

**T.C.  
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
FİZİK ANABİLİM DALI**

**YILDIZ MODELLERİNDE NÜKLEER ENERJİ OLUŞUM ORANLARI VE  
GÖZLEMSSEL KONTROLLERİ**

**DOKTORA TEZİ**

**Gülay İNLEK**

**Balıkesir, Kasım – 2008**

**T.C.  
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
FİZİK ANABİLİM DALI**

**YILDIZ MODELLERİNDE NÜKLEER ENERJİ OLUŞUM ORANLARI VE  
GÖZLEMSSEL KONTROLLERİ**

**DOKTORA TEZİ**

**Gülay İNLEK**

**Balıkesir, Kasım – 2008**

T.C.  
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
FİZİK ANABİLİM DALI

YILDIZ MODELLERİNDE NÜKLEER ENERJİ OLUŞUM ORANLARI VE  
GÖZLEMSEL KONTROLLERİ

DOKTORA TEZİ

Gülay İNLEK

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Edwin BUDDING

Sınav Tarihi : 20. 11. 2008

Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Edwin BUDDING (Danışman -ÇOMÜ)

Prof. Dr. Ahmet ERDEM (ÇOMÜ)

Doç. Dr. Ersen METE (BAÜ)

Doç. Dr. Levent SOLMAZ (BAÜ)

Y. Doç. Dr. Oktay YILMAZ (ÇOMÜ)

Balıkesir, Kasım - 2008

## ÖZET

### YILDIZ MODELLERİNDE NÜKLEER ENERJİ OLUŞUM ORANLARI VE GÖZLEMSEL KONTROLLERİ

Gülay İNLEK  
Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,  
Fizik Anabilim Dalı  
(Doktora Tezi / Tez Danışmanı : Prof. Dr. Edwin BUDDING)

Balıkesir, 2008

Paczynski'nin GOB programı [1] yardımı ile düşük kütleli yıldız zarflarının yüzey ısı akışındaki konveksiyon rolünü çalıştık. 0.4 ve 1.1  $M_{\odot}$  kütle aralığında degen veya değmeye yakın olan çift yıldızların bileşenleri için atmosferik modelleri dikkate aldık. Lucy 'nin önerdiği yöntem [2] takip edilerek, soğuk yıldızların oldukça geniş kütle, ısıtma ve etkin sıcaklık aralıkları için benzer  $\beta$  (~0.06-0.1) değerleri elde edildi.

Aynı zamanda Paczynski 'nin programları [1] yardımıyla donukluğun yıldızların yarıçapları üzerine etkisini inceledik. Kurucz donukluklarından [3] yeni donukluk tabloları oluşturmak için Lagrange interpolasyon metodunu [4] kullandık. Kurucz donukluklarının sonuçlarını, Huebner donuklukları [5]' nin, Iglesias ve Rogers donuklukları [6,7] 'nin sonuçları ile karşılaştırdık. Schwarzschild 'ın [8] dikkate aldığı kütle aralıklarının aynısı için hesaplamaları kontrol ettik. Bu çalışmada, eski donuklukların yeni olanları ile değiştirilmesi hesaplanan yarıçapları % 5-10 kadar değiştirmiştir.

Yıldız modellerindeki nükleer enerji oluşum oranlarını açıklamaları ile birlikte verdik. Gözlemsel kontroller için, genç çoklu yıldız sistemi U Oph (ADS 10428)'nin analiz sonuçlarını kullandık. U Oph 'nin yapısal ve evrimsel durumunu kontrol etmek için Paczynski 'nin HB8 programını [1] kullandık. Çoklu sistemin yaşını yaklaşık 38 Milyon yıl olarak tahmin ettik.

**ANAHTAR SÖZCÜKLER :** yıldızlar / genel yapı / modelleme / donukluk tabloları / gözlemsel testler / enerji oluşum oranları/ tutulan çift yıldız verileri.

## ABSTRACT

### NUCLEAR ENERGY GENERATION RATES IN STELLAR MODELS AND OBSERVATIONAL CHECKS

Gülay İNLEK  
Balıkesir University, Institute of Science,  
Department of Physics

(Ph. D. Thesis / Supervisor : Prof. Dr. Edwin BUDDING)

Balıkesir-Turkey, 2008

We study the role of convection in the surface heat flow of low mass stellar envelopes with the aid of Paczynski 's domain program GOB [1]. We have considered atmospheric models for a range of masses similar to the components of contact or near –contact binaries between 0.4 and 1.1  $M_{\odot}$ . If the procedure proposed by Lucy [2] is followed, similar values of the index  $\beta$  (~0.06-0.1) are obtained for a fairly wide range of masses, luminosities and effective temperature of cool stars.

We have also examined the effect of opacity on stellar radii with the aid of Paczynski 's programs [1]. We used Lagrange interpolation method [4] to prepare new opacity tables from Kurucz opacities [3]. We have compared the results of Kurucz opacities with those of Huebner opacities [5], Iglesias and Rogers opacities [6,7]. We have checked calculations for the same ranges of masses considered by Schwarzschild [8]. In this study, changes of old opacities with new ones have changed the calculated radii by up to ~ 5-10 %.

We have presented nuclear energy generation rates in stellar models with explanations. We have used results of analysis of the young, multiple star U Oph (ADS 10428) for observational checks. We have used the HB8 program of Paczynski [1] to check our results for the structure and evolutionary condition of U Oph. We have estimate an age of the multiple system at around 38 My.

**KEY WORDS :** stars / general structure / stellar models / opacity tables / observational tests / energy generation rates/ eclipsing binary data.

## İÇİNDEKİLER

	<u>sayfa</u>
ÖZET, ANAHTAR SÖZCÜKLER	ii
ABSTRACT, KEY WORDS	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SEMBOL LİSTESİ	v
ŞEKİL LİSTESİ	vi
TABLO LİSTESİ	vii
ÖNSÖZ	viii
1. GİRİŞ	1
2. YÖNTEM	4
2.1 Genel Yapı Problemi	4
2.1.1 İki Nokta Sınır Değeri Problemleri	6
2.1.2 Dış Sınır	7
2.1.3 İç Sınır	8
2.2 Zarf Model Programları	9
2.3 Model Oluşturulmasında GOB ve SCH Programlarının Kullanılması	10
2.4 Lagrange İnterpolasyon Metodu	13
3. GOB VE SCH PROGRAMLARININ UYGULAMALARI	15
3.1 Çekim Kararması Hesaplamaları	15
3.1.1 $\beta$ 'nın Hesaplanması	19
3.1.2 Gözlemlerle Kıyaslama	22
3.2 Donukluk Etkileri	25
3.3 Donukluk Tabloları	29
3.4 Farklı Donuklukların Model İntegrasyonlardaki Sonuçları	33
4. NÜKLEER ENERJİ OLUŞUM ORANLARI VE GÖZLEMSEL KONTROLLERİ	35
4.1 Yıldızlardaki Nükleer Süreçler	35
4.1.1 Proton-Proton Reaksiyonu	36
4.1.2 Karbon Çevrimi	37
4.1.3 Helyumun Azotla Yanması	38
4.1.4 Üçlü $\alpha$ Süreci	39
4.1.5 Helyumun Karbonla Yanması	39
4.1.6 Karbon Yanması	40
4.1.7 Oksijen Yanması	40
4.2 Enerji Oluşum Oranları	41
4.3 Gözlemsel Kontroller	47
5. SONUÇ VE TARTIŞMA	50
KAYNAKLAR	54
ÖZGEÇMİŞ	57
EKLER: Tez kapsamında yayınlanan makale ve bildiriler	

## SEMBOL LİSTESİ

<u>Simge</u>	<u>Adı</u>	<u>Birimi</u>
$\rho$	Yoğunluk	$\text{g cm}^{-3}$
$\rho_c$	Merkezi yoğunluk	$\text{g cm}^{-3}$
P	Basınç	$\text{dyn cm}^{-2}$
$\epsilon$	Enerji oluşum oranı	$\text{erg g}^{-1} \text{s}^{-1}$
$\kappa$	Donukluk	$\text{cm}^2 \text{g}^{-1}$
T	Sıcaklık	K
$T_e$	Etkin sıcaklık	K
$T_0$	Dış tabaka sıcaklığı	K
$T_c$	Merkezi sıcaklık	K
M	Kütle	g
R	Yarıçap	cm
L	Işıtma	$\text{erg s}^{-1}$
$\tau$	Çekim kararım işareti	
F	Bolometrik akı	$\text{erg cm}^{-2} \text{s}^{-1}$
$\sigma$	Stefan-Boltzmann sabiti	$\text{erg K}^{-4} \text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$
$\beta$	Çekim kararım üssü	
$\tau_e$	Optik derinlik	
$\alpha$	Karışım uzunluğu parametresi	
$v_T$	Gürültü hızı	$\text{cm s}^{-1}$
$\gamma$	Adyabatik sabit	
$f$	Doldurma parametresi	
K	Eddington radyasyon basıncı	$\text{dyn cm}^{-2}$
H	Akı	$\text{erg cm}^{-2} \text{s}^{-1}$

## ŞEKİL LİSTESİ

<b>Şekil Numarası</b>	<b>Adı</b>	<b>Sayfa</b>
Şekil 2.1	SCH ve GOB integrasyonlarının kombinasyonu	12
Şekil 3.1	Sıcaklığın optik derinlik ile değişimi	17
Şekil 3.2	Eddington yaklaşımı ile GOB sonuçlarının karşılaştırılması	18
Şekil 3.3	$\alpha$ değerlerinin etkisinin gösterimi	19
Şekil 3.4	OO Aql 'nın ışık eğrileri	23
Şekil 3.5	Yakın çift yıldız sistemlerindeki yıldızların deneysel çekim kararması	24
Şekil 3.6	Iglesias ve Rogers (1996) donukluk değerlerinin sıcaklıkla değişimi	28
Şekil 3.7	Lagrange interpolasyon sonuçlarından örnek	29
Şekil 3.8	Donukluk tablolarının üç boyutlu gösterimi	32
Şekil 4.1	Nükleer enerji oluşum oranlarının sıcaklığa bağlı olarak değişimi	47
Şekil 4.2	Paczynski koduna göre U Oph 'nin bileşenlerinin yarıçap evrimleri	49



## TABLO LİSTESİ

<b>Şekil</b>		
<b>Numarası</b>	<b>Adı</b>	<b>Sayfa</b>
Tablo 3.1	Çekim kararması üssü ( $\beta$ ) değerleri	21
Tablo 3.2	GOB ve SCH sonuçları	33
Tablo 4.1	Nükleer enerji oluşum oranları	42
Tablo 4.1-a	Hidrojen yanması	42
Tablo 4.1-b	Helyumun azotla etkileşimi	43
Tablo 4.1-c	Üçlü $\alpha$ süreci	43
Tablo 4.1-d	Helyumun karbonla etkileşimi	44
Tablo 4.1-e	Karbon yanması	44
Tablo 4.1-f	Oksijen yanması	45
Tablo 4.2	U Oph sistemine ait gözlem sonuçları	48

## ÖNSÖZ

Bu çalışmada emeği geçen danışman hocam Prof. Dr. Edwin BUDDING 'e teşekkür gönöl borcumdur. Bu tez çalışması kapsamında kullanılan GOB, SCH ve HB8 programlarının kullanımında yurtdışından yardımlarını esirgemeyen, Kuzey Arizona Devlet Üniversitesi'nde alışan Dr. A. ODELL'e teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım. Bu tez çalışmasında desteklerini esirgemeyen Prof. Dr. Mehmet Emin ÖZEL'e ve Prof. Dr. Osman DEMİRCAN'a teşekkür ederim. Ayrıca yardımlarından dolayı Doç. Dr. Ersen METE ve Doç.Dr. Levent SOLMAZ'a ne kadar teşekkür etsem azdır. Katkılarından dolayı Y.Doç. Dr. Oktay YILMAZ 'a da teşekkür ederim.

Tüm çalışmalarım boyunca beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan Canım kızlarım Damla ve Gözde'ye ve desteklerinden güç aldığım eşim Murat İNLEK'e teşekkür gönöl borcumdur.

alışmalar süresince birçok şeyi paylaştığım sevgili arkadaşım Aysun BÖKE'ye çok teşekkür ederim.

Balıkesir, 2008

Göluy İNLEK

## 1. GİRİŞ

Nükleer Fizik, yıldızların evrimi ve yapısını belirleyen temel olayların zincirindeki en son boş halkayı doldurmaktadır. Yıldızların içindeki nükleer süreçler, parlak cisim olan yıldızların uzun süren hayatlarını sürdürebilmeleri için gerekli olan çok büyük enerjiyi sağlarlar. Bu nükleer süreçler yıldızın evrimleşmesine neden olan dönüşümlerin bir yoludur. Tıpkı Güneş gibi, diğer yıldızlarda da akıyı besleyen enerji kaynakları; nükleer, termal ve gravitasyonel etkilerdir. Fakat yıldızların hayatlarını sürdürebilmeleri için gerekli olan temel enerji nükleer reaksiyonlarla sağlanmaktadır.

Yıldızların merkezinde oluşan enerji, çeşitli yollarla taşınır. Bunlar: enerjinin, fotonlarla ya da ışımla taşındığı radyatif transfer, yıldızlardaki sıcak gazın yukarı doğru yükselip, soğuk gazın aşağı doğru inmesiyle gerçekleşen bir enerji taşınımı olan konvektif transfer ve ısı iletimidir. Isı iletimi; yüksek hızlı parçacıkların, yüksek sıcaklık bölgesinden düşük sıcaklık bölgesine doğru akmaları, aynı zamanda da daha düşük hızlı parçacıkların, düşük sıcaklık bölgesinden yüksek sıcaklık bölgesine doğru akmaları ile gerçekleşir. Düşük hızlı parçacıklar, yüksek hızlı parçacıklara göre daha az enerji taşıdıkları için yüksek sıcaklıklı ortandan, düşük sıcaklıklı ortama doğru net bir enerji taşınımı vardır. Radyatif transferde fotonların ortalama serbest yollarının az olması, onların çok fazla etkileşim yaptığı anlamına gelir. Bu etkileşimler, yıldızlarda donukluğa neden olur [8]. Donukluğa neden olan fiziksel süreçler:

- a) Bağlı – bağlı geçişler : Bir atom veya iyonun bir fotonu soğurmasıdır. Bağlı bir elektronun, bağlı durumdaki daha yüksek enerji seviyesine geçmesidir.
- b) Bağlı – serbest geçişler : Fotoiyonizasyon olarak da isimlendirilebilir. Bağlı bir elektronun foton soğurup serbest hale geçmesidir.

c) Serbest – serbest geçişler : Serbest olan bir elektronun, bir foton soğurarak yine serbest şekilde daha enerjik hale geçmesidir.

d) Elektron saçılması : Fotonların serbest elektronlar tarafından saçılmasıdır.

Bu süreçler kullanılarak, farklı kimyasal karışımlar için yıldız modellerinde kullanılmak üzere donukluk tabloları hazırlanmaktadır. Farklı donukluk tabloları kullanılarak, donuklukların yıldız yapısı üzerindeki etkileri incelenebilmektedir.

Uzun zamandan beri yıldızların yapısı için matematiksel model oluşturmak astrofiziğin klasik problemlerinden biri olmuştur. Yirminci yüzyılın başlarında, bu konu üzerine Eddington [9], Chandrasekhar [10] ve Schwarzschild [8] tarafından yazılan kitaplar en iyileridir. Ellilerde ve altmışlarda ilk üretilen bilgisayarların yaygınlaşmasından önce bu konu iyi geliştirilmiş ve teorik astrofizik için bu bilgisayarları kullanmak iyi bir başlangıç olmuştur.

Loudon ve Budding [11], Paczynski ve Ziolkowski [12,13] yaklaşımlarına dayanarak bir yıldızın yapısı için bir model tasarlamışlar ve böyle hesapların küçük bilgisayarlarda nasıl uygulanacağını tanımlamışlardır. Paczynski 'nin üç kodu bulunmaktadır. Bunlar: GOB, SCH ve HB8 programlarıdır [1].

Konvektif bir atmosfer için çekim kararmasının doğası hem gözlemsel olarak hem de teorik olarak açık değildir. Bu çalışma kapsamında GOB programı kullanılarak konvektif bir atmosfer için çekim kararmanın üssünün hesaplanması amaçlanmaktadır.

Yıldızlarda donuklukların yapı üzerine etkisi hem teorik hem de gözlemsel olarak araştırılmaktadır. Paczynski Kodlarını kullanarak, donuklukların yıldız yapısı üzerine etkisinin incelenmesi bu çalışmanın temel amaçlarından birisidir.

Çoklu, genç yıldız sistemi U Oph'nin özellikleri tam olarak bilinmemektedir. U Oph' ye ait gözlemsel sonuçlara dayanarak ve evrim modelleri oluşturularak sistemin yaşını tahmin etmek bu çalışmanın amaçları arasındadır.

Bu çalışmada dış sınır şartlarını oluşturmak için GOB, sıfır yaş ana kol yıldızları için SCH ve yıldız evrimi için HB8 programı kullanılmıştır. SCH programı, GOB'un sonuçlarını kullanır, HB8 ise hem GOB hem de SCH programlarının sonuçlarını ve nükleer enerji oluşum oranlarını kullanır. GOB programı kullanılarak, küçük kütleli yıldızların zarflarındaki konveksiyon rolü üzerine çalışmalar yapılmıştır. Konveksiyon bölgesindeki çekim kararırma üssü,  $0.4 - 1.1 M_{\odot}$  kütle aralığındaki yıldızlar için hesaplanmış olup Lucy [2] 'nin sonuçlarına benzer sonuçlar elde edilmiştir.

Yıldızların dış zarfları ile ilgilenen GOB programı ve yıldızların kütesinin büyük bir kısmı ile ilgilenen ve nükleer enerji oluşum oranlarını kullanarak çalışan SCH modelleme programı kullanılarak, donuklukların yıldız yapısı üzerine etkileri incelenmiştir.

Gözlemsel kontroller için, HB8 programı kullanılmıştır. Bu program, zamana göre yıldızın hidrojen ve helyum bileşimini değiştirerek yıldız evrimi oluşturmaktadır. Genç yıldız sistemi olan U Oph 'nin gözlemsel kütle ve yarıçapları bu programda kullanılarak, sistemin bileşenlerine ait yarıçap evrimleri elde edilmiştir. Bu evrimlerden genç yıldız sisteminin yaşı tahmin edilmiştir.

Teorik hesaplamalar temel alınarak yapılan bu çalışmada kullanılan programların işleyişinin ayrıntılı açıklamaları Yöntem bölümünde verilmiştir. Bu tez çalışması kapsamında yayınlanan makale ve bildiriler ekte sunulmuştur.

## 2. YÖNTEM

### 2.1 Genel Yapı Problemi

Temel olarak normal yıldızların yapısı problemi aşağıda verilen dört tipik diferansiyel denklemin çözümü ile ifade edilebilir:

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi\rho r^2 \quad (2.1)$$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r\rho}{r^2} \quad (2.2)$$

$$\frac{dL_r}{dr} = 4\pi\varepsilon r^2 \quad (2.3)$$

$$\frac{dT^4}{dr} = -\frac{\kappa\rho L_r}{4\pi\varepsilon r^2} \quad (2.4)$$

Bu denklemlerde semboller için geleneksel anlamları kullanılmıştır [8]. Bu diferansiyel denklemler, toplam basınç  $P$ , enerji oluşum oranı  $\varepsilon$  ve donukluk  $\kappa$  terimleri için verilen,

$$P = P(\rho, T), \quad \varepsilon = \varepsilon(\rho, T) \quad \text{ve} \quad \kappa = \kappa(\rho, T) \quad (2.5)$$

bağıntılarıyla tamamlanır. Denklemlerin programda analitik çözümü yoktur, sayısal integrasyonla çözülmek zorundadır. Bu durumda çözümleri saptamak için sınır şartlarının kurulması gerekmektedir.

Yukarıdaki formülasyonda temel bağımsız değişken,  $0 \leq r \leq R$  aralığında değişen yarıçap  $r$  'dir. Burada  $R$ , bütün yıldızın belirgin bir dış yarıçapı olarak alınır. Böylece  $r = 0$  ve  $r = R$  olmak üzere iki fiziksel sınır vardır ve her iki sınırda mutlak şartlar belirlenebilir. Esas problem bu yüzden iki nokta sınır değeri şeklindedir. Bu durumda her bir sınırda bir çift şart kurulur. İç sınırda (yıldızın merkezinde) merkez sıcaklığı  $T_c$  ve merkez yoğunluğu  $\rho_c$  bilinmezken,  $r = 0$  için  $M_r = 0$  ve  $L_r = 0$  alınır. Dış sınırda ( $r = R$  'de),  $M_R$  ve  $L_R$  bilinmezken  $\rho = 0$  ve  $T = 0$  alınır. Denklem (2.1), (2.2), (2.3) ve (2.4) 'ün çözümü aslında bu dört bilinmeyen belirlenmesidir. Sonuç olarak bütün değişkenler  $M_r$ ,  $\rho$ ,  $L_r$  ve  $T$ ,  $r$ 'nin fonksiyonu olarak bulunur. Bu durum Schwarzschild 'ın kitabında [8] verildiği gibi klasik bir formüleştirmedir. Bununla birlikte birkaç şey bu çok basit tanımlamayla çok uygun değildir [11]:

1.)  $T$  dış sınırda sıfır değildir. Çok anormal büyük iç değerlerle karşılaştırıldığı halde çok küçüktür. Bununla birlikte bu yıldızın görünen ve en iyi bilinen kısmıdır. Bu yüzden makul bir şekilde dış sıcaklık, verilen bir radyatif akı, bileşim ve kütle çekimi ile belirlenebilen bir model atmosferin dış sınır sıcaklığı  $T_0$  olarak alınabilir.

2.) Normal olarak verilen bir  $R$  büyüklüğünde bir yıldız düşünülmez. Ancak verilen toplam kütle  $M$  ile düşünülür. Başka bir deyişle yapının dört diferansiyel denklemi pratik uygulama için  $M_r$  bağımsız değişken yapılarak yeniden yazılabilir. Böylece dış sınır verilen  $M$ ,  $\rho = \rho_0$  ve  $T = T_0$  (atmosferin en üstü) için yarıçap  $R_M$  ve ışıma  $L_M$  'nin bilinmediği bir hale gelir.

3.) Bazı fiziksel değişkenleri, sayısal olarak davranışları genel olarak düzgün olan kendi logaritmalarıyla değiştirmek daha elverişli olur.

### 2.1.1 İki Nokta Sınır Değeri Problemleri

Genellikle  $x$ 'in bağımsız değişken olduğu iki diferansiyel denklemi içeren iki nokta sınır değeri probleminde bir denklem, 1 noktasından başlanarak integre edilebilir:

$$x = x_1; y = 0, z_{r1} = z_1, \quad (2.6)$$

Burada  $z_{r1}$ , 1 noktasında  $z$  'nin bilinmeyen başlangıç deneme değeridir; 2 noktasından hareketle diğer yol,

$$x = x_2; y_{r1} = y_2, z = 0 \quad (2.7)$$

olur. Burada  $y_{r1}$ , 2 noktasında  $y$  'nin başlangıç deneme değeridir.

Sayısal bir dörtlü için, diferansiyel denklemler sonlu, küçük, lineer fark denklemlerinin takımıyla yer değiştirilir ve  $(x_1, y_1, z_1)$  başlangıç sınır tabakasından başlanarak bir sonrakine, daha sonrakine tabaka tabaka geçilir.

Bazı iç eş noktalarda dışa doğru olan çözüm 1, içe doğru olan çözüm 2 'deki gibi aynı  $y_m$  ve  $z_m$  değerlerini vermez. Bu yüzden bu eş noktada  $(y_{m1} - y_{m2})$ ,  $(z_{m1} - z_{m2})$  farkları alınabilir ve onları en sonraki  $y$  ve  $z$  değerlerinin her biri için uygun düzeltmelerle ayırarak ve yeni başlangıç değerleri  $z_{r2}$  ve  $y_{r2}$  'e ulaşmak için eş noktadaki gözden geçirilen değerlerle başlayıp fark denklem takımlarında zıt yönde ilerlenir. Böylece tüm seri tekrarlanabilir. Yakınsak bir problemde  $z_{r2}$  ve  $y_{r2}$  'den başlayan dışa doğru ve içe doğru olan yeni denemeler iç eş noktada oldukça iyi bir uyumla sonuçlanır. Dörtlü  $x$ ,  $y$  ve  $z$  dizilerinde, kabul edilebilir düzgün bir akış olana kadar tekrarlayarak ilerler. Pratik uygulamalarda uygun tabaka



büyüklikleri, her bir tabakadaki değişkenlerin örnek değerleri tespit edilirken ve gerekli kavuşma kriterleri belirlenirken dikkat gerektirir. Ardışık işleyiş, Schwarzschild 'ın kitabında verilmiştir [8] ve “sıfır yaş” yıldız modelleri için geçerlidir. Dar nükleer yanma bölgesi geliştiren yıldızlar bu yöntemle iyi uyuşmazlar.

### 2.1.2 Dış Sınır

Dış sınır düzenlemelerini oluşturan GOB programı için verilen bir  $M$  değeri için ısıtma  $L$  ve yarıçap  $R$  'nin tahmin edilmesi gerekiyor. Bu iki büyüklükten üçüncü büyüklük olan etkin sıcaklık  $T_e$ , aşağıda verilen ifadeden belirlenir [8].

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_e^4 \quad (2.8)$$

$T_e$  ve  $L$  için verilen değerler, yapının bu kısmındaki  $R$  değerini verecektir. Aslında  $T_e$  ve  $L$ , HR (Herzsprung Russell) diyagramından daha iyi tahmin edilir. Standart model atmosfer için  $T_e$  ve en dış tabaka sıcaklığı  $T_0$  arasında bir bağıntı vardır.

Eddington 'un klasik model atmosferi için  $T_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/4} T_e$  'dir [14] . Pratikte  $T_0$  'ın

başlangıç değeri bilinmez. Sadece onun yaklaşık aralığı bilinir. Fakat bu dış sıcaklığa ulaşacak olan akıyı veren birkaç model olmalıdır. Loudon ve Budding [11],  $L$ ,  $T_0$  düzleminde dört köşe noktası için yıldız boyunca olan integrasyonun

doğru sonuçlarını içeren bir model atmosfer seti oluşturmuşlardır. GOB integrasyonları yıldızın kütesinin % 10 'una ulaşana kadar ilerler ( $M \geq M_R \geq M_B$ ).

$L = L_R = sbt$  olduğu durumda sadece üç diferansiyel denklem içerdiği için bu program oldukça hızlı çalışır. Bu program alt sınırında, verilen  $\rho_0$ ,  $T_0$  ve  $R$  değerleri için  $\rho_B$ ,  $T_B$ ,  $r_B$  değerlerinin takımını vermektedir.

Dört  $L, R$  köşe değerleri içinde lineer interpolasyon yapmak mümkündür. Böylece herhangi bir  $L, R$  için  $L_1-L_2, R_1-R_2$  aralığında lineer interpolasyonla atmosferin taban değerleri  $\rho_B(L, R), T_B(L, R), r_B(L, R)$  elde edilebilir. Böylece,

$$\rho_B(L, R) = \rho_B(L_1, R_1) + \frac{L-L_1}{L_2-L_1} [\rho_B(L_2, R_1) - (\rho_B(L_1, R_1))] + \frac{R-R_1}{R_2-R_1} [\rho_B(L_1, R_2) - \rho_B(L_1, R_1)] \quad (2.9)$$

olur [11].

### 2.1.3 İç Sınır

Dışa doğru olan dörtlü, tahmin edilen  $T_c$  ve  $\rho_c$  değerlerinden hareket eder ve  $M = M_B$  'de  $L_{0f}, r_{0f}, T_{0f}$  ve  $\rho_{0f}$  değerlerini bulur.  $R_1$  ile  $R_2$  aralığında olan GOB'un dış yarıçapı  $R(=R_{0f})$  ile ilgili olarak  $L_{0f}$  'nin  $L_1$  den  $L_2$  'ye kadar olan aralıkta olduğu ve  $r_{0f}$  'nin bu  $L$  için olan  $r_B$  'nin bazı değerleri ile uyumlu olduğu varsayılır. Başlangıç tahminlerinden elde edilen  $T_{0f}$  ve  $\rho_{0f}$  terk edilir. Bu değerlerin denklem (2.9) 'da verilen  $\rho_B(L_{0f}, R_{0f}), T_B(L_{0f}, R_{0f})$  iç değerleri ile uyumlu olmaları gerekli değildir. Böylece  $\rho_{0f} - \rho_B$  ve  $T_{0f} - T_B$  farkları kullanılarak  $T_c$  ve  $\rho_c$  'nin başlangıç tahminlerini geliştirmek için fark denklemlerinden geriye doğru ilerlenebilir.  $L$  ve  $R$  'nin yer değiştirmesi sonucunda  $\rho_B$  ve  $T_B$  'nin pertürbasyonu denklem (2.9) 'dan elde edilebilir. Böylece  $\rho, T$  ayrılıkları dış sınır değerlerini geliştirmekte kullanılabilir. Bu şekilde  $L_{0f}$  ve  $R_{0f}$  'nin GOB 'un örnek alanından dışarıya çıkmadığı, kararlı olması gereken başarılı bir yaklaşımlar yöntemi mümkün olacaktır.

Ayarlanan nokta atmosfer tabakasının tabanı olmak zorunda değildir.  $M_r = M_B$  tabakası için  $L_B, r_B, \rho_B$  ve  $T_B$  'nin kombinasyonlarından bazıları seçilebilir ve dört değişken için başlangıç integrasyonu, içteki tipik denk nokta  $M_f$  'ye uygulanır. Bu çalışmada  $M_f = 0.3M$  olarak alınmıştır.  $M_f$  'de içe doğru ve dışa doğru olan integrasyonlar arasındaki farklardan, yeni dış değer  $R'$ , lineer interpolasyonla elde edilebilir diye başlangıç değerleri  $L'_B, r'_B, \rho'_B$  ve  $T'_B$  olarak pertürbe edilir.  $L'_B, L$  için daha yeni bir dış değerdir ve dış değer  $R'$  lineer interpolasyonla elde edilebilir diye  $r'_B$  ile birlikte dört köşe noktanın çevresinde uzanmaktadır.

Düzeltilmelerin dış sınır  $M = M_B$  'den içe doğru olan yeni bir iterasyona uygulanabilmesi için  $\rho'_B$  ve  $T'_B$  'nün GOB ürünleri olan  $\rho_B(L; R')$  ve  $T_B(L; R')$  ile tam olarak benzemesi gerekmediği düşünülür.

## 2.2 Zarf Model Programları

Yıldızların yapılarını teorik olarak hesaplamak için üç genel-alan programı JILA 'da, J.C.Cox 'un girdileri baz alınarak Paczynski tarafından oluşturulmuştur [1] (Paczynski Kodu). Bu programlar Normal Ana kol tipi yıldızların modellerini ve onların evrimlerini çalışmak için çeşitli gruplar tarafından kullanılmaktadır. Yaklaşım iki nokta sınır değeri problemi [4] olarak yapı denklemlerinin oluşturulmasına dayanır [8]. Paczynski Kodu'nun ilk kısmı olan GOB programı (ki bu program dış sınır şartlarını oluşturur) yıldızın zarf bölgesinin sayısal integrasyonu ile ilgilenir. Bu program hidrostatik denge ve ideal gaz kanununun olduğunu ve enerji transferinin radyasyonla ya da konveksiyonla olduğunu varsayarak yıldızların grey atmosferini oluşturur. Hidrojen molekülünün çözünmesi ve hidrojen ve helyumun iyonlaşması hesaplanır. Yıldızın kütlesi, ışıması  $\log L/L_\odot$  etkin sıcaklığı  $T_e$  ve karışım uzunluğu programa girdi olarak verilir. Normal yıldız atmosfer

modellerinde üst sıcaklık  $T_0$ , etkin sıcaklık  $T_e$ 'ye  $T_0 = f_T T_e$  şeklinde bağlı olarak alınır. Buradaki  $f_T$ , kullanıcı tarafından belirlenir. Bu çalışmada GOB programında  $T_0 = 0.727T_e$  olarak alınmaktadır.

Paczynski Kodu 'nun ikinci programı SCH programıdır. SCH programı çekirdekte hidrojenin helyuma dönüştüğü nükleer reaksiyonların başladığı homojen bileşimle sıfır yaş ana kol modelini oluşturur. Dört sınır şartının verilmesi gerekmektedir. Bunlar:  $\log L/L_\odot$ ,  $\log T_e$ ,  $\log T_c$  ve  $\log \rho_c$  'dir. Program çekirdekteki uygun noktadan başlayıp dışa doğru olan sayısal integrasyonda girilen başlangıç değerlerini kullanır.

Üçüncü program HB8, GOB ve SCH 'ın çıktılarını kullanır. Bölgesel nükleer reaksiyon oranlarına ve zaman adımına göre hidrojen ve helyumun bileşimini değiştirir ve evrimleşmiş bir yıldız modeli oluşturur. Bu süreç kullanıcının seçimine bağlı olarak pek çok zaman adımı için tekrarlanır ve bitirilir.

### 2.3 Model Oluşturulmasında GOB ve SCH Programlarının Kullanılması

Bir boyutlu uzayda basit bir yıldız modelinin oluşturulması genellikle dört diferansiyel denklemden oluşan sayısal dördüğü içeren iki nokta sınır değeri problemi şeklindedir [8]. Sınır şartlarına bakıldığında iç sınır daha basittir. Bağımsız değişken iç kütle  $M_r$  normal olarak yarıçap  $r$  ve ısıtma  $L_r$  ile beraber burada sıfırdır. Merkezi sıcaklık ve merkezi yoğunluk  $T_c$  ve  $\rho_c$  'nin sınır değerleri başlangıçta tahmini olarak atanır. Böylece dördü dışa doğru olan integrasyonun dış sınırdan içe doğru olan integrasyonla karşılaşacağı iç noktaya doğru ilerleyebilir.

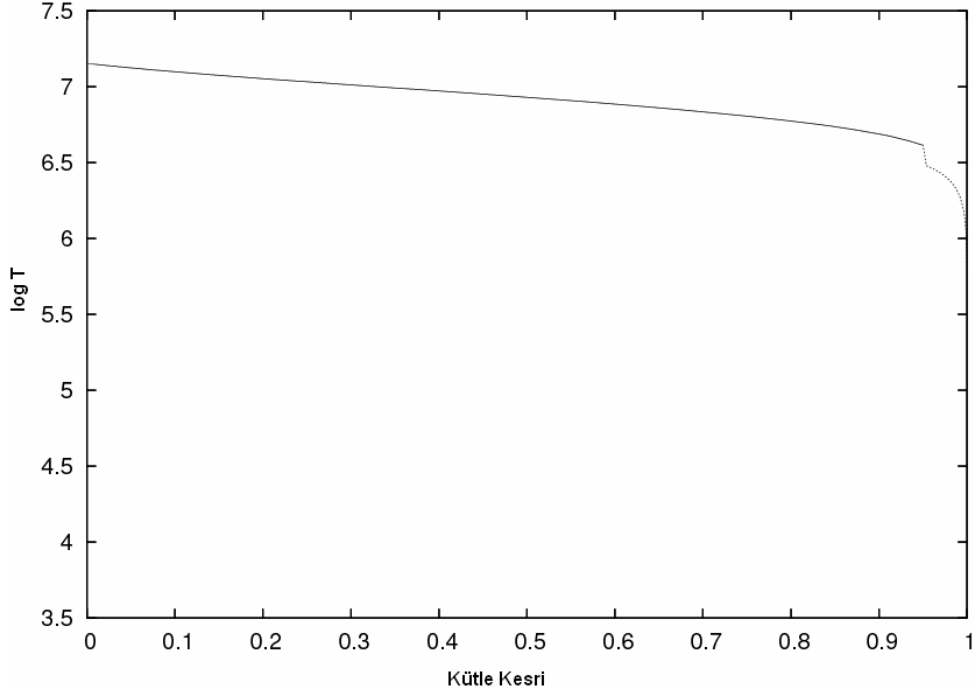
Dış sınır bazı nedenlerden dolayı daha karışıktır. Bunlardan biri modelleme probleminin çözümündeki ana amaç olan dördü tarafından belirlenen iki dış sınır

değerleriyle gözlemsel sonuçların ilişkilendirilmesidir. Normalde direkt olarak ölçümlerle bulunabilen iki nicelik yüzey ışıması  $L_0$  ve etkin sıcaklık  $T_e$  'dir.

GOB (dış sınır oluşumları) programı,  $L_0$ ,  $T_0$  düzleminde dört köşe noktası için model atmosferinin bir takımını oluşturur. GOB programının içe doğru olan integrasyonları yıldızın toplam kütesinin  $0.95 \times M_R$  'lik kısmından başlayıp kullanıcı tarafından kurulan  $M_I = M_B$  atmosfer tabakasının tabanına doğru ilerlemektedir. Uygulamada eğer sıcaklık çok yüksek olursa veya integrasyon adımlarının sayısı kullanışsız olacak şekilde çok fazla ise bazı kontrol parametreleri ortaya çıkar. GOB programı alt sınırdaki  $L_0 = L_B$  'nin geçerli tutulmasıyla  $\rho_B$ ,  $T_B$  ve  $R_B$  değerlerinin bir takımını oluşturur. Verilen bu dört köşe değerleri ile atmosfer değerlerinin taban değerlerini bulmak için ara noktalar için denklem (2.9) 'a göre lineer interpolasyon yapmak mümkündür. İçeriye doğru integrasyonlarla çalışan GOB programının sonucu olarak elde edilen dört taban değer, SCH programındaki iç integrasyonlara girdi olarak verilmektedir. Merkezden dışarıya doğru integrasyonlar,  $0.95 M_R$  seviyesinden içeriye doğru integrasyonlarla,  $M_I = M_R/2$  olarak seçilen sabit bir iç noktada karşılaştırılır. Değişkenlerin dördünün bu noktadaki ortalaması geriye doğru olan integrasyonlar için yeni başlangıç değerleri olarak alınır ve böylece bir iterasyon süreci başlamış olur.

