

T.C.  
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
FİZİK ANABİLİM DALI

**YILDIZ MODEL PROGRAMLARININ SON TEORİK OPAKLIK  
VERİLERİ İLE VE GÖZLEMSEL KONTROLLERLE TEST EDİLMESİ**

**DOKTORA TEZİ**

**Aysun BÖKE**

**Balıkesir, Kasım – 2008**

T.C.  
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
FİZİK ANABİLİM DALI

**YILDIZ MODEL PROGRAMLARININ SON TEORİK OPAKLIK  
VERİLERİ İLE VE GÖZLEMSEL KONTROLLERLE TEST EDİLMESİ**

**DOKTORA TEZİ**

**Aysun BÖKE**

**Balıkesir, Kasım – 2008**

T.C.  
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
FİZİK ANABİLİM DALI

**YILDIZ MODEL PROGRAMLARININ SON TEORİK OPAKLIK  
VERİLERİ İLE VE GÖZLEMSEL KONTROLLERLE TEST EDİLMESİ**

**DOKTORA TEZİ**

**Aysun BÖKE**

**Tez Danışmanı : Y. Doç. Dr. Oktay YILMAZ**

**Sınav Tarihi : 20. 11. 2008**

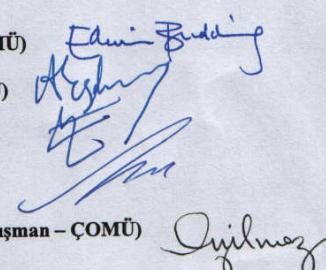
**Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Edwin BUDDING (ÇOMÜ)**

**Prof. Dr. Ahmet ERDEM (ÇOMÜ)**

**Doç. Dr. Ersen METE (BAÜ)**

**Doç. Dr. Levent SOLMAZ (BAÜ)**

**Y. Doç. Dr. Oktay YILMAZ (Danışman – ÇOMÜ)**



**Balıkesir, Kasım – 2008**

## ÖZET

### **YILDIZ MODEL PROGRAMLARININ SON TEORİK OPAKLIK VERİLERİ İLE VE GÖZLEMSEL KONTROLLERLE TEST EDİLMESİ**

**Aysun BÖKE**  
**Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,**  
**Fizik Anabilim Dalı**

**(Doktora Tezi / Tez Danışmanı : Y. Doç. Dr. Oktay YILMAZ)**

**Balıkesir, 2008**

Paczynski 'nin yıldız modelleme programlarının yardımcı ile zarf yapısı üzerindeki opaklık değişimlerinin etkisi incelendi. Bunun için Lagrange interpolasyonu kullanılarak Weiss [1], Allard [1], Iglesias & Rogers [2] ve Kurucz 'un [3] verilerinden yeni opaklık tabloları hazırlandı. Bu opaklıların sonuçları, Huebner ve grubu [4] ve Iglesias & Rogers 'ın [5] benzer opaklık tabloları kullanılarak bulunan sonuçlar ile karşılaştırıldı. Daha yeni opaklık verileri kullanarak bulduğumuz sonuçlar, diğer kaynakların sonuçları ile, Schwarzschild [6] tarafından orijinal olarak düşünülmüş olan yıldız kütleleri için gözden geçirildi.

Böyle hesaplamaların, iyi gözlemlenen gezegenlere ait tutulma sistemi olan V376 Peg (HD 209458) 'e ait yüksek doğruluktaki gözlemsel verileri ile nasıl ilişkilendirileceği düşünülmüş olup yakın gelecekte benzer doğruluktaki verilere rehber olması istenmektedir. Tutulan spektroskopik çift yıldızlardan alınan tüm yarıçaplar ve kütelerdeki hata paylarının yaklaşık % 1 olduğu tahmin edilmektedir. Düzenlenen opaklık hesaplamalarının orta kütleli yıldızların yarıçapları üzerindeki etkileri % 1 'den daha büyüktür. Bundan dolayı tutulan çift yıldızların verileri, yıldız tiplerinin geniş çeşitlerine karşılık gelen opaklık teorisinin bağımsız testleri için iyi bir potansiyele sahiptir.

**ANAHTAR SÖZCÜKLER :** yıldızlar / genel yapı / modelleme / opaklık tabloları / gözlemsel testler / tutulan çift yıldız verileri

## **ABSTRACT**

### **TESTING STELLAR MODEL PROGRAMS WITH RECENT THEORETICAL OPACITY DATA AND OBSERVATIONAL CHECKS**

**Aysun BÖKE**

Balıkesir University, Institute of Science,  
Department of Physics

**(Ph. D. Thesis / Supervisor : Asistant Prof. Dr. Oktay YILMAZ)**

**Balıkesir-Turkey, 2008**

We have examined the effect of varying opacities on envelope structure with the aid of Paczynski's public domain stellar modelling programs. For this, we prepared new opacity tables from the data of Weiss [1], Allard [1], Iglesias & Rogers [2] and Kurucz [3], using Lagrange interpolation to obtain the tabular values. We have compared the results of these opacities with the results of similar tabulations from Huebner et al. [4] and Iglesias & Rogers [5]. We have checked our findings using the newer opacity data with those of other sources for the ranges of stars considered originally by Schwarzschild [6].

We consider how such calculations relate to high accuracy observational data, with the well-observed planetary eclipsing system V 376 Peg (HD 209458) providing a guideline towards data of similar accuracy in the near future. Current accuracies on absolute radii and masses derivable from eclipsing spectroscopic binaries are conservatively estimated at  $\sim 1\%$ . The effects of revised opacity calculations on the radii of stars of intermediate mass are greater than this, so that eclipsing binary data should have a good potential for independent tests of opacity theory across a wide range of stellar types.

**KEY WORDS :** stars / general structure / modelling / opacity tables / observational tests / eclipsing binary data

## İÇİNDEKİLER

	<u><b>sayfa</b></u>
ÖZET, ANAHTAR SÖZCÜKLER	ii
ABSTRACT, KEY WORDS	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SEMBOL LİSTESİ	v
ŞEKİL LİSTESİ	vi
TABLO LİSTESİ	vii
ÖNSÖZ	viii
1. GİRİŞ	1
2. HİDROSTATİK VE TERMAL DENGЕ	4
2.1 Hidrostatik Denge	4
2.2 Bir Yıldızın Enerji Depoları	5
2.3 Termal Denge Koşulu	7
2.4 Işınımla Enerji Taşınımı	8
2.5 Isı İletimi ile Enerji Taşınımı	9
2.6 Konvektif Enerji Taşınımı	10
3. OPAKLILIKLAR	11
3.1 Atomik Soğurma Katsayıları	11
3.1.1 Bağlı-Bağlı Soğurma	11
3.1.2 Bağlı-Serbest Soğurma	11
3.1.3 Serbest-Serbest Soğurma	13
3.1.4 Elektron Saçılması	14
3.2 Rosseland Ortalaması	15
3.2.1 Bağlı-Serbest Dönüşümler için Kramer Kanunu	16
3.2.2 Serbest-Serbest Dönüşümler için Kramer Kanunu	17
3.2.3 Elektron Saçılması	18
4. MODEL OLUSUMUNDA GOB VE SCH PROGRAMLARININ KULLANIMI	19
5. OPAKLICK TABLOLARI	23
6. MODEL İNTEGRASYONLARDAKİ FARKLI OPAKLILIKLARIN SONUCLARI	43
7. GÖZLEMSEL MATERİYAL	46
8. SONUÇ VE TARTIŞMA	48
KAYNAKLAR	52
ÖZGEÇMİŞ	55
EKLER: TEZ KAPSAMINDA YAYINLANAN MAKALE VE BİLDİRİ	

## SEMBOL LİSTESİ

<u>Simge</u>	<u>Adı</u>	<u>Birim</u>
H	Akı	$\text{erg cm}^{-2} \text{s}^{-1}$
$\rho$	Yoğunluk	$\text{g cm}^{-3}$
$\rho_c$	Merkezi yoğunluk	$\text{g cm}^{-3}$
P	Basınç	$\text{dyn cm}^{-2}$
$\epsilon$	Enerji oluşum oranı	$\text{erg g}^{-1} \text{s}^{-1}$
$\kappa$	Opaklık	$\text{cm}^2 \text{g}^{-1}$
T	Sıcaklık	K
$T_e$	Etkin sıcaklık	K
$T_0$	Dış tabaka sıcaklığı	K
$T_c$	Merkezi sıcaklık	K
M	Kütle	g
R	Yarıçap	cm
L	Işitma	$\text{erg s}^{-1}$
$Xn$	İyonlaşma enerjisi	eV
g	Gaunt çarpanı	
G	Kütle çekim sabiti	$\text{cm}^3 \text{g}^{-1} \text{s}^{-2}$
c	Işık hızı	$\text{cm s}^{-1}$
$E_T$	Termal enerji	erg
$E_G$	Gravitasyonel enerji	erg
$E_N$	Nükleer enerji	erg
h	Planck sabiti	erg s
n	Baş kuantum sayısı	
v	Foton frekansı	$\text{s}^{-1}$
e	Elemanter yük	C
$Z^1$	İyonun etkin yükü	C
$X_A$	Elementin bolluk oranı	
$\sigma$	Stefan-Boltzmann sabiti	$\text{erg K}^{-4} \text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$
a	Soğurma katsayısı	$\text{cm}^2$
$\sigma_E$	Elektron başına soğurma katsayısı	$\text{cm}^2$

## **ŞEKİL LİSTESİ**

<b>Şekil Numarası</b>	<b>Adı</b>	<b>Sayfa</b>
Şekil 4.1	Sıfır yaşı bir güneş kütlesi için GOB ve SCH integrasyonlarının birleşiminin gösterimi	22
Şekil 5.1	Kurucz (1998) opaklılarına uygulanan Lagrange interpolasyonunun gösterimi	23
Şekil 5.2	Farklı yoğunluklarda değişen sıcaklıklara karşılık gelen Iglesias & Rogers (1996) opaklık değerlerinin gösterimi	25
Şekil 7.1	HD 209458 yıldızına ait ışık eğrisi	46

## TABLO LİSTESİ

<b>Şekil Numarası</b>	<b>Adı</b>	<b>Sayfa</b>
Tablo 5.1	Huebner ve grubu (1977) opaklık değerleri	27
Tablo 5.2	Iglesias & Rogers (1991) opaklık değerleri	29
Tablo 5.3	İnterpole edilen Iglesias & Rogers (1996) opaklık değerleri	31
Tablo 5.4	İnterpole edilen Allard (1996) opaklık değerleri	33
Tablo 5.5	İnterpole edilen Kurucz (1998) opaklık değerleri	35
Tablo 5.6	Weiss (1995) 'in $Z=0.001$ için interpolate edilen opaklık değerleri	37
Tablo 5.7	Weiss (1995) 'in $Z=0.002$ için interpolate edilen opaklık değerleri	39
Tablo 5.8	Weiss (1995) 'in $Z=0.004$ için interpolate edilen opaklık değerleri	41
Tablo 6.1	Farklı opaklık tabloları kullanılarak bulunan GOB ve SCH program sonuçları	44
Tablo 6.2	Opaklık artışlarına göre yarıçap değerlerindeki artışların karşılaştırılması	45
Tablo 7.1	HD 209458 yıldızına ait parametreler	47

## **ÖNSÖZ**

Bu çalışmada büyük emeği geçen sayın hocam Prof. Dr. Edwin BUDDING'e, tezde kullanılan GOB ve SCH programları ile ilgili yardımcılarını esirgemeyen Kuzey Arizona Devlet Üniversitesinden Dr. Andy ODELL'e ve ayrıca sayın hocalarım Prof. Dr. Mehmet Emin ÖZEL, Prof. Dr. Osman DEMİRCAN, Doç. Dr. Ersen METE, Doç. Dr. Levent SOLMAZ , Y. Doç. Dr. Oktay YILMAZ'a teşekkür ederim.

Hayatım boyunca ilgilerini ve desteklerini bir an olsun üzerinden eksik etmeyen ve beni her zaman yüreklendirip; bütün zorluklara rağmen, yılmadan ve usanmadan çalışmam için teşvik eden çok sevdiğim annem Medine ERGÜN ve babam Aydın ERGÜN'e yürekten teşekkür ederim.

Tez çalışmalarım boyunca beni hiç yalnız bırakmayan sevgili dostum Gülay İNLEK'e çok teşekkür ederim.

Balıkesir, 2008

Aysun BÖKE

## 1. GİRİŞ

Çoğu çalışmalar, radyatif transferin yıldızın yapısı ve evrimini şekillendirmede anahtar rolü oynadığını, yıldız içindeki radyasyona göre maddenin opaklığının doğrudan ölçümünün mümkün olmadığını gösterir. Eğer bir yıldızın iç durumları yorumlanıyorsa bunun için teorik hesaplamlar gereklili olmaktadır. Yıllarca çeşitli opaklık formülleri ve tabloları, yapı modellerine uygulanmaktadır. Schwarzschild'ın, "Yıldızların yapısı ve evrimi" adlı kitabında, opaklığa katkıda bulunan atomik süreçler (bağlı-serbest soğurma, serbest-serbest soğurma ve elektron saçılması) tartışılmıştır [6]. Bağlı-bağılı (çizgi) soğurmaların net etkileri sonradan daha çok dikkate alınmış ve bunun opaklığa önemli bir biçimde katkıda bulunduğu Iglesias & Rogers, Kurucz ve Carson tarafından gösterilmiştir [2, 3, 7]. Ayrıca çift yıldızların gözlemlerinin sonuçları ile teorik modeller Schwarzschild tarafından karşılaştırılmıştır. Modellerin kontrol edilmesi ile ilgili bu yaklaşım Strömgren [8] ve çoğu yazarlar tarafından desteklenmiştir.

Yıldız yapısının radyatif transfer denkleminde yer alan opaklık terimi  $\kappa$ ,

$$\frac{H\kappa\rho}{c} = -\frac{dP_{rad}}{dr} \quad (1.1)$$

denklemi ile verilmektedir [9]. Burada  $H$ ; radyasyon akısı,  $c$ ; ışık hızı,  $\rho$ ; bölgesel yoğunluk,  $P_{rad}$ ; radyasyon basıncı terimleridir. Radyasyon basıncı iç bölgelerde yüksek doğrulukla,

$$P_{rad} = \frac{\sigma T^4}{3} \quad (1.2)$$

ile verilmektedir [9]. Burada  $\sigma$ ; Stefan sabiti,  $T$ ; sıcaklığıdır. Radyasyon basıncını, radyatif transfer denkleminde yerine koyarak elde ettiğimiz radyasyon akısı,

$$H = -\frac{4\sigma c T^3}{3k\rho} \frac{dT}{dr} \quad (1.3)$$

olur [9]. Bu, birim zaman ve birim alan başına akı olup yıldızın tümü için akı terimi ise,  $L_r$  ( $L_r=4\pi r^2 H$ ) ile gösterilen küresel ışitma olup enerji oluşum denkleminden gelmektedir. Böylece opaklık, toplam ısının bölgesel sıcaklık gradiyentinden akması ile ilişkili olup opaklığın büyük olduğu bölgelerde sıcaklık gradiyenti de büyük olmaktadır. Tüm frekanslar üzerinden ortalama alındığında, Rosseland ortalama opaklığı  $\kappa$ , transfer denklemini sıcaklık gradiyentine bağlı olarak verir. Rosseland ortalaması,

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{\int_0^{\infty} \frac{1}{\kappa(v)} (1 - e^{-hv/kT})^{-1} \frac{dB(v, T)}{dT} dv}{\int_0^{\infty} \frac{dB(v, T)}{dT} dv} \quad (1.4)$$

denklemi ile belirlenmektedir [6]. Bu yüzden Rosseland ortalama opaklıkları  $\kappa$  ( $\text{cm}^2/\text{g}$ ), ele alınan frekanstaki akı katkısı ile orantılı olarak frekansa bağlıdır. Daha genel olarak, toplam ısı akışına radyatif saydamlığın (opaklığın tersi) katkılardan başka özellikle elektron iletiminin de düşünülmesi gerekmektedir [10]. Ancak bu çalışmada, sadece radyatif transferin etkileri üzerine yoğunlaşmıştır. Teorinin örnek yıldızların gözlemlsel verileri ile test edilebilmesi için çalışılmaktadır.

Kimyasal karışımıma bağlı olan opaklıklarda karışımalar genellikle kütle kesri olarak ifade edilirler. Hidrojen için X, helyum için Y ve diğer tüm elementler için (metaller) Z ile gösterilmektedir. Karışımı belirlemek için genellikle X ve Z ile gösterilen iki sayı yeterlidir (Helyum kütle kesri  $Y=1-X-Z$ ). Opaklıklar ayrıca X ve Z ile gösterilen karışımının yanında  $\rho$  ve  $T$  ile gösterilen yoğunluk ve sıcaklığa da bağlı olup  $\kappa_v = \kappa_v(X, Z, \rho, T)$  ’dir.

Astrofizikte pratik uygulamalar için, örnek opaklık tabloları genellikle iki boyutlu formatta (Logaritmik formda, yoğunluk ve sıcaklığın büyük değişimlerini veren  $\log \rho$  ve  $\log T$  için) seçilen X ve Z değerleri ile verilmektedir. Çoğu

yıldızlarda, yoğunluk ve sıcaklık değerleri ( $\rho \sim T^3$ ) arasında güçlü bir ilişki vardır. Bu ilişki, genel bir çizelge halinde uygun tarzda verilebilmesi için R değişkeni ile gösterilmiştir [5].

$$\log R = \log \rho - 3 \log T + 18 \quad (1.5)$$

Bu çalışmada, Los Alamos Ulusal Laboratuvarında, Cox ve Stewart'in [11] çalışması ile oluşturulan ve daha sonra Huebner ve grubu [4] tarafından güncellenen opaklık tabloları ile Iglesias & Rogers [5], Weiss [1], Allard [1], Iglesias & Rogers [2] ve Kurucz [3] opaklık tabloları yıldız model programı olan GOB (yıldızın daha dış sınır oluşumlarını içeren modelleme programı) 'a uygulanmıştır [12]. Yıldızın dış kısımlarındaki sıcaklık gradiyentinin, yıldızı oluşturan elementlerin tekrar birleşmeye başladığı zamanlarda aşırı olduğu ve opaklık etkilerinin yıldızın dış kısımlarında daha etkili olduğu iyi bilinmektedir [13]. Bu durum GOB programının çalıştırıldığı bölgelerde baskındır. Yayınlanmış opaklıkların GOB programındaki formatına dönüştürülmesi gerekmektedir. Bunun için dört nokta Lagrange interpolasyonu [14] kullanıldı. Böylece, -12 'den +3 'e kadar 0.5 'lik aralıklarla 31 adet logaritmik yoğunluklara ve 3.25 'den 7 'e kadar 0.075 'lik aralıklarla 51 adet logaritmik sıcaklıklara karşılık gelen logaritmik κ opaklık değerleri hesaplandı. Bu şekilde istenilen formata dönüştürülen opaklık hesaplamalarının, GOB ve SCH (yıldızın kütlesinin en büyük kısmı ile ilgilenen modelleme programı) [12] programları yardımıyla, orta ve düşük kütleli yıldızların yarıçapları üzerindeki etkileri incelenmiştir.

