüzeylerinin otomorfizmlerinin mümkün olan en geniş gruplarını bulma problemi literatürde önemli bir problemdir. Bu problemin tarihsel gelişimi [1, 2, 3, 4, 5, 6] kaynaklarında detaylı bir biçimde anlatılmıştır. Şimdi biz kısaca bu tarihsel gelişimi özetleyelim. Riemann yüzeyleri teorisi topolojik, cebirsel ve analitik olarak üç ana başlık altında gelişmiştir. Biz bu tezde Riemann yüzeylerinin cebirsel olarak gelişen bölümü ile ilgileneceğiz. Cebirsel olarak Riemann yüzeylerinin otomorfizmlerinin mümkün olan en geniş gruplarını bulmak teorinin gelişiminde önemli bir rol oynamıştır. Bu problemin temelleri "kompleks cebirsel eğrilerin otomorfizmleri grubu" çalışılırken ortaya atılmıştır. Başlangıçta, polinom denklemleri vasıtası ile verilen kompleks cebirsel eğrilerin otomorfizmleri hakkında, eğri eliptik ya da rasyonel olmadıkça, bilgi vermek zordu. İlk olarak Schwarz 1879 yılında cinsi $g \geq 2$ olan bir C eğrisi için $\mathrm{Aut(C)}$ otomorfizm grubunun mertebesinin sonlu olduğunu gösterdi ,[7]. Daha sonra Hurwitz kendi adı ile özdeşleşen ünlü formülünü kullanarak $\mathrm{Aut(C)}$ otomorfizm grubunun mertebesinin $84(g-1)$den büyük olamayacağını gösterdi ,[8]. Hurwitz den daha önce kompleks cebirsel geometrinin klasik sonuçlarını kullanarak Klein $g=2$ için $\mathrm{Aut(C)}$ otomorfizm grubunun mertebesinin 48 den büyük olamayacağını, Gordon ise $g=4$ için $\mathrm{Aut(C)}$ otomorfizm grubunun mertebesinin 120 den büyük olamayacağını gösterdi, [9]. 1895 yılında Wilman, $g=5$ için, $\mathrm{Aut(C)}$ otomorfizm grubunun mertebesinin 120 den büyük olamayacağını, $g=6$ için $\mathrm{Aut(C)}$ otomorfizm grubunun mertebesinin 420 den büyük olamayacağını gördü, [10, 11]. Böylece $g=2$, 4, 5, 6 için Hurwitz sınırının sağlanmadığı gösterilmiş oldu. Fakat Klein, $g=3$ olması halinde $\mathrm{Aut(C)}$ otomorfizm grubunun mertebesinin $168=84(3-1)$ olduğunu göstermiştir. Bununla birlikte $g=3$ cinsli tek eğri olduğunu ve bu eğrinin $x^3y+y^3+x=0$ olduğunu gösterdi. Bu Hurwitz'in doğru yolda olduğuna inanmasını sağladı. Kompleks cebirsel eğrilerin Riemann yüzeyleri ile ilişkisi Riemann'ın yaptığı araştırmalar ile ortaya çıkmıştır. Riemann, kompleks cebirsel eğrilerin transandantal yolla çalışılabileceğini ispatlamıştır. Gerçekte $\mathbb{C}$ üzerindeki tek değişkenli cebirsel fonksiyon cisimlerini transandantal yolla çalışmak mümkün değildi ama kompakt Riemann yüzeyleri üzerindeki meromorfik fonksiyonlar cismini çalışmak mümkündü. Bundan dolayı kompleks cebirsel eğrilerin otomorfizm grupları ile Riemann yüzeylerinin otomorfizm gruplarının benzer olduğunu gösterilmiştir.

Bu yeni bakış açısı teorinin ilerlemesini sağlamıştır. Artık cebirsel eğrilerin otomorfizm gruplarını çalışmak Riemann yüzeylerinin otomorfizm gruplarını çalışmaya denk oldu. 1908 yılında Poincaré yapmış olduğu çalışmada cebirsel cinsi $g\geq 2$ olan her S kompakt Riemann yüzeyinin U/Γ (U üst yarı düzlem ve Γ bir Fuchsian grup) yörünge uzayı olarak temsil edilebileceğini gösterdi, [5]. Böylece problem U/Γ yörünge uzayının $\mathrm{Aut}(U/\Gamma)$ otomorfizm grubunun çalışılmasına denk oldu. Çünkü bu Fuchsian grupların yörünge uzaylarının birer Riemann yüzeyi olduğu gösterildi. Bundan dolayı Fuchsian gruplar Riemann yüzeylerinin çalışılmasında çok önemli bir rol oynamıştır, [12, 13, 14].

Ancak teori Fuchsian gruplar ile sınırlı kalmamıştır. Düzlemin yön korumayan dönüşümlerini de bulunduran dönüşümler grubu göz önüne alınmış ve bu kez bu grubun non-Euclidean crystallographic (NEC) ayrık alt grupları incelenmeye başlanmıştır. Bu NEC grupların yörünge uzayları birer Klein yüzeyi olduğundan teori Klein yüzeyleri üzerinde de çalışılmaya başlanmıştır. NEC grupları Klein yüzeylerinin çalışılmasında önemli bir rol oynamıştır. Klein yüzeylerinin otomorfizm gruplarının mertebeleri için sınır bulmak artık yeni bir problem olmuştur. İlk olarak May 1977 yılında cinsi $g\geq 2$ olan bir kompakt Klein yüzeyin otomorfizm grubunun mertebesinin $12(g-1)$ den büyük olamayacağını göstermiştir. Bu otomorfizm gruplarının mertebesinin $12(g-1)$ olması durumunu ise ayrıca inceleyip, bu grupların varlığını çalışmaya başlamıştır, [15]. May mertebesi $12(g-1)$ olan bir sınırlı kompakt Klein yüzeyin otomorfizm grubunu bir M*-grup olarak tanımlamıştır, [15]. Ayrıca $\overline{\Gamma}$ genişletilmiş modüler grubu ile M*-gruplar arasında birebir bir ilişki olduğunu ortaya koymuştur.

Son yıllarda M*-gruplar ile ilgili bir çok yayın yapılmış [16, 17, 23, 26,31] ve bu grupların neler olabileceği tartışılmıştır. Yeni M*-grup örnekleri bulmak, Klein yüzeylerinin otomorfizm gruplarını daha iyi çalışmak için ciddi bir problem haline gelmiştir.

Bu tezde, $\overline{\Gamma}$ genişletilmiş modüler grubu ile ilgili bilinen sonuçları kullanarak yeni M*-grup örnekleri bulmaya çalıştık. Ayrıca $\overline{\Gamma}$ genişletilmiş modüler grubunun daha geneli olan genişletilmiş Hecke grupları $\overline{H}(\lambda_q)$ ile kompakt Klein yüzeyleri arasında bir ilişkinin olup olmadığını araştırdık.

İkinci bölümde, tezin daha sonraki bölümlerinde kullanacağımız bazı temel tanımlar, teoremler ve yöntemler ele alınmıştır.

Üçüncü bölümde, M*-grup kavramı tanıtılmış ve M*-gruplarla ilgili birtakım sonuç ve örnekler verilmiştir. Daha sonra $\overline{\Gamma}$ genişletilmiş modüler grubu ile M*-gruplar arasındaki ilişkilerden bahsedilmiştir. Ayrıca genişletilmiş modüler grubun normal alt gruplarından yararlanarak, daha önce literatürde yer almamış yeni M*-grup örnekleri verilmiştir. Son olarak genelleştirilmiş modüler gruba yeni bir bağıntı ekleyerek, bölüm grupları bulunmuş ve bu bölüm gruplarından bazılarının M*-grup olduğu gösterilmiştir.

Dördüncü bölümde, M*-grubun tanımı genelleştirilerek genelleştirilmiş M*-grup tanımı yapılmıştır. Daha sonra bu gruplar ile ilgili bir takım özellikler verilmiştir. Ayrıca genelleştirilmiş M*-gruplar ile genişletilmiş Hecke grupları arasındaki ilişki gösterilmiştir. Bu ilişki yardımı ile de genelleştirilmiş M*-grupların 2, 4 ve 2*p* (*p* asal sayı) indeksli alt grupları hakkında bilgiler elde edilmiştir. Bununla birlikte bu grupların süper çözülebilir olması için gerek ve yeter koşul verilmiştir.

2. BÖLÜM

Tezin bu bölümünde daha sonraki bölümlerde karşılaşacağımız bazı temel tanımlar, teoremler ve yöntemler ele alınacaktır.

2.1 Topolojik Gruplar ve Topolojik Dönüşüm Grupları

2.1.1 Tanım: *G* hem bir grup, hem de bir Hausdorff uzay olsun. Eğer,

$$i)\, F \ : \ G \times G \to G \qquad\qquad ii)\, f \ : \ G \to G$$
$$(g,h) \to gh \qquad\qquad g \to g^{-1}$$

örten dönüşümleri sürekli ise *G* ye bir topolojik grup denir.

2.1.2 Örnek: $(\mathbb{R},+)$ grubu, $\mathbb{R}$ deki alışılmış topoloji ile birlikte bir topolojik gruptur.

2.1.3 Tanım: *G* bir topolojik grup ve *X* herhangi bir topolojik uzay olmak üzere, $\left[G, X\right]$ sıralı çiftini ele alalım.

$$\Lambda \ : \ G \times X \to X$$
$$(g,x) \to g\Lambda x$$

örten ve sürekli dönüşümü aşağıdaki koşulları gerçeklerse, $\left[G, X\right]$ e bir topolojik dönüşüm grubu denir.

i) $g,\ h \in G$ ve $x \in X$ için, $g\Lambda(h\Lambda x) = gh\Lambda x$,

ii) $e \in G$, *G* nin birimi olmak üzere , her $x \in X$ için, $e\Lambda x = x$.

Eğer *X* topolojik uzayı biliniyor ise $\left[G, X\right]$ gösterimi yerine kısaca, *G* yazılır ve "*G topolojik dönüşüm grubu*" diye söylenir.

2.2 Ayrık Gruplar

2.2.1 Tanım: G bir topolojik grup olsun. Eğer her $g \in G$ öğesi için $\{g\}$ kümesi G nin bir komşuluğu ise G ye ayrık grup denir.

2.2.2 Örnek: $(\mathbb{Z},+)$ grubunu ele alalım. $\mathbb{Z}$ üzerinde $\mathbb{R}$'nin oluşturduğu topoloji ile $\mathbb{Z}$ ayrık gruptur.

2.2.3 Tanım: $\left[G, X\right]$ bir topolojik dönüşüm grubu ve $g \in G$ olsun. $\{x \in X : \; gx = x\}$ kümesine g öğesinin sabit noktaları kümesi denir.

2.2.4 Tanım: (a) G bir grup ve $G_0 \subset G$ olsun. $N(G_0) = \{t \in G \; : \; tG_o t^{-1} = G_0\}$ kümesine G_0 ın normalleştiricisi denir.

(b) $Z\left(G_0\right) = \{t \in G \; : \; tg = gt, \; \forall g \in G_0\}$ kümesine G_0 alt kümesinin merkezleştiricisi denir.

2.3 Doğrusal Kesirli Dönüşümler

2.3.1 Tanım: $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ ve $ad - bc = 1$ olmak üzere, $w = T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ biçimindeki bir dönüşüme doğrusal kesirli dönüşüm denir.

Burada gerçel katsayılı doğrusal dönüşümler ile çalışacağımızdan bu dönüşümlerin

$$PSL(2,\mathbb{R}) = \{T(z) : T(z) = \frac{az+b}{cz+d}; a,b,c,d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1\}$$

alt kümesi ile

$$G' = \{U(z) : U(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}; a,b,c,d \in \mathbb{R}, ad - bc = -1\}$$

biçimindeki kümeyi alalım. G kümesini $G = PSL(2,\mathbb{R}) \cup G'$ biçiminde oluşturalım.

2.3.2 Teorem: U, üst yarı düzlemi göstermek üzere;
$Aut(U) \cong PSL(2,\mathbb{R})$ dir, [16].

2.3.2 Tanım: G' kümesine üst yarı düzlemin anti otomorfizmlerinin kümesi denir.

2.4 Bir Dönüşümün Sabit Noktaları

2.4.1 Tanım: Herhangi bir $T(z) \in PSL(2,\mathbb{R})$ dönüşümü için $T(z) = z$ eşitliğini gerçekleyen z noktalarına *T* nin sabit noktaları denir.

2.4.2 Teorem: $PSL(2,\mathbb{R})$ deki herhangi bir dönüşümün en fazla iki sabit noktası vardır. G' kümesinin elemanlarının ise ya iki sabit noktası vardır ya da sabit noktalarının kümesi bir çemberdir.

2.4.3 Tanım: $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} \in PSL(2,\mathbb{C})$ dönüşümünü ele alalım. $a+d$ sayısına *T* dönüşümünün izi denir ve *İz(T)* ile gösterilir.

2.4.4 Tanım: a) $T(z) \in PSL(2,\mathbb{R})$ alalım.

i) $|a+d| > 2$ ise *T* dönüşümüne hiperbolik dönüşüm denir ve bu dönüşüm $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ kümesinde iki sabit noktaya sahiptir.

ii) $|a+d| < 2$ ise *T* dönüşümüne eliptik dönüşüm denir ve bu dönüşüm $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ kümesinde birbirinin eşleniği olan iki sabit noktaya sahiptir.

iii) $|a+d| = 2$ ise *T* dönüşümüne parabolik dönüşüm denir ve bu dönüşüm $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ kümesinde bir tane sabit noktaya sahiptir.

b) $T(z) \in G'$ alalım;

i) $a+d \neq 0$ ise *T* dönüşümüne kayan yansıma dönüşümü denir ve $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ kümesinde iki sabit noktaya sahiptir.

ii) $a+d = 0$ ise *T* dönüşümüne yansıma dönüşümü denir ve sabit noktaları $\left(\dfrac{a}{c}, 0\right)$ merkezli $\dfrac{1}{|c|}$ yarıçaplı çemberin noktalarıdır.

2.4.5 Tanım: Bir $T \in PSL(2,\mathbb{C})$ dönüşümü ve herhangi bir S dönüşümü verilsin. $T' = STS^{-1}$ dönüşümüne T dönüşümünün eşleniği denir.

2.4.6 Teorem: (a) $T \in PSL(2,\mathbb{R})$ dönüşümü;

hiperbolik ise $w = kz \ (k \neq 1, k > 0)$,

eliptik ise $\dfrac{w - i}{w + i} = e^{i\theta} \dfrac{z - i}{z + i} \ \theta \neq 2n\pi$,

parabolik ise $w = z + 1$

dönüşümleri ile eşleniktirler.

(b) $U \in G'$ dönüşümü ise;

kayan yansıma ise $w = \lambda z \ (\lambda < 0, \lambda \neq -1)$

yansıma ise $w = -z$

dönüşümleri ile eşleniktir.

2.5 NEC-Gruplar ve Fuchs Grupları

2.5.1 Tanım: (a) G topolojik dönüşüm grubunun ayrık bir alt grubuna Euclidean olmayan kristallografik grup (*Non Euclidean crystallographic group*) denir ve kısaca NEC-grup biçiminde gösterilir.

(b) $PSL(2,\mathbb{R})$ nin alt grubu olan NEC-gruplara *Fuchs* grubu denir.

2.5.2 Tanım: Γ bir Fuchs grubu olsun. Aşağıdaki koşulları gerçekleyen bir kapalı F kümesine Γ için bir temel bölge denir.

(i) F her yörüngeden en az bir eleman içerir.

(ii) F^o her yörüngeden en çok bir eleman içerir.

(iii) $F - F^o$ kümesinin hiperbolik alanı $\mu(F - F^o) = 0$ dır, [17].

2.5.3 Teorem: Γ bir Fuchs grubu ve Γ_1**,** Γ nın indeksi sonlu olan bir alt grubu olsun. Eğer F ve F_1 sırası ile Γ ve Γ_1 in temel bölgeleri ise;

$$[\Gamma : \Gamma_1] = \mu(F_1) \big/ \mu(F)$$

dir, [6].

2.6 Grupların NEC Gösterimleri

Riemann-Hurwitz Formülü kullanılarak bir NEC-grubun hiperbolik alanı hesaplanabilir. Fakat bu formül NEC-grubu için seçilen temel bölgeye bağımlıdır. 1974 de Singerman [18] nolu kaynakta NEC-grubun hiperbolik alanını hesaplarken temel bölgeden bağımsız bir yöntem geliştirmiştir. Bu yöntem sadece grupların işaretlerinin incelenmesine bağlıdır. Bundan dolayı, bu kısımda [17] nolu kaynağa sadık kalarak, NEC-grupların işaretlerini ve gösterimlerini tanıtacağız.

Yönlendirilebilir bölüm uzayına sahip bir Γ grubunun NEC gösterimi;

$$\left(g,+,\left[m_1,m_2,...,m_k\right],\left\{\left(n_{1_1},n_{1_2},...,n_{1s_1}\right),...,\left(n_{r_1},n_{r_2},...,n_{r_{s_r}}\right)\right\}\right) \qquad (2.6.1)$$

biçimindedir. Yönlendirilemez bölüm uzayına sahip bir grubun NEC gösterimi ise;

$$\left(g,-,\left[m_1,m_2,...,m_k\right],\left\{\left(n_{1_1},n_{1_2},...,n_{1s_1}\right),...,\left(n_{r_1},n_{r_2},...,n_{r_{s_r}}\right)\right\}\right) \qquad (2.6.2)$$

biçimindedir. Burada g ye U/Γ bölüm uzayının cinsi denir. Bununla birlikte $\left(n_{r_1},n_{r_2},...,n_{r_{s_r}}\right)$ parantezlerine periyot devirleri denir. m_i ve n_{ij} sayıları da Γ nın yön koruyan elemanlarının mertebeleridir ve Γ nın periyotları olarak adlandırılır. m_i lere has periyotlar denir.