Merkezden dışarıya doğru ikinci kez çalıştırılan SCH programında, yeni  $T_c$  ve  $\rho_c$  merkezi değerlerini tahmin etmek kolay olmaktadır. Bununla birlikte SCH akışının (çalışmasının) dış sınırında dört değişken için yeni değerler olacaktır. Fakat sadece  $L_0$  ve  $R$  yüzey çifti bağımsız olarak bu iki nokta probleminin integrasyonları ile düzeltilir. Yeni yüzey ışıması  $L_0$  dış tabakalarda değişim göstermediği için direkt olarak elde edilir.  $R$  'nin yeni yüzey değeri yeni  $L_0$  ve  $R_{B1}$  ve  $R_{B2}$  bilinen değerleri için orjinal GOB yüzey değerleri olan  $R_1$  ve  $R_2$  kullanılarak elde edilebilir. Bu  $R_{B1,2}$  değerleri dışa doğru olan integrasyonlardan elde edilen yeni  $R_B$  değeri ile karşılaştırılır.  $R$  'nin düzeltilmiş yüzey değeri interpolate edilebilir.  $L_0$  ve  $R$  'nin yeni yüzey değerlerinin olması denklem (2.9) 'dan elde edilen  $\rho$  ve  $T$  'nin başlangıç değerleri ile taban değerlerinin yeni bir takımını oluşturmaya yol açar. İçerideki

karşılaşma noktasında değişkenlerin dört çifti arasındaki farklılıklar doğruluk kontrol limitinin altında ise program sona ermektedir. Şekil 2.1, SCH ve GOB integrasyonları arasındaki uyumu göstermektedir.



Şekil 2.1 Bir Güneş kütleli sıfır-yaş modeli için kütle kesrine bağlı sıcaklık değişimlerinin SCH (—) ve GOB (.....) integrasyonlarının kombinasyonu.

Yıldızın merkezinden dışarıya doğru olan SCH integrasyonlarındaki sıcaklığın, artan kütle kesriyle azaldığı ve içe doğru olan GOB integrasyonlarındaki sıcaklığın giderek arttığı Şekil 2.1'den görülmektedir.

## 2.4 Lagrange İnterpolasyon Metodu

İnterpolasyon kısaca verilen değerlerden ara değerleri bulma şeklinde tanımlanır. Pek çok interpolasyon metodu vardır. Lagrange interpolasyon metodu bunlardan sadece bir tanesidir. Lagrange interpolasyon formülü, N tane noktadan geçen ve N-1 dereceli polinomu tanımlayan, bu polinom ile istenilen ara değeri hesaplayan bir teorem şeklinde tanımlanır.

Lagrange interpolasyon formülü, dört noktadan geçen üçüncü dereceden bir polinom olarak yazılırsa;

$$P_N(X) = \sum_{k=0}^{N-1} L_{N,k}(X) \cdot Y_k \quad (2.10)$$

(2.10) denklemini ile verilir. Lagrange katsayıları aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$L_{N,k}(X) = \frac{(X - X_0) \dots (X - X_{k-1}) \cdot (X - X_{k+1}) \dots (X - X_N)}{(X_k - X_0) \dots (X_k - X_{k-1}) \cdot (X_k - X_{k+1}) \dots (X_k - X_N)} \quad (2.11)$$

$$P(X) = L_0(X) \cdot Y_0 + L_1(X) \cdot Y_1 + L_2(X) \cdot Y_2 + L_3(X) \cdot Y_3 \quad (2.12)$$

Burada  $L_0, L_1, L_2, L_3$  Lagrange katsayılarıdır. Bu katsayılar,

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} \quad (2.13)$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} \quad (2.14)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \quad (2.15)$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \quad (2.16)$$

şeklindedir [4].



### 3. GOB VE SCH PROGRAMLARININ UYGULAMALARI

#### 3.1 Çekim Kararması Hesaplamaları

Çekim kararmasının doğası hem teorik hem de gözlemsel olarak çok açık değildir, fakat biçimsiz yıldızların özellikle de degen çift yıldızların ışık eğrilerinin analizinde önemli bir etkisi vardır. Etkinin adı bazen ‘kararma’, bazen ‘parlama’ olarak bu belirsizliğe yansır. Radyatif bir atmosfer için klasik teori, bölgesel akının, biçimsiz bir yıldız yüzeyinde bölgesel çekim ile orantılı olarak arttığını söyler. Konular ayrımı ile Von Zeipel tarafından açıklanmıştır [15]. Konvektif bir atmosfer için etkinin doğası açık değildir.

Çekim kararma katsayıları bir yıldızın dış zarfının klasik teorisinden gelir. Eğer bu tabakalardaki akı sadece sıcaklık eğimine bağlı olursa ve sıcaklık eş potansiyel yüzeyleri boyunca sabit olursa, akı bu yüzeylerin aralıkları ile ters orantılı olacaktır. Fakat çekim kendi kendine ters bir orantıya sahiptir. Böylece akının çekimle orantılı olduğu sonucuna varılır [15]. Pratikte bu yaklaşımın en azından zarflarında radyatif nakil ile taşınan akının baskın olduğu yıldızlar için gözlemler ile mantıklı bir uyum verdiği görülür [16]. Gözlemsel analizler için  $F$  bolometrik akı,  $g$  çekim ve  $\tau$  çekim kararma işareti olmak üzere yaygın olarak  $F a g^\tau$  şeklinde yazılır. Yüzeyin altındaki tabakalarda enerji nakli sadece radyatif olursa von Zeipel kanununa göre  $\tau$  ’nun bolometrik değeri  $\tau = 1$  olarak alınır.

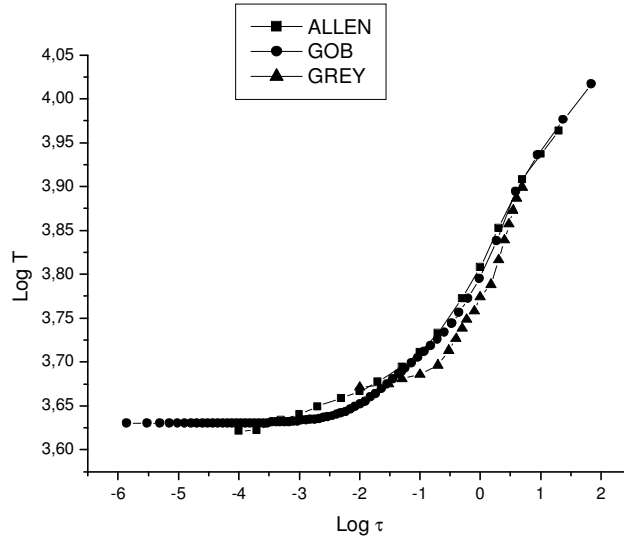
Lucy , dış tabakalarda içinde enerji naklinin başlıca yolunun konveksiyon olduğu bir zarfta  $\tau$  için farklı bir değer bulmuştur [2]. Lucy, Baker ’ın atmosferik modellerini [17] kullanarak deneysel olarak  $\tau = 0.32$  bulmuştur. Lucy bölgesel

sıcaklık eğiminin ilk olarak süper-adyabatik olduğu derinlik için konvektif zarf modellerinin verilerini kullanmıştır. Bu noktada ısı akısını tanımlamak için etkin sıcaklık  $T_e$  'nin kullanılması gerekmektedir.  $T_e$  'nin  $F = \sigma T_e^4$  ile tanımlanmasıyla Lucy 'nin yaptığı gibi  $T_e \propto g^\beta$  yazılabilir. Böylece  $\beta = \tau/4$  olur. Bu durumda enerji nakli tamamen radyatif olduğunda  $\beta=0.25$  olmalıdır. Bununla birlikte Lucy'e göre konvektif zarfları olan yıldızlar için  $\beta \approx 0.08$  'dir. Claret de evrim modellerini kullanarak bu konuyu incelemiştir [18]. Claret evrimleşen yıldızların yapısal hesaplamaları için 'üçgenler' metodunu geliştirerek çekim-kararma üssünü sunmuştur. Claret iki enerji nakli mekanizmasının arasında yumuşak bir geçişin olması gereken radyatif ve konvektif zarflar için sırasıyla  $\beta = 0.25$  ve  $\beta = 0.08$  sonuçlarına ulaşmıştır. Claret 'in buldukları, F5V spektral tipteki ışık eğrisi eğilimlerinin ani geçişi olmadığını bulan Kitamura ve Nakamura 'nın [19,20] çalışmalarıyla uyumlu görülmektedir. Tutulan çift yıldızlar için mevcut ışık eğrisi kalitesinin düzeyinde konveksiyonun yüzey ısı dağılımına veya iç yapıya etkilerini ayırt etmek mümkün değildir [21]. Aslında tutulan çift yıldızların ışık eğrileri, varyasyonlarının birleşen etkileri sayesinde benzer eliptik ışık eğrileri oluşturabilen parametrelerin sayısına bağlıdır [22]. Bunun için fotometri, teori için fark gözetken bir araç olarak anlaşılabilir. Bununla birlikte Takeda, çekim kararmasının etkisinin küçük olmadığını ortaya çıkarmıştır [23].

Çekim kararma üslerinin gözlemsel olarak belirlenmesi Eaton ve grubu ve Rafert ve Twigg tarafından sunulmuştur [24,25]. Eaton ve grubu üç farklı (CC Com, W UMa ve RT Lac için olmak üzere) belirlemeye dayanarak bir 'gözlemsel' konvektif çekim karartma üssü  $\beta = 0.054 \pm 0.02$  'yi önermişlerdir. Rafert ve Twigg A ve W-tipi W UMa tipi yıldızlar için ortalama bir  $\beta = 0.08$  değeri vermişlerdir. Rafert ve Twigg, Wilson ve Devinney [26] modellerini ışık eğrisi ayarlamalarında serbest bir parametre olan  $\beta$  ile kullanmışlardır. A- tipi W UMa sistemleri genellikle, düşük çekim kararma üssü beklenmeyen radyatif atmosferlerle tanımlanırlar. Kitamura ve Nakamura çekim kararma üssünü gözlemlerden analiz etmişlerdir. Onların sonuçlarında W UMa için  $\beta \sim 0.14- 0.46$  arasında değişir [19]. Öte yandan van Belle ve grubu A7IV-V tayf türü için  $\beta = 0.078^{+0.052}_{-0.059}$  bulmuşlardır

[27]. Gözlemsel verilerde  $\beta$  için açık bir belirsizlik olduğu için, Paczynski 'nin GOB programını kullanarak  $\beta$  'nın değerinin küçük kütleli yıldızların konveksiyon zarfları için tekrar araştırılmasına karar verilmiştir. Bu yöntem temel olarak Lucy'nin yöntemine benzemektedir.

İlk olarak GOB programını standart modeller ile karşılaştırmak için Allen 'in standart güneş fotosfer modeli [28] için olan verilerine karşı GOB programının sonuçları gözden geçirilerek ve bulunan sonuçlar aynı zamanda klasik teori olan Grey atmosferi paralel düzlem modeli [14] ile de Şekil 3.1 'deki gibi sıcaklığın optik derinlik ile değişimi çizilerek karşılaştırılmıştır. Buradaki optik derinlik  $\tau_e$ , bölgesel sıcaklığın  $T(\tau_e) = T_e$  olduğu derinliktir.

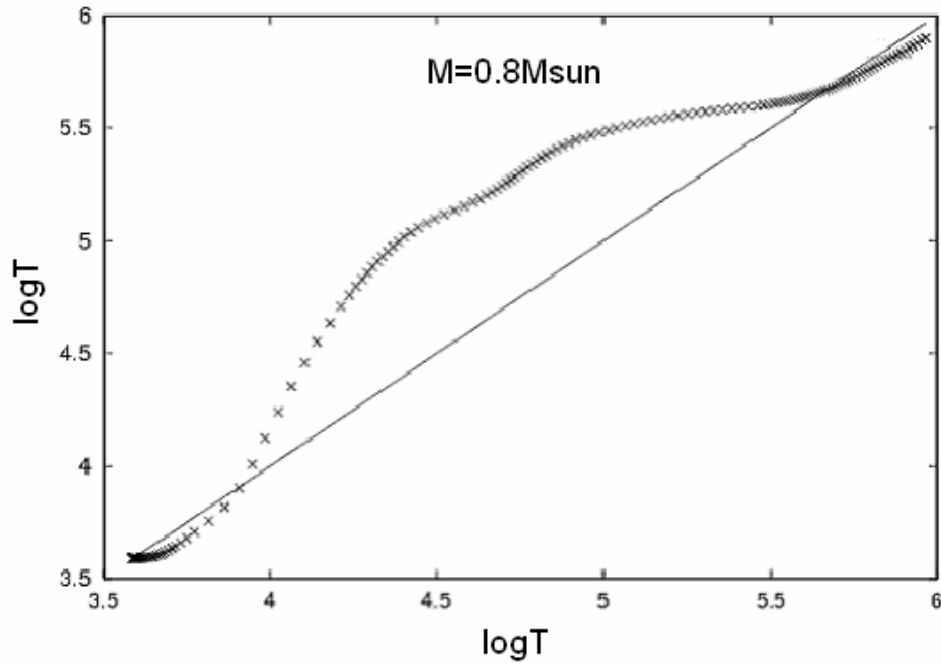


Şekil 3.1 Sıcaklığın optik derinlik ile değişimi (GOB, Allen ve Grey Modelleri).

GOB çıktıları, zarftaki kütle kesri  $M_r$ , sıcaklık  $T$ , optik derinlik  $\tau$ , gürültü hızı  $v_T$  ve enerji yoğunluğu  $E$  şeklindedir. Bu program sadece zarflara uygulanıp

nükleer enerji oluşum bölgesine uygulanmaz. İntegrali alınan akı sabit varsayılır (integrasyon bölgesinde  $L = \text{sabit}$ ). Bu da hesaplama zamanının bir tasarrufu şeklinde sonuçlanır. Bunun iyi sürdürülebilmesi için aynı zamanda integrasyon bölgesinin tabanındaki sıcaklık  $\sim 10^7$  K 'in altında olmalıdır. GOB aynı zamanda farklı integrasyon adımları ve karışım uzunluğu parametreleri ( $\alpha$ ) ile kolayca çalıştırılabilir.

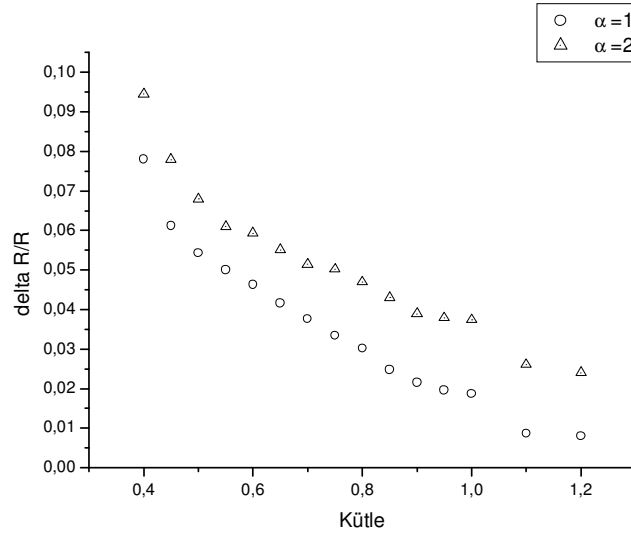
Düşük kütleli modeller için konveksiyon bölgesinin yeri saptanmıştır. Bu sonuç Şekil 3.2 'de gösterilmektedir.



Şekil 3.2 Radyatif bir model atmosfer için Eddington yaklaşımı ile GOB sonuçlarının karşılaştırılması.

Burada GOB integrasyonları için sıcaklığın optik derinlikle gösterimi sunulmaktadır. Radyatif bir atmosfer için Eddington yaklaşımını içeren modelin

bölgesel sıcaklık değişimi ile GOB sonuçları karşılaştırılmaktadır. İçindeki sıcaklığın hesaplanan bölgesel sıcaklıkta farklı olduğu, sadece radyatif sistemle uyduğu tümsek, açıkça konveksiyon bölgesinin yerini işaret etmektedir. Aynı zamanda konveksiyon bölgesi büyüklüğünün farklı zarf integrasyonları için azalan kütle ile nasıl arttığı Şekil 3.3 'den görülmektedir.



Şekil 3.3 Konveksiyon bölgesi büyüklüğü ( $\Delta R/R$ ) düşük kütleli yıldızlar için kütle azalmasıyla artar. Şekil aynı zamanda farklı karışım uzunluğu parametresi ( $\alpha$ ) değerlerinin etkisini göstermektedir.

### 3.1.1 $\beta$ 'nın Hesaplanması

İlk olarak verilen bir model kütle için zarf integrasyonunu adım adım çizelgeye döken program çıktısından konveksiyon bölgesinin alt tabakası tespit edilir. Bu tabakanın altında sıcaklık eğiminin Von Zeipel modeline [15] dönmesi gerektiği konusunda genel bir anlayış vardır. Lucy, adyabatik sabiti (bazen özel entropi olarak adlandırılır), konveksiyonun başladığı tabakada  $T_e$  ve  $g$  'ye bağlı olarak aşağıdaki gibi tanımlamaktadır [2] :

$$\log K = \log T - (\gamma - 1) \log \rho \quad (3.1)$$

Böylece  $\beta$  için mümkün sayısal değer Lucy 'nin verdiği gibi:

$$\beta = \left( \frac{\Delta \log K}{\Delta \log g} \right)_{T_e} / \left( \frac{\Delta \log K}{\Delta \log T_e} \right)_g \quad (3.2)$$

elde edilir [2]. Daha önce bahsedildiği gibi  $T_e$ , GOB 'da yerleştirilir ve  $g$  de  $g = GM / R^2$  'den bulunur. Verilen bir  $T_e$  'de (dolayısı ile  $g$  'de) ısıtmanın giriş değeri değiştirilerek  $R$  değiştirilir. Denklem (3.2) 'de  $T_e$  'nin sabit olduğu pay böylece direk olarak elde edilir. Çünkü verilen  $T_0$  ile  $T_e = 1.376T_0$  olarak tespit edilir. Konvektif tabakalardaki  $K$  değeri programın verdiği  $T$  ve  $\rho$  değerleri kullanılarak denklem (3.1) 'den basit olarak hesaplanır. Tabakadan tabakaya ya da modelden modele belirlenen bir tabakada  $\Delta \log K$  farkları kolayca takip edilir. Sadece giriş parametresi  $\log L$  'yi değiştirmek zarfın büyüklüğünü değiştirir ve dolayısıyla etkin çekimi değiştirir. Çünkü,

$$\log L = 4 \log T_0 + 2 \log R + \text{sabit} \quad (3.3)$$

dir.  $T_0$  sabit iken  $\log L$ ,  $s_1$  ile arttırıldığında, buna bağlı olarak  $\log R$  ise,  $\frac{1}{2} s_1$  ile arttırılmalıdır ve böylece  $\log g$ ,  $s_1$  ile azaltılmalıdır. Bu yüzden denklem (3.2) 'deki pay  $\Delta \log K / s_1$  'e eşit olur.  $\log T_0$ ,  $s_2$  ile arttırıldığında,  $\log L$  parametresi orjinal değerinde tutulursa, buna bağlı olarak  $\log R$  'de  $2s_2$  ile bir düşüş olacaktır. Böylece yukarıdaki işlem basitçe tekrarlanırsa payda kesrini bulmak için  $\log L$  'den çok  $\log T_0$  kullanılarak  $s_2$  adımı ile  $g$  'nin bir değişimi olacağı için doğru bir kısmi türev olmaz. Fakat,  $\log T$  'deki adım gibi  $\log L$ ,  $4s_2$  ile arttırılırsa  $\log R$  (böylece  $\log g$ ) değişmez. Bu şekilde uygun bir kısmi türev elde edilebilir. Elverişli ölçüm için bu

iki adımın eşit olması gerekiyor. Böylece  $4s_2 = s_1$  olur.  $\log L$  'deki artış,  $s_1$  muhafaza edilerek dolayısıyla  $\log T_0$  'ı,  $\frac{1}{4}s_1$  ile arttırılarak payda ikinci çalıştırmadan hesaplanır. Bu yolla GOB tipi bir program kullanılarak bölgesel  $\beta$  değerleri kontrol edilebilir. Hesaplamaların bir serisinde, diğer temel parametreler sabit tutularak kütle değiştirilmiştir.

Lucy,  $\beta$  'nın karışım uzunluğu parametresi ( $\alpha$ ) ile değişimini incelemiş ve bu parametreye bağlılık olmadığı sonucuna varmıştır. Bu çalışmada, Lucy 'nin bu sonucu GOB tipi bir program ile (GOAL) araştırılmıştır. Sonuçlar Tablo 3.1 'de verilmiştir.

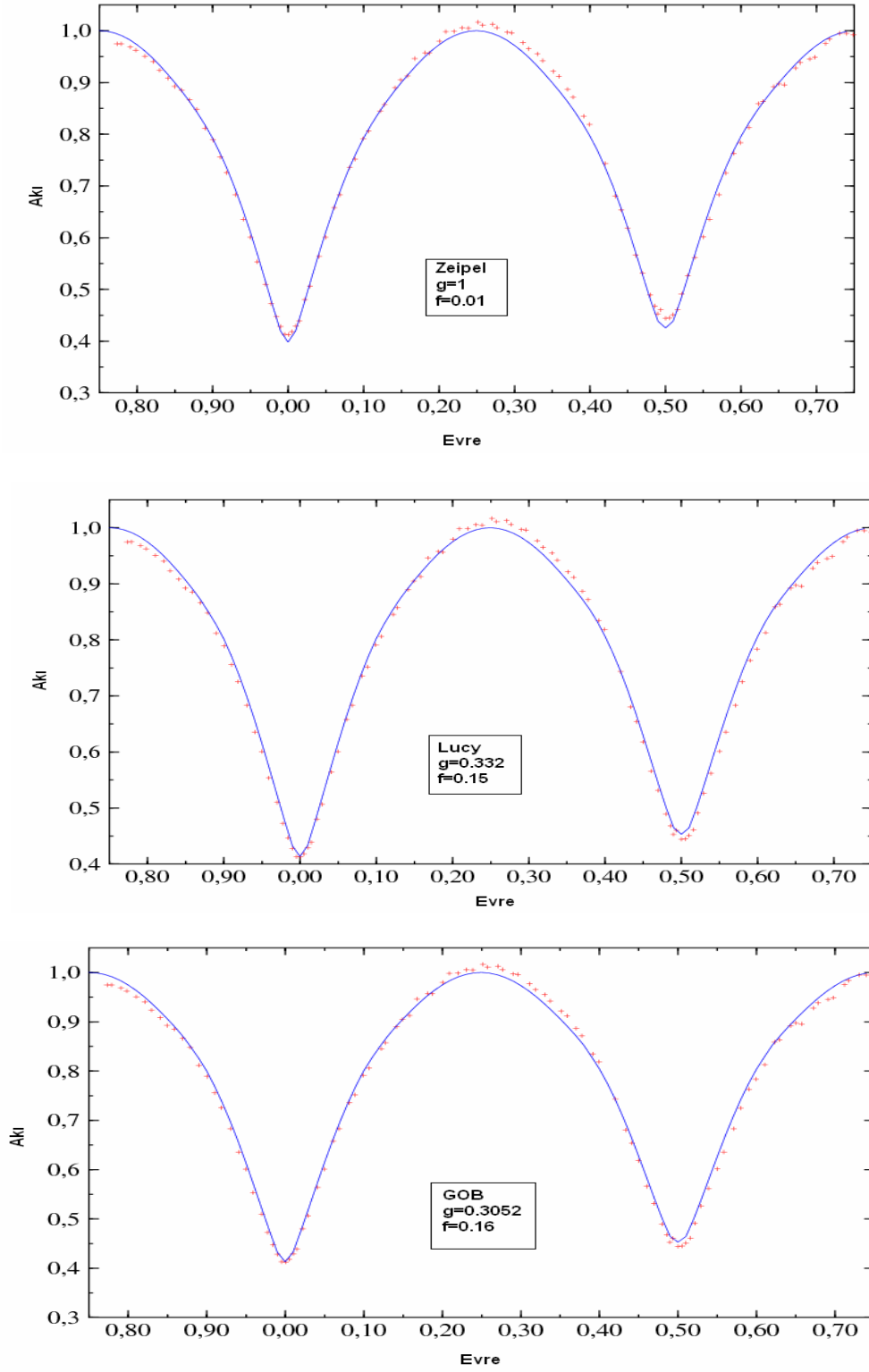
Tablo 3.1 GOAL programı kullanılarak farklı karışım uzunluğu parametreleri için bulunan çekim karartması üssü ( $\beta$ ) değerleri.

$M_{\odot}$	$\log L$	$\log T_0$	$\Delta R / R$	$\beta(\alpha = 0.2)$	$\beta(\alpha = 0.5)$	$\beta(\alpha = 1)$	$\beta(\alpha = 2)$
0.4	-1.21	3.49	0.0813	0.089	0.068	0.09	-
0.5	-0.92	3.53	0.0508	0.177	0.078	0.07	0.076
0.6	-0.67	3.55	0.0461	0.192	0.081	0.076	0.067
0.7	-0.47	3.57	0.0376	0.195	0.092	0.068	-
0.8	-0.29	3.59	0.0302	0.237	0.11	0.061	-
0.9	-0.14	3.61	0.0216	0.253	0.18	0.065	0.075
1	0	3.62	0.0162	0.230	0.31	0.061	0.054
1.1	0.13	3.64	0.00869	0.252	0.15	0.09	0.061
1.2	0.24	3.65	0.000889	0.220	0.16	0.016	0.053

### 3.1.2 Gözlemlerle Kıyaslama

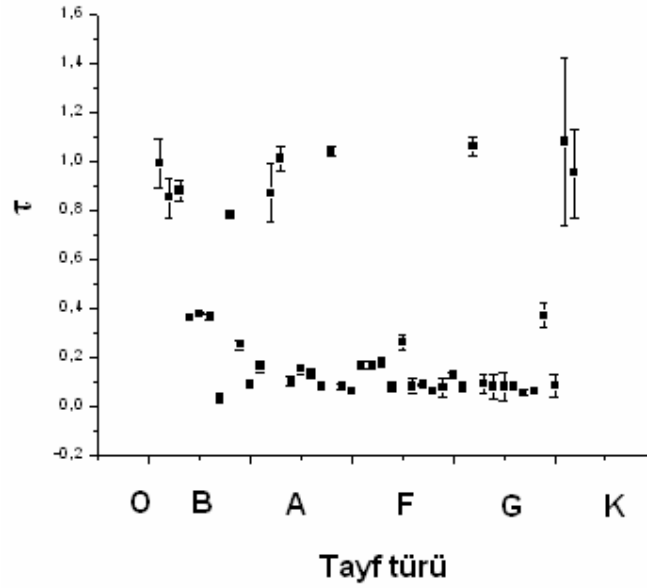
Çeşitli araştırmacılar deneysel çekim- kararması indekslerini bulmak için gözlemsel verilerin analiz sonuçlarını vermektedirler. Bu özellikle kapalı çift yıldız sistemlerinin ışık eğrileri ile ilgilidir. Böyle veriler için yakın –etki terimlerinin katsayıları  $\tau$  ve direkt bir lineer kombinasyondaki kısmi yarıçapın kuvveti  $r^j$  ile değişkendir [29]. Açıkça görülüyor ki  $\tau$  'nun herhangi bir değişiminin fotometrik etkileri  $r$  'nin alternatif değişimleri ile yeniden oluşturulabilir. Bu çalışmada bu konu pratik bir denemeyle incelenmiştir. Bunun için çekim-kararma parametresi değiştirilerek ışık eğrilerindeki farklılıkları incelemek için “Binary Maker” [30] programı kullanılmıştır. Şekil 3.4 'de gösterildiği gibi model olarak W UMa tipi çift yıldız sistemi olan OO Aql 'nın parametreleri kullanılarak evreye karşı normalize edilmiş akının değişimi (ışık eğrileri) çizilmiştir. Bu konu  $\tau$  'nun literatürdeki ‘gözlemsel’ değerlerine yansıtılır. Bu değerlerden seçilenler Şekil 3.5 'de gösterilmiştir. F0 tipinden daha önceki daha sıcak yıldızların radyatif zarfları içinde gözlemler ve teorik tahminler arasında tatminkar bir uyum ortaya çıkar. Şekil 3.5, Konvektif etkilerin varolduğu yıldız zarf modelleri için gerçek değerler ve hata tahminlerinde farklı sonuçları göstermektedir.





Şekil 3.4 Kapalı çift yıldız sistemi OO Aql 'nın ışık eğrileri ve sırasıyla von Zeipel, Lucy ve GOB programından alınan çekim-kararma üsleri ile en iyi uyumları.

Şekil 3.4, aslında parametrelerin farklı kombinasyonları ile elde edilebilen gözlenen veriler için benzer uyumları göstermektedir. Özellikle  $\beta$  'nın düşmesi yarıçaplarda uygun bir artışı gerektirir. Bu değen sistemde ortalama yarıçaplar, doldurma parametresi  $f$  ile hem orantılı olarak hem de etkili bir şekilde artar.



### 3.2 Donukluk Etkileri

Pek çok çalışma radyatif taşımının yıldızların yapısı ve evriminin oluşturulmasında anahtar rol oynadığını gösterirken, yıldızların içlerindeki donukluğu direkt olarak ölçmek mümkün değildir. Bu nicelik için bir yıldızın iç şartlarının değerlendirilmesinde teorik hesaplamalar gerekir. Yıllardır çeşitli donukluk formülleri ve tabloları yapı modellerine uygulanmaktadır.

Schwarzschild, “Yıldızların Yapısı ve Evrimi” adlı kitabında farklı atom türlerinin iyonlaşmalarıyla ilgili olarak bağlı-serbest geçişler, serbest-serbest soğurma ve elektron saçılması etkilerini tartışmıştır [8]. Bağlı-bağlı (çizgi) soğurmalarının önemli bir katkı sağladıkları Carson , Iglesias ve Rogers ve Kurucz tarafından gösterilmektedir [31,7,3]. Schwarzschild aynı zamanda teorik modelleri çift yıldızların gözlemsel sonuçları ile karşılaştırmıştır [8]. Modelleri kontrol eden bu yaklaşım Strömgen [32] ve daha sonraki çok sayıda yazar tarafından desteklenmiştir.

Donukluk, yıldızların yapısının radyatif taşıma denkleminde, aşağıda verilen denklem (3.4) ’deki gibi ortaya çıkmaktadır [33].

$$\frac{dK}{dr} = -\kappa\rho H = -\kappa\rho L / 16\pi r^2 \quad (3.4)$$

Burada, K ve H sırasıyla Eddington radyasyon basıncı ve akı terimleridir. L ise enerji oluşum oranı denkleminde gelen küresel ışıtmadır. K iç bölgelerde yüksek doğrulukla

$$K = \frac{\sigma T^4}{3} \quad (3.5)$$

denklemleri ile verilir.  $\sigma$  Stefan sabitidir. Donukluk böylece toplam ısının, bölgesel sıcaklık eğiminden akması ile ilgilidir. Sıcaklık eğimi bölgesel donukluğun büyük olduğu bölgelerde büyük olur. Bütün frekanslar üzerinden alınan ortalama “Rosseland ortalama” donukluğu  $\kappa \equiv \kappa_R$ , taşıma denklemini sıcaklık eğimine bağlı olarak aşağıdaki gibi verir [33]:

$$\left( \frac{\sigma T^3}{\kappa_R} \right) \frac{dT}{dr} = - \frac{3\rho L}{64\pi r^2} \quad (3.6)$$

Rosseland ortalaması;

$$\frac{\sigma T^3}{\kappa_R} = \pi \int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{dB_\nu(T)}{dT} d\nu \quad (3.7)$$

denklemleri ile belirlenir [33]. Rosseland ortalama donuklukları  $\kappa_R$  ( $\text{cm}^2\text{g}^{-1}$  biriminde) böylece o frekanstaki akı katkısına göre frekansa bağlıdır. Daha genel bir bağlamda radyatif saydamlıktan (donukluğun tersi) başka diğer katkıların da özellikle elektron iletiminin de toplam ısı akışı için hesaba alınması gerekir [34]. Fakat bu çalışmada radyatif taşıma etkileri üzerine yoğunlaşmıştır. Teoriyi test edebilmek için örnek yıldızların gözlemsel verileri kapsamında çalışılmaktadır.

Kramer kanununa göre donukluk, bağlı-serbest ve serbest-serbest geçişler için sıcaklık ve yoğunluğa bağlı olarak denklem (3.8) 'deki gibi değişmektedir [8].

$$\kappa \propto \rho T^{-7/2} \quad (3.8)$$

Genel olarak net donukluğun  $\rho$  ve  $T$  'ye bağlı olduğu gibi  $X+Y+Z=1$  olduğu durumda hidrojen kütle kesri  $X$ , helyum kütle kesri  $Y$  ve diğer atomların kütle kesri

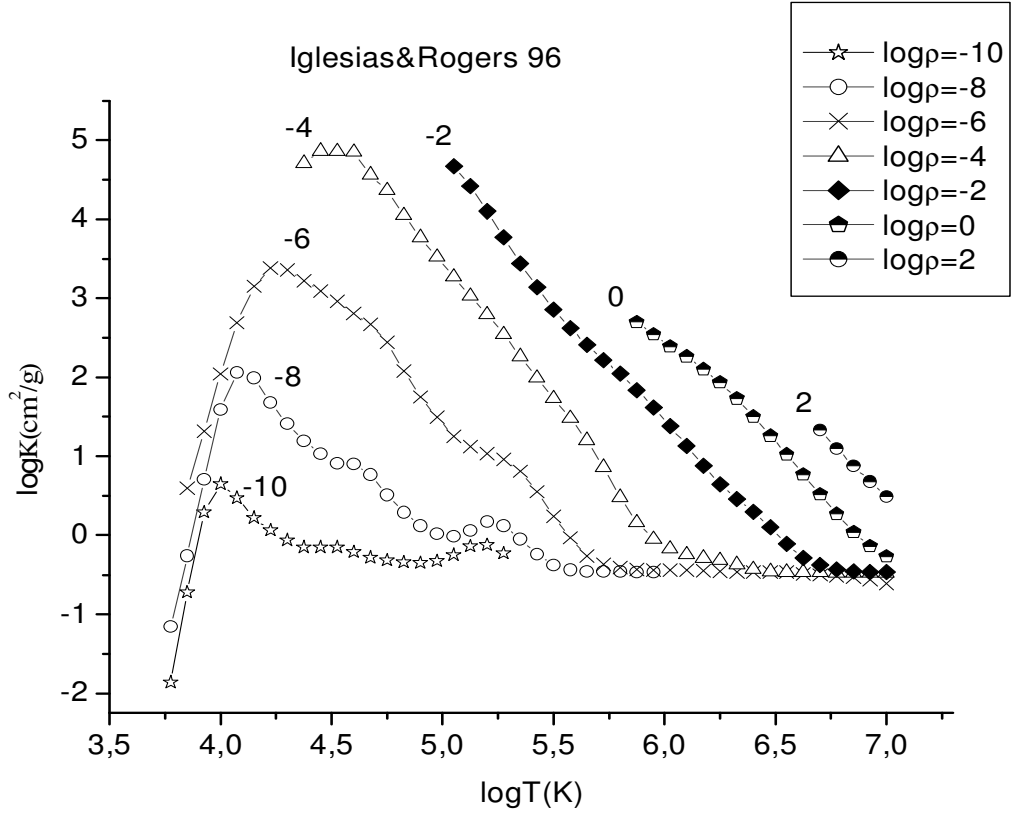
(Z) 'ye de yani bileşime de bağlı olduğu beklenebilir. Bu durumda donukluk,  $\kappa_v = \kappa_v(X, Z, \rho, T)$  şeklinde ifade edilir.

Astrofizikteki pratik uygulamalar için donukluk değerlerinin tabloları genellikle seçilen X ve Z değerleri ile iki boyutlu (yoğunluk ve sıcaklığın geniş değişiminde  $\log \rho$  ve  $\log T$  için) biçimde verilir. Pek çok yıldızda yoğunluk ve sıcaklık değerleri arasında ( $\rho \sim T^3$ ) güçlü bir bağıntı olduğu için uygun genel listeleme için R değişkeni,

$$\log R = \log \rho - 3 \log T + 18 \quad (3.9)$$

şeklinde tanımlanmıştır [6].