İç opaklıklar doğrudan ölçülemediği halde, yıldız modellerindeki hesaplamaların farklılıklarını kontrol etmek mümkündür. Gözlemsel verilerdeki yanlışlıkların yarıçaplarda % 1, kütle ve sıcaklıklarda % 2'den daha büyük olmaması opaklıkların test edilmelerine olanak vermektedir [15,16]. Bunun için hata paylarının yaklaşık % 1 olduğu tahmin edilen tutulan çift yıldız sistemlerinin verileri ele alınmıştır.

## 2. HİDROSTATİK VE TERMAL DENGE

### 2.1 Hidrostatik Denge

Yıldız içerisinde küçük bir miktar hareket eden tüm kuvvetler birbirini tamamen karşılamalıdır. Bu kuvvetler, içeriye doğru olan gravitasyonel kuvvet ve dışarıya doğru olan basınç kuvvetidir [17].

Yıldızın merkezinden  $r$  mesafede küçük bir silindir hacmi düşünelim. Merkeze doğru çizilen eksen ve  $dr$  uzunluğu olsun. Bu hacim üzerinde hareket eden basınç kuvveti

$$-\frac{dP}{dr} dS dr \quad (2.1)$$

dir [17]. Burada  $P$  basınç olup, merkezden  $r$  mesafede düzenli olarak azalan fonksiyondur. Aynı hacim üzerinde hareket eden gravitasyonel kuvvet,

$$\rho dS dr \frac{GM_r}{r^2} \quad (2.2)$$

dir [17]. Burada  $\rho$  yoğunluğu,  $G$  kütle çekim sabiti ve  $M_r$  ise, yoğunluğa göre ifade edilen  $r$  yarıçaplı küre içindeki kütleyi tarif etmektedir [17].

$$M_r = \int_0^r \rho 4\pi r^2 dr \quad (2.3)$$

Yıldızın iç bölgesindeki büyük kütlenin, dış katmanlara, onları içeriye doğru çekmeye çalışan büyük bir çekim kuvveti uyguladığını biliyoruz. Bu katmanlar içeriye doğru çökmüyorsa çökmeyi önleyen bir karşı kuvvet olmalıdır. Bu kuvvet

yer atmosferinin çökmesini önleyen kuvvetle görünürde aynı olup buna basınç kuvveti diyoruz. Birbirine eşit iki zıt kuvveti yerleştirerek hidrostatik denge koşulunu elde ederiz [17].

$$\frac{dP}{dr} = -\rho \frac{GM_r}{r^2} \quad (2.4)$$

Denklem (2.3) ve (2.4), yıldızlarla ilgili yapıyı yöneten temel denge denklemlerinin ilk ikisidir [17]. Yıldızların içindeki basınç, yoğunluk ve kütle dağılımını saptamaya yetersizdir.

Yıldızların büyük bir çoğunluğunun şişip büzülme yapmaması gerçeğinden yıldızlarda hidrostatik dengenin geçerli olduğu sonucuna varırız [17].

## 2.2 Bir Yıldızın Enerji Depoları

Hidrostatik dengeyi sağlamak için sabit bir yıldız temin etmek yeterli değildir. Termal dengeyi ayrıca düşünmek gerekmektedir [17]. Yıldızın katmanları arasında enerjinin ileri akışı meydana gelmezse ve tüm katmanlar aynı sıcaklığa ulaşırsa, yıldız içerisinde mükemmel bir termal denge elde edilir. Böyle mükemmel termal denge yıldız içerisinde tutulamaz [17]. İç sıcaklıklar on milyon derece olurken yüzey tabakalarının bir kaç bin derece olduğu bilinmektedir. Ayrıca, yıldızın ışınması ile ölçüldüğü gibi yüzeye akan enerji akışını görürüz. Bu akının varlığı, mükemmel bir termal dengenin olmadığını ortaya koyar. Yıldızda akıcıyı besleyen üç tip enerji vardır. Bunlar: Termal enerji  $E_T$ , gravitasyonel enerji  $E_G$  ve nükleer enerji  $E_N$ 'dır. Termal enerji ve gravitasyonel enerji, yıldızın tümü için bir integralle gösterilebilirler [17]:

$$E_T = \int_0^R \left( \frac{3}{2} \frac{k}{m} T \right) \rho 4\pi r^2 dr \quad (2.5)$$

$$E_G = \int_0^R (-G \frac{M_r}{r}) \rho 4\pi r^2 dr \quad (2.6)$$

Burada, denklem (2.5) 'deki parantez, yıldız maddesinin bir gramı için tek tip atomdan oluşan ideal bir gazın termal enerjisini, denklem (2.6) 'daki parantez içi ise, yıldız maddesinin bir gramını hareket ettirmek için gerekli olan enerjiyi vermektedir [17]. Denklem (2.4),  $4\pi r^3$  ile çarpılıp  $r = 0$  'dan  $r = R$  'ye kadar integre edilerek

$$\int_0^R \frac{dP_g}{dr} 4\pi r^3 dr = - \int_0^R \rho \frac{GM_r}{r^2} 4\pi r^3 dr \quad (2.7-a)$$

$$-\int_0^R 3P_g 4\pi r^2 dr = - \int_0^R \rho \frac{GM_r}{r} 4\pi r^2 dr \quad (2.7-b)$$

yukarıdaki (2.7-b) eşitliği bulunur [17]. Sol tarafın integrali termal enerjinin iki mislidir. Sağ taraftaki integral negatif gravitasyonel enerjidir. Böylece,

$$2E_T \equiv -E_G \quad (2.8)$$

denklemi oluşturmaktadır [17]. Bu yolla virial teoremi elde edilmektedir. Herhangi bir yaklaşım ya da varsayılmış yapılmadığından bu bağıntı, yıldız, hidrostatik dengede ve bir ideal gaz durumunda bulunukça her  $P_g(r)$ ,  $T(r)$ ,  $M_r(r)$  için tam olarak geçerlidir [17].

Denklem (2.8) 'in önemli sonuçları vardır. Yıldız büzülmeye başladığında açıga çıkan çekim enerjisi, ısı enerjisine dönüşür ve yıldız ısınmaya başlar. Açıga çıkan çekim enerjisinin yarısı ısı enerjisine dönüştüğünde hidrostatik dengeye ulaşır. Çekim enerjisinin yarısından fazlası ısı enerjisi olarak depolansayıdı yıldızın iç kısmı çok ısınacak dolayısıyla basınç çok yüksek olacak, basınç kuvvetleri çekim kuvvetlerinden daha büyük olacak ve yıldız yeniden genişlemek zorunda kalacaktır. Genişleme ve çekim enerjisinin tüketilmesinden dolayı denge yeniden kurulana kadar yıldız soğuyacaktır. Yıldızın daha fazla büzülmeden ısisal enerjisinin bir

bölümünü ışınım olarak yüzeyden saldığını biliyoruz. Çekim enerjisinden başka enerji kaynağı yoksa sıcaklık düşecek, yıldız çökmesini sürdürerek ve bu işlem sırasında ısınacaktır. Çökmenin her sonsuz küçük adımda büzülmeye devam etmeden önce açığa çıkan çekim enerjisinin yarısı ışınım enerjisi olarak salınıncaya kadar bekleyecektir. Büzülme sırasında yarıçapın azalmasıyla açığa çıkan çekim enerjisi büyüyecek ve artan çekim kuvvetlerini dengelemek için  $E_T$  artacak, yüzeydeki ışınım enerjisi kaybı onu soğutmaya çalışırken yıldız ısınmasını südürecek [17].

Bir yıldızın termal ve gravitasyonel enerjileri, yıldızın tüm yaşamı içindeki yüzey kayıplarını karşılaması için yeterli değildir. Bu enerjiler yıldız gelişiminin kısa ve kritik aşamalarında önemli rol oynamaktadır [6].

Yıldızın üçüncü enerji tipi, nükleer enerjidir. Nükleer süreçler, çekirdeğin kütle eşdeğerinden gelen enerji açığa çıkarır. Termal ve gravitasyonel enerjilerden çok daha büyüktür [6].

### 2.3 Termal Denge Koşulu

Bir yıldızın ışıtması ile yüzeyde ölçülen enerji kaybı, yıldızın içerisinde baştan sona nükleer süreçlerden açığa çıkan enerji ile karşılanmaktadır. Bu aşağıdaki denklemle açıklanabilir [6].

$$L = \int_0^R \varepsilon \rho 4\pi r^2 dr \quad (2.9)$$

Burada  $\varepsilon$ ; gram başına ve saniye başına nükleer süreçlerden açığa çıkan enerjidir. Nükleer enerji üretimi olan  $\varepsilon$ , sıcaklığa, yoğunluğa ve gazın bileşimine bağlıdır [6].

Denklem (2.9), bir yıldızın enerji dengesini sağlar. Ancak dengenin benzer tipi, yıldız içerisindeki herhangi bir katmanda sağlanmalıdır. Bir katmanda kazanılan

diğer katmanda kaybedilen enerji zamanla içerisinde sıcaklığın değişimmesine yol açacak ve yıldızı sabitsizlestirecektir.  $r$  yarıçaplı ve birim kalınlıklı bir küresel kabuk için enerji dengesi,

$$\frac{dL_r}{dr} = \varepsilon\rho 4\pi r^2 \quad (2.10)$$

denklemi ile yazılabilir [6]. Burada  $L_r$ ;  $r$  yarıçaplı küre içerisindeki enerji akısıdır. Bu denklemin sol tarafı, daha iç yüzeyde kabuğa giren daha büyük değerdeki akının daha dış yüzeyde kabuktan ayrılan akının farkı ile net akı kaybını, sağ tarafı ise, nükleer süreçlerle kabuk içerisinde üretilen enerjiyi verir. Denklem (2.10), yıldız içerisinde baştan sona temel denge koşullarının üçüncüsüdür [6].

Fiziksel olarak akı, enerji transferini sağlayan mekanizma olarak saptanmıştır. Bu, ışınım, iletim ve konveksiyonla olmaktadır. Bu enerji taşınım mekanizmalarının üçü için sıcaklık gradiyenti gereklidir [6].

## 2.4 Işınımıla Enerji Taşınımı

Enerji taşınımının yolu ne olursa olsun sıcaklık gradiyenti büyütükçe enerji akısı da büyür. Taşınım güç oluyorsa daha küçük bir enerji akısı bekleriz. Işınımı, yani fotonlarla ısı taşınımında fotonlar sık sık soğuruluyor ve yeniden salınıyorsa, başka bir deyişle fotonların ortalama serbest yolları çok küçükse, ısı taşınımı zor olur. Soğurma katsayısı büyük olduğunda bu durumla karşılaşırız [17].

Yıldız içerisinde daha sıcak bölgeden dışarıya doğru yönlenen radyasyon, daha soğuk bölgeden içeriye doğru yönlenen radyasyondan daha büyük radyasyon yoğunluğuna sahip olacaktır. Böylece dışarıya doğru net bir radyasyon akısı mevcuttur. Santimetre kare başına akı  $H$  ile, tüm küre içindeki akı  $L_r$  ile gösterilip her ikisi arasındaki geometrik ilişki,

$$L_r = 4\pi r^2 H \quad (2.11)$$

ile verilmektedir [6]. Yıldız içerisindeki gazın net radyasyon akısı, gazın opaklığının ve sıcaklık gradiyentinin fonksiyonu olarak,

$$L_r = -4\pi r^2 \frac{4ac}{3} \frac{T^3}{\kappa p} \frac{dT}{dr} \quad (2.12)$$

denklemi ile verilmektedir [6]. Denklem (2.12), dördüncü temel denge koşuludur. Burada,  $a$ ; Stefan-Boltzmann sabitini,  $c$ ; ışık hızını ve  $\kappa$ ; gram başına soğurma katsayısı ile opaklığını verir.

## 2.5 Isı İletimi ile Enerji Taşınımı

Verilen bir gazda sıcaklık gradiyenti varsa yüksek ısı enerjili ve yüksek hızlı parçacıklar, yüksek sıcaklık bölgesinden daha düşük sıcaklık bölgesine akarak oraya kinetik enerji taşırlar. Aynı zamanda, daha düşük hızlı, daha az enerjili parçacıklar da düşük sıcaklık bölgesinden yüksek sıcaklık bölgesine akarlar. Fakat sıcaklık gradiyentine bağlı olmak üzere bu parçacıklar, yüksek sıcaklık katmanlarına karşı yönde daha az enerji taşırlar. Öyleyse, yüksek sıcaklıklı gazdan daha düşük sıcaklıklı gaza net bir enerji taşınımı vardır. Enerji taşınımının miktarı doğrudan doğruya sıcaklık gradiyenti ile orantılıdır. O halde parçacıkların ısisal hareketleri,

$$\pi F_{cd} = -\eta \frac{dT}{dr} \quad (2.13)$$

ile verilen  $\pi F_{cd}$  'lik bir ısı iletim akısına götürecektr [13]. Burada  $\eta$ ; ısı iletim katsayısı olup negatif işaret ise, ısı akısının azalan sıcaklık doğrultusunda gittiğini göstermektedir [17].

## **2.6 Konvektif Enerji Taşınımı**

Kütleyle enerji taşınımında sıcak madde yukarıya doğru yükselir, orada soğur ve sonra soğuk madde olarak aşağıya iner. Net enerji taşınımı, yukarıya doğru taşınan enerji ile aşağıya doğru taşınan enerji miktarı arasındaki fark ile verilir. Böylesi kütle hareketlerine konveksiyon da denilmektedir [17].

Konveksiyonla yıldızın daha alt tabakalarından daha üst tabakalarına doğru termal enerji taşınacaktır. Aşağıda daha sıcak tabakalardaki sıcaklık azalırken yukarıdaki daha soğuk tabakalardaki sıcaklık artacaktır. Böylece sıcaklık gradiyenti konveksiyon ile azalmış olacaktır. Sıcaklık gradiyentinin daha düşük olması denklem (2.12) 'e göre radyasyon akısını azaltacaktır. Ayrıca konvektif akıyı da azaltacaktır [6].

### **3. OPAKLILAR**

İyonizasyonun çoğu aşamaları ve çoğu elementleri içeren atomik süreçlerin çokluğu opaklığa sebep olmaktadır.

#### **3.1 Atomik Soğurma Katsayıları**

Opaklığa katkıda bulunan dört atomik süreç vardır. Bunlar: Bağlı-bağılı soğurma, bağlı-serbest soğurma, serbest-serbest soğurma ve serbest elektronlardan saçılımadır.

##### **3.1.1 Bağlı-Bağılı Soğurma**

Bir atomdaki bir çok kesikli enerji düzeylerinde, bağlı bir elektron yine bağlı daha yüksek enerji düzeyine geçiş yapıyorsa soğurma meydana gelir. Bu iki enerji düzeyi arasındaki enerji farkı soğurulan fotonun enerjisine eşittir. Her iki enerji düzeyi bir atom veya iyona bağlı elektronlara karşılık geldiğinden kesikli enerji düzeyleri arasındaki bu geçişlere bağlı-bağılı geçişler denilmektedir [17].

##### **3.1.2 Bağlı-Serbest Soğurma**

Bağlı-serbest geçişler bir iyonlaşma işlemine karşılık gelir. Bağlı bir elektron bağlı durumdan serbest duruma geçer. Bunun tersi, foton salınmasıyla bağlı duruma geçme işlemi de yeniden birleşme işlemidir. Bağlı-serbest geçiş için elektron n sayılı baş kuantum düzeyinden kopmuşsa soğurulan fotonun frekansı,

$$h\nu = \chi_n + \frac{1}{2}mv^2 \quad (3.1)$$

ile verilir [17]. Burada,  $\chi_n$  iyonlaşma enerjisidir. İyonlaşma işleminden sonra elektronun kinetik enerjisi  $1/2mv^2$  'dir. Bağlı-serbest dönüşümler tüm atomlar ve hala kendilerine bağlı bir elektrona sahip iyonlar için olasıdır .

Yıldız içerisinde hidrojen ve helyum tamamen iyonize olduğu için bağlı-serbest dönüşümlerin sadece daha ağır elementler için düşünülmesi gerekmektedir. Çünkü daha ağır elementler, tamamen olmasa bile içerisinde çok fazla iyonlaşmışlardır. Öyleyse, soğurma katsayısı için ağır elementler çok önemlidir. Bir atoma bağlı elektron için soğurma katsayısı,

$$a_{bf} = \frac{64\pi^4 me^{10}}{3\sqrt{3}ch^6} \frac{Z^{14}}{n^5} \frac{g}{v^3} \quad (3.2)$$

denklemi ile verilmektedir [6]. Burada,  $Z^1$ ; iyonun etkin yükü,  $n$ ; elektronun baş kuantum sayısı,  $v$ ; soğurulan fotonun frekansı,  $e$ ; elementer yük,  $m$ ; elektronun kütlesi,  $h$ ; Planck sabiti,  $g$ ; Gaunt çarpanı olarak adlandırılan boyutsuz bir faktör olup  $n$  ve  $v$  ile yavaşça değişir ve bütünlüğü sağlar. Denklem (3.2), foton enerjilerinin iyonlaşma enerjisi  $\chi_n$  'i aştığı durumlara karşılık gelen frekanslar için yalnızca yazılabilir. Bu yüzden, bağlı-serbest dönüşümler, düşük frekansta sıfır olan kritik frekansta birdenbire maksimuma sıçrayan ve frekansın kübyle orantılı olarak daha yüksek frekanslarda gitgide azalıp son bulan bir soğurmaya sebep olur.