Bir grubun NEC gösterimi teklik ile belirli olduğundan bir Γ**,** NEC-grubunun gösterimi verildiğinde bölüm uzayının topolojik yapısı da verilmiş demektir.

Boş devirli bir NEC-grubunun gösterimi

$$\left(g,m,\left[m_1,m_2,...,m_k\right],\left\{\left(\ \right),...,\left(\ \right)\right\}\right)$$

biçimindedir. Eğer bu boş periyot devirlerin sayısı *r* ise bu gösterim kısaca

$$\left(g,m,\left[m_1,m_2,...,m_k\right],\left\{\left(\ \right)^r\right\}\right)$$

halini alır.

Bir Fuchs grubu deliksiz bir yönlendirilebilir bölüm uzayına sahip olacağından bütün periyotlar has periyotlar olacaktır. Dolayısı ile bu grubun NEC gösterimi;

$$\left(g,m,\left[m_1,m_2,...,m_k\right],\left\{\left(\ \right)\right\}\right)$$

olur ya da kısaca

$$\left(g;,m_1,m_2,...,m_k\right)$$

biçiminde yazılır.

Periyotları ve yansıma dönüşümleri bulunmayan gruplara yüzey grupları denir. Eğer yörünge uzayı yönlendirilebilir ise gruba yönlendirilebilir yüzey grubu denir. Bu grubun gösterimi ise

$$\left(\mathrm{g},+,[\ ],\{\ \}\right)$$

ya da kısaca

$$\left(g,......\right)$$

biçimindedir.

Periyodu bulunmayan ancak yansımalar bulunduran gruplara kenarlı yüzey grupları denir.

$$\left(g,+,[\ ],\left\{(\ )^r\right\}\right)$$

gösterimine sahip bir gruba r - $kenar$ bileşenli, kenarlı, yönlendirilebilir yüzey grubu denir.

$$\left(g,-,[\ ],\left\{(\ )^r\right\}\right)$$

gösterimine sahip bir gruba ise r - $kenar$ bileşenli, kenarlı, yönlendirilemez yüzey grubu denir.

2.6.1 Teorem: (a) Γ**,** işareti (2.6.1) deki gibi olan bir NEC-grup olsun. Bu durumda Γ nın temel bölgesinin alanı

$$\mu\ (\Gamma)\ =\ 2\pi\ (2g\ -2\ +\ \sum_{i=1}^{k}(1-\frac{1}{m_i})+r+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s_i}\frac{1}{2}(1-\frac{1}{n_{ij}})\ )$$

olur.

(b) Γ**,** işareti (2.6.2) deki gibi olan bir NEC-grup olsun. Bu durumda Γ nın temel bölgesinin alanı

$$\mu\ (\Gamma)\ =\ 2\pi(g\ -\ 2+\ \sum_{i=1}^{k}(1\ -\ \frac{1}{m_i})+r+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s_i}\frac{1}{2}(1-\frac{1}{n_{ij}})\ )$$

olur, [17].

2.6.2 Yardımcı Teorem: Λ hiperbolik alanı $\mu(\Lambda) < \pi/2$ olan bir NEC-grup olsun. Bununla birlikte Γ yüzey grubu Λ nın normal alt grubu olsun. O zaman Λ aşağıdaki gösterimlerden birine sahiptir, [6]:

$\sigma(\Lambda)$	$\mu(\Lambda)$
$(0;+;[-];\{(2,2,2,n)\})$	$\pi(n-2)/2n \ \ (n \geq 3)$
$(0;+;[-];\{(2,2,3,3)\})$	$\pi/3$
$(0;+;[-];\{(2,2,3,4)\})$	$5\pi/12$
$(0;+;[-];\{(2,2,4,3)\})$	$5\pi/12$
$(0;+;[-];\{(2,2,3,5)\})$	$7\pi/15$
$(0;+;[-];\{(2,2,5,3)\})$	$7\pi/15$
$(0;+;[3];\{(2,2)\})$	$\pi/3$
$(0;+;[2,3];\{(-)\})$	$\pi/3$

2.7 Klein Yüzeyleri ve Otomorfizmleri

2.7.1 Tanım: (a) *S* bir yüzey ve *U*, *S* nin açık bir alt kümesi, $A \subset \mathbb{C}$ veya $A \subset \mathbb{C}^{+} = \{z \in \mathbb{C} : imz \geq 0\}$ olsun. $\phi : U \to A$ dönüşümü bir topolojik eş yapı dönüşümü ise (U, ϕ) ikilisine bir harita (*chart*) denir.

(b) *S* bir Hausdorff bağlantılı topolojik uzay ve $\{U_i : i \in I\}$ kümesi *S* ailesinin açık bir alt örtüsü olsun. *S*, $\Sigma = \{(U_i, \phi_i) : i \in I\}$ ailesi ile birlikte bir yüzey oluşturur. Bu Σ ailesine *S* üzerinde bir *atlas* denir.

2.7.2 Tanım: *S* bir yüzey ve $\overline{U}$, üst yarı düzlemin kapanışı olsun. Bu durumda

$$\delta(S) = \left\{ s \in U_i : \phi_i(U_i)\ \overline{U} \text{ üzerinde açık, ancak } \mathbb{C} \text{ de açık değil ve } \phi_i(s) \in \mathbb{R} \right\}$$

kümesi *S* nin kenarı olarak tanımlanır.

2.7.3 Tanım: *A* boştan farklı bir küme olmak üzere $f : A \to \mathbb{C}$ dönüşümü analitik ya da anti analitik bir dönüşüm ise f dönüşümüne *dianalitik dönüşüm* denir.

2.7.4 Tanım: Bir Σ atlası ile verilmiş kenarsız bir yüzeye Riemann yüzeyi denir.

2.7.5 Tanım: Bir Σ atlası ile verilmiş kenarlı yada kenarsız bir yüzeye Klein yüzeyi denir.

2.7.6 Sonuç: Klein yüzeyi yönlendirilebilir bir yüzey ise Riemann yüzeyidir.

2.7.7 Teorem: S yüzeyi kenarsız ve yönlendirilebilir ise $g \geq 2$, kenarlı ve yönlendirilebilir ise $2g + r \geq 3$, yönlendirilemez ise $g + r \geq 3$ olacak biçimde cinsi g olan ve r tane kenar bileşene sahip bir kompakt Klein yüzey olsun. Bu durumda Γ ya bir yüzey grubu ya da sınırlı yüzey grubu olmak üzere $S \cong U/\Gamma$ dır, [4].

2.7.8 Sonuç: Yukarıdaki teoreme uymayan yüzeyler,

kenarsız yönlendirilebilir ise $g = 0$ küre veya $g = 1$ tor,

kenarlı yönlendirilebilir ise $g = 0, k = 1$ kapalı disk veya $g = 0, k = 2$ karmaşık düzlem,

kenarsız ve yönlendirilemez ise $g = 1, k = 0$ projektif düzlem, $g = 2,\ k = 0$ *Klein şişesi* veya $g = 1,\ k = 1$ *Möbiüs şeridi,*

biçimindedir, [4].

2.7.9 Tanım: (a) S ve S' yönlendirilebilir Klein yüzeyleri topolojik eşyapılı olsunlar. $f : S \to S'$ yön koruyan (korumayan) topolojik eşyapı dönüşümünü ele alalım. Eğer *f*, S ve S' üzerindeki dianalitik yapılara göre bir morfizm oluyor ise *f* ye konform (ters konform) topolojik eşyapı dönüşümü denir.

(b) S ve S′ yönlendirilemeyen Klein yüzeyleri topolojik eşyapılı olsunlar. $f : S \to S'$ topolojik eşyapı dönüşümünü ele alalım. Eğer f, S ve S′ üzerindeki dianalitik yapılara göre morfizm oluyor ise f ye bir konform topolojik eşyapı dönüşümü denir.

(c) S ve S' Klein yüzeyler ve $f:S \to S'$ konform topolojik eşyapı dönüşümünü olsun. O zaman S ve S' yüzeylerine konform denktirler ya da cebirsel denktirler denir.

2.7.10 Tanım: (a) S yönlendirilemeyen bir Klein yüzeyi olsun. Bir $f:S \to S'$ konform topolojik eşyapı dönüşümüne S nin bir otomorfizmi denir.

(b) S yönlendirilemeyen bir Klein yüzeyi olsun. Bir $f:S \to S$ konform (ters konform) topolojik eşyapı dönüşümüne S nin bir $+$otomorfizmi ($-$otomorfizmi) denir.

2.7.11 Teorem: G, cebirsel cinsi $g \geq 2$ olan bir X Klein yüzeyinin otomorfizm grubu olsun. Bu durumda $|G| \leq 12(g-1)$ dir, [15].

2.8 Hecke Grupları

Erich Hecke, 1936 yılında "Über die Bestimmung Dirichletscher Reichen durch ihre Funktionalgleichungen" adlı çalışmasında Hecke gruplarını aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

2.8.1 Tanım: λ sabit bir pozitif sayı olmak üzere

$$T(z) = -\frac{1}{z} \quad \text{ve} \quad U(z) = z + \lambda$$

kesirli doğrusal dönüşümleri ile üretilen gruplara Hecke grupları denir ve $H(\lambda)$ ile gösterilir.

Tanımlanan $T(z)$ ve $U(z)$ dönüşümleri yardımıyla $S=T.U$ alınırsa

$$S(z) = -\frac{1}{z+\lambda}$$

elde edilir, [19].

2.8.2 Teorem: $\lambda \geq 2$ veya $q \geq 3$ bir tamsayı olmak üzere

$$\lambda = \lambda_q = 2\cos\frac{\pi}{q},\ 1 \leq \lambda < 2$$

ise $H(\lambda)$ grubunun bir temel bölgesi

$$F_\lambda = \left\{ z \in U : \left|\operatorname{Re} z\right| < \frac{\lambda}{2}, \left|z\right| > 1 \right\}$$

kümesidir, [19].

Ayrıca E. Hecke, diğer $\lambda>0$ değerleri için F_λ kümesinin bir temel bölge olmadığını da göstermiştir. $\lambda = \lambda_q$ veya $\lambda \geq 2$ olması durumunda $H(\lambda)$ grubunun sonlu üreteçli bir grup olduğu görülür. Ayrıca $H(\lambda)$ grubu, $PSL(2,\mathbb{R})$ nin ayrık bir alt grubu olduğundan $H(\lambda)$ bir Fuchs grup olur.

2.8.3 Teorem: $H(\lambda)$ Hecke gruplarının Fuchs olması için gerekli ve yeterli koşul $\lambda \geq 2$ veya $\lambda = \lambda_q = 2\cos\frac{\pi}{q}$ ($q \geq 3$ bir tamsayı) olmasıdır, [19].

2.8.4 Teorem: $H(\lambda_q)$ Hecke grubunun bir sunuşu,

$H(\lambda_q) = \left\langle T, S : T^2 = S^3 = I \right\rangle \cong C_2 * C_q$ şeklinde, 2 mertebeli bir devirli grup ile q mertebeli bir devirli grubun serbest çarpımıdır, [20].

2.9 Genişletilmiş Hecke Grupları

Burada 2.8 Bölümde verilen Hecke gruplarına, $R_1(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ yansıma dönüşümünün katılmasıyla elde ettiğimiz genişletilmiş Hecke gruplarından kısaca bahsedeceğiz.

$R_1(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ dönüşümü birim çembere göre bir yansımadır.

$\lambda \geq 2$ veya $q \geq 3$ bir tamsayı olmak üzere $\lambda = \lambda_q = 2\cos\dfrac{\pi}{q},\ 1 \leq \lambda < 2$ değerleri için $H(\lambda)$ ile gösterilen Hecke gruplarından yararlanarak şu tanımı verelim.

2.9.1 Tanım: Hecke gruplarına, $R_1(z) = \dfrac{1}{\overline{z}}$ anti-otomorfizmini eklenerek elde edilen gruplara genişletilmiş Hecke grupları denir, [21].

Genişletilmiş Hecke grupları $\overline{H}(\lambda)$ ile gösterilir ve otomorfizmler ile anti-otomorfizmleri bulundurur.

Şimdi de genişletilmiş Hecke gruplarının aşağıda vereceğimiz yansımalar yardımıyla bir grup sunuşunu bulalım.

$\lambda = \lambda_q = 2\cos\dfrac{\pi}{q},\ 1 \leq \lambda < 2$ olmak üzere,

$R_1(z) = \dfrac{1}{\overline{z}},\ R_2(z) = -\overline{z},\ R_3(z) = \dfrac{-\overline{z}}{\lambda\overline{z}+1}$

yansımaları yardımıyla, genişletilmiş Hecke gruplarının sunuşu

$$\overline{H}(\lambda_q) = \left\langle R_1, R_2, R_3 : R_1^{\,2} = R_2^{\,2} = R_3^{\,2} = (R_1R_2)^2 = (R_1R_3)^q = I \right\rangle$$

olarak yazılabilir**.** Burada $R = R_1, T = R_1R_2 = R_2R_1, S = R_3R_1$ olarak alınırsa $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke gruplarının sunuşu

$$\overline{H}(\lambda_q) = \left\langle T, S, R : T^2 = R^2 = S^q = (TR)^2 = (RS)^2 = I \right\rangle$$

olarak bulunur.

$\lambda \geq 2$ değerleri için yansımalar yardımıyla,

$$\overline{H}(\lambda_q) = \left\langle R_1, R_2, R_3 : R_1^{\,2} = R_2^{\,2} = R_3^{\,2} = (R_1R_2)^2 = I \right\rangle$$

ve $R = R_1, T = R_1R_2 = R_2R_1, S = R_3R_1$ eşitliklerinden, $\overline{H}(\lambda)$ genişletilmiş Hecke gruplarının sunuşu,

$$\overline{H}(\lambda_q) = \left\langle T, S, R : T^2 = R^2 = S^\infty = (TR)^2 = (RS)^2 = I \right\rangle$$

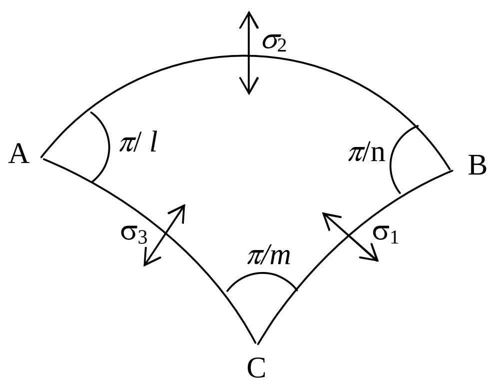
olarak yazılabilir.

2.10 Bazı Özel Normal Alt Gruplar

Şimdi bu tezde kullanacağımız bazı özel normal alt grup tanımlarını ve bu alt gruplara ait bazı özellikleri verelim.

2.10.1 Üçgen Gruplar

$l, m, n \geq 2$ koşulunu sağlayacak şekilde tamsayılar olsunlar. Açıları $\pi/l, \pi/m, \pi/n$ olan bir hiperbolik üçgeni göz önüne alalım



Şekil 2.1. $\pi/l, \pi/m$ ve π/n açılı hiperbolik üçgen

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ Şekil 2.1 deki yansımalar ve Γ^* grubu bu üç yansıma ile üretilen

$$\Gamma^* = \left\langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 : \sigma_1^{\ 2} = \sigma_2^{\ 2} = \sigma_3^{\ 2} = (\sigma_2\sigma_3)^l = (\sigma_3\sigma_1)^m = (\sigma_1\sigma_2)^n = I \right\rangle$$

şeklinde bir grup olsun.

Dikkat edilirse $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ yön korumayan, $\sigma_2\sigma_3$, $\sigma_3\sigma_1$, $\sigma_1\sigma_2$ yön koruyan elemanlardır. $x=\sigma_2\sigma_3$ ve $y=\sigma_3\sigma_1$ alalım. Böylece *x*, A etrafında $2\pi/l$, *y* de B etrafında $2\pi/m$ radyanlık dönme, *xy* ise C etrafında $2\pi/n$ radyanlık dönmedir. Buradan Γ^* grubunun sadece yön koruyan elemanlarından oluşan bir Γ alt grubunu elde ederiz:

$$\Gamma = \left\langle x, y : x^l = y^m = (xy)^n = I \right\rangle.$$

2.10.1.1 Tanım: $\Gamma = \left\langle x, y : x^l = y^m = (xy)^n = I \right\rangle$ alt grubu bir Fuchs gruptur ve *(l, m, n)* ile gösterilir. Bu Γ alt grubuna bir üçgen grubu denir. Γ alt grubu Γ^* grubunun 2 indeksli bir alt grubudur.

2.10.1.2 Teorem: Eğer $\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}>1$ ise üçgen grubu sonlu, $\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}<1$ ise sonsuz mertebelidir, [24].

Şimdi tez boyunca kullanacağımız bazı özel üçgen gruplarını tanıtalım:

2.10.1.3 Tanım: *M*, *G* grubunun bir alt kümesi olsun. *G* nin *M* yi kapsayan bütün alt kümelerinin arakesitinin oluşturduğu küme bir gruptur. Bu gruba *M* nin ürettiği grup denir ve $\left\langle M \right\rangle$ ile gösterilir. *M* nin elemanlarına da $\left\langle M \right\rangle$ grubunun üreteçleri denir.