Bu çalışmada Los Alamos Ulusal laboratuvarında Cox & Stewart 'ın çalışmalarında [35] ortaya çıkardıkları ve daha sonraki yazarlar ; Iglesias & Rogers [6], Iglesias ve Rogers [7] ve Kurucz [3] tarafından değiştirilmiş donukluk tabloları yıldız model kodu GOB programına [1] uygulanmıştır. Şekil 3.6, Iglesias ve Rogers [7] donukluk değerlerinin farklı yoğunluklar için sıcaklıkla değişimini vermektedir. Bütünü oluşturan elementler, yeniden birleşmeye başlarlarken sıcaklık eğiminin yükseldiği, yıldızın dış kısımlarında donukluk etkilerinin çok güçlü olduğu iyi bilinmektedir [36]. Bu durum GOB 'un ilgilendiği bölgelerde baskındır.



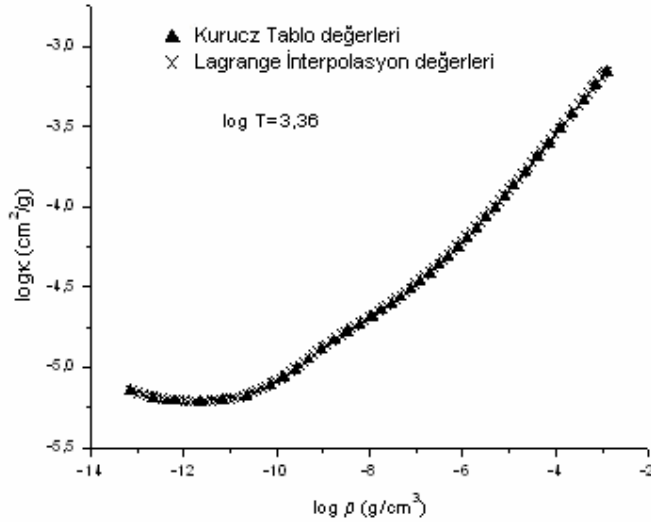
Şekil 3.6  $X=0.70$ ,  $Z=0.02$  için Iglesias ve Rogers donukluk değerleri ( $\text{cm}^2\text{g}^{-1}$ )'nin [7] farklı yoğunluklarda sıcaklıkla değişimi.

Şekil 3.6 'da donukluk pikinin sağ tarafında yüksek yoğunluklu bölge Kramer kanununa dönüşü göstermektedir. Bu durum  $\log \rho = -4$  için olan eğride daha açık görülmektedir. Bu durum yüksek sıcaklıklar için basit elektron saçılmasına ( $\kappa \sim$  sabit) düşer. Düşük yoğunluklu tarafta yüzeye yakın yerlerde çok düşük donukluklara düşmesi beklenen bir sonuçtur. Tablolardaki donuklukların pik değeri yaklaşık  $\log \rho \sim -2.5$  ve  $\log T \sim 4.5$  için logaritmik donukluk  $\log \kappa \sim 5.5$  civarında oluşur. Daha yeni donukluk hesaplamaları, bu pikin eski tablolardakinden daha düşük sıcaklıklarda oluştuğunu göstermektedir.

Kurucz donukluklarını [3] GOB 'un formatına uydurmak için dört nokta Lagrange interpolasyonu kullanılmıştır [4]. Böylece  $\kappa$ , yoğunluğun logaritmasının -12 'den +3 'e kadar 0.5 adımlarla değiştiği 31 değeri için ve 3.25 'den başlayıp 0.075 adımlarla değişen sıcaklığın logaritmasının 51 değeri için hesaplanmıştır.

### 3.3 Donukluk Tabloları

Belirlenen bir kimyasal bileşim için verilen logaritmik donukluklar için logaritmik sıcaklık ve logaritmik yoğunluk için olmak üzere iki boyutlu interpolasyonlar yapmak gerekmektedir. Böylece ilk olarak sabit sıcaklıkta farklı  $\log \rho$  değerleri için  $\log \kappa_R$ 'ler interpolate edilmiştir ve daha sonra her bir  $\log \rho$  değerinde farklı sıcaklıklar için  $\log \kappa_R$  'ler interpolate edilmiştir. Şekil 3.7, Lagrange interpolasyon noktalarının Kurucz donukluk tablo değerlerinden [3] yumuşak geçişini göstermektedir.



Şekil 3.7 Kurucz 'un donukluk tablolarındaki Lagrange interpolasyon sonuçlarından bir örnek.

Bu çalışmada, sonuçları kullanılan Kurucz model atmosfer programı [37], 1000 'den fazla atom ve molekül türü içermektedir. Bu program çinkoya kadar bütün elementlerin iyonlarına değinir. Bu modelleme özellikle çizgi (bağlı-bağlı) soğurmaların net etkisini hesaba katmak için çok sayıda atom türünü içeren donukluk değerlerini geliştirmiştir. Bunun için üç yön vardır. Birincisi verilen sıcaklık ve basınçta  $10^8$  'den daha fazla sayıda ayrı çizgi içermesi için tayfin direkt hesabını içermektedir. Modellemenin diğer yönü, belirlenen çeşitli bolluk değerlerinin geniş aralığında sıcaklık ve basınca bağlı olan çizgi donuklukları için istatistiksel dağılım fonksiyonlarını içermesidir. Üçüncü yön, tayfi detaylı bir şekilde çözmeyen dalga boyu noktalarının oldukça küçük sayısını kullanarak tayfla ilgili modelleme yapmasıdır. ATLAS programının 12. sürümü bu üç işlemi birleştirerek verilen sıcaklık ve yoğunluklarda Rosseland ortalama donukluklarını hesaplamaktadır [38].

Iglesias ve Rogers , Rosseland ortalama donukluklarını hesaplamak için OPAL kodunu oluşturmuşlardır [6]. Anders-Grevesse 'nin karışımı için [39] çeşitli metal kütle kesirleri ile verilen hidrojen için logaritmik sıcaklık ve yoğunlukta doğru interpolasyonları veren kapsamlı sonuçlar bulmuşlardır. Temel değişken olarak sıcaklığı kullanmışlardır.  $R \propto \text{yoğunluk} / (\text{sıcaklık})^3$  olarak verilmiştir. R ve sıcaklık aralığı zarf boyunca içten dış bölgelere kadar uzanan tipik yıldız şartları ile örtüşecek şekildedir. Iglesias ve Rogers, soğuk atmosferleri incelememişlerdir [6]. Sadece radyatif süreçleri hesaba almışlardır. Elektron iletimini ihmal etmişlerdir. Iglesias ve Rogers 'ın model hesaplamaları uyarılmış iyonların çarpışması kadar hem değerlik elektronları hem de içteki çekirdek elektronları içeren foton soğurmaları için genellikle doğru kabul edilmektedir. Bağlı-bağlı geçişleri çeşitli iyon safhalarının her bir konfigürasyonunda bütün alt kabuklar için hesaplamışlardır [6].

Cox ve Stewart donukluk tabloları (ki bunlar bazen Los Alamos verileri olarak bilinirler), elektron iletimini hesaba almadan Rosseland ortalama donukluklarını sunmaktadır [35]. Bu tablolar pek çok yıldız yapısı hesaplamaları için bir temel oluşturmaktadır. Bu tablolar, Somerville 'nin [40] serbest-serbest süreci ile moleküler hidrojen ve serbest elektronun foton soğurmasını içermektedir. Dalgarno

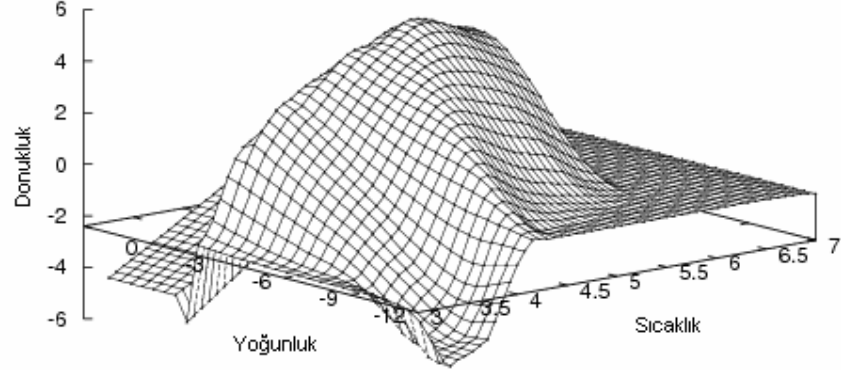


ve Williams tarafından verilen formül [41] kullanılarak fotonların moleküler hidrojenle Rayleigh saçılması da hesaba alınmıştır. Eski Los Alamos tabloları (LAOL) Huebner ve grubu tarafından güncelleştirilmiştir [5]. Bu biçim Paczynski'nin orjinal versiyonuna [1] uygundur.

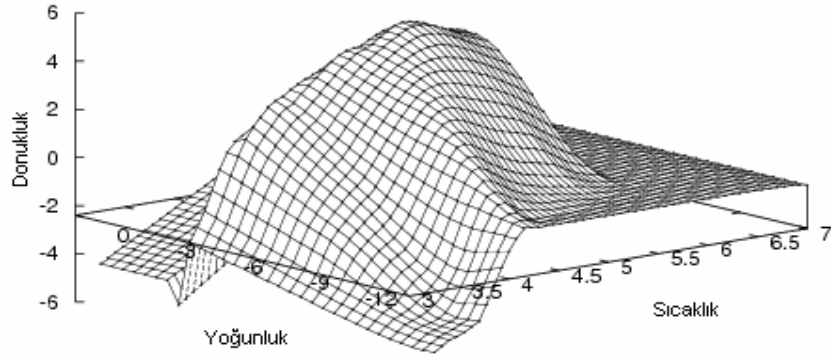
GOB programı için gerekli olan iki boyutlu interpolate edilmiş tablolar iki adımlı bir süreç içerir: Birincisi sabit sıcaklıkta GOB'un gerektirdiği tablo formatındaki yoğunluk değerleri için interpolasyon yapmaktır. İkincisi ise tablodaki yeni yoğunluklarda gerekli olan sıcaklıklar için bu donuklukların interpolate edilmesidir.

GOB programında kullanılan donukluk tablolarının üç boyutlu gösterimi Şekil 3.8 'de sunulmuştur. Şekilden görülebileceği gibi Iglesias ve Rogers [6] donuklukları, yoğunluk ve sıcaklığın düşük olduğu atmosferin dış kısımları hariç LAOL donukluklarına temel olarak benzemektedir. Kurucz donuklukları [3] dış zarfta farklılıklar göstermektedir. Bu farklılıklar Kurucz'un çizgi soğurmalarını daha ayrıntılı uygulamasından kaynaklanıyor olabilir. Kurucz donuklukları, daha yüksek yoğunluk ve sıcaklıklara doğru bazı süreksizlikler göstermektedir. Bunun nedeni elde edilen Kurucz tablolarının bütün olası yıldız şartları için gerekli değişkenlerin aralığını tamamen kaplamamasındandır. Fakat bu tablolar, zarfın önemli olan dış kısmındaki aralıklar için yeterlidir.

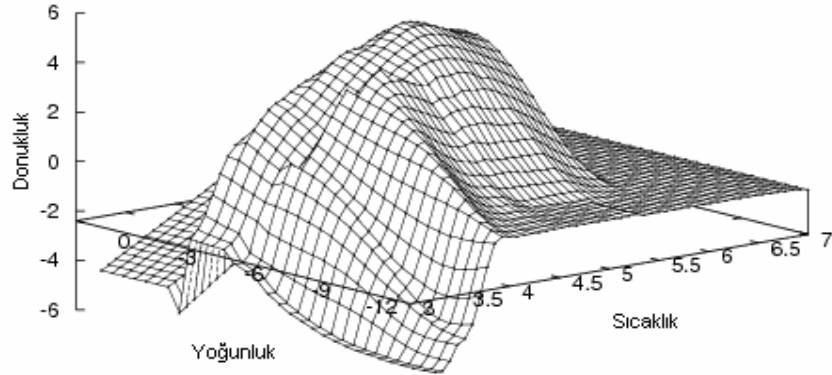
Huebner ve grubu (1977) donukluk değerleri



Iglesias ve Rogers (1991) donukluk değerleri



Kurucz (1998) donukluk değerleri



Şekil 3.8 Donukluk tablolarının üç boyutlu gösterimi.

### 3.4 Farklı Donuklukların Model İntegrasyonlardaki Sonuçları

Bu çalışmada, Schwarzschild 'ın kitabındaki gibi 0.6, 1, 2.5, 5 ve 10 Güneş kütleli sıfır yaş modelleri alınmıştır [8]. GOB ve SCH programları farklı donukluk tabloları için çalıştırılarak bulunan sonuçlar Tablo 3.2 'de sunulmuştur. Işıtma ve etkin sıcaklıklarla birlikte GOB programının atmosfer taban yarıçapları B indisli olarak, SCH programının sınır yarıçapları OB indisli olarak verilmiştir. Tablo 3.2, dış zarfların sayısal integrasyonlarında kullanılan ortalama interpolasyon adımından oluşmaktadır. Tablo 3.2 'de, SCH sonuçları ile Schwarzschild 'ın sonuçları [8], karşılaştırılmaları için bir arada verilmiştir. Aslında her iki programda kullanılan ana yapı değişkenlerinin her biri için ayrı interpolasyon adım limitleri vardır. Örneğin  $\log \rho$  için olan limit, verilen değerlerin değişim aralığına bağlı olarak  $\log T$  için olandan daha büyük olacaktır.

Tablo 3.2 Farklı donukluk tabloları kullanılarak taban ve sınır yarıçapları için ortalama interpolasyon adımı=0.02 ile elde edilen GOB ve SCH sonuçları.

Parametre	Değeri				
M ( $M_{\odot}$ )	0.6	1	2.5	5	10
$\log L$	-0.8276	0.0409	1.6068	2.8296	3.6749
$\log T_e$	3.652	3.7692	4.0115	4.2085	4.3545
$R_B$ (Huebner)	0.3871	0.5733	1.1357	1.8710	2.5258
$R_B$ (Igl.1991)	0.3871	0.5733	1.1357	1.8710	2.5258
$R_B$ (Igl.1996)	0.3869	0.5728	1.1379	1.8755	2.5345
$R_B$ (Kurucz)	0.3869	0.5728	1.1381	1.8768	2.5340
$R_{OB}$ (Sch.1958)	0.644	1.021	1.591	2.381	3.6220
$R_{OB}$ (Huebner)	0.6484	0.6998	1.176	1.978	3.4570
$R_{OB}$ ( Igl.1991)	0.6484	0.6998	1.176	1.978	3.4570
$R_{OB}$ ( Igl.1996)	0.6716	0.7590	1.963	2.736	3.9960
$R_{OB}$ (Kurucz)	0.6511	0.7988	1.896	2.517	3.6870

Denklem (3.6) 'dan beklenebildiği gibi modellerin dış tabakalarındaki daha büyük donuklukların bu tabakalardaki sıcaklık eğimi ile ilgili olarak önemli bir şekilde arttığı Tablo 3.2 'den açıkça görülmektedir.

Tablo 3.2 'deki taban değerleri, aynı dış sınırdan başlayan içe doğru olan integrasyonların farklı donukluklarla olan sonuçlarıdır. Tam bir model için atmosferik taban ve SCH integrasyon değerleri Şekil 2.1 'deki gibi birleşmelidir. Bu durum dış sınır sıcaklığının ayarlanmasını gerektirir. En sonki artan donukluklar GOB programına yerleştirildiğinde tabakanın taban sıcaklığı artar. Eğer orijinal GOB ve SCH integrasyonları alt tabakada denkleşirlerse verilen ışıtmada yeni donukluklarla aynı taban sıcaklığını elde etmek için GOB integrasyonları için  $T_0$  değerinin azaltılması zorunludur. Sabit ışıtma L için  $T_0$  'daki bu azalma, yıldızın etkin yarıçapının buyümesi gerektiği anlamına gelir [31]. Tablo 3.2 'ye göre yarıçaplardaki artış % 5-10'dur. Stothers ve Chin , eski Cox ve Stewart [35] ile daha yeni olan ve metal oranı % 50 arttırılan Hubner ve grubunun [5] Los Alamos donuklukları arasında yarıçapta benzer Şekilde % 5-10 artış olduğunu hesaplamışlardır [42].

Bu çalışmada metal oranları değiştirilmemiştir. Bu çalışmada zarf donukluğunun artması sonucu yarıçapta artış olduğu sonucuna varılmıştır. LAOL donukluk tablolarının, çizgi soğurma etkilerini detaylı bir Şekilde içeren daha yeni donukluk tabloları ile değiştirilmesi sonucunda hesaplanan yarıçapı yaklaşık % 5-10 oranında değiştirmiştir. Yarıçaptaki etkinin bu ölçüsü tutulan çift yıldızların iyi gözlemlerinin dikkatli yapılan analizleri ile kontrol edilebilir.

## 4. NÜKLEER ENERJİ OLUŞUM ORANLARI VE GÖZLEMSEL KONTROLLERİ

### 4.1 Yıldızlardaki Nükleer Süreçler

Nükleer süreçler, parlak cisim olan yıldızların hayatlarını sürdürebilmeleri için gerekli olan çok büyük enerjiyi sağlarlar. Yine bu nükleer süreçler yıldızların evrimleşmesine neden olan dönüşümlerin bir yoludur.

Tipik bir yıldızın içinde 10 milyon K sıcaklıkta bir parçacığın ortalama termal enerjisi;

$$E_{\text{termal}} = \frac{3}{2} kT \cong 1 \text{ keV} \quad (4.1)$$

denklemleri ile verilmektedir [8]. Bu enerjiyi iki çekirdek arasındaki Coulomb etkileşiminin neden olduğu potansiyel engeli ile karşılaştırdığımızda küçük olduğu görülür.

$$E_{\text{Coulomb}} = \frac{Z_1' Z_2' e^2}{R} \cong 1000 \text{ keV} \quad (4.2)$$

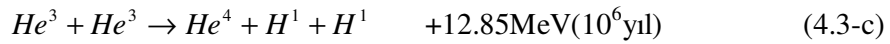
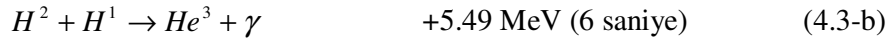
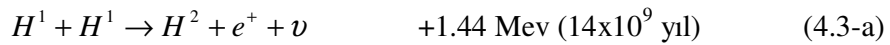
Bu engel ortalama termal enerjiden 1000 kat daha büyüktür. Geçiş olasılığı, azalan parçacık enerjisi ile hızlı bir şekilde azalır. Diğer yandan Maxwell kanununa göre, enerji ortalama değerine çıktığında verilen enerjideki parçacık sayısı azalır. 10

milyon K 'deki termal enerjilerle karşılaştırıldığında büyük yüke sahip parçacıklar için Coulomb bariyeri daha engelleyici hale gelir. Bu yüzden sadece çok küçük yüklü parçacıklar arasındaki reaksiyonlar göz önüne alınır.

Bütün elementlerin en hafifi olan hidrojen çekirdeği sadece 1 proton içerir. Helyum çekirdeği 2 proton ve 2 nötron olmak üzere 4 nükleer parçacık içerir. Bir helyum çekirdeğinin oluşması için 4 hidrojen çekirdeği gerekir. Bu çalışmada yıldızlarda oluşan nükleer süreçler; hidrojenin helyuma dönüşmesi ile oluşan proton-proton reaksiyonu ve karbon çevrimi, helyumun azotla yanması, helyumun daha ağır elementlere dönüştüğü üçlü  $\alpha$  süreci, helyumun karbonla yanması ve son olarak karbon yanması ve oksijen yanması olarak alınmıştır [8].

#### 4.1.1 Proton-Proton Reaksiyonu

Bir proton-proton reaksiyonu 10 milyon K civarında aşağıdaki üç adımdan oluşur;



İlk adımda, iki proton çarpışır ve ürün olarak bir döteron, bir pozitron ve bir nötrino oluşur. Pozitron hemen bir elektronla birleşir ve iki gama fotonu ortaya çıkar. Bu gama fotonları çevreleyen gaz tarafından soğrulur. Nötrino sıfır reaksiyon tesir kesitine sahiptir. Böylece yıldızın içinde hızla ilerleyecektir. Proton-proton

etkileşimi, çok düşük Coulomb bariyerine rağmen çok yavaştır. Süreç, döteron ile diğer bir proton arasındaki bir çarpışma ile devam eder. Sonuçta  $He^3$  ve beraberinde gama fotonu yayınlanır. Bu etkileşimin çok yüksek bir olasılığı vardır.  $He^4$  'ün oluşumu çeşitli yollarla gerçekleşir. Bunlardan biri denklem (4.3-c) 'de verilen iki  $He^3$  çekirdeğinin çarpışmasını içeren ve  $He^4$  çekirdeği ile beraber iki protonun yeniden yayınlanmasını içeren en yaygın şeklidir. Bu üçüncü adımda iki  $He^3$  kullanıldığı için  $He^4$  çekirdeğinin oluşması denklem (4.3-a) ve denklem (4.3-b) 'deki iki reaksiyonun her birinin iki kez oluşmasını gerektirir. Reaksiyon zincirinin net sonucu;



Bir proton-proton zincirinde oluşan enerji 26.2 MeV 'dir.

#### 4.1.2 Karbon Çevrimi

Hidrojenin helyuma dönüşmesinin bir diğer yolu, 10 milyon K civarında gerçekleşen karbon çevrimidir. Bu çevrim aşağıdaki 6 reaksiyonu içerir.



$$O^{15} \rightarrow N^{15} + e^+ + \nu \quad +2.71 \text{ MeV (82 saniye)} \quad (4.5-e)$$

$$N^{15} + H^1 \rightarrow C^{12} + He^4 \quad +4.96 \text{ MeV (1.1x10}^5 \text{ yıl)} \quad (4.5-f)$$

Bir protonun yaygın bir karbon çekirdeği ile çarpışmasıyla  $N^{13}$  oluşur ve beraberinde bir gama fotonu yayınlanır.  $N^{13}$  kararlı olmayıp, 7 dakikada ağır bir karbon izotopuna bozunur ve beraberinde bir pozitron ve bir nötrino yayınlanır. Pozitron bir elektronla birleşerek yok olur ve nötrino yıldızdan ayrılır. Yeni adımda ikinci bir protonun ağır karbon izotopu ile çarpışması sonucu yaygın bir azot çekirdeği oluşur. Bu üçüncü adımdan sonra diğer bir protonun azotla çarpışması gerçekleşir ve 82 saniyede bozunan kararsız bir  $O^{15}$  oluşur. Bu  $O^{15}$  ağır azota ( $N^{15}$ ) dönüşür ve beraberinde bir pozitron ve bir nötrino yayınlanır. Son adımda dördüncü proton ağır azot çekirdeği ile çarpışır ve nadiren  $O^{16}$  oluşur. Fakat neredeyse her zaman  $C^{12}$  + bir helyum çekirdeği oluşur. Bu çevrimde de 4 protondan bir helyum çekirdeği oluşur. Bu çevrimde açığa çıkan enerji 25 MeV 'dir.

#### 4.1.3 Helyumun Azotla Yanması

Azot-14 'ün helyum-4 ile reaksiyonundan kararsız olan flor-18 çekirdeği oluşur. Flor-18 çekirdeği oksijen-18 çekirdeğine dönüşür. Bu iki reaksiyon aşağıdaki gibidir.

$$N^{14} + He^4 \rightarrow F^{18} + \gamma \quad (4.6-a)$$

$$F^{18} \rightarrow O^{18} + e^+ + \nu_e \quad (4.6-b)$$

Bu iki süreçten açığa çıkan toplam enerji 4.42 MeV 'dir.



#### 4.1.4 Üçlü $\alpha$ Süreci

10 milyon K sıcaklık aralığının üstünde 100 milyon K civarında daha yüksek sıcaklık aralığında yıldızın çekirdeğindeki helyum yanması gerçekleşir. Helyum yanması üç helyum çekirdeğinin bir karbon çekirdeği oluşturmak için birleşmesidir ve üçlü  $\alpha$  süreci adını alır. Bu süreç iki adımda gerçekleşir:



İlk adımda iki helyum çekirdeği çarpışır ve berilyumun bir izotopunu oluşturur. Bununla birlikte reaksiyon endotermiktir ve 95 keV enerji gerektirir. Berilyumun bu izotopu çok kararsızdır. Çok hızlı bir şekilde iki helyum çekirdeğine ayrılır. Kararsız berilyum izotopu ile üçüncü bir  $\alpha$  parçacığı arasında çarpışma olur. Sonuçta  $C^{12}$  oluşur ve üçlü -  $\alpha$  sürecinin ikinci adımı gerçekleşir. Bu süreçte oluşan enerji 7.3 MeV 'dir.

#### 4.1.5 Helyumun Karbonla Yanması

Helyumun karbonla yanması aşağıda verilen üç reaksiyondan oluşur.





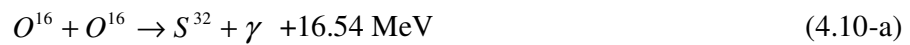
#### 4.1.6 Karbon Yanması

Karbon yanması aşağıda verilen reaksiyonlardan oluşur.



#### 4.1.7 Oksijen Yanması

Oksijen yanması reaksiyonları aşağıdaki gibidir:



$$O^{16} + O^{16} \rightarrow S^{31} + n^1 + 1.46 \text{ MeV} \quad (4.10-c)$$

$$O^{16} + O^{16} \rightarrow Si^{28} + He^4 + 9.59 \text{ MeV} \quad (4.10-d)$$

$$O^{16} + O^{16} \rightarrow Mg^{24} + 2He^4 - 0.39 \text{ MeV} \quad (4.10-e)$$

## 4.2 Enerji Oluşum Oranları

SCH programındaki nükleer enerji oluşum oranları Tablo 4.1 'de verilmiştir.

Tablo 4.1 Nükleer enerji oluşum oranları ( $\epsilon$ ); a.) Hidrojen yanması, b.) Helyumun azotla etkileşimi, c.) Üçlü  $\alpha$  süreci, d.) Helyumun karbonla etkileşimi, e.) Karbon yanması, f.) Oksijen yanması.

**Tablo 4.1-a Hidrojen yanması (p-p reaksiyonu, CNO çevrimi)**

---

0	6.50	.05
1	-4.01	-17.50
2	-3.66	-15.84
3	-3.33	-14.24
4	-3.02	-12.70
5	-2.71	-11.22
6	-2.42	-9.80
7	-2.14	-8.43
8	-1.88	-7.12
9	-1.62	-5.86
10	-1.37	-4.64
11	-1.14	-3.48
12	-.91	-2.35
13	-.70	-1.28
14	-.49	-.24
15	-.29	.76
16	-.11	1.72
17	.08	2.64
18	.25	3.52
19	.41	4.37
20	.57	5.18
21	.73	5.97
22	.87	6.72
23	1.01	7.44
24	1.14	8.14
25	1.27	8.81
26	1.39	9.45
27	1.51	10.06
28	1.62	10.65
29	1.73	11.22
30	1.83	11.76
31	1.93	12.28
32	2.02	12.78
33	2.11	13.26
34	2.19	13.72
35	2.28	14.16

**Tablo 4.1-b Helyumun azotla etkileşimi**

---

0	7.60	.05	2.00	.50	8.00	.05	4.00	.25	
1	-8.77	-8.24	-7.70	-7.12	-6.50	-5.83	-5.08	-4.22	-3.15
2	-7.09	-6.56	-6.02	-5.45	-4.85	-4.20	-3.48	-2.65	-1.65
3	-5.47	-4.94	-4.41	-3.85	-3.26	-2.62	-1.93	-1.14	-.20
4	-3.90	-3.38	-2.85	-2.30	-1.72	-1.10	-.43	.33	1.22
5	-2.37	-1.86	-1.33	-.78	-.21	.39	1.05	1.77	2.62
6	-.84	-.32	.20	.74	1.30	1.90	2.53	3.23	4.04
7	.71	1.23	1.75	2.28	2.83	3.42	4.04	4.72	5.48
8	2.21	2.72	3.24	3.77	4.32	4.89	5.50	6.15	6.89
9	3.60	4.11	4.62	5.15	5.69	6.25	6.85	7.49	8.19
10	4.86	5.37	5.88	6.40	6.94	7.49	8.08	8.70	9.38
11	6.00	6.51	7.02	7.54	8.07	8.62	9.19	9.80	10.46
12	7.04	7.55	8.06	8.58	9.10	9.64	10.21	10.81	11.45
13	8.01	8.52	9.03	9.54	10.06	10.60	11.16	11.74	12.37
14	8.95	9.45	9.96	10.47	10.99	11.52	12.07	12.65	13.26
15	9.87	10.37	10.88	11.39	11.90	12.43	12.98	13.54	14.14
16	10.78	11.29	11.79	12.30	12.82	13.34	13.88	14.44	15.03
17	11.69	12.20	12.70	13.21	13.72	14.24	14.78	15.33	15.90
18	12.58	13.08	13.59	14.09	14.61	15.12	15.65	16.20	16.77
19	13.44	13.94	14.45	14.95	15.46	15.98	16.50	17.04	17.60
20	14.27	14.77	15.28	15.78	16.29	16.80	17.32	17.86	18.41
21	15.07	15.57	16.07	16.58	17.08	17.60	18.11	18.64	19.19

**Tablo 4.1-c Üçlü  $\alpha$  süreci**

---

22	-30.01	-28.99	-27.94	-26.85	-25.72	-24.51	-23.21	-21.79	-20.23
23	-25.08	-24.05	-23.01	-21.94	-20.82	-19.63	-18.36	-16.98	-15.47
24	-20.69	-19.67	-18.63	-17.57	-16.47	-15.31	-14.06	-12.72	-11.25
25	-16.80	-15.78	-14.75	-13.70	-12.61	-11.47	-10.25	-8.94	-7.51
26	-13.35	-12.33	-11.31	-10.26	-9.18	-8.06	-6.87	-5.59	-4.20
27	-10.29	-9.27	-8.25	-7.21	-6.15	-5.04	-3.87	-2.62	-1.26
28	-7.57	-6.56	-5.54	-4.51	-3.46	-2.36	-1.21	.01	1.33
29	-5.17	-4.16	-3.15	-2.12	-1.07	.01	1.14	2.34	3.63
30	-3.05	-2.04	-1.03	-0.00	1.04	2.10	3.22	4.39	5.66
31	-1.17	-.17	.84	1.87	2.90	3.96	5.06	6.21	7.45
32	.48	1.49	2.50	3.52	4.54	5.59	6.68	7.81	9.02
33	1.94	2.95	3.96	4.97	6.00	7.04	8.11	9.23	10.41
34	3.23	4.23	5.24	6.25	7.27	8.31	9.37	10.47	11.63
35	4.36	5.36	6.37	7.38	8.39	9.42	10.48	11.57	12.71
36	5.35	6.35	7.35	8.36	9.38	10.40	11.45	12.53	13.65
37	6.21	7.21	8.22	9.23	10.24	11.26	12.30	13.36	14.47
38	6.97	7.97	8.97	9.98	10.99	12.01	13.04	14.10	15.19
39	7.62	8.63	9.63	10.63	11.64	12.66	13.69	14.73	15.81
40	8.19	9.19	10.20	11.20	12.21	13.22	14.25	15.29	16.36
41	8.68	9.69	10.69	11.69	12.70	13.71	14.73	15.76	16.82
42	9.11	10.11	11.11	12.11	13.12	14.13	15.14	16.17	17.22

**Tablo 4.1-d Helyumun karbonla etkileşimi**

---

43	-10.82	-10.29	-9.74	-9.16	-8.53	-7.87	-7.15	-6.35	-5.40
44	-9.37	-8.84	-8.30	-7.73	-7.12	-6.47	-5.77	-5.00	-4.09
45	-7.98	-7.45	-6.91	-6.35	-5.76	-5.12	-4.44	-3.69	-2.83
46	-6.64	-6.12	-5.59	-5.03	-4.45	-3.82	-3.16	-2.44	-1.61
47	-5.36	-4.84	-4.31	-3.76	-3.19	-2.58	-1.93	-1.23	-.44
48	-4.13	-3.61	-3.09	-2.55	-1.98	-1.38	-.75	-.06	.70
49	-2.94	-2.43	-1.91	-1.38	-.82	-.23	.39	1.06	1.79
50	-1.81	-1.30	-.78	-.25	.30	.87	1.49	2.14	2.84
51	-.72	-.22	.30	.82	1.37	1.94	2.54	3.17	3.86
52	.32	.82	1.34	1.86	2.40	2.96	3.55	4.17	4.84
53	1.32	1.82	2.33	2.85	3.38	3.94	4.52	5.13	5.78
54	2.27	2.78	3.29	3.80	4.33	4.88	5.45	6.05	6.68
55	3.19	3.70	4.20	4.72	5.24	5.78	6.34	6.93	7.55
56	4.07	4.57	5.08	5.59	6.11	6.64	7.20	7.78	8.39
57	4.91	5.41	5.92	6.43	6.95	7.48	8.02	8.59	9.19
58	5.72	6.22	6.73	7.23	7.75	8.27	8.81	9.38	9.96
59	6.49	6.99	7.50	8.00	8.52	9.04	9.57	10.13	10.71
60	7.23	7.73	8.23	8.74	9.25	9.77	10.30	10.85	11.42
61	7.94	8.44	8.94	9.45	9.95	10.47	11.00	11.54	12.10
62	8.61	9.11	9.62	10.12	10.63	11.14	11.66	12.20	12.76
63	9.26	9.76	10.26	10.77	11.27	11.78	12.30	12.84	13.38

**Tablo 4.1-e Karbon yanması**

---

64	-30.70	-30.37	-30.02	-29.66	-29.28	-28.88	-28.46	-28.01	-27.52	-26.98
65	-26.38	-25.69	-24.91	-24.00	-22.94	-21.70	-20.22	-18.47	-16.38	-13.88
66	-10.89	-7.29	-2.96	2.26	8.55					
67	-27.83	-27.50	-27.16	-26.80	-26.43	-26.05	-25.64	-25.21	-24.75	-24.24
68	-23.67	-23.04	-22.32	-21.49	-20.52	-19.39	-18.06	-16.48	-14.60	-12.36
69	-9.68	-6.45	-2.58	2.09	7.71					
70	-25.05	-24.73	-24.40	-24.05	-23.69	-23.32	-22.93	-22.51	-22.07	-21.59
71	-21.06	-20.47	-19.80	-19.04	-18.16	-17.13	-15.93	-14.50	-12.81	-10.79
72	-8.38	-5.50	-2.03	2.15	7.17					
73	-22.39	-22.07	-21.75	-21.41	-21.06	-20.69	-20.31	-19.91	-19.49	-19.03
74	-18.53	-17.98	-17.36	-16.66	-15.85	-14.91	-13.82	-12.53	-11.01	-9.19
75	-7.03	-4.44	-1.33	2.40	6.90					
76	-19.82	-19.51	-19.20	-18.86	-18.52	-18.16	-17.79	-17.41	-17.00	-16.56
77	-16.09	-15.57	-14.99	-14.34	-13.60	-12.74	-11.75	-10.58	-9.20	-7.57
78	-5.62	-3.30	-.51	2.83	6.85					
79	-17.35	-17.05	-16.74	-16.42	-16.08	-15.73	-15.37	-14.99	-14.60	-14.18
80	-13.73	-13.23	-12.69	-12.09	-11.41	-10.62	-9.71	-8.65	-7.41	-5.93
81	-4.18	-2.09	.41	3.40	7.00					
82	-14.98	-14.68	-14.37	-14.06	-13.73	-13.39	-13.04	-12.67	-12.29	-11.88
83	-11.45	-10.98	-10.47	-9.91	-9.27	-8.55	-7.72	-6.76	-5.63	-4.29
84	-2.72	-.84	1.41	4.09	7.31					
85	-12.69	-12.40	-12.10	-11.79	-11.47	-11.14	-10.79	-10.43	-10.06	-9.67
86	-9.25	-8.81	-8.32	-7.79	-7.20	-6.54	-5.77	-4.89	-3.87	-2.66
87	-1.24	.46	2.47	4.88	7.77					
88	-10.49	-10.20	-9.91	-9.61	-9.29	-8.97	-8.63	-8.28	-7.92	-7.54
89	-7.13	-6.71	-6.25	-5.75	-5.20	-4.58	-3.87	-3.07	-2.13	-1.04
90	.25	1.78	3.59	5.75	8.34					
91	-8.37	-8.09	-7.80	-7.51	-7.20	-6.88	-6.55	-6.21	-5.85	-5.48
92	-5.09	-4.68	-4.25	-3.77	-3.25	-2.67	-2.02	-1.28	-.43	.57
93	1.74	3.11	4.75	6.69	9.02					
94	-6.34	-6.06	-5.78	-5.49	-5.18	-4.87	-4.55	-4.21	-3.87	-3.51
95	-3.13	-2.73	-2.31	-1.86	-1.37	-.83	-.22	.46	1.25	2.15
96	3.21	4.46	5.93	7.68	9.77					
97	-4.38	-4.11	-3.83	-3.54	-3.25	-2.94	-2.62	-2.30	-1.96	-1.61