Bağlı-serbest toplam soğurma katsayısını hesaplamak için önce atom ve iyonların her çeşidindeki her bağlı düzey için soğurma katsayısını frekansın fonksiyonu olarak hesaplamalı, sonra her frekanstaki katkılardan toplamını almalıyız. Bağlı-serbest dönüşümler için toplam soğurma katsayı,

$$\kappa_{bf}(v) \times \rho = \sum_{A,n} a_{bf} \times \frac{\chi_A \rho}{AH} \times N_{A,n} \quad (3.3)$$

denklemi ile verilir [6]. Burada,  $A$ ; ağır elementlerin ortalama atomik ağırlığı,  $H$ ; bir protonun kütlesi,  $\rho$ ; yoğunluk,  $N_{A,n}$ ; atom başına  $n$ . durumda bağlı olan elektron sayısı,  $\chi_A$ ; elementin bolluk oranı,  $\frac{\chi_A \rho}{AH}$ ; santimetre küp başına atom sayısıdır.

### 3.1.3 Serbest-Serbest Soğurma

Serbest-serbest soğurmada,  $1/2m\vartheta_1^2$  kinetik enerjili bir elektron, bir atomu geçtiği sırada  $h\nu$  enerjili bir foton soğurarak  $1/2m\vartheta_2^2$  gibi daha yüksek bir kinetik enerji kazanabilir. Bu soğurulan fotonun enerjisi, elektronun kinetik enerjilerinin farkı ile verilir. Bu olay Frenleme ışınımı (Bremsstrahlung) olayının tersidir.

Yıldız içlerindeki milyonlarca derecelik sıcaklıklarda hidrojen ve helyumun tamamı iyonlaşır ve ağır elementler de elektronlarının çoğunu kaybeder. Bu durumda serbest-serbest geçişler önem kazanır. Hidrojen ve helyum çekirdeklerinin sayısı ağır elementlere göre çok fazla olduklarından, serbest-serbest geçişler daha çok hidrojen ve helyum çekirdeklerinin Coulomb alanındaki geçişlerinden ileri gelir.

Santimetre küp başına bir serbest elektron ve bir atom için serbest-serbest soğurma katsayısı,

$$a_{ff} = \frac{4\pi e^6}{3\sqrt{3}chm^2} \frac{Z^{1/2}}{\vartheta} \frac{g_{ff}}{v^3} \quad (3.4)$$

denklemi ile verilir [6]. Burada,  $\vartheta$ ; elektronun hızı ve  $g_{ff}$ ; Gaunt çarpanıdır. Bu soğurma katsayısı, düşük frekanslarda yüksek değerlerden yüksek frekanslardaki düşük değerlere doğru yavaşça değişir. Serbest-serbest dönüşümler ile tüm enerjideki fotonlar soğurulabildiği için frekans aralığında sınırlama yoktur.

Serbest-serbest dönüşümler için toplam soğurma katsayısı,

$$\kappa_{ff}(v) \times \rho = \sum_A \int_{\vartheta} a_{ff} \times \frac{\chi_A \rho}{AH} \times N_E(\vartheta) d\vartheta \quad (3.5)$$

denklemi ile verilir [6]. Burada,  $N_E$ ; santimetre küp başına serbest elektronların sayısını vermektedir. Serbest-serbest dönüşümler için atomik soğurma katsayısı elektronun hızına bağlı olduğu için elektronların sayısını hızın fonksiyonu olarak kullanmalıyız ve sonra tüm hızlar üzerinden integral almalıyız. Tüm bu hesaplamalardan sonra tekrar tüm ilgili elementler üzerinden toplam alırız. Böylece serbest-serbest dönüşümler için toplam soğurma katsayısını elde ederiz.

### 3.1.4 Elektron Saçılması

Soğurma işlemlerinin en sonucusu ve en basiti elektron saçılmasıdır. Gaz içerisindeki serbest elektronlarla fotonların saçılmasından meydana gelir. Tesir kesiti oldukça küçüktür. Elektron başına soğurma katsayısı,

$$\sigma_E = \frac{8\pi e^4}{3c^4 m^2} \quad (3.6)$$

denklemi ile verilir [6]. Bu soğurma katsayısı frekanstan bağımsız olup serbest elektronlar tarafından tüm açılardaki fotonların toplam saçılma tesir kesitidir ve Thomson tesir kesiti olarak isimlendirilir. Serbest elektronların hemen hemen tümü hidrojen ve helyumdan geldiğinden ve bunlar da 100 000 K 'lik sıcaklıklarda tamamen iyonlaştırıldıklarından artan sıcaklıkla birlikte bir gramlik madde içerisindeki serbest elektronların sayısı değişmez.

Elektron saçılması için, santimetre küp başına elektronların sayısını, atomik soğurma katsayısı  $\sigma_E$  ile çarparak santimetre küp başına soğurma katsayısını,

$$\kappa_E \times \rho = \sigma_E \times N_E \quad (3.7)$$

denklemi ile elde edilir [6].

Toplam soğurma katsayısı için, üç atomik süreçten gelen katkılar eklenir ve frekansın bir fonksiyonu olarak toplam soğurma katsayısı,

$$\kappa(v) = \kappa_{bf}(v) + \kappa_{ff}(v) + \kappa_E \quad (3.8)$$

denklemi ile elde edilir [6].

### 3.2 Rosseland Ortalaması

Rosseland ortalaması, denklem (3.8) ile verilen her bir frekansa ait toplam soğurma katsayısının tüm frekanslar üzerinden ortalama alınmasıdır. Bu ortalama,

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{\int_0^{\infty} \frac{1}{\kappa^*(v)} \frac{dE(v)}{dT} \frac{dT}{dr} dv}{\int_0^{\infty} \frac{dE(v)}{dT} \frac{dT}{dr} dv} \quad (3.9-a)$$

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{\int_0^{\infty} \frac{1}{\kappa(v)} (1 - e^{-hv/kT})^{-1} \frac{dB(v, T)}{dT} dv}{\int_0^{\infty} \frac{dB(v, T)}{dT} dv} \quad (3.9-b)$$

ile verilmektedir [6]. Denklem (3.9) ile, atomik verilerden ortalama soğurma katsayısı elde edilmektedir.

### 3.2.1 Bağlı-Serbest Dönüşümler için Kramer Kanunu

Denklem (3.3) ile verilen bağlı-serbest soğurma katsayısına ait kaba bir tahmin elde edilmektedir. Bu denklemde, atom başına n. durumda bağlı olan elektronların ortalama sayısı,  $N_{A,n}$  iyonizasyon denklemi ile belirlenmekte olup bunun için Saha denklemi kullanılmaktadır. Saha denklemi, iyonize olmuş gazların yüksek olduğu bir ortamda bağlı elektronların sayısının serbest elektron yoğunluğuna oranı ile verilmektedir [6].

$$N_{A,n} = N_E n^2 \frac{h^3}{2(2\pi mkT)^{3/2}} e^{+X_n/kT} \quad (3.10)$$

Buradaki  $N_E$ ;

$$N_E = \frac{1}{\mu_E} \frac{\rho}{H} \quad \frac{1}{\mu_E} = X + \frac{1}{2}Y + \frac{1}{2}Z = \frac{1}{2}(1+X) \quad (3.10-a)$$

ile santimetre küp başına serbest elektronların sayısını vermektedir [6].

Denklem (3.10), denklem (3.3) 'de yerine koyularak,

$$\kappa_{bf}(v) = \sum_{A,n} \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \frac{e^6 h^2}{c H^2 m^{1.5} k^{3.5}} \frac{Z^{1/2}}{A} \left[ \frac{1}{n} \frac{X_n}{kT} e^{+X_n/kT} \left( \frac{kT}{hv} \right)^3 g \right] Z(1+X) \frac{\rho}{T^{3.5}} \quad (3.11)$$

denklemi elde edilir [6].

Denklem (3.11) 'de, her bir elemente ait bolluk oranı olan  $X_A$  elementleri üzerinden toplam alınmaktadır. Hidrojen ve helyum elementleri bağlı-serbest dönüşümlere çokça katkıda bulunmadığı için metal elementler üzerinden toplam alınmaktadır. En düşük kuantum durumu olan  $n=1$ , esas katılımı sağladığı için diğer kuantum durumları üzerinden toplam alma işlemi ihmal edilmektedir. Bu yaklaşım larla denklem (3.11) 'in, denklem (3.9) ile verilen Rosseland ortalaması yardımı ile tüm frekanslar üzerinden ortalaması alındığında,

$$\kappa_{bf} = 4.34 \times 10^{25} \times \frac{\bar{g}}{t} \times Z(1+X) \frac{\rho}{T^{3.5}} \quad (3.12)$$

olur [6]. Bu, Kramer 'in bağlı-serbest dönüşümler için opaklık kanunudur. Denklem (3.12) 'deki  $\bar{g}$ ; ortalama Gaunt faktörünü ve t ise, denklem (3.11) 'deki köşeli parantez içindeki faktörler için ortalamayı vermektedir.

### 3.2.2 Serbest-Serbest Dönüşümler için Kramer Kanunu

Serbest-serbest geçişler, yıldızda çok fazla sayıda bulunan hidrojen ve helyum çekirdeklerinin Coulomb alanındaki geçişlerinden meydana geldiği için serbest-serbest dönüşümlerde yalnızca hidrojen ve helyum elementleri düşünülmüş olup daha ağır elementler ihmal edilmiştir.

Denklem (3.4) ile verilen atom için serbest-serbest soğurma katsayısı, denklem (3.5) 'de yerine konularak tüm hızlar üzerinden integral alınmaktadır. Daha sonra  $X_A$  elementleri üzerinden yani hidrojen ve helyum elementleri üzerinden toplam alındığında,  $X+Y$  değerini vermektedir. Denklem (3.9) ile verilen Rosseland ortalaması yardımıyla denklem (3.5) 'in tüm frekanslar üzerinden ortalaması alınmaktadır. Bunun neticesinde,

$$\kappa_{ff} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \frac{e^6 h^2}{c H^2 m^{1.5} k^{3.5}} \frac{1}{196.5} \bar{g}_{ff} (X+Y)(1+X) \frac{\rho}{T^{3.5}} \quad (3.13-a)$$

$$\kappa_{ff} = 3.68 \times 10^{22} \bar{g}_{ff} \times (X+Y)(1+X) \frac{\rho}{T^{3.5}} \quad (3.13-b)$$

denklemi ile hidrojen ve helyumun toplam serbest-serbest soğurma katsayısı kaba bir yaklaşımla elde edilmektedir [6].

### 3.2.3 Elektron Saçılması

Üç atomik sürecin en sonucusu olan elektron saçılması, denklem (3.10-a) 'da verilen santimetre küp başına serbest elektron sayısı ile denklem (3.6) 'da verilen elektron için soğurma katsayısı ifadelerinin denklem (3.7) 'de yerine konulmasıyla bulunmaktadır. Elektron saçılması, frekanstan bağımsız olmasına rağmen denklem (3.9) ile verilen Rosseland ortalaması uygulanmaktadır. Çünkü Rosseland ortalaması sadece uygun ortalama almakla kalmayıp aynı zamanda da uyarılmış emisyonu hesaba katarak frekanstan bağımsız soğurma katsayısına 1.055 değerinde bir indirgenme faktörü verir. Böylece herhangi bir yaklaşım olmaksızın elektron saçılması için,

$$\kappa_E = \frac{4\pi}{3} \frac{e^4}{c^4 H m^2} \frac{1}{1.055} \times (1+X)$$
$$= 0.19 \times (1+X) \quad (3.14)$$

değeri elde edilmektedir [6].

Yıldız içerisindeki radyatif opaklılığın önemli kaynağı, gaz içerisindeki serbest elektronlar tarafından fotonların saçılmasıdır. Bu saçılmadan kaynaklanan opaklık, daima serbest elektronların varlığında meydana gelmektedir.

#### **4. MODEL OLUŞUMUNDA GOB VE SCH PROGRAMLARININ KULLANIMI**

GOB ve SCH programları, normal ana sıra tipi yıldızların sıfır ya  modellerinin (ZAMS) oluşumunda kullanılmaktadır. Bu modellerin evrimi için ayrı bir program gerekmektedir.

Normal yıldız yapı problemi, dört diferansiyel denklemin çözümünün bulunması ile açıklanabilir. Bu diferansiyel denklemler,

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi\rho r^2 \quad (4.1)$$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r\rho}{r^2} \quad (4.2)$$

$$\frac{dL_r}{dr} = 4\pi\varepsilon\rho r^2 \quad (4.3)$$

$$\frac{dT^4}{dr} = -\frac{\kappa\rho L_r}{4\pi\varepsilon r^2} \quad (4.4)$$

olarak verilmektedir [6]. Denklemler programlarda analitik çözüme sahip olmayıp nümerik integrasyon ile çözülmelidirler. Ayrıca her bir diferansiyel denklem için sınır koşulları belirlenmelidir.

Denklemlerde ana bağımsız değişken olan  $r$  yarıçapı ( $0 \leq r \leq R$ ) aral ında değişmektedir. Burada  $R$ , tüm yıldızın yarıçap mesafesi olarak alınmaktadır. Böylece,  $r=0$  ve  $r=R$  olmak üzere iki fiziksel sınır oluşmuştur.

İç sınırda (yıldızın merkezi),  $r=0$  için  $M_r=0$  ve  $L_r=0$  olup merkezi sıcaklık  $T_c$  ve merkezi yoğunluk  $\rho_c$  bilinmemektedir. Dış sınırda,  $r=R$  için yıldızın en iyi bilinen ve görülen kısmı olan dış sınır sıcaklığı  $T_o$ , çok büyük iç değerleri ile karşılaşıldığında sıfır olmayı çok küçük değerdedir. Normalde,  $R$  yarıçaplı bir yıldızdan ziyade toplam kütlesi  $M$  olarak verilen bir yıldız düşünülmektedir. Verilen  $M$  değeri için dış sınır koşulları,  $\rho=\rho_0$  ve  $T=T_0$  (atmosferin zirvesi) olmaktadır.

Dış sınır oluşumlarını düzenleyen GOB programı için iki nicelik olan ışılma  $L$  ve yarıçap  $R$  değerleri, verilen  $M$  değeri için tahmin edilmelidir. Bu iki nicelik ( $L$  ve  $R$ ), üçüncü bir nicelik olan etkin sıcaklık  $T_e$ ’yi,

$$L=4\pi R^2 \sigma T_e^4 \quad (4.5)$$

denklemi ile belirlemektedir [6].

Gerçekte  $T_e$  ve  $L$  (Herzprung Russell (HR) ’ın teorik formdaki diyagramının iki değişkeni) için verilen tahmini değerler  $R$  değerini verecektir. Örneğin, güneş kütlesinin iki katı olan ana sıra bir yıldız için etkin sıcaklık ve ışılma değerleri, HR diyagramından bilinmektedir. Bir standart model atmosferi için etkin sıcaklık  $T_e$  ve yıldızın en dış tabaka sıcaklığı  $T_0$  arasında ayrıca bir ilişki vardır. Eddington ’ın klasik model atmosferinde bu ilişki,  $T_0=(1/2)^{1/4}T_e$  olarak verilmektedir [18].

Doğru değerleri içine alan  $L_0$  ( $L=L_0$ ),  $T_0$  düzlemindeki dört köşe noktaları için, yıldız içerisinde devam eden integrasyonlarla sonuçlanan model atmosferlerini oluşturmak mümkündür.

GOB integrasyonları, yıldızın kütlesinin % 10 ’u kadar içeriye doğru ilerlemektedir ( $M \geq M_r \geq M_B$  ). Bu program, yalnızca üç diferansiyel denklem ( $L_0=L_R=sbt$ ) içерdiği için hızlı biçimde ilerlemektedir. Modellemede, gözlemsel sonuçlar ile elde edilen yüzey ışınması  $L_0$  ve etkin sıcaklık  $T_e$  ( $R$  değeri,  $L$  ve  $T_e$  değerinden bulunur) ’ye (dış sınır) karşılık merkezi sıcaklık  $T_c$  ve merkezi yoğunluk  $\rho_c$  (iç sınır) tahmini değerleri belirtilmelidir. GOB programı, yıldızın toplam kütlesinin  $0.95M_R$  ’lik kısmından başlayıp, kullanıcı tarafından belirlenip sabitlenen

atmosfer tabakasının tabanı  $M_r = M_B$  'ye doğru integrasyonlarla ilerler. Sıcaklık çok büyükse veya integrasyon adımlarının sayısı çok fazla ise bazı kontrol parametreleri ortaya çıkmaktadır. Alt sınırda GOB,  $L_0 = L_B$  'nin de geçerli olduğu  $\rho_B$ ,  $T_B$  ve  $R_B$  değerlerini oluşturur. Verilen bu dört köşe değerleri ile atmosferin taban değerlerini bulmak amacıyla ara noktalar için interpolasyon (lineer) yapmak mümkündür. Örneğin;  $L_0$ ,  $R$  genel yüzey noktasına karşılık gelen taban yoğunluğu için,

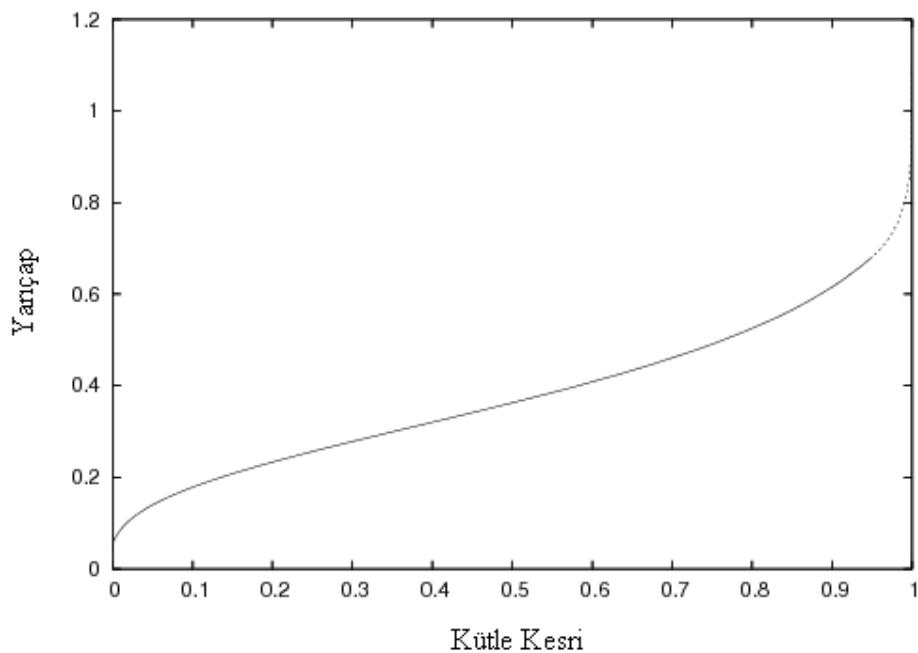
$$\rho_B(L_0, R) = \rho_B(L_1, R_1) + \frac{L_0 - L_1}{L_2 - L_1} [\rho_B(L_2, R_1) - \rho_B(L_1, R_1)] + \frac{R - R_1}{R_2 - R_1} [\rho_B(L_1, R_2) - \rho_B(L_1, R_1)] \quad (4.6)$$

bağıntısı yazılabılır [19].