2.10.1.4 Tanım: Bir *G* grubu için, $G = \left\langle M \right\rangle$ olacak biçimde bir $M \subset G$ bulunabiliyor ise, *G* ye *M* kümesi ile üretilmiş grup denir. Eğer *M* sonlu bir küme ise *G* ye sonlu üretilmiş grup; $a \in G$ *ve* $M = \{a\}$ ise *G* ye a ile üretilmiş devirli grup denir. *G*, *n* mertebeli bir devirli grup ise $C_n \cong \left\langle a \mid a^n = I \right\rangle$ biçiminde gösterilir. Bu devirli grupların üçgen grup gösterimleri *(*1*, n, n)* veya *(n, 1, n)* biçimindedir.

2.10.1.5 Tanım: $\left\langle a, b \mid a^n = b^2 = I,\ ba = a^{-1}b \right\rangle$ sunumuna sahip gruplara dihedral grup denir ve D_n ile gösterilir ve $\left| D_n \right| = 2n$ dir. D_n grubunun üçgen grubu olarak gösterimi ise *(n,* 2, 2*)* biçimindedir.

2.10.1.6 Tanım: *X* boştan farklı *n* elemanlı bir küme olsun. *X* ten kendisi üzerine 1-1 ve örten fonksiyonların oluşturduğu küme bileşke işlemine göre bir gruptur. Bu gruba simetrik grup denir ve S_n ile gösterilir. Bu grubun çift permütasyonlarının oluşturduğu alt kümede bir gruptur. Bu gruba alterne grup denir ve A_n ile gösterilir.

2.10.1.7 Teorem: (a) S_n grubu $\{(1\ 2),\ (1\ 3),\ ...,\ (1\ n)\}$ kümesinin elemanları tarafından üretilir.

(b) S_n grubu $\{(1\ 2),\ (2\ 3),\ ...,\ (n\text{-}1\ n)\}$ kümesinin elemanları tarafından üretilir.

(c) S_n grubu $\{(1\ 2),\ (1\ 2\ 3...\ n)\}$ kümesinin elemanları tarafından üretilir.

2.10.2 Kuvvet Alt Grupları

G nin *m.* kuvvet alt grubu, *m* pozitif bir tamsayı olmak üzere *G* grubunun tüm elemanlarının *m.* kuvvetleri ile üretilen alt grup olarak tanımlanır ve G^m ile gösterilir.

2.10.2.1 Tanım: *G* bir grup ve *H* bu grubun bir alt grubu olsun. Eğer her $f: G \to G$ endomorfizmi için $f(H) \subset H$ oluyorsa, *H* ye tamamen değişmez (*fully invariant*) özelliğe sahiptir denir.

2.10.2.2 Teorem: (a) Kuvvet alt grupları tamamen değişmez özelliğe sahiptirler.

(b) *G* grubunun *H* alt grubu, tamamen değişmez özelliğe sahipse, *G* nin normal alt grubudur, [22].

2.10.2.2 Teoremden kuvvet alt gruplarının normal alt gruplar olduğu sonucu bulunur. Kuvvet alt gruplarının tanımından, aşağıda vereceğimiz özellikler kolaylıkla görülebilir. *G* herhangi bir grup, *m* ve *n* pozitif tamsayılar olmak üzere kuvvet alt grupları için

$G^m > G^{mn}$ ve

$(G^m)^n > G^{mn}$

özelliklerine sağlanır.

2.10.3 Komutatör Alt Grupları

2.10.3.1 Tanım: G bir grup olmak üzere $x_1, x_2 \in G$ elemanları için $[x_1, x_2] = x_1^{-1} x_2^{-1} x_1 x_2$ eşitliğine x_1 ile x_2 elemanlarının komutatörü denir. Bunu n elemana genellersek $[x_1, x_2, ..., x_n] = [[x_1, ..., x_{n-1}], x_n]$ olarak bulunur.

G grubunun boş kümeden farklı X_1 ve X_2 alt gruplarını alalım. X_1 ve X_2 alt gruplarının komutatör alt grubu,

$[X_1, X_2] = <[x_1, x_2] : x_1 \in X_1, x_2 \in X_2 >$ olarak tanımlanır. G grubunun $G' = G^{(1)}$ ile gösterilen birinci komutatör alt grubu ise

$G' = [G, G] = \langle [A, B] : A, B \in G \rangle$ biçiminde tanımlanır. G grubunun komutatör alt grupları arasında,

$$G = G^{(0)} > G^{(1)} > G^{(2)} > ...$$

şeklinde bir ilişki vardır. Herhangi $G^{(n)}$ komutatör alt grubu,

$$G^{(n)} = \left\langle [A, B] : A, B \in G^{(n-1)} \right\rangle$$

biçiminde tanımlanır.

2.10.3.2 Teorem: G grubunun, G' ile bölüm grubu G/G' değişmelidir.

2.10.3.3 Teorem: N, G grubunun normal alt grubu olsun. G/N değişmeli bir grup olması için gerekli ve yeterli koşul G/N bölüm grubunun G/G' nün bir alt grubu olmasıdır.

2.10.3.4 Sonuç: G/G' bölüm grubu G grubunun en geniş değişmeli bölüm grubudur.

2.10.4 Çözülebilir ve Süper Çözülebilir Normal Alt Gruplar

2.10.4 1 Tanım: (a) $i = 0, 1, ..., n$ olmak üzere $G_i \leq G$, $G_0 = \{1_G\}$ ve $G_n = G$ olsun. Her i için, $G_i \lhd G_{i+1}$ özelliğini sağlayan

$$G_0 \lhd G_1 \lhd G_2 \lhd \ldots \lhd G_n$$

serisine, *G* grubunun bir alt normal serisi denir.

(b) $i = 0, 1, \ldots, n$ olmak üzere, $G_i \leq G$ olsun. Eğer *G* grubu, her *i* için G_{i+1}/G_i bölüm grubu değişmeli olacak biçimde bir alt normal seriye sahip ise G grubuna çözülebilir (*solvable*) grup denir.

(c) $i = 0, 1, \ldots, n$ olmak üzere, $G_i \leq G$ olsun. Eğer *G* grubu, her i için, G_{i+1}/G_i bölüm grubu devirli olacak biçimde bir alt normal seriye sahip ise *G* grubuna süper çözülebilir (*supersolvable*) grup denir.

(d) $G_0 \subset G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_n$, *G* nin normal alt gruplarının bir zinciri olsun. Her *i* için $G_{i+1}/G_i \subseteq Z(G/G_i)$ oluyorsa *G* ye bir merkez seri denir.

(e) Bir *G* grubunun bir merkez serisi

$$G_0 \subset G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_n$$

olsun. Eğer $G_0 = \{1_G\}$ ve $G_n = G$ oluyor ise *G* ye nilpotent grup denir.

(f) *G* nin tüm normal nilpotent alt grupları ile üretilen alt gruba *Fitting* Alt grup denir ve *FitG* ile gösterilir.

(g) *G* bir grup ve $M \lhd G$ olsun. *G* nin *M* yi kapsayan *M* ve *G* den başka hiç bir normal alt grubu yoksa *M* ye *G* nin maksimal normal alt grubu denir.

(i) G herhangi bir grup olsun. G nin bütün maksimal normal alt gruplarının arakesiti ile oluşturulan gruba *Frattini* alt grubu denir. Özel olarak G nin maksimal normal alt grubu yoksa Frattini alt grubu kendisi olarak kabul edilir. Frattini alt grubu *FratG* ile gösterilir.

2.10.4.2 Teorem : *G* sonlu bir grup olsun. Eğer *G* grubunun her maksimal alt grubunun indeksi asal sayı ise *G* grubu süper çözülebilir bir gruptur, [22].

2.10.4.3 Teorem : Eğer G sonlu bir grup ve $G/FratG$ bölüm grubu süper çözülebilir ise G grubu da süper çözülebilir bir gruptur, [22].

3. BÖLÜM

Tezin bu bölümünde M*-grup kavramı tanıtılacak ve M*-gruplarla ilgili birtakım sonuç ve örnekler verilecektir. Daha sonra $\overline{\Gamma}$ genişletilmiş modüler grup ile M*-gruplar arasındaki ilişkilerden bahsedilecektir. Ayrıca genişletilmiş modüler grubun normal alt gruplarından yararlanarak, daha önce literatürde yer almamış yeni M*-grup örnekleri verilecektir. Son olarak genelleştirilmiş modüler gruba yeni bir bağıntı ekleyerek bölüm grupları elde edilecek bu bölüm gruplarının bazılarının M*-grup olduğu gösterilecektir.

3.1 M*-Grup

$\overline{D}$ kapalı diski cinsi 0 olan bir kompakt Klein yüzeyidir. $\overline{D}$ tek bir dianalitik yapıya sahiptir.

G cinsi $g \geq 2$ olan *X* sınırlı kompakt Klein yüzeyinin bir otomorfizm grubu olsun. Bu durumda $\Phi = X / G$ bölüm uzayı tek bir dianalitik yapıya sahiptir öyleki $\pi : \mathrm{X} \to \Phi$ bölüm dönüşümü Klein yüzeyinin bir morfizmidir. Bununla birlikte $|G| = r$ olmak üzere π dönüşümü $\Phi = X / G$ bölüm uzayının *r* yapraklı bir örtüsüdür. Hurwitz formülü kullanılarak $|G| \leq 12(g\text{-}1)$ olduğu ve $|G| = 12(g\text{-}1)$ olması için gerekli ve yeterli koşulun $\Phi = X / G$ bölüm uzayının *D* diski olduğu Coy L. May tarafından [15] nolu makalede gösterildi. Aynı zamanda $\pi : \mathrm{X} \to \Phi$ bölüm dönüşümü ∂D sınırını dört noktada ayırır. Bu noktalar $k_1 = k_2 = k_3 = 2$ ve $k_4 = 3$ tür, [23].

F, köşelerindeki açıları $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ ve $\frac{\pi}{3}$ olan hiperbolik bir poligon olsun. *A*, *F* poligonun dört kenarındaki yansımalar ile üretilen bir NEC-grup olur. Bu durumda *A* grubunun gösterimi

$$\left\langle R_1, R_2, R_3, R_4 : R_1^2 = R_2^2 = R_3^2 = R_4^2 = (R_1R_2)^2 = (R_2R_3)^2 = (R_3R_4)^2 = (R_4R_1)^3 = I \right\rangle$$

biçiminde olur.

F poligonu *A* grubu için bir temel bölgedir ve hiperbolik alanı

$$\mu(F) = 2\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

dır.

Şimdi Γ sınırlı yüzey grubu *A* nın sonlu indeksli bir normal alt grubu olsun. O zaman A/Γ, $Y = H/\Gamma$ kompakt Klein yüzeyinin bir otomorfizm grubudur. Eğer *Y* yüzeyinin cinsi $g \geq 2$ ise

$$|A/\Gamma| = \frac{2\pi(g-1)}{\pi/6} = 12(g-1) \quad |\mathrm{A}/\Gamma| = \frac{2\pi(\mathrm{g}-1)}{\pi/6} = 12(\mathrm{g}-1)$$

olur. Bu durumda her *G* sonlu grubu için bir büyük otomorfizm grubu elde edilir. Burada $\varphi: A \to G$ homomorfizmi örtendir ve $Ker\varphi$ sınırlı bir yüzey grubudur [15].

Artık bu gruplarla ilgili sonuçlara ulaşabilmek için M*-grup tanımını verelim.

3.1.1 Tanım: Eğer sonlu bir G grubu α, β ve γ gibi birbirinden ve birimden farklı üç eleman tarafından üretilir ve

$$\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = (\alpha\beta)^2 = (\alpha\gamma)^3$$

bağıntılarını sağlarsa bu G grubuna bir M*-grup denir. Burada $\beta\gamma$ elemanın mertebesine de *G* grubunun indeksi denir. Eğer $\beta\gamma$ elemanının mertebesi *q* ise *G* grubuna bir *q* indeksli M*-gruptur denir, [15].

3.1.2 Teorem: *G*, *q* indeksli bir M*-grup ve $\alpha\beta\gamma$ elemanının mertebesi *p* olsun. Bu durumda *G*, *p* indeksli bir M*-grup olur.

İspat : $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \alpha\beta$ ve $\gamma' = \gamma$ alınır ve 3.1.1 Tanımdaki sunum kullanılır ise *G* grubunun *p* indeksli bir M*-grup olduğu görülür, [6]. □

3.1.3 Sonuç: Bir M*-grup birden fazla indekse sahiptir.

3.1.4 Teorem: *G*, mertebesi $12(g-1)$ olan $g \geq 2$ cebirsel cinsli bir kompakt sınırlı Klein yüzeyinin otomorfizmlerinin bir grubudur ⇔ *G* bir M*-gruptur, [15].

3.1.5 Tanım: Cebirsel cinsi $g \geq 2$ olan bir X yüzeyi mertebesi $12(g-1)$ olan bir otomorfizm grubunu içeriyor ise bu yüzey grubuna maksimal simetriye sahiptir denir, [6].

3.1.6 Teorem: G sonlu grubunun q indeksli bir M*-grup olması için gerekli ve yeterli koşul G grubunun, maksimal simetriye sahip k kenar bileşenli bir Klein yüzeyinin $|G| = 2qk$ mertebeli bir otomorfizm grubu olmasıdır, [6].

3.1.7 Örnek: $G = D_6 \cong D_3 \times C_2$ dihedral grubunu ele alalım. Bu grubun sunumu $\langle x, y : x^2 = y^2 = (xy)^6 = I \rangle$ biçimindedir. Bu sunumda $\alpha = xyx$, $\beta = yxy$ ve $\gamma = y$ dönüşümü yapılır ise ya $\langle \alpha, \beta, \gamma : \alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = (\alpha\beta)^2 = (\alpha\gamma)^3 = (\beta\gamma)^6 = I \rangle$ yada $\langle \alpha', \beta', \gamma' : (\alpha')^2 = (\beta')^2 = (\gamma')^2 = (\alpha'\beta')^2 = (\alpha'\gamma')^3 = (\alpha'\beta'\gamma')^2 = I \rangle$ sunumu elde edilir. Ayrıca $G = D_6 \cong D_3 \times C_2$ grubu 12 mertebeli tek M*-gruptur. Şimdi bu grubunun ait olduğu maksimal simetriye sahip Klein yüzeyinin hangi tipte olduğunu belirleyelim. G grubunun mertebesi 12 olduğundan cebirsel cinsi $g = 2$ olur. Ayrıca G grubunun yukarıda bulduğumuz sunumları düşünüldüğünde indeksi ya 2 ya da 6 dır. 3.1.6 Teorem düşünüldüğünde de verilen Klein yüzeyinin kenar bileşenlerinin sayısı $k = 3$ veya $k = 1$ olarak bulunur. Son olarak bu Klein yüzeyinin topolojik cinsini hesaplayalım. $2 = g = 2p + k - 1$ olduğu düşünülür ise $p = 0$ veya $p = 1$ olarak bulunur. O halde bu yüzey ya 3 delikli bir küre yüzeyidir ya da 1 delikli tor yüzeyidir.

3.1.8 Örnek: $G = S_4$ simetrik grubunu ele alalım. Bu grubun üreteçleri $\alpha = (12)$, $\beta = (34)$ ve $\gamma = (14)$ veya $\alpha' = (12)$, $\beta' = (12)(34)$ ve $\gamma' = (14)$ olarak düşünülebilir. Bu üreteçlerden farklı üreteçlerin de bulunduğu ve her farklı üreteç için farklı bir yüzey bulunabileceği göz ardı edilmemelidir. Biz bu farklı iki üreteci alalım. Bu durumda G grubunun sunumu ya $\langle \alpha, \beta, \gamma : \alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = (\alpha\beta)^2 = (\alpha\gamma)^3 = (\beta\gamma)^3 = I \rangle$ ya da $\langle \alpha', \beta', \gamma' : (\alpha')^2 = (\beta')^2 = (\gamma')^2 = (\alpha'\beta')^2 = (\alpha'\gamma')^3 = (\alpha'\beta'\gamma')^4 = I \rangle$ biçimindedir. $G = S_4$ grubunun 24 mertebeli olduğu düşünülür ve yukarıdaki sunumlar hesaba katılırsa G

grubunun 3 veya 4 indeksli bir M*-grup olduğu bulunur. Şimdi bu grubun ait olduğu maksimal simetriye sahip Klein yüzeyinin hangi tipte olduğunu belirleyelim. G grubunun mertebesi 24 olduğundan cebirsel cinsi $g=3$ olur. Ayrıca G grubunun yukarıda bulduğumuz sunumları düşünüldüğünde indeksi ya 3 ya da 4 tür. 3.1.6 Teorem düşünüldüğünde de verilen Klein yüzeyinin kenar bileşenlerinin sayısı $k=4$ veya $k=3$ olarak bulunur. Son olarak bu Klein yüzeyinin topolojik cinsini hesaplayalım. $3=g=wp+k-1$ ($w=1$ veya $w=2$) olduğu düşünülür ise $p=0$ veya $w=1$ için $p=1$ olarak bulunur. O halde bu yüzey ya 4 delikli bir küre yüzeyidir ya da 3 delikli gerçel projektif düzlemdir.

3.1.9 Örnek: $g=3,4,5,6,11$ ve 21 için elde edilen M*-gruplar sırası ile S_4, $S_3\times S_3$, $C_2\times S_4$, A_5, $C_2\times A_5$, $S_3\times S_4$ ve $C_2\times C_2\times A_5$ tir, [15].