**Tablo 4.1-e 'nin devamı**

98	-1.24	-.85	-.45	-.02	.45	.96	1.53	2.16	2.88	3.71
99	4.68	5.81	7.14	8.72	10.60					
100	-2.50	-2.23	-1.95	-1.67	-1.38	-1.08	-.77	-.45	-.12	.22
101	.58	.95	1.35	1.76	2.21	2.69	3.22	3.81	4.48	5.24
102	6.12	7.15	8.36	9.78	11.47					
103	-.69	-.42	-.15	.13	.41	.70	1.01	1.32	1.65	1.98
104	2.33	2.70	3.08	3.48	3.91	4.37	4.87	5.42	6.04	6.74
105	7.55	8.48	9.58	10.87	12.39					
106	1.05	1.31	1.58	1.85	2.14	2.42	2.72	3.03	3.35	3.67
107	4.02	4.37	4.74	5.13	5.54	5.98	6.46	6.98	7.55	8.20
108	8.95	9.80	10.80	11.96	13.34					
109	2.72	2.98	3.25	3.52	3.79	4.08	4.37	4.67	4.98	5.30
110	5.64	5.98	6.34	6.72	7.12	7.54	7.99	8.49	9.03	9.63
111	10.32	11.10	12.01	13.07	14.31					
112	4.32	4.58	4.85	5.11	5.39	5.67	5.95	6.25	6.55	6.87
113	7.19	7.53	7.88	8.25	8.64	9.05	9.48	9.95	10.46	11.02
114	11.65	12.38	13.21	14.17	15.30					
115	5.86	6.12	6.38	6.65	6.92	7.19	7.47	7.76	8.06	8.37
116	8.69	9.02	9.37	9.72	10.10	10.49	10.91	11.36	11.84	12.37
117	12.96	13.63	14.39	15.27	16.30					
118	7.34	7.60	7.86	8.12	8.39	8.66	8.94	9.22	9.52	9.82
119	10.13	10.45	10.79	11.14	11.50	11.89	12.29	12.72	13.18	13.68
120	14.23	14.85	15.55	16.36	17.29					
121	8.76	9.01	9.27	9.53	9.80	10.07	10.34	10.62	10.91	11.21
122	11.51	11.83	12.16	12.50	12.86	13.23	13.62	14.03	14.47	14.94
123	15.46	16.04	16.69	17.43	18.29					
124	10.12	10.37	10.63	10.89	11.15	11.42	11.69	11.97	12.25	12.54
125	12.84	13.15	13.47	13.81	14.15	14.52	14.90	15.29	15.72	16.17
126	16.66	17.20	17.81	18.49	19.27					

**Tablo 4.1-f Oksijen yanması**

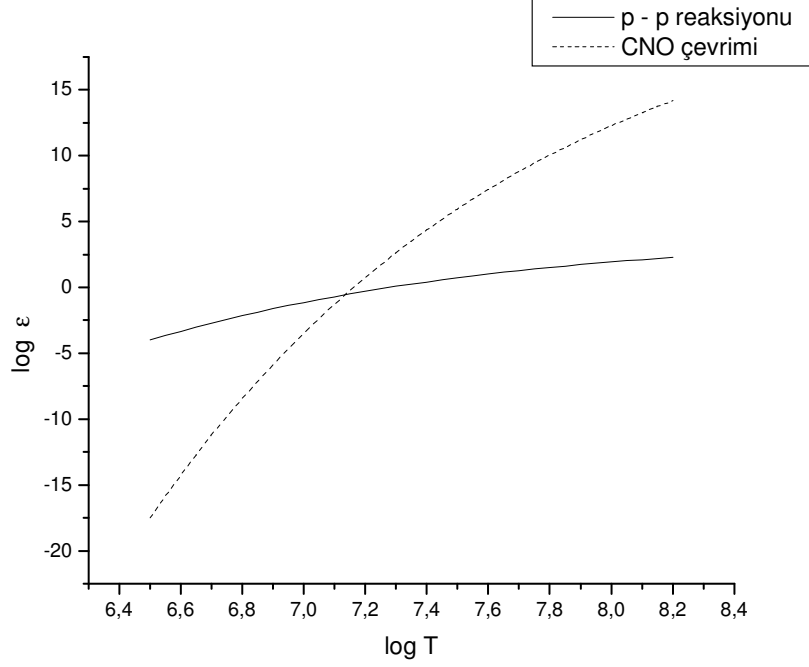
127	-64.17	-63.80	-63.41	-63.00	-62.57	-62.10	-61.58	-61.01	-60.37	-59.63
128	-58.79	-57.80	-56.65	-55.29	-53.68	-51.76	-49.46	-46.71	-43.42	-39.45
129	-34.68	-28.92	-21.98	-13.60	-3.47					
130	-59.53	-59.17	-58.79	-58.39	-57.97	-57.53	-57.04	-56.50	-55.90	-55.23
131	-54.45	-53.55	-52.51	-51.27	-49.82	-48.09	-46.03	-43.57	-40.61	-37.06
132	-32.79	-27.65	-21.45	-13.96	-4.92					
133	-55.07	-54.72	-54.35	-53.96	-53.56	-53.13	-52.66	-52.16	-51.60	-50.97
134	-50.26	-49.43	-48.48	-47.36	-46.05	-44.49	-42.64	-40.42	-37.77	-34.60
135	-30.77	-26.18	-20.63	-13.95	-5.87					
136	-50.78	-50.43	-50.07	-49.70	-49.31	-48.89	-48.45	-47.97	-47.45	-46.86
137	-46.20	-45.45	-44.57	-43.56	-42.37	-40.96	-39.29	-37.30	-34.93	-32.08
138	-28.66	-24.54	-19.59	-13.61	-6.40					
139	-46.65	-46.32	-45.97	-45.60	-45.22	-44.82	-44.39	-43.94	-43.44	-42.90
140	-42.28	-41.59	-40.79	-39.86	-38.78	-37.51	-36.00	-34.21	-32.08	-29.52
141	-26.46	-22.78	-18.34	-13.00	-6.56					
142	-42.69	-42.36	-42.02	-41.66	-41.29	-40.90	-40.49	-40.06	-39.59	-39.07
143	-38.50	-37.86	-37.12	-36.27	-35.29	-34.14	-32.78	-31.16	-29.24	-26.95
144	-24.20	-20.91	-16.94	-12.17	-6.41					
145	-38.88	-38.56	-38.23	-37.88	-37.52	-37.14	-36.74	-36.32	-35.87	-35.39
146	-34.85	-34.25	-33.57	-32.80	-31.90	-30.85	-29.62	-28.17	-26.44	-24.38
147	-21.91	-18.96	-15.41	-11.14	-5.99					
148	-35.22	-34.91	-34.58	-34.24	-33.89	-33.52	-33.14	-32.73	-32.30	-31.84
149	-31.33	-30.77	-30.14	-29.43	-28.61	-27.65	-26.54	-25.22	-23.66	-21.81
150	-19.60	-16.95	-13.77	-9.95	-5.35					
151	-31.71	-31.40	-31.08	-30.75	-30.41	-30.05	-29.67	-29.28	-28.87	-28.42
152	-27.95	-27.42	-26.83	-26.17	-25.42	-24.55	-23.53	-22.34	-20.93	-19.26
153	-17.27	-14.90	-12.05	-8.63	-4.51					
154	-28.33	-28.03	-27.72	-27.40	-27.06	-26.71	-26.35	-25.97	-25.57	-25.14
155	-24.68	-24.19	-23.64	-23.03	-22.33	-21.53	-20.61	-19.52	-18.25	-16.75
156	-14.96	-12.82	-10.27	-7.20	-3.52					

**Tablo 4.1-f 'nin devamı**

157	-25.10	-24.80	-24.50	-24.18	-23.85	-23.51	-23.15	-22.78	-22.39	-21.98
158	-21.55	-21.08	-20.56	-19.99	-19.34	-18.61	-17.76	-16.78	-15.63	-14.27
159	-12.65	-10.73	-8.44	-5.69	-2.39					
160	-21.99	-21.70	-21.40	-21.09	-20.77	-20.44	-20.09	-19.73	-19.35	-18.95
161	-18.53	-18.09	-17.60	-17.06	-16.46	-15.78	-15.01	-14.11	-13.06	-11.83
162	-10.37	-8.65	-6.58	-4.12	-1.17					
163	-19.01	-18.72	-18.43	-18.13	-17.81	-17.49	-17.15	-16.79	-16.43	-16.04
164	-15.64	-15.21	-14.75	-14.24	-13.68	-13.05	-12.33	-11.51	-10.56	-9.44
165	-8.13	-6.57	-4.71	-2.50	.15					
166	-16.15	-15.87	-15.58	-15.29	-14.98	-14.66	-14.33	-13.98	-13.63	-13.25
167	-12.86	-12.45	-12.01	-11.52	-11.00	-10.41	-9.75	-9.00	-8.12	-7.11
168	-5.92	-4.51	-2.84	-.85	1.52					
169	-13.41	-13.14	-12.86	-12.56	-12.26	-11.95	-11.63	-11.29	-10.94	-10.58
170	-10.20	-9.80	-9.37	-8.92	-8.42	-7.87	-7.26	-6.56	-5.76	-4.84
171	-3.75	-2.48	-.98	.81	2.95					
172	-10.79	-10.52	-10.24	-9.96	-9.66	-9.36	-9.04	-8.71	-8.37	-8.02
173	-7.65	-7.26	-6.85	-6.41	-5.94	-5.42	-4.85	-4.20	-3.47	-2.62
174	-1.64	-.49	.87	2.49	4.41					
175	-8.29	-8.02	-7.74	-7.46	-7.17	-6.87	-6.56	-6.24	-5.91	-5.56
176	-5.20	-4.82	-4.43	-4.01	-3.56	-3.07	-2.53	-1.93	-1.25	-.48
177	.42	1.47	2.70	4.15	5.88					
178	-5.89	-5.62	-5.35	-5.07	-4.79	-4.50	-4.19	-3.88	-3.55	-3.21
179	-2.86	-2.50	-2.11	-1.71	-1.28	-.81	-.30	.26	.89	1.60
180	2.42	3.38	4.49	5.81	7.37					
181	-3.60	-3.33	-3.06	-2.79	-2.51	-2.22	-1.93	-1.62	-1.30	-.97
182	-.63	-.27	.10	.50	.91	1.36	1.84	2.36	2.95	3.61
183	4.37	5.24	6.25	7.44	8.85					
184	-1.41	-1.15	-.88	-.61	-.33	-.05	.24	.54	.85	1.18
185	1.51	1.86	2.22	2.60	3.00	3.43	3.89	4.38	4.93	5.55
186	6.24	7.04	7.97	9.05	10.32					
187	.68	.94	1.20	1.47	1.74	2.02	2.31	2.60	2.91	3.22
188	3.55	3.89	4.24	4.61	5.00	5.41	5.85	6.32	6.84	7.41
189	8.06	8.79	9.64	10.62	11.78					

Hidrojen yanmasında ilk sütun p-p reaksiyonları, ikinci sütun CNO çevrimi için enerji oluşum oranlarını ( $\epsilon = \text{erg.g}^{-1}.\text{s}^{-1}$ ) gösterir. Şekil 4.1 'den de görüldüğü gibi düşük sıcaklıklarda, p-p reaksiyonları CNO çevrimine baskın gelmektedir. Yüksek sıcaklıklarda ise ( $\log T = 7.15$ ' den itibaren) CNO çevrimi, p-p reaksiyonuna Schwarzschild 'ın kitabında olduğu gibi [8] baskın gelmektedir.





Şekil 4.1 Nükleer enerji oluşum oranlarının sıcaklığa bağlı olarak değişimi.

Helyumun azot ile etkileşimi, üçlü  $\alpha$  süreci ve helyumun karbonla etkileşimi için enerji oluşum oranları, sıcaklığın 20 adımı ve 9 farklı yoğunluk değeri için verilmiştir.

Karbon yanması ve oksijen yanması için 20 sıcaklık adımı ve 25 yoğunluk adımı için enerji oluşum oranları tablo 4.1-e ve tablo 4.1-f 'de verilmiştir.

### 4.3 Gözlemsel Kontroller

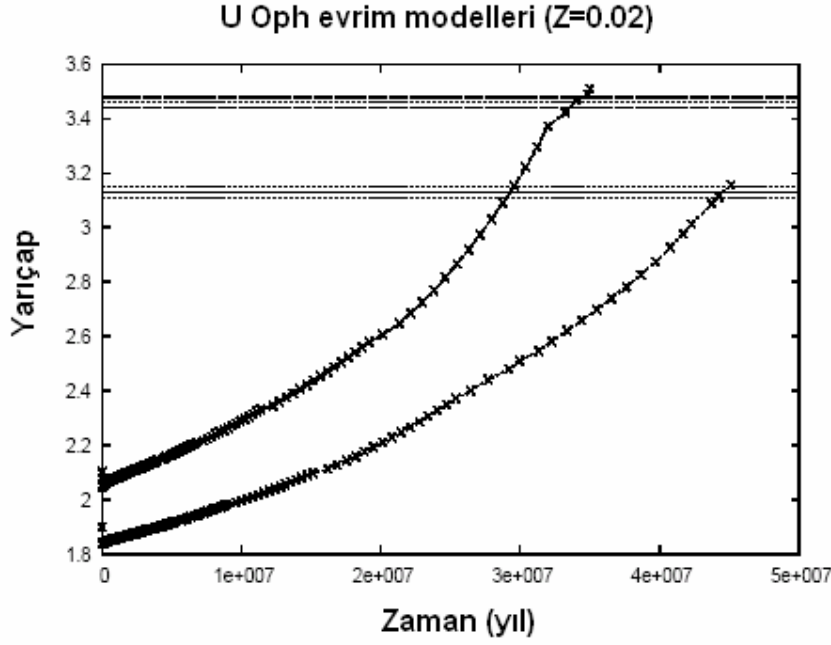
Gözlemsel kontroller için genel olarak U Oph olarak bilinen büyük kütleli genç tutulan çift yıldız sistemi ADS 10428 Budding ve grubu tarafından [43] incelenmiştir. Fotometrik analizler için ILOT teknikleri kullanılmıştır [44]. Gözlem sonuçları, Russell [45] ve Kopal 'ın [29] ünlü 'Royal Road' tutulan çift yıldız sistem analizlerinden faydalanarak Yeni Zelanda'nın Carter Ulusal Gözlemevinde ve

Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Astrofizik Araştırma Merkezindeki iki taraflı araştırmaların serisinin ürünüdür. Yüksek çözünürlü spektroskopi, radyal hızların elde edilmesine imkan vermiştir. Radyal hızlar, ışık eğrilerinden elde edilen orbital eğimi ile birleştirildiğinde Tablo 4.2 'deki kütle ve yarıçapları verirler. Tablo 4.2'de Budding ve grubunun sonuçları, Vaz ve grubunun [46] sonuçları ile birlikte verilmiştir. Vaz ve grubu, U Oph sisteminde farklı metal oranları için yıldız yaşlarını hesaplamışlardır.  $Z=0.02$  için birincil bileşenin yaşını 40 milyon yıl bulmuşlardır [46].

Tablo 4.2 U Oph sistemine ait gözlem sonuçları.

	$M_1$ (birincil)	$M_2$ (ikincil)	$R_1$ (birincil)	$R_2$ (ikincil)
Budding ve grubu	5.13 $M_{\odot}$	4.57 $M_{\odot}$	3.41 $R_{\odot}$	3.08 $R_{\odot}$
Vaz ve Grubu	5.27 $M_{\odot}$	4.74 $M_{\odot}$	3.48 $R_{\odot}$	3.11 $R_{\odot}$

Bu çalışmada, Paczyki 'nin yıldız model kodlarını kullanılarak, U Oph 'nin yapısı ve evrimsel şartları kontrol edilmiştir. Paczynski 'nin programlarının detaylı açıklamaları İnek ve grubu [47] tarafından verilmiştir. Koddaki üç programın demonstrasyon versiyonları Odell [48] tarafından oluşturulmuştur. İlk program olan GOB dış sınır şartlarını oluşturur. SCH programı yukarıda verilen nükleer enerji oluşum oranlarını kullanarak sıfır-yaş modeli oluşturur. Üçüncü program olan HB8, yıldız modelleri evrimi için GOB ve SCH 'ın sonuçlarını kullanır. Şekil 4.2 'de, HB8 programının sonuçları tipik genç bir yıldız için ( $Z=0.02$ ) sunulmaktadır.



Şekil 4.2 Paczynski Kodu 'na göre U Oph 'nin bileşenlerinin yarıçap evrimleri.

Şekil 4.2 'de, birinci bileşen ölçülen yarıçapına 33 milyon yılda ulaşmaktadır. İkinci bileşenin ölçülen yarıçapına ulaşana kadar 43 milyon yıl geçmektedir. Bulunan sonuçlar, Holmgren ve grubunun [49] bulduğu 63 milyon yıldan çok, Kamper'in [50] 30 milyon yıl sonucuna ve Vaz ve grubunun [46], 40 milyon yıl sonucuna daha yakındır . Bununla birlikte iki yarıçap arasındaki önemli farklılık, verilen tipik metal oranı ile uzlaştırılmaz görünmektedir. Normal olarak her iki bileşen için aynı kimyasal bileşim olması gerektiği beklenmesine rağmen, prensip olarak yarıçapların evrim uyumunda en azından yaş ve kimyasal bileşim olmak üzere iki parametrenin olması gerekmektedir [51]. İki bileşen için yarıçaplardan hesaplanan yaşlardaki farklılığın açıklanması bölgesel bileşim farklılıkları ile veya başka etkilerle çözülebilir.

## 5. SONUÇ VE TARTIŞMA

Tam bir yıldız modeli oluşturmak için dıştan içe doğru olan GOB integrasyonları , içten dışa doğru olan SCH integrasyonları ile birleşmelidir. Şekil 2.1’de bu programların kombinasyonu gösterilmiştir.

GOB programı, Şekil 3.1’deki gibi standart modeller ile karşılaştırılmış ve bu modeller ile uyumlu bulunmuştur. Yıldızların konvektif zarfları ile ilgilenen ve donukluk tablolarını okuyarak çalışan GOB programı ile Şekil 3.2’de verildiği gibi konveksiyon bölgesinin yeri belirlenip, bu bölgenin büyüklüğünün dış konvektif zarflara sahip yıldızlar için azalan kütle ile nasıl arttığı ise Şekil 3.3’de gösterilmiştir.

Radyatif bir atmosfer için çekim kararmasının etkileri açıkken, konvektif bir atmosfer için etkinin doğası açık olmadığı için GOB programı ile çekim kararma üslerini hesaplamaya karar verilmiştir. Lucy [2] tarafından önerilen formül tam olarak kullanıldığında, soğuk yıldızların ısıtmaları, etkin sıcaklıkları ve kütlelerinin oldukça geniş bir aralığı için benzer  $\beta$  ( $=0.07-0.1$ ) değerleri elde edilmiştir. Sonuçlar Tablo 3.1’de sunulmuştur. Tablodaki sonuçlara bakıldığında, yıldızın kütlesi arttıkça konveksiyon bölgesinin büyüklüğünü işaret eden  $\Delta R/R$  oranının azaldığı görülmektedir. Tabloda karışım uzunluğu parametresi  $\alpha$ ’nın farklı değerleri için hesaplanan  $\beta$  değerleri verilmiştir.  $\beta$ ,  $\alpha$ ’ya direkt olarak bir formülle bağlı değildir.  $\alpha$ , GOB programında girdi olarak verilen bir parametredir. Sonuçlara bakıldığında  $\beta$ ’nın, karışım uzunluğu parametresi  $\alpha$  ‘ya çok güçlü bir bağlılığı olmadığı ortaya çıkmaktadır.

Çekim kararmasının ışık eğrileri üzerine etkisini incelemek için “Binary Maker” programı kullanılmıştır. Şekil 3.4’de gösterildiği gibi model olarak W UMa tipi çift yıldız sistemi olan ve dış konveksiyon zarfına sahip olan OO Aql’nın parametreleri kullanılarak ışık eğrileri çizilmiştir. Çekim kararmasının azalmasının, yarıçaplarda ve dolayısıyla doldurma parametrelerinde artışı gerektirdiği sonucuna ulaşılmıştır. Literatürden alınan gözlemsel çekim kararma işareti  $\tau$  değerlerinden

seçilenler Şekil 3.5’ de gösterilmiştir. Bu şekil, konvektif bölgeler için bulunan gözlemsel  $\tau$  değerlerini hata payları ile birlikte sunmaktadır.

$\beta$  ve ışık eğrilerinin şeklini karakterize eden diğer parametreler arasındaki güçlü ilişkiden, özellikle de fotometrik ölçekteki ‘eliptik’ etkilerden dolayı, kapalı çift yıldız sistemleri için çekim kararmasının gözlemsel ölçümleri hala sonuçsuzdur. Gelecekte çok hassas ışık eğrileri elde edilebilir ve bu durumun gelişmesine, aydınlatılmasına imkan verebilir.

Jüpiter’in kızıl ötesi bölgesinde açığa çıkan akının genel yüzey dağılımına bağlı olarak ekvatorial ve kutupsal yönlerdeki kararırma oranının farklılığı, çekim kararırmasına atfedilir [52]. Bu tür çalışmalar, bu konu üzerine yapılacak olan gelecek çalışmalara ışık tutabilir.

Donuklukların yıldız yapı modellerine etkisini görmek için GOB programında farklı donukluk tabloları kullanılmıştır. Huebner ve grubunun donukluk tabloları [5] ile Iglesias ve Rogers’ın donukluk tabloları [6], 0.5 adımlarla -12’den başlayıp +3’e kadar olan yoğunluğun logaritmasının 31 değeri için ve 3.25’den başlayıp 0.075 adımlarla değişen logaritmik sıcaklığın 51 değeri için olan GOB değişim aralığı ile örtüştüğü için bir değişiklik yapılmadan GOB programında kullanılmıştır. Fakat Iglesias ve Rogers’ın diğer donukluk tabloları [7] ve Kurucz’un donukluk tabloları [3], GOB’un değişim aralığı ile tam örtüşmediği için Lagrange interpolasyon metodu kullanılarak bu tablolar GOB programında kullanılır hale getirilmiştir. Lagrange interpolasyon sonuçlarından bir örnek Şekil 3.7’de sunulmuştur. İnterpolasyon değerleri ile tablo değerlerinin oldukça uyumlu olduğu şekilden görülmektedir. Iglesias ve Rogers’ın donukluk tablolarındaki [7] donukluk değerlerinin farklı yoğunluklar için sıcaklıkla değişimi incelenmiş ve Şekil 3.6’daki gibi grafiğe dökülmüştür. Şekil 3.6’dan görüldüğü gibi donukluk pikinin sağ tarafında, yüksek yoğunluklu bölgede donukluklar, Kramer kanununu işaret etmektedir [8]. Yüksek sıcaklıkta donukluğa en büyük katkı serbest elektronlar tarafından sağlanır [8]. Sıcaklık belli bir değerden sonra artsa da serbest elektronların sayısı sabit bir değere doğru gider. Bu durum da donukluğu sabit bir değere doğru götürür.

Diğer donukluk tablolarının [5, 6, 3] ise sıcaklığa ve yoğunluğa bağlı olarak üç boyutlu çizimleri yapılmıştır. Çizimler Şekil 3.8'de sunulmuştur. Şekilden görüldüğü gibi Iglesias ve Rogers [6] donuklukları, Huebner ve grubunun [5] donukluklarına temel olarak benzerlik gösterirken, atmosferin dış kısımlarında farklılıklar gösterirler. Kurucz donuklukları [3] ise dış zarfta farklılıklar gösterir ve diğer donukluklara göre sıcaklığın daha düşük olduğu bölgelerde maksimum değerlere ulaşır. Bu durum, Kurucz'un çizgi soğurmalarını daha ayrıntılı hesaplamasından kaynaklanıyor olabilir.

Donuklukların yıldız yapı modellerine etkisini görebilmek için GOB ve SCH programları farklı donukluk tabloları için çalıştırılarak her iki programın verdiği yarıçaplardaki değişime bakılmıştır. Model olarak Schwarzschild'in kitabındaki [8] gibi 0.6, 1, 2.5, 5 ve 10 Güneş kütleli sıfır yaş yıldız modelleri ele alınmıştır. Sonuçlar Tablo 3.2'de verilmiştir. GOB programının atmosfer taban yarıçapları, B indisli olarak, SCH programının sınır yarıçapları ise OB indisli olarak verilmiştir. Tabloda SCH programının sınır yarıçaplarını karşılaştırabilmek için Schwarzschild'in sınır yarıçapları da aynı yıldız modelleri için verilmiştir. SCH programının sonuçları ile Schwarzschild'in sonuçları genel olarak uyumludur. Tablodaki sonuçlara göre zarf bölgesindeki donukluğun artması sonucu yarıçapta artış olduğu görülmektedir. LAOL donukluklarının, çizgi soğurma etkilerini ayrıntılı bir biçimde içeren daha yeni donukluklar ile değiştirilmesi sonucunda, hesaplanan yarıçaplar %5-10 oranında artmıştır. Stothers ve Chin [42] ise eski Cox ve Stewart donukluklarını [35], daha yeni olan ve metal oranı %50 arttırılan Huebner ve grubunun [5] donuklukları ile değiştirdiklerinde yarıçapta benzer şekilde %5-10 artış olduğunu hesaplamışlardır. Yarıçaptaki bu artış, tutulan çift yıldızların iyi gözlemlerinin analizleri ile kontrol edilebilir.

Paczynski Kodu'nun üçüncü programı olan HB8, donukluk tabloları ile çalışan GOB ve nükleer enerji oluşum oranlarını girdi olarak kullanan SCH programlarının sonuçlarını kullanarak çalışır. HB8 programı, bölgesel nükleer reaksiyon oranlarına ve zaman adımına göre hidrojen ve helyumun bileşimini değiştirir ve evrimleşmiş bir yıldız modeli oluşturur.

Nükleer enerji oluşum oranları Tablo 4.1-a - 4.1-f 'de verilmiştir. Hidrojen yanmasının gerçekleştiği p-p reaksiyonu ve CNO çevrimi ile oluşan enerji oluşum oranlarının, sıcaklığa bağlı değişimleri Şekil 4.1'de çizilmiştir. Şekilden görüldüğü gibi, düşük sıcaklıklarda p-p reaksiyonları, CNO çevrimine baskın gelmektedir. Yüksek sıcaklıklarda ise ( $\log T \sim 7.15$ 'den itibaren) CNO çevrimi, p-p reaksiyonlarına baskın gelmektedir.

Gözlemsel kontroller için Budding ve grubu tarafından [43] gözlemleri yapılan, U Oph olarak bilinen, büyük kütleli, genç, tutulan çift yıldız sistemi ADS 10428'in sonuçları kullanılmıştır. Tablo 4.2'de U Oph sisteminin bileşenlerinin kütle ve yarıçaplarına ait gözlem sonuçları, Vaz ve grubunun [46] gözlem sonuçları ile bir arada verilmiştir. Budding ve grubunun [43] bulduğu, U Oph sistemine ait kütleleri kullanarak Paczynski'nin kodlarından ilki olan GOB programı  $Z=0.02$  metal oranı için olan Iglesias ve Rogers [7] donukluk tabloları kullanılarak çalıştırıldıktan sonra GOB'un çıktılarını kullanan SCH programını ve en son her iki programın çıktılarını kullanan ve yıldız evrimi oluşturan HB8 programı bu sistemin bileşenleri için ayrı ayrı çalıştırılarak Şekil 4.2'deki gibi sistemin bileşenlerinin yarıçap evrimleri elde edilmiştir. Şekilden görüldüğü gibi birinci bileşen, gözlemsel olarak ölçülen yarıçapına 33 milyon yılda ulaşırken, ikinci bileşen ölçülen yarıçapına ulaşana dek 43 milyon yıl geçmektedir. Vaz ve grubu,  $Z=0.02$  metal oranı için U Oph sisteminin yaşını 40 milyon yıl bulmuşlardır [46]. Bu çalışmada HB8 programının sonuçlarına dayanarak sistemin yaşı ortalama olarak yaklaşık 38 milyon yıl olarak tahmin edilmiştir. Bu sonuç, Holmgren ve grubunun [49] aynı sistem için bulduğu 63 milyon yıldan çok, Kamper'in [50] bulduğu 30 milyon yıl sonucuna ve Vaz ve grubunun [46] 40 milyon yıl sonucuna daha yakındır.

Son zamanlarda Guo ve grubu [53],  $0.25 - 80 M_{\odot}$  aralığındaki yıldız modellerinde farklı  $Z$  değerleri için Eggleton'un kodunu kullanarak, yıldız evrimlerinin karışıma bağlı değişimini incelemiştir. Benzer çalışma yakın gelecekte bu farklı  $Z$  değerleri için yeni donukluk tabloları interpolate edilerek yapılabilir. Oluşturulan tablolar, Paczynski Kodları'nda kullanılabilir ve yıldızların yapısına ve evrimlerine etkileri incelenebilir. Gelecekte Budding [54]'in son günlerde yapmış olduğu gözlemsel çalışmaların teorisi çalışılabilir.

## KAYNAKLAR

- [1] Paczynski, B., *Acta Astron.*, 2, 20, (1970)
- [2] Lucy, L. B., *ZA*, 65, 89, (1967).
- [3] <http://cfaku5.cfa.harvard.edu/opacities/Rosseland/kamp02.ross>.
- [4] Mathews, J. H., Numerical Methods For Mathematics Science and Engineering, A Simon and Schuster Co., New Jersey, (1992).
- [5] Huebner, W.F., Merts, A. L., Magee, N. H. And Argo, M. F., Los Alamos Scientific Report LA-6760-M., (1977).
- [6] Iglesias, C. A. and Rogers, F. J., *ApJ*, 371, 408, (1991).
- [7] Iglesias, C. A. and Rogers, F. J., *ApJ*, 464, 943, (1996).
- [8] Schwarzschild, M., Structure and Evolution of the Stars, *Princeton University Press*, New Jersey, (1958).
- [9] Eddington, A. S., The Internal Constitution of the Stars, *Cambridge University Press*, (1930).
- [10] Chandrasekhar, S., Stellar Structure, *University of Chicago Press*, Chicago, (1938).
- [11] Loudon, M. and Budding, E., *SouSt*, 37, 17, (1996).
- [12] Paczynski, B., *Acta Astron.*, 2, 20, (1970).
- [13] Ziolkowski, J., *Acta Astron.*, 20, 59, (1970).
- [14] Mihalas, D., Stellar Atmospheres, W. H. Freeman and Co., San Francisco, (1978).
- [15] von Zeipel, H., *MNRAS*, 84, 684, (1924).
- [16] Kitamura, M., In: İbanoğlu, C. (Ed.), *Proc.NATO ASI on Active Close Binaries*, 375, 69, (1990).
- [17] Baker, N., *Godard Institue for Space Studies. NASA, New York.* (1963).
- [18] Claret, A., *A&A*, 131, 395, (1998).



- [19] Kitamura, M., Nakamura, Y., *Ap&SS*, 145,117, (1988).
- [20] Kitamura, M., Nakamura, Y., *ASPC*, 38,218, (1993).
- [21] Georgiades, N., Rovithis-Livaniou, H., Djurasevic, G., *Proc. COMU Ap. Res. Center*, 3, 50, (2003).
- [22] Budding, E., Kopal, Z., *AP&SS*, 9, 43, (1970).
- [23] Takeda, S., *Mem. Coll. Sci. Kyoto Univ. Series A*, 20, 47, (1937).
- [24] Eaton, J., Wu, C. C., Rucinski, S.M., *ApJ*, 239, 919, (1980).
- [25] Rafert, J. B., Twigg, L. W., *MNRAS*, 193, 79, (1980).
- [26] Wilson, R. E., Devinney, E. J., *ApJ*, 166, 605, (1971).
- [27] van Belle, G. T., et al., *ApJ*, 494, (2006).
- [28] Allen, C. W., *Astrophysical Quantities. The Athlone Press*, London, (1974).
- [29] Kopal, Z., *Close Binary Systems. Chapman and Hall.*, London, (1959).
- [30] Bradstreet, D., *Binary Maker 2.0 Contact Software*, Norristown, PA, (1993).
- [31] Carson, T. R., *A & AS*, 75, 385, (1988).
- [32] Strömgren, B., mrs. conf., 461, (1967).
- [33] Prialnik, D., *An Introduction to the Theory of Stellar Structure and Evolution, Cambridge University Press*, United Kingdom, (1999).
- [34] Metsel, L., *Proc. Camb. Philos. Soc.*, 46, 331, (1950).
- [35] Cox, A. N. and Stewart, J. N., *ApJ*, 19, 174, (1969).
- [36] Young, P. A., Mamajek, E. E., Arnett, D., Liebert, J., *ApJ*, 556, 230, (2001).
- [37] Kurucz, R. L., *ASPC*, 108, 160, (1996).
- [38] Kurucz, R. L., *ASPC*, 44, 87, (1993).
- [39] Anders, E., Grevesse, N., *Geochim. Cosmochim. Acta*, 53, 197, (1989).
- [40] Somerville, W. B., *ApJ*, 139, 192, (1964).
- [41] Dalgarno, A., Williams, D. A., *ApJ*, 136, 690, (1962).
- [42] Stothers, R. B., and Chin, C. W., *ApJ*, 381, 67, (1991).

- [43] Budding, E., İnek, G., Demircan, O., *MNRAS*, 2008 (Kabul gördü. Basımda)
- [44] Banks, T., Budding, E., *Ap&SS*, 167, 221, (1990).
- [45] Russell, H. N., *Centennial Symposia, Harvard Observatory Monographs*, Cambridge, MA., 7, 181, (1948).
- [46] Vaz, L. P. R., Andersen, J., Claret, A., *A&A*, 469, 285, (2007).
- [47] İnek, G., Böke, A., Yılmaz, O., Budding, E., *Turk J Phys*, 32, 65, (2008).
- [48] Odell, A. P., Pesnel, W. D., *ASPC*, 135, 69, (1998).
- [49] Holmgren, D. E., Hill, G., Fisher, W., *A&A*, 248, 129, (1991).
- [50] Kamper, B. C., *Ap&SS*, 120, 167, (1986).
- [51] Andersen, J., *ASP Conference Series*, 40, 347, (1993).
- [52] Budding, E., *Ap&SS*, 296, 17, (2005).
- [53] Guo, J. P., Zhang, F. H., Chen, X. F., Han, Z. W., *Chin. J. Astron. Astrophys.*, 8, 262, (2008).
- [54] Budding, E., *Proceedings of 10th Asian-Pacific Regional IAU Meeting*, 10, 1, (2008).

## ÖZGEÇMİŞ

Gülay İnek 18 Mayıs 1972 yılında Aydın'da doğdu. Lisans eğitimini 1989 – 1993 yılları arasında Uludağ Üniversitesi Necatibey Eğitim Fakültesi Fizik Bölümünde tamamladı. 1995 -1997 yılları arasında Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalında “ Çeşitli Kalınlıkta Alüminyum Filmlerden Geçen Ve Yansıyan Pozitronların Enerji Dağılımları” Tez konulu çalışmayı Doç.Dr. Asuman Aydın ile çalışarak Yüksek lisansını tamamladı. Doktora çalışmaları Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalında 2003 yılı Eylül ayında başlamıştır. Doktora tezinde Prof. Dr Edwin BUDDING ile çalışmıştır. Gülay İnek 1993 yılından itibaren Balıkesir Üniversitesi Fen –Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümünde Araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.

# **EKLER**



This article was originally published in a journal published by Elsevier, and the attached copy is provided by Elsevier for the author's benefit and for the benefit of the author's institution, for non-commercial research and educational use including without limitation use in instruction at your institution, sending it to specific colleagues that you know, and providing a copy to your institution's administrator.

All other uses, reproduction and distribution, including without limitation commercial reprints, selling or licensing copies or access, or posting on open internet sites, your personal or institution's website or repository, are prohibited. For exceptions, permission may be sought for such use through Elsevier's permissions site at:

<http://www.elsevier.com/locate/permissionusematerial>



ELSEVIER

Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)

ScienceDirect

New Astronomy 12 (2007) 427–434

New Astronomy

[www.elsevier.com/locate/newast](http://www.elsevier.com/locate/newast)

## The role of stellar envelope convection in gravity-darkening and its relation to observational data

G. İnek<sup>a,\*</sup>, A. Böke<sup>a</sup>, O. Yılmaz<sup>b</sup>, E. Budding<sup>b,c</sup>

<sup>a</sup> *Balıkesir University, Faculty of Arts and Sciences, Department of Physics, Çağış Campus, Balıkesir, Turkey*

<sup>b</sup> *Çanakkale Onsekiz Mart University, Faculty of Arts and Sciences, Department of Physics, 17100 Terzioğlu Campus, Çanakkale, Turkey*

<sup>c</sup> *Carter Observatory, P.O. Box 2909, Wellington, New Zealand*

Received 11 September 2006; received in revised form 14 December 2006; accepted 21 December 2006

Available online 29 December 2006

Communicated by J. Silk

### Abstract

We study the role of convection in the surface heat flow of low mass stellar envelopes with the aid of Paczynski's public domain program program GOB. This role is important, for example, for the analysis of light curves of close binary stars. We have considered atmospheric models for a range of masses similar to the components of contact or near-contact binaries between  $0.4$  and  $1.1M_{\odot}$  and examined the effects of changing luminosity, surface temperature and mixing length for stars of given mass. Our presentation includes checks of the modeling against published standard stellar envelopes. A slight program modification allowed gravity darkening coefficients for selected models to be calculated directly.

If the procedure proposed by Lucy is followed, similar values of the index  $\beta$  ( $\sim 0.06$ – $0.1$ ) are obtained for a fairly wide range of masses, luminosities and effective temperatures of cool stars. There also appears no strong dependence on the mixing-length parameter  $\alpha$ . There are, however, physical differences between the conditions that apply to this derivation of the index and those of a photosphere distorted by rotation and tides, but having net dynamical stability. Thus, the dependency of  $T_e$  on  $g$  was argued to come from the ratio of partial derivatives of the adiabatic constant  $K$  for the layer where convection starts; but a subconvective equipotential surface, where  $K$  would be constant, cannot coincide with such a layer. The adopted procedure is therefore inappropriate, and would involve different heat transfer regimes in different radial directions (say, polar or equatorial). A corresponding evaluation for the layer in which the convective flux becomes maximal shows less sensitivity to  $T_e$ . The corresponding index is then much closer to, or even greater than, the von Zeipel value.

