T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BİHARMONİK VE *f*-BİHARMONİK ALTMANİFOLDLAR

DOKTORA TEZİ

FATMA KARACA

BALIKESİR, HAZİRAN - 2016

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BİHARMONİK VE *f*-BİHARMONİK ALTMANİFOLDLAR

DOKTORA TEZİ

FATMA KARACA

Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Cihan ÖZGÜR (Tez Danışmanı)
Prof. Dr. Kadri ARSLAN
Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN
Doç. Dr. Bengü BAYRAM
Yrd. Doç. Dr. Fırat EVİRGEN

BALIKESİR, HAZİRAN-2016

KABUL VE ONAY SAYFASI

Fatma KARACA tarafından hazırlanan "**BİHARMONİK VE *f*-BİHARMONİK ALTMANİFOLDLAR**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 17.06.2016 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Prof. Dr. Cihan ÖZGÜR	
Üye Prof. Dr. Kadri ARSLAN	
Üye Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN	
Üye Doç. Dr. Bengü BAYRAM	
Üye Yrd. Doç. Dr. Fırat EVİRGEN	

Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Doç. Dr. Necati ÖZDEMİR ....

ÖZET

BİHARMONİK VE *f*-BİHARMONİK ALTMANİFOLDLAR
DOKTORA TEZİ
FATMA KARACA
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. CİHAN ÖZGÜR)

BALIKESİR, HAZİRAN - 2016

Bu çalışmada, biharmonik ve *f*-biharmonik altmanifoldlar ile *f*-biharmonik eğriler ele alınmıştır. Çarpım uzaylarının altmanifoldlarının *f*-biharmonik olma koşulları verilmiştir. Ayrıca, *f*-biminimal immersiyon tanımı verilip; Riemann manifoldları üzerindeki eğriler ve hiperyüzeylerin *f*-biminimal olma koşulları elde edilmiş ve bazı örnekler verilmiştir.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş bölümüdür.

İkinci bölümde, konuyla ilgili temel tanım ve kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde, iki reel uzay formun çarpım altmanifoldlarının *f*-biharmonik olması için gerek ve yeter şartlar elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde, *f*-biminimal immersiyon tanımı verilip; Riemann manifoldları üzerinde *f*-biminimal eğriler ve hiperyüzeyler ele alınıp, *f*-biminimal yüzey örnekleri bulunmuştur. Son olarak, Sasakian uzay formlar üzerinde bir *f*-biminimal Legendre eğri örneği elde edilmiştir.

Beşinci bölümde, Sol uzayları, Cartan-Vranceanu 3-boyutlu uzayları ve homojen kontakt 3-manifoldları üzerindeki eğrilerin *f*-biharmonik olma koşulları bulunmuştur.

ANAHTAR KELİMELER: Biharmonik, *f*-biharmonik, *f*-biminimal, Sol uzay, Cartan-Vranceanu 3-boyutlu uzayı, homojen kontakt 3-manifold, Sasakian uzay form.

ABSTRACT

BIHARMONIC AND *f*-BIHARMONIC SUBMANIFOLDS
PH.D THESIS
FATMA KARACA
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS

(SUPERVISOR: PROF. DR. CİHAN ÖZGÜR)

BALIKESİR, JUNE 2016

In this thesis, we consider biharmonic and *f*-biharmonic submanifolds and *f*-biharmonic curves. We obtain necessary and sufficient conditions for submanifolds of product spaces to be *f*-biharmonic. Moreover, we define *f*-biminimal immersions and we investigate *f*-biminimal curves, *f*-biminimal hypersurfaces in Riemannian manifolds and give some examples.

This thesis consists of five chapters.

The first chapter is introduction.

In the second chapter, we give fundamental definitions and notions to be used in the other chapters.

In the third chapter, we obtain necessary and sufficient conditions for submanifolds of product of two real space forms to be *f*-biharmonic.

In the fourth chapter, we define *f*-biminimal immersions. We consider *f*-biminimal curves and *f*-biminimal hypersurfaces in a Riemannian manifold and give examples of *f*-biminimal surfaces. Finally, we consider *f*-biminimal Legendre curves in Sasakian space forms and we find an example.

In the fifth chapter, we find necessary and sufficient conditions for curves in Sol spaces, Cartan-Vranceanu 3-dimensional spaces and homogeneous contact 3-manifolds to be *f*-biharmonic.

KEYWORDS: Biharmonic, *f*-biharmonic, *f*-biminimal, Sol space, Cartan-Vranceanu 3-dimensional space, homogeneous contact 3-manifold, Sasakian space form.

İÇİNDEKİLER

SEMBOL LİSTESİ

M	Manifold
φ	(1,1)-tensör Alanı
ξ	Karakteristik Vektör Alanı
η	(Hemen Hemen) Değme Yapı
g	Metrik Tensör
T_pM	Tanjant Uzay
$\chi(M)$	Vektör Alanları Uzayı
∇	Levi-Civita (Riemann) Koneksiyonu
$\nabla^{\perp}$	Normal Demette Levi-Civita Koneksiyonu
$E(\psi)$	Enerji Fonksiyoneli
$E_f(\psi)$	*f*-Enerji Fonksiyoneli
$E_2(\psi)$	Bienerji Fonksiyoneli
$E_{2,f}(\psi)$	*f*-Bienerji Fonksiyoneli
$\tau(\psi)$	Gerilim Alanı
$\tau_f(\psi)$	*f*- Gerilim Alanı
$\tau_2(\psi)$	İkinci Gerilim Alanı
$\tau_{2,f}(\psi)$	*f*- İkinci Gerilim Alanı
Δ	Laplas Dönüşümü
$\Delta^{\perp}$	Normal Demette Laplas Dönüşümü
κ_λ	Eğrinin λ. Eğrilik Fonksiyonu
R^N	N Manifoldunun Riemann Eğrilik Tensörü

ÖNSÖZ

Bu çalışmada, çeşitli Riemann manifoldları üzerindeki eğri ve altmanifoldlar incelenmiştir. Bu eğri ve altmanifoldların biharmonik, *f*-biharmonik ve *f*-biminimal olma koşulları elde edilmiş ve örnekler verilmiştir.

Çalışmalarım sırasında bana her türlü konuda örnek ve destek olan danışmanım Prof. Dr. Cihan ÖZGÜR'e teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca çalışmalarım süresince daima yanımda olan eşim ve aileme de sevgi ve teşekkürlerimi sunarım.

1. GİRİŞ

J. Eells ve J. H. Sampson, 1964 yılında Riemann manifoldlarının harmonik dönüşümlerini çalışmışlardır [1]. Daha sonra, 1983 yılında J. Eells ve L. Lemaire, k-harmonik dönüşümler fikrini önermişlerdir [2]. G. Y. Jiang ise, 1986 yılında 2-harmonik (biharmonik) dönüşümler için Euler-Lagrange denklemlerinden faydalanarak ikinci gerilim alanı denklemini elde etmiştir [3]. B. Y. Chen, Öklid uzayının bir altmanifoldunun biharmonik olmasını $\Delta H = 0$ koşulunun sağlanması olarak tanımlamıştır [4]. Öklid uzayının altmanifoldları için G. Y. Jiang ve B. Y. Chen'in biharmoniklik tanımları çakışmaktadır. Genel olarak bu kavramlar birbirlerinden farklıdır. 2004 yılında N. Course, *f*-harmonik dönüşümleri tanımlamıştır [5]. W-J. Lu ise, 2013 yılında Riemann manifoldları arasındaki *f*-biharmonik dönüşüm tanımını vermiş ve Euler-Lagrange denklemlerini kullanarak *f*-ikinci gerilim alanı denklemini hesaplamıştır [6]. Bu çalışmalardan faydalanarak, Y-L. Ou, 2014 yılında *f*-biharmonik dönüşümlerin bazı temel özelliklerini çalışmış ve *f*-biharmonik altmanifold kavramını tanıtmıştır [7].

J. Roth, 2013 yılında iki uzay formun çarpım manifoldlarının bir altmanifoldunun biharmonik olması için gerek ve yeter şartları araştırmıştır [8].

L. Loubeau ve S. Montaldo, 2008 yılında biminimal immersiyon kavramını tanımlamışlar ve Riemann manifoldları üzerindeki eğrilerin ve hiperyüzeylerin biminimal olması için gerek ve yeter şartları elde etmişlerdir [9].