3.1.10 Örnek: $G^{n,q,r}$ grubu a,b,c elemanları tarafından üretilen ve aşağıdaki sunuma sahip olan bir grup olsun :

$$\left\langle a,b,c \,\middle|\, a^n=b^q=c^r=(ab)^2=(bc)^2=(ca)^2=(abc)^2=I \right\rangle$$

Bu sunumda

$$t=bc, u=ca \text{ ve } v=bca$$

olarak düşünülürse

$$\left\langle t,u,v \,\middle|\, t^2=u^2=v^2=(tu)^2=(tv)^n=(uv)^q=(tuv)^r=I \right\rangle$$

elde edilir. Burada n=3 alınırsa, sonlu olan $G^{3,q,r}$ grupları birer M*-grup olurlar. Bu $G^{n,q,r}$ gruplarını sonlu yapan *n*, *q* ve *r* değerleri [24] nolu makalede verilmiştir. Bu makalede düşük mertebeli sonlu $G^{3,q,r}$ gruplardan M*-grup olanlar tabloda verilmiştir.

Grup	Mertebe	Cins
$G^{3,3,4}$	24	3
$G^{3,5,5}$	60	6
$G^{3,5,10}$	120	11
$G^{3,7,8}$	336	29
$G^{3,7,9}$	504	43
$G^{3,8,8}$	672	57
$G^{3,7,13}$	1092	92
$G^{3,7,12}$	2184	183
$G^{3,9,9}$	3420	286
$G^{3,8,10}$	4320	351
$G^{3,8,11}$	12144	1013
$G^{3,7,15}$	12180	1016
$G^{3,7,16}$	21504	1793.

3.1.11 Teorem: (i) $p \neq 2,\ 3,\ 7$ veya 11 olacak biçimde bir asal sayı ise $PSL(2,p)$ grubu bir M*-gruptur,

(ii) $p \neq 3$ olacak biçimde p asal sayıları için $PSL(2,p^2)$ grubu bir M*-gruptur,

(iii) $n \geq 2$ bir doğal sayı ise $PSL(2,2^n)$ grubu bir M*-gruptur,

(iv) $n \geq 4$ olan bir çift sayı ise $PSL(2,3^n)$ grubu bir M*-gruptur, [25].

3.1.12 Teorem: Eğer G bir M*-grup, $N \lhd G$ ve $|G/N| > 6$ ise G/N bölüm grubu da bir M*-gruptur, [26].

3.1.13 Teorem: En az 12 mertebeli sonlu bir G grubunun bir M*-grup olması için gerekli ve yeterli koşul G grubunun, $\overline{\Gamma}$ genişletilmiş modüler grubunun homomorfik bir görüntüsü olmasıdır, [26].

Şimdi 3.1.13 Teoremden dolayı M*-grup ile $\overline{\Gamma}$ genişletilmiş modüler grup arasında direk bir ilişki vardır. Bu ilişki sayesinde M*-grupları çalışmak yerine $\overline{\Gamma}$ genişletilmiş modüler grubu çalışılıp, bu grupta bulunan sonuçlar M*-gruplara taşınabilir. O halde $\overline{\Gamma}$ genişletilmiş modüler grup hakkında biraz bilgi verip, bu grup ile ilgili bazı sonuçlar yardımı ile yeni M*-grup örnekleri bulalım.

3.2 $\overline{\Gamma}$ Genişletilmiş Modüler Grup

3.2.1 Tanım: (a) $t(z) = -\dfrac{1}{z}$ ve $s(z) = -\dfrac{1}{z+1}$ kesirli lineer dönüşümleri ile üretilen $PSL(2,\mathbb{R})$ grubunun ayrık alt grubuna modüler grup denir ve Γ ile gösterilir. Γ modüler grubu

$$\Gamma = \left\langle t, s \,\middle|\, t^2 = s^3 = I \right\rangle \cong C_2 * C_3$$

sunuşuna sahiptir.

(b) Γ modüler grubunun üreteçlerine $r(z) = \dfrac{1}{\overline{z}}$ yansıma dönüşümünün eklenmesiyle elde edilen gruba genişletilmiş modüler grup denir ve $\overline{\Gamma}$ ile gösterilir. $\overline{\Gamma}$ genişletilmiş modüler grubu,

$$\overline{\Gamma} = \langle t,\ s,\ r \,|\, t^2 = s^3 = r^2 = (tr)^2 = (sr)^2 = I \rangle \cong D_2 *_{C_2} D_3$$

sunuşuna sahiptir. Burada $r_1(z) = \dfrac{1}{\overline{z}}$, $r_2(z) = -\overline{z}$ ve $r_3(z) = \dfrac{-\overline{z}}{\overline{z}+1}$ olmak üzere $t = r_2 r_1 = r_1 r_2$, $s = r_1 r_3$ ve $r = r_1$ alınırsa, $\overline{\Gamma}$ genişletilmiş modüler grubu

$$\overline{\Gamma} = \langle r_1, r_2, r_3 \,|\, r_1^{\ 2} = r_2^{\ 2} = r_3^{\ 2} = (r_1 r_2)^2 = (r_1 r_3)^3 = I \rangle$$

sunuşuna sahip olur. Ayrıca

$$f : r_1 \to r_1,\ \ r_2 \to r_1 r_2,\ \ r_3 \to r_3 \ \ (\text{veya } f : t \to rt,\ \ s \to s,\ \ r \to r)$$

fonksiyonu $\overline{\Gamma}$ genişletilmiş modüler grubunun bir dış otomorfizmasıdır, [26].

3.2.2 Tanım: (a) m pozitif bir tamsayı olmak üzere $\overline{\Gamma}$ genişletilmiş modüler grubunun tüm elemanlarının m. kuvvetinin alınmasıyla elde edilen küme tarafından üretilen alt gruba m. kuvvet alt grubu denir ve $\overline{\Gamma}^m$ ile gösterilir. Ayrıca $\overline{\Gamma}^m \triangleleft \overline{\Gamma}$ dır.

(b) $\overline{\Gamma}$ genişletilmiş modüler grubunun herhangi bir elemanının matris gösterimi $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, a ,b, c, d $\in \mathbb{Z}$, ad-bc=±1 ve $\overline{\Gamma}'$, $\overline{\Gamma}$ genişletilmiş modüler grubunun komütatör alt grubu olsun. Her bir $n \geq 1$ tamsayısı için

$$\overline{\Gamma}_n = \left\{ A \in \overline{\Gamma} \middle| a \equiv d \equiv \pm 1 \;\; ve \;\; b \equiv c \equiv 0 \;\; (n) \right\}$$

$$M_n = \left\{ A \in \overline{\Gamma} \middle| a \equiv d \;\; ve \;\; b \equiv c \equiv 0 \;\; (n) \right\}$$

$$\Gamma_n = \overline{\Gamma}_n \cap \Gamma$$

$$N_n = M_n \cap \Gamma$$

$$N_n^* = N_n \cap \overline{\Gamma}'$$

normal alt gruplarına $\overline{\Gamma}$ genişletilmiş modüler grubunun temel denklik alt grupları denir. Bu alt grupların tümü sonlu indekslidir. Eğer $\overline{\Gamma}$ genişletilmiş modüler grubunun $\overline{\Gamma}_n$ alt grubunu içeren bir K alt grubu varsa bu K alt grubuna denklik alt grubu denir.

3.2.3 Sonuç: (i) $\overline{\Gamma}_n \leq M_n$,

(ii) $N_n \leq M_n$,

(iii) $\Gamma_n \leq \Gamma$,

(iv) $\Gamma_n \leq \overline{\Gamma}_n$.

İspat: 3.2.1 Ttanım ve alt küme bağıntıları kullanılarak basitçe görülebilir. □

3.2.4 Teorem: $\Gamma_n \leq N_n$.

İspat: 3.2.3 Sonuçtan, $\overline{\Gamma}_n \leq M_n$ olduğunu biliyoruz. Buradan $\Gamma_n = \overline{\Gamma}_n \cap \Gamma \leq \Gamma \cap M_n = N_n$ olduğu görülür ve ispat biter. □

3.2.5 Sonuç: $\Gamma_n \leq \mathrm{N}_n \leq \mathrm{M}_n$.

İspat: 3.2.3 Sonuç ve 3.2.4 Teoremden açıkça görülebilir. □

3.2.6 Sonuç: $\overline{\Gamma}_n \leq N_n \leq M_n$.

İspat: 3.2.3 Sonuç ve 3.2.4 Teoremden açıkça görülebilir. □

3.2.7 Teorem: $n > 2$ ise $\Gamma_n = \overline{\Gamma}_n$.

İspat: $A \in \overline{\Gamma}_n$ olsun. Bu durumda $a \equiv d \equiv 1 \mod n$ veya $a \equiv d \equiv -1 \mod n$ olmalıdır. Bu durumda $\pm 1 = \det A = ad - bc = 1$ elde edilir. Buradan da $A \in \Gamma_n$ ve 3.2.3 Sonuçtan $\Gamma_n \leq \overline{\Gamma}_n$ olduğu düşünülürse ispat bitmiş olur. $n = 2$ durumunda ise $\Gamma_n \neq \overline{\Gamma}_n$ olur. Bunu ters bir örnekle görebiliriz. $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \in \overline{\Gamma}_2$ fakat $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \notin \Gamma_2$.

□

3.2.8 Teorem: Eğer n, 4 e tam bölünen veya $n \equiv 3 \mod 4$ şeklinde bir asal sayı ise $M_n = N_n$ olur.

İspat: 3.2.5 Sonuçtan $N_n \leq M_n$ olduğunu biliyoruz. Şimdi $M_n \leq N_n$ olduğunu gösterirsek ispatı tamamlamış oluruz. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_n$ olsun. Bu durumda $a \equiv d \equiv \pm 1 \mod n$ ve $b \equiv c \equiv 0$ olmalıdır. Hipotezden n, 4 e tam bölünen veya $p \equiv 3 \mod 4$ tipinde bir doğal sayıdır. n, 4 e tam bölünen bir doğal sayı veya $p \equiv 3 \mod 4$ olsun. Bu durumda $ad - bc = 1$ elde edilir. Bu durumda da $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ elde edilir ve 3.2.2 Tanımdan ispat tamamlanır. □

Şimdi $\overline{\Gamma}$ genişletilmiş modüler grubu ile ilgili literatürde yer alan bazı yardımcı teoremler verelim.

3.2.9 Teorem: $\overline{\Gamma}$ genişletilmiş modüler grubun komütatör alt grubu $\overline{\Gamma}'$ olsun. O zaman

i) $\overline{\Gamma} / \overline{\Gamma}' \cong C_2 \times C_2$, $\quad \overline{\Gamma}' = \langle r_1 r_3,\ r_2 r_3 r_1 r_2 \mid (r_1 r_3)^3 = (r_2 r_3 r_1 r_2)^3 = I \rangle \cong C_3 * C_3$

ii) $\overline{\Gamma}' / \overline{\Gamma}'' \cong C_3 \times C_3$, [26].

3.2.10 Teorem: $\overline{\Gamma}$ genişletilmiş modüler grubunun indeksi 2 olan 3 tane alt grubu vardır. Bunlar

$$\overline{\Gamma}_0 = \langle r_1, r_3, r_2 r_3 r_2 \rangle \cong \langle x,\ y,\ z \mid x^2 = y^2 = z^2 = (xy)^3 = (xz)^3 \rangle \cong D_3 *_{C_2} D_3,$$

$$\Gamma = \langle r_1 r_2,\ r_1 r_3 \rangle \cong \langle x, y \mid x^2 = y^3 \rangle \cong C_2 * C_3,$$

$$\Gamma f = \langle r_2,\ r_1 r_3 \rangle \cong \langle x, y \mid x^2 = y^3 \rangle \cong C_2 * C_3.$$

İspat: N, $\overline{\Gamma}$ genişletilmiş modüler grubunun 2 indeksli normal alt grubu ise $\overline{\Gamma} / N$ bölüm grubu değişmelidir ve $\overline{\Gamma}' \subset N \subset \overline{\Gamma}$ kapsaması ile $\overline{\Gamma} / \overline{\Gamma}' \cong C_2 \times C_2 \cong D_2$ oluşundan ispat biter. □

3.2.11 Teorem: $\overline{\Gamma}$ genişletilmiş modüler grubunun 6 indeksli 2 tane normal alt grubu vardır. Bunlar

$$\Gamma^3 = \langle r_1 r_2 \rangle * \langle r_1 r_3 r_1 r_2 (r_1 r_3)^2 \rangle * \langle (r_1 r_3)^2 r_1 r_2 r_1 r_3 \rangle \cong C_2 * C_2 * C_2$$

ve

$$\overline{\Gamma}_2 = \langle r_2 \rangle * \langle r_3 r_2 r_3 \rangle * \langle r_3 (r_1 r_3) r_2 r_3 (r_1 r_3) \rangle \cong C_2 * C_2 * C_2.$$

Burada $\Gamma^3 f = \overline{\Gamma}_2$ dir, [27].

3.2.12 Teorem: (i) $\left| \overline{\Gamma} / \overline{\Gamma}^6 \right| = 432.$

(ii) $1 \le \mathrm{m} \le 72$ olmak üzere $\left| \overline{\Gamma} / \overline{\Gamma}^{6\mathrm{m}} \right|$ sonludur.

İspat : (i) $\left| \overline{\Gamma} / \overline{\Gamma}^6 \right| = \left| \overline{\Gamma} / \Gamma^6 \right|$ olduğunu [28] nolu kaynaktan biliyoruz, ayrıca $\left| \Gamma / \Gamma^6 \right| = 216$ olduğu da [29] nolu kaynakta gösterildi. Şimdi bölüm grubunun özellikleri kullanılırsa;

$$\left| \overline{\Gamma} / \overline{\Gamma}^6 \right| = \left| \overline{\Gamma} / \Gamma^6 \right| = \left| \overline{\Gamma} / \Gamma \right| \left| \Gamma / \Gamma^6 \right| = 2 \left| \Gamma / \Gamma^6 \right| = 2.216 = 432$$

olduğu görülür.

(ii) Yukarıdaki ispata benzer biçimde;

$$\left| \overline{\Gamma} / \overline{\Gamma}^{6\mathrm{m}} \right| = \left| \overline{\Gamma} / \Gamma^{6\mathrm{m}} \right| = \left| \overline{\Gamma} / \Gamma \right| \left| \Gamma / \Gamma^{6\mathrm{m}} \right| = 2 \left| \Gamma / \Gamma^{6\mathrm{m}} \right|$$

olur. Biz $2 \leq \mathrm{m} \leq 71$ için $\left|\Gamma / \Gamma^{6\mathrm{m}}\right|$ indeksinin sonlu olduğunu [29] nolu kaynaktan biliyoruz. Bu yukarıdaki eşitlikten de $2 \leq \mathrm{m} \leq 71$ olduğunda $\left|\overline{\Gamma} / \overline{\Gamma}^{6\mathrm{m}}\right|$ indeksinin de sonlu olduğu görülür. □

3.2.13 Teorem: $\overline{\Gamma}$ genişletilmiş modüler grubunun 12 indeksli 2 tane normal alt grubu vardır. Bunlar

$$\Gamma' =< (r_2 r_3)^2 r_1 r_3,\ r_2 r_3 r_1 r_3 r_2 r_3 >$$

ve

$$\Gamma_2 =< (r_2 r_3)^2,\ (r_2 r_3 r_1 r_3)^2 >$$

biçimindedir.

İspat: Γ Modüler grubun Γ' komütatör alt grubu ve Γ_2 temel denklik alt grubu [29] nolu kaynakta çalışılmıştır. $\left|\Gamma / \Gamma'\right| = 6$ ve $\left|\Gamma / \Gamma_2\right| = 6$ olduğu ve üreteçlerinin sırası ile $\Gamma' =< (r_2 r_3)^2 r_1 r_3, r_2 r_3 r_1 r_3 r_2 r_3 >$ $\Gamma_2 =< (r_2 r_3)^2, (r_2 r_3 r_1 r_3)^2 >$ olduğu gösterilmiştir. Biz $\left|\overline{\Gamma} / \Gamma\right| = 2$ olduğunu biliyoruz. Buradan da;

$$\left|\overline{\Gamma} / \Gamma'\right| = \left|\overline{\Gamma} / \Gamma\right| \left|\Gamma / \Gamma'\right| = 2.6 = 12$$

ve

$$\left|\overline{\Gamma} / \Gamma_2\right| = \left|\overline{\Gamma} / \Gamma\right| \left|\Gamma / \Gamma_2\right| = 2.6 = 12$$

olduğu görülür ve ispat biter. □

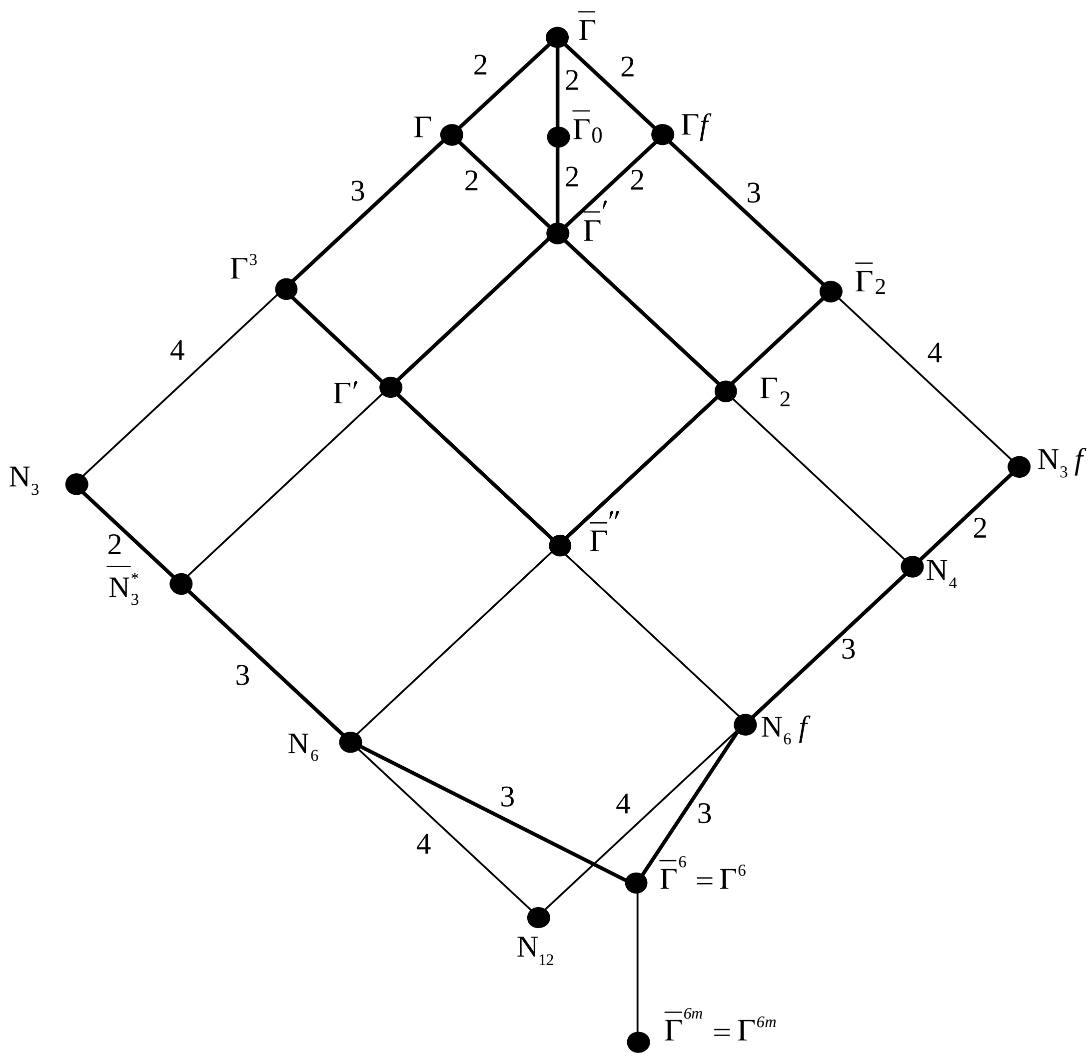
3.2.14 Teorem: Γ modüler grup, Γ_n modüler grubun temel denklik alt grubu, p, n nin asal bir böleni ve $\mathrm{n} > 2$ olmak üzere;

$$\left|\Gamma / \Gamma_n\right| = \frac{1}{2} n^3 \prod_{p|n} (1 - \frac{1}{p^2})$$

dır, [30].