Other arguments are also considered, including those of Anderson and Shu [Anderson, L., Shu, F.H., 1977. *ApJ* 214, 798] about the independence of the convective flux to local gravity, as well as the role of superphotospheric circulation effects, which could reduce the gravity darkening index to less than its subphotospheric value.

Observational evaluations of gravity darkening for close binary systems, in general, are still inconclusive, due to the strong correlation between  $\beta$  and other parameters characterizing the light curve shape, particularly in the scale photometric 'ellipticity' effects. It is possible that very precise light curves that may be obtained in the future will allow this situation to be improved. The general surface distribution of emergent flux in the far infra-red of Jupiter may be a pointer in the direction of future studies of the subject.

© 2006 Elsevier B.V. All rights reserved.

PACS: 97.10.Cv; 97.10.Ex; 97.10.Ri

Keywords: Stars; Stellar models – stars; Convection – stars; Checks of theory

\* Corresponding author. Tel.: +90 266 6121000; fax: +90 266 6121215.  
E-mail address: [inlek@balikesir.edu.tr](mailto:inlek@balikesir.edu.tr) (G. İnek).

## 1. Introduction

The nature of gravity darkening appears still not very clear, from both theoretical and observational points of view, but it is an important effect for analysis of light curves of distorted stars (particularly contact binaries). Even the name of the effect – sometimes ‘darkening’ sometimes ‘brightening’ – reflects this lack of clarity. In this paper, we keep to the older usage of *gravity-darkening*, although it is clear that for a radiative atmosphere classical theory predicts that the local flux increases in proportion to the local gravity on a distorted stellar surface. The arguments were spelled out in some well-known work of von Zeipel (1924). For a convective atmosphere the nature of the effect is not self-evident. In what follows, we will present a brief review, collecting background studies and redoing the calculations. For that, we have applied the stellar model code GOB (Paczynski, 1970). We will discuss how we used and checked this program.

The ‘gravity-darkening’ coefficients come from classical theory of a star’s outer envelope. If the flux through these layers depends only on the temperature gradient, and the temperature is constant along equipotential surfaces (the ‘Clairaut’ stability criterion, or ‘barotropic’ condition), then the flux will be inversely proportional to the relative separation of these surfaces. But gravity itself has such an inverse proportionality. Hence, we deduce that the flux is proportional to gravity (the ‘von Zeipel law’). In practice, this approximation seems to give a reasonable accord with observations, at least for stars whose envelopes are dominated by a flux essentially propagated by radiative transport (cf. e.g. Kitamura, 1990; see also Fig. 5, below). For observational analyses, it has been common to write  $F \propto g^\tau$ , where  $F$  is the bolometric surface flux,  $g$  is the gravity and  $\tau$  is known as the gravity-darkening index. If energy transfer in the sub-surface layers is purely radiative, the bolometric value of  $\tau$  is set as unity ( $\tau = 1$ ) according to the von Zeipel law.

Some years ago, Lucy (1967) predicted a different value for  $\tau$  for an envelope in which heat was transferred mainly by convection in the outer layers. He found, empirically,  $\tau = 0.32$ , using atmospheric models by Baker (1963). Lucy utilized the convective envelope models’ data for depth where the local temperature gradient first becomes super-adiabatic. We should note at this point the use of the ‘effective temperature’  $T_e$  to characterize the heat flux. Since, by the definition of  $T_e$ ,  $F = \sigma T_e^4$ , we can also write  $T_e \propto g^\beta$ , as did Lucy (1967), so that  $\beta = \tau/4$ . Hence,  $\beta$  should be 0.25, when the energy transfer is purely radiative. According to Lucy, however,  $\beta \approx 0.08$  for stars with convective envelopes.

Claret (1998) has also considered this subject, making use of evolving models. He presented the gravity-darkening exponent as a function of mass and age, developing a ‘tri-

angles’ method for the structural calculations of evolving stars.<sup>1</sup> Claret reasoned that the often simply adopted values  $\beta = 0.25$  and  $\beta = 0.08$  for radiative and convective envelopes should have a smooth transition between the two energy transport mechanisms. His findings seem to accord with the studies of Kitamura and Nakamura (1988), who found no sudden transition of light curve trends at spectral type  $\sim F5V$ , as the two indices imply (cf. also Kitamura and Nakamura, 1993).

It has sometimes been said that, at the level of existent light curve quality for eclipsing binaries, it is not possible to discriminate between alternative effects of convection on the surface heat distribution or internal structure (Georgiades et al., 2003). In fact, eclipsing binary light curves depend on a number of parameters that may produce similar light curve ‘ellipticity’ through the combined effects of their variations (Budding and Kopal, 1970). Because of this, photometry may be compromised as a discriminatory tool for theory. However, it was pointed out already by Takeda (1937) that the gravity darkening effect is not small: at optical wavelengths, it effectively doubles the scale of inter-minimum rounding of the light curve that would be due to tidal distortion alone. It may thus have a critical role to play in determining whether a very close binary is photometrically in an ‘overcontact’ state or not (see also, Kopal, 1959).

Observational determinations of gravity darkening exponents were reported by Eaton et al. (1980) and Rafert and Twigg (1980). Eaton et al. (1980) suggested an ‘observational’ convective gravity darkening index  $\beta = 0.054 \pm 0.02$  (based on three separate determinations for CC Com, W UMa and RT Lac). Rafert and Twigg (1980) gave an average value of  $\beta$  for both A and W-type W UMa stars that turned out as 0.08. They used Wilson and Devinney (1971) models with  $\beta$  as a free parameter in their light curve fittings. They had, however, already presumed that the stars in question were contact systems, i.e. they had adopted a predetermined common envelope photospheric model. We should note here that the ‘A-type’ W UMa systems are usually characterized by radiative atmospheres, for which the low exponent is not expected. Kitamura and Nakamura (1988) also analyzed gravity darkening exponent from observations. In their results,  $\beta$  varies through  $\sim 0.14$ – $0.46$  for W UMa binaries. van Belle et al. (2006) found  $\beta = 0.078_{-0.059}^{+0.052}$  for spectral type of A7IV–V in their best fit. Djurasevic et al. (2003) also estimated the gravity darkening exponents for Roche lobe

<sup>1</sup> In principle, for an evolving model, after each time step in the two-point boundary value problem, the inward numerical integration of the outer layers should be carried out again. However, if the external boundary conditions of the interior are unchanged at the fitting point  $M_F$ , the corresponding envelope structure is not substantially changed in form. In practice, three envelope computations are performed, corresponding to three close points in the HR diagram. If the next point of the evolutionary track is within this triangle, interpolated envelope data can be used without loss of accuracy. If this condition is not fulfilled then more envelope integrations are necessary.

filling components of semi detached eclipsing binaries through light curve analyses. In a sequel to their study, Djurasevic et al. (2006) derived more empirical gravity darkening exponents for Roche lobe filling binary components. We consider such results further in Section 2.3.

Since there is clear ambiguity from observational data about  $\beta$ , we decided to reinvestigate its value for low mass stellar convection zones using the Paczyński (1970) program GOB. This is essentially similar to the original procedure of Lucy, except that we have user controlled parameters, rather than referring to published tables.

## 2. Method

### 2.1. Envelope model program

Among computer programs constructed for calculating theoretical structures of stars are three public-domain programs produced by Paczyński (1970) (the ‘Paczynski code’), originally developed at JILA with previous input from J.C. Cox. They have been used by various groups to study models of normal Main Sequence type stars and their evolution. The approach relies on formulation of the structure equations (cf. e.g. Schwarzschild, 1957) as a two-point boundary-value problem (cf. e.g. Mathews, 1992). The program GOB, the first part of the Paczyński code, generates outer boundary conditions, i.e. it deals with the numerical integration of the envelope region of the star.

A self-consistent stellar model with given mass and composition, will determine, in principle, two surface quantities: the emergent luminosity  $L$  and (photospheric) radius  $R$ . These two quantities determine a third: the effective temperature  $T_e$ , defined by  $L = 4\pi R^2 T_e^4$ . Given trial outer boundary values, GOB integrates inwards to allow matching to a separate centre-out integration at an internal fitting layer. Actually, we do not specify  $R$  directly in GOB, but rather give a ‘top temperature’  $T_0$ , that applies to the outermost layer. Normal stellar atmosphere models can be expected to fix  $T_0$  as a direct fraction of  $T_e$ , i.e.  $T_0 = f_T T_e$ . In our version of GOB,  $f_T$  is set by the user: for this, we set  $T_0 = 0.727 T_e$ , checking the result against the standard solar photosphere model of Allen (1974) (Fig. 1). The GOB output was also compared with the classical grey atmosphere plane parallel model, for general interest. Although the outermost layers would not be accurately represented by such approximations the results indicate the level of general consistency and capability for modelling discrimination. Our main concern, however, is about the subphotospheric layers defining the emergent flux, in the manner considered by Lucy and others.

Another quantity, determined in a comparable way, is  $\tau_e$ , the optical depth at which the local temperature  $T(\tau_e) = T_e$ . This relation can be checked against the standard ‘grey atmosphere’ (cf. e.g. Mihalas, 1978) shown in Fig. 1. In any case, the user-set outer boundary values of  $(\log) L$  and  $(\log) T_0$ , through the fixing of  $T_e$ , determine  $R$  in GOB.

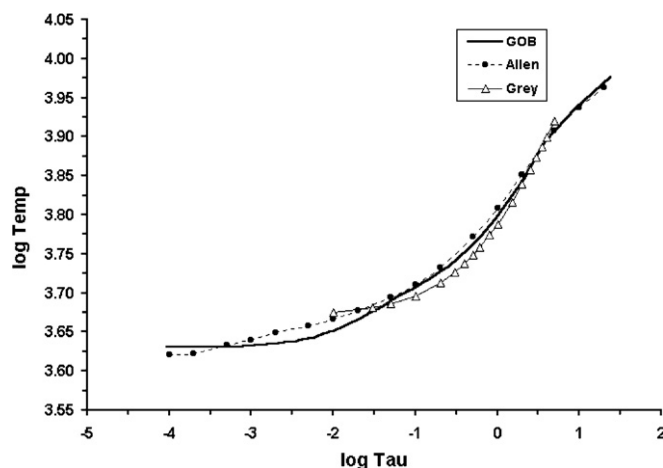


Fig. 1. Temperature changing with optical depth (GOB, Allen and Grey models).

GOB outputs the run of mass fraction  $M_r$ , temperature  $T$ , optical depth  $\tau$ , turbulent velocity  $v_T$  and energy density  $E$  through the envelope. Such variables can then be easily graphed. This program only applies to envelopes, not to the nuclear generation region, i.e. the integrated flux is presumed constant ( $L = \text{const.}$  through the integration region), resulting in an economy of computing time. For this to hold good, however, the temperature at the bottom of the integration region must be below  $\sim 10^7$  K. GOB can also be easily run with different accuracy and mixing length parameters ( $\alpha$ ).

We located the convection zone in the output file for low mass models. This is shown in Fig. 2, where we give the run of temperature with optical depth for our GOB integrations. We compared the run of local temperature of the model with that following from the Eddington approximation for a radiative atmosphere. The ‘bump’ in the output, where the temperature that would correspond to a purely radiative regime differs from the calculated local

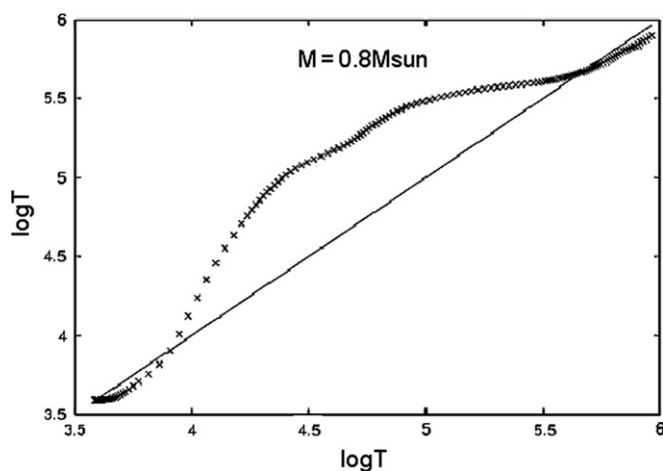


Fig. 2. Run of local temperature from GOB (points) against that following from the Eddington approximation (straight line) for a radiative model atmosphere.



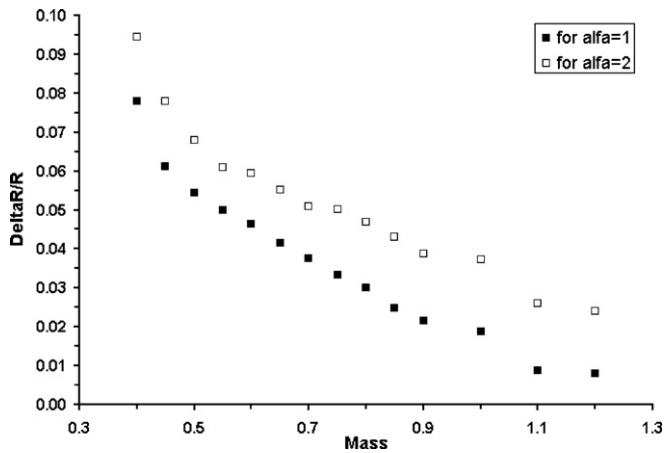


Fig. 3. The convection zone size ( $\Delta R/R$ ) increases with decreasing mass for low mass stars. The diagram also shows the effect of different mixing length parameter ( $\alpha$ ) values.

temperature, marking the location of the convective zone, is clearly visible. Note that the real temperature trend comes back to the same dependence on optical depth in the photospheric layers as it would have done if there had been no convection. This follows from the foregoing definition of the effective temperature and the required constancy of the total luminosity through the envelope. We can also see how this zone increases in relative depth with decreasing mass for different envelope integrations (Fig. 3).

## 2.2. Calculating $\beta$

We first located the bottom layer of the convection zone for a given mass model in the output, which tabulates the envelope integration, step by step. There is general agreement that below this layer the temperature gradient should revert to a von Zeipel (1924) form. Lucy took the adiabatic constant (sometimes called specific entropy) defined by

$$\log K = \log T - (\gamma - 1) \log \rho \quad (1)$$

in the layer where the convection starts, and examined its dependence on both  $T_e$  and  $g$ . This adiabatic constant, a linear function of barotropically defined variables in the inner regions of the star, but argued to be constant over a surface of incipient convection, then yields a possible numerical value for  $\beta$  as (Lucy, 1967):

$$\beta = - \left( \frac{\Delta \log K}{\Delta \log g} \right)_{T_e} / \left( \frac{\Delta \log K}{\Delta \log T_e} \right)_g \quad (2)$$

As mentioned,  $T_e$  can be set in GOB, and  $g$  follows from  $g = GM/R^2$ . We change  $R$  at given  $T_e$  (and hence  $g$ ) by changing the entrant luminosity value. The numerator fraction (with  $T_e = \text{const.}$ ) in Eq. (2) is thus evaluated directly, since by setting  $T_0$  we fix  $T_e (=1.376T_0)$ . The value of  $K$  in the convective layers is simply calculated from Eq. (1) using the listed values of  $T$  and  $\rho$ : the differences  $\Delta \log K$  from layer to layer, or in an assigned layer from model to model, then easily follow. Changing the entrant parameter  $\log L$

(only) changes the size of the envelope, and therefore the effective gravity. Since,

$$\log L = 4 \log T_0 + 2 \log R + \text{const.}, \quad (3)$$

when we increase  $\log L$  by  $s_1$ , say, with  $T_0$  constant, we must increase the corresponding  $\log R$  by  $\frac{1}{2}s_1$ , and so decrease  $\log g$  by  $s_1$ . Therefore, the numerator in Eq. (2) =  $\Delta \log K/s_1$ .

Now, when we increase  $\log T_0$  by  $s_2$ , say, if we kept the parameter  $\log L$  at its original value, there would be a corresponding drop in  $\log R$  by  $2s_2$ , so if we simply repeated the foregoing procedure, using  $\log T_0$  rather than  $\log L$  to find the denominator fraction, it would not correspond to a true partial derivative, since there would be a variation of  $g$  with the step  $s_2$ . But if, at the same time as the step in  $\log T$ , we increase  $\log L$  by  $4s_2$ , then  $\log R$  (hence  $g$ ) does not change. In this way, we can evaluate the proper partial derivative. For convenient evaluation, these two steps should be equivalent, i.e.  $4s_2 = s_1$ . The denominator is calculated by keeping the increment in  $\log L$  by  $s_1$  from the second run, then increasing  $\log T_0$  by  $\frac{1}{4}s_1$ , so that the radius returns to its original value and we can compare directly the relative effects of independent changes of gravity and effective temperature on the adiabatic constant.<sup>2</sup> In this way, we can check local  $\beta$  values using a GOB-type program. In a series of experiments, we have changed masses, while keeping other basic parameters constant (apart from these discussed internal changes to  $L$  and  $T_0$  used to evaluate  $\beta$ ).

Lucy also considered the variation of  $\beta$  with the mixing length parameter  $\alpha$ . Although he only tabulated one change ( $\alpha = 2$ ), he appears to have concluded that there was no dependence on this parameter. We wanted to check this point further and carried out a second series of experiments. The results are shown in Table 1.

## 2.3. Comparison with observations

Various investigators have reported the results of analysis of observational data to find ‘empirical’ gravity-darkening indices, as mentioned in the Introduction. This concerns especially the light curves of close binary systems. Since the coefficients of the proximity-effect terms for such data are factored by both  $\tau$  and powers of the fractional radii  $r^i$  in a direct linear combination (cf. e.g. Kopal, 1959), it seems clear that the photometric effects of any changes of  $\tau$  can be re-created by corresponding alternative changes of  $r$ , at least concerning the interminimum rounding. We checked this point by practical experiment. For this, we used the ‘Binary Maker’ (Bradstreet, 1993) program to examine the differences in light curves by changing the gravity-darkening parameter. We have plotted normal-

<sup>2</sup> The maintenance of constant radius, and thus potential for a one-dimensional analysis of physical structure, by setting  $(\Delta \log T_e)_{\log g} = -\frac{1}{4}(\Delta \log g)_{\log T_e}$ , can be seen as equivalent to  $\beta = 0.25$  for an equipotential.

Table 1

Gravity darkening exponent  $\beta$  for different mixing length parameter using program GOAL

$M (M_{\odot})$	$\log L$	$\log T_0$	$\Delta R/R$	$\beta (\alpha = 0.2)$	$\beta (\alpha = 0.5)$	$\beta (\alpha = 1.0)$	$\beta (\alpha = 2.0)$
0.4	-1.21	3.49	0.0813	0.089	0.068	0.09	
0.5	-0.92	3.53	0.0508	0.177	0.078	0.07	0.076
0.6	-0.67	3.55	0.0461	0.192	0.081	0.076	0.067
0.7	-0.47	3.57	0.0376	0.195	0.092	0.068	
0.8	-0.29	3.59	0.0302	0.237	0.11	0.061	
0.9	-0.14	3.61	0.0216	0.253	0.18	0.065	0.075
1.0	0.0	3.62	0.0162	0.230	0.31	0.061	0.054
1.1	0.13	3.64	0.00869	0.252	0.15	0.09	0.061
1.2	0.24	3.65	0.000889	0.220	0.16	0.016	0.053

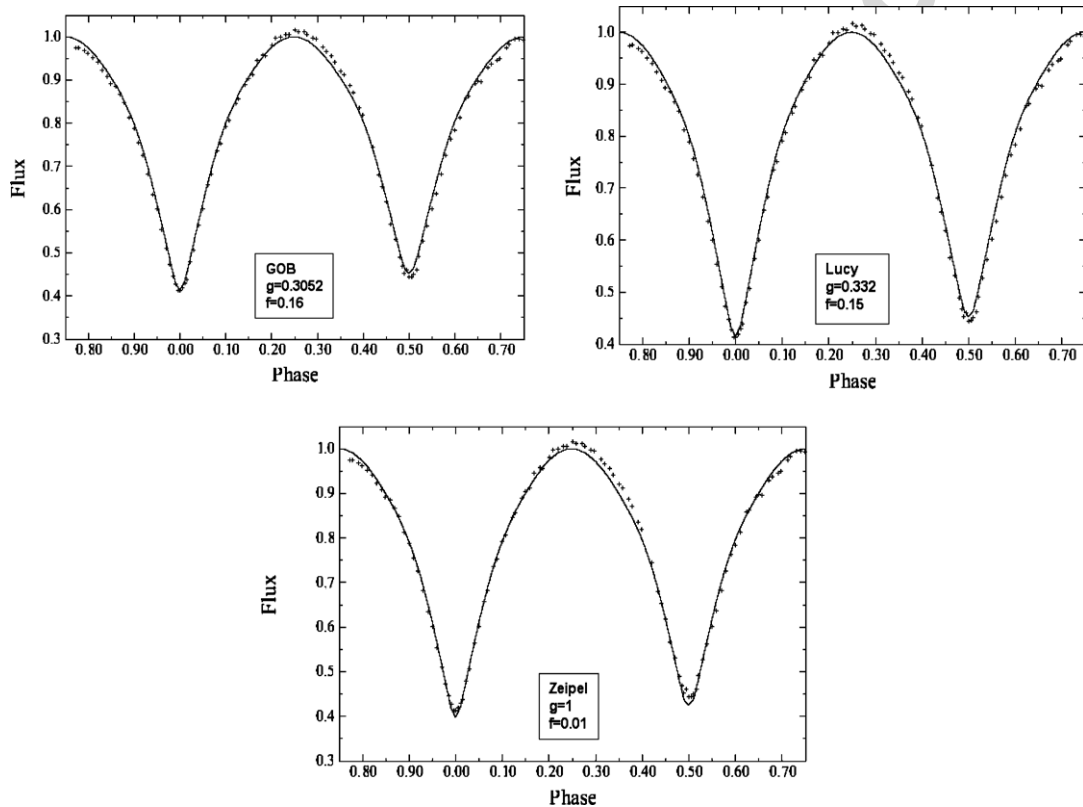


Fig. 4. Light curves of close binary system OO Aql and the best fits with different gravity-darkening exponents taken from Lucy, von Zeipel and the GOB program, respectively. The diagram shows that essentially similar fits to the observed data can be obtained with different combinations of parameters, particularly that lowering  $\beta$  will require a corresponding increase in the radii. (In this contact-system both mean radii are effectively increased together, and in proportion, by the single ‘fillout’ parameter  $f$ .)

ized flux versus phase (light curves) using the parameters of the W UMa type binary system OO Aql as a model, in Fig. 4.

This point is reflected in ‘observational’ values of  $\tau$  in the literature, a selection of which are shown in Fig. 5. There appears a comfortable consensus between observations and theoretical expectations among the radiative envelopes of hotter stars (earlier than F0 type). For the range in which convective effects become present in stellar envelope models Fig. 5 indicates a diversity of results, both in actual values and error expectations. We believe these results show that observations of the kind studied do not confirm any particular theory: essentially for the reasons given above.

### 3. Discussion

Basically, the flux should be proportional to the potential gradient in the deeper layers of the envelope, otherwise hydrostatic balance of the star would not be possible. But there is a real discussion about what happens in the outermost layers of the envelope. One argument is that the local temperature would decline in regions of lower heating, which would change the local temperature gradient and thus have a feedback effect on flux. The implied failure of equilibrium would cause a global circulation of gas from the hotter poles to the cooler equator (for a rotating star). This would warm up the outer parts of the atmosphere near the equator and tend to restore the lower temperature

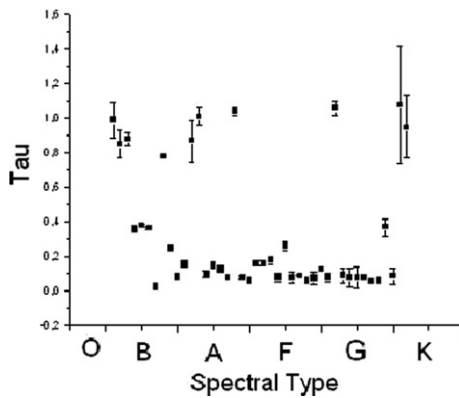


Fig. 5. Empirical gravity-darkening deduced for stars in detached close binaries. Some differences in findings of different authors appear for cooler stars (Sources are given in the text.).

gradient there. There would similarly be a cool current from the equator to the poles. This process, in the case of a binary system, involving the hydrodynamics of a rotating, tidally distorted fluid mass with inter-component and internal flux interactions, could well become complicated in detail. Local variations of mean molecular weight are also possible (cf. Kırbyık and Smith, 1976). But, it is feasible that there could be some quasi-equilibrium at a local temperature gradient that has a lesser variation over the photosphere than the von Zeipel law. The  $\tau = 1$  form is then softened to a weaker average dependence on position.

Such a case was presented by Smith (1970), on the basis of a perturbation analysis for the circulation effects in the outer layers of the star. Smith derived the first-order expression

$$\tau_{\text{rad}} = \frac{4}{3} \left( 1 - 2 \left( 2 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right) \sim 0.46 \quad (4)$$

for a classical Eddington-type grey atmosphere. A similar value was found (for similar reasons) by Osaki (1972). If this softening applies to the radiative atmosphere by reducing  $\tau$  by about 50%, then we might suppose that it could similarly apply to a convective atmosphere, since the standard mixing length theory gives convective heat transfer a diffusive character (see below). The implied extra local heating in the equatorial region would come from more thoroughly circulated matter there, it could be argued. Or, using a value of  $\gamma = 5/3$ , for an ideal gas, and replacing the barotropic constant characterizing an equipotential by the linear combination ( $\log T - 2/3 \log \rho$ ) characterizing Lucy's 'adiabat', the resulting ratio of partial derivatives become 1/3 of the barotropic value, i.e.  $\beta = 0.08$ . It is implicit here that the adiabats continue outward from an equipotential underlying the convective zone, where the adiabatic constant would have a particular boundary value.

There are, however, questions that can be raised about the Lucy analysis. It is true that, for the models in general, all heat fluxes end up on the same kind of temperature gra-

dient in the zone immediately below the convective layers. This is determined by the net radiative luminosity from the photosphere (Fig. 2). It is also true that the adiabatic constant is a simple linear combination of barotropic variables, at least in those deeper subconvective (radiative) layers. However, whether the adiabatic constant really should have the same value all over the layer in which convection starts can be challenged. Inspection of the GOB outputs shows that  $\log K$  at the lower convective boundary increases after setting the surface gravity to be less (equivalent to going from pole to equator). The effective temperature would then have to decrease to restore  $\log K$  in this layer to constancy, but not by much, due to a high sensitivity of  $K$  to  $T_e$  around this layer. It could be expected already from Fig. 2, that the fall of the radiative component behind the total energy flux at the base of the convection zone brings about an enhanced local temperature variation in this boundary region.

But the  $g$ -variation over an equipotential is automatically accompanied by a proportional change of  $T_e$ . The sensitivity to  $T_e$  for the layer in which convection starts means that convection cannot start uniformly over an equipotential. If we suppose it started at a mid-latitude on a particular equipotential, say, the increase of  $T_e$  toward the pole would move the convection's initial layer higher up there, it would be pushed lower down towards the equator. The lower empirical values of  $\beta$  in the selected layer thus correspond to inappropriate comparisons of different types of subphotospheric heat transfer. It is not sufficient to find the real dependency of  $T_e$  on  $g$  over the convection's lower boundary layer to restore  $\log K$  to constancy there.

In any case, the particular layer selected by Lucy is not the most typical of the convective flux environment. Excess heat that goes into the convection at the base of the zone is later put back into the radiative luminosity below the photosphere, as can be seen from Fig. 2. We sought to enquire into this point by evaluating the corresponding value of  $\beta$  in the layer where the convection is most established, i.e. where the mean turbulent velocity (also derived in GOB) is maximal. The value of  $\log K$  in this layer is less sensitive to the layer position and on that basis may be more appropriate for the evaluation of Eq. (2). It is interesting that the value of  $\beta$  in these layers tends to approach, or even exceed, the von Zeipel value.

Another aspect to the discussion was presented by Anderson and Shu (1977). Although some authors regard Anderson and Shu's presentation as part of their special contact discontinuity theory of common envelope binaries, and therefore see their gravity-darkening formula as restricted to that context, their arguments about heat exchange in the outer envelopes of distorted stars had a general character. Thus, we can generally expect that a heat flux  $F$  (including by convection) should scale with  $\Delta T_{\text{ex}}/\sigma \Delta r$ , where  $\Delta T_{\text{ex}}$  is some local (radial) temperature excess,  $\sigma$  is a local heat interaction cross-section per unit volume, and  $\Delta r$  is a given radial distance. In other words, formally there

is a correspondence for the convective flux to the general form of a diffusive heat transfer, in which a temperature gradient (reflected here in the ratio of differentials) is scaled by a transmission coefficient per unit area. In the standard mixing length theory (cf. Mihalas, 1978) the opacity factor of the denominator is replaced by a turbulence interaction scale, or mixing length  $l$ , in the numerator. In fact,  $F \propto (l\Delta T_{\text{ex}}/\Delta r)^n$ , where  $n$  would be, on aggregate 2, due partly to an induced gradient of mean molecular weight and more so to the high efficiency of convective heat redistribution, where a linear flow velocity  $v_L \propto \Delta T_{\text{ex}}^{3/2}$ .

Anderson and Shu (1977) noted the important point that the temperature excess in question cannot be that in the layers above the photosphere, where differences of local temperature cannot significantly influence the emergent (photospheric, i.e. radiative) flux, but that the convective flux is defined at some internal depth, where the local energy density is significantly greater than that in the photosphere. The adopted formula allows for  $\Delta T_{\text{ex}}$  being different in, say, polar and equatorial directions, since in the considered boundary layer  $\Delta r$  where convection starts, the temperature excess can be different in these directions, due to the differing gradient of equipotentials, as noted above.

Anderson and Shu (1977) argued that the  $g$  dependence of  $\Delta T_{\text{ex}}$  in this expression for  $F$  is compensated by an inverse dependence of  $l$  on  $g$ . The flux itself thus becomes a barotrope like the other physical variables: it would be constant over the surface of hydrostatic balance, or  $\beta = 0$ . While it is true that  $l$  is generally taken to be of the same order as the pressure scale height, which does contain an inverse dependence on gravity, the role of  $l$  in the expression for the convective flux is similar to that of opacity or density in the radiative flux: it is a barotrope scaling the average range of turbulent interaction. If we allow  $l$ , or the equivalent convective cell cross-section  $\sigma$ , to have a surface dependence, say  $\sigma$  greater at the pole than the equator, we would simply be saying that in the given boundary layer affected by convection there would be more cells per unit area in the equatorial region than at the pole. In any case,  $\sigma$  should be small compared with the linear dimensions of the photosphere. Unless these cells transfer heat so as to give a net barotropic pressure, and implied temperature, distribution, there would be a loss of global hydrostatic equilibrium (which is not observed, in general, although feasibly this part of the discussion could relate to common envelope binaries, or complex zonal circulation patterns). Alternatively, in the essentially empirical convective flux transport formulae of Mihalas and others, there is an additional parameter  $\alpha$  that relates the actual value of  $l$  to the local pressure scale height  $P/\Delta P$ . Any loss of local convective cell efficiency, implied by a reduction of  $\sigma$ , should be compensated by a change of  $\alpha$  to recover net barotropic heat transfer in the sub-photospheric layers, or gross dynamical effects would be observed.

Our comparisons of ‘observed’ values of  $\beta$  for close systems we believe are seriously compromised by internal

interdependences of parameters in the general curve-fitting problem. However, there is one point about the more independently determinable values of secondary reflection coefficients in binary systems, particularly classical Algols with a large difference in temperature of components. Various results make clear that ‘empirical’ reflection coefficients are about half those following from a standard re-heating and re-emission theory. Rucinski (1969) argued that this observed effect arose from physical redistribution processes essentially similar to those affecting the ‘convective’ heat flux. This would tend to argue in favour of surface  $\beta$  values softened from von Zeipel ones in general, i.e. irrespective of radiative or convective heat transfer. This could perhaps be tested by more intensive curve-fitting experiments on high quality data sets in the future, but it is not part of the present study.

By analogy with the case of Jupiter (Orton et al., 2001), whose far infra-red emissive photosphere is directly observable, the circulation patterns and consequent energy distribution in a real distorted cool star seem likely to be complex (cf. also Kirbiyik and Smith, 1976). Although obviously complicated by additional zonal circulation effects; at 27  $\mu$ , Jupiter appears to show a different rate of gross limb-darkening in the equatorial and polar directions, that might be attributable to the role of a differential gravity effect (Budding, 2006). However, the polar regions of Jupiter have a high-altitude haze that tends to reflect back light more efficiently than at the equator and makes such comparisons not directly appropriate. Again, more detailed future measurements at intermediate latitudes may allow progress in direct measurement of the effect of gravity on surface flux distribution.

#### 4. Conclusions

- The program public-domain GOB can be used to examine gravity-darkening exponents for stars with user-defined parameters following the method of Lucy (1967).
- If we follow exactly the formula proposed by Lucy, similar values of the index  $\beta$  ( $=0.07$ – $0.1$ ) are obtained for a fairly wide range of masses, luminosities and effective temperatures of cool stars. There also appears no strong dependence on the mixing-length parameter  $\alpha$ .
- There are, however, physical differences between the conditions applying for the way the index is derived and the intention of direct comparability over a particular equipotential surface. The dependency of  $T_e$  on  $g$ , for example, is argued to be shown through ratio of partial derivatives of the adiabatic constant for these variables; but a subconvective equipotential surface, where  $K$  would be constant, cannot coincide with the layer on which convection starts. The argument for using the partial derivatives for such a starting layer is therefore inappropriate, since  $K$  would not be constant over it in a real star.



- A corresponding evaluation for the layer in which the convective flux becomes maximal shows less sensitivity to  $T_e$ . The corresponding ratio of partial derivatives is then much closer to, or even greater than, the von Zeipel value.
- Anderson and Shu's treatment is probably best seen in the context of their application to an accepted condition of hydrostatic instability in the surface layers. This would not apply in general. Global departures of such equilibrium at the depth of the convection zone would be seen in photometric variations on a dynamical timescale.
- There is an indirect indication that the von Zeipel coefficients would be softened above the photosphere, because there is evidence for a softening of the 'reflection' coefficient for Algol binaries, for which a comparable physical reasoning was previously given (Rucinski, 1969). The interaction of a global circulation in the photospheric layers could have such a softening effect according to the theoretical calculations (Smith, 1970 and Osaki, 1972).
- Observational evaluations of gravity darkening for close binary systems, in general, are still inconclusive, due to the strong correlation between  $\beta$  and other parameters characterizing the light curve shape, particularly in the scale of photometric 'ellipticity' effects. It is possible that very precise light curves that may be obtained in the future will allow this situation to be remedied.
- There is some suggestion, from the general surface distribution of emergent flux in the far infra-red of Jupiter, of a different rate of darkening in equatorial and polar directions, that could be attributed to a gravity effect. This point cannot be regarded as definitive, given the overall complications of zonal effects and high-altitude haze on the planet. However, this kind of study may be a pointer to future investigations in an era of high-resolution, space-based astronomy, when surfaces of nearby stars may become directly visible.

## References

- Allen, C.W., 1974. *Astrophysical Quantities*. The Athlone Press, London.
- Anderson, L., Shu, F.H., 1977. *ApJ* 214, 798.
- Baker, N., 1963. Godard Institute for Space Studies. NASA, New York.
- Bradstreet, D., 1993. *Binary Maker 2.0*. Contact Software, Norristown, PA.
- Budding, E., 2006. *Solar and Stellar Physics Through Eclipses*, In: *Solar Eclipse Conference*, Antalya, Turkey, Mar 29, 2006, preprint.
- Budding, E., Kopal, Z., 1970. *AP&SS* 9, 343.
- Claret, A., 1998. *A&A* 131, 395.
- Djurasevic, G., Rovithis-Livaniou, H., Rovithis, P., Georgiades, N., Erkapic, S., Pavlovic, R., 2003. *A&A* 402, 667.
- Djurasevic, G., Rovithis-Livaniou, H., Rovithis, P., Georgiades, N., Erkapic, S., Pavlovic, R., 2006. *A&A* 445, 291.
- Eaton, J.A., Wu, C.C., Rucinski, S.M., 1980. *ApJ* 239, 919.
- Georgiades, N., Rovithis-Livaniou, H., Djurasevic, G., 2003. *Proc. COMU Ap. Res. Center* 3, 50.
- Kirbyik, H., Smith, R.C., 1976. *MNRAS* 176, 103.
- Kitamura, M., 1990. In: İbanoglu, C. (Ed.), *Proc. NATO ASI on Active Close Binaries*, vol. 375. Kluwer, p. 69.
- Kitamura, M., Nakamura, Y., 1988. *Ap&SS* 145, 117.
- Kitamura, M., Nakamura, Y., 1993. *ASPC* 38, 218.
- Kopal, Z., 1959. *Close Binary Systems*. Chapman and Hall., London (Chapter 2).
- Lucy, L.B., 1967. *ZA* 65, 89.
- Mathews, J.H., 1992. *Numerical Methods For Mathematics, Science, and Engineering*. A Simon and Schuster Co., New Jersey.
- Mihalas, D., 1978. *Stellar Atmospheres*. W.H. Freeman and Co, San Francisco.
- Orton, G., Fisher, B., Deming, D., Harrington, J., 2001. *American Geophysical Union, Spring Meeting 2001*, p. 51A-07.
- Osaki, Y., 1972. *PASJ* 24, 509.
- Paczynski, B., 1970. *AcA* 20 (2).
- Rafert, J.B., Twigg, L.W., 1980. *MNRAS* 193, 79.
- Rucinski, S.M., 1969. *AcA* 19, 2.
- Schwarzschild, M., 1957. *Structure and Evolution of the Stars*. Princeton University Press, New Jersey.
- Smith, R.C., 1970. *MNRAS* 148, 275.
- Takeda, S., 1937. *Mem. Coll. Sci. Kyoto Univ. Series A* 20, 47.
- van Belle, G.T., Ciardi, D.R., Ten Brummelaar, T., McAlister, H.A., Ridgway, S.T., Berger, D.H., Goldfinger, P.J., Sturmman, J., Sturmman, L., Turner, N., Boden, A.F., Thompson, R., Coyne, R., 2006. *ApJ*, 494.
- von Zeipel, H., 1924. *MNRAS* 84 (665), 684, 702.
- Wilson, R.E., Devinney, E.J., 1971. *ApJ* 166, 605.