R. Caddeo, C. Oniciuc ve P. Piu, 2004 yılında Heisenberg gruplarında eğrilerin biharmonik olma şartlarını elde etmişler ve Heisenberg gruplarındaki bütün biharmonik eğrilerin helis olduğunu ispatlamışlardır [10]. Daha sonra 2006 yılında, Y-L. Ou ve Z-P. Wang, Sol uzaylarında biharmonik eğrilerin karekterizasyonu elde etmişlerdir [11]. 2006 yılında, R. Caddeo, S. Montaldo ve C. Oniciuc ise Cartan-Vranceanu 3-boyutlu uzaylarında bütün biharmonik eğrilerin karakterizasyonunu elde etmişler ve bu eğrilerin açık parametrizasyonunu vermişlerdir [12].

2007 yılında ise J. Inoguchi, kontakt 3-manifoldların biminimal altmanifoldlarını incelemiş ve homojen kontakt 3-manifoldlar üzerinde eğrilerin biminimal olma şartlarını elde etmiştir [13].

Yukarıdaki çalışmalardan yola çıkılarak, bu tezin üçüncü bölümünde çarpım uzaylarının *f*-biharmonik altmanifoldları incelenmiştir. Dördüncü bölümde, *f*-harmoniklik, *f*-biharmoniklik ve biminimallik tanımlarından faydalanılarak *f*-biminimal immersiyon kavramı tanımlanmış ve tanımlanan bu kavramdan yararlanılarak Riemann manifoldları üzerinde eğri ve hiperyüzeylerin *f*-biminimal olma koşulları araştırılmıştır. Elde edilen sonuçlar örneklerle desteklenmiştir. Beşinci bölümde, Sol uzayları, Cartan-Vranceanu 3-boyutlu uzayları ve homojen kontakt uzaylarındaki *f*-biharmonik eğriler üzerinde durulmuştur.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde diğer bölümlerde kullanılacak olan temel tanımlar ve kavramlar verilecektir.

2.1 Riemann Manifoldları

Tanım 2.1.1: (M,g) Riemann manifoldu, ∇ M de Levi-Civita koneksiyonu olmak üzere, $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için

$$R:\chi(M)\times\chi(M)\times\chi(M)\to\chi(M),$$

$$R(X,Y)Z=\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_{[X,Y]}Z$$

ile tanımlanan R dönüşümü M üzerinde bir $(1,3)$ tensör alanıdır ve M manifoldunun *Riemann eğrilik tensörü* olarak adlandırılır [14].

Tanım 2.1.2: (M,g) bir Riemann manifold ve $g(X,X)g(Y,Y)-g(X,Y)^2\neq 0$ olmak üzere,

$$K(X,Y)=\frac{R(X,Y,Y,X)}{g(X,X)g(Y,Y)-g(X,Y)^2}$$

$\{X,Y\}$ tarafından gerilen düzlemin *kesitsel eğriliği* olarak adlandırılır [14]. M manifoldunun eğrilik tensörü $\forall X,Y,Z\in\chi(M)$ için,

$$R(X,Y)Z=c\{g(Y,Z)X-g(X,Z)Y\}$$

olmak üzere, eğer M manifoldunun kesitsel eğriliği c sabitine eşit ise, M ye *reel uzay form* denir ve $M(c)$ ile gösterilir.

Eğer,

$c=0$ ise $M(c)\cong E^n$ Öklid uzayı,

$c=\frac{1}{r^2}$ ise $M(c)\cong S^n(r)$ küresi,

$c=-\frac{1}{r^2}$ ise $M(c)\cong H^n(r)$ Hiperbolik uzaydır [15].

Tanım 2.1.3: M n-boyutlu bir Riemann manifoldu ve $p\in M$ olsun. p noktasının bir komşuluğu $U\subset M$ ve $E_1,E_2,...,E_n\in\chi(U)$ vektör alanları U nun her noktasında ortonormal olmak üzere, $\left(\nabla_{E_i}E_j\right)(p)=0$ denklemi sağlanıyorsa $\{E_i\}_{i=1}^n$ vektör alanlarına $p\in M$ noktasında *lokal geodezik çatı alanı* adı verilir [16], [22].

Tanım 2.1.4: (M,g) *n*-boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\{e_1,e_2,\ ...\ ,e_n\}$ $\chi(M)$ nin bir ortonormal çatı alanı olsun.

$$Ric:\chi(M)\times\chi(M)\to C^\infty(M,\mathbb{R})$$

$$(X,Y)\to Ric(X,Y)=\sum_{i=1}^n g(R(e_i,X)Y,e_i) \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlı (0, 2)-tipindeki Ric tensör alanına, *M* üzerinde *Ricci eğrilik tensör alanı* adı verilir [17].

Tanım 2.1.5: (M,g) *n*-boyutlu bir Riemann manifold ve $\{e_1,\ e_2,\ ...\ ,e_n\}$ $\chi(M)$ nin bir ortonormal çatı alanı olmak üzere;

$$scal=\sum_{i=1}^n Ric(e_i,\ e_i) \tag{2.2}$$

fonksiyonuna *M* nin *skaler eğrilik fonksiyonu* adı verilir [18].

Tanım 2.1.6: G bir diferensiyellenebilir manifold olsun. Eğer G aynı zamanda bir grup yapısına sahip ve

$$\begin{aligned} &G \times G \to G \\ &(\sigma, \tau) \to \sigma\tau^{-1} \end{aligned}$$

dönüşümü bir C^{∞} dönüşüm ise G ye bir Lie grubu adı verilir [19].

Tanım 2.1.7: (M, g) ve $(N, \tilde{g})$ birer Riemann manifoldu ve $\psi : M \to N$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $\forall p \in M$ için $d\psi_p = (\psi_*)_p$ dönüşümü birebir ise ψ ye M den N ye bir *immersiyon* denir. M manifolduna da *immersed altmanifold* veya kısaca *altmanifold* denir [20].

$\forall X, Y \in T_pM$ için $g\big(\psi(X), \psi(Y)\big)_{\psi(p)} = g(X, Y)_p$ ise ψ ye *izometrik immersiyon* adı verilir. Burada g T_pM den indirgenen metriktir [20].

Tanım 2.1.8: M ve N sırası ile n ve $(n+m)$ boyutlu Riemann manifoldları olmak üzere M, N nin altmanifoldu ve ∇ ve $\tilde{\nabla}$ sırası ile M ve N de Levi-Civita koneksiyonları olsun. Böylece X ve Y, M üzerinde vektör alanları olmak üzere;

$$B : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi^{\perp}(M)$$

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X, Y) \tag{2.3}$$

biçiminde *Gauss formülü* elde edilir. Burada $\nabla_X Y$ ve $B(X, Y)$, $\tilde{\nabla}_X Y$ nin sırasıyla tanjant ve normal bileşenleridir. (2.3) ile tanımlanan B ye M nin *ikinci temel formu* adı verilir [20].

Tanım 2.1.9: $\psi:(M^n,g)\to(N^{n+m},\tilde{g})$ bir immersiyon olsun. $\{e_i\}_{i=1,..n}$ $\chi(M)$ nin bir çatı alanı olmak üzere,

$$H=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}B(e_i,e_i)=\frac{1}{n}izB$$

ile tanımlanan H fonksiyonuna immersiyonun *ortalama eğrilik vektör alanı* denir [20].

Tanım 2.1.10: $\psi:(M^n,g)\to(N^{n+m},\tilde{g})$ bir immersiyon olsun.

$\forall X,Y\in\chi(M)$ için

$$\tilde{g}\left(B(X,Y),H\right)=\lambda g\left(X,Y\right)$$

olacak şekilde M^n üzerinde bir λ fonksiyonu var ise M^n *yarı-umbilik altmanifold* olarak adlandırılır [20].

Tanım 2.1.11: $\psi:(M,g)\to(N,\tilde{g})$ bir izometrik immersiyon olsun. M^n ye normal bir birim vektör alanı ξ olsun. $\tilde{\nabla}_X\xi$ nin teğet ve normal bileşenleri sırasıyla $-A_\xi(X)$ ve $\nabla^{\perp}_X\xi$ olmak üzere;

$$A:\chi(M)\times\chi^{\perp}(M)\to\chi(M)$$

dönüşümü iyi tanımlıdır. Böylece

$$\tilde{\nabla}_X\xi=-A_\xi X+\nabla^{\perp}_X\xi \tag{2.4}$$

biçiminde *Weingarten denklemi* elde edilir. Burada A_ξ şekil operatörü, $\nabla^{\perp}$ de M nin $T^{\perp}M$ *normal demetindeki (normal) koneksiyon* adını alır [20].