3.2.15 Teorem: $n = p^t$, p tek asal sayı ve $t \geq 1$ tamsayı ise $\Gamma / N_n \cong PSL(2, p^t)$ veya $\Gamma / N_n \cong PSL(2, p)$ dir, [27].

Aşağıda $\overline{\Gamma}$ genişletilmiş modüler grubun, kuvvet, komutatör alt grupları ve temel denklik alt grupları arasındaki ilişkiyi gösteren şekil verilmiştir:



Şekil 3.1. $\overline{\Gamma}$ grubunun normal alt grupları

3.2.16 Teorem: Eğer G bir M*-grup ise $\left|G/G'\right| \mid 4$ ve $\left|G'/G''\right| \mid 9$ dır, [26].

3.2.17 Teorem: G bir M*-grup olsun. G grubunun 0 tane, 1 tane ya da 3 tane 2 indeksli alt grubu vardır. Bu üç alt grup

$$G_1 = \langle \alpha,\ \gamma,\ \beta\gamma\beta \rangle,\ G_2 = \langle \alpha\beta,\ \alpha\gamma \rangle,\ G_3 = \langle \beta, \alpha\gamma \rangle$$

şeklindedir, [31].

İspat: 3.2.10 Teoremden $\overline{\Gamma}$ genişletilmiş modüler grubunun 2 indeksli 3 tane normal alt grubu olduğunu ve 3.1.13 Teoremden de bir grubun M*-grup olabilmesi için $\overline{\Gamma}$ genişletilmiş modüler grubunun homomorfik bir görüntüsü olması gerektiğini de biliyoruz. Bu durumda G bir M*-grubu en fazla 3 tane 2 indeksli normal alt gruba sahiptir. Bu alt gruplar da $\overline{\Gamma}$ genişletilmiş modüler grubunun 2 indeksli normal alt gruplarının homomorfik görüntüleri olacaktır. Burada $r_1 \to \alpha, r_2 \to \beta$ ve $r_3 \to \gamma$ dönüşümü yapılırsa bu alt gruplar

$$G_1 = \langle \alpha,\ \gamma,\ \beta\gamma\beta \rangle,\ G_2 = \langle \alpha\beta,\ \alpha\gamma \rangle,\ G_3 = \langle \beta, \alpha\gamma \rangle$$

şeklinde olurlar. □

3.2.18 Teorem : Eğer G bir M*-grup ise G en fazla 1 tane 4 indeksli normal alt gruba sahiptir ve bu $G' = \langle \alpha\gamma,\ \beta\gamma\alpha\beta \rangle$ alt grubudur [31].

3.2.19 Teorem : Eğer G bir M*-grup ise G en fazla 2 tane 6 indeksli normal alt gruba sahiptir. Bu alt gruplar

$$G_4 = \langle \alpha\beta \rangle * \langle \alpha\gamma\alpha\beta(\alpha\gamma)^2 \rangle * \langle (\alpha\gamma)^2 \alpha\beta\alpha\gamma \rangle$$

ve

$$G_5 = \langle \beta \rangle * \langle \gamma\beta\gamma \rangle * \langle \gamma(\alpha\gamma)\beta\gamma(\alpha\gamma) \rangle$$

şeklindedir.

İspat: 3.2.11 Teoremden $\overline{\Gamma}$ genişletilmiş modüler grubunun 6 indeksli 2 tane normal alt grubu olduğunu ve 3.1.13 Teoremden de bir grubun M*-grup olabilmesi için $\overline{\Gamma}$ genişletilmiş modüler grubunun homomorfik bir görüntüsü olması gerektiğini biliyoruz. Bu durumda G bir M*-grubu en fazla 2 tane 6 indeksli normal alt gruba sahiptir. Bu alt gruplarda $\overline{\Gamma}$ genişletilmiş modüler grubunun 6 indeksli normal alt gruplarının homomorfik görüntüleri olacaktır. Burada $r_1 \to \alpha, r_2 \to \beta$ ve $r_3 \to \gamma$ dönüşümü yapılırsa bu alt gruplar

$G_4 = \langle \alpha\beta \rangle * \langle \alpha\gamma\alpha\beta(\alpha\gamma)^2 \rangle * \langle (\alpha\gamma)^2 \alpha\beta\alpha\gamma \rangle$ ve $G_5 = \langle \beta \rangle * \langle \gamma\beta\gamma \rangle * \langle \gamma(\alpha\gamma)\beta\gamma(\alpha\gamma) \rangle$

şeklindedir. □

3.2.20 Teorem: (i) $\overline{\Gamma} / \Gamma'$ ve $\overline{\Gamma} / \Gamma_2$ bölüm grupları birer M*-gruptur.

(ii) $\overline{\Gamma} / \Gamma^6$ bölüm grubu bir M*-gruptur.

İspat: (i) 3.2.13 Teoremden ve 3.1.12 Teoremden açıkça görülür.

(ii) 3.2.12 Teoremden ve 3.1.12 Teoremden açıkça görülür. □

3.2.21 Teorem: m, $1 \leq m \leq 72$ biçiminde bir doğal sayı ise $\overline{\Gamma} / \Gamma^{6m}$ bölüm grubu bir M*-gruptur.

İspat: 3.2.12 Teorem ve 3.1.12 Teoremden kolayca görülür. □

Şimdi genişletilmiş modüler grubun indeksi 6 dan büyük olan bazı normal alt grupları ile ilgili birtakım sonuçlar verelim. Genişletilmiş modüler grubun bu gruplara bölünmesiyle elde edilen bölüm gruplarının homomorfik görüntüleri 3.1.12 Teoremden dolayı bir M*-gruptur.

3.2.22 Yardımcı Teorem: Her bir $n \geq 2$ tamsayısı için $\overline{\Gamma} / \Gamma_n$ bir M*-gruptur, [15].

3.2.23 Teorem: (i) Her bir $n > 2$ tamsayısı için $\overline{\Gamma} / \overline{\Gamma}_n$ bir M*-gruptur.

(ii) Her bir $n \geq 2$ çift tamsayısı için $\overline{\Gamma} / N_n$ bir M*-gruptur.

(iii) Eğer n, 4 ile tam bölünen bir doğal sayı veya $p \equiv 3\ (4)$ olacak biçimdeki bir p asalı ile bölünebiliyor ise $\overline{\Gamma} / M_n$ bir M*-gruptur.

(iv) Eğer $n = 1, 2, 4, 6$ veya $n = p^t$, p tek asal sayı ve $t \geq 1$ bir tamsayı ise $\overline{\Gamma} / N_n$ bir M*-gruptur.

İspat: (i) $n > 2$ tamsayısı olsun bu durumda 3.2.14 Teorem ve 3.2.22 Yardımcı Teoremden $\overline{\Gamma} / \overline{\Gamma}_n$ bir M*-grup olur.

(ii) 3.2.7 Teoremden $\mathrm{n} > 2$ için $\Gamma_{\mathrm{n}} = \overline{\Gamma}_{\mathrm{n}}$ olduğunu biliyoruz. Buradan da $\left|\Gamma : \mathrm{N_n}\right| = \left|\overline{\Gamma} : \mathrm{N_n}\right| \geq 6$ olur ve 3.1.12 Teoremden de $\overline{\Gamma} / \mathrm{N_n}$ bölüm grubu M*-grup olur.

(iii) 3.1.8 Teoremden eğer n, 4 ile tam bölünen bir doğal sayı veya $p \equiv 3\ (4)$ olacak biçimdeki bir p asalına bölünebiliyor ise $M_n = N_n$ olur. Bu durumda (ii) den ispat tamamlanır.

(iv) Genel olarak $N_n / \Gamma_n \cong \left\{a \in \mathbb{Z}_n : a^2 = 1\right\} / \left\{\pm 1\right\}$ olduğunu biliyoruz. Şimdi hipotez gereği

$$n = 1 \Rightarrow N_n / \Gamma_n \cong \left\{\pm 1\right\} \Rightarrow N_n = \Gamma_n,$$

$$n = 2 \Rightarrow N_n / \Gamma_n \cong \left\{\pm 1\right\} \Rightarrow N_n = \Gamma_n,$$

$$n = 4 \Rightarrow N_n / \Gamma_n \cong \left\{\pm 1\right\} \Rightarrow N_n = \Gamma_n,$$

$$n = 6 \Rightarrow N_n / \Gamma_n \cong \left\{\pm 1\right\} \Rightarrow N_n = \Gamma_n$$

olur ve (i) den ispat bu durumlar için tamamlanır. Şimdi de p asal ve $n = p^t$, p tek asal sayı ve $t \geq 1$ tamsayı olsun. Bu durumda [27] nolu kaynak yardımı ile

$\Gamma / N_n \cong PSL(2,p)$ veya $\Gamma / N_n \cong PSL(2,p^t)$ olduğunu ve 3.2.22 Yardımcı Teoremden bu grupların bir M*-grup olduğunu biliyoruz. □

3.2.24 Sonuç: Her *g*≥2 tamsayısı sınırlı bir kompakt Klein yüzeyinin g cinsi olarak düşünüldüğünde sonsuz çoklukta M*-grup vardır ve diğer *g* değerleri içinde sonsuz çoklukta M*-grup yoktur.

3.3 $\overline{\Gamma}$ Genişletilmiş Modüler Grubuna Bir Üreteç Eklenmesi ile Elde Edilen Bölüm Grupları

Bu kısımda $\overline{\Gamma}$ genişletilmiş modüler grubunun bağıntılarına var olanlardan farklı olan bir bağıntıyı belli kısıtlamalarla ekleyerek bölüm gruplarını elde etmeye çalışacağız. Bu bölüm gruplarının bazılarının M*-grup olduğunu göstereceğiz.

$\overline{\Gamma}$ genişletilmiş modüler grubunun sunumunun 3.2.1 (b) Tanımdan

$$\overline{\Gamma} = \langle t,\ s,\ r \mid t^2 = s^3 = r^2 = (tr)^2 = (sr)^2 = I \rangle$$

olduğunu biliyoruz. Şimdi bu sunuma $1 \leq \varepsilon_i \leq 2$ olmak üzere;

$$w = R(t,s,r) = trs^{\varepsilon_1} trs^{\varepsilon_2} \ldots trs^{\varepsilon_n} = I$$

veya

$$w = R(t,s,r) = ts^{\varepsilon_1} rts^{\varepsilon_2} r \ldots ts^{\varepsilon_n} r = I$$

biçiminde bağıntılarından birini ekleyerek $\overline{\Gamma}$ genişletilmiş modüler grubunun bölüm gruplarını elde edelim. Burada *w* kelimesinin içindeki *t* lerin, *r* lerin ve *s* lerin sayısını sırası ile $e_r(w)$, $e_t(w)$ ve $e_s(w)$ şeklinde gösterelim. Böylece $e_s(w) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i$ olacağı açıktır.

3.3.1 Teorem: *w* kelimesi $w = R(t,s,r) = ts^{\varepsilon_1} ts^{\varepsilon_2} \ldots ts^{\varepsilon_n}$ veya $w = R(t,s,r) = ts^{\varepsilon_1} ts^{\varepsilon_2} \ldots ts^{\varepsilon_n} r$ biçimindedir.

İspat: [27] nolu kaynaktan $\overline{\Gamma}$ genişletilmiş modüler grubunun üreteçleri arasında $tr = rt$, $rs = s^{-1}r$ ve $r^2 = 1$ bağıntısı olduğunu biliyoruz. Eğer $e_r(w)$ çift ise bu bağıntılar w kelimesinde kullanılarak $w = R(t,s,r) = ts^{\varepsilon_1}ts^{\varepsilon_2}...ts^{\varepsilon_n}$ şeklinde bulunur. Eğer $e_r(w)$ tek ise bu bağıntılar w kelimesinde kullanılarak $w = R(t,s,r) = ts^{\varepsilon_1}ts^{\varepsilon_2}...ts^{\varepsilon_n}r$ kelimesi elde edilir ve ispat biter. □

3.3.2 Sonuç: $e_r(w) = 0$ veya $e_r(w) = 1$.

İspat: 3.3.1 Teoremden açıkça görülür. □

3.3.3 Teorem: Eğer $e_t(w) = 0$ ise $1 \le e_s(w) \le 2$ ve eğer $e_t(w) = n$ ise $n \le e_s(w) \le 2n$ dir.

İspat: $e_t(w) = 0$ olsun. Bu durumda $w = s$ veya $w = s^2$ olacaktır. $e_t(w) = n$ olduğunda ise her t ye karşılık ya s ya da s^2 kullanılacaktır. Buradan da $n \le e_s(w) \le 2n$ elde edilir. □

Şimdi w kelimesi için $k \ne 0$ olmak üzere $e_t(w) = k$, $e_s(w) = l$ ve $e_r(w) = 0$ olsun. Bu durumda bu uzunlukta yazılabilecek tüm kelimelerin sayısı basit bir kombinasyon hesabı ile $\binom{k}{l-k}$ olarak bulunur. Bu kelimeler arasında birbirine denk olan kelimelerde vardır. Burada birbirine denk olmayan kelimelerin sayısı da [32] nolu kaynakta bulunmuş ve $M_{k,\,l,\,0} = \frac{1}{k}\sum_{d/(k,l-k)}\left[\varphi(d)\binom{k/d}{(l-k)/d}\right]$ olduğu gösterilmiştir. Bu formül yardımıyla, $M_{n,\,n,\,0} = M_{n,\,n+1,\,0} = M_{n,\,2n,\,0} = M_{n,\,2n-1,\,0} = 1$ olduğu kolayca görülür. Ayrıca eğer n tek sayı ise $M_{n,\,n+1,\,0} = M_{n,\,2n-1,\,0}$, $M_{n,\,n+2,\,0} = M_{n,\,2n-2,\,0}$, …, $M_{n,\,\frac{3n-1}{2},\,0} = M_{n,\,\frac{3n+1}{2},\,0}$ ve n çift sayı ise $M_{n,\,n+1,\,0} = M_{n,\,2n-1,\,0}$, $M_{n,\,n+2,\,0} = M_{n,\,2n-2,\,0}$, …, $M_{n,\,\frac{3n}{2}-1,\,0} = M_{n,\,\frac{3n}{2}+1,\,0}$ eşitlikleri de bulunur. Diğer taraftan n tek doğal sayı olmak üzere bir w kelimesinde $k = n$ ve $l=\frac{3n-1}{2}$ ise w^{-1} kelimesinde de $k = n$ ve $l = \dfrac{3n+1}{2}$ olduğu görülür. Benzer olarak *n* çift bir doğal sayı olduğunda bir *w* kelimesinde $k = n$ ve $l = \dfrac{3n}{2}$-1 ise w^{-1} kelimesinde k=n ve l=$\dfrac{3n}{2}$+1 olarak bulunur. Buradan bir w kelimesini eklemekle w^{-1} kelimesini eklemek arasında bir fark yoktur ve aynı bölüm gruplarını gösterir. Böylece eğer k=n ve n tek ise $l = \dfrac{3n}{2}$-1 ye kadar ve $k = n$ ve *n* çift ise $l = \dfrac{3n}{2}$-1 ye kadar inceleme yapmamız yeterli olacaktır.