# Effects of Opacity on Stellar Radii and Their Relevance to Observational Data

Gülay İNLEK<sup>1</sup>, Aysun BÖKE<sup>1</sup>, Oktay YILMAZ<sup>2</sup>, Edwin BUDDING<sup>2</sup>,

<sup>1</sup>*Physics Department, Balıkesir University, Çağış Campus, 10145, Balıkesir-TURKEY*

<sup>2</sup>*Physics Department, Çanakkale Onsekiz Mart University, 17100 Çanakkale-TURKEY*

<sup>3</sup>*Carter Observatory, PO Box 2909, Wellington-NEW ZEALAND*

Received 31.12.2007

## Abstract

We have examined the effect of varying opacities on envelope structure with the aid of Paczyński's public domain stellar modelling programs. For this, we prepared new opacity tables from the data of Kurucz [1], using Lagrange interpolation to obtain the tabular values. We compare the results of these Kurucz opacities with similar tabulations from Huebner et al. [2], Iglesias and Rogers [3], Rogers and Iglesias [4] and Iglesias and Rogers [5]. We have checked calculations for the same ranges of stars considered originally by Schwarzschild [6], and compared our findings, using newer opacity data, with those of other sources. We consider how such calculations relate to high accuracy observational data, with the well-observed planetary eclipsing system V 376 Peg (HD 209458), providing a guideline towards data of similar accuracy in the near future. Current accuracies on absolute radii and masses derivable from eclipsing spectroscopic binaries are conservatively estimated at  $\sim 1\%$ . The effects of revised opacity calculations on the radii of stars of intermediate mass are several times greater than this (5–10% for constant values of other parameters), so that eclipsing binary data should have good potential for independent tests of opacity theory across a wide range of stellar types.

**Key Words:** Stars: general-structure: modelling, opacity tables, observational tests, eclipsing binary data

## 1. Introduction

While many studies show that radiative transport plays a key role in shaping the structure and evolution of stars, no direct measurements of the opacity of matter to radiation in stellar interiors are possible. Theoretical calculations are required if a star's internal conditions are to be interpreted. Over the years, various opacity formulae and tables have been applied to structural models. In his seminal book, *The Structure and Evolution of the Stars*, Schwarzschild discussed effects associated with the ionization of different atomic species, i.e. bound-free transitions, free-free absorption and electron scattering [6]. The net effects of bound-bound (line) absorptions subsequently received closer attention, and have been shown to make a significant contribution [7, 5, 1]. Schwarzschild also compared theoretical models with results from the observations of binary stars. This approach to checking models was supported by Strömgren [8] and many subsequent authors.

Opacity appears in the radiative transfer equation of stellar structure [9], which can be put in a form such as

$$\frac{dK}{dr} = -\kappa\rho H = -\kappa\rho L/16\pi r^2, \quad (1)$$

where  $K$  and  $H$  are the Eddington radiation pressure and flux terms, respectively, and  $L$  is the global luminosity, coming from the separate energy generation equation (all functions of the radius  $r$ , as are the

local density  $\rho$  and temperature  $T$ ).  $K$  is given in the internal regions, to high accuracy by

$$K = \frac{\sigma T^4}{3}, \quad (2)$$

where  $\sigma$  is Stefan's constant. The opacity thus relates the total heat flow to the local temperature gradient, the latter being greater in regions of greater local opacity. In averaging over all frequencies, the 'Rosseland mean' opacity,  $\kappa \equiv \kappa_R$ , yields a temperature gradient form of the transfer equation; thus

$$\left( \frac{\sigma T^3}{\kappa_R} \right) \frac{dT}{dr} = - \frac{3\rho L}{64\pi r^2}, \quad (3)$$

since the Rosseland mean is defined by

$$\frac{\sigma T^3}{\kappa_R} = \pi \int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{dB_\nu(T)}{dT} d\nu. \quad (4)$$

Rosseland mean opacities  $\kappa_R$  (in units of  $\text{cm}^2\text{g}^{-1}$ ) therefore weight the effect of frequency in proportion to the flux contribution at that frequency. In a more general context, we should consider other contributions than radiative transparency (inverse of opacity) to the total flow of heat, particularly electron conductivity [10], but in this article we concentrate only on the effects of radiative transfer. We especially seek to clarify the extent to which observational data on representative stars can test theory on this.

It is feasible, in a general way, that the radiative opacity of the plasma in stellar interiors may tend to idealized forms in certain limiting conditions. For example, we could anticipate that a totally ionized hydrogen medium, characterized only by free-free transitions, would have a transparency component proportional to the radiative energy density per unit material density. But, in traversing a layer of such a medium, the outward flux receives a contribution proportional to the linear velocity of the electrons, associated with the decrease of the Debye screening length. From such a view, a form such as

$$\kappa \propto \rho T^{-7/2} \quad (5)$$

(Kramers' law) appears reasonable [6]. Similarly, another limit, that of Thomson scattering by electrons ( $\log \kappa \sim -0.47$ ), should take over in fairly high temperature (but not too high density) plasma conditions when the foregoing formula gives low enough opacity values [6].

More generally, we can expect the net opacity to be dependent of the (varying) composition, initially set by the fractional proportions of hydrogen  $X$ , helium  $Y$  and other atoms  $Z$  (= metallicity), where  $X + Y + Z = 1$ , as well as  $\rho$  and  $T$ , i.e.  $\kappa_\nu = \kappa_\nu(X, Z, \rho, T)$ . The nature of this dependence, in detail, involves modelling the way electromagnetic waves interact with the local field configurations around the plasma's constituent particles. Procedures have developed from the early Thomas-Fermi treatment towards long and complex calculations that have become the reserve of certain patient specialists; a point made in the review of Carson [11]. Carson also noted that the results of separately published calculations of apparently similar situations did not always agree with each other (within factors of the order of unity). Moreover, the necessity to use both physical and mathematical approximations to describe the inherently complex interactions implies that such calculations cannot be regarded as a closed subject. The onward progress of computational capabilities should allow continued advances in the modelling of absorption and consequently stellar structure.

For practical applications in astrophysics, tables of representative opacity values are generally presented in two-dimensional format (for  $\log \rho$  and  $\log T$ , given the large variation of density and temperature and the regular use of variables in logarithmic form), with selected values of  $X$  and  $Z$ . Since there is, in most stars, a strong correlation between the runs of density and temperature values ( $\rho \sim T^3$ ), the variable  $\mathcal{R}$  was introduced for convenient general tabulation [3], where

$$\log \mathcal{R} = \log \rho - 3 \log T + 18. \quad (6)$$

In our present study we have applied opacity tables that originated in the work of Cox and Stewart [12] at Los Alamos National Laboratory (as modified by later authors); Iglesias and Rogers [3], Rogers and Iglesias [4], Iglesias and Rogers [5] and Kurucz [1], to the stellar model code GOB [13]. We have discussed previously

how we used and checked this program [14] and we say more about its use in the following subsection. It is well-known that opacity effects are strongest in the outer parts of the star where the temperature gradient steepens as the major constituent elements start to recombine [15]. This is predominantly in the regions dealt with by GOB. It was necessary to tailor published opacities [1] to the format required by GOB and to do this we used four point Lagrange interpolation. We thus calculated  $\kappa$  for the required 31 values of log density in the range of  $-12$  to  $+3$  in steps of  $0.5$  and 51 values of log temperature from  $3.25$  in steps of  $0.075$ . We discuss more about this in section 2 and in section 3 present the results of different opacity tables in the outputs of the programs GOB and also SCH, a second modelling program that deals with the bulk of the stellar mass [13].

While we cannot measure internal opacities directly, the possibility to check different sets of calculations from resultant models of stars is challenging. There are various options about this, but our present study addresses the data on eclipsing binary systems. Nowadays, such data are entering a new phase of very high accuracy [16], stimulated, in part, by the search for new planetary systems. The prototype V 376 Peg (HD 209458) has attained particular significance in this regard, and while the extraordinary accuracy of HST photometry is not expected to be available in a wholesale way, it provides guidelines not only for future space-based photometry, but also for well-selected terrestrial facilities. On that point, we examine the milli-magnitude accuracy light curve of the primary transit of V 376 Peg by [17], as observed at Mauna Kea. We combine 3 data sets of [17] and discuss how such results relate to stellar modelling in section 4.

Of course, other things than opacity affect the measured parameters of observed stars, the overall mass usually being regarded as the first determinant of these. The positions of stars of given masses in colour-magnitude diagrams have then been usually related to evolutionary effects. Evolutionary paths, as well as their starting positions, are themselves different in dependence on the composition of the stellar material [18]. The main question for our present study, however, is what precision of observational results would allow alternative models for the opacities through the envelope, to be effectively discriminated. Andersen et al. proposed that parameter estimation errors should be no larger than about 1% in the radius, and 2% in the mass and temperature, to enable useful checks on opacities; this for stars whose metallicity can be assigned to within about 25% of its real value [19]. Coevally formed eclipsing spectrographic binaries, whose components have not had significant interactive evolution, should permit isochronal tests of theory in which some of the indeterminacy is removed, as noted by Strömgren [8]. Andersen [20], and other authors in similar programmes, have thus used high quality observational data of such binaries to test modelling. A recent discussion was that of Claret [21]. Persistent differences between older models and data led to further theoretical inferences, for example regarding more generalized versions of the treatment of convection [22, 23]. But opacity theory itself has not been static, and various new sets of calculations were published since the early nineties. A summary discussion (section 5) comments on the interplay between data-analysis and the results of theoretical modelling, and implications for both activities.

### 1.1. Use of the programs GOB and SCH in model construction

It is well-known that the construction of a simple stellar model in one spatial dimension reduces, generally, to a two-point boundary value problem involving the (numerical) quadrature of 4 simultaneous linear first-order differential equations (cf. e.g. Schwarzschild [6]. A short introduction to the programs discussed in this paper is given by [24]; demonstration versions have also been produced by Odell [25]).

Regarding the imposed boundary conditions: the inner boundary is conceptually simpler. The independent variable, normally the internal mass  $M_r$ , is here zero, along with the radius  $r$  and luminosity  $L_r$ . The boundary values of central temperature and density,  $T_c$  and  $\rho_c$ , are assigned preliminary estimates, so the quadrature can proceed to some internal point, where the outward integration will be matched with the inward one from the outer boundary.

The outer boundary is more complicated for various reasons. One is that a main aim in the ‘solution’ of the modelling problem is to relate observational results to the two outer boundary values determined by a self-consistent quadrature. Normally, two quantities that can be directly matched to measurements are the surface luminosity  $L_0$  and effective temperature  $T_e$ . The structure equations themselves should primarily specify  $L_0$  and  $R$ , as paired opposites to the central density and temperature (the inner boundary); but since  $R$  can be expressed as  $R = \sqrt{L_0/4\pi\sigma T_e^4}$ , it appears this point can be dealt with, although the  $R$  in

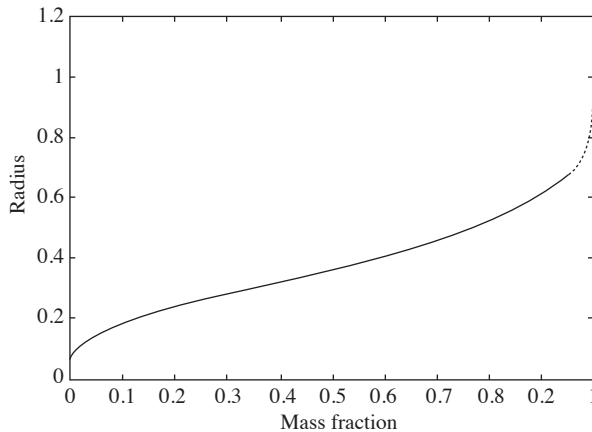


question should really be that at the actual outer ‘boundary’ of the star (at a slightly different radius), where the density  $\rho_0$  becomes formally zero. Note that a separate relation connecting  $T_e$  to the boundary layer temperature  $T_0$  comes from model atmosphere theory [14]. Another point is that, in these outer layers, the problem has degenerated to one involving only 3 variables, since  $L_0$  settles to an essentially constant value outside the central energy-generating regions.

The program GOB (generates the outer boundary) is intended to take care of these issues. The program constructs a set of model atmospheres for four corner points in the  $L_0, T_0$  plane that should enclose the true final values resulting from a self-consistent complete model. The GOB inward integration proceeds, in principle, down to a user-set base-of-atmosphere layer  $M_r = M_B$ , which is typically  $0.95 \times M_R$ , the total mass of the star. In practice, some control parameters intervene if the temperature becomes too high or the number of integration steps unmanageably large. Since there are only 3 differential equations to integrate and no match-point fitting, this program proceeds quickly. At the lower boundary GOB produces a set of  $\rho_B, T_B$  and  $R_B$  values, with  $L_0 = L_B$  also holding valid. Given these 4 corner values, it is possible to make (linear) interpolations for intermediate points to find base of atmosphere values. We can thus write, for a base density corresponding to a general surface point  $L_0, R$ , say ( $R$  being derived from the assigned  $T_e$ )

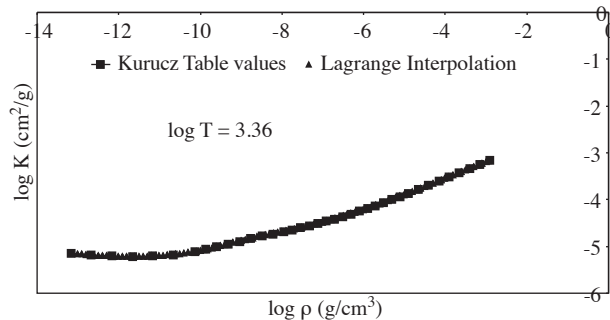
$$\begin{aligned} \rho_B(L_0, R) = & \rho_B(L_1, R_1) + \frac{L_0 - L_1}{L_2 - L_1} [\rho_B(L_2, R_1) - \rho_B(L_1, R_1)] + \\ & + \frac{R - R_1}{R_2 - R_1} [\rho_B(L_1, R_2) - \rho_B(L_1, R_1)]. \end{aligned} \quad (7)$$

The 4 base values for such surface  $L_{0i}, T_{0j}$  pairs, enclosing a particular trial  $L_0, R$  pair, are given, together with the trial pair itself, by GOB as input for the inward integration in SCH. The outward integration from the centre is compared with the inward integration from this  $0.95M_R$  level at a selected inner fitting point, which is typically  $M_r = M_R/2$ . The averages of the 4 pairs of variables at this fitting point are taken as new starting values for backward integrations to the boundaries, and an iteration process thus started.



**Figure 1.** Combination of SCH and GOB integrations for the radial variation with mass of a zero-age 1 solar mass model.

It is easy to visualize new central values of  $T_c$  and  $\rho_c$  being substituted back in a second outward run from the centre. At the outer boundary of the SCH run, however, there will be new values for all four variables; but it is really only the  $L_0$  and  $R$  surface pair that are independently corrected by the integrations of this two-point problem. The new surface  $L_0$  is obtained directly, since it does not vary through the outer layers. The corresponding new surface value of  $R$  can be derived, using the new  $L_0$  and the original GOB surface values  $R_1$  and  $R_2$ , for which corresponding values of  $R_{B1}, R_{B2}$  are known. These  $R_{B1,2}$  values are compared with the  $R_B$  newly obtained from the outward integration. A corresponding corrected surface value of  $R$  may then be interpolated. Having the new surface values of  $L_0$  and  $R$  allows a new set of base values to be obtained, with  $\rho$  and  $T$  starting values derived from equation (7) (for  $\rho_B$ , with a corresponding equation for  $T_B$ ) for a second, corrected, inward integration. In a convergent problem, the differences between the four



**Figure 2.** Example of Lagrange-interpolation through Kurucz tabulated opacities.

pairs of variables at the inner matching point become progressively less and the sequence is terminated when these differences pass below some set accuracy control limit. Convergence is normally found in practice, if the starting values are not too far from the final ones. Initial errors of more than 20 percent in the logarithms of trial parameters may cause lack of convergence. Figure 1 shows that there is a good agreement between SCH and GOB integrations.

## 2. Opacity Tables

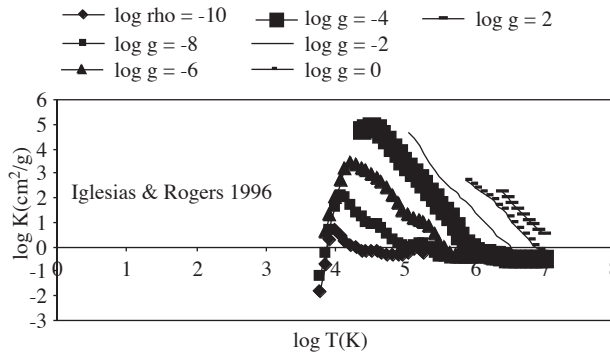
We require interpolations in the two dimensions of (log) temperature and (log) density for given (log) opacities for a fixed chemical composition: so we first interpolated  $\log \kappa_R$  for different  $\log \rho$  values at constant temperature and then interpolated for the log temperatures with  $\log \rho$  at each tabular value. Figure 2 shows such Lagrange interpolated points passing smoothly through the Kurucz [1] tabular values.

The Kurucz [1] model atmosphere program, whose results we have used, includes more than 1000 atomic and molecular species, each having up to 10 isotopic forms. It deals in detail with the ions of all elements up to zinc. This modelling has improved opacity values particularly from including such a large number of atomic species, especially accounting for the net effect of their line (bound-bound) absorptions [26]. There are three aspects to this. The first involves direct calculation of the spectrum at given pressure and temperature to include more than  $10^8$  separate lines. This involves a wavelength resolution high enough to resolve natural spectral features smaller than observed widths associated with the Doppler effect in thermal and rotational motions. Another aspect of the modelling involves tabulating statistical distribution functions for the line opacities in dependence on temperature and pressure over suitably wide ranges of values for various assigned abundances. The third aspect is the spectral sampling, using a relatively small number of wavelength points that do not resolve the spectrum in detail. In computing an atmospheric model, the relevant quantity of interest is a spectral integral, where detailed broadening effects have been smoothed out. This is referred to as ‘opacity sampling’. The twelfth edition of the program ATLAS [27] computes Rosseland mean opacities at given temperatures and densities using iterative procedures incorporating these three procedures.

Iglesias and Rogers constructed the OPAL code to calculate Rosseland mean opacities [3]. They gave extensive results for the mixture of [28], which allow accurate interpolation in (log) temperature and density, with given hydrogen with various metal mass fractions. They used temperature as the basic variable and also  $\mathcal{R} \propto \text{density}/(\text{temperature})^3$  (see above). The range of  $\mathcal{R}$  and temperature are such as to cover typical stellar conditions from the interior through the envelope to extended outer regions. Iglesias and Rogers did not review cool atmospheres, because, at that time, they were unable to revise photoabsorption by molecules [3]. Only radiative processes were taken into account, so that electron conduction was also neglected. Their approach regarded distant many-particle correlations as highly classical, and their detailed radiative interaction calculations were applied to regions where the de Broglie wavelength is less than the plasma screening length. Here, they introduced systematic quantum mechanical methods for many-particle correlations. Their model calculations are generally accepted to be accurate, both for valence electrons and photon absorptions involving inner core electrons, as well as multiply excited ions. Bound-bound transitions were calculated for every subshell in each configuration of the various ion stages explicitly.

The Cox and Stewart [12] opacity tables, sometimes known as the (older) Los Alamos data, presented Rosseland mean opacities also without allowance for electron conduction. These tables have provided a basis for many stellar structure calculations, including the original GOB program. They include molecular-hydrogen and free-electron absorption of radiation by the free-free process from [29]. Rayleigh scattering of photons by molecular hydrogen, using a formula given by [30] was also included. The older Los Alamos tables were presented in an updated form by [2] (the Los Alamos Opacity Library – LAOL), and in this form appeared in the original versions of the Paczyński code available to our group.

Creation of full two-dimensional interpolated tables needed for GOB involves a two-step procedure: first interpolating density values from the source (in their format) to the required (GOB) table format, e.g. first for the required densities at set temperatures. These opacities are then interpolated to the required temperatures at the new tabular densities.



**Figure 3.** Iglesias and Rogers (1996) opacity values (in  $\text{cm}^2 \text{g}^{-1}$ ), for  $X = 0.70$ ,  $Y = 0.27$ ,  $Z = 0.03$ , with changing temperatures at different densities.

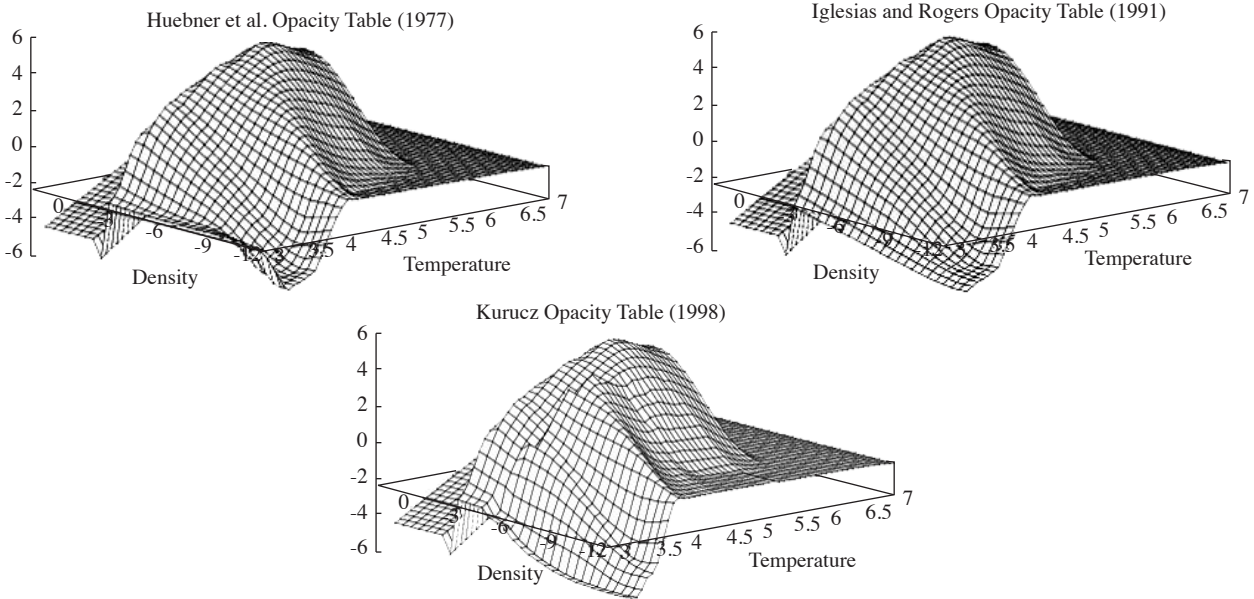
The inset in Figure 3 shows the density values for each run of opacities. The high density region, to the right of the opacity peak, shows reversion to a Kramers' type form. This seems most clear for the  $\log \rho = -4$  curve. This declines to the simple electron scattering constant form ( $\kappa \sim \text{constant}$ ) for high temperatures. At the low density side, there is the expected decline to very low opacities near the surface. Peak values of the opacity in the tables occur at about  $\log \rho \sim -2.5$  and  $\log T \sim 4.5$  and are typically around  $\log \kappa \sim 5.5$ . Newer opacity calculations show this peak occurring at somewhat lower temperatures than the older tables.

Figure 4 shows three dimensional presentation of different opacity tables we have used in GOB programme.

It can be seen that the Iglesias and Rogers opacities are basically similar to the LAOL ones, except in the outer parts of the atmosphere where densities and temperatures are low. The Kurucz [1] opacities also show differences in the outer envelope. This can be associated with the more detailed treatment of line absorptions by Kurucz. Our presentation reflects some discontinuity towards the higher densities and temperatures for the Kurucz opacities. This is because the available tabulations did not cover the complete ranges of variables required for all feasible stellar conditions, but they are sufficient for the important outer ranges of the envelope.

### 3. Results of Different Opacities in Model Integrations

Schwarzschild's book [6] considered 10, 5 and 2.5 solar mass models (at zero age), and for the lower Main Sequence, 1 and 0.6 solar masses. We follow the same selection in Table 1, where corresponding SCH output boundary radii, luminosities and effective temperatures have been tabulated in Table 1(c) for comparison. We also list GOB base-of-atmosphere radii corresponding to these luminosities and effective temperatures. Three sub-tables are given corresponding to a selectable (mean) interpolation step used in the numerical integration of the outer envelope. Actually, there are separate interpolation step limits set for each of the main structural variables, and that for  $\log \rho$ , for example, will be greater than that for  $\log T$ , given the range of variation of the corresponding values. The values shown, however, represent a user-set control over the



**Figure 4.** Three-dimensional representation of opacity tables: (a) Huebner et al. (1977); (b) Iglesias and Rogers (1991); and (c) Kurucz (1998).

inherent accuracy of the quadrature. There appears no exact basis for the selection of this control. In some regions, the underlying variables are changing relatively slowly and the cumulative effects of departures from linearity over small integration steps should be small, perhaps even self-cancelling. It is in the regions close to absorption edges, where changes are rapid and non-linear, that opacity calculations are most difficult. Twenty percent differences between the opacities of different sources, together with admitted theoretical uncertainties of this order, imply that decreasing the interpolation steps to very small values cannot increase the inherent accuracy of the model. We have presented the subtables in order to view the effect of the selected interpolation step size in relation to the scale of effects from different opacity tables.

It is clear from Table 1 that the significantly greater opacities in the outer layers of the models increases the corresponding temperature gradient in these layers, as can be anticipated from equation (3). The tables show that the differences between corresponding base layer values of the variables resulting from the different opacity tables are re of the order several percent (of their values). It is noticeable, however, that these differences are comparable to numerical effects in the way the integration may be performed in relation to step sizes. A similar point was made by Stothers [31].

The base values in Table 1 result from inward integrations with different opacities, but from the same outer boundary. For a complete model, the atmospheric base and perimeter of the SCH integration values should join up, as indicated in Figure 1, although this requires some adjustment of the outer boundary temperature. What happens when more recent, increased, opacities are put into the GOB program is that the base layer temperature increases and locates itself further out in the envelope. If the original GOB and SCH integrations had matched at the base layer, therefore, we would have to decrease the value of  $T_0$  for the GOB integration with the new opacities (at given luminosity) to achieve the same base temperature. This decrease of  $T_0$  for constant  $L$  means that the effective radius of the star should expand [7]. The proportional effect is of the same order as the proportional changes to the base temperatures for small changes, i.e. 5–10%. Calculated radial changes produced in this way for the examples given are also provided in Table 1.

From Stothers and Chin [32] it follows that about the same increase in radius (5–10%) between the older [12] and newer [2] Los Alamos opacities is given by a 50% increase in metallicity. We did not study changes of metallicity for the present work, but Stothers and Chin’s finding is in keeping with Andersen’s [20] point that if the metallicity can be correctly assigned to within 25%, and we know the age of the star (i.e. its probable evolution), then it should be possible independently to check the effects of opacity. In this connection, it is interesting that this scale of radial increase (5–10% – for intermediate-low mass stars) was

**Table 1.** GOB and SCH results for base layer radii using different opacity tables: (a) for mean interpolation step = 0.1; (b) for step size = 0.05; and (c) for step size = 0.02.

(a) Parameter	Value				
$M_{\odot}$	0.60	1	2.5	5	10
$R_B$ (Huebner)	0.3287	0.4886	0.982	1.7216	2.3481
$R_B$ (Igl. 1991)	0.3287	0.4886	0.982	1.7216	2.3481
$R_B$ (Igl. 1996)	0.3589	0.5318	1.0656	1.8286	2.4540
$R_B$ (Kurucz)	0.3529	0.5263	1.0231	1.7311	2.3575
$\log L$	-0.8276	0.0409	1.6068	2.8296	3.6749
$\log T_e$	3.652	3.7692	4.0115	4.2085	4.3545
$R$ (OB Huebner)	0.5680	0.6131	1.127	1.966	3.349
$R$ (OB Igl. 1991)	0.5680	0.6131	1.127	1.966	3.349
$R$ (OB Igl. 1996)	0.6335	0.6896	1.719	2.527	3.418
$R$ (OB Kurucz)	0.598	0.6232	1.714	2.316	3.401

(b) Parameter	Value				
$M_{\odot}$	0.6	1	2.5	5	10
$R_B$ (Huebner)	0.3741	0.5523	1.0300	1.7317	2.3565
$R_B$ (Igl. 1991)	0.3741	0.5523	1.0300	1.7317	2.3565
$R_B$ (Igl. 1996)	0.3805	0.5592	1.1092	1.8317	2.4610
$R_B$ (Kurucz)	0.3742	0.5459	1.0384	1.7423	2.3604
$\log L$	-0.8276	0.0409	1.6068	2.8296	3.6749
$\log T_e$	3.652	3.7692	4.0115	4.2085	4.3545
$R$ (OB Huebner)	0.5736	0.6301	1.166	1.968	3.389
$R$ (OB Igl. 1991)	0.5736	0.6301	1.166	1.968	3.389
$R$ (OB Igl. 1996)	0.6414	0.7380	1.879	2.638	3.926
$R$ (OB Kurucz)	0.6398	0.7221	1.792	2.413	3.517

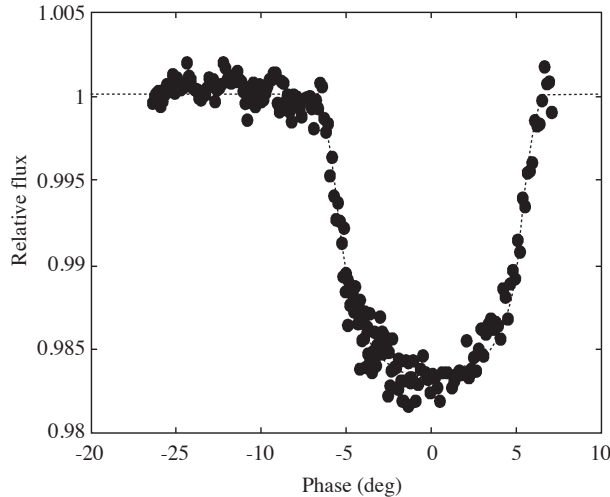
(c) Parameter	Value				
$M_{\odot}$	0.6	1	2.5	5	10
$R_B$ (Huebner)	0.3871	0.5733	1.1357	1.8710	2.5258
$R_B$ (Igl. 1991)	0.3871	0.5733	1.1357	1.8710	2.5258
$R_B$ (Igl. 1996)	0.3869	0.5728	1.1379	1.8755	2.5345
$R_B$ (Kurucz)	0.3869	0.5728	1.1381	1.8768	2.5340
$\log L$	-0.8276	0.0409	1.6068	2.8296	3.6749
$\log T_e$	3.652	3.7692	4.0115	4.2085	4.3545
$R$ (OB Sch. 1958)	0.644	1.021	1.591	2.381	3.622
$R$ (OB Huebner)	0.6484	0.6998	1.176	1.978	3.457
$R$ (OB Igl. 1991)	0.6484	0.6998	1.176	1.978	3.457
$R$ (OB Igl. 1996)	0.6716	0.7590	1.963	2.736	3.996
$R$ (OB Kurucz)	0.6511	0.7988	1.896	2.517	3.687

sufficient to resolve remaining apparent discrepancies between observations and theory, according to Stothers and Chin [32] (given appropriate masses[33]). In Table 2 we present results for these radial increases as given by Stothers and Chin [32] and also Claret and Gimenez [34].

A key question is whether the measured values of luminosity and effective temperature, at given mass and (surface) composition, are sufficient uniquely to resolve the internal run of all parameters affecting the heat flow (in particular, radiative opacities) as well as the age. It has been argued by [21] that, given detached eclipsing binaries with separately measurable radial velocities and no interactive evolution, the age can be

**Table 2.** Comparison of radial increases associated with increase in opacity.

(a) Parameter	Value				
$M_{\odot}$	0.6	1	2.5	5	10
S & C (1991)	—	—	0.10	0.07	0.05
C & G (1992)	—	—	0.08	0.07	0.10
Present	0.092	0.088	0.085	0.062	0.045


**Figure 5.** B light curve combining data from three transits across the disk of V376 Peg by its ‘planetary’ companion as observed by Sullivan and Sullivan (2003).

effectively eliminated by combining one pair of measures (luminosities, say), leaving the other pair (e.g. ratio of effective temperatures) to fix the heat-flow regime. But since approximations used in the calculations of opacities are in a process of steady refinement, this question cannot be regarded as having a fixed answer, although at any particular time the latest models can be tested.

## 4. Observational Tests

It is well-known that, regarding the properties of pulsating stars, the opacity distribution has a sensitive relationship to behaviour [35]). But applications of data on eclipsing binary stars to general tests of theory have also been discussed, at least since H.N. Russell’s [36] centennial symposium on the ‘Royal Road’ to determine absolute stellar properties, and with much more precision available in recent years. The coeval origin of binary stars also offers special convenience, as mentioned before.

A significant part of our present article is to assess how well currently available data are able to relate to the results of improved opacity tabulations. We have selected V376 Peg = HD 209458 as an interesting test case. In Figure 5, B photometry of the ‘planetary’ transits in this system observed from Hawaii in 1999 and 2000 have been combined and shown together with an optimal curve fit. Background information about these observations was given by [37]. HD 209458 was one of a small number of selected stars showing spectral evidence of low mass companions with reasonably short periods, some proportion of which would be likely to show eclipses [38]). These particular data were considered previously, as individual light curves, by Budding [39].

The data in Figure 5 were analysed using the CURVEFIT package [40]. The fitting function in this package comes from an approximate solution, using spherical harmonics, to the underlying Poisson equation for the distortion of figure caused by tidal interactions and rotation, along classical lines. Speed of evaluation

of an algebraic form of fitting function is an advantage when exploring a wide range of parameter space and evaluating the corresponding error matrix. That this matrix corresponds, geometrically, to a closed ellipsoid is sufficient and necessary for formal determinacy of the underlying model. The properties of the error matrix allow us to check that the parametrization neither surpasses nor under-utilizes the information content of the data (hence the general name ‘information limit optimization technique’ (ILOT) cf., e.g. Banks and Budding [41]). Initial guidelines for the parameters of V376 Peg were taken from [42] and [17].

**Table 3.** V376 Peg (a) curve-fit details: optimal parameters and errors; (b) absolute parameters.

(a) Parameter	Value	Err. ( $\sigma$ )
$U$	1.0012	0.0009
$r_1$	0.1172	0.001
$r_2$	0.0145	0.0006
$i$	86.3	0.4
$u$	0.574	
$\Delta l'$	0.001	
$\chi^2/\nu$	0.93	

(b) Parameter	Value	p.e.
Period	3.52474 d	0.00001 d
Epoch (HJD)	2451497.7993	
$A$	9.837	0.04 $R_\odot$
$R_1$	1.15	0.01 $R_\odot$
$R_2$	1.39	0.03 $R_{\text{Jup}}$
$i$	86.3	0.3 deg
$u$	0.57	0.14
$M_1$	1.03 $M_\odot$	*
$M_2$	0.62 $M_{\text{Jup}}$	*
$V_{\text{Abs}}$	4.31	
$V$	7.653	*
$B-V$	0.594	*
$T$	5920 K	
Dist.	46.7	0.8 pc

\* cf. Henry et al. 2000

CURVEFIT provides radii, in terms of the separation of the component stars, as well as the orbital inclination, from the eclipse photometry. Results are given in the upper part of Table 3. These parameters can be combined with the high quality radial velocity data of [42]. Since the projected velocities are measured in absolute units (e.g.  $\text{km}\cdot\text{sec}^{-1}$ ) and the orbital period is known independently, the orbital radius can be deduced in km. Kepler’s law will then furnish the masses of the components. In this way we calculated the absolute radii in the lower part of Table 3. From the goodness of fit measure  $\chi^2$ , the stellar radius is estimated probably to within 1 percent of its true value.