M nin şekil operatörü A_ξ ile ikinci temel form B arasında;

$$g(A_\xi X,Y)=\tilde{g}(B(X,Y),\xi) \tag{2.5}$$

bağıntısı vardır. [20].

Tanım 2.1.12: $\psi:(M,g)\to(N,\tilde{g})$ bir izometrik imersiyon olsun. N^{n+m} nin eğrilik tensörü R^N ve M^n nın eğrilik tensörü R olmak üzere,

$$R^N(X,Y,Z,W)=R(X,Y,Z,W)-\tilde{g}(B(Y,Z),B(X,W))$$

$$+\tilde{g}(B(X,Z),B(Y,W)) \tag{2.6}$$

ile tanımlanan denkleme *Gauss denklemi* adı verilir [20].

Tanım 2.1.13: (M,g) $n-$ boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\gamma:I\to M$ birim hızlı bir eğri olsun. Eğer γ eğrisi üzerinde

$$\begin{array}{lcl} E_1 & = & \gamma'=T, \\ \nabla_T T & = & \kappa_1 E_2, \\ \nabla_T E_2 & = & -\kappa_1 E_1+\kappa_2 E_3, \\ & \cdots & \\ \nabla_T E_r & = & -\kappa_{r-1}E_{r-1} \end{array} \tag{2.7}$$

olacak şekilde $E_1,E_2,...,E_r$ ortonormal vektör alanları varsa, γ eğrisine *oskülatör mertebesi r olan bir Frenet eğrisi* $(1\leq r\leq n)$ denir. Buradaki $\kappa_1,...,\kappa_{r-1}$ fonksiyonlarına γ nın *eğrilik fonksiyonları* dır [21].

Tanım 2.1.14: (M_1,g_{M_1}) ve (M_2,g_{M_2}) Riemann manifoldları ve $f>0$, M_1 üzerinde bir C^∞ fonksiyon olmak üzere $M=M_1\times_f M_2$ katlı çarpım manifoldu

$$g=g_{M_1}+f^2 g_{M_2} \tag{2.8}$$

metrik tensörü ile oluşturulmuş $M_1\times M_2$ çarpım manifoldudur [22].

Tanım 2.1.15: (M,g) ve $(N,\tilde{g})$ iki Riemann manifoldu olsun. $\psi:M\to N$ dönüşümü için

$$\Delta^\psi W=-iz(\nabla^\psi)^2 W$$

şeklinde tanımlanan Δ dönüşümüne *Laplas operatörü* denir.

M üzerindeki diferensiyellenebilir bir f fonksiyonun Laplası ise

$$\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$$

şeklinde tanımlıdır [18].

2.2 Hemen Hemen Değme Metrik Manifoldlar

Bu kısımda hemen hemen değme metrik manifold ve Sasakian yapı tanımları verilecektir.

Tanım 2.2.1: M $(2n+1)$- boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. M üzerindeki her X, Y, Z vektör alanı için

$$\varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi, \quad \eta(\xi) = 1, \quad \varphi\xi = 0, \quad \eta \circ \varphi = 0$$

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y), \quad \eta(X) = g(X, \xi)$$

eşitliklerini sağlayacak şekilde φ (1,1)-tipinde tensör alanı, ξ vektör alanı, η 1-formu ve g Riemann metriği varsa; (φ, ξ, η, g) dörtlüsüne *hemen hemen değme metrik yapı*, $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ beşlisine de *hemen hemen değme metrik manifold* denir. Eğer $d\eta = \Phi$ koşulu da sağlanıyorsa, $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ ye *değme metrik manifold* denir. Burada, $\Phi(X, Y) = g(X, \varphi Y)$ eşitliği ile verilen Φ dönüşümüne, M nin *temel* 2-*formu* denir [15].

Tanım 2.2.2: Bir M Riemann manifoldu üzerindeki her X, Y, Z vektör alanı için

$$[\varphi, \varphi](X, Y) = \varphi^2[X, Y] + [\varphi X, \varphi Y] - \varphi[\varphi X, Y] - \varphi[X, \varphi Y]$$

ile tanımlanan $[\varphi, \varphi]$ dönüşümüne φ nin *Nijenhuis torsion tensörü* denir [15].

Eğer, (φ,ξ,η,g) hemen hemen değme metrik yapısı için

$$[\varphi,\varphi]+2d\eta\otimes\xi=0$$

eşitliği sağlanıyorsa, bu yapıya *normaldir* denir. Normal değme metrik manifoldlara *Sasakian manifold* adı verilir [15].

Tanım 2.2.3: $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ bir Sasakian manifold olsun. T_pM tanjant uzayında ξ ye dik bir X birim vektörü $\{X,\varphi X\}$ ortonormal olacak şekilde var ise $\{X,\varphi X\}$ düzlemine T_pM nin $\varphi-$*kesiti* denir [15].

$K(X,\ \varphi X)\ =\ g\big(R(X,\ \varphi X)\varphi X,\ X\big)$ şeklinde tanımlanan $K(X,\ \varphi X)$' e M nin $\varphi-$*kesitsel eğriliği* adı verilir [15].

Tanım 2.2.4: Eğer $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ Sasakian manifold sabit φ -kesitsel eğriliğine sahip ise bir *Sasakian uzay form* olarak adlandırılır ve her $X,Y,Z\in\chi(M)$ için eğrilik tensor alanı,

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z=\frac{(c+3)}{4}\{g(Y,Z)X-g(X,Z)Y\}+\frac{(c-1)}{4}\{&g(X,\varphi Z)\varphi Y-g(Y,\varphi Z)\varphi X\\ &+2g(X,\varphi Y)\varphi Z+\eta(X)\eta(Z)Y-\eta(Y)\eta(Z)X\\ &+g(X,Z)\eta(Y)\xi-g(Y,Z)\eta(X)\xi\} \end{aligned} \tag{2.9}$$

şeklinde verilir [15].

Tanım 2.2.5: M^r $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ Sasakian manifoldunun bir altmanifoldu olsun. Eğer her $X\in T_pM^r$ için $\eta(X)=0$ ise M^r ye $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ nin *integral altmanifoldu* adı verilir. Bir Sasakian manifoldun 1-boyutlu integral altmanifolduna da M nin bir *Legendre eğrisi* denir [23].

Böylece, $\gamma:I\to M=(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ olmak üzere, γ eğrisinin T tanjant vektör alanı için $\eta(T)=0$ denklemi sağlanıyorsa γ eğrisine *Legendre eğrisi* denir [23].

2.3 Harmonik, *f*-Harmonik, Biharmonik, *f*-Biharmonik Dönüşümler

Bu kısımda harmonik, biharmonik, *f*-harmonik ve *f*-biharmonik dönüşümlerin tanımları verilecektir.

Tanım 2.3.1: (M,g) ve $(N,\tilde{g})$ iki Riemann manifoldu ve $\psi:(M,g)\to(N,\tilde{g})$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $\Omega\subset M$ bir kompakt küme olmak üzere, ψ *nin enerji fonksiyoneli*

$$E(\psi)=\frac{1}{2}\int_{\Omega}|d\psi|^2\,\upsilon_g$$

ile tanımlanır. Burada υ_g, M üzerinde kanonik hacim formdur. Eğer ψ, $E(\psi)$ enerji fonksiyonelinin bir kritik noktası ise, ψ *harmoniktir* denir [1].

Tanım 2.3.2: (M,g) ve $(N,\tilde{g})$ iki Riemann manifoldu ve $\psi:(M,g)\to(N,\tilde{g})$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. $\Omega\subset M$ bir kompakt küme olmak üzere, eğer ψ

$$E_2(\psi)=\frac{1}{2}\int_{\Omega}|\tau(\psi)|^2\,\upsilon_g$$

ile tanımlı *bienerji fonksiyonelinin* bir kritik noktası ise, *biharmonik dönüşüm* adını alır.