3.3.4 Örnek: $e_t(w) = 5$ ve $e_s(w) = 8$ olsun. Bu durumda bu uzunlukta yazılabilecek tüm kelimelerin sayısı $\begin{pmatrix} 5 \\ 8-5 \end{pmatrix} = 10$ olarak elde edilir. Ayrıca birbirine denk olmayan kelimelerin sayısı da yukarıda verilen formül kullanılarak $\dfrac{1}{5}\sum_{d/(5,3)}\left[\varphi(d)\begin{pmatrix} 5/d \\ 3/d \end{pmatrix}\right] = 2$ olur. Yani birbirine denk olmayan kelimelerin sayısı 2 tanedir ve bunlar $tststs^2ts^2ts^2$ ve $tsts^2tsts^2ts^2$ dir. Burada $ts^2ts^2ts^2tsts$ veya $tsts^2ts^2ts^2ts$ kelimelerini, bu kelimeler $tststs^2ts^2ts^2$ kelimesine denk olduğundan hesaba katmayız. Böylece $\overline{\Gamma}$ genişletilmiş modüler grubunun sunumuna $w = tststs^2ts^2ts^2 = I$ bağıntısını ekleyebiliriz. Bu durumda bölüm grubunun sunumunu

$$\langle t,\ s,\ r \mid t^2 = s^3 = r^2 = (tr)^2 = (sr)^2 = tststs^2ts^2ts^2 = I \rangle$$

olarak elde ederiz. $w = tststs^2ts^2ts^2 = I$ bağıntısında basit işlemler yapılarak

$$ststs^2ts^2 = tst$$

elde edilir. Ayrıca

$$(tst)^2 = tsttst = ts^2t$$

olduğunu biliyoruz. Yukarıdaki iki bağıntıdan $s^2 = I$ elde edilir. O zaman elimizdeki bağıntı

$$\langle t,\ s,\ r \mid t^2 = s^3 = r^2 = (tr)^2 = (sr)^2 = s^2 = I \rangle$$

halini alır. Burada da bağıntılar arasındaki ilişkiler incelenirse

$$\langle t,\ r \mid t^2 = r^2 = (tr)^2 = I \rangle$$

sunumu elde edilir. Bunun anlamı elde edilen bölüm grubunun $(2,2,2) \cong D_2$ dört mertebeli dihedral grubuna izomorf olduğudur.

Dikkat edilirse bu örnek için $e_t(w)=5$ ve $e_s(w)=8$ olduğundan $k=5$ ve $l=8$ dir. Ayrıca $k=5$ ve $l=7$ durumunda da $M_{5,\,7,\,0}=M_{5,\,8,\,0}$ olduğu görülür. $k=5$ ve $l=8$ durumunda bulunan birbirine denk olmayan kelimelerin tersleri $k=5$ ve $l=7$ durumundaki kelimelerdir. Böylece bu durumların sadece birini incelemek yeterli olacaktır.

3.3.5 Teorem: Eğer $k \geq 1$, $l \geq 1$ve $m=1$ ise $\overline{\Gamma}\big/ R(t,s,r) \cong C_2$.

İspat: $1 \leq \varepsilon_i \leq 2$ olmak üzere $ts^{\varepsilon_1}ts^{\varepsilon_2}...ts^{\varepsilon_n}r = I$ bağıntısını $\overline{\Gamma}$ genişletilmiş modüler grubun sunuşuna ekleyerek $\overline{\Gamma}\big/ R(t,s,r)$ bölüm grubunun sunumunu

$$\overline{\Gamma}\big/ R(t,s,r) \cong \left\langle t,s,r : t^2 = s^3 = r^2 = (tr)^2 = (rs)^2 = (ts^{\varepsilon_1}ts^{\varepsilon_2}...ts^{\varepsilon_n}r) = I \right\rangle$$

olarak elde ederiz. Burada $ts^{\varepsilon_1}ts^{\varepsilon_2}...ts^{\varepsilon_n}r = I$ bağıntısından yararlanarak $ts^{\varepsilon_1}ts^{\varepsilon_2}...ts^{\varepsilon_n} = r$ olur. Bu bağıntı bölüm grubunda r yerine yazılırsa

$$t^2 = s^3 = (ts^{\varepsilon_1}ts^{\varepsilon_2}...ts^{\varepsilon_n})^2 = (s^{\varepsilon_1}ts^{\varepsilon_2}...ts^{\varepsilon_n})^2 = (ts^{\varepsilon_1}ts^{\varepsilon_2}...ts^{\varepsilon_n+1})^2 = I$$

bağıntıları elde edilir. Burada $(s^{\varepsilon_1}ts^{\varepsilon_2}...ts^{\varepsilon_n})^2 = (ts^{\varepsilon_1}ts^{\varepsilon_2}...ts^{\varepsilon_n})^2$ eşitliği düşünülür ve bazı hesaplamalar yapılırsa $s=I$ bulunur. Bununla birlikte k çift ise $r=I$, k tek ise de $t=r$ elde edilir. Her iki durumda da $\overline{\Gamma}\big/ R(t,s,r) \cong \left\langle t : t^2 = I \right\rangle \cong C_2$ elde edilir ve ispat biter. □

3.3.6 Sonuç: Eğer $k \geq 1$, $l \geq 1$ve $m=0$ ise $\overline{\Gamma}\big/ R(t,s,r) \cong C_2 \times \Gamma\big/ R(t,s,r)$.

3.3.7 Örnek: $k=6$, $l=9$ ve $m=1$ durumuna karşılık gelen kelimelerden biri olan $R(t,s,r) = tststs^2tsts^2ts^2r$ kelimesini seçelim. Bu durumda $\overline{\Gamma}\big/ R(t,s,r)$ bölüm grubunun sunumu ;

$$\overline{\Gamma}\big/ R(t,s,r) \cong \left\langle t,s,r : t^2 = s^3 = r^2 = (tr)^2 = (rs)^2 = (tststs^2tsts^2ts^2r) = I \right\rangle$$

biçiminde olur. $tststs^2tsts^2ts^2r = I$ bağıntısı yardımı ile $tststs^2tsts^2ts^2 = r$ bağıntısını elde ederiz. Bu bağıntı bölüm grubunun sunuşunda r yerine yazılır ise aşağıdaki bağıntılar bulunur.

$$t^2 = s^3 = (tststs^2tsts^2ts^2)^2 = (ttststs^2tsts^2ts^2)^2 = (tststs^2tsts^2t)^2 = I.$$

Burada $(tststs^2tsts^2t)^2=I$ bağıntısı kullanılarak $tststs^2tsts^2t.tststs^2tsts^2t = tststs^2ts^2ts^2tsts^2t = I$ ve $sts^2ts^2ts^2ts = I$ bağıntıları elde edilir. Bu son bağıntıda eşitliğin her iki tarafını s ve t ile işleme koyarsak $sts^2ts^2ts = s^2ts^2$ bağıntısını elde ederiz. Bu son bulduğumuz bağıntıyı da bölüm grubundaki $(tststs^2tsts^2ts^2)^2 = I$ bağıntısında yerine yazarak; $(tststs^2tsts^2ts^2)^2 = tststs^2tsts^2ts^2tststs^2tsts^2ts^2 = I$ bağıntısını elde ederiz. Buradan da $tststs^2ts^2ts^2tsts^2tsts^2ts^2 = I$ elde edilir. $tststs^2ts^2ts^2tsts^2t = I$ ve $tststs^2ts^2ts^2tsts^2tsts^2ts^2 = I$ bağıntıları yardımı ile de $sts^2ts^2 = I$ elde edilir. Buradan da $s^2 = I$ ve $s = I$ elde edilir. $s = I$ bağıntısını *R(t,s,r)* kelimesinde yerine yazar ve $(tr)^2 = I$ yani $tr = rt$ olduğu düşünülür ise k çift olduğundan ise $r = I$ ve $t^2 = I$ bulunur. Sonuç olarak bölüm grubunun sunumu $\overline{\Gamma}/R(t,s,r) \cong \langle t : t^2 = I \rangle \cong C_2$ şeklinde olur. □

Burada $k \le 7$, $l \le 14$ ve m=0 olduğunda oluşan bütün kelimeleri ve 3.3.5 teoremden ayrı tutulan k=0 ve l=0 durumlarını incelenip oluşan bölüm gruplarının sunumları ve grup yapıları bulunmuştur. Bulunan bölüm gruplarının grup sunuşları ve grup yapıları aşağıdaki tabloda detaylı bir biçimde gösterilmiştir. Dikkat edilirse bölüm grubunun cebirsel yapısı 3.1.9 örnekte verilenlerden birine eşitse o zaman bölüm grubu bir M*-gruptur.

k	l	m	Eklenen Kelime	Bölüm Grubunun Sunumu	Bölüm Grubunun Cebirsel Yapısı
0	0	1	r	$<t,s,r:t^2=s^3=r^2=(tr)^2=(rs)^2=r=I>$	C_2
0	1	0	s	$<t,s,r:;t^2=s^3=r^2=(tr)^2=(rs)^2=s=I>$	D_2
0	1	1	sr	$<t,s,r:t^2=s^3=r^2=(tr)^2=(rs)^2=sr=I>$	C_2
0	2	0	s^2	$<t,s,r:t^2=s^3=r^2=(tr)^2=(rs)^2=s^2=I>$	D_2
0	2	1	s^2r	$<t,s,r:t^2=s^3=r^2=(tr)^2=(rs)^2=s^2r=I>$	C_2
1	0	0	t	$<t,s,r:t^2=s^3=r^2=(tr)^2=(rs)^2=t=I>$	S_3
1	0	1	tr	$<t,s,r:t^2=s^3=r^2=(tr)^2=(rs)^2=tr=I>$	S_3
1	1	0	ts	$<t,s,rt^2=s^3=r^2=(tr)^2=(rs)^2=ts=I>$	C_2
1	2	0	ts^2	$<t,s,r:t^2=s^3=r^2=(tr)^2=(rs)^2=ts^2=I>$	C_2
2	2	0	$tsts$	$<t,s,r:t^2=s^3=r^2=(tr)^2=(rs)^2=tsts=I>$	$C_2 \times S_3$
2	3	0	$tsts^2$	$<t,s,r:t^2=s^3=r^2=(tr)^2=(rs)^2=tsts^2=I>$	$C_2 \times \mathrm{C}_6$
3	3	0	$tststs$	$<t,s,r:t^2=s^3=r^2=(tr)^2=(rs)^2=tststs=I>$	$C_2 \times A_4$
3	4	0	$tststs^2$	$<t,s,r:t^2=s^3=r^2=(tr)^2=(rs)^2=tststs^2=I>$	C_2
4	4	0	$tstststs$	$<t,s,r:t^2=s^3=r^2=(tr)^2=(rs)^2=tstststs=I>$	$C_2 \times S_4$
4	5	0	$tstststs^2$	$<t,s,r:t^2=s^3=r^2=(tr)^2=(rs)^2=tstststs^2=I>$	D_2
4	6	0	$tststs^2ts^2$	$<t,s,r:t^2=s^3=r^2=(tr)^2=(rs)^2=tststs^2ts^2=I>$	$S_3 \times S_3$
4	6	0	$tsts^2tsts^2$	$<t,s,r:t^2=s^3=r^2=(tr)^2=(rs)^2=tsts^2tsts^2=I>$	$C_2 \times (C_2 \times A_4)$
4	7	0	$tsts^2ts^2ts^2$	$<t,s,r:t^2=s^3=r^2=(tr)^2=(rs)^2=tsts^2ts^2ts^2=I>$	D_2
4	8	0	$ts^2ts^2ts^2ts^2$	$<t,s,:r;t^2=s^3=r^2=(tr)^2=(rs)^2=ts^2ts^2ts^2ts^2=I>$	$C_2 \times S_4$
5	5	0	$tststststs$	$<t,s,r:t^2=s^3=r^2=(tr)^2=(rs)^2=tststststs=I>$	$C_2 \times A_5$
5	6	0	$tststststs^2$	$<t,s,r:t^2=s^3=r^2=(tr)^2=(rs)^2=tststststs^2=I>$	S_3
5	7	0	$tstststs^2ts^2$	$<t,s,r:t^2=s^3=r^2=(tr)^2=(rs)^2=tstststs^2ts^2=I>$	C_2
5	7	0	$tststs^2tsts^2$	$<t,s,r:t^2=s^3=r^2=(tr)^2=(rs)^2=tststs^2tsts^2=I>$	C_2
6	6	0	$tstststststs$	$<t,s,r:t^2=s^3=r^2=(tr)^2=(rs)^2=tstststststs=I>$	sonsuz
6	7	0	$tstststststs^2$	$<t,s,r:t^2=s^3=r^2=(tr)^2=(rs)^2=tstststststs^2=I>$	D_2
6	8	0	$tststststs^2ts^2$	$<t,s,r:t^2=s^3=r^2=(tr)^2=(rs)^2=tststststs^2ts^2=I>$	$C_2 \times S_3$
6	8	0	$tstststs^2tsts^2$	$<t,s,r:t^2=s^3=r^2=(tr)^2=(rs)^2=tstststs^2tsts^2=I>$	D_2
6	8	0	$tststs^2tststs^2$	$<t,s,r:t^2=s^3=r^2=(tr)^2=(rs)^2=tststs^2tststs^2=I>$	$C_2 \times (C_2 \times S_4)$
6	9	0	$tstststs^2ts^2ts^2$	$<t,s,r:t^2=s^3=r^2=(tr)^2=(rs)^2=tstststs^2ts^2ts^2=I>$	$C_2 \times (C_4 \times A_4)$
6	9	0	$tststs^2tsts^2ts^2$	$<t,s,r:t^2=s^3=r^2=(tr)^2=(rs)^2=tststs^2tsts^2ts^2=I>$	sonsuz
6	9	0	$tststs^2ts^2tsts^2$	$<t,s,r:t^2=s^3=r^2=(tr)^2=(rs)^2=tststs^2ts^2tsts^2=I>$	$C_2 \times (C_6 \times C_7)$
6	9	0	$tsts^2tsts^2tsts^2$	$<t,s,r:t^2=s^3=r^2=(tr)^2=(rs)^2=tsts^2tsts^2tsts^2=I>$	sonsuz
7	7	0	$tststststststs$	$<t,s,r:t^2=s^3=r^2=(tr)^2=(rs)^2=tststststststs=I>$	sonsuz
7	8	0	$tststststststs^2$	$<t,s,r:t^2=s^3=r^2=(tr)^2=(rs)^2=tststststststs^2=I>$	C_2
7	9	0	$tstststststs^2ts^2$	$<t,s,r:t^2=s^3=r^2=(tr)^2=(rs)^2=tstststststs^2ts^2=I>$	S_3

7	9	0	$tststststs^2tsts^2$	$<t,s,r:t^2=s^3=r^2=(tr)^2=(rs)^2=tststststs^2tsts^2=I>$	$C_2 \times A_4$
7	9	0	$tststs^2tststs^2$	$<t,s,r:t^2=s^3=r^2=(tr)^2=(rs)^2=tststs^2tststs^2=I>$	S_3
7	10	0	$tststststs^2ts^2ts^2$	$<t,s,r:t^2=s^3=r^2=(tr)^2=(rs)^2=tststststs^2ts^2ts^2=I>$	C_2
7	10	0	$tststs^2tsts^2ts^2$	$<t,s,r:t^2=s^3=r^2=(tr)^2=(rs)^2=tststs^2tsts^2ts^2=I>$	C_2
7	10	0	$tsts^2ts^2tststs^2$	$<t,s,r:t^2=s^3=r^2=(tr)^2=(rs)^2=tsts^2ts^2tststs^2=I>$	C_2
7	10	0	$tststs^2ts^2tsts^2$	$<t,s,r:t^2=s^3=r^2=(tr)^2=(rs)^2=tststs^2ts^2tsts^2=I>$	C_2
7	10	0	$tsts^2tsts^2tsts^2$	$<t,s,r:t^2=s^3=r^2=(tr)^2=(rs)^2=tsts^2tsts^2tsts^2=I>$	C_2

4. BÖLÜM

Bir önceki bölümde M*-gruplar ile genişletilmiş modüler grup arasındaki ilişki verilmişti. Bu bölümde ise M*-gruptan daha genel olan genelleştirilmiş M*-grup tanımı yapılacak, daha sonra bu gruplar ile ilgili bir takım özellikler verilecektir. Ayrıca genelleştirilmiş M*-gruplar ile genişletilmiş Hecke grupları arasındaki ilişki gösterilecek, bu ilişki yardımı ile de genelleştirilmiş M*-grupların 2, 4 ve 2*p* (p asal sayı) indeksli alt grupları hakkında bilgiler elde edilecektir. Bununla birlikte bu grupların süper çözülebilir olması için gerek ve yeter koşul verilecektir.

4.1 Genelleştirilmiş M*-grup

Genişletilmiş Hecke gruplar $\overline{H}(\lambda_q)$ ($q \geq 3$ asal sayı) ve bu grupların bazı normal alt grupları ile bu gruplar arasındaki ilişkileri [34] nolu makalede çalışırken ilginç bir genel durum ile karşılaştık. Bu makaledeki $q = 3$ için genişletilmiş Hecke grup $\overline{H}(\lambda_q)$ ile ilgili bulunan tüm sonuçlar M*-gruplar ile ilgili sonuçlar ile çakışıyordu. Yani bu makaledeki $q \geq 3$ asal sayı iken bulunan sonuçlar, M*-grupların daha geneli olan gruplar için elde edilmiş oluyordu. Böylece $q \geq 3$ asal sayı durumunda $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke gruplar ile cebirsel cinsi $p \geq 2$ mertebesi $\frac{4q}{q-2}(p-1)$ olan sınırlı kompakt Klein yüzeylerinin otomorfizmleri arasında bir ilişki kurma fikri ortaya çıkmış oldu. Şimdi bu konuda ilerleyebilmek için aşağıdaki tanımı verelim.