$L_0, T_0$  yüzey değerleri ile içeriye doğru integrasyonlarla çalışan GOB programının sonucu olarak elde edilen dört taban değer, SCH programına giriş değerleri olarak verilmektedir. Merkezden dışarıya doğru integrasyonlar,  $0.95M_R$  düzeyinden içeriye doğru integrasyonlarla, seçilmiş sabit bir iç noktası karşılaştırılır ve değişkenler arasındaki farklar belirlenip yeni başlangıç değerleri için programlar tekrar çalıştırılır.

Merkezden dışarıya doğru ikinci kez çalıştırılan SCH programında, yeni  $T_c$  ve  $\rho_c$  merkezi sınır değerlerini tahmin etmek artık zor değildir. Karşılaşma noktasında, yeni oluşan değerler arasında farklılıklar olacaktır. Bu farklılıklar, doğruluk kontrol limitinin altında olduğunda, karşılaşma noktasındaki değişkenler arasında bulunan farklılıklar dereceli biçimde azalacaktır.

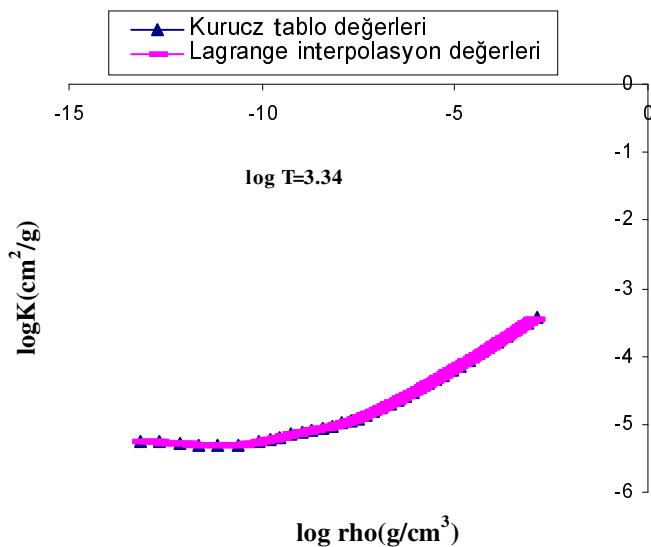
GOB ve SCH integrasyonlarının birleşimi, ana sıra tipi yıldızların sıfır yaşı bir güneş küteli modeli için Şekil 4.1 'de gösterilmektedir. SCH, yıldız kütlesinin en büyük kısmı ile ilgilenen modelleme programı olduğu için Şekil 4.1'deki artan kütle kesrine karşılık artan yarıçap değerlerinin büyük yoğunluğunu oluşturmaktadır. Şeklin geri kalan kısmı ise, yıldızın daha dış sınır oluşumlarını içeren GOB programı ile bulunan kütle kesrine karşılık yarıçap değerleridir.



Şekil 4.1: Sıfır yaş bir güneş kütleli modele ait kütle kesri ile yarıçap değişimi için GOB ve SCH integrasyonlarının birleşiminin gösterimi.  
(—SCH; .....GOB)

## 5. OPAKLIK TABLOLARI

Belirlenen bir kimyasal karışım için verilmiş olan logaritmik opaklıklar için, (log) sıcaklık ve (log) yoğunluk olmak üzere iki boyutta interpolasyonlar yapmak mümkündür. Bunun için öncelikle, sabit sıcaklıkta farklı yoğunluk ( $\log \rho$ ) değerlerine karşılık gelen opaklık ( $\log K$ ) değerleri, daha sonra da her bir  $\log \rho$  değeri için farklı ( $\log$ ) sıcaklıklara karşılık gelen  $\log K$  değerleri.interpolate edilmektedir. Şekil (5.1), Kurucz [3] opaklıklara uygulanan Lagrange interpolasyonuna bir örnek olarak verilmiş olup, interpolate edilen değerlerin Kurucz tablo değerlerinin arasında olduğu görülmüştür.



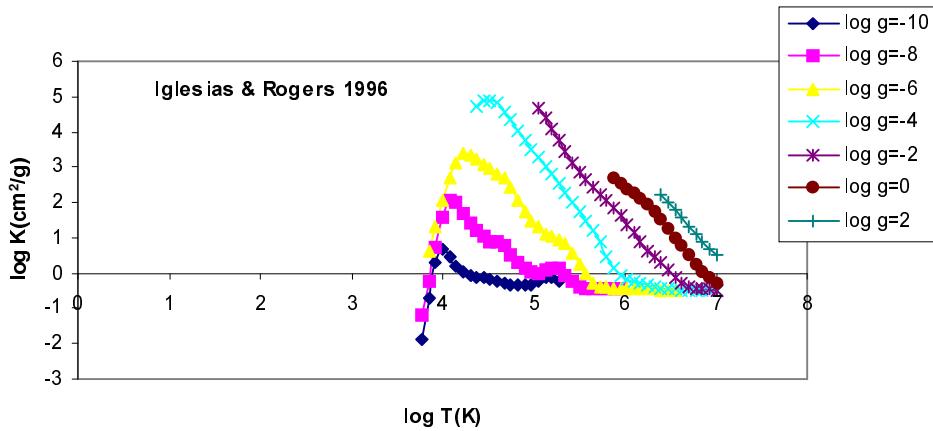
Şekil 5.1 Kurucz [3] opaklıklara uygulanan Lagrange interpolasyonundan bir örnek.

Sonuçlarını kullandığımız Kurucz [3] model atmosfer programı, her biri yaklaşık 10 izotop 'a sahip 1000 'den daha fazla atom ve molekül türlerini içermektedir. Çinko elementine kadar tüm elementlerin iyonlarını detaylı biçimde

hesaba katmaktadır. Geliştirilmiş donukluk verilerine sahip olan bu modelleme, çok sayıda atom türleri içermesinden ziyade özellikle çizgi soğurmalarının (bağlı-bağılı) net etkilerini hesaba katmıştır [20]. Bunun için üç görüş vardır. Bunlardan birincisi: Verilen basınç ve sıcaklıkta,  $10^8$  ayrı çizgiden daha fazlası için spektrum hesaplaması içermesidir. Modellemenin diğer bir görüşü, belirlenen farklı bolluklar için sıcaklık ve yoğunluğa bağlı çizgi opaklıklarını için istatistiksel dağılım fonksiyonlarının çizelgelerini içermesidir. Üçüncü görüş, spektrumu detaylı olarak çözmeyen az sayıdaki dalga boyu noktalarını kullanarak spektral örneklemeye yapılmasınadır. ATLAS modelleme programının 12. sürümü [21], bu üç görüşü birleştiren işlemleri sürekli kullanarak, verilen sıcaklık ve yoğunluklarda Rosseland ortalama opaklıklarını hesaplamıştır.

Iglesias & Rogers, Rosseland ortalama opaklıklarını hesaplamak için OPAL kodu oluşturmuşlardır [5]. Onlar, çeşitli metalleri de dahil eden kütle kesirlerine ait logaritmik sıcaklık ve yoğunluklardaki doğru interpolasyonları içeren Anders-Grevesse 'nin karışımını [22] kullanarak kapsamlı sonuçlar vermişlerdir. Zarf bölgesinde, sıcaklık ve R ( $R \propto \text{yoğunluk}/(\text{sıcaklık})^3$ ), temel değişken olarak içten dışa doğru yıldız koşullarını içermektedir. Iglesias & Rogers, soğuk atmosferleri incelemekleri için moleküller tarafından fotoabsorpsiyon hesaba katılmamıştır [5]. Yalnızca radyatif süreçler hesaplanmış olup elektron iletimi ihmal edilmiştir. Onların model hesaplamaları, hem değerlik elektronları hem de iç elektronları içeren foton soğurmaları için doğru olarak kabul edilmektedir. Bağlı-bağılı dönüşümler, iyon aşamalarının her bir konfigürasyonunda her alt kabuk için hesaplanmıştır.

Allard [1] ve Weiss [1] OPAL kodu kullanarak farklı karışımlar için Rosseland ortalama opaklık tablolarını oluşturmuşlardır. Hesaplama dahil edilen elementler H, He, Li, Be, B, C, N, O, F, Ne, Na, Mg, Al, Si, P, S, Cl, Ar, K, Ca, Sc, Ti, V, Cr, Mn, Fe, Co ve Ni 'dir. Bu tablolar sıcaklık ve yoğunlukta olduğu gibi H, He, C, O ve metal kütle kesri için de doğru interpolasyonlara olanak vermektedir. Tablolar  $\log R = \log(\rho/T_6^3)$  ve  $\log T$  terimleri ile verilmektedir ( $T_6=10^{-6}$  T). R ve sıcaklık aralığı, zarf bölgesi içinde olup  $-8 \leq \log R \leq +1$  ve  $3.75 \leq \log T \leq 8.7$  olarak verilmiştir [2].



Şekil 5.2 Farklı yoğunluklarda değişen sıcaklıklara karşılık gelen Iglesias & Rogers [2] opaklık değerleri.

Şekil 5.2 'de,  $X=0.7$  ve  $Z=0.02$  için farklı yoğunluklarda, değişen sıcaklıklara karşılık Iglesias & Rogers opaklık değerleri ( $\text{cm}^2/\text{g}$  biriminde) verilmiştir [2]. Yüksek yoğunluk bölgesi, en açık biçimde  $\log \rho = -4$  eğrisinde görülmektedir. Bu opaklık pikinin sağ tarafındaki sıcaklık bölgeleri için opaklık değeri, elektron saçılmasından dolayı sabit bir değere doğru azalma göstermektedir. Düşük yoğunluk bölgesinde de yıldız yüzeyine yakın çok düşük opaklıklara doğru azalma görülmektedir. Opaklık tablolarındaki pik değerleri, yaklaşık olarak  $\log \rho \sim -2.5$  ve  $\log T \sim 4.5$  değerlerinde görülmekte olup bu pik değerine karşılık gelen opaklık değeri de yaklaşık olarak  $\log \kappa \sim 5.5$  'dir. Daha eski opaklık tablolarından ziyade daha yeni opaklık hesaplamaları, daha düşük sıcaklıklarda meydana gelen bu piki göstermektedir.

Los Alamos verileri olarak da bilinen Cox & Stewart [11] opaklık tabloları, elektron iletiminin dahil edilmediği Rosseland ortalama opaklıklarıdır. Bu tablolar, GOB programı da dahil olmak üzere yıldızlara ait yapı hesaplamalarının çoğu için bir temel teşkil etmektedir. Bu opaklık tabloları, Somerville 'nin serbest-serbest dönüşüm işlemleri ile serbest elektronun foton soğurmasını ve moleküller hidrojeni dahil etmektedir [23]. Moleküller hidrojen tarafından fotonların Rayleigh saçılması, Dalgarno ve Williams [24] tarafından verilen bir formül kullanılarak dahil edilmiştir. Los Alamos tabloları, Huebner ve grubu [4] (Los Alamos Opaklık Laboratuvarı –

LAOL) tarafından yenilenmiş ve Paczynski 'nin orijinal versiyonlarındaki gibi bir formda verilmiştir.

GOB için gerekli olan iki boyutlu interpolate edilmiş tabloları oluşturmak için iki adım işlemin yapılması gerekmektedir. Başka kaynakların opaklık tablolarının formatını GOB programındaki tablo formatına dönüştürmek için öncelikle sıcaklık sabit tutularak istenilen yoğunluklar için daha sonra da yoğunluk sabit tutularak istenilen sıcaklıklar için interpolasyonlar yapılmıştır. Bu şekilde GOB programındaki formatına dönüştürülmüş olan Huebner ve grubu [4] opaklık değerleri ( $X=0.7$ ;  $Z=0.03$ ) Tablo 5.1 'de ve Iglesias & Rogers [5] opaklık değerleri ( $X=0.7$ ;  $Z=0.02$ ) Tablo 5.2 'de verilmiştir. Bizim bu çalışmada, farklı kaynakların opaklık tablolarını interpolate edip GOB programındaki formatına dönüştürdiğimiz Iglesias & Rogers [2] opaklık değerleri ( $X=0.7$ ;  $Z=0.02$ ) Tablo 5.3 'de, Allard [1] opaklık değerleri ( $X=0.7$ ;  $Z=0.01$ ) Tablo 5.4 'de, Kurucz [3] opaklık değerleri ( $X=0.7$ ;  $Z=0.03$ ) Tablo 5.5 'de ve Weiss [1] 'in hidrojen kütlesi  $X=0.7$  için farklı metal kütle kesirlerine karşılık gelen opaklık değerleri  $Z=0.001$  için Tablo 5.6 'da,  $Z=0.002$  için Tablo 5.7 'de,  $Z=0.004$  için Tablo 5.8 'de verilmektedir. Tablo 5.1'den Tablo 5.8'e kadar verilen tablolarda logaritmik opaklık  $\log \kappa$  ( $\text{cm}^2/\text{g}$ ), sabit  $\log \rho$ 'nın sütunları için  $\log T$  'nın fonksiyonu olarak,  $-12 \leq \log \rho \leq +3$  aralığında 31 adet yoğunluk ( $\text{g}/\text{cm}^3$ ) ve  $3.250 \leq \log T \leq 7.000$  aralığında 51 adet sıcaklık (K) değerleri için oluşturulmuştur.



**Table 5.1 'in devamı**

<b>log T</b>	<b>log ρ=</b>
-12.0 -11.5 -11 -10.5 -10.0 -9.5 -9.0 -8.5 -8.0 -7.5 -7.0 -6.5 -6.0 -5.5 -5.0 -4.5 -4.0 -3.5 -3.0 -2.5 -2.0 -1.5 -1.0 -0.5 0.0 0.5 1.0 1.5 2.0 2.5 3.0	
5.500 -.47 -.47 -.47 -.49 -.48 -.42 -.30 -.11 .17 .60 1.10 1.61 2.15 2.70 3.22 3.71 4.14 4.50 4.76 4.80 4.73 4.46 3.60 1.09 .79 .79 .79 .79 .79 .79 .79 .79	
5.575 -.47 -.47 -.47 -.48 -.47 -.44 -.36 -.22 .01 .39 .87 1.39 1.94 2.50 3.04 3.54 3.97 4.34 4.59 4.68 4.66 4.47 3.69 1.31 .97 .97 .97 .97 .97 .97 .97 .97 .97	
5.650 -.47 -.47 -.47 -.48 -.47 -.46 -.41 -.30 -.09 .25 .68 1.18 1.72 2.29 2.85 3.36 3.81 4.19 4.47 4.58 4.59 4.44 3.77 1.53 1.15 1.15 1.15 1.15 1.15 1.15 1.15 1.15 1.15	
5.725 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.44 -.35 -.17 .12 .51 .98 1.50 2.07 2.64 3.17 3.65 4.05 4.35 4.49 4.52 4.39 3.82 1.75 1.32 1.32 1.32 1.32 1.32 1.32 1.32 1.32 1.32	
5.800 -.47 -.47 -.47 -.47 -.49 -.47 -.39 -.23 .01 .34 .78 1.29 1.85 2.43 2.98 3.48 3.91 4.23 4.39 4.43 4.30 3.84 1.97 1.50 1.20 .71 -.27 1.20 -2.29 -3.39	
5.875 -.47 -.47 -.47 -.47 -.48 -.49 -.46 -.40 -.30 -.13 .16 .56 1.07 1.63 2.22 2.76 3.21 3.54 3.74 3.82 3.79 3.65 2.79 2.20 1.75 1.19 .24 -.70 1.77 -.28	
5.950 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.44 -.37 -.22 .02 .38 .83 1.36 1.91 2.39 2.77 3.01 3.15 3.18 3.18 3.11 2.78 2.27 1.67 .74 -.19 1.25 -.23	
6.025 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.48 -.48 -.46 -.42 -.31 -.14 .13 .54 1.02 1.53 1.99 2.31 2.54 2.64 2.71 2.83 2.91 2.69 2.15 1.25 .32 -.74 -.74 -.18	
6.100 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.45 -.41 -.29 -.06 .27 .70 1.17 1.60 1.96 2.19 2.36 2.52 2.70 2.81 2.55 1.74 .81 -.24 -.19	
6.175 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.46 -.46 -.42 -.36 -.22 .06 .43 .92 1.40 1.77 2.06 2.23 2.36 2.52 2.57 2.12 1.29 .26 -.79	
6.250 -.47 .77 1.23 1.64 1.89 2.05 2.16 2.24 2.22 1.70 .75 -.30	
6.325 -.47 .34 .77 1.23 1.64 1.89 2.05 2.16 2.24 2.22 1.70 .75 -.30	
6.400 -.47 .30 .59 .85 1.01 1.15 1.33 1.50 1.41 .65	
6.475 -.48 -.47 -.44 -.35 -.21 -.02 .20 .39 .57 .74 .93 1.15 .97	
6.550 -.48 -.47 -.46 -.43 -.35 -.24 -.09 .07 .22 .41 .66 .86	
6.625 -.49 -.47 -.43 -.35 -.26 -.15 -.01 .20 .43	
6.700 -.50 -.49 -.47 -.43 -.37 -.28 -.14 .03	
6.775 -.51 -.52 -.52 -.52 -.50 -.48 -.44 -.36 -.26	
6.850 -.53 -.51 -.49 -.43	
6.925 -.56 -.55 -.53	
7.000 -.61 -.60 -.60	