Burada $\tau(\psi)$, ψ nin

$$\tau(\psi)=iz\nabla d\psi \tag{2.10}$$

ile tanımlanan *gerilim alanıdır*. $E_2(\psi)$ bienerji fonksiyonelinin *Euler-Lagrange denklemi*,

$$\tau_2(\psi)=-\Delta\tau(\psi)-izR^N(d\psi,\tau(\psi))d\psi=0 \tag{2.11}$$

biharmonik dönüşüm denklemini verir ve $\tau_2(\psi)$ *ikinci gerilim alanı* olarak adlandırılır [3].

Her harmonik dönüşümün biharmonik dönüşüm olduğu açıktır. Eğer dönüşüm harmonik olmayan biharmonik bir dönüşüm ise, bu dönüşüme *has biharmonik dönüşüm* denir [3].

Tanım 2.3.3: (M,g) ve $(N,\tilde{g})$ iki Riemann manifoldu ve $\psi:(M,g)\to(N,\tilde{g})$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. $f\in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ ve $\Omega\subset M$ bir kompakt küme olmak üzere, eğer ψ

$$E_f(\psi)=\frac{1}{2}\int_{\Omega} f\,|d\psi|^2\,\upsilon_g \tag{2.12}$$

ile tanımlı *f-enerji fonksiyonelinin* bir kritik noktası ise, *f-harmonik dönüşüm* adını alır. $E_f(\psi)$ *f*-enerji fonksiyonelinin *Euler-Lagrange denklemi*,

$$\tau_f(\psi)=f\,\tau(\psi)+d\psi(gradf)=0 \tag{2.13}$$

f-harmonik dönüşüm denklemini verir ve $\tau_f(\psi)$ *f-gerilim alanı* olarak adlandırılır [5], [24].

Tanım 2.3.4: (M,g) ve $(N,\tilde{g})$ iki Riemann manifoldu ve $\psi:(M,g)\to(N,\tilde{g})$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. Böylece $\Omega\subset M$ bir kompakt küme olmak üzere, bu küme üzerinde tanımlı bir ψ fonksiyonu

$$E_{2,f}(\psi)=\frac{1}{2}\int_{\Omega} f\,|\tau(\psi)|^2\,\upsilon_g \tag{2.14}$$

biçiminde *f-bienerji fonksiyonelinin* bir kritik noktası ise, ψ *f-biharmonik dönüşüm* adını alır. $E_{2,f}(\psi)$ *f*-bienerji fonksiyonelinin *Euler-Lagrange denklemi*,

$$\tau_{2,f}(\psi)=f\,\tau_2(\psi)+(\Delta f)\,\tau(\psi)+2\nabla^{\varphi}_{gradf}\tau(\psi)=0 \tag{2.15}$$

f-biharmonik dönüşüm denklemini verir ve $\tau_{2,f}(\psi)$ *f-ikinci gerilim alanı* olarak adlandırılır [6].

Eğer dönüşüm harmonik ve biharmonik olmayan *f*-biharmonik bir dönüşüm ise, bu dönüşüme *has f-biharmonik dönüşüm* denir [6]. Eğer *f* sabit bir fonksiyon ise *f*-biharmonik dönüşüm biharmonik dönüşüme dönüşür.

3. ÇARPIM UZAYLARININ *f*-BİHARMONİK ALTMANİFOLDLARI

[8] nolu kaynakta, J. Roth, iki reel uzay formun çarpım manifoldunun biharmonik altmanifoldlarını araştırmış ve bu tip altmanifoldların biharmonik olmaları için gerek ve yeter şartları elde etmiştir.

Bu bölümde çarpım manifoldlarının *f*-biharmonik altmanifoldları ele alınacaktır. İki reel uzay formun çarpım manifoldunun bir altmanifoldunun *f*-biharmonik olması için gerek ve yeter şartlar elde edilecektir. Elde edilen sonuçlar J. Roth'un sonuçlarının bir genellemesi olup orijinaldir.

Tanım 3.1: M m -boyutlu bir Riemann manifoldu ve $M^{n_1}(c_1)\times M^{n_2}(c_2)$ n_1+n_2- boyutlu Riemann çarpım uzayı olsun. $\psi : M \to M^{n_1}(c_1)\times M^{n_2}(c_2)$ bir izometrik immersiyon olmak üzere, $\tilde{\nabla}$ ve F sırasıyla $(M^{n_1}(c_1)\times M^{n_2}(c_2),\tilde{g})$ çarpım uzayının Levi-Civita koneksiyonu ve çarpım yapısıdır. Her $X_j \in TM^{n_j}(c_j)$ için

$$X = X_1 + X_2$$

olmak üzere, F çarpım yapısı, $F : TM^{n_1}(c_1)\times TM^{n_2}(c_2) \to TM^{n_1}(c_1)\times TM^{n_2}(c_2)$ olacak şekilde

$$F(X_1 + X_2) = X_1 - X_2$$

tanımlı $(1,1)$ tipinde bir tensör alanıdır [25]. Çarpım yapısı aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$$F^2 = I \ (F \neq I),$$

$$\tilde{g}(FX,Y) = \tilde{g}(X,FY),$$

$$\tilde{\nabla}F = 0.$$

Önerme 3.2: $(M^{n_1}(c_1)\times M^{n_2}(c_2),\tilde{g})$ çarpım uzayı olsun. $M^{n_1}(c_1)\times M^{n_2}(c_2)$ çarpım uzayı üzerinde her X,Y,Z vektör alanları için, $M^{n_1}(c_1)\times M^{n_2}(c_2)$ nin eğrilik tensor alanı,

$$\tilde{R}(X,Y)Z = a\left[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y + g(FY,Z)FX - g(FX,Z)FY\right]$$

$$+b\left[g(Y,Z)FX - g(X,Z)FY + g(Y,FZ)X - g(X,FZ)Y\right] \quad (3.1)$$

biçimindedir. Burada $a=\dfrac{c_1+c_2}{4}$ ve $b=\dfrac{c_1-c_2}{4}$ dir [25].

Tanım 3.3: $M^m \subset M^{n_1}(c_1)\times M^{n_2}(c_2)$ çarpım uzayı için $X\in T_pM$ ve $\xi\in T_p{}^{\perp}M$ olsun. FX ve $F\xi$ tanjant ve normal kısımlarına ayrılırsa

$$FX = kX + hX \text{ ve } F\xi = s\xi + t\xi \quad (3.2)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $k:T_pM\to T_pM$, $h:T_pM\to T_p{}^{\perp}M$, $s:T_p{}^{\perp}M\to T_pM$ ve $t:T_p{}^{\perp}M\to T_p{}^{\perp}M$ $(1,1)$ tipinde tensör alanlarıdır [17].

Sonuç 3.4: k ve t simetriktir ve aşağıdaki özellikleri sağlarlar:

$$k^2X = X - shX, \quad (3.3)$$

$$t^2\xi = \xi - hs\xi, \quad (3.4)$$

$$ks\xi + st\xi = 0, \quad (3.5)$$

$$hkX + thX = 0, \quad (3.6)$$

$$\tilde{g}(hX,\xi) = \tilde{g}(X,s\xi) \quad (3.7)$$

[17].

İlk olarak aşağıdaki teoremi ifade ve ispat edelim:

Teorem 3.5: M m-boyutlu bir Riemann manifoldu, $M^{n_1}(c_1)\times M^{n_2}(c_2)$ de n_1+n_2-boyutlu bir Riemann çarpım uzayı ve $N=M^{n_1}(c_1)\times M^{n_2}(c_2)$ olmak üzere $\psi:M\to N$ bir izometrik immersiyon olsun. Bu takdirde M altmanifoldunun *f*-biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\Delta^{\perp}H+izB(.,A_H(.))-\frac{\Delta f}{f}H-2\nabla^{\perp}_{grad\ln f}H=a[mH-hsH+iz(k)tH]+b[mtH+iz(k)H]$$

ve

$$\frac{m}{2}grad\left\|H\right\|^2+2iz(A_{\nabla^{\perp}H}(.))+2A_H grad\ln f=a[-ksH+iz(k)sH]+b[m-1]sH$$

denklemlerinin sağlanmasıdır.