The results given in Table 3 are within their error limits of those of Brown et al. [43], using the much more sophisticated facilities of the Hubble Space Telescope. They are a thus a fair indication of generally available good observational accuracy of the present time, when sufficient precautions are taken. It is worth noting that the  $\sim$ millimag accuracy presented by [17] was achievable even with a 0.6 m telescope and 2 min integrations from a ground-based site, although at an altitude of  $\sim$ 4000 m, so advantageous for photometry. On this basis, longer integrations with a  $>1$  m telescope from similar locations would approach  $\mu\text{mag}$  accuracy data for brighter stars. Analysis of eclipsing binary light curves with such an accuracy should allow sensitive tests of theoretical results on stars, and, for the present context, the opacity of stellar material

## 5. Discussion and Summary

The present study supports the point that changes in schemes for carrying out the numerical integration of structure equations, say of order a few per cent, may have as great, or greater, effect than some of the earlier changes to opacity tables (see also [44]). On the face of it, this looks at variance with the implication of opacity model predictions, testable, in principle, to very high accuracy when suitable observational material is available. Parameters thought to be within  $\sim 10^{-4}$  of their real values have been specified [45], but this was when a detailed vibration spectrum also was known. In general, information about stars obtained from direct measurement is less specific: but a useful broad range of data comes from eclipsing binary stars with double-lined spectra, to which the present article is closely related.

Our main findings concern the increase of radius associated with increasing envelope opacity. In this study, changes from the earlier LAOL opacity tables to later ones that include more detailed line absorption effects, have changed calculated radii by up to  $\sim 5\text{--}10\%$ . This scale of effect in the radius is now able to be checked by careful analysis of good observations of eclipsing binary stars, even taking into account the interdependence of parameters in the fitting of their light curves. In this way, detailed atomic modelling becomes open to empirical testing from observations. It is interesting that the small difference between the older Iglesias and Rogers opacities and the observations in Figure 1 of Stothers and Chin [32] is about the same as the difference between the effects of opacity from the 1992 to the 1996 OPAL opacities (including more line absorption effects). However, alternative possibilities exist that can also account for changes of this order, in particular the role of convective ‘overshooting’ [46–48, 21].

On this point, Claret and Gimenez [34, 49] showed that a moderate core overshoot improves the comparison between theoretical apsidal motion constants and observational data. Results for the structural constant (a weighted average of both stars) coming from analysis of apsidal motions observed in certain close binary systems with eccentric orbits were often found to be too large in earlier studies, implying that observed mean radii were greater than predicted by models. But here it should be noted that the radii in the relevant formulae are raised to the fifth power. A 2% error of estimation in the radius would therefore become a 10% error in the estimation of the mean structural constant. This should render the mean structural constant too insensitive to test opacity models on the basis of, say, the Andersen [20] criteria. The role of the most appropriate dynamically stable mean rotation rate for the stars in such eccentric binaries is also likely to be underestimated if the mean orbital angular velocity were used [50]. Light curve analysis models also have often referred to ‘Roche model’ configurations for the stars, (for example with the Wilson-Devinney 1972 code, or its later developments). But, strictly speaking, there is no ‘Roche model’ for an eccentric binary system, a point stressed already by [51]. Such comments aside, there will remain the issue of whether any model of a continuum of heat-flow related variables can be uniquely established by observables dependent only on the integrals of such variables.

We note some limitations about the generality of our findings: (a) the role of numerical accuracy effects in the calculations (particularly where there have been some discontinuities in tailoring the Kurucz envelope opacities into the general run of values throughout the star (cf. Figure 4c); and (b) the application of the changed opacities only in the GOB program. In addition to opacity-related effects the GOB+SCH program results show some small effects associated with the location of the internal fitting point and also the adopted convective mixing-length parameter ‘alpha’. Nevertheless, we contend that more recent opacities, including fuller treatment of line absorptions, produce effects that can be discriminated from detailed analysis of double-lined eclipsing binary systems observed with modern, high-quality facilities.

## References

- [1] Kurucz 1998. <http://cfaku5.cfa.harvard.edu/opacities/Rosseland/kamp02.ross>.
- [2] W. F. Huebner, A. L. Merts, N. H. Magee, and M.F. Argo, Los Alamos Scientific Report LA-6760-M.(1977).
- [3] C. A. Iglesias and F. J. Rogers, *ApJ*, **371**, (1991), 408.
- [4] F. J. Rogers and C. A. Iglesias, *ApJS*, **79**, (1992), 507.
- [5] C. A. Iglesias and F. J. Rogers, *ApJ*, **464**, (1996), 943.



- [6] M. Schwarzschild, Structure and Evolution of the Stars, *Princeton University Press*, (New Jersey, 1958).
- [7] T. R. Carson, *A&AS*, **75**, (1988), 385.
- [8] B. Strömngren, *mrs.conf.*(1967), 461.
- [9] D. Prialnik, An Introduction to the Theory of Stellar Structure and Evolution, *Cambridge University Press*, (United Kingdom, 1999).
- [10] L. Mestel, *Proc.Camb. Philos. Soc.*, **46**, (1950), 331.
- [11] T. R. Carson, *ARA&A*, **14**, (1976), 95.
- [12] A. N. Cox and J. N. Stewart, *ApJ*, **19**, (1969), 174.
- [13] B. Paczynski, *Acta Astron.*, **2**, (1970), 20.
- [14] G. Inlek, A. Böke, O. Yilmaz, E. Budding, *New Astronomy*, **12**, (2006), 427.
- [15] P. A. Young, E. E. Mamajek, D. Arnett, J. Liebert, *ApJ*, **556**, (2001), 230.
- [16] E. F. Guinan and S. G. Engle, *Ap Space Sci*, **304**, (2006), 5.
- [17] D. J. Sullivan and T. Sullivan, *BaltA*, **12**, (2003), 145.
- [18] D. M. Popper, H. E. Jorgensen, D. C. Morton and D. S. Leckrone, *ApJ*, **161**, (1970), 57.
- [19] J. Andersen, J. V. Clausen, B. Nordström, J. Tomkin and M. Mayor, *A&A*, **246**, (1991), 99.
- [20] J. Andersen, *ASP Conference Series*, **40**, (1993), 347.
- [21] A. Claret, *A&A*, **475**, (2007), 1019.
- [22] R. B. Stothers and N. R. Simon, *ApJ*, **160**, (1970), 1019.
- [23] R. B. Stothers, *ApJ*, **383**, (1991), 820.
- [24] M. Loudon, E. Budding, *SouSt*, **37**, (1996), 17.
- [25] A. P. Odell, W. D. Pesnell, *ASPC*, **135**, (1998), 69.
- [26] R. L. Kurucz, *ASPC*, **108**, (1996), 160.
- [27] R. L. Kurucz, *ASPC*, **44**, (1993), 87.
- [28] E. Anders, N. Grevesse, *Geochim.Cosmochim.Acta*, **53**, (1989), 197.
- [29] W. B. Somerville, *ApJ*, **139**, (1964), 192.
- [30] A. Dalgarno, D. A. Williams, *ApJ*, **136**, (1962), 690.
- [31] R. B. Stothers, *ApJ*, **194**, (1974), 695.
- [32] R. B. Stothers and C. W. Chin, *ApJ*, **381**, (1991), 67.
- [33] A. Maeder, G. Meynet, *A&A*, **76**, (1988), 411.
- [34] A. Claret and A. Gimenez, *A&AS*, **91**, (1991), 217.
- [35] W. A. Dziembowski, *IAU Symp*, **162**, (1994), 55.
- [36] H. N. Russell, Centennial Symposia, Harvard Observatory Monographs, Cambridge, MA., **7**, (1948), 181.
- [37] S. Jha, D. Charbonneau, P. M. Garnavich, D. J. Sullivan, T. Sullivan, T. M. Brown and J. L. Tonry, *ApJ*, **540**, (2000), 45.
- [38] D. Charbonneau, T. M. Brown, D. W. Latham and M. Mayor, *ApJ*, **529**, (2000), 45.

- [39] E. Budding, *Ap&SS*, **296**, (2005), 17.
- [40] E. Budding and O. Demircan, Introduction to Astronomical Photometry, *Cambridge University Press*, **6**, (Cambridge 2007), 434.
- [41] T. Banks and E. Budding, *Ap&SS*, **167**, (1990), 221.
- [42] G. W. Henry, G. W. Marcy, R. P. Butler and S. S. Vogt, *ApJ*, **529**, (2000), 41.
- [43] T. M. Brown, D. Charbonneau, R. L. Gilliland, N. R. Noyes, A. Burrows, *ApJ*, **552**, (2001), 699.
- [44] P. Morel, J. Provost and G. Berthomieu, *SoPh*, **128**, (1990), 7.
- [45] J. Christensen-Dalsgaard, *ESASP*, **286**, (1988), 431.
- [46] G. Schaller, D. Schaerer, G. Meynet, A. Maeder, *A&AS*, **96**, (1992), 269.
- [47] A. Bressan, F. Fagotto, G. Bertelli, C. Chiosi, *A&AS*, **100**, (1993), 647.
- [48] A. Claret, *A&AS*, **109**, (1995), 441.
- [49] A. Claret and A. Gimenez, *ASPC*, **40**, (1993), 469.
- [50] M. E. Alexander, *Ap.Space Sci*, **23**, (1973), 459.
- [51] C. A. Tout, Eggleton, *ApJ*, **334**, (1988), 357.

# Absolute Parameters of Young Stars: I — U Oph

E. Budding<sup>1,3</sup>, G. İlek<sup>2</sup>, O. Demircan<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Physics Department, University of Canakkale, TR 17020, Turkey*

<sup>2</sup>*Physics Department, University of Balikesir, TR 12345, Turkey*

<sup>3</sup>*Carter National Observatory, Wellington, New Zealand*

15 October 2008

## ABSTRACT

We have carried out an investigation of the young multiple star U Oph. This has used new high-resolution spectroscopy with the HERCULES spectrograph and 1m McLellan telescope of the University of Canterbury at Mt John University Observatory and literature-sourced optical and UV photometry. We applied the local reduction package (HRSP) and other software to the spectroscopic data to find radial velocities. Information limit optimization techniques (ILOT), utilizing physically realistic fitting functions were applied to these data to yield new sets of absolute parameters:  $M_1 = 5.13$ ,  $M_2 = 4.56$  ( $\pm 2\%$ );  $R_1 = 3.41$ ,  $R_2 = 3.08$  ( $\pm 1\%$ ); for the early type eclipsing binary that dominates the system. We have combined times-of-minima photometry with other data for the triple system that makes up ADS 10428A, utilizing the wide orbit of Wolf et al. (2002) as well as HIPPARCOS astrometry of U Oph. ILOT techniques applied to the astrometric orbit yield a mass of the third star as  $0.83 M_\odot$ . We estimate an age of the system of around 30-40 My, from the isochrones of Bertelli (2002), results given by Vaz et al. (2007), as well as our own tests with an updated version of Paczyński's (1970) stellar modelling code. This age is consistent with a possible origin in Gould's Belt. Such information for this, and comparable young multiple star systems, may help to clarify general properties of star formation and the subtle interactions of stars and their environment.

**keywords** stars: close binaries — stars: early-type — stars: individual: U Oph — associations: general — techniques: high resolution spectroscopy, photometric light curve analysis, time of minimum analysis, astrometry.

## 1 INTRODUCTION

The eclipsing binary U Oph (also having the identifiers HD 156247, ADS 10428A, TYC 400-1862-1, HIP 84500, HR 6414; although not necessarily just the same thing) has been a standard reference in the evaluation of absolute parameters of early type stars (e.g. Holmgren et al., 1991; Vaz et al., 2007). This is perhaps related to its brightness ( $V = 5.903$ ;  $B - V = 0.021$ ; SIMBAD), near-equator accessibility and the long historical background of awareness of its behaviour that has been discussed in many papers since the early noting of its photometric variability cycle (Gould, 1879). A history of observations was given by Koch & Koegler (1977). A low light-level of the binary (U Oph AB) was apparently noted by F.W. Bessel in 1823 (JD 2386717.38), which, in principle, allows an accurate determination of the mean period over the last couple of centuries ( $P = 1.67734543$  d, if we accept the reference epoch of JD 2444416.38565 of Wolf et al., 2002). Various early studies reported small shifts of the secondary minimum from the midpoint between primary

minima, attributed to the effect of orbital eccentricity. Koch & Koegler (1977) suggested a cyclic variation on the order of twenty years for these displacements, which could come from an apsidal motion with around that period. This question was examined in detail by Kämper (1986) and Wolf et al. (2002), who confirmed a small eccentricity ( $e = 0.003$ ) from analysis of times of minima. Wolf et al. found an apsidal period of 20.1 y, fairly close to that of Kämper (1986) ( $U = 20.7$  y), as well as the value originally inferred by Koch & Koegler.

The galactic position ( $\lambda = 22^\circ.73$ ,  $\beta = +21^\circ.57$ ), distance ( $\sim 180$  pc) and early type (B5Vn + B5Vn, GCVS), when taken together, suggest the system may be associated with the Gould's Belt giant star-formation region (Pöppel, 1997); though this is something that invites more detailed consideration. The relevance of stars like U Oph for information on the evolution of the solar neighbourhood was also noted by Vaz et al. (2007). The main star (ADS 10428A) has a faint ( $V = 12.14$ ) visual companion (BD +1 3408B = ADS 10428B = U Oph D) about  $20''.4$  to the north (Gahm et al., 1983; Lindroos, 1985). The ROSAT source 1RXS J171128.6+011410 is within the satellite's pointing error of ADS 10428A, but it is feasible that this source could be more directly related to ADS 10428B, to which the X-ray source's reported position is closer. The companion's magnitude and colour ( $B - V = 0.85$ ), if it has a physical con-

nection with ADS 10428A, would then make it a typical  $\sim$ G8-K0 type dwarf. Actually, Lindroos' (1985) Table 6 indicates that ADS 10428B shows up through an anomalous  $(b - y)'$  colour, but we will find that this probably does not arise from the faint visual companion. An implication about the role of third body light also comes from the work of Ribas et al (1998), who discussed differences between photometric and astrometric parallaxes for well-studied binaries. This matter comes up later, but we should note here that U Oph C, which does have photometric effects at longer wavelengths, is part of ADS 10428A.

Previous spectroscopic orbital parameters were determined by Plaskett (1919), Abrami (1958), Pearce (1960), Popper & Carlos (1970) and Holmgren et al. (1991). Optical light curves were produced by Huffer & Kopal (1951) and a series of UV ones given by Eaton & Ward (1973). Magalashvili (1949) also produced light curves in blue and yellow spectral regions. Koch & Koegler (1977) analyzed blue and green 50 Å bandwidth scanner observations from Mt Wilson (cf. Oke, 1964). They argued against a single explanation of the system's known photometric and period irregularities, and were sceptical about previous dynamical models for these.

Cester et al. (1978) analyzed literature light curves using the radial velocity (rv) data of Popper & Carlos (1970). In their study, previously detected brightness and polarization variability, additional to the main binary effects, were attributed to a circumbinary gas cloud. The earlier study of Coyne (1970) is noteworthy on this point. Cester et al. considered apparent period variations in terms of a light travel time (LTT) effect, discarding the earlier suggestions of a system eccentricity. The effects of possible circumstellar matter on the spectra were taken up by Clements & Neff (1979), but they found no clear corroborative evidence. Clements & Neff used two values of the colour excess in their work, however, initially considering that  $E(B - V)$  could be as much as 0.25, but later preferring the more conservative 0.15, the former value being associated with an instrumental anomaly. The high colour excess would indeed suggest unusually high absorption for their distance of 275 pc, but we should note that it is difficult to resolve the observed colour of  $B - V = 0.02$  with the early type spectrum and high mass values that Clements & Neff associated with temperatures around 18000 K. Moreover, we will find the observed  $V$  magnitude of the components to be faint with the HIP-PARCOS (ESA, 1997) distance (186 pc) even with the high colour excess, indicating something unusual about the general absorption effects towards U Oph.

This may connect with the discussions of photometric and polarimetric anomalies. Eritsian et al. (1998), concluded that there is essentially no correlation between polarization and the brightness phase of the system, although there are wavelength-dependent rapid variations. They interpreted the polarization behaviour in terms of secular wind effects (long-term), punctuated by eruptive episodes (short-term). Anomalous absorption effects in the line of sight seems consistent with a relatively recent star-formation region in the young Disk population.

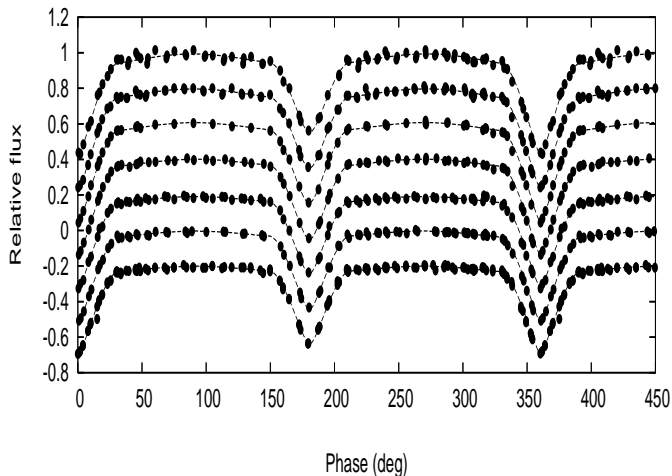
Orbital period studies of the system have been carried out by various authors. Frieboes-Conde & Herczeg (1973) derived an LTT effect suggesting two possible periods of 49.3 and 55.25 years. Panchatsaram (1981) estimated a lower

value for this period, of order 30 years, but urged a longer observation period for confirmation. He found the likely mass of the posited third body (U Oph C) to be around that of the Sun. A more detailed study on the times of minimum variation came from Kämper (1986), who, in addition to the previously mentioned apsidal period, confirmed the light-time effect with a period of 38.7 years. Wolf et al. (2002), using newer times of minima, found the similar period of 37.6 y for this wide (U Oph AB-C) orbit. Its eccentricity was found to be quite significant ( $e \sim 0.2$ ;  $\omega \sim 150$  deg). The intermediate period value of 38.4 y was recently given by Vaz et al. (2007) from time of minimum analysis. Their period for the apsidal motion, 21 y, was also somewhat closer to the earlier value of Kämper (1986) than that of Wolf et al. (2002), but all these periods (Kämper's, Wolf et al.'s and Vaz et al.'s) are within realistic probable errors of each other.

Holmgren et al. (1991) studied newer spectroscopic data, together with the photometry of Huffer & Kopal (1951) and Eaton & Ward (1973) to derive updated absolute parameters of the AB components. They found B4 and B5 spectral types. Their adopted temperatures of 16900 and  $16000 \pm 1500$  K are appreciably lower than the  $18500 \pm 1000$  and  $17400 \pm 1100$  K values of Clements & Neff (1979), but they confirmed the Main Sequence like status of the system derived by Popper (1978) and most earlier workers. This differs from the quasi-Algol configuration adopted by Koch & Koegler (1977) using the Wilson-Devinney (1971) code. Comparison of Holmgren et al.'s parameters, found with the aid of the LIGHT fitter program that derives from Hill & Hutchings (1970), using the isochrone data of Hejlesen (1980), indicated an age of 63 My. This is appreciably older than the 30 My estimated by Kämper from the modelling of Jeffery (1986).

Vaz et al. (2007), using new *uvby* photometry with photographic coudé spectroscopy from the early eighties taken with the 1.5m ESO telescope at La Silla, aimed to retrieve accurate absolute masses and radii for detailed comparisons with the predictions of updated stellar modelling. They found the stars in U Oph AB to have masses of  $5.27 \pm 0.09$  and  $4.74 \pm 0.07 M_{\odot}$  and radii of  $3.48 \pm 0.02$  and  $3.11 \pm 0.03 R_{\odot}$ . They compared these values with several other similar early type eclipsing binaries and were able to locate them all in a Main Sequence band at ages of 5-100 My. However, uncertainties in details of the comparisons were suggestive of local variations of metallicity, implying that young Disk stars form with significant local variation of metal abundance.

This article is the first of an intended series involving the Astrophysics Research Centre of the 18th March University of Çanakkale and the Carter National Observatory of New Zealand in joint studies of properties of young southern stars, utilizing particularly Russell's (1948) and Kopal's (1959) 'Royal Road' of eclipsing binary system analysis. Observations, which started in mid-2006, have been productive with the High Efficiency and Resolution Canterbury University Large Echelle Spectrograph (HERCULES) of the Department of Physics and Astronomy, University of Canterbury, New Zealand. This modern-technology instrument works with the 1m McLellan telescope at the Mt John University Observatory ( $\sim 43^{\circ} 59' S, 174^{\circ} 27' E$ ). U Oph was one of the first stars on the list in this programme. In the following section, we discuss literature light curves of the eclips-



**Figure 1.** Light curves and fittings for the UV series of OAO2 data of Eaton & Ward (1973) on U Oph. The curves, from the top down, are in the order of increasing wavelength from 138 nm to 425 nm, corresponding to the fractional luminosities  $L_1(\lambda)$  given in Table 1. The gradually increasing proportion of secondary light can be noticed by from the relative eclipse depths.

ing binary U Oph AB, particularly the useful series of UV light curves of Eaton & Ward (1973). The results are then combined with analysis of our new spectroscopic material in section 3 to refine knowledge of the absolute parameters of the components, concentrated on in Section 4. Alternative techniques are employed for the spectroscopic reductions, including IRAF-based methods together with line-profile fitting. Rotational velocity determinations of the U Oph AB components, and comparisons with stars listed in Slettebak et al. (1975) are given in Section 3.2. Most of the paper, in fact, concerns itself with these two massive early type stars.

In Section 5, we consider available times of minimum data, including some historic gamma-velocities and our present results. These findings are combined with HIPPARCOS intermediate astrometric measurements to provide a likely mass of the third body (cf. e.g. Bakış et al., 2006). We consider the evolutionary stage of the binary and age determinations in Section 6, seeking also to relate our findings to properties of the Gould’s Belt star-forming environment.

## 2 PHOTOMETRIC ANALYSIS

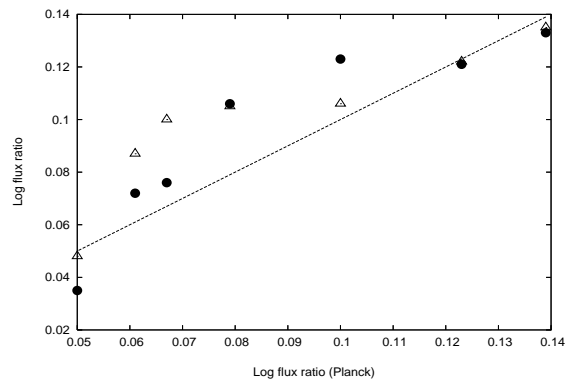
We examined the 7 UV light curves of U Oph obtained with the OAO2 satellite, given by Eaton & Ward (1973). These are generally good quality data sets that should yield reliable parameters for both stars. An ILOT technique\* with an updated photometric fitting function, allowing for different density distribution options, has been used for this (Budding, 2007). The results are listed, with formal errors for optimized parameters, in Table 1 (using standard symbols), and a corresponding set of corresponding curve-fits shown in Fig 1.

\* The name ‘Information Limit Optimization Technique’ (ILOT) was introduced in Banks & Budding, 1990. A discussion of it was given in Budding & Demircan (2007a).

**Table 1.** Photometric curve-fitting results for U Oph using the ILOT curve-fitting procedure

Parameter	Value	Error (sd)
$T_h$ (K)	15500	
$T_c$ (K)	14700	
$q$	0.92	
$L_1$ -138	0.626	0.016
$L_1$ -155	0.620	0.011
$L_1$ -192	0.621	0.0079
$L_1$ -246	0.612	0.0066
$L_1$ -298	0.597	0.0090
$L_1$ -333	0.593	0.0061
$L_1$ -425	0.572	0.0095
$L_1$ -Hip	0.564	0.012
$L_1$ -Kop	0.561	0.010
$r_h$ (mean)	0.270	0.003
$r_c$ (mean)	0.244	0.003
$i$ (deg)	88.2	0.3
$e$	0.003	
$\omega$ (deg) (1970.3)	345	30

\* There are about 90 points, typically, in the seven UV light curves, with the quality deteriorating, slightly, towards the very short wavelengths. The temperature ratio of about 1.056 is confirmed by the trend of the luminosity ratio  $L_1/L_2$ .



**Figure 2.** A check of the relative temperatures from the UV flux ratios derived from Table 1. The full line gives the logarithmic decrement ( $\log F_1 - \log F_2$ ), at the given wavelengths, for temperatures  $T_1 = 15500$  K and  $T_2 = 14700$  K from the Planck formula. The Kurucz (1979) models take a more realistic account of absorption effects, and corresponding decrements for  $T_1 = 16000$ K and  $T_2 = 15000$ K (with  $\log g = 4.0$ ) are shown as the full circles. The open triangles give the decrements corresponding to Table 1.

With the fractional luminosities of Table 1, the primary’s  $V$  magnitude becomes  $5.903 + 0.618 = 6.521$ . Using the HIPARCOS distance of 186 pc, and an apparent  $B - V$  colour excess of 0.19, a typical value of the ratio  $R_V = A_V/E_{B-V} = 3.3$  gives the absolute magnitude as  $M_V = -0.46$ . This is significantly fainter than typical Main Sequence stars of around B5 spectral type. There could be several explanations for this, relating to the type classification being too early for the observed colour, i.e. an anomalous local absorption effect. As well, the star may be younger than typical B5 dwarfs of the galactic field (Section 6).

Table 1 also lists fittings to the HIPPARCOS light curve

**Table 2.** Magnitudes of stars in the U Oph (ABC) system.

	U	B	V	R	I	Err.
$m_A$	5.45	6.532	6.537	6.49	6.45	0.02
$m_B$	5.81	6.843	6.763	6.78	6.75	0.03
$m_C$	—	—	11.02	10.18	9.16	0.1

and that of Huffer & Kopal (1951). Free fittings for the two  $V$  fractional luminosities gave rise to better overall fits with the inclusion of a slight amount of third light (average  $L_3 = 0.009$ ). This would be with the expected level of photometric contribution of a third star about 4.6 (+0.2, -1.0) magnitudes fainter than the main components, but cannot be considered very significant evidence in view of the scale of probable errors of the determination, which are of the same order as the value itself. The parameters of Table 1 also allow a check to be made on assigned temperatures (Fig 2). This is discussed in Section 4.

To follow up this point, photometry in the R and I bands was carried out at the Ulupinar Observatory of COMU in the spring of 2007. Curve fittings to these data, adopting the geometrical parameters from Table 1 and optimizing only for the relative luminosities, allowed  $R$  and  $I$  relative luminosities for all three components to be added to the foregoing. Utilizing the SIMBAD reference magnitudes in the  $J$  infra-red region and linearly interpolating the relatively small differences in total magnitude, we then estimate the magnitudes of the 3 components to be as given in Table 2. The  $V - R$  colour derived here is suggestive of a late G or K type dwarf, although the  $V$  magnitude difference alone indicates a relatively brighter third star. The interpretation of this photometry may again be compromised by anomalous absorption effects, as well as the relatively large effects of measurement errors for the luminosities of the third star.

The light-curve fittings also included the effects of orbital eccentricity. Setting the value of  $e$  to that of Wolf (2002), the mean anomaly at phase zero was allowed to vary. The value of  $\omega$  given in Table 1 is the corresponding average for the Eaton & Ward (1963) light curves, and is in good accordance with the expected value ( $347^\circ$ ) at epoch 1970.24. The spread in individual values is considerable, however, and we do not put too much weight on the photometric derivation of this parameter for such a low eccentricity. The corresponding value obtained for the HIPPARCOS light curve, for example, was considerably at variance with expectation.

### 3 SPECTROSCOPY

The HERCULES échelle spectrograph is mounted on a stable optical bench and enclosed within a vacuum vessel located in a thermally insulated room. Light from the Cassegrain focus of the telescope is transmitted using a 20 metre length of optical fibre of selectable cross-section (Hearnshaw et al., 2002). The spectrograph, at the time we collected our data, provided wavelength coverage from  $\lambda = 380\text{nm}$  to  $\lambda = 880\text{nm}$  in over 80 orders. Image data were collected using a  $4096 \times 4096$  square Fairchild back-illuminated CCD. The collecting area was subsectioned at this time, so that only part (about a third) of the full range of the orders

**Table 3.** Lines identified in the spectra (camera section 2) of U Oph.

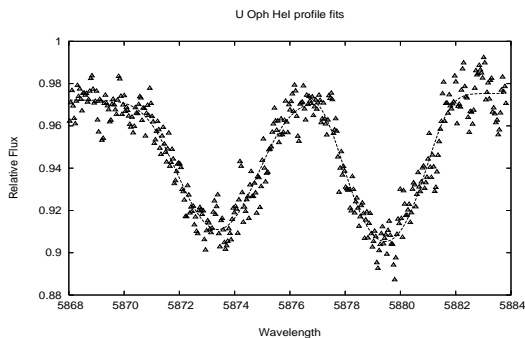
Species	Order no.	Wavelength	Comment
He I	85	6678.149	well-defined
H $_{\alpha}$	87	6562.817	near end of order (incomplete profile)
Si II	95	5978.97	too weak (for reliable r.v.)
He I	97	5875.65	relatively strong, but triplet status
Si II	100	5669.59	too weak
Fe II	110	5169.030	sometimes measurable
He I	113	5047.736	near end of order
H $_{\beta}$	117	4861.332	strong lines, but broad and saturated
N II	119	4779.71	too weak
He I	121	4713.201	measurable
O II	124	4596.174	sometimes measurable
O II	124	4590.271	too weak
N II	125	4552.536	too weak

was covered. The camera was built by Spectral Instruments Inc. of Tucson, Arizona. The pixel size is 15 microns. Two resolving powers of around  $R = 35000$  or  $70000$  are possible, enabling high precision spectroscopic observations of a variety of objects over extended times. Comparison spectra of a Thorium Argon arc lamp are recorded before and after each stellar image. Observations can be remotely controlled from inside the data room that adjoins the 1m telescope dome, with the aid of modern image-handling software.

#### 3.1 Line profiles

Lines identified in our observations of U Oph are listed in Table 3 together with some comment on their usefulness in subsequent analysis.

We approached the stellar absorption lines by considering first the Voigt profile, which convolves gaussian and lorentzian expressions, taken to reflect a kinetic distribution of radiating elements and a pressure-related damping effect. The gaussian term dominates the central ‘core’ regions of the Voigt profile, while damping becomes evident in the ‘wings’, particularly of hydrogen. Absorption forms for real stellar lines are not simply Voigt profiles, though, as there is a well-known opacity effect that scales with  $1 - \exp(-\beta)$ , where  $\beta$  is the optical depth at a given wavelength in the profile. How to take this into account was discussed elsewhere (Budding et al., 2005), however, for lines of low central intensity there is an approximately linear proportionality of depth to number of absorbing atoms, that proves useful in the present study. For such lines, a straight convolution of gaussian and rotational broadenings is suitable. The number of atoms contributing to a given part of the profile then varies directly with the corresponding photospheric area, Doppler shifted as appropriate. This gives rise to the relatively simple expression for the decline from continuum intensity  $I_c$  over a line of nominal depth  $I_d$  at mean wavelength  $\lambda_m$ :



**Figure 3.** Results of profile fitting to the He I 5876 lines at elongation. The secondary is on the left.

**Table 4.** Profile fitting parameters for the He I 5875Å feature

Parameter	Value	Error
Primary		
$I_c$	0.975	0.005
$I_d$	0.059	0.007
$\lambda_m$	5879.451	0.026
$r$	2.053	0.032
$s$	0.253	0.016
$\chi^2/\nu, \Delta l$	1.458	0.007
Secondary		
$I_c$	0.972	0.005
$I_d$	0.052	0.008
$\lambda_m$	5873.390	0.021
$r$	1.915	0.029
$s$	0.454	0.019
$\chi^2/\nu, \Delta l$	1.029	0.007

$$I(x, \sigma, u) = I_c - \frac{3I_d}{(3-u)} \left\{ (1-u)J_1(x, \sigma) + \frac{\pi}{4}uJ_2(x, \sigma) \right\}, \quad (1)$$

with

$$J_n(x, \sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} (1-t^2)^{n/2} \exp\left\{-\frac{(x-t)^2}{2s^2}\right\} dt, \quad (2)$$

where  $u$  is the limb-darkening coefficient and  $x$  is the wavelength scaled in units of the projected equatorial rotational velocity  $r$  (cf. Oláh et al., 1992). Explicit forms exist for the  $J_n$  integrals when  $n$  is even, but numerical quadrature gives fast and accurate results for any  $n$  due to the rapid convergence of the exponential term.

### 3.2 Rotational velocities

Using formula (1), in an ILOT-type curve-fitting setting, we fitted selected helium line profiles of U Oph at various orbital phases. We give more procedural details in the next section. Typical results of the profile fitting are shown in Figure 3 and Table 4.

Concerning the parameters listed in Table 4: the parameter  $r$ , that scales  $x$  in (1), measures the rotational velocity (in Å). The corresponding velocities are 104.8 and 97.8 km s<sup>-1</sup> for primary and secondary, respectively. These are effectively unchanged by the inclination-related projection factor

sin 88°2. They are within the error limits of co-rotation, from the derived systemic rotation speed of 389 km s<sup>-1</sup> and the fractional radii from Table 1, which would yield co-rotation values of 105 and 95 km s<sup>-1</sup>, respectively. Vaz et al. (2007) calculated a synchronization time of less than 4 Myr, from which co-rotation would be expected, unless the system were very young.

We note that the secondary lines appear somewhat broader, in general, than the primary, and this is associated with the larger gaussian component to the secondary lines in the fitting. This may be associated with the relatively greater effects of surface heating from the other star, which would give rise to considerable local turbulence (the corresponding velocity scales of  $\sim 20$  km s<sup>-1</sup> are significantly supersonic).

### 3.3 Radial velocities

The mean wavelengths derived from profile fitting to the neutral helium lines allow mean (stellar) radial velocities to be derived, using the Doppler displacement principle, by comparison of these mean wavelengths with their rest values. The four HeI lines listed in Table 3 were used for this purpose, with checks also being made on H $\beta$  cores at elongation phases. Of course, this procedure should take into account other sources of apparent motion, such as the Earth's rotation and its motion around the barycentre of the solar system and Earth-Moon system. These additional corrections are found from information in the file-headers created by the HERCULES Reduction Software Package (HRSP: Skuljan & Wright, 2007) and are applied directly. HRSP creates Flexible Image Transport Software (FITS: <http://fits.gsfc.nasa.gov/>) type files, which, after wavelength calibration, removal of spurious pixels (such as those struck by cosmic rays), correction for the inherent pixel-to-pixel response variation ('flat-fielding') and continuum normalization, produces a string of source fluxes versus wavelength. These data can then be dealt with (if desired) by other software, such as that of the Image Reduction and Analysis Facility (IRAF: cf. e.g. Barnes, 1993), or other procedures.

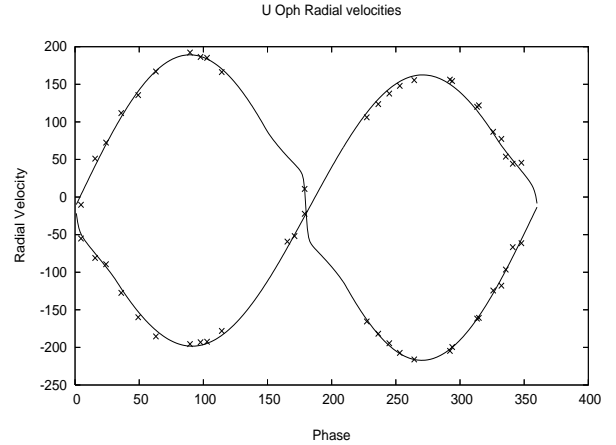
Fitting to separate (or possibly combined) model line profiles puts definite information into the rv derivation that a direct cross-correlation of the observed spectrum against a rv standard does not, particularly in relation to the location of line centres in a blended (binary) profile (see also Rucinski, 2006). The direct cross-correlation option available in HRSP was tested with the early type rv standard HR 2154 using the relevant procedure in HRSP. However, difficulties with interpreting local maxima in the cross-correlation of this spectrum with U Oph at intermediate phases in terms of genuine systemic velocities became apparent. The cross-correlation function, in principle, correlates all information in the recorded spectra – such as inter-pixel electron adhesion (the 'herringbone effect'), telluric lines and cloud-reflected moonlight, or third body effects – that have no relation to the main binary components under study. The rvs listed in Table 5 therefore come from individual line-centre determinations, using profile model information. In two cases of near conjunction observations the blending is such that it is appropriate to give only single measures, presumed to be weighted averages of the combination of both spectra.