**Tablo 5.2 'nin devamı**

<b>log T</b>	<b>log ρ=</b>																												
-12.0 -11.5 -11 -10.5 -10.0 -9.5 -9.0 -8.5 -8.0 -7.5 -7.0 -6.5 -6.0 -5.5 -5.0 -4.5 -4.0 -3.5 -3.0 -2.5 -2.0 -1.5 -1.0 -0.5 0.0 0.5 1.0 1.5 2.0 2.5 3.0	5.500 -.47 -.47 -.47 -.49 -.48 -.42 -.30 -.11 .17 .60 1.10 1.61 2.15 2.70 3.22 3.71 4.14 4.50 4.76 4.80 4.73 4.46 3.60 1.09 .79 .79 .79 .79 .79 .79 .79 .79 .79 .79 .79	5.575 -.47 -.47 -.47 -.48 -.47 -.44 -.36 -.22 .01 .39 .87 1.39 1.94 2.50 3.04 3.54 3.97 4.34 4.59 4.68 4.66 4.47 3.69 1.31 .97 .97 .97 .97 .97 .97 .97 .97 .97 .97 .97 .97	5.650 -.47 -.47 -.47 -.48 -.47 -.46 -.41 -.30 -.09 .25 .68 1.18 1.72 2.29 2.85 3.36 3.81 4.19 4.47 4.58 4.59 4.44 3.77 1.53 1.15 1.15 1.15 1.15 1.15 1.15 1.15 1.15 1.15 1.15	5.725 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.44 -.35 -.17 .12 .51 .98 1.50 2.07 2.64 3.17 3.65 4.05 4.35 4.49 4.52 4.39 3.82 1.75 1.32 1.32 1.32 1.32 1.32 1.32 1.32 1.32 1.32 1.32	5.800 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.49 -.47 -.39 -.23 .01 .34 .78 1.29 1.85 2.43 2.98 3.48 3.91 4.23 4.39 4.43 4.30 3.84 1.97 1.50 1.20 .71 -.27 -1.20 -2.29 -3.39	5.875 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.48 -.49 -.46 -.40 -.30 -.13 .16 .56 1.07 1.63 2.22 2.76 3.21 3.54 3.74 3.82 3.79 3.65 2.79 2.20 1.75 1.19 .24 -.70 -1.77 -2.86	5.950 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.44 -.37 -.22 .02 .38 .83 1.36 1.91 2.39 2.77 3.01 3.15 3.18 3.18 3.11 2.78 2.27 1.67 .74 -.19 -1.25 -2.33	6.025 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.48 -.48 -.48 -.46 -.42 -.31 -.14 .13 .54 1.02 1.53 1.99 2.31 2.54 2.64 2.71 2.83 2.91 2.69 2.15 1.25 .32 -.74 -.181	6.100 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.45 -.41 -.29 -.06 .27 .70 1.17 1.60 1.96 2.19 2.36 2.52 2.70 2.81 2.55 1.74 .81 -.24 -.129	6.175 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.46 -.46 -.42 -.36 -.22 .06 .43 .92 1.40 1.77 2.06 2.23 2.36 2.52 2.57 2.12 1.29 .26 -.79	6.250 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.45 -.39 -.26 -.03 .34 .77 1.23 1.64 1.89 2.05 2.16 2.24 2.22 1.70 .75 -.30	6.325 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.44 -.40 -.30 -.10 .19 .59 1.01 1.31 1.53 1.65 1.74 1.89 1.84 1.18 .19	6.400 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.47 -.48 -.48 -.47 -.47 -.43 -.37 -.23 .01 .30 .59 .85 1.01 1.15 1.33 1.50 1.41 .65	6.475 -.48 -.47 -.44 -.35 -.21 -.02 .20 .39 .57 .74 .93 1.15 .97	6.550 -.48 -.47 -.46 -.43 -.35 -.24 -.09 .07 .22 .41 .66 .86	6.625 -.49 -.47 -.43 -.35 -.26 -.15 -.01 .20 .43	6.700 -.50 -.49 -.47 -.43 -.37 -.28 -.14 .03	6.775 -.51 -.52 -.52 -.52 -.50 -.48 -.44 -.44 -.36 -.26	6.850 -.53 -.51 -.49 -.43	6.925 -.56 -.55 -.53	7.000 -.61 -.60 -.60								

























## **6. MODEL İNTEGRASYONLARDAKİ FARKLI OPAKLILIKLARIN SONUÇLARI**

Bu çalışmada, Schwarzschild 'ın kitabı [6] yer alan güneş kütle modelleri kullanılmış ve bu güneş kütle modelleri için Tablo 6.1 'de, ışitma ve etkin sıcaklık değerlerine karşılık gelen GOB atmosfer taban yarıçapları ve SCH sınır yarıçap değerleri listelenmiştir. Tablo 6.1, seçilebilir farklı interpolasyon adımlarına karşılık olarak iki alt tablo halinde sunulmuştur. Kabul edilen teoriksel belirsizlikler ile birlikte farklı kaynakların opaklılarının yarıçaplar üzerindeki etkileri arasındaki farklılıkların, değişen interpolasyon adımlarında bile değişmemesi ile modelin doğruluğunun arttırılamayacağı anlaşılmıştır.

Denklem (1.3) 'ten de görüleceği gibi, modellerin dış tabakalarındaki opaklıların artışı, bu tabakalara karşılık gelen sıcaklık gradiyenti ile ilişkilidir. Tablo 6.1 'deki GOB programı ile içeriye doğru integrasyonlardan oluşan taban tabaka yarıçap değerleri ( $R_B$ ) arasındaki farklılıklar ile SCH programı ile içten dışarıya doğru integrasyonlarla elde edilen dış sınır değerleri ( $R_{OB}$ ) arasındaki farklılıklar, farklı opaklı tablolardan kullanılması ile meydana gelmektedir.

Tam bir model oluşturmak için atmosferik taban ve SCH integrasyon değerleri birleştirilmelidir. Bu durum, dış sınır sıcaklığında bazı ayarlamaların yapılmasını gerektirir. GOB programı içerisinde yerleştirilen opaklıların giderek artması, taban tabaka sıcaklığını artırıp zarf bölgesini genişletmektedir. Şayet orijinal GOB ve SCH integrasyonlarını taban tabakada denkleştirirsek, benzer taban sıcaklığını elde edebilmek için yeni opaklılarla (verilen ışitmada) GOB integrasyonu için  $T_0$  değerini azaltmak zorunda olacaktık. Sabit  $L_0$  için  $T_0$  'daki bu azalma, yıldızın yarıçapının büyümESİ anlamına gelmektedir [7]. Bu tarzda oluşturulan hesaplanmış yarıçapsal değişiklikler % 5-10 olup Tablo 6.1 'de verilmiştir.

Tablo 6.1 Farklı opaklı tabloları kullanılarak oluşturulan yarıçaplara ait GOB ve SCH program sonuçları: (a)interpolasyon adımı= 0.1 için, (b) interpolasyon adımı= 0.05 için.

(a) Parametre	Değeri				
	0.6	1	2.5	5	10
M (Güneş)	0.6	1	2.5	5	10
R <sub>B</sub> (Huebner)	0.3287	0.4886	0.982	1.7216	2.3481
R <sub>B</sub> (Igl.1991)	0.3287	0.4886	0.982	1.7216	2.3481
R <sub>B</sub> (Igl.1996)	0.3589	0.5318	1.0656	1.8286	2.4540
R <sub>B</sub> (Kurucz)	0.3529	0.5263	1.0231	1.7311	2.3575
R <sub>B</sub> (Allard)	0.3532	0.5300	1.0228	1.7656	2.3781
R <sub>B</sub> (Weiss Z=0.001)	0.3434	0.5195	1.0118	1.7219	2.3571
R <sub>B</sub> (Weiss Z=0.002)	0.3480	0.5220	1.0127	1.7500	2.3584
R <sub>B</sub> (Weiss Z=0.004)	0.3491	0.5272	1.0194	1.7552	2.3601
log L	-0.8276	0.0409	1.6068	2.8296	3.6749
log T <sub>e</sub>	3.6520	3.7692	4.0115	4.2085	4.3545
R <sub>OB</sub> (Huebner)	0.5680	0.6131	1.1270	1.9660	3.3490
R <sub>OB</sub> (Igl.1991)	0.5680	0.6131	1.1270	1.9660	3.3490
R <sub>OB</sub> (Igl.1996)	0.6335	0.6896	1.7190	2.5270	3.4180
R <sub>OB</sub> (Kurucz)	0.5980	0.6232	1.7140	2.3160	3.4010
R <sub>OB</sub> (Allard)	0.6241	0.6638	1.7160	2.4970	3.4130
R <sub>OB</sub> (Weiss Z=0.001)	0.5508	0.6025	1.5110	1.9770	3.2850
R <sub>OB</sub> (Weiss Z=0.002)	0.5671	0.6216	1.5260	2.0110	3.3070
R <sub>OB</sub> (Weiss Z=0.004)	0.5734	0.6247	1.6320	2.2830	3.4220

(b) Parametre	Değeri				
	0.6	1	2.5	5	10
M (Güneş)	0.6	1	2.5	5	10
R <sub>B</sub> (Huebner)	0.3741	0.5523	1.0300	1.7317	2.3565
R <sub>B</sub> (Igl.1991)	0.3741	0.5523	1.0300	1.7317	2.3565
R <sub>B</sub> (Igl.1996)	0.3805	0.5592	1.1092	1.8317	2.4610
R <sub>B</sub> (Kurucz)	0.3742	0.5459	1.0384	1.7423	2.3604
R <sub>B</sub> (Allard)	0.3803	0.5589	1.0864	1.7834	2.4052
R <sub>B</sub> (Weiss Z=0.001)	0.3789	0.5541	1.0412	1.7591	2.3672
R <sub>B</sub> (Weiss Z=0.002)	0.3790	0.5562	1.0457	1.7603	2.3711
R <sub>B</sub> (Weiss Z=0.004)	0.3801	0.5574	1.0463	1.7687	2.3769
log L	-0.8276	0.0409	1.6068	2.8296	3.6749
log T <sub>e</sub>	3.6520	3.7692	4.0115	4.2085	4.3545
R <sub>OB</sub> (Huebner)	0.5736	0.6301	1.1660	1.9680	3.3890
R <sub>OB</sub> (Igl.1991)	0.5736	0.6301	1.1660	1.9680	3.3890
R <sub>OB</sub> (Igl.1996)	0.6414	0.7380	1.8790	2.6380	3.9260
R <sub>OB</sub> (Kurucz)	0.6398	0.7221	1.7920	2.4130	3.5170
R <sub>OB</sub> (Allard)	0.6387	0.7298	1.7850	2.5880	3.8770
R <sub>OB</sub> (Weiss Z=0.001)	0.5798	0.6311	1.2813	1.9910	3.3350
R <sub>OB</sub> (Weiss Z=0.002)	0.5881	0.6346	1.6348	2.0180	3.4960
R <sub>OB</sub> (Weiss Z=0.004)	0.6146	0.7180	1.7711	2.4090	3.6810

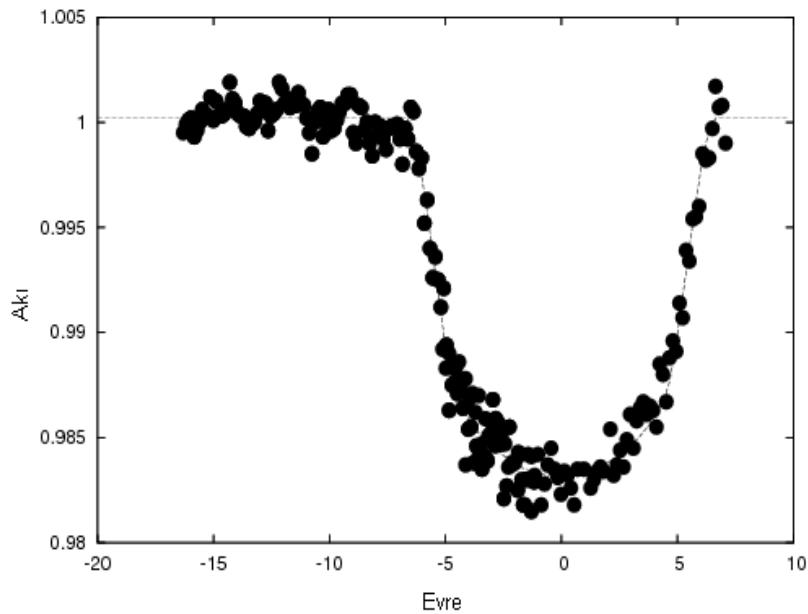
Stothers ve Chin [25], yarıçaplardaki benzer artışı (% 5-10), metal oranındaki % 50 artış ile verilen Los Alamos opaklısı [4] ve daha eski opaklı [11] arasında görmüşlerdir. Stothers ve Chin 'e göre yarıçap artıları orta ve düşük kütleli yıldızlar için % 5-10 olup, yarıçap artılarının gözlemler ve teori arasındaki görülebilir farklılıklarını çözmek için etkili olduğunu açıklamışlardır [25]. Bu yarıçap değerlerindeki artılar için Stothers & Chin [25] ve Claret & Gimenez [26] tarafından verilen sonuçlar, bizim bulduğumuz sonuçlarla karşılaştırılmış olarak Tablo 6.2 'de verilmektedir.

Tablo 6.2 Opaklı artılarına göre yarıçap değerlerindeki artıların karşılaştırılması.

	$0.6 M_{\odot}$	$1 M_{\odot}$	$2.5 M_{\odot}$	$5 M_{\odot}$	$10 M_{\odot}$
S & C (1991)	-	-	0.10	0.07	0.05
C & G (1992)	-	-	0.08	0.07	0.10
Bu çalışma	0.092	0.088	0.085	0.062	0.045

## 7. GÖZLEMSEL MATERİYAL

Düzenlenmiş opaklık tablolarının sonuçlarını mevcut gözlemSEL verilerle ilişkilendirmek mümkündür. Bunun için V376 Peg = HD 209458 yıldızı seçilmiştir. Şekil 7.1 'de, 1999 ve 2000 yıllarında, Hawaii 'den gözlemlenen bu sistemde, gezegenlere ait geçişlerin B fotometresi, uygun bir eğri uyumu ile birlikte gösterilmiştir. Bu gözlemlerlarındaki bilgiler Jha ve grubu tarafından verilmiştir [27]. HD 209458, kısa periyotlu ve düşük kütleli yıldızlardan biridir [28].



Şekil 7.1 Sullivan & Sullivan [29] tarafından gözlemlenen HD 209458 yıldızına ait ışık eğrisi.

Şekil 7.1 'deki veriler, uygun bir eğri uyumu ile birlikte analiz edilmiştir [30]. Bu eğri, tutulma fotometresinden eş yıldızların ayrılma dönemlerindeki yarıçaplarını verir. Sonuçlar Tablo 7.1-a 'da verilmektedir. V376 Peg yıldızının parametrelerine

ait başlangıç koşulları [29] ve [31]'den alınmıştır. Bu yıldıza ait tüm parametreler, Henry ve grubu 'nun [31] yarıçapsal hız verileri ile birlikte Tablo 7.1-b'de verilmiştir. Hızlar, tüm birimlerde (örneğin;  $\text{km s}^{-1}$ ) ölçüldüğü ve yörüngे periyodu bilindiği için yörüngे yarıçapı (km) biriminde bulunmuş olmaktadır. Daha sonra Kepler 'in kanunu ile eş yıldızların kütleleri belirlenir. Tablo 7.1-b 'de verilen yarıçaplar bu tarz bir yaklaşımla hesaplanmıştır.  $\chi^2$  ölçümü ile, yıldız yarıçapı % 1 'lik bir hata ile tahmin edilmektedir. Tablo 7.1 'de verilen sonuçlar, Brown ve grubunun [32] hata limitleri içerisindeidir. Tutulan çift yıldızların ışık eğrilerinin böyle bir doğrulukla analizleri, yıldızlardaki teorik sonuçlara ilişkin duyarlı testler vermektedir.

Tablo 7.1 HD 209458 yıldıza ait (a) ışık eğrisinin parametre değerleri ve hata payları [30]; (b) tüm parametreler [29, 31].

(a) Parametre	Değeri	Hata Payı
U	1.0012	0.0009
$r_1$	0.1172	0.001
$r_2$	0.0145	0.0006
i	86.3	0.4
u	0.574	
$\Delta l'$	0.001	
$\chi^2/v$	0.93	

(b) Parametre	Değeri	Hata Payı
Periyod Dönem (HJD)	3.52474 gün 2451497.7993	0.00001 gün
A	9.837	$0.04 R_\odot$
$R_1$	1.15	$0.01 R_\odot$
$R_2$	1.39	$0.03 R_{\text{Jup}}$
i	86.3	0.3 deg
u	0.57	0.14
$M_1$	$1.03 M_\odot$	
$M_2$	$0.62 M_{\text{Jup}}$	
$V_{\text{Abs}}$	4.31	
V	7.653	
B-V	0.594	
T	5920 K	
Mesafe	46.7	0.8 pc

Bu gözlemsel materyale ait sonuç, sonuç ve tartışma bölümünde, sayfa 50 'de verilmiştir.

## **8. SONUÇ VE TARTIŞMA**

Bu çalışmada, yıldızların zarf yapısı üzerindeki opaklıkların değişimlerinin etkisi incelenmiştir. Bunun için Paczynski'nin yıldız modelleme programları olan GOB ve SCH kullanılmıştır. Bu programlar, normal ana sıra tipi yıldızların sıfır yaşı modellerini oluşturmaktadır. Modelleme, yıldızlara ait yapı denklemleri olarak bilinen Denklem (4.1), (4.2), (4.3) ve (4.4)'ün, program içerisinde nümerik integrasyonla çözümünden oluşmaktadır. Modellemeler, 0.6, 1, 2.5, 5 ve 10 güneş kütlesi için yapılmıştır.

Zarf yapısına uygulanan GOB programı ile modellemeler yapabilmek için opaklık tabloları hazırlanmıştır. Bunun için, Weiss [1], Allard [1], Iglesias & Rogers [2] ve Kurucz'un [3] yayınlanmış opaklık tabloları, Lagrange interpolasyonu kullanılarak GOB programındaki formatına dönüştürülmüştür. -12'den +3'e kadar 0.5'lik aralıklarla değişen 31 adet logaritmik yoğunluklara ve 3.25'den 7'e kadar 0.075'lik aralıklarla değişen 51 adet logaritmik sıcaklıklara karşılık gelen logaritmik opaklıklar hesaplanmış ve Tablo 5.3 – Tablo 5.8'de verilmiştir. GOB programındaki formatına uygun olan Huebner ve grubu [4] ve Iglesias & Rogers [5]'in opaklık tabloları ise Tablo 5.1 ve Tablo 5.2'de verilmiştir. Tablo 5.3 – Tablo 5.8'deki opaklık tabloları ile oluşturulan modellemeler, Tablo 5.1 ve Tablo 5.2'deki opaklık tabloları ile oluşturulan modellemelerle karşılaştırılmıştır. Karşılaştırma durumu olarak yarıçaplar ele alınmıştır.