4.1.1 Tanım: (a) $q \geq 3$ bir asal sayı, G grubu sonlu bir grup ve r_1, r_2, r_3 birbirinden ve birimden farklı üç eleman olsun. Eğer G bu üç eleman tarafından üretilir ve

$$r_1^2 = r_2^2 = r_3^2 = (r_1 r_2)^2 = (r_1 r_3)^q = I$$

bağıntılarını sağlarsa, bu *G* grubuna genelleştirilmiş bir M*-grup denir.

(b) *G* grubu genelleştirilmiş bir M*-grup olsun. Eğer $(r_2 r_3)^t = I$ oluyorsa *t* ye *G* grubunun indeksi denir.

(c) G grubu genelleştirilmiş bir M*-grup olsun. Eğer $(r_1 r_2 r_3)^l = I$ bağıntısı da sunumda var ise *l* ye de *G* grubunun indeksi denir.

4.1.2 Sonuç: *G* grubu genelleştirilmiş bir M*-grup olsun. Eğer *G* nin indeksi 2 ise $G \cong D_{2q}$ olur.

İspat: *G* grubu indeksi 2 olan bir genelleştirilmiş M*-grup olsun. Bu durumda *G* grubunun sunuşu

$$\left\langle r_1, r_2, r_3 : r_1^2 = r_2^2 = r_3^2 = (r_1 r_2)^2 = (r_1 r_3)^q = (r_2 r_3)^2 \right\rangle \cong C_2 \times D_q$$

şeklinde olacaktır. Buradan da $G \cong D_{2q}$ elde edilir. □

4.1.3 Örnek: $G^{n,q,r}$ gruplarının *a*, *b*, *c* elemanları tarafından üretildiği ve bu elemanlar arasındaki bağıntının

$$\langle a,\ b,\ c \mid a^n = b^q = c^r = (ab)^2 = (bc)^2 = (ca)^2 = (abc)^2 = I \rangle$$

olduğu üçüncü bölümde söylenmişti.

$t = bc,\ u = ca$ ve $v = bca$

olarak düşünülürse

$$\langle t,\ u,\ v \mid t^2 = u^2 = v^2 = (tu)^2 = (tv)^n = (uv)^q = (tuv)^r = I \rangle$$

elde edilir. Burada $n = p$ (*p* asal sayı) alınırsa, sonlu olan $G^{n,q,r}$ grupları bir genelleştirilmiş M*-grup olur. Bu $G^{n,q,r}$ gruplarını sonlu grup yapan *n*, *q* ve *r* değerleri [24] nolu kaynakta verilmiştir. Bu kaynakta verilen gruplara göre düşük mertebeli sonlu $G^{n,q,r}$ genelleştirilmiş M*-gruplar aşağıdaki şekildedir.

Grup	Mertebe	Cins
$G^{3,3,4}$	24	3
$G^{5,3,5}$	60	6
$G^{5,3,10}$	120	11
$G^{7,3,8}$	336	29
$G^{7,3,9}$	504	43
$G^{7,3,13}$	1092	92
$G^{7,3,12}$	2184	183
$G^{7,3,15}$	12180	1016
$G^{7,3,16}$	21504	1793

4.1.4 Yardımcı Teorem: G mertebesi $2q$ dan büyük ya da eşit olan sonlu bir grup olsun. G nin bir genelleştirilmiş M*-grup olması için gerek ve yeter şart G nin $\overline{\mathrm{H}}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grubunun homomorfik bir görüntüsü olmasıdır.

İspat: Gereklilik 4.1.1 Tanımdan kolayca görülür. Yeterlilik için ise $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grubunun indeksi $2q$ dan büyük yada eşit bir $G \cong \overline{H}(\lambda_q)/N$ bölüm grubunu ele alalım. Eğer N $\{r_1,\ r_2,\ r_3, r_1r_2, r_1r_3\}$ elemanlarından birini içeriyor ise bölüm grubunun indeksi $2q$ dan küçük olur. Bu ise hipotez ile çelişki yarattığından N, $\{r_1,\ r_2,\ r_3, r_1r_2, r_1r_3\}$ elemanlarından birini içermez. Dolayısıyla $r_1,\ r_2,\ r_3$ sırası ile $\mathrm{R}_1,\ \mathrm{R}_2,\ \mathrm{R}_3$ e resmedilir ise G nin bir genelleştirilmiş M*-grup olduğu görülür. □

Şimdi de 4.1.4 Yardımcı Teoremden faydalanabilmek için $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grupları ve bu grupların normal alt grupları hakkında bilinen bazı sonuçları verelim. Bu sonuçları kullanarak M*-gruptan daha genel olan genelleştirilmiş M*-gruplar hakkında bazı sonuçlar elde edeceğiz.

4.2 $\overline{H}(\lambda_q)$ Genişletilmiş Hecke Grupları ve Genelleştirilmiş M*-grup

Burada $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grupları için $H(\lambda_q)$ Hecke gruplarından yararlanacağız. $\lambda_q = 2\,Cos\dfrac{\pi}{q}$ ve $q = 3,5,7...$ şeklinde asal sayılardır. $\overline{H}(\lambda_q)$ nin grup sunuşu,

$$H(\lambda_q) = < T, S \;\Big|\; T^2 = S^q = I > \cong C_2 * C_q \tag{4.2.1}$$

biçimindedir, [20].

4.2.1 Tanım: $\overline{H}(\lambda_q)$ Hecke gruplarının (4.2.1) deki üreteçlerine $R(z) = \dfrac{1}{\overline{z}}$ yansıma dönüşümünü katarak elde edilen gruplara $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grupları denir, [21].

4.2.2 Teorem: $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grupları,

$$\overline{H}(\lambda_q) = < T, S, R \mid T^2 = S^q = R^2 = (TR)^2 = (RS)^2 = I > \tag{4.2.2}$$

sunuşuna sahiptir, [21].

Buradaki $T(z) = -\dfrac{1}{z}$ elemanı, 2 mertebeli bir eliptik dönüşüm, $S(z) = -\dfrac{1}{z + \lambda_q}$ ise p mertebeli bir eliptik dönüşümdür. $R(z) = -\dfrac{1}{\overline{z}}$ ise 2 mertebeli yansımadır.

4.2.3 Teorem: $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke gruplarındaki sonlu mertebeli elemanlar, $T, R, TR, S, S^2, \ldots, S^{\frac{q-1}{2}}$ elemanlarından biri ile eşleniktir, [35].

4.2.4 Teorem: $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grupları, D_2 ile D_q nin C_2 ile karışımlı serbest çarpımıdır.

İspat: D_2 ve D_q dihedral grupların sunuşları sırası ile,

$$G_1 = \left\langle T, R : T^2 = R^2 = (TR)^2 = I \right\rangle \cong D_2$$

ve

$$G_2 = \left\langle S, R : S^q = R^2 = (RS)^2 = I \right\rangle \cong D_q \text{ şeklindedir.}$$

$A =< R > \leq G_1$ alt grubu için,

$$\phi : A \to G_2$$
$$R \mapsto R$$

özdeş dönüşümü yardımı ile

$\overline{H}(\lambda_q) \cong G_1 *_{C_2} G_2$ ve

$\overline{H}(\lambda_q) =< T, S, R \mid T^2 = S^q = R^2 = (TR)^2 = (RS)^2 = I >$

bulunur. □

4.2.5 Teorem: (i) $\overline{H}(\lambda_q) / \overline{H}'(\lambda_q) \cong V_4 \cong C_2 \times C_2$,

(ii) $\overline{H}'(\lambda_q) = \left\langle S \right\rangle * \left\langle TST \right\rangle$,

(iii) $\overline{H}'(\lambda_q) / \overline{H}''(\lambda_q) \cong V_{q^2} \cong C_q \times C_q$,

(iv) $\overline{H}''(\lambda_q)$ tabanı $[S,TST],[S,TS^2T],\ldots,[S,TS^{q-1}T],[S^2,TST],[S^2,TS^2T],\ldots,$ $[S^2,TS^{q-1}T],\ldots,[S^{q-1},TST],[S^{q-1},TS^2T],\ldots,[S^{q-1},TS^{q-1}T]$ olan serbest gruptur.

(v) $n > 2$ tamsayıları için $\left|\overline{H}(\lambda_q) : \overline{H}^{(n)}(\lambda_q)\right| \cong \infty$.

İspat: (i)-(iv) ispatları [36] nolu kaynakta verilmiştir.

(v) $\overline{H}''(\lambda_q)$ ikinci komutatör alt grubunun üreteçlerine değişmelilik kattığımızda elde edilen $\overline{H}''(\lambda_q) / \overline{H}'''(\lambda_q)$ bölüm grubu sonsuz mertebeli çıkar. Yani $\overline{H}'''(\lambda_q)$, $\overline{H}''(\lambda_q)$ içinde sonsuz indekslidir. Bu şekilde komutatör alt grupların serisine devam edilirse $\left|\overline{H}(\lambda_q) : \overline{H}^{(n)}(\lambda_q)\right| \cong \infty$ olduğu bulunur. □

4.2.6 Teorem: (i) α, $T \mapsto RT$, $S \mapsto S$, $R \mapsto R$ olacak biçimde bir otomorfizm olmak üzere $\overline{H}'(\lambda_q) = H(\lambda_q) \cap \alpha(H(\lambda_q))$ eşitliği sağlanır.

(ii) $H'(\lambda_q)$, $\overline{H}'(\lambda_q)$ grubunun q indeksli alt grubudur.

(iii) $\overline{H}''(\lambda_q)$, $H'(\lambda_q)$ grubunun q indeksli alt grubudur.

İspat: (i) Hem $H(\lambda_q)$ hem de $\alpha(H(\lambda_q))$, $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grubunun 2 indeksli normal alt grupları olduklarından, $H(\lambda_q) \cap \alpha(H(\lambda_q))$ 4 indeksli tek normal alt grup olan $\overline{H}'(\lambda_q)$ birinci komutatör alt grubuna eşit olur.

(ii) $\left|H(\lambda_q)/H'(\lambda_q)\right| = \left|H(\lambda_q)/H^2(\lambda_q)\right| . \left|H^2(\lambda_q)/H'(\lambda_q)\right|$ eşitliği ile bulunur.

(iii) $\left|\overline{H}'(\lambda_q)/\overline{H}''(\lambda_q)\right| = \left|\overline{H}'(\lambda_q)/H'(\lambda_q)\right| . \left|H'(\lambda_q)/\overline{H}''(\lambda_q)\right|$ olacağından ispat biter. $\square$

4.2.7 Teorem: $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke gruplarının iki indeksli üç tane normal alt grubu vardır. Bunlar,

$$H(\lambda_q) = < T, S \mid T^2 = S^q = I > \cong C_2 * C_q ,$$

$$\overline{H}_0(\lambda_q) = < R, S, TST \mid R^2 = S^q = (TST)^q = (RS)^2 = (RTST)^2 = I > \cong D_q *_{C_2} D_q$$

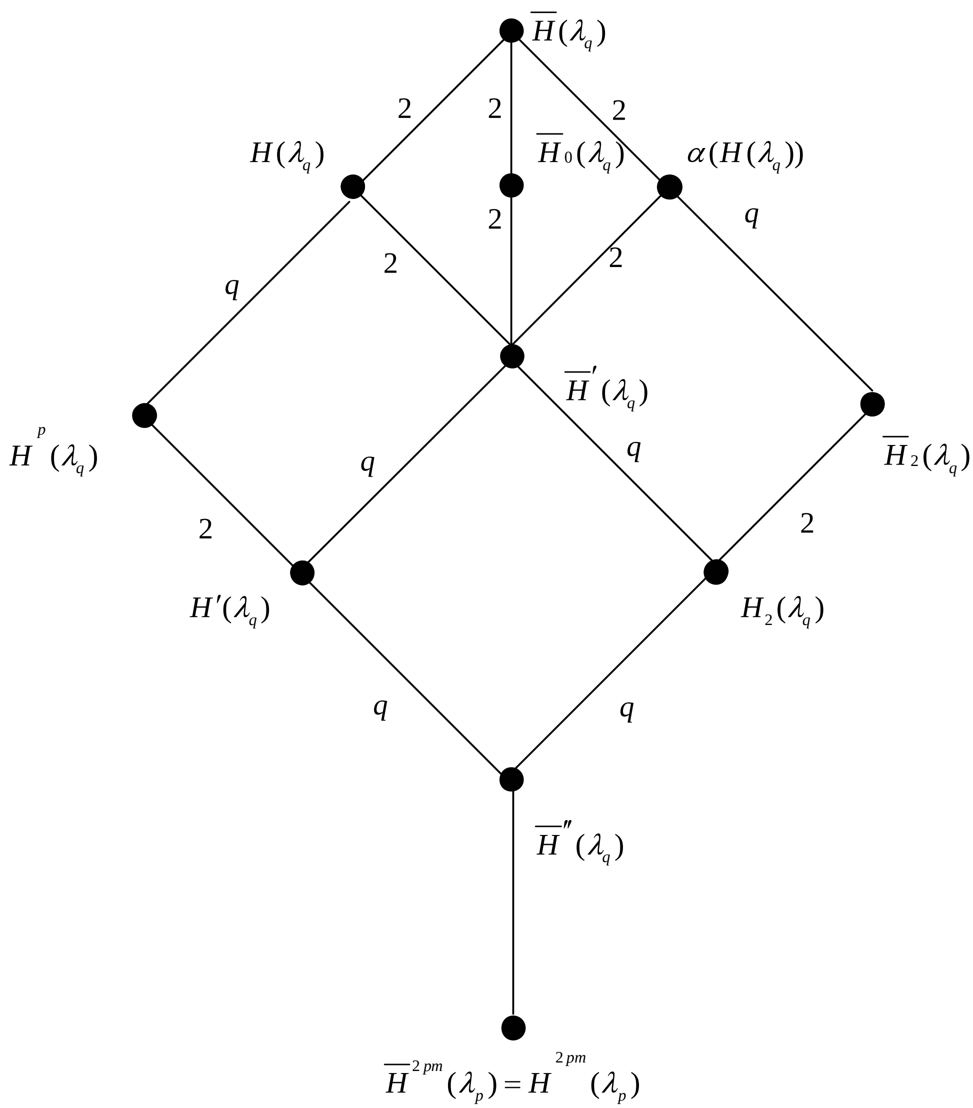
ve

$$\alpha(H(\lambda_q)) = < TR, S \mid (TR)^2 = S^q = I > \cong C_2 * C_q$$

alt gruplarıdır.

İspat: N, $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grubunun 2 indeksli normal alt grubu ise $\overline{H}(\lambda_q)/N$ bölüm grubu değişmelidir ve $\overline{H}'(\lambda_q) \subset N \subset \overline{H}(\lambda_q)$ kapsaması ile $\overline{H}(\lambda_q)/\overline{H}'(\lambda_q) \cong C_2 \times C_2 \cong D_2$ oluşundan ispat biter. $\square$

Aşağıda $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grubunun kuvvet, komutatör alt grupları ve temel denklik alt grupları arasındaki ilişkiyi gösteren şekil verilmiştir:



Şekil 4.1 $\overline{H}(\lambda_q)$ gruplarının normal alt grupları

4.2.8 Sonuç: G genelleştirilmiş bir M*-grup ve N, G nin indeksi $2q$ dan büyük normal bir alt grubu olsun. Bu durumda G/N bölüm grubu bir genelleştirilmiş M*-grup olur.

Genişletilmiş Hecke grupları literatürde [32, 34, 35, 36] nolu kaynaklarda çalışılmıştır. Burada bizim çalışmamızda önemli bir yer tutacak olan aşağıdaki yardımcı teoremi verelim.

4.2.9 Yardımcı Teorem: $q \geq 3$ bir asal sayı olmak üzere

(i) $\overline{H}(\lambda_q)/\overline{H}'(\lambda_q) \cong V_4 \cong C_2 \times C_2$,

(ii) $\overline{H}'(\lambda_q) = < R_1R_3, R_2R_3R_1R_2 : (R_1R_3)^q = (R_2R_3R_1R_2)^q = I >$

(iii) $\overline{H}'(\lambda_q)/\overline{H}''(\lambda_q) \cong V_{q^2} \cong C_q \times C_q$, [36].

4.2.10 Sonuç: $q \geq 3$ bir asal sayı ise $\left|\overline{H}(\lambda_q) : \overline{H}''(\lambda_q)\right| = 4q^2$ dır.

İspat : $\left|\overline{H}(\lambda_q) : \overline{H}''(\lambda_q)\right| = \left|\overline{H}(\lambda_q) : \overline{H}'(\lambda_q)\right|\left|\overline{H}'(\lambda_q) : \overline{H}''(\lambda_q)\right| = 4q^2$.

4.2.11 Sonuç: G grubu genelleştirilmiş bir M*-grup ise $|G : G'|$, 4 ü böler ve $|G' : G''|$, q^2 yi böler.

İspat: G grubu genelleştirilmiş M*-grup olduğundan dolayı $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grubunun homomorfik bir görüntüsüdür. Dolayısı ile $|G : G'|$ bölüm grubu $\overline{H}(\lambda_q)/\overline{H}'(\lambda_q)$ grubunun homomorfik bir görüntüsü olacaktır. 4.2.9 Yardımcı Teorem den dolayı $|G : G'|$ ya 4 tür ya da 4 ü böler. Diğeri de benzer biçimde ispatlanır. □

4.2.12 Yardımcı Teorem: $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grubunun indeksi 2 olan 3 tane alt grubu vardır. Bunlar aşağıdaki şekildedir ;

$\Gamma_1 = \langle R_1, R_3, R_2R_3R_2 \rangle, \Gamma_2 = \langle R_1R_2, R_1R_3 \rangle, \Gamma_3 = \langle R_2, R_1R_3 \rangle$, [33].