İspat: $\{e_i\}$, $1\le i\le m$ $\chi(M)$ nin lokal geodezik ortonormal çatı alanı olmak üzere, (2.10) denkleminden faydalanılarak

$$\tau(\psi)=iz\nabla d\psi=\sum_{i=1}^{m}\left\{\nabla^{\psi}_{e_i}d\psi(e_i)-d\psi(\nabla_{e_i}e_i)\right\} \tag{3.8}$$

denklemi elde edilir. Böylece

$$B(e_i,e_i)=\nabla^{\psi}_{e_i}d\psi(e_i)-d\psi(\nabla_{e_i}e_i) \tag{3.9}$$

olduğundan (3.9) eşitliği (3.8) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\tau(\psi)=\sum_{i=1}^{m}B(e_i,e_i)=mH \tag{3.10}$$

denklemi elde edilir. Benzer şekilde (2.11) denkleminden,

$$\tau_2(\psi)=-\Delta\tau(\psi)-izR^N(d\psi,\tau(\psi))d\psi$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\left\{\nabla^{\psi}_{e_i}\nabla^{\psi}_{e_i}-\nabla^{\psi}_{\nabla_{e_i}e_i}\right\}\tau(\psi)-\sum_{i=1}^{m}R^N(d\psi(e_i),\tau(\psi))d\psi(e_i)$$

$$=-m\left\{\Delta H+\sum_{i=1}^{m}R^N(d\varphi(e_i),H)d\varphi(e_i)\right\} \tag{3.11}$$

bulunur. (3.1) denkleminden yararlanılarak,

$$\sum_{i=1}^{m} R^N(d\psi(e_i),H)d\psi(e_i)=\sum_{i=1}^{m}\{a[g(H,d\psi(e_i))d\psi(e_i)-g(d\psi(e_i),d\psi(e_i))H$$

$$+g(FH,d\psi(e_i))Fd\psi(e_i)-g(Fd\psi(e_i),d\psi(e_i))FH]$$

$$+b[g(H,d\psi(e_i))Fd\psi(e_i)-g(d\psi(e_i),d\psi(e_i))FH$$

$$+g(H,Fd\psi(e_i))d\psi(e_i)-g(d\psi(e_i),Fd\psi(e_i))H]\}$$

denklemi yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılır ise

$$\sum_{i=1}^{m} R^N(d\psi(e_i),H)d\psi(e_i)=a[-mH+F(FH)^T-iz(k)FH]$$
$$+b[-mFH+(FH)^T-iz(k)H]$$

elde edilir. Ayrıca, F çarpım yapısı tanjant ve normal bileşenlerine ayrılır ise

$$\sum_{i=1}^{m} R^N(d\psi(e_i),H)d\psi(e_i)=a[-mH+ksH+hsH-iz(k)sH-iz(k)tH]$$

$$+b[-msH-mtH+sH-iz(k)H] \tag{3.12}$$

denklemi bulunur. Diğer taraftan Gauss formülü ve Weingarten denklemi kullanılarak,

$$\Delta H=-\sum_{i=1}^{m}\nabla^{\psi}_{e_i}\nabla^{\psi}_{e_i}H=-\sum_{i=1}^{m}\left\{\nabla^{\psi}_{e_i}\left(-A_H(e_i)+\nabla^{\perp}_{e_i}H\right)\right\}$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\nabla_{e_i}A_H(e_i)+\sum_{i=1}^{m}B(e_i,A_H(e_i))+\sum_{i=1}^{m}A_{\nabla^{\perp}_{e_i}}e_i+\Delta^{\perp}H$$

$$=iz(\nabla_{.}A_H(.))+izB(.,A_H.)+iz(A_{\nabla^{\perp}_{.}H}.)+\Delta^{\perp}H \tag{3.13}$$

elde edilir. Şimdi (3.13) denkleminde yer alan $iz(\nabla_{.}A_H(.))$ terimini hesaplayalım. Böylece

$$iz(\nabla_{.}A_H(.))=\sum_{i=1}^{m}\nabla_{e_i}A_H(e_i)=\sum_{i,j}g(\nabla_{e_i}A_H(e_i),e_j)e_j$$

$$=\sum_{i,j}e_ig(A_H(e_i),e_j)e_j=\sum_{i,j}e_ig(B(e_i,e_j),H)e_j$$

$$= \sum_{i,j} \left\{ g(\nabla^{\psi}_{e_i} \nabla^{\psi}_{e_j} e_i, H) e_j + g(\nabla^{\psi}_{e_j} e_i, \nabla^{\psi}_{e_i} H) e_j \right\}$$

$$= \sum_{i,j} \left\{ g(\nabla^{\psi}_{e_i} \nabla^{\psi}_{e_j} e_i, H) e_j + g(B(e_i, e_j), \nabla^{\perp}_{e_i} H) e_j \right\}$$

$$= \sum_{i,j} g(\nabla^{\psi}_{e_i} \nabla^{\psi}_{e_j} e_i, H) e_j + \sum_{i,j} A_{\nabla^{\perp}_{e_i} H}(e_i) \tag{3.14}$$

denklemi bulunur. $N = M^{n_1}(c_1) \times M^{n_2}(c_2)$ çarpım manifoldunun eğrilik tensörünün (3.1) açılımı kullanılarak,

$$\sum_{i,j} g(\nabla^{\psi}_{e_i} \nabla^{\psi}_{e_j} e_i, H) e_j = \sum_{i,j} g(R^N(e_i, e_j) e_i + \nabla^{\psi}_{e_j} \nabla^{\psi}_{e_i} e_i + \nabla^{\psi}_{[e_i, e_j]} e_i, H)$$

$$= mg(\nabla_{e_j} H, H)$$

$$= \frac{m}{2} grad \left\| H \right\|^2 \tag{3.15}$$

sonucuna ulaşılır. İlk olarak (3.15) eşitliği (3.14) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\sum_{i=1}^{m} \nabla_{e_i} A_H(e_i) = \frac{m}{2} grad \left\| H \right\|^2 + \sum_{i,j} A_{\nabla^{\perp}_{e_i} H}(e_i) \tag{3.16}$$

elde edilir. Daha sonra (3.16) eşitliği (3.13) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\Delta H = \frac{m}{2} grad \left\| H \right\|^2 + iz(B(.,A_H(.))) + 2iz(A_{\nabla^{\perp}_{.}}.) + \Delta^{\perp} H \tag{3.17}$$

bulunur. (3.12) ve (3.17) eşitlikleri (3.11) denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$\tau_2(\psi) = -m\{\frac{m}{2} grad \left\| H \right\|^2 + iz(B(.,A_H(.))) + 2iz(A_{\nabla^{\perp}_{.}}.) + \Delta^{\perp} H$$

$$+a[-mH + ksH + hsH - iz(k)sH - iz(k)tH]$$

$$+b[-msH - mtH + sH - iz(k)H]\} \tag{3.18}$$

elde edilir.

Weingarten denklemi ve (3.10) denkleminden faydalanılarak,

$$\nabla^{\psi}_{gradf}\tau(\psi)=\nabla^{\psi}_{gradf}mH$$

$$=m(-A_H gradf+\nabla^{\perp}_{gradf}H) \qquad (3.19)$$

denklemi hesaplanır. Son olarak (3.10), (3.18) ve (3.19) eşitlikleri (2.15) denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$-fm\{\frac{m}{2}grad\|H\|^2+iz(B(.,A_H(.)))+2iz(A_{\nabla^{\perp}_{.}}.)+\Delta^{\perp}H$$

$$+a[-mH+ksH+hsH-iz(k)sH-iz(k)tH]$$

$$+b[-msH-mtH+sH-iz(k)H]$$

$$-\frac{\Delta f}{f}H+2A_H grad\ln f-2\nabla^{\perp}_{grad\ln f}H\}=0$$

denklemi bulunur. Son denklem tanjant ve normal kısımlarına ayrıldığında istenilen sonuç elde edilir. ■

Sonuç 3.6: M, $M^{n_1}(c_1)\times M^{n_2}(c_2)$ Riemann çarpım uzayının $m-$boyutlu bir altmanifoldu olmak üzere,

(1) FH, M de tanjant ise, M altmanifoldunun *f*-biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\Delta^{\perp}H+izB(.,A_H(.))-\frac{\Delta f}{f}H-2\nabla^{\perp}_{grad\ln f}H-[a(m-1)+b(iz(k))]H=0 \qquad (3.20)$$

ve

$$\frac{m}{2}grad\|H\|^2+2iz(A_{\nabla^{\perp}H}(.))+2A_H grad\ln f-[aiz(k)+b(m-1)]FH=0 \quad (3.21)$$

denklemlerinin sağlanmasıdır.