Farklı kütle modelleri için verilen ışıtma ve etkin sıcaklık değerlerine karşılık GOB'un verdiği atmosfer tabakasının taban yarıçapları ( $R_B$ ) ve GOB'un sonuçlarını kullanan SCH programının verdiği dış sınır yarıçap değerleri ( $R_{OB}$ ), Tablo 6.1'de listelenmiştir. Tablo 6.1'deki iki alt tablo, dış zarfın nümerik integrasyonunda kullanılan seçilebilir iki farklı interpolasyon adımı için verilmiştir. Gerçekte ana yapı değişkenlerinin her biri için ayrı interpolasyon adım limitleri vardır. Örneğin;  $\log \rho$  değeri, tablolarda -12'den +3'e ve  $\log T$ 'nin değeri, 3.25'den 7'e kadar değiştiği için  $\log \rho$  'nın interpolasyon adımı  $\log T$  'ninkinden daha büyük olacaktır.

Değişkenlerin yavaşça değiştiği bölgelerde interpolasyon adımları küçük olup lineerdir. Soğurmaların arttığı ve opaklık hesaplamalarının en zor olduğu bölgelerde değişkenler hızlı biçimde değişmekte olup değişim lineer degildir. Teorik belirsizlikler ve ayrıca farklı kaynakların opaklıkları arasındaki farklılıklar, interpolasyon adımları çok küçük değerlere doğru azaltılsa bile modelin doğruluğunu artıramayacağını göstermektedir. Tablo 6.1'de verilen seçilmiş iki farklı interpolasyon adımı için, farklı kaynakların opaklık tabloları kullanılarak hesaplanan yarıçaplar arasındaki farklılıkların değişmediği görülmüştür.

Opaklık, yıldız maddesinin fotonları soğurma derecesinin bir ölçüsü olup özellikle orta ve daha ağır kütleli yıldızlardaki opaklık değişimi, yıldız yapısını ve evrimini etkilemektedir [33, 34, 35, 36]. Denklem (1.3)'ten görüldüğü gibi, modellerin dış tabakalarındaki gittikçe artan opaklıklar, bu tabakalardaki sıcaklık gradiyentini önemli biçimde artırmaktadır. Bağlı – serbest soğurma, serbest – serbest soğurma ve elektron saçılması opaklığa katkıda bulunan atomik süreçlerdir. Daha sonradan dikkate alınan bağlı – bağlı (çizgi) soğurmaların opaklığa önemli bir biçimde katkı sağladığını gösterilmiştir [2, 3, 7]. Çizgi soğurmalarının dahil edilmesi ile opaklıktaki artış, radyasyonun gerekli miktarının iletilmesi için yıldızın daha dış tabakasını genişletmektedir. Bu durum yarıçapta farkedilebilir bir artış meydana getirmektedir [37]. Tablo 6.1'de, opaklık artışları ile görülen radyal artışlar, daha önceleri hesaplanan LAOL opaklık tablolarından daha sonraları hesaplanan daha yeni opaklık tablolarına doğru gidildikçe, detaylı çizgi soğurma etkilerinin dahil edilmesinden kaynaklanmaktadır.

Tablo 6.1'deki taban değerleri ( $R_B$ ), farklı opaklık tabloları ile aynı sınırdan içeriye doğru ilerleyen integrasyonlarla sonuçlanmaktadır. Tam bir model oluşturmak için, bu atmosferik taban değerlerini kullanarak içten dışarıya doğru ilerleyen SCH integrasyon değerlerinin Şekil 4.1'deki gibi birleşmesi gerekmektedir. GOB programı içerisine yerleştirilen yeni opaklıkların giderek artması, taban tabaka sıcaklığını artırmakta ve zarf bölgesini genişletmektedir. Opaklılığın artışı yıldız yarıçapının artışı ile sonuçlanmaktadır [38, 39]. Eğer GOB ve SCH integrasyonları taban tabakada denkleşirlerse, aynı güneş külesi için verilen aynı değerdeki ışitmaya karşılık giderek artan yeni opaklılı GOB integrasyonu için  $T_0$  değerinin, aynı taban

sıcaklığını elde etmek için azaltılması gerekmektedir. Sabit ışıtma için  $T_0$  değerindeki bu azalma, yıldızın yarıçapının büyümesi anlamına gelmektedir [7]. Farklı opaklıklar kullanılarak, dıştan içeriye doğru GOB integrasyonları ile elde edilen taban tabaka yarıçaplarındaki ( $R_B$ ) artışlarla, içten dışarıya doğru SCH integrasyonları ile elde edilen dış sınır yarıçaplarındaki ( $R_{OB}$ ) artışlar % 5- 10 kadardır. Bu yarıçapsal değişimler, farklı yıldız modelleri (0.6, 1, 2.5, 5, 10) için hesaplanmıştır.

Stothers ve Chin [25], yarıçaplardaki benzer artışı, Cox ve Stewart'in oluşturduğu eski opaklıklarla [11], Huebner ve grubunun metal oranını % 50 artırarak oluşturduğu opaklıklar [4] arasında bulmuşlardır. Stothers ve Chin'e göre, uygun kütleler [40] kullanılarak bulunan radyal artışlar, gözlemler ve teori arasındaki farklılıklarını çözmek için önemlidir [25]. Stothers ve Chin [25] ve ayrıca Claret ve Gimenez [26] tarafından hesaplanan radyal artışlar, bu çalışmada hesaplanan radyal artışlarla birlikte, 2.5, 5, 10 güneş kütlesi için Tablo 6.2'de verilmiştir. Tablo 6.2'den de görüldüğü gibi, bu çalışmada bulunan sonuçlar, Claret ve Gimenez'in 10 güneş kütlesi için hesapladığı radyal artışın haricinde uyum içerisindeidir.

Yıldız modellerindeki hesaplamaların farklılıklarını gözlemsel sonuçlarla kontrol etmek amacıyla, yarıçaplar ve kütlelerdeki hata paylarının yaklaşık % 1 olduğu tahmin edilen, tutulan spektroskopik çift yıldız sistemlerinden biri olan V376 Peg= HD 209458 yıldızı seçilmiştir. Sullivan & Sullivan [29] tarafından gözlemlenen bu yıldıza ait ışık eğrisi Şekil 7.1'de verilmiş olup, Budding ve Demircan [30] tarafından da uygun bir eğri fit edilerek analiz edilmiştir ve bu analize ait sonuçlar Tablo 71-a'da verilmiştir. HD 209458 çift yıldız sistemine ait tüm parametreler, Henry ve grubu'nun [31] yarıçapsal hız verileri ile birlikte Tablo 7.1-b'de sunulmuştur. Bu çalışmada, yıldızın zarf yapısındaki opaklıkların değişiminin yarıçaplar üzerindeki etkisi incelendiği için test durumu olarak bu yıldıza ait gözlemlenen yarıçap değeri ele alınmıştır. HD 209458 yıldızının kütle değeri, güneş kütle değerine çok yakın olduğu için bu yıldıza ait gözlemsel yarıçap değeri, hesaplanan yıldız modellerinden 1 güneş kütlesi için bulduğumuz yarıçap değerleri ile karşılaştırılmıştır. HD 209458 yıldızının gözlemsel yarıçap değeri, Tablo 6.1'de verilen 1 güneş kütlesine ait, farklı kaynakların opaklıklar için hesaplanan  $R_B$  ve

$R_{OB}$  yarıçap değerlerinin toplanması ile elde edilen yıldız yarıçap değerlerinin arasında bulunmuştur.

Yakın gelecekte, Guo ve grubunun [36] yaptığı gibi, farklı metal oranları için yeni opaklı tabloları oluşturulabilir. Bu yeni tablolar kullanılarak, Paczynski 'nin yıldız modelleme programları ile ya da başka teorik programlarla, farklı yıldızlar için modellemeler yapılabilir.

Iglesias ve Rogers'ın hazırladığı opaklı tabloları moleküller fotoabsorpsiyonu içermemektedir. Tam bir opaklı tablosu oluşturabilmek için moleküller etkilerin hesaplamalara dahil edilmesi gerekmektedir. Bunun için, daha düşük sıcaklık değerlerini de içine alan geniş sıcaklık aralığında çalışılmalıdır. Gelecekte, moleküller etkilerin de dahil edildiği yeni opaklı tabloları ile benzer teorik çalışmalar yapılabilir.

## ÖZGEÇMİŞ

1971 yılında Balıkesir'de doğdu, ilk ve orta öğrenimini Balıkesir'de tamamladı. 1993 yılında Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Fizik bölümünden bölüm birincisi olarak mezun oldu. Aynı yıl Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim dalında Yüksek lisans öğrenimine başladı. 1996 yılında, Prof. Dr. Cihan ÖZMUTLU 'nın danışmanlığında “ Gama İşinlerinin Coherent ve Incoherent saçılma tesir kesitlerinin İncelenmesi ” başlıklı yüksek lisans tezini tamamladı. 1998 yılında Balıkesir Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümünde Araştırma görevlisi olarak görevye başladı. 2003 yılında Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim dalında doktora programına kayıt oldu. 2005 yılında başladığı doktora tez çalışmasını, Prof. Dr. Edwin BUDDING ve Y. Doç. Dr. Oktay YILMAZ ile yürüttü. Halen aynı fakültede Araştırma görevliliğine devam etmektedir.

**EKLER**

# Effects of Opacity on Stellar Radii and Their Relevance to Observational Data

Gülay İNLEK<sup>1</sup>, Aysun BÖKE<sup>1</sup>, Oktay YILMAZ<sup>2</sup>, Edwin BUDDING<sup>2</sup>,

<sup>1</sup>*Physics Department, Balıkesir University, Çağış Campus, 10145, Balıkesir-TURKEY*

<sup>2</sup>*Physics Department, Çanakkale Onsekiz Mart University, 17100 Çanakkale-TURKEY*

<sup>3</sup>*Carter Observatory, PO Box 2909, Wellington-NEW ZEALAND*

Received 31.12.2007

## Abstract

We have examined the effect of varying opacities on envelope structure with the aid of Paczyński's public domain stellar modelling programs. For this, we prepared new opacity tables from the data of Kurucz [1], using Lagrange interpolation to obtain the tabular values. We compare the results of these Kurucz opacities with similar tabulations from Huebner et al. [2], Iglesias and Rogers [3], Rogers and Iglesias [4] and Iglesias and Rogers [5]. We have checked calculations for the same ranges of stars considered originally by Schwarzschild [6], and compared our findings, using newer opacity data, with those of other sources. We consider how such calculations relate to high accuracy observational data, with the well-observed planetary eclipsing system V 376 Peg (HD 209458), providing a guideline towards data of similar accuracy in the near future. Current accuracies on absolute radii and masses derivable from eclipsing spectroscopic binaries are conservatively estimated at  $\sim 1\%$ . The effects of revised opacity calculations on the radii of stars of intermediate mass are several times greater than this (5–10% for constant values of other parameters), so that eclipsing binary data should have good potential for independent tests of opacity theory across a wide range of stellar types.

**Key Words:** Stars: general-structure: modelling, opacity tables, observational tests, eclipsing binary data

## 1. Introduction

While many studies show that radiative transport plays a key role in shaping the structure and evolution of stars, no direct measurements of the opacity of matter to radiation in stellar interiors are possible. Theoretical calculations are required if a star's internal conditions are to be interpreted. Over the years, various opacity formulae and tables have been applied to structural models. In his seminal book, *The Structure and Evolution of the Stars*, Schwarzschild discussed effects associated with the ionization of different atomic species, i.e. bound-free transitions, free-free absorption and electron scattering [6]. The net effects of bound-bound (line) absorptions subsequently received closer attention, and have been shown to make a significant contribution [7, 5, 1]. Schwarzschild also compared theoretical models with results from the observations of binary stars. This approach to checking models was supported by Strömgren [8] and many subsequent authors.

Opacity appears in the radiative transfer equation of stellar structure [9], which can be put in a form such as

$$\frac{dK}{dr} = -\kappa\rho H = -\kappa\rho L/16\pi r^2, \quad (1)$$

where  $K$  and  $H$  are the Eddington radiation pressure and flux terms, respectively, and  $L$  is the global luminosity, coming from the separate energy generation equation (all functions of the radius  $r$ , as are the

local density  $\rho$  and temperature  $T$ ).  $K$  is given in the internal regions, to high accuracy by

$$K = \frac{\sigma T^4}{3}, \quad (2)$$

where  $\sigma$  is Stefan's constant. The opacity thus relates the total heat flow to the local temperature gradient, the latter being greater in regions of greater local opacity. In averaging over all frequencies, the 'Rosseland mean' opacity,  $\kappa \equiv \kappa_R$ , yields a temperature gradient form of the transfer equation; thus

$$\left( \frac{\sigma T^3}{\kappa_R} \right) \frac{dT}{dr} = -\frac{3\rho L}{64\pi r^2}, \quad (3)$$

since the Rosseland mean is defined by

$$\frac{\sigma T^3}{\kappa_R} = \pi \int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{dB_\nu(T)}{dT} d\nu. \quad (4)$$

Rosseland mean opacities  $\kappa_R$  (in units of  $\text{cm}^2\text{g}^{-1}$ ) therefore weight the effect of frequency in proportion to the flux contribution at that frequency. In a more general context, we should consider other contributions than radiative transparency (inverse of opacity) to the total flow of heat, particularly electron conductivity [10], but in this article we concentrate only on the effects of radiative transfer. We especially seek to clarify the extent to which observational data on representative stars can test theory on this.

It is feasible, in a general way, that the radiative opacity of the plasma in stellar interiors may tend to idealized forms in certain limiting conditions. For example, we could anticipate that a totally ionized hydrogen medium, characterized only by free-free transitions, would have a transparency component proportional to the radiative energy density per unit material density. But, in traversing a layer of such a medium, the outward flux receives a contribution proportional to the linear velocity of the electrons, associated with the decrease of the Debye screening length. From such a view, a form such as

$$\kappa \propto \rho T^{-7/2} \quad (5)$$

(Kramers' law) appears reasonable [6]. Similarly, another limit, that of Thomson scattering by electrons ( $\log \kappa \sim -0.47$ ), should take over in fairly high temperature (but not too high density) plasma conditions when the foregoing formula gives low enough opacity values [6].

More generally, we can expect the net opacity to be dependent of the (varying) composition, initially set by the fractional proportions of hydrogen  $X$ , helium  $Y$  and other atoms  $Z$  (= metallicity), where  $X + Y + Z = 1$ , as well as  $\rho$  and  $T$ , i.e.  $\kappa_\nu = \kappa_\nu(X, Z, \rho, T)$ . The nature of this dependence, in detail, involves modelling the way electromagnetic waves interact with the local field configurations around the plasma's constituent particles. Procedures have developed from the early Thomas-Fermi treatment towards long and complex calculations that have become the reserve of certain patient specialists; a point made in the review of Carson [11]. Carson also noted that the results of separately published calculations of apparently similar situations did not always agree with each other (within factors of the order of unity). Moreover, the necessity to use both physical and mathematical approximations to describe the inherently complex interactions implies that such calculations cannot be regarded as a closed subject. The onward progress of computational capabilities should allow continued advances in the modelling of absorption and consequently stellar structure.

For practical applications in astrophysics, tables of representative opacity values are generally presented in two-dimensional format (for  $\log \rho$  and  $\log T$ , given the large variation of density and temperature and the regular use of variables in logarithmic form), with selected values of  $X$  and  $Z$ . Since there is, in most stars, a strong correlation between the runs of density and temperature values ( $\rho \sim T^3$ ), the variable  $\mathcal{R}$  was introduced for convenient general tabulation [3], where

$$\log \mathcal{R} = \log \rho - 3 \log T + 18. \quad (6)$$

In our present study we have applied opacity tables that originated in the work of Cox and Stewart [12] at Los Alamos National Laboratory (as modified by later authors); Iglesias and Rogers [3], Rogers and Iglesias [4], Iglesias and Rogers [5] and Kurucz [1], to the stellar model code GOB [13]. We have discussed previously

how we used and checked this program [14] and we say more about its use in the following subsection. It is well-known that opacity effects are strongest in the outer parts of the star where the temperature gradient steepens as the major constituent elements start to recombine [15]. This is predominantly in the regions dealt with by GOB. It was necessary to tailor published opacities [1] to the format required by GOB and to do this we used four point Lagrange interpolation. We thus calculated  $\kappa$  for the required 31 values of log density in the range of -12 to +3 in steps of 0.5 and 51 values of log temperature from 3.25 in steps of 0.075. We discuss more about this in section 2 and in section 3 present the results of different opacity tables in the outputs of the programs GOB and also SCH, a second modelling program that deals with the bulk of the stellar mass [13].

While we cannot measure internal opacities directly, the possibility to check different sets of calculations from resultant models of stars is challenging. There are various options about this, but our present study addresses the data on eclipsing binary systems. Nowadays, such data are entering a new phase of very high accuracy [16], stimulated, in part, by the search for new planetary systems. The prototype V 376 Peg (HD 209458) has attained particular significance in this regard, and while the extraordinary accuracy of HST photometry is not expected to be available in a wholesale way, it provides guidelines not only for future space-based photometry, but also for well-selected terrestrial facilities. On that point, we examine the milli-magnitude accuracy light curve of the primary transit of V 376 Peg by [17], as observed at Mauna Kea. We combine 3 data sets of [17] and discuss how such results relate to stellar modelling in section 4.

Of course, other things than opacity affect the measured parameters of observed stars, the overall mass usually being regarded as the first determinant of these. The positions of stars of given masses in colour-magnitude diagrams have then been usually related to evolutionary effects. Evolutionary paths, as well as their starting positions, are themselves different in dependence on the composition of the stellar material [18]. The main question for our present study, however, is what precision of observational results would allow alternative models for the opacities through the envelope, to be effectively discriminated. Andersen et al. proposed that parameter estimation errors should be no larger than about 1% in the radius, and 2% in the mass and temperature, to enable useful checks on opacities; this for stars whose metallicity can be assigned to within about 25% of its real value [19]. Coevally formed eclipsing spectrographic binaries, whose components have not had significant interactive evolution, should permit isochronal tests of theory in which some of the indeterminacy is removed, as noted by Strömgren [8]. Andersen [20], and other authors in similar programmes, have thus used high quality observational data of such binaries to test modelling. A recent discussion was that of Claret [21]. Persistent differences between older models and data led to further theoretical inferences, for example regarding more generalized versions of the treatment of convection [22, 23]. But opacity theory itself has not been static, and various new sets of calculations were published since the early nineties. A summary discussion (section 5) comments on the interplay between data-analysis and the results of theoretical modelling, and implications for both activities.

### 1.1. Use of the programs GOB and SCH in model construction

It is well-known that the construction of a simple stellar model in one spatial dimension reduces, generally, to a two-point boundary value problem involving the (numerical) quadrature of 4 simultaneous linear first-order differential equations (cf. e.g. Schwarzschild [6]. A short introduction to the programs discussed in this paper is given by [24]; demonstration versions have also been produced by Odell [25]).