4.2.13 Sonuç: Bir genelleştirilmiş M*-grup indeksi 2 olan ya 3, ya 1, ya da 0 tane alt gruba sahiptir. Ayrıca indeksi 4 olan bir tane alt gruba sahiptir.

İspat: G grubu bir genelleştirilmiş M*-grup olsun. Bu durumda $|G:G'|$, 4 ü böler. Yani ya $|G:G'|=4$ ya $|G:G'|=2$ ya da $|G:G'|=1$ olur. $|G:G'|=4$ ise G nin 3 tane 2 indeksli alt grubu vardır. $|G:G'|=2$ ise 2 indeksli tek alt grup vardır. O da G' dür. $|G:G'|=1$ ise 2 indeksli normal alt grup yoktur. $|G:G'|=4$ olduğunda G grubu $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grubunun bir homomorfik görüntüsü olduğundan bu iki indeksli 3 alt grup da 2 indeksli normal alt grupların birer homomorfik görüntüsü olacaktır. Yani bu alt gruplar $\Gamma_1=\langle R_1,R_3,R_2R_3R_2\rangle,\Gamma_2=\langle R_1R_2,R_1R_3\rangle,\Gamma_3=\langle R_2,R_1R_3\rangle$ gruplarının birer homomorfik görüntüsü olacaktır. Dolayısı ile $G_1=<r_1,r_3,r_2r_3r_2>$, $G_2=<r_1r_2,r_1r_3>$, $G_3=<r_2,r_1r_3>$ grupları G grubunun 2 indeksli alt grupları olur. Şimdi G grubunun 4 indeksli alt grubunu düşünelim. Bu alt grup $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grubunun bir bölüm grubunun homomorfik görüntüsü olacağından $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grubunun da 4 indeksli 1 tane alt grubu olduğundan G grubunun da 4 indeksli tek bir alt grubu vardır ve bu $G_4=<r_1r_3,r_2r_3r_1r_2>$ biçimindedir. □

4.2.14 Yardımcı Teorem:: $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grubunun indeksi $2q$ olan 2 tane alt grubu vardır. Bu alt gruplar aşağıdaki biçimdedir;

$$\Gamma_5=<R_1R_2>*<(R_1R_3)^1R_1R_2(R_1R_3)^{q-1}>*<(R_1R_3)^2R_1R_2(R_1R_3)^{q-2}>*...*<(R_1R_3)^{q-1}R_1R_2(R_1R_3)^1>$$

$$\Gamma_6=<R_2>*<R_3R_2R_3>*<R_3(R_1R_3)^1R_2R_3(R_1R_3)^1>*...*<R_3(R_1R_3)^{q-2}R_2R_3(R_1R_3)^{q-2}>.$$

4.2.15 Sonuç: Bir genelleştirilmiş M*-grup indeksi $2q$ olan 2 tane alt gruba sahiptir. Bunlar

$$G_5=<r_1r_2>*<(r_1r_3)^1r_1r_2(r_1r_3)^{q-1}>*<(r_1r_3)^2r_1r_2(r_1r_3)^{q-2}>*...*<(r_1r_3)^{q-1}r_1r_2(r_1r_3)^1>$$

$$G_6=<r_2>*<r_3r_2r_3>*<r_3(r_1r_3)^1r_2r_3(r_1r_3)^1>*...*<r_3(r_1r_3)^{q-2}r_2r_3(r_1r_3)^{q-2}>$$

biçimindedir.

İspat: 4.2.13 Sonuç un ispatına benzer biçimde ispatlanabilir. □

4.2.16 Yardımcı Teorem: (a) G sonlu süper çözülebilir bir grup olsun. Bu durumda G' komütatör alt grubu nilpotent gruptur,

(b) H, G sonlu grubunun nilpotent normal alt grubu ve G/H' süper çözülebilir ise G süper çözülebilir gruptur,

(c) G sonlu süper çözülebilir grup ise G, $I = G_0 < G_1 < G_2 < ... < G_n = G$ biçiminde devirli bölüm grupları azalan asal mertebeli normal seriye sahiptir, [22].

4.2.17 Teorem: $q \geq 3$ asal sayı ve G, q ya bağlı bir genelleştirilmiş M*-grup olsun. O zaman G nin süper çözülebilir grup olması için gerekli ve yeterli şart $r \in \mathbb{Z}^+$ için $|G| = 4q^r$ olmasıdır.

İspat: İlk önce teoremin birinci kısmını ispatlayalım. Varsayalım ki G süper çözülebilir bir grup olsun. Bu durumda 4.2.16 Yardımcı Teoremden dolayı G' komütatör alt grubu nilpotent gruptur. $\overline{H}'(\lambda_q)$ komütatör alt grubu mertebesi q olan iki eleman tarafından üretildiğinden dolayı G' komütatör alt grubu q gruptur. Buradan da q grup tanımından $r \in \mathbb{Z}^+$ için $|G| = q^r$ olur. Ayrıca G/G' komütatör alt grubu $\overline{H}(\lambda_q)$ grubunun bir bölüm grubunun homomorfik görüntüsü olduğunu biliyoruz. Şimdi bu verilerden

$$|G| = |G:G'|.|G'| = 4q^r$$

bulunur ve ispatın ilk kısmı sona ermiş olur.

Şimdi varsayalım ki G mertebesi $4q^r$ olan bir genelleştirilmiş M*-grup olsun. G nin süper çözülebilir olduğunu tümevarım ile göstereceğiz. İddia $r = 1$ için doğrudur çünkü $|G| = 4q$ olur ve mertebesi $4q$ olan tek genelleştirilmiş M*-grup $C_2 \times D_q \cong D_{2q}$ dihedral gruptur. Böylece $C_2 \times D_q \cong D_{2q}$ dihedral grubu süper çözülebilir bir gruptur. Şimdi varsayalım ki $r \geq 2$ olsun. G grubu Burnside *p-q* teoremi gereği [22 sayfa 240] çözülebilir bir grup olur. 4.2.11 Sonuç gereği $|G:G'|$ 4 ü böler şimdi biz $|G:G'| = 4$ olduğunu göstermeye çalışacağız. Varsayalım ki $|G:G'| = 2$ olsun. Bu durumda $|G':G''| = q$ olur. Diğer taraftan G/G'' bölüm grubunun mertebesi $2q^2$ olur. 4.2.8 Sonuç tan dolayı G/G'' bölüm grubu genelleştirilmiş M*-grup olur ve $2q^2$, $4q$ yu böler. Bu ise bir çelişkidir. Bundan dolayı varsayım yanlıştır. Yani $|G:G'| = 4$ olur. Ayrıca G' grubu mertebesi q olan iki eleman tarafından üretildiğinden q –gruptur. Aynı zamanda G'

nilpotent bir alt grup ve $|G| = q^r$ olur. $F = FitG$ ve $\Phi = FratG$ olsun. G' komütatör alt grubu normal nilpotent alt grubu olduğundan $G' \subset F$ olur. Aynı zamanda G nilpotent olmadığından $F \neq G$ olur. Şimdi varsayalım ki $G' \neq F$ olsun. Bu durumda $|F| = 2q^r$ ve F grubunun karakteristik alt grubu H nin mertebesi 2 olmalı. Buradan $H \lhd G$ ve $|G/H| = 2q^r > 2q$ olduğundan G/H bir genelleştirilmiş M*-grup olur ki bu bir çelişkidir. Bundan dolayı varsayım yanlıştır yani $F = G'$ olur.

Biz $F' \subset \Phi \subset F$ ve $F/\Phi = F(G/\Phi)$ olduğunu biliyoruz. G/Φ çözülebilir bir gruptur. Bununla birlikte $F(G/\Phi) \neq 1$, $\Phi \neq F$ ve $F \neq G'$ olduğundan $|F/F'|$, q^2 yi böler. Bu durumda $|G/\Phi|$ mertebesi $4q$ yada $4q^2$ olur. Varsayalım ki $|G/\Phi| = 4q$ olsun. Mertebesi 4q olan tek alt grup $C_2 \times D_q$ olduğundan $G/\Phi \cong C_2 \times D_q$ olur. Buradan $F(C_2 \times D_q) \cong C_2 \times C_q$ olur ki bu devirli gruptur ve imkansızdır. Yine varsayım yanlış olur. Yani $|G/\Phi| = 4q^2$ olur. Mertebesi $4q^2$ olan tek genelleştirilmiş M*-grup $D_q \times D_q$ olduğundan $F/\Phi \cong D_q \times D_q$ olur. Böylece $D_q \times D_q$ grubu da süper çözülebilir bir gruptur. Yani F/Φ grubu süper çözülebilir bir gruptur Huppert teoremi gereği G grubu da süper çözülebilir bir gruptur. □

4.2.18 Sonuç: G cebirsel cinsi $p = (q-2)q^{r-1} + 1$ olan bir genelleştirilmiş M*-grup ise G süper çözülebilir bir gruptur.

4.2.19 Sonuç: G mertebesi $r \in \mathbb{Z}^+$ ve $q \geq 3$ asal sayı için $4q^r$ olan süper çözülebilir bir genelleştirilmiş M*-grup olsun. Bu durumda

(a) $|G'| = q^r$,

(b) $G' = FitG$,

(c) $G'' = FratG$,

(d) $G'/G'' = C_q \times C_q$

olur.

5. SONUÇLAR

Bu çalışmada elde edilen yeni sonuçlar üçüncü ve dördüncü bölümlerde bulunmaktadır ve bunlar aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

Üçüncü bölümde, M*-grup kavramı tanıtılmış ve M*-gruplarla ilgili birtakım sonuç ve örnekler verilmiştir. Daha sonra $\overline{\Gamma}$ genişletilmiş modüler grup ile M*-grup arasındaki ilişkilerden bahsedilmiştir. Ayrıca genişletilmiş modüler grubun normal alt gruplarından yararlanarak, daha önce literatürde yer almamış yeni M*-grup örnekleri verilmiştir. Son olarak genelleştirilmiş modüler gruba yeni bir bağıntı ekleyerek bölüm grupları bulunmuş ve bu bölüm gruplarından bazılarının M*-grup olduğu gösterilmiştir.

Dördüncü bölümde, M*-grubun tanımı genelleştirilerek genelleştirilmiş M*-grup tanımı yapılmıştır. Daha sonra bu gruplar ile ilgili bir takım özellikler verilmiştir. Ayrıca genelleştirilmiş M*-gruplar ile genişletilmiş Hecke grupları arasındaki ilişki verilmiştir. Bu ilişki yardımı ile de genelleştirilmiş M*-grupların 2, 4 ve 2p (p asal sayı) indeksli alt grupları hakkında bilgiler verilmiştir. Bununla birlikte bu grupların süper çözülebilir olması için gerek ve yeter koşul verilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] Ahlfors L., Sario L., Riemann surfaces, Princeton University Press, Princeton, (1960).

[2] Alling N.L., Greenleaf N., Foundations of the theory of Klein surfaces, Springer Verlag (1971).

[3] Cohen J., "On Hurwitz extensions by PSL(2,7)", *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 86, (1979), 395-400.

[4] Hall W., Automorphism and coverings of Klein surfaces, Ph. D. Thesis, University of Southampton, Southampton, (1978).

[5] Poincaré H., "Sur l'uniformazition des fonctions analytiques", *Acta Math.* , 31, (1908), 1-63.

[6] Bujalance E., Cirre F. J., Turbek P., Groups acting on bordered Klein surfaces with maximal symmetry, Proceedings of Groups St. Andrews 2001 in Oxford. Vol. I, 50--58, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 304, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.

[7] Schwarz H. A., "Über diejenigen algebraischen Gleichungen zwischen zwei Veränderlichen Grossen weche eine schaar rationaler eindeutig umkehrbarer transformationen in sich selbest zulassen", *J. Reine und Angew Math.*, 87, (1879), 139-145.

[8] Hurwitz A., "Über algebraische Gebilde mit eindeutigen transformation in sich", *Math. Ann.*, 41,(1892), 401-442.

[9] Gordon P., "Über endliche Gruppen linearer transformationen eine Veränderlichen", *Math. Ann.*, 12,(1877) , 23-46.

[10] Wiman A., "Über die hyperelliptischen Kurven und diejenigen vom Geschlect p=3 welche eindeutige transformationen in sich zulassen", *Bihang Till. Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar*, 21, (1895), 23.

[11] Wiman A., "Über die algebraischen Kurven von den Geschlecten p=4,5 und 6 welche eindeutige transformationen in sich besitzen", *Bihang Till. Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar*, 21, (1895), 41.

[12] Bers L., "Quasiconformal mappings and Teichmuller's theorem", *Princeton Conference on Analytic Functions*, (1960).

[13] Chevalley C., Introduction to the theory of algebraic functions of one variable Providence, Rhode Island (1951).

[14] Lehner J., "Discontinuous groups and automorphic functions", Rhode Island, *Math. Surveys of the Amer. Math. Soc*., (1964).

[15] May C. L., "Large automorphism groups of compact Klein surfaces with boundary", *Glasgow Math. J*., 18 (1977), 1-10.

[16] Jones G. A., Singerman D., Complex Functions, Cambridge University Press, (1987).

[17] Wilkie H.C., "On non-Euclidean crystallographic groups", *Math. Zeit*., 91 (1966) 7-102.

[18] Singerman D., "On non-Euclidean crystallographic groups", *Proc. of the Camb Phil. Soc.*, 76, (1974), 233-240.

[19] Hecke E., "Über die Bestimmung Dirichletscher Reichen durch ihre Funktionalgleichungen", *Math. Ann.*,112, (1936), s.664-699.

[20] Cangül İ. N., Normal Subgroups of Hecke Groups, Ph.D. Thesis, Southampton University, (1993).

[21] Sahin R., Bizim O., "Some Subgroups of the Extended Hecke groups $\overline{H}(\lambda_q)$", *Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed*., 23 (2003), no. 4, 497-502.

[22] Robinson D. J. S., A Course in the Theory of Groups, Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin, (2001), s. 28, 119-120, 167.

[23] May C. L., "Automorphisms of compact Klein surfaces with boundary", *Pacific J. Math*., 59 (1975), 199-210.

[24] Coxeter H. S. M., Moser W. O. J., Generators and Relations For Discrete Groups, second ed., Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg-New York, (1965), s. 35-38.

[25] Singerman D.,"PSL(2,q) as an Image of the Extended Modular Group with Applications to Group Actions on Surfaces", *Proc. Edinb. Math. Soc.*, 30, (1987), 143-151.

[26] Greenleaf N., May C. L., “Bordered Klein surfaces with maximal symmetry”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 274, (1982), no.1, 265-283.

[27] Jones G. A., Thornton, J. S., “Automorphisms and Congrunce Subgroups of The Extended Modular Group”, *J. London Math. Soc.*, (2), 34, (1986), 26-40.

[28] Şahin R., İkikardeş S., Koruoğlu Ö., “On the Power Subgroups of the Extended Modular Group $\overline{\Gamma}$”, *Turk. J. Math.* ,28, (2004), 143-151.

[29] Newman M., “The Structure of Some Subgroups of The Modular Group”, *Illionis J. Math.*, 8, (1962), 480-487.

[30] Gunning R. C. , Lectures on Modular Forms, Princeton, (1962).

[31] Bujalance E., Cirre F.J., Turbek P., “Automorphism Criteria for M*-groups”, *Proc. Edinb. Math. Soc* ., (2) 47 (2004), no. 2, 339-351.

[32] Ulutas Y. T., Cangul I. N. , “One Relator Quotients of the Modular Group”, *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica.*, 32, (2004), no.4, 291-196.

[33] Sahin R., İkikardes S., Koruoğlu Ö. ,“Generalized M*-groups”, *Int. J. Algebra and Comp.*, 6, (2006), 1211-1219.

[34] Sahin R., İkikardes S., Koruoğlu Ö. ,“ Some Normal Subgroups of the Extended Hecke Groups $\overline{H}(\lambda_q)$”, *Rocky Mountain J. Math*., 36, (2006), no.3, 1033-1048.

[35] Özgür N. Y., Şahin R., “On The Extended Hecke Groups”, *Turk. J. Math.*, 27, (2003), 473-480.

[36] Şahin R., Bizim O., Cangül İ. N., “Commutator Subgroups of the Extended Hecke Groups $\overline{H}(\lambda_q)$”, *Czechoslovak Mathematical Journal*, 54, (2004), 253-259.

[37] Lang M. L., Lim C. H., Tan S. P., “Principal congruence subgroups of the Hecke Groups”, *Journal of Number Theory*, 85, (2000), 220-230.

[38] Jones G. A., Singerman D., Complex Functions, Cambridge University Press, (1987), 221-267.

[39] Ford L. R., Automorphic Functions, Chelsea Publishing Company, New York, (1951).

[40] Fraleigh J. B., A First Course in Abstract Algebra, sixthed edition, Addison-Wesley Pub. Comp., (1974).

[41] Magnus W., Karrass A., Solitar D., Combinatorial Group Theory, Dover Publications, Inc. New York, (1976).

[42] Johnson D. L., Presentation of Groups, Cambridge University Press, (1990).

[43] Hungerford T. W., Algebra, Springer-Verlag, New York Inc., (1974).

[44] Cangül İ. N., Singerman D., “Normal Subgroups of Hecke Groups and Regular Maps”, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* (1998), 59-74.

[45] Schmidt T., Scheingorn M., “On the Infinite Volume Hecke Surfaces”, *Compositio Math.*, 95, no 3, (1995), 247-262.