(2) FH , M de normal ise, M altmanifoldunun f-biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\Delta^{\perp}H+izB(.,A_{H}(.))-\frac{\Delta f}{f}H-2\nabla^{\perp}_{grad\ln f}H-[am+b(iz(k))]H-[bm+a(iz(k))]FH=0$$

ve

$$\frac{m}{2}grad\left\|H\right\|^{2}+2iz(A_{\nabla^{\perp}H}(.))+2A_{H}grad\ln f=0$$

denklemlerinin sağlanmasıdır.

İspat: (1) Eğer FH tanjant seçilirse, (3.2) denklemleri kullanılarak,

$$FH=sH \tag{3.22}$$

ve

$$tH=0 \tag{3.23}$$

elde edilir. Ayrıca (3.4) denkleminden,

$$hsH=H \tag{3.24}$$

bulunur. (3.22), (3.23) ve (3.24) denklemleri Teorem 3.5 de yerlerine yazılırsa istenilen sonuçlar elde edilir.

(2) Eğer FH normal seçilirse, (3.2) denklemlerini kullanılarak

$$sH=0 \tag{3.25}$$

ve

$$FH=tH \tag{3.26}$$

denklemleri elde edilir. (3.25) ve (3.26) denklemleri Teorem 3.5 de yerine yazılırsa sonuçlar bulunur. ■

Yukarıdaki teoremden faydalanılarak yarıçapı r olan iki kürenin çarpım manifoldunun bir altmanifoldu için aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 3.7: M, $\mathbb{S}^p(r)\times\mathbb{S}^{n-p}(r)$ çarpım manifoldunun $m\geq 2$ boyutlu ve sıfırdan farklı sabit ortalama eğrilikli altmanifoldu olsun. Eğer, FH M de tanjant ise aşağıdaki durumlar sağlanır:

(1) Eğer, M bir has *f*-biharmonik altmanifold ise

$$0< \|H\|^2 \leq \inf\left(\frac{\frac{1}{2r^2}(m-1)+\frac{\Delta f}{f}}{m}\right)$$

dır.

(2) f Laplas dönüşümü Δ nın μ reel özdeğerine karşılık gelen bir özfonksiyonu olmak üzere M nin bir has *f*-biharmonik altmanifold olması için gerek ve yeter şart M altmanifoldunun yarı-umbilik olması ve

$$\nabla^{\perp}H=0,$$

$$2A_H\, grad\ln f-\frac{1}{2r^2}iz(k)FH=0,$$

$$izB(.,A_H(.))=\left[\frac{1}{2r^2}(m-1)+\mu\right]H$$

denklemlerinin sağlanmasıdır.

İspat: Öncelikle r yarıçaplı küreler için (3.1) deki eğrilik tensöründe yeralan a ve b katsayılarını hesaplayalım:

(3.1) gereği,

$$a=\frac{c_1+c_2}{4}=\frac{\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^2}}{4}=\frac{1}{2r^2} \tag{3.27}$$

ve

$$b=\frac{c_1-c_2}{4}=\frac{\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r^2}}{4}=0 \tag{3.28}$$

eşitlikleri bulunur.

M , $\mathbb{S}^p(r)\times\mathbb{S}^{n-p}(r)$ çarpım manifoldunun sıfırdan farklı sabit ortalama eğrilikli altmanifoldu olsun ve FH M ye tanjant olacak şekilde seçilsin.

(3.22), (3.23), (3.24) denklemleri ve benzer şekilde (3.27) ve (3.28) denklemleri (3.20) de yerlerine yazılırlarsa,

$$\Delta^{\perp}H + izB(.,A_H(.)) - \frac{\Delta f}{f}H - 2\nabla^{\perp}_{grad\ln f}H - \frac{1}{2r^2}(m-1)H = 0 \tag{3.29}$$

denklemi elde edilir. (3.29) denkleminin H ile iç çarpımı alınırsa,

$$g(\Delta^{\perp}H,H) + g(izB(.,A_H(.)),H) - \frac{\Delta f}{f}g(H,H)$$

$$-2g(\nabla^{\perp}_{grad\ln f}H,H) - \frac{1}{2r^2}(m-1)g(H,H) = 0 \tag{3.30}$$

denklemi bulunur. Ayrıca $\|H\|$ nın sabit olması ve Weingarten denklemi kullanılarak,

$$g(izB(.,A_H(.)),H) = \sum_{i=1}^{m} g(B(e_i,A_H(e_i)),H)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} g(A_H(e_i),A_H(e_i)) = \|A_H\|^2 \tag{3.31}$$

ve

$$g(\nabla^{\perp}_{grad\ln f}H,H) = 0 \tag{3.32}$$

denklemlerine ulaşılır. (3.31) ve (3.32) eşitlikleri (3.30) denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$g(\Delta^{\perp}H,H) = \frac{\Delta f}{f}\|H\|^2 - \|A_H\|^2 + \frac{1}{2r^2}(m-1)\|H\|^2 \tag{3.33}$$

elde edilir. Ayrıca (3.33) denkleminden

$$\|\nabla^{\perp}H\|^2 + \|A_H\|^2 = \left[\frac{\Delta f}{f} + \frac{1}{2r^2}(m-1)\right]\|H\|^2 \tag{3.34}$$

dır [8]. Diğer taraftan Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılarak,

$$\|A_H\|^2 \geq m\|H\|^4 \tag{3.35}$$

elde edilir. Böylece (3.35) eşitsizliği (3.34) denkleminde yerine yazılır ise,

$$\left[\frac{\Delta f}{f}+\frac{1}{2r^2}(m-1)\right]\|H\|^2 \geq m\|H\|^4+\|\nabla^{\perp}H\|^2 \geq m\|H\|^4 \tag{3.36}$$

bulunur. Diğer taraftan $\|H\|$ sıfırdan farklı bir sabit olduğundan, (3.36) denklemi

$$0<\ \|H\|^2 \leq \inf\left(\frac{\dfrac{\Delta f}{f}+\dfrac{1}{2r^2}(m-1)}{m}\right) \tag{3.37}$$

şeklinde yazılabilir.

f Laplas dönüşümü Δ nın μ reel özdeğerine karşılık gelen bir özfonksiyonu olacak şekilde seçilirse, $\dfrac{\Delta f}{f}=\mu$ elde edilir. Böylece, (3.37) denkleminden yararlanılarak

$$\|H\|^2=\frac{\left[\mu+\dfrac{1}{2r^2}(m-1)\right]}{m} \tag{3.38}$$

yazılabilir. (3.38) eşitliği (3.36) denkleminde yerine yazılırsa

$$\nabla^{\perp}H=0 \tag{3.39}$$

elde edilir. Ek olarak, (3.39) denklemi ve $\|H\|^2=\dfrac{\left[\mu+\dfrac{1}{2r^2}(m-1)\right]}{m}$ denklemi (3.34) denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$\|A_H\|^2=\frac{\left[\mu+\dfrac{1}{2r^2}(m-1)\right]^2}{m}$$

elde edilir. Yani, M altmanifoldu yarı-umbiliktir.

Diğer taraftan, (3.21) denklemi kullanılırsa,

$$2A_H grad \ln f - \frac{1}{2r^2} iz(k)FH = 0$$

bulunur. Benzer şekilde (3.20) denklemi,

$$izB(.,A_H(.)) = \left[\mu + \frac{1}{2r^2}(m-1)\right]H$$

denklemine dönüşür. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

$\mathbb{S}^p(r)\times\mathbb{S}^{n-p}(r)$ çarpım manifoldunun hiperyüzeyleri için *f*-biharmoniklik şartı aşağıdaki önerme ile ifade edilir:

Önerme 3.8: M^{n-1}, $\mathbb{S}^p(r)\times\mathbb{S}^{n-p}(r)$ çarpım manifoldunun sıfırdan farklı sabit ortalama eğrilikli hiperyüzeyi ve FH, M^{n-1} e tanjant olsun. M^{n-1} hiperyüzeyinin *f*-biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$A_H grad \ln f = \frac{1}{4r^2} iz(k)FH \;\text{ ve }\; \|B\|^2 = \frac{(n-2)}{2r^2} + \frac{\Delta f}{f}$$

denklemlerinin sağlanmasıdır.