Regarding the imposed boundary conditions: the inner boundary is conceptually simpler. The independent variable, normally the internal mass  $M_r$ , is here zero, along with the radius  $r$  and luminosity  $L_r$ . The boundary values of central temperature and density,  $T_c$  and  $\rho_c$ , are assigned preliminary estimates, so the quadrature can proceed to some internal point, where the outward integration will be matched with the inward one from the outer boundary.

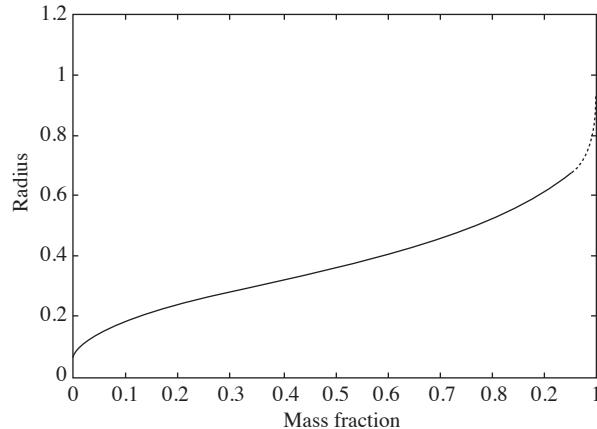
The outer boundary is more complicated for various reasons. One is that a main aim in the ‘solution’ of the modelling problem is to relate observational results to the two outer boundary values determined by a self-consistent quadrature. Normally, two quantities that can be directly matched to measurements are the surface luminosity  $L_0$  and effective temperature  $T_e$ . The structure equations themselves should primarily specify  $L_0$  and  $R$ , as paired opposites to the central density and temperature (the inner boundary); but since  $R$  can be expressed as  $R = \sqrt{L_0/4\pi\sigma T_e^4}$ , it appears this point can be dealt with, although the  $R$  in

question should really be that at the actual outer ‘boundary’ of the star (at a slightly different radius), where the density  $\rho_0$  becomes formally zero. Note that a separate relation connecting  $T_e$  to the boundary layer temperature  $T_0$  comes from model atmosphere theory [14]. Another point is that, in these outer layers, the problem has degenerated to one involving only 3 variables, since  $L_0$  settles to an essentially constant value outside the central energy-generating regions.

The program GOB (generates the outer boundary) is intended to take care of these issues. The program constructs a set of model atmospheres for four corner points in the  $L_0, T_0$  plane that should enclose the true final values resulting from a self-consistent complete model. The GOB inward integration proceeds, in principle, down to a user-set base-of-atmosphere layer  $M_r = M_B$ , which is typically  $0.95 \times M_R$ , the total mass of the star. In practice, some control parameters intervene if the temperature becomes too high or the number of integration steps unmanageably large. Since there are only 3 differential equations to integrate and no match-point fitting, this program proceeds quickly. At the lower boundary GOB produces a set of  $\rho_B, T_B$  and  $R_B$  values, with  $L_0 = L_B$  also holding valid. Given these 4 corner values, it is possible to make (linear) interpolations for intermediate points to find base of atmosphere values. We can thus write, for a base density corresponding to a general surface point  $L_0, R$ , say ( $R$  being derived from the assigned  $T_e$ )

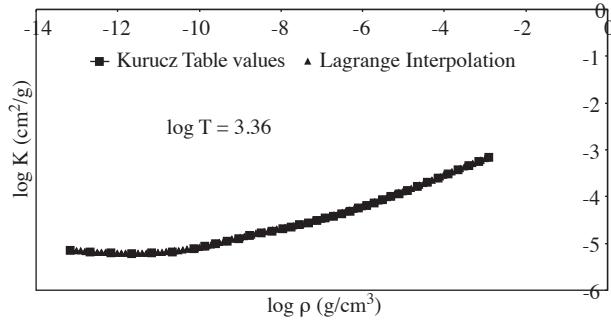
$$\begin{aligned} \rho_B(L_0, R) = & \rho_B(L_1, R_1) + \frac{L_0 - L_1}{L_2 - L_1} [\rho_B(L_2, R_1) - \rho_B(L_1, R_1)] + \\ & + \frac{R - R_1}{R_2 - R_1} [\rho_B(L_1, R_2) - \rho_B(L_1, R_1)]. \end{aligned} \quad (7)$$

The 4 base values for such surface  $L_{0i}, T_{0j}$  pairs, enclosing a particular trial  $L_0, R$  pair, are given, together with the trial pair itself, by GOB as input for the inward integration in SCH. The outward integration from the centre is compared with the inward integration from this  $0.95M_R$  level at a selected inner fitting point, which is typically  $M_r = M_R/2$ . The averages of the 4 pairs of variables at this fitting point are taken as new starting values for backward integrations to the boundaries, and an iteration process thus started.



**Figure 1.** Combination of SCH and GOB integrations for the radial variation with mass of a zero-age 1 solar mass model.

It is easy to visualize new central values of  $T_c$  and  $\rho_c$  being substituted back in a second outward run from the centre. At the outer boundary of the SCH run, however, there will be new values for all four variables; but it is really only the  $L_0$  and  $R$  surface pair that are independently corrected by the integrations of this two-point problem. The new surface  $L_0$  is obtained directly, since it does not vary through the outer layers. The corresponding new surface value of  $R$  can be derived, using the new  $L_0$  and the original GOB surface values  $R_1$  and  $R_2$ , for which corresponding values of  $R_{B1}, R_{B2}$  are known. These  $R_{B1,2}$  values are compared with the  $R_B$  newly obtained from the outward integration. A corresponding corrected surface value of  $R$  may then be interpolated. Having the new surface values of  $L_0$  and  $R$  allows a new set of base values to be obtained, with  $\rho$  and  $T$  starting values derived from equation (7) (for  $\rho_B$ , with a corresponding equation for  $T_B$ ) for a second, corrected, inward integration. In a convergent problem, the differences between the four



**Figure 2.** Example of Lagrange-interpolation through Kurucz tabulated opacities.

pairs of variables at the inner matching point become progressively less and the sequence is terminated when these differences pass below some set accuracy control limit. Convergence is normally found in practice, if the starting values are not too far from the final ones. Initial errors of more than 20 percent in the logarithms of trial parameters may cause lack of convergence. Figure 1 shows that there is a good agreement between SCH and GOB integrations.

## 2. Opacity Tables

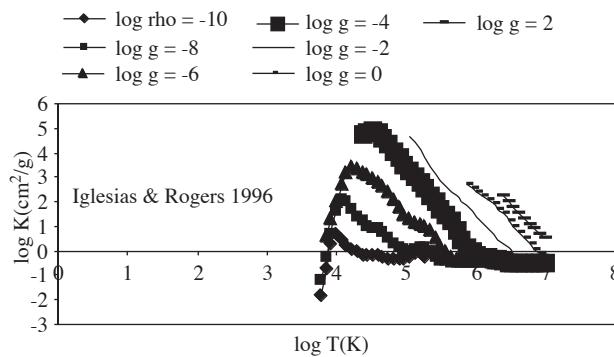
We require interpolations in the two dimensions of (log) temperature and (log) density for given (log) opacities for a fixed chemical composition: so we first interpolated  $\log \kappa_R$  for different  $\log \rho$  values at constant temperature and then interpolated for the log temperatures with  $\log \rho$  at each tabular value. Figure 2 shows such Lagrange interpolated points passing smoothly through the Kurucz [1] tabular values.

The Kurucz [1] model atmosphere program, whose results we have used, includes more than 1000 atomic and molecular species, each having up to 10 isotopic forms. It deals in detail with the ions of all elements up to zinc. This modelling has improved opacity values particularly from including such a large number of atomic species, especially accounting for the net effect of their line (bound-bound) absorptions [26]. There are three aspects to this. The first involves direct calculation of the spectrum at given pressure and temperature to include more than  $10^8$  separate lines. This involves a wavelength resolution high enough to resolve natural spectral features smaller than observed widths associated with the Doppler effect in thermal and rotational motions. Another aspect of the modelling involves tabulating statistical distribution functions for the line opacities in dependence on temperature and pressure over suitably wide ranges of values for various assigned abundances. The third aspect is the spectral sampling, using a relatively small number of wavelength points that do not resolve the spectrum in detail. In computing an atmospheric model, the relevant quantity of interest is a spectral integral, where detailed broadening effects have been smoothed out. This is referred to as ‘opacity sampling’. The twelfth edition of the program ATLAS [27] computes Rosseland mean opacities at given temperatures and densities using iterative procedures incorporating these three procedures.

Iglesias and Rogers constructed the OPAL code to calculate Rosseland mean opacities [3]. They gave extensive results for the mixture of [28], which allow accurate interpolation in (log) temperature and density, with given hydrogen with various metal mass fractions. They used temperature as the basic variable and also  $\mathcal{R} \propto \text{density}/(\text{temperature})^3$  (see above). The range of  $\mathcal{R}$  and temperature are such as to cover typical stellar conditions from the interior through the envelope to extended outer regions. Iglesias and Rogers did not review cool atmospheres, because, at that time, they were unable to revise photoabsorption by molecules [3]. Only radiative processes were taken into account, so that electron conduction was also neglected. Their approach regarded distant many-particle correlations as highly classical, and their detailed radiative interaction calculations were applied to regions where the de Broglie wavelength is less than the plasma screening length. Here, they introduced systematic quantum mechanical methods for many-particle correlations. Their model calculations are generally accepted to be accurate, both for valence electrons and photon absorptions involving inner core electrons, as well as multiply excited ions. Bound-bound transitions were calculated for every subshell in each configuration of the various ion stages explicitly.

The Cox and Stewart [12] opacity tables, sometimes known as the (older) Los Alamos data, presented Rosseland mean opacities also without allowance for electron conduction. These tables have provided a basis for many stellar structure calculations, including the original GOB program. They include molecular-hydrogen and free-electron absorption of radiation by the free-free process from [29]. Rayleigh scattering of photons by molecular hydrogen, using a formula given by [30] was also included. The older Los Alamos tables were presented in an updated form by [2] (the Los Alamos Opacity Library – LAOL), and in this form appeared in the original versions of the Paczyński code available to our group.

Creation of full two-dimensional interpolated tables needed for GOB involves a two-step procedure: first interpolating density values from the source (in their format) to the required (GOB) table format, e.g. first for the required densities at set temperatures. These opacities are then interpolated to the required temperatures at the new tabular densities.



**Figure 3.** Iglesias and Rogers (1996) opacity values (in  $\text{cm}^2 \text{ g}^{-1}$ ), for  $X = 0.70$ ,  $Y = 0.27$ ,  $Z = 0.03$ , with changing temperatures at different densities.

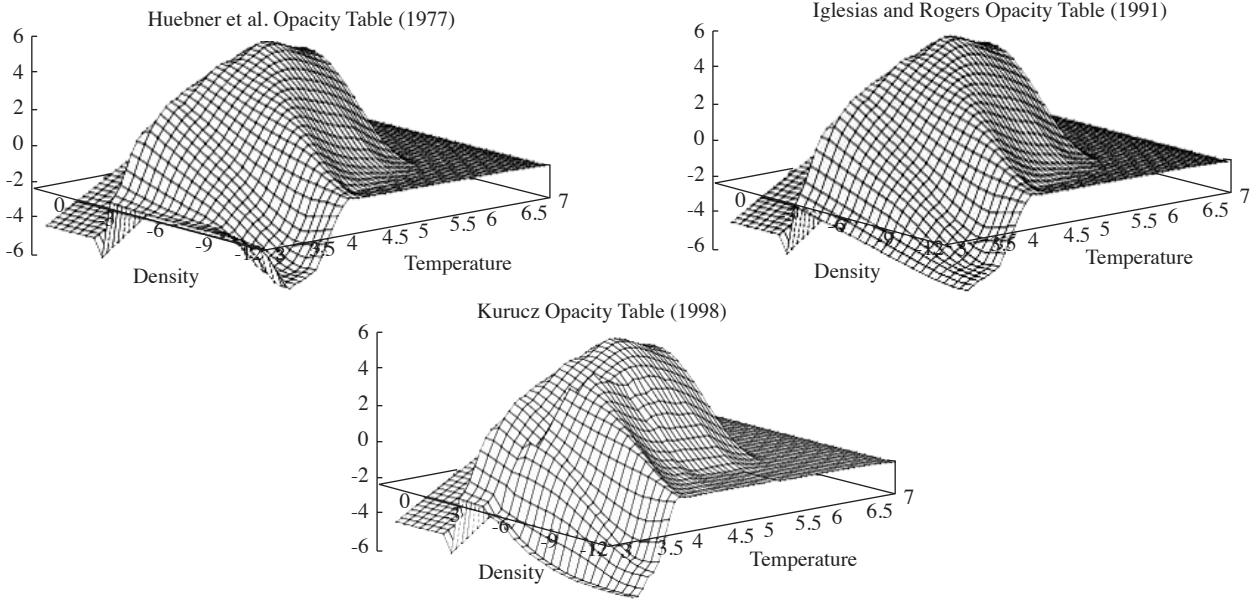
The inset in Figure 3 shows the density values for each run of opacities. The high density region, to the right of the opacity peak, shows reversion to a Kramers' type form. This seems most clear for the  $\log \rho = -4$  curve. This declines to the simple electron scattering constant form ( $\kappa \sim \text{constant}$ ) for high temperatures. At the low density side, there is the expected decline to very low opacities near the surface. Peak values of the opacity in the tables occur at about  $\log \rho \sim -2.5$  and  $\log T \sim 4.5$  and are typically around  $\log \kappa \sim 5.5$ . Newer opacity calculations show this peak occurring at somewhat lower temperatures than the older tables.

Figure 4 shows three dimensional presentation of different opacity tables we have used in GOB programme.

It can be seen that the Iglesias and Rogers opacities are basically similar to the LAOL ones, except in the outer parts of the atmosphere where densities and temperatures are low. The Kurucz [1] opacities also show differences in the outer envelope. This can be associated with the more detailed treatment of line absorptions by Kurucz. Our presentation reflects some discontinuity towards the higher densities and temperatures for the Kurucz opacities. This is because the available tabulations did not cover the complete ranges of variables required for all feasible stellar conditions, but they are sufficient for the important outer ranges of the envelope.

### 3. Results of Different Opacities in Model Integrations

Schwarzschild's book [6] considered 10, 5 and 2.5 solar mass models (at zero age), and for the lower Main Sequence, 1 and 0.6 solar masses. We follow the same selection in Table 1, where corresponding SCH output boundary radii, luminosities and effective temperatures have been tabulated in Table 1(c) for comparison. We also list GOB base-of-atmosphere radii corresponding to these luminosities and effective temperatures. Three sub-tables are given corresponding to a selectable (mean) interpolation step used in the numerical integration of the outer envelope. Actually, there are separate interpolation step limits set for each of the main structural variables, and that for  $\log \rho$ , for example, will be greater than that for  $\log T$ , given the range of variation of the corresponding values. The values shown, however, represent a user-set control over the



**Figure 4.** Three-dimensional representation of opacity tables: (a) Huebner et al. (1977); (b) Iglesias and Rogers (1991); and (c) Kurucz (1998).

inherent accuracy of the quadrature. There appears no exact basis for the selection of this control. In some regions, the underlying variables are changing relatively slowly and the cumulative effects of departures from linearity over small integration steps should be small, perhaps even self-cancelling. It is in the regions close to absorption edges, where changes are rapid and non-linear, that opacity calculations are most difficult. Twenty percent differences between the opacities of different sources, together with admitted theoretical uncertainties of this order, imply that decreasing the interpolation steps to very small values cannot increase the inherent accuracy of the model. We have presented the subtables in order to view the effect of the selected interpolation step size in relation to the scale of effects from different opacity tables.

It is clear from Table 1 that the significantly greater opacities in the outer layers of the models increases the corresponding temperature gradient in these layers, as can be anticipated from equation (3). The tables show that the differences between corresponding base layer values of the variables resulting from the different opacity tables are of the order several percent (of their values). It is noticeable, however, that these differences are comparable to numerical effects in the way the integration may be performed in relation to step sizes. A similar point was made by Stothers [31].

The base values in Table 1 result from inward integrations with different opacities, but from the same outer boundary. For a complete model, the atmospheric base and perimeter of the SCH integration values should join up, as indicated in Figure 1, although this requires some adjustment of the outer boundary temperature. What happens when more recent, increased, opacities are put into the GOB program is that the base layer temperature increases and locates itself further out in the envelope. If the original GOB and SCH integrations had matched at the base layer, therefore, we would have to decrease the value of  $T_0$  for the GOB integration with the new opacities (at given luminosity) to achieve the same base temperature. This decrease of  $T_0$  for constant  $L$  means that the effective radius of the star should expand [7]. The proportional effect is of the same order as the proportional changes to the base temperatures for small changes, i.e. 5–10 %. Calculated radial changes produced in this way for the examples given are also provided in Table 1.

From Stothers and Chin [32] it follows that about the same increase in radius (5–10%) between the older [12] and newer [2] Los Alamos opacities is given by a 50% increase in metallicity. We did not study changes of metallicity for the present work, but Stothers and Chin's finding is in keeping with Andersen's [20] point that if the metallicity can be correctly assigned to within 25%, and we know the age of the star (i.e. its probable evolution), then it should be possible independently to check the effects of opacity. In this connection, it is interesting that this scale of radial increase (5–10% – for intermediate-low mass stars) was

**Table 1.** GOB and SCH results for base layer radii using different opacity tables: (a) for mean interpolation step = 0.1; (b) for step size = 0.05; and (c) for step size = 0.02.