**Table 5.** Spectroscopic observations of U Oph.

No	HJD–2450000 d	RV <sub>1</sub> km s <sup>-1</sup>		RV <sub>2</sub> km s <sup>-1</sup>
1	3864.0689	-15.6	aver.	
2	3868.0609	74.4		-136.7
3	3868.1067	41.7		-108.6
4	3868.1321	32.2		-78.7
5	3868.1633	33.6		-73.4
6	3870.9566	89.9		-159.3
7	3870.9984	112.4		-193.0
8	3871.0383	126.5		-205.6
9	3871.0766	135.2		-218.3
10	3871.1290	144.7		-226.8
11	3871.9922	-206.4		181.4
12	3872.0303	-203.1		175.7
13	3872.0541	-203.7		174.6
14	3872.1073	-188.6		155.8
15	3872.9359	145.7		-215.1
16	3872.9441	143.9		-209.9
17	3873.0345	109.8		-171.9
18	3873.0410	111.8		-170.9
19	3873.1228	67.3		-127.9
20	3873.9811	-55.8		42.8
21	3874.0229	-69.0		3.4
22	3874.0493	-61.7		1.7
23	3874.0857	-32.6		1.1
24	3874.0857	-23.9	aver.	
25	3874.9511	-78.3		-19.9
26	3875.0024	-90.3		47.6
27	3875.0419	-98.7		68.1
28	3875.0972	-136.7		102.5
29	3875.1587	-169.0		126.5
30	3875.2230	-194.4		147.6

The errors of mean line centre positions in Table 4 correspond to a little over 1.0 km s<sup>-1</sup> (around 0.5 percent of their mean widths) and this is representative of individual measurement sets that led to the rv values given. However, systematic differences of this order (or greater) are also noticed between individual line shift measures. This might arise from imprecise vacuum wavelength calibration in experimental source procedures, (stellar) atmospheric, (binary) interaction, or other reasons. We believe our high resolution enables a good precision in the derived rv values, but it is important to keep in mind inherent observational limitations for these rapidly rotating, tidally distorted, interactive, early type binary star components. So, although the rvs in Table 5 are listed to four significant digits, the last digit is optimistic.

It has been recognized for a long time that rvs in close binary systems are affected by similar kinds of proximity induced distortions as are the photometric variations. Approximations for these effects were spelled out by Kopal (1959), whose treatment of the rotational and tidal terms follows classical lines for the relevant Poisson equation. Kopal (1959) also discussed the radiative interactions between binary components, although theory, in that case, has been generally less well developed (cf. e.g. Batten, 1957; Hutchings, 1973; Kopal, 1988). It is true, however, that in relation to errors of measurement, at least until relatively recent times, normal proximity effects introduce only small distur-



**Figure 4.** Measured rvs are plotted against a fitting function that takes into account both proximity and eclipse effects. The primary star approaches (more negative rvs relative to the centre of mass) after phase zero. Note the Rossiter effect for the secondary around the phases of secondary eclipse (near 180°). This effect is less marked for the less eclipsed primary star (around phase 0°).

tions to the main quasi-sinusoidal rv variation, except for very close systems. Even so, in the present computing era, there is no great difficulty to include such effects in a realistic fitting function. The situation is comparable with the rv variations through the eclipse phases, although changes to the general sinusoidal trend there (associated with the names of Schlesinger, Rossiter and McLoughlin) can become quite noticeable. Similarly, the effects of orbital eccentricity, even though slight in the present case, can be easily included in a general fitting function. We have introduced such a model for the rv variation for our present work, and set it in an ILOT programming environment, along similar lines to the treatment of the photometry (Budding & Demircan, 2007b). Results of application of this program to the observed rvs are shown in Fig 4.

A trial fitting with the eccentricity allowed to be a free parameter and the periastron longitude set at its expected value (103°) caused the eccentricity to increase to  $\sim 0.03$ , but this result is not taken seriously concerning the orbit, in view of the other evidence (see also Kämpfer's (1986) comments about the spectroscopic eccentricity of Pearce (1960)). It is sufficient to notice that systematic effects appear in the rvs that are not in the standard model. Thus, although the profile fits at elongation suggest velocities could have errors not exceeding 1.5 km s<sup>-1</sup>, actual standard deviations (if we neglect a few poorly determined measures near the conjunctions, are around 2 km s<sup>-1</sup>. Including the near conjunction measures increases the 1 $\sigma$  uncertainty to  $\sim 5$  km s<sup>-1</sup>.

#### 4 ABSOLUTE PARAMETERS

The fitted rvs have amplitudes that, when combined with the orbital inclination derived from the light curve fittings, give the masses and radii presented in Table 6. These amplitudes are almost within the errors of the values given by Vaz et al. (2007), and similarly with the photometric solutions. We might then expect the absolute parameters to be closely comparable. This is almost the case for the radii,



**Table 6.** Adopted absolute parameters for the U Oph system. Formal errors are indicated by the parenthesized numbers affecting the last retained digit of the solution (see also section 3.3).

Parameter	Value
Period(days)	1.66734543
Epoch (HJD)	2452501.1922
$V_0, (B - V)_0, (U - B)_0$	4.33; -0.17; -0.03
$E_{B-V}$	0.19
$A_{12} (R_\odot)$	12.8(2)
$K_{1,2} (km/s)$	180.0(1.3); 202.7(1.2)
$V_\gamma (km/s)$	-15.8(1.4)
$M_{1,2} (M_\odot)$	5.13(8); 4.56(7)
$R_{1,2} (R_\odot)$	3.41(3); 3.08(3)
$\log g (\log cgs)$	4.08; 4.12
$V_1 (mag)$	6.53
$V_2 (mag)$	6.80
$T_{e,1} (K)$	17200
$T_{e,2} (K)$	16200

but for some reason Vaz et al. list masses that are slightly higher than their rv amplitudes would yield (by  $\sim 0.04M_\odot$ ) if we use the latest values of the standard astronomical constants. The velocity of the centre of mass  $V_\gamma$  is also listed in this table. It corresponds to the region of the minimum in Kämper’s (1986) Figure 7, although noticeably lower than Kämper’s value ( $\sim -13 \text{ km s}^{-1}$ ). Kämper’s formula for  $V_\gamma$  gives a bigger amplitude when more recent parameters are inserted, even so, a small discrepancy remains.

The UV flux ratios shown in Figure 2 confirm that there is about 1000K difference in temperatures of the two stars, but such ratios do not allow a direct determination of individual temperatures. If we accept the independently determined masses and radii as being in fair agreement with the reported MS spectral types, around B5, by interpolation from Table 3.6 in Budding & Demircan (2007a), the temperatures should be 17150 and 16150 K, respectively. This would perhaps suggest a slightly earlier spectral type than B5 for the primary (perhaps B4) and B5 for the secondary. The absolute  $V$  magnitudes turn out to be about -1.4 and -1.1 for primary and secondary, respectively. The resulting distance moduli are 2.586 for the primary,  $V = 6.53$ , and 2.580 for the secondary,  $V = 6.80$ : the average value would give a distance of 383 pc in the absence of interstellar extinction. The HIPPARCOS parallax requires a visual extinction of 1.57 mag. This is clearly much larger than a typical extinction going with the expected colour excess of 0.19 (Section 2). This requires the ratio  $R_V = A_V/E_{B-V}$  to be  $\sim 8$ . This large ratio is suggestive of a large grain population in the direction of the stars (grey extinction, cf. e.g. Draine 2003) that could be associated with the previously mentioned polarization anomalies reported by Eritsian et al. (1998).

If we use temperatures of 17000 and 16000 K, indicated by the foregoing discussion, for primary and secondary, we will obtain corresponding photometric fluxes ( $F'_V$ ) of 4.064 and 4.054 respectively, using the bolometric corrections from Table 3.1 in Budding & Demircan (2007a). From the formula

$$\log \Pi = 7.454 - \log R - 0.2V - 2F'_V \quad (3)$$

(Budding & Demircan, 2007a; Equ. 3.42) we derive an aver-

age photometric distance for the two stars of about 150 pc. The difference with the HIPPARCOS result can be resolved by reducing the adopted extinction (1.57 mag) or increasing the temperatures a little more. But in view of the uncertainties surrounding the anomalous extinction we should not put too much weight on any photometric distance in this case.

## 5 ASTROMETRIC AND O – C ANALYSIS, AND THIRD BODY

Bakış et al. (2006) discussed the use of HIPPARCOS astrometric data in the comparable case of  $\delta$  Lib. In that example, the third orbit has the relatively short period of about 2.8 y, so it would have been completed within the observation gathering period of the satellite. Although the data was relatively noisy, the nodal angle and an inclination could be estimated for the wide orbit, thence allowing an evaluation of the mass of the third star. Typical errors for HIPPARCOS’ fixing of stellar positions are on the order of 1-2 mas. The local plane of the sky forms the reference plane and the nodal angle  $\Omega$  refers the intersection line of the wide orbit in this plane to the equatorial coordinate system. Further details were given by Bakış et al. (2006).

HIPPARCOS actually records great circle abscissal measures,  $p$ , say. The variations of  $p$  in dependence on small changes of a given position of a star  $X_1, Y_1, Z_1$ , and the star’s motions through the satellite’s observation period,  $\dot{X}_1, \dot{Y}_1, \dot{Z}_1$ , for practical purposes, follow as,

$$\begin{aligned} \Delta p = & \frac{\partial p}{\partial X_1} \Delta X_1 + \frac{\partial p}{\partial Y_1} \Delta Y_1 + \frac{\partial p}{\partial \Pi} \Delta \Pi_1 \\ & + \frac{\partial p}{\partial \dot{X}_1} \Delta \dot{X}_1 + \frac{\partial p}{\partial \dot{Y}_1} \Delta \dot{Y}_1 \quad . \end{aligned} \quad (4)$$

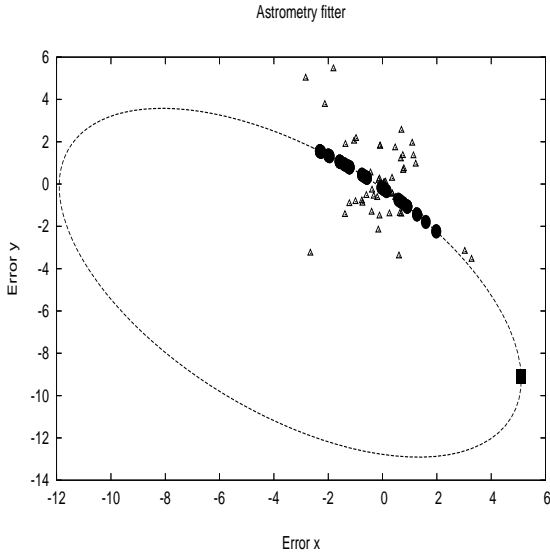
Here,  $\Pi_1$  is the parallax, and  $\Delta X_1, \Delta Y_1, \Delta \dot{X}_1$  and  $\Delta \dot{Y}_1$  combine the effects of systematic displacements due to an orbital motion, together with any possible constant errors in the assigned position  $X_1, Y_1$  and proper motions  $\dot{X}_1, \dot{Y}_1$  arising from neglect of such orbital effects in the original HIPPARCOS solution. We can then write,

$$\begin{aligned} \Delta p = & \frac{\partial p}{\partial X_1} (X + \delta X_1) + \frac{\partial p}{\partial Y_1} (Y + \delta Y_1) + \frac{\partial p}{\partial \Pi} \Delta \Pi_1 \\ & + \frac{\partial p}{\partial \dot{X}_1} \Delta \dot{X}_1 + \frac{\partial p}{\partial \dot{Y}_1} \Delta \dot{Y}_1 \quad , \end{aligned} \quad (5)$$

with  $X$  and  $Y$  being supplied for a given model of the orbit, in dependence on the parameters  $a, e, i, \omega, \Omega$  and  $P$  through standard Keplerian relations. The small constants  $\delta X_1, \delta Y_1$  (zero in the original HIPPARCOS solution) make up the resultant measured differences taken to be affected by orbital motion, i.e.  $\Delta X_1 = X + \delta X_1, \Delta Y_1 = Y + \delta Y_1$ .

To calculate where the bright binary would be at any particular time, we also need the parameter  $T_0$  that gives the epoch of periastron passage. This is referred to the zero of the Hipparcos timing system, i.e. 1989.847. According to Wolf et al. (2002), from whom most of the trial astrometric parameters are taken, U Oph’s wide orbit was at periastron at 1981.36 i.e. 7.4 y before the zero of the Hipparcos times (the seventh parameter in Table 7).

If, as in the case of U Oph, the period of the wide orbit is quite larger than the interval during which the satellite observations were gathered, the derived HIPPARCOS



**Figure 5.** Fit of the wide orbit of Wolf et al. (2002) to the Hipparcos astrometry of U Oph. The triangles show the HIPPARCOS measures; the full circles are the corresponding orbit model predicted positions. The full square marks the position of periastron passage. The units are mas (see text).

mean annual proper motions could be affected by the binary motion, leading to systematically different values from those averaged from terrestrial observations over very many years. For such orbits with periods  $\sim 10$  y, measured proper motions could be non-linear over the 3-4 y of HIPPARCOS data. This sometimes led the catalogue compilers to introduce extra non-linear terms (van Leeuwen & Evans, 1998), though that did not happen for U Oph. But a small linear correction  $\Delta\dot{X}_1$ ,  $\Delta\dot{Y}_1$ ; arising from the resultant mean difference of proper motion over the HIPPARCOS interval, should reduce the observational scatter in a solution taking this effect into account. The Bright Star Catalogue gives the mean historic proper motions of U Oph (at 2000) as  $-1$  and  $-20$   $\text{mas y}^{-1}$  in RA and declination, respectively, whereas the corresponding HIPPARCOS values are  $-4.39$  and  $-15.73$ ; i.e. different by  $\sim -3$  in RA and  $+4$   $\text{mas y}^{-1}$  in dec. The HIPPARCOS errors are here given to be around  $2$   $\text{mas y}^{-1}$ . In fact, Fig 5 indicates that the relative drift of HIPPARCOS proper motions, with respect to the historic means, are in the required sense during the HIPPARCOS observations, but not to the extent of the differences just given. We have adopted compromise values in Table 7. These allow the points to spread out a little in the predicted direction of motion, but larger values of  $\mu_\alpha$  and  $\mu_\delta$  would make this spread unacceptably large.

The five extra terms in Equ (5):  $\delta X_1$ ,  $\delta Y_1$ ,  $\Delta\Pi_1$ ,  $\Delta\dot{X}_1$  and  $\Delta\dot{Y}_1$  add to the others to make up a total of 12 unknown parameters for an optimization fitting procedure. The five partial derivative coefficients are supplied as numerical tabular values for each HIPPARCOS position. We thus have an appropriate fitting function and corresponding data, allowing  $\chi^2$  to be calculated by a nested subroutine within an ILOT program environment. The (reduced)  $\chi^2/\nu$  value listed is calculated for an adopted individual HIPPARCOS positional error of 2 mas.

Most of the orbital parameters listed in Table 7 are

**Table 7.** Astrometric curve-fitting results for the wide (third) orbit of U Oph.

Parameter	Value	Error
$P$ (y)	38.0	
$a$ (mas)	10.5	
$e$	0.2	
$\omega$ (deg)	149	
$i$ (deg)	57	3
$\Omega$ (deg)	46	4
$T_0$ (y)	$-7.4$	0.2
$\Delta\alpha \cos \delta$ (mas)	$-1.7$	0.3
$\Delta\delta$ (mas)	$-5.0$	0.2
$\Delta\Pi$ (mas)	0.0	
$\Delta\mu_\alpha$ ( $\text{mas y}^{-1}$ )	1.0	
$\Delta\mu_\delta$ ( $\text{mas y}^{-1}$ )	$-1.4$	
Error meas.	$\chi^2/\nu = 1.7$	

adopted from Wolf et al. (2002). The inclination and nodal angle cannot be determined from time of minima analysis, however: the listed values come from optimal fitting to the HIPPARCOS data. Scatter is also somewhat reduced by allowing a slightly greater period than that of Wolf et al. (2002). We had adopted the value 38.0 y from this analysis before the more recent value of 38.4 y of Vaz et al. (2007) was published. Allowing the parallax to be a free parameter has very little effect on the solution. The adopted set of such parameters then consists of  $i$ ,  $\Omega$ ,  $T_0$ ,  $\Delta\alpha \cos \delta$  and  $\Delta\delta$ , which are listed with corresponding error estimates. These latter two numbers locate the AB-C centre of mass with respect to the centroid of the HIPPARCOS measures (i.e. the origin in Fig 5). The HIPPARCOS catalogue specifies such measures as ‘errors’ from the centroid (on the assumption of no orbital motion). The (reduced) chi-squared variate  $\chi^2/\nu$  was calculated with an adopted individual HIPPARCOS positional error of 2 mas.

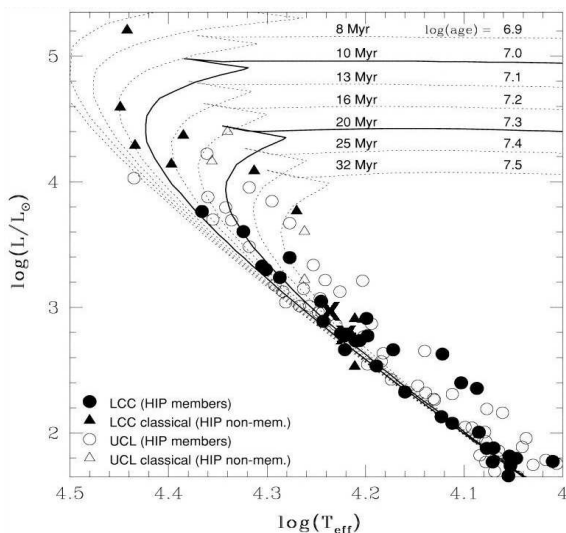
The results given in Table 7 allow Kepler’s law to be used to derive the mass of the third body. The value of  $a$  listed is actually  $M_3/M_{12} \times A$ , where  $A$  is the wide orbit’s semi-major axis, since the Hipparcos observations refer only to the close binary. So, if we use solar system units,  $a = 1.95$  AU, and using  $M_{12} = 9.69$  from Table 6 we can write:

$$\begin{aligned} a^3 &= P^2 M_3^3 / (M_{12} + M_3)^2 \text{ or} \\ M_3^3 &= 5.135 \times 10^{-3} \times (9.69 + M_3)^2 . \end{aligned} \quad (6)$$

This yields  $M_3 = 0.83$  to a satisfactory approximation. This is in keeping with the photometric findings of section 2.

## 6 EVOLUTIONARY STATUS AND STELLAR ENVIRONMENT

Bertelli (2002) produced a compilation of theoretical isochrones for Gould’s Belt member stars drawn from the Upper Centaurus Lupus (UCL) and Lower Centaurus Crux (LCC) regions of the Sco-Cen OB2 Association. In Figure 6 we show the positions of the two stars of U Oph AB, according to the parameters listed in Table 6. Although it is difficult to prove a great deal from just two points, Fig 6

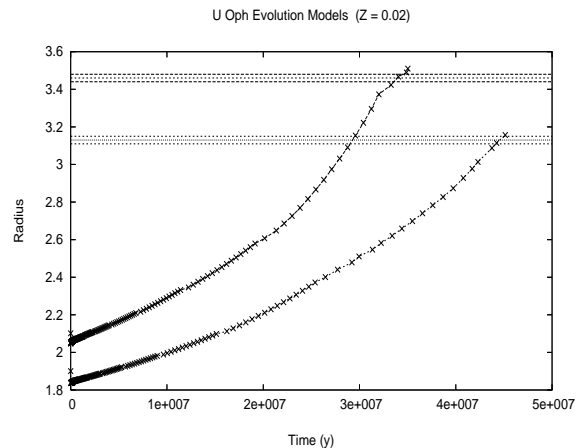


**Figure 6.** Theoretical isochrones of stars in the Sco-Cen OB Association according to Bertelli (2002). The positions of U Oph A and B are marked by large crosses, although the secondary is somewhat masked by crowding of the full circles.

corroborates both (a) that U Oph is consistent with an origin in Gould’s Belt and (b) that the stars are at least as old, and probably older than most of the member stars of the Sco-Cen OB2 Association. U Oph appears older than the earliest stages of the Association, but closer to the ( $\sim 30$  My) of Kämper (1986) than where the 63 My (Holmgren et al., 1991) isochrone should be expected. The latter age would correspond to the very early stages of the Gould’s Belt star formation era.

U Oph is about 65 degrees further on in longitude than the central region of the large Sco-Cen OB2 complex, which extends over  $\sim 70^\circ$  along the Belt. It has a similar proper motion in galactic latitude ( $\mu_b \approx -13 \text{ mas y}^{-1}$ ), while there is a considerable difference in the longitude component ( $\Delta\mu_l \cos b \approx 20 \text{ mas y}^{-1}$ : data from above and de Zeeuw et al., 1999) in the sense to effect the star’s separation in the direction of increasing longitude. De Zeeuw et al. (1999), in their census of the nearer OB associations, noted that the observed motions of multiple stars may be complicated by dynamical interactions between components (see also Blaauw, 1988), but it is not infeasible that the system could have ‘run away’ from a location in Gould’s Belt to the western side of the present LCC substructure.

Vaz et al. (2007) sought to test evolutionary models by reference to just the mass and radius parameters, as against colour-dependent ones. They also argued that systems with eccentric orbits have an extra possibility to check modelling via their apsidal motion constants, although the precision of that test was challenged by Ālek et al. (2008). They examined their absolute parameters for U Oph AB against a range of newer models from Claret (2004) and the Padova group (Girardi et al., 2000), which include more recent OPAL opacities as well as possibilities for core overshooting effects and mass loss. But Vaz et al. (2007) also made cautionary remarks about this kind comparison; for example, there are different conventions for the *exact* determination of isochrones. As well, the unknown free parameter of metallicity can be at least as significant in its effects as



**Figure 7.** Evolution of the two radii of the components of U Oph according to the Paczyński (1970) code. The observed radii (with their error bounds) are shown as horizontal lines.

variations in the opacity tables of different source calculations (see also, Ālek et al. 2008). Yet if it could be confidently found from stellar modelling, metallicity would be an interesting parameter in Galactic contexts. Although having mass loss and overshooting parameters to play with as well as the more basic ones, Vaz et al. were still not able to match co-eval models of the same composition to both primary and secondary components of hot young binaries quite generally. If ‘agreement’ is stretched to mean within  $1.5\sigma$  differences, then a single compromise metallicity of  $Z = 0.017$  could match the four similar mass young binaries, including U Oph, that they considered. On this basis, they obtained an age of 49 My for U Oph AB. They found a better fit for U Oph itself, however, with the slightly larger metallicity of  $Z = 0.02$  and the younger age of 40 My.

We have used the public-domain stellar modelling codes of Paczyński (1970) to look at the structure and evolutionary status of U Oph (cf. Ālek et al., 2008). Results are shown in Figure 7 for the same metallicity  $Z = 0.02$  considered by Vaz et al. (2007). The measured radius of the primary component is attained (after an apparent shell-burning onset) at  $\sim 33$  My, while the secondary takes about 43 My. An average age of 38 My (close to Vaz et al.’s value) is thus found. The significant differences between the two ages seem irreconcilable with the errors of the radii, however. Tests of the Paczyński code in the vicinity of the adopted masses show considerable sensitivity of the derived radius to the zero-age model integration (the program SCH). Figure 7 shows, for example, an initial ratio of radii of 0.895: much closer to the mass ratio (0.889) than expected for stars in this mass range, given that the models both have the same composition. While there are (at least) two parameters involved in fitting radii to evolved models, i.e. age and composition, it would normally be expected that the composition is the same for both stars (cf. e.g. Andersen, 1993). A higher metallicity (e.g.  $Z = 0.03$ , possibly acceptable for young Disk stars) brings down the average ages to around 30 My, close to Kämper’s (1986) value. Previous observations, mentioned in the introduction, referred to local compositional anomalies. Whether the discrepancy in the ages of the two components could be explained by local anomalies, or from some other

effect, not considered in the simple modelling experiments performed here, remains to be settled. In view of the various uncertainties, we believe a realistic age estimate for the U Oph system is 30-40 My.

## 7 CONCLUSIONS

High resolution spectroscopy of U Oph has enabled us to derive competitively accurate radial velocities, with amplitudes similar to, but, we argue more confidently obtained, than those found by other authors using lower resolution facilities. This has resulted in stellar parameters and an age of around 30-40 My, suggestive of a relationship to the Gould's Belt star-forming superstructure.

We have applied optimal curve-fitting techniques also to the astrometric data of the Hipparcos survey, adopting some of the parameters from Wolf et al (2002). We then find the third star, U Oph C, to be somewhat more massive than U Oph D – the visual companion of the system. The configuration is reminiscent of Ambartsumian's (1949) scenario of the hierarchical relaxation of young multiple stars.

Future studies of young southern binaries should enable further exploration of the issues of stellar cosmogony raised in this paper.

## 8 ACKNOWLEDGEMENTS

We greatly appreciate the financial support of the Turkish Science Research Council (TUBITAK) in partial support of this programme, as well as the Carter National Observatory of New Zealand. The Observatory's former Manager (J. Marchand) and former Senior Astronomer (B. Carter) provided well-received hospitality and encouragement.

Generous allocations of time on the 1m McLennan Telescope and HERCULES at the Mt John University Observatory were made available through its TAC and supported by its Director, Prof. J. Hearnshaw. Useful assistance at the telescope were provided by the MJUO management (A. Gilmore and P. Kilmartin) as well as (particularly) Duncan Wright and other students and staff of the Department of Physics and Astronomy, University of Canterbury, Christchurch.

V. and H. Bakış, D. Dođru and B. Özkardeş of the Department of Physics, 18th March University of Çanakkale, Turkey have given appreciated assistance with practicalities of this programme. We acknowledge also the constructive comments of Profs. M-E. Özel, A. Erdem and Z. Eker, of that department, and also Dr A. Odell of Northern Arizona University, Flagstaff, AZ., for significant help with the Paczyński code, whose testing has been assisted by O. Yılmaz and A. Böke in Çanakkale and Balıkesir.

## REFERENCES

- Abrami, A., 1958, *Trieste Contr.*, 3, 3  
 Ambartsumian, V.A., 1949, *Astron. Zh.*, 26, 1  
 Andersen, J., 1993, *ASP Conf. Ser.*, 40, 347  
 Bakış, V., Budding, E., Erdem, A., Bakış, H., Demircan, O., Hadrava, P., 2006, *MNRAS*, 370, 1935  
 Banks, T., Budding, E., 1990, *Ap&SS*, 167, 221  
 Barnes, J., 1993, *BAAS*, 25, 1435  
 Batten, A., 1957, *MNRAS*, 117, 521  
 Bertelli, G., 2002, *EAS Publ. Ser.*, 2, 265  
 Blaauw, A., 1988, *Astrofizika*, 29, 23  
 Budding, E., 2007, *ASP Conf. Ser.*, 370, 139  
 Budding E., Bakis V., Erdem A., Demircan O., Iliev L., Iliev I. & Slee O.B., 2005a, *Ap&SS*, 296, 371  
 Budding E., Demircan O., 2007a, in *An Introduction to Astronomical Photometry*, Cambridge Univ. Press  
 Budding, E., Demircan, O., 2007b, in *National Astronomy Meeting XV.*, Eds. H. Gülsecen, F. Limboz, A.F. Teker, Istanbul Kültür Üniv. Publ., No. 61, II, 969  
 Cester, B., Fedel, B., Giuricin, G., Mardirossian, F., Mezetti, M., 1978, *A&AS*, 33, 91  
 Claret, A., 2004, *A&A*, 424, 919  
 Clements, G.L., Neff, J.S., 1979, *ApJS*, 41, 1  
 Coyne, C.V., 1970, *Spec. Vatic. Ric. Astron.*, 8, 105  
 de Zeeuw, P.T., Hoogerwerf, R., de Bruijne, J.H.J., 1999, *AJ*, 117, 354  
 Eaton, J.A., Ward, D.W., 1973, *ApJ*, 185, 921  
 Eritsian, M.A., Docobo, J.A., Melikian, N.D., Tamazian, V.S., 1998, *A&A*, 329, 1075  
 ESA, 1997, *The Hipparcos and Tycho Catalogues*, ESA SP-1200  
 Frieboes-Conde, H., Herczeg, T., 1973, *A&AS*, 12, 1  
 Gahm, G.F., Ahlin, P., Lindroos, K.P., 1983, *A&AS*, 51, 143  
 Girardi, L., Bressan, A., Bertelli, G., Chiosi, C., 2000, *A&AS*, 141, 371  
 Hearnshaw, J.B., Barnes, S.I., Kershaw, G.M., Frost, N., Graham, G., Ritchie, R., Nankivell, G.R., 2002, *Exp. Astron.*, 13, 59  
 Hejlesen, P.M., 1980, *A&AS*, 39, 347  
 Hill, G., Hutchings, J.B., 1970, *PASP*, 82, 1031  
 Holmgren, D.E., Hill, G., Fisher, W., 1991, *A&A*, 248, 129  
 Huffer, C.M., Kopal, Z., 1951, *ApJ*, 114, 297  
 Hutchings, J.B., 1973, *ApJ*, 180, 501  
 İnek, G., Böke, A., Yılmaz, O., Budding, E., 2008, *Turk J. Phys.*, 32, 65  
 Jeffery, C.S., 1986, *CCP7 Newsletter* 10, 8  
 Kämper, B.C., 1986, *Ap&SS*, 120, 16  
 Koch, R.H., Koegler, C.A., 1977, *ApJ.*, 214, 423  
 Kopal, Z., 1959, *Close Binary Systems*, Chapman & Hall, London  
 Kopal, Z., 1988, *Ap&SS*, 144, 557  
 Kurucz, R.L., 1979, *ApJS*, 40, 1  
 Lindroos, K.P., 1985, *A&AS*, 60, 183  
 Magalashvili, N.L., 1949, *Abast. Astrofiz. Ohs. Byull.*, 10, 1  
 Oláh, K., Budding, E., Butler, C.J., Houdebine, E.R., Gimenez, A., Zeilik, M., 1992, *A&A*, 259, 302  
 Oke, J. B., 1964, *ApJ*, 140, 689  
 Paczyński, B., 1970, *Acta Astron.*, 2, 20  
 Panchatsaram, T., 1981, *Bull. Astr. Soc. India*, 9, 139  
 Pearce, J.A., 1960, *AJ*, 65, 55  
 Plaskett, J.S., 1919, *Publ. Dom. Astrophys. Obs.*, 1, 138  
 Popper, D.M., 1978, *ApJ*, 220, L11  
 Popper, D.M., Carlos, R., 1970, *PASP*, 82, 762  
 Pöppel, W.G.L., 1997, *Fund. Cosmic Phys.*, 18, 1  
 Ribas, I., Gimenez, A., Torra, J., Jordi, C., Oblak, E., 1998, *A&A*, 330, 600  
 Rucinski, S., 2006, *Ap&SS*, 304, 323  
 Russell, H.N., 1948, *Harvard Obs. Mon.*, No. 7, p 181.  
 Slettebak, A., Collins II, G.W., Boyce, P. B., White, N. M., Parkinson, T.D., 1975, *ApJS*, 29, 137  
 Skuljan, J., Wright, D., 2007, *HERCULES Reduction Software Package (HRSP)*, vers. 3, Univ. Canterbury, New Zealand  
 van Leeuwen, F., Evans, D.W., 1998, *A&AS*, 130, 157  
 Vaz, L.P.R., Andersen, J. & Claret, A., 2007, *A&A*, 469, 285  
 Wilson, R.E., Devlin, E.J., 1971, *ApJ*, 166, 605  
 Wolf, M., Harmanec, P., Diethelm, R., Hornoch, K., Eenens, P., 2002, *A&A*, 383, 533

## SÖZLÜ BİLDİRİLER:

- 1) World Year of Physics 2005 Turkish Physical Society 23<sup>rd</sup> International Physics Congress , 13-16 September 2005 , Muğla University/ Muğla, TURKEY

### THE ROLE OF STELLAR ENVELOPE CONVECTION AND ITS RELATION TO OBSERVATIONAL DATA

**G. İNLEK<sup>1</sup>, A. BÖKE<sup>1</sup>, O. YILMAZ<sup>2</sup>, E. BUDDING<sup>2</sup>, O. DEMİRCAN<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Balıkesir Üniversitesi , Fen- Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümü Balıkesir,TÜRKİYE  
[inlek@balikesir.edu.tr](mailto:inlek@balikesir.edu.tr), [aysun@balikesir.edu.tr](mailto:aysun@balikesir.edu.tr)

<sup>2</sup>Çanakkale Onsekizmart Üniversitesi , Fen- Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümü, Çanakkale,  
TÜRKİYE

[o.yilmaz@comu.edu.tr](mailto:o.yilmaz@comu.edu.tr), [ebudding@comu.edu.tr](mailto:ebudding@comu.edu.tr), [demircan@comu.edu.tr](mailto:demircan@comu.edu.tr)

We investigate the role of convection in the structure of low mass stars. Such models can be applied, for example, to Close Binary light curve analysis. We have considered a range of masses similar to the components of contact or near-contact binaries between 0.4 and 1.2 solar mass and we examine the effects of changing luminosity, mixing length and opacity parameters for a star of given mass. Our presentation includes certain checks we have made of the modeling against published standard stellar envelopes.

Keywords: stellar models, convection, checks of theory

- 2) XV. Ulusal Astronomi Kongresi, IV. Ulusal Öğrenci Astronomi Kongresi ,28 Ağustos-01 Eylül 2006 / İstanbul, Türkiye

### ROSSELAND ABSORPSİYON KATSAYILARININ LAGRANGE INTERPOLASYON YÖNTEMİYLE FARKLI SICAKLIKLAR İÇİN HESAPLANMASI

**Aysun BÖKE<sup>1</sup>, Gülay İNLEK<sup>1</sup>, Oktay YILMAZ<sup>2</sup>, Edwin BUDDING<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Balıkesir Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Fizik Bölümü, Balıkesir,  
[aysun@balikesir.edu.tr](mailto:aysun@balikesir.edu.tr)

<sup>1</sup>Balıkesir Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Fizik Bölümü, Balıkesir,  
[inlek@balikesir.edu.tr](mailto:inlek@balikesir.edu.tr)

<sup>2</sup>Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Fizik Bölümü,  
Çanakkale, [o.yilmaz@comu.edu.tr](mailto:o.yilmaz@comu.edu.tr)

<sup>2</sup>Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi ,Fizik Bölümü,  
Çanakkale, [ebudding@comu.edu.tr](mailto:ebudding@comu.edu.tr)

Bu çalışmada, Kurucz Modeli (1998) opaklık tablolarından Rosseland absorpsiyon katsayılarının yoğunluğa göre değişimi, farklı sıcaklıklar için Lagrange interpolasyon yöntemiyle Fortran programında hesaplanmıştır ve sonuçlar Kurucz opaklık verileri ile karşılaştırılmıştır.

## POSTERLER :

1) 6<sup>th</sup> International Conference of the BALKAN PHYSICAL UNION, 22-26 August 2006 /Istanbul, TURKEY.

### THE ROLE OF STELLAR ENVELOPE CONVECTION IN GRAVITY – DARKENING AND GRAVITY DARKENING EFFECT ON LIGHT CURVES AND OBSERVATIONAL CHECKS

G. İNLEK, A. BÖKE, O.YILMAZ\*, E.BUDDING\*

*Balıkesir University, Balıkesir, Turkey, inlek@balikesir.edu.tr*

*Balıkesir University, Balıkesir, Turkey, aysun@balikesir.edu.tr*

*\*Onsekizmart University, Çanakkale, Turkey, o.yilmaz@comu.edu.tr*

*\*Onsekizmart University, Çanakkale, Turkey, ebudding@comu.edu.tr*

We study the role of convection in the surface heat flow of low mass stellar envelopes with the aid of Paczynski's public domain program program GOB. This role is important, for example, for the analysis of light curves of close binary stars. We have considered atmospheric models for a range of low masses similar to the components of contact or near-contact binaries, and examined the effects of changing luminosity, surface temperature and mixing length for stars of given mass. Our presentation includes checks of the modeling against published standard stellar envelopes. A slight program modification was used to carry out these calculations, and allow the determination of particular values of gravity darkening coefficients to apply to particular close binary light curves. We have examined fillout factor effect on light curves.

2) XV. Ulusal Astronomi Kongresi , IV. Ulusal Öğrenci Astronomi Kongresi, 28 Ağustos-01 Eylül 2006 / İstanbul, TÜRKİYE.

### ÇEKİM KARARMASININ W UMa TÜRÜ ÖRTEN ÇİFT YILDIZLARIN IŞIK EĞRİLERİNİN ÜZERİNE ETKİSİ

Gülay İNLEK<sup>1</sup>, Aysun BÖKE<sup>1</sup>, Oktay YILMAZ<sup>2</sup>, Edwin BUDDING<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Balıkesir Üniversitesi, Fen – Edebiyat Fakültesi, Fizik Bölümü, Balıkesir, [inlek@balikesir.edu.tr](mailto:inlek@balikesir.edu.tr)

<sup>1</sup>Balıkesir Üniversitesi, Fen – Edebiyat Fakültesi, Fizik Bölümü, Balıkesir, [aysun@balikesir.edu.tr](mailto:aysun@balikesir.edu.tr)

<sup>2</sup>Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi, Fen- Edebiyat Fakültesi, Fizik Bölümü, Çanakkale, [o.yilmaz@comu.edu.tr](mailto:o.yilmaz@comu.edu.tr)

<sup>2</sup>Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi, Fen – Edebiyat Fakültesi , Fizik Bölümü, Çanakkale, [ebudding@comu.edu.tr](mailto:ebudding@comu.edu.tr)

Bu çalışmada, Paczynski'nin GOB programı kullanılarak W UMa türü örten çift yıldızlarda konveksiyon bölgesi için çekim kararma üssü hesaplanmıştır. Literatürden Lucy (1967) ve Zeipel (1924) 'in sonuçları da kullanılarak çekim kararmasının ışık eğrisi üzerine etkisi incelenmiştir. Bunun için Binary Maker programında OO Aql 'nın gözlemsel sonuçları kullanılmıştır.