İspat: M^{n-1}, $\mathbb{S}^p(r)\times\mathbb{S}^{n-p}(r)$ çarpım manifoldunun sıfırdan farklı sabit ortalama eğrilikli bir hiperyüzeyi ve FH, M^{n-1} hiperyüzeyine tanjant olsun.

(3.20) denkleminden,

$$izB(.,A_H(.)) = \left[\frac{\Delta f}{f} + \frac{1}{2r^2}(n-2)\right]H$$

elde edilir. Son denklemin H ile iç çarpımı alınırsa,

$$\sum_{i=1}^{n-1} g(B(e_i, A_H(e_i)), H) = \left[\frac{\Delta f}{f} + \frac{1}{2r^2}(n-2)\right]\|H\|^2$$

bulunur.

Buradan (2.5) denklemi kullanılarak

$$\|A_H\|^2 = \left[\frac{\Delta f}{f} + \frac{1}{2r^2}(n-2)\right]\|H\|^2 \tag{3.40}$$

elde edilir. Diğer taraftan, [17] nolu kaynaktan

$$\|A_H\|^2 = \|B\|^2 \tag{3.41}$$

olduğu bilinmektedir ve M bir hiperyüzey olduğundan bir tane birim normal vektör alanı vardır. Yani,

$$\|H\|^2 = 1 \tag{3.42}$$

Böylece (3.41) ve (3.42) eşitlikleri (3.40) denkleminde yerine yazılır ise,

$$\|B\|^2 = \left[\frac{\Delta f}{f} + \frac{1}{2r^2}(n-2)\right] \tag{3.43}$$

sonucu bulunur. Benzer şekilde, (3.21) denkleminden faydalanılarak,

$$A_H \, grad \ln f = \frac{1}{4r^2} iz(k) FH$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Yukarıdaki önermeyi kullanarak *f*-biharmonik hiperyüzeyler için aşağıdaki önerme verilebilir:

Önerme 3.9: M^{n-1}, $\mathbb{S}^p(r)\times\mathbb{S}^{n-p}(r)$ çarpım manifoldunun sıfırdan farklı sabit ortalama eğrilikli has *f*-biharmonik hiperyüzeyi ve FH, M^{n-1} e tanjant olsun. M^{n-1} hiperyüzeyinin skaler eğriliği,

$$scal_{M^{n-1}} = \frac{1}{2r^2}\left\{(n-1)(n-3)-(n-2)+iz(k)^2\right\} + (n-1)^2\|H\|^2 - \frac{\Delta f}{f}$$

şeklindedir.

İspat: Gauss denkleminden faydalanılarak,

$$scal_{M^{n-1}} = \sum_{i=1}^{n-1} g(R^N(e_i, e_j)e_j, e_i) + \sum_{i=1}^{n-1} g(B(e_i, e_i), B(e_j, e_j))$$

$$-\sum_{i=1}^{n-1} g(B(e_j, e_i), B(e_j, e_i))$$

yazılabilir. Son denklemden,

$$scal_M = \sum_{i=1}^{n-1} g(R^N(e_i, e_j)e_j, e_i) + (n-1)^2 \|H\|^2 - \|B\|^2 \tag{3.44}$$

elde edilir. Ayrıca (3.1) denklemi kullanılarak,

$$\sum_{i=1}^{n-1} g(R^N(e_i, e_j)e_j, e_i) = \frac{1}{2r^2}\{\sum_{i=1}^{n-1} g(e_j, e_j)g(e_i, e_i) - \sum_{i=1}^{n-1} g(e_i, e_j)g(e_i, e_j)$$

$$+\sum_{i=1}^{n-1} g(Fe_j, e_j)g(Fe_i, e_i) - \sum_{i=1}^{n-1} g(Fe_i, e_j)g(Fe_i, e_j)\}$$

elde edilir. Son denklemde i üzerinden toplam alınırsa,

$$\sum_{i=1}^{n-1} g(R^N(e_i, e_j)e_j, e_i) = \frac{1}{2r^2}\left\{(n-1)(n-3) + iz(k)^2\right\} \tag{3.45}$$

bulunur.

Son olarak, (3.43) ve (3.45) denklemleri (3.44) denkleminde yerine yazılırsa,

$$scal_{M^{n-1}} = \frac{1}{2r^2}\left\{(n-1)(n-3) - (n-2) + iz(k)^2\right\} + (n-1)^2 \|H\|^2 - \frac{\Delta f}{f}$$

denklemi elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

4. *f*-BİMİNİMAL İMMERSİYONLAR

Bu bölümde biminimal ve *f*-biminimal immersiyon kavramları tanıtılıp; Riemann manifoldları üzerinde *f*-biminimal eğriler, *f*-biminimal hiperyüzeyler araştırılacak ve *f*-biminimal yüzey örnekleri elde edilecektir. Ayrıca, Sasakian uzay formlar üzerinde bir Legendre eğrisinin *f*-biminimal olması için gerek ve yeter şart elde edilerek bir *f*-biminimal Legendre eğri örneği verilecektir.

4.1 Biminimal İmmersiyonlar

Biminimal immersiyonlar ilk kez, E. Loubeau ve S. Montaldo tarafından [9] nolu kaynakta tanımlanmıştır ve biminimal eğriler ile hiperyüzeyler incelenmiştir.

Şimdi [9] nolu kaynakta tanımlanan biminimal immersiyon tanımını verelim:

Tanım 4.1.1: (M,g) ve $(N,\tilde{g})$ iki Riemann manifoldu ve $\psi:(M,g)\to(N,\tilde{g})$ bir immersiyon ve $\lambda\in\mathbb{R}$ bir sabit olsun. $E_2(\psi)$ bienerji fonksiyonelinin normal varyasyonları için eğer ψ,

$$E_{2,\lambda}(\psi)=E_2(\psi)+\lambda E(\psi)$$

ile tanımlı $\lambda-$ *bienerji fonksiyonelinin* bir kritik noktası ise ψ *ye biminimal immersiyon* adı verilir. $E_{2,\lambda}(\psi)$ $\lambda-$ bienerji fonksiyonelinin Euler-Lagrange denklemi kullanılarak ψ nin biminimal olması için gerek ve yeter şartın

$$\left[\tau_{2,\lambda}(\psi)\right]^{\perp}=\left[\tau_2(\psi)\right]^{\perp}-\lambda\left[\tau(\psi)\right]^{\perp}=0 \tag{4.1}$$

olması gerektiği [9] nolu kaynakta elde edilmiştir. Eğer $\lambda=0$ ise ψ *ye serbest biminimal immersiyon* adı verilir [9].

4.2 *f*- Biminimal İmmersiyonlar

Bu bölümde *f*-biminimal immersiyon tanımı verilerek, eğriler ve hiperyüzeyler için *f*-biminimallik şartları elde edilecektir.

İlk olarak aşağıdaki tanımı ifade edelim:

Tanım 4.2.1: (M,g) ve $(N,\tilde{g})$ iki Riemann manifoldu ve $\psi:(M,g)\to(N,\tilde{g})$ bir immersiyon ve $\lambda\in\mathbb{R}$ bir sabit olsun. $E_{2,f}(\psi)$ ve $E_f(\psi)$ *f*-bienerji ve *f*-enerji fonksiyonellerinin normal varyasyonları için eğer ψ

$$E_{2,\lambda,f}(\psi)=E_{2,f}(\psi)+\lambda E_f(\psi) \tag{4.2}$$

ile tanımlı $\lambda-f-$ *bienerji fonksiyonelinin* bir kritik noktası ise, ψ *f-biminimal immersiyon* adını alır.

Eğer $\lambda=0$ ise ψ *ye serbest f-biminimal immersiyon* adı verilir. Eğer dönüşüm biminimal olmayan *f*-biminimal bir dönüşüm ise, bu dönüşüme *has f-biminimal dönüşüm* denir.

Önerme 4.2.2: $\psi:(M,g)\to(N,\tilde{g})$ bir immersiyon olsun. ψ immersiyonunun *f*-biminimal olması için gerek ve yeter şart $E_{2,\lambda,f}(\psi)$ $\lambda-f-$bienerji fonksiyonelinin Euler-Lagrange denkleminin,

$$\left[\tau_{2,\lambda,f}(\psi)\right]^{\perp}=\left[\tau_{2,f}(\psi)\right]^{\perp}-\lambda\left[\tau_f(\psi)\right]^{\perp}=0 \tag{4.3}$$

olmasıdır.