(a) Parameter	Value				
	0.60	1	2.5	5	10
$M_{\odot}$	0.60	1	2.5	5	10
$R_B$ (Huebner)	0.3287	0.4886	0.982	1.7216	2.3481
$R_B$ (Igl. 1991)	0.3287	0.4886	0.982	1.7216	2.3481
$R_B$ (Igl. 1996)	0.3589	0.5318	1.0656	1.8286	2.4540
$R_B$ (Kurucz)	0.3529	0.5263	1.0231	1.7311	2.3575
$\log L$	-0.8276	0.0409	1.6068	2.8296	3.6749
$\log T_e$	3.652	3.7692	4.0115	4.2085	4.3545
$R$ (OB Huebner)	0.5680	0.6131	1.127	1.966	3.349
$R$ (OB Igl. 1991)	0.5680	0.6131	1.127	1.966	3.349
$R$ (OB Igl. 1996)	0.6335	0.6896	1.719	2.527	3.418
$R$ (OB Kurucz)	0.598	0.6232	1.714	2.316	3.401

(b) Parameter	Value				
	0.6	1	2.5	5	10
$M_{\odot}$	0.6	1	2.5	5	10
$R_B$ (Huebner)	0.3741	0.5523	1.0300	1.7317	2.3565
$R_B$ (Igl. 1991)	0.3741	0.5523	1.0300	1.7317	2.3565
$R_B$ (Igl. 1996)	0.3805	0.5592	1.1092	1.8317	2.4610
$R_B$ (Kurucz)	0.3742	0.5459	1.0384	1.7423	2.3604
$\log L$	-0.8276	0.0409	1.6068	2.8296	3.6749
$\log T_e$	3.652	3.7692	4.0115	4.2085	4.3545
$R$ (OB Huebner)	0.5736	0.6301	1.166	1.968	3.389
$R$ (OB Igl. 1991)	0.5736	0.6301	1.166	1.968	3.389
$R$ (OB Igl. 1996)	0.6414	0.7380	1.879	2.638	3.926
$R$ (OB Kurucz)	0.6398	0.7221	1.792	2.413	3.517

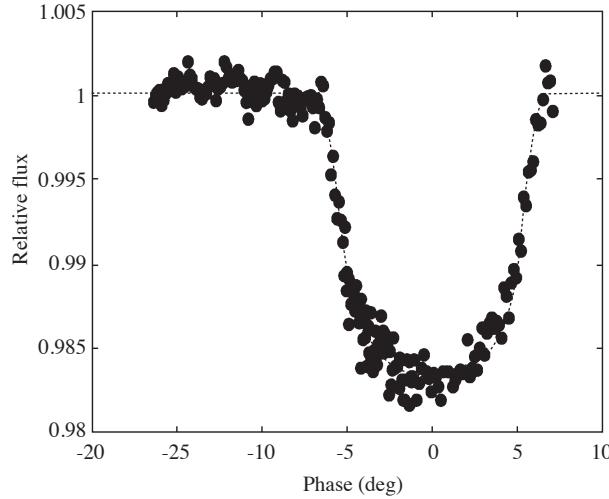
(c) Parameter	Value				
	0.6	1	2.5	5	10
$M_{\odot}$	0.6	1	2.5	5	10
$R_B$ (Huebner)	0.3871	0.5733	1.1357	1.8710	2.5258
$R_B$ (Igl. 1991)	0.3871	0.5733	1.1357	1.8710	2.5258
$R_B$ (Igl. 1996)	0.3869	0.5728	1.1379	1.8755	2.5345
$R_B$ (Kurucz)	0.3869	0.5728	1.1381	1.8768	2.5340
$\log L$	-0.8276	0.0409	1.6068	2.8296	3.6749
$\log T_e$	3.652	3.7692	4.0115	4.2085	4.3545
$R$ (OB Sch. 1958)	0.644	1.021	1.591	2.381	3.622
$R$ (OB Huebner)	0.6484	0.6998	1.176	1.978	3.457
$R$ (OB Igl. 1991)	0.6484	0.6998	1.176	1.978	3.457
$R$ (OB Igl. 1996)	0.6716	0.7590	1.963	2.736	3.996
$R$ (OB Kurucz)	0.6511	0.7988	1.896	2.517	3.687

sufficient to resolve remaining apparent discrepancies between observations and theory, according to Stothers and Chin [32] (given appropriate masses[33]). In Table 2 we present results for these radial increases as given by Stothers and Chin [32] and also Claret and Gimenez [34].

A key question is whether the measured values of luminosity and effective temperature, at given mass and (surface) composition, are sufficient uniquely to resolve the internal run of all parameters affecting the heat flow (in particular, radiative opacities) as well as the age. It has been argued by [21] that, given detached eclipsing binaries with separately measurable radial velocities and no interactive evolution, the age can be

**Table 2.** Comparison of radial increases associated with increase in opacity.

(a) Parameter	Value				
$M_{\odot}$	0.6	1	2.5	5	10
S & C (1991)	—	—	0.10	0.07	0.05
C & G (1992)	—	—	0.08	0.07	0.10
Present	0.092	0.088	0.085	0.062	0.045

**Figure 5.** B light curve combining data from three transits across the disk of V376 Peg by its ‘planetary’ companion as observed by Sullivan and Sullivan (2003).

effectively eliminated by combining one pair of measures (luminosities, say), leaving the other pair (e.g. ratio of effective temperatures) to fix the heat-flow regime. But since approximations used in the calculations of opacities are in a process of steady refinement, this question cannot be regarded as having a fixed answer, although at any particular time the latest models can be tested.

#### 4. Observational Tests

It is well-known that, regarding the properties of pulsating stars, the opacity distribution has a sensitive relationship to behaviour [35]). But applications of data on eclipsing binary stars to general tests of theory have also been discussed, at least since H.N. Russell’s [36] centennial symposium on the ‘Royal Road’ to determine absolute stellar properties, and with much more precision available in recent years. The coeval origin of binary stars also offers special convenience, as mentioned before.

A significant part of our present article is to assess how well currently available data are able to relate to the results of improved opacity tabulations. We have selected V376 Peg = HD 209458 as an interesting test case. In Figure 5, B photometry of the ‘planetary’ transits in this system observed from Hawaii in 1999 and 2000 have been combined and shown together with an optimal curve fit. Background information about these observations was given by [37]. HD 209458 was one of a small number of selected stars showing spectral evidence of low mass companions with reasonably short periods, some proportion of which would be likely to show eclipses [38]). These particular data were considered previously, as individual light curves, by Budding [39].

The data in Figure 5 were analysed using the CURVEFIT package [40]. The fitting function in this package comes from an approximate solution, using spherical harmonics, to the underlying Poisson equation for the distortion of figure caused by tidal interactions and rotation, along classical lines. Speed of evaluation

of an algebraic form of fitting function is an advantage when exploring a wide range of parameter space and evaluating the corresponding error matrix. That this matrix corresponds, geometrically, to a closed ellipsoid is sufficient and necessary for formal determinacy of the underlying model. The properties of the error matrix allow us to check that the parametrization neither surpasses nor under-utilizes the information content of the data (hence the general name ‘information limit optimization technique’ (ILOT) cf., e.g. Banks and Budding [41]). Initial guidelines for the parameters of V376 Peg were taken from [42] and [17].

**Table 3.** V376 Peg (a) curve-fit details: optimal parameters and errors; (b) absolute parameters.

(a) Parameter	Value	Err. ( $\sigma$ )
$U$	1.0012	0.0009
$r_1$	0.1172	0.001
$r_2$	0.0145	0.0006
$i$	86.3	0.4
$u$	0.574	
$\Delta l'$	0.001	
$\chi^2/\nu$	0.93	

(b) Parameter	Value	p.e.
Period	3.52474 d	0.00001 d
Epoch (HJD)	2451497.7993	
$A$	9.837	$0.04 R_{\odot}$
$R_1$	1.15	$0.01 R_{\odot}$
$R_2$	1.39	$0.03 R_{\text{Jup}}$
$i$	86.3	0.3 deg
$u$	0.57	0.14
$M_1$	1.03 $M_{\odot}$	*
$M_2$	0.62 $M_{\text{Jup}}$	*
$V_{\text{Abs}}$	4.31	
$V$	7.653	*
$B-V$	0.594	*
$T$	5920 K	
Dist.	46.7	0.8 pc

\* cf. Henry et al. 2000

CURVEFIT provides radii, in terms of the separation of the component stars, as well as the orbital inclination, from the eclipse photometry. Results are given in the upper part of Table 3. These parameters can be combined with the high quality radial velocity data of [42]. Since the projected velocities are measured in absolute units (e.g.  $\text{km}\cdot\text{sec}^{-1}$ ) and the orbital period is known independently, the orbital radius can be deduced in km. Kepler’s law will then furnish the masses of the components. In this way we calculated the absolute radii in the lower part of Table 3. From the goodness of fit measure  $\chi^2$ , the stellar radius is estimated probably to within 1 percent of its true value.

The results given in Table 3 are within their error limits of those of Brown et al. [43], using the much more sophisticated facilities of the Hubble Space Telescope. They are thus a fair indication of generally available good observational accuracy of the present time, when sufficient precautions are taken. It is worth noting that the  $\sim$ millimag accuracy presented by [17] was achievable even with a 0.6 m telescope and 2 min integrations from a ground-based site, although at an altitude of  $\sim$ 4000 m, so advantageous for photometry. On this basis, longer integrations with a  $>1$  m telescope from similar locations would approach  $\mu\text{mag}$  accuracy data for brighter stars. Analysis of eclipsing binary light curves with such an accuracy should allow sensitive tests of theoretical results on stars, and, for the present context, the opacity of stellar material

## 5. Discussion and Summary

The present study supports the point that changes in schemes for carrying out the numerical integration of structure equations, say of order a few per cent, may have as great, or greater, effect than some of the earlier changes to opacity tables (see also [44]). On the face of it, this looks at variance with the implication of opacity model predictions, testable, in principle, to very high accuracy when suitable observational material is available. Parameters thought to be within  $\sim 10^{-4}$  of their real values have been specified [45], but this was when a detailed vibration spectrum also was known. In general, information about stars obtained from direct measurement is less specific: but a useful broad range of data comes from eclipsing binary stars with double-lined spectra, to which the present article is closely related.

Our main findings concern the increase of radius associated with increasing envelope opacity. In this study, changes from the earlier LAOL opacity tables to later ones that include more detailed line absorption effects, have changed calculated radii by up to  $\sim 5\text{--}10\%$ . This scale of effect in the radius is now able to be checked by careful analysis of good observations of eclipsing binary stars, even taking into account the interdependence of parameters in the fitting of their light curves. In this way, detailed atomic modelling becomes open to empirical testing from observations. It is interesting that the small difference between the older Iglesias and Rogers opacities and the observations in Figure 1 of Stothers and Chin [32] is about the same as the difference between the effects of opacity from the 1992 to the 1996 OPAL opacities (including more line absorption effects). However, alternative possibilities exist that can also account for changes of this order, in particular the role of convective ‘overshooting’ [46–48, 21].

On this point, Claret and Gimenez [34, 49] showed that a moderate core overshoot improves the comparison between theoretical apsidal motion constants and observational data. Results for the structural constant (a weighted average of both stars) coming from analysis of apsidal motions observed in certain close binary systems with eccentric orbits were often found to be too large in earlier studies, implying that observed mean radii were greater than predicted by models. But here it should be noted that the radii in the relevant formulae are raised to the fifth power. A 2% error of estimation in the radius would therefore become a 10% error in the estimation of the mean structural constant. This should render the mean structural constant too insensitive to test opacity models on the basis of, say, the Andersen [20] criteria. The role of the most appropriate dynamically stable mean rotation rate for the stars in such eccentric binaries is also likely to be underestimated if the mean orbital angular velocity were used [50]. Light curve analysis models also have often referred to ‘Roche model’ configurations for the stars, (for example with the Wilson-Devinney 1972 code, or its later developments). But, strictly speaking, there is no ‘Roche model’ for an eccentric binary system, a point stressed already by [51]. Such comments aside, there will remain the issue of whether any model of a continuum of heat-flow related variables can be uniquely established by observables dependent only on the integrals of such variables.

We note some limitations about the generality of our findings: (a) the role of numerical accuracy effects in the calculations (particularly where there have been some discontinuities in tailoring the Kurucz envelope opacities into the general run of values throughout the star (cf. Figure 4c); and (b) the application of the changed opacities only in the GOB program. In addition to opacity-related effects the GOB+SCH program results show some small effects associated with the location of the internal fitting point and also the adopted convective mixing-length parameter ‘alpha’. Nevertheless, we contend that more recent opacities, including fuller treatment of line absorptions, produce effects that can be discriminated from detailed analysis of double-lined eclipsing binary systems observed with modern, high-quality facilities.

## References

- [1] Kurucz 1998. <http://cfaku5.cfa.harvard.edu/opacities/Rosseland/kamp02.ross>.
- [2] W. F. Huebner, A. L. Merts, N. H. Magee, and M.F. Argo, Los Alamos Scientific Report LA-6760-M.(1977).
- [3] C. A. Iglesias and F. J. Rogers, *ApJ*, **371**, (1991), 408.
- [4] F. J. Rogers and C. A. Iglesias, *ApJS*, **79**, (1992), 507.
- [5] C. A. Iglesias and F. J. Rogers, *ApJ*, **464**, (1996), 943.

- [6] M. Schwarzschild, Structure and Evolution of the Stars, *Princeton University Press*, (New Jersey, 1958).
- [7] T. R. Carson, *A&AS*, **75**, (1988), 385.
- [8] B. Strömgren, mrs.conf.(1967), 461.
- [9] D. Prialnik, An Introduction to the Theory of Stellar Structure and Evolution, *Cambridge University Press*, (United Kingdom, 1999).
- [10] L. Mestel, *Proc.Camb. Philos. Soc.*, **46**, (1950), 331.
- [11] T. R. Carson, *ARA&A*, **14**, (1976), 95.
- [12] A. N. Cox and J. N. Stewart, *ApJ*, **19**, (1969), 174.
- [13] B. Paczynski, *Acta Astron.*, **2**, (1970), 20.
- [14] G. Inlek, A. Böke, O. Yilmaz, E. Budding, *New Astronomy*, **12**, (2006), 427.
- [15] P. A. Young, E. E. Mamajek, D. Arnett, J. Liebert, *ApJ*, **556**, (2001), 230.
- [16] E. F. Guinan and S. G. Engle, *Ap Space Sci*, **304**, (2006), 5.
- [17] D. J. Sullivan and T. Sullivan, *BaltA*, **12**, (2003), 145.
- [18] D. M. Popper, H. E. Jorgensen, D. C. Morton and D. S. Leckrane, *ApJ*, **161**, (1970), 57.
- [19] J. Andersen, J. V. Clausen, B. Nordström, J. Tomkin and M. Mayor, *A&A*, **246**, (1991), 99.
- [20] J. Andersen, *ASP Conference Series*, **40**, (1993), 347.
- [21] A. Claret, *A&A*, **475**, (2007), 1019.
- [22] R. B. Stothers and N. R. Simon, *ApJ*, **160**, (1970), 1019.
- [23] R. B. Stothers, *ApJ*, **383**, (1991), 820.
- [24] M. Loudon, E. Budding, *SouSt*, **37**, (1996), 17.
- [25] A. P. Odell, W. D. Pesnell, *ASPC*, **135**, (1998), 69.
- [26] R. L. Kurucz, *ASPC*, **108**, (1996), 160.
- [27] R. L. Kurucz, *ASPC*, **44**, (1993), 87.
- [28] E. Anders, N. Grevesse, *Geochim. Cosmochim. Acta*, **53**, (1989), 197.
- [29] W. B. Somerville, *ApJ*, **139**, (1964), 192.
- [30] A. Dalgarno, D. A. Williams, *ApJ*, **136**, (1962), 690.
- [31] R. B. Stothers, *ApJ*, **194**, (1974), 695.
- [32] R. B. Stothers and C. W. Chin, *ApJ*, **381**, (1991), 67.
- [33] A. Maeder, G. Meynet, *A&A*, **76**, (1988), 411.
- [34] A. Claret and A. Gimenez, *A&AS*, **91**, (1991), 217.
- [35] W. A. Dziembowski, *IAU Symp*, **162**, (1994), 55.
- [36] H. N. Russell, Centennial Symposia, Harvard Observatory Monographs, Cambridge, MA., **7**, (1948), 181.
- [37] S. Jha, D. Charbonneau, P. M. Garnavich, D. J. Sullivan, T. Sullivan, T. M. Brown and J. L. Tonry, *ApJ*, **540**, (2000), 45.
- [38] D. Charbonneau, T. M. Brown, D. W. Latham and M. Mayor, *ApJ*, **529**, (2000), 45.

- [39] E. Budding, *Ap&SS*, **296**, (2005), 17.
- [40] E. Budding and O. Demircan, Introduction to Astronomical Photometry, *Cambridge University Press*, **6**, (Cambridge 2007), 434.
- [41] T. Banks and E. Budding, *Ap&SS*, **167**, (1990), 221.
- [42] G. W. Henry, G. W. Marcy, R. P. Butler and S. S. Vogt, *ApJ*, **529**, (2000), 41.
- [43] T. M. Brown, D. Charbonneau, R. L. Gilliland, N. R. Noyes, A. Burrows, *ApJ*, **552**, (2001), 699.
- [44] P. Morel, J. Provost and G. Berthomieu, *SoPh*, **128**, (1990), 7.
- [45] J. Christensen-Dalsgaard, *ESASP*, **286**, (1988), 431.
- [46] G. Schaller, D. Schaefer, G. Meynet, A. Maeder, *A&AS*, **96**, (1992), 269.
- [47] A. Bressan, F. Fagotto, G. Bertelli, C. Chiosi, *A&AS*, **100**, (1993), 647.
- [48] A. Claret, *A&AS*, **109**, (1995), 441.
- [49] A. Claret and A. Gimenez, *ASPC*, **40**, (1993), 469.
- [50] M. E. Alexander, *Ap.Space Sci*, **23**, (1973), 459.
- [51] C. A. Tout, Eggleton, *ApJ*, **334**, (1988), 357.

## **ROSSELAND ABSORPSİYON KATSAYILARININ LAGRANGE İNTERPOLASYON YÖNTEMİYLE FARKLI SICAKLIKLAR İÇİN HESAPLANMASI**

**Aysun BÖKE<sup>1</sup>,Gülay İNLEK<sup>1</sup>,Oktay YILMAZ<sup>2</sup>,Edwin BUDDING<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Balıkesir Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Fizik Bölümü, Balıkesir,  
[aysun@balikesir.edu.tr](mailto:aysun@balikesir.edu.tr)

<sup>1</sup>Balıkesir Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Fizik Bölümü, Balıkesir,  
[inlek@balikesir.edu.tr](mailto:inlek@balikesir.edu.tr)

<sup>2</sup>Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Fizik Bölümü,  
[Canakkale.o.yilmaz@comu.edu.tr](mailto:Canakkale.o.yilmaz@comu.edu.tr)

<sup>2</sup>Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi ,Fizik Bölümü,  
[Canakkale.ebudding@comu.edu.tr](mailto:Canakkale.ebudding@comu.edu.tr)

### **ÖZET**

Bu çalışmada, Kurucz Modeli (1998) opaklık tablolarından Rosseland absorpsiyon katsayılarının yoğunluğa göre değişimi, farklı sıcaklıklar için Lagrange interpolasyon yöntemiyle Fortran programında hesaplanmıştır ve sonuçlar Kurucz opaklık verileri ile karşılaştırılmıştır.