İspat: $\{\psi_t\}_{t\in I}$, ψ nin bir diferensiyellenebilir varyasyonu olmak üzere $\forall t\in I,\ p\in M$ için $\Psi(t,p)=\psi_t(p)$ ve $\Psi(0,p)=\psi(p)$ denklemlerini sağlayan $\Psi:I\times M\to M$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. $V\in\Psi^{-1}(TN)$ olmak üzere,

$$V_p=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\psi_t(p)=d\Psi_{(0,p)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right),\quad \forall p\in M$$

denklemleri ile verilsin [6].

(4.2) denkleminden faydalanılarak,

$$\frac{d}{dt}E_{2,\lambda,f}(\psi_t)\Big|_{t=0}=\frac{d}{dt}E_{2,f}(\psi_t)\Big|_{t=0}+\lambda\frac{d}{dt}E_f(\psi_t)\Big|_{t=0} \tag{4.4}$$

denklemi elde edilir. [6] nolu kaynaktan,

$$\frac{d}{dt}E_{2,f}(\psi_t)\Big|_{t=0}=\int_\Omega\left\langle f\left\{iz\left(\nabla_{e_i}^{\psi}\nabla_{e_i}^{\psi}-\nabla_{\nabla_{e_i}e_i}^{\psi}\right)\tau(\psi)\right\}+(\Delta f)\tau(\psi),V\right\rangle\upsilon_g$$

$$+\int_\Omega\left\langle +2\nabla_{gradf}^{\psi}\tau(\psi)-f\left\{izR^N\left(\tau(\psi),d\psi(e_i)\right)d\psi(e_i)\right\},V\right\rangle\upsilon_g \tag{4.5}$$

denklemi yazılabilir. Benzer şekilde, [5] ve [24] nolu kaynaklarda,

$$\frac{d}{dt}E_f(\psi_t)\Big|_{t=0}=-\int_\Omega\left\langle f\left\{iz\left(\nabla_{e_i}^{\psi}d\psi(e_i)-d\psi\left(\nabla_{e_i}e_i\right)\right)\right\}+d\psi(gradf),V\right\rangle\upsilon_g \tag{4.6}$$

denklemi elde edilmiştir. Son olarak, (4.5) ve (4.6) denklemleri (4.4) denkleminde yerlerine yazılır ve *f*-biminimal immersiyon tanımı kullanılırsa (4.3) denklemi elde edilir. ■

Böylece aşağıdaki önerme ifade edilebilir:

Önerme 4.2.3: M, $n\geq 2$ boyutlu, bir Riemann manifoldu ve $\gamma: I\subset\mathbb{R}\to(M^n,g)$ bir eğri olsun. γ eğrisinin Frenet çatısı $\{E_i\}_{i=1,2...n}$ ve $\lambda\in\mathbb{R}$ olmak üzere, γ eğrisinin *f*-biminimal olması için gerek ve yeter şart

$$f\left\{\kappa_1''-\kappa_1^3-\kappa_1\kappa_2^2-\kappa_1 g(R(E_1,E_2)E_1,E_2)\right\}+(f''-\lambda f)\kappa_1+2f'\kappa_1'=0,$$

$$f\left\{\kappa_1'\kappa_2+(\kappa_1\kappa_2)'-\kappa_1 g(R(E_1,E_2)E_1,E_3)\right\}+2f'\kappa_1\kappa_2=0,$$

$$f\left\{\kappa_1\kappa_2\kappa_3-\kappa_1 g(R(E_1,E_2)E_1,E_4)\right\}=0,$$

$$f\kappa_1 g(R(E_1,E_2)E_1,E_j)=0,\quad 5\leq j\leq n$$

denklemlerinin sağlanmasıdır.

İspat: Frenet çatı tanımı kullanılarak, γ eğrisinin gerilim alanı,

$$\tau(\gamma) = iz\nabla d\gamma = \nabla^{\gamma}_{\frac{\partial}{\partial t}}(d\gamma(\frac{\partial}{\partial t})) - d\gamma(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\frac{\partial}{\partial t}) = \nabla^{\gamma}_{\frac{\partial}{\partial t}}E_1 = \kappa_1 E_2 \tag{4.7}$$

bulunur. Ayrıca γ eğrisinin ikinci gerilim alanı, (4.7) denklemi yardımı ile

$$\tau_2(\gamma) = \left\{\nabla^{\gamma}_{\frac{\partial}{\partial t}}\nabla^{\gamma}_{\frac{\partial}{\partial t}} - \nabla^{\gamma}_{\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\frac{\partial}{\partial t}}\right\}\tau(\gamma) - R^{\gamma}(d\gamma(\frac{\partial}{\partial t}),\tau(\gamma))d\gamma(\frac{\partial}{\partial t})$$

$$= \nabla^{\gamma}_{\frac{\partial}{\partial t}}\nabla^{\gamma}_{\frac{\partial}{\partial t}}\tau(\gamma) - R^{\gamma}(d\gamma(\frac{\partial}{\partial t}),\tau(\gamma))d\gamma(\frac{\partial}{\partial t})$$

$$= \nabla^{\gamma}_{\frac{\partial}{\partial t}}\nabla^{\gamma}_{\frac{\partial}{\partial t}}\kappa_1 E_2 - R^{\gamma}(E_1,\kappa_1 E_2)E_1$$

$$= \nabla^{\gamma}_{\frac{\partial}{\partial t}}[\kappa_1{}' E_2 + \kappa_1 E_2{}'] - \kappa_1 R^{\gamma}(E_1,E_2)E_1$$

$$= \nabla^{\gamma}_{\frac{\partial}{\partial t}}[\kappa_1{}' E_2 - \kappa_1{}^2 E_1 + \kappa_1\kappa_2 E_3] - \kappa_1 R^{\gamma}(E_1,E_2)E_1$$

$$= (-3\kappa_1\kappa_1{}')E_1 + (\kappa_1{}'' - \kappa_1{}^3 - \kappa_1\kappa_2{}^2)E_2 + (2\kappa_1{}'\kappa_2 + \kappa_1\kappa_2{}')E_3$$

$$+(\kappa_1\kappa_2\kappa_3)E_4 - \kappa_1 R^{\gamma}(E_1,E_2)E_1 \tag{4.8}$$

elde edilir. Benzer şekilde γ eğrisinin *f*-gerilim alanı, (4.7) denklemi kullanılarak

$$\tau_f(\gamma) = f\tau(\gamma) + d\gamma(gradf)$$

$$= f(\kappa_1 E_2) + f{}' E_1 \tag{4.9}$$

bulunur. Diğer taraftan,

$$\nabla^{\gamma}_{gradf}\tau(\gamma) = f{}'\nabla^{\gamma}_{\frac{\partial}{\partial t}}\nabla^{\gamma}_{\frac{\partial}{\partial t}}d\gamma(\frac{\partial}{\partial t})$$

$$= f{}'\nabla^{\gamma}_{\frac{\partial}{\partial t}}\nabla^{\gamma}_{\frac{\partial}{\partial t}}E_1$$

$$= f{}'(-\kappa_1{}^2 E_1 + \kappa_1{}' E_2 + \kappa_1\kappa_2 E_3) \tag{4.10}$$

denklemi bulunur. (4.7), (4.8) ve (4.10) denklemleri (2.15) denkleminde yerlerine yazılır ise

$$\tau_{2,f}(\gamma) = f\{(-3\kappa_1\kappa_1')E_1 + (\kappa_1'' - \kappa_1^3 - \kappa_1\kappa_2^2)E_2 + (2\kappa_1'\kappa_2 + \kappa_1\kappa_2')E_3$$

$$+(\kappa_1\kappa_2\kappa_3)E_4 - \kappa_1 R^\gamma(E_1, E_2)E_1\} + f''(\kappa_1 E_2)$$

$$+2f'\{-\kappa_1^2 E_1 + \kappa_1' E_2 + \kappa_1\kappa_2 E_3\} \qquad (4.11)$$

sonucuna ulaşılır. Elde edilen (4.9) ve (4.11) denklemleri (4.3) denkleminde yerlerine yazılır ise,

$$\left[\tau_{2,\lambda,f}(\gamma)\right]^\perp = f\{(\kappa_1'' - \kappa_1^3 - \kappa_1\kappa_2^2)E_2 + (2\kappa_1'\kappa_2 + \kappa_1\kappa_2')E_3$$

$$+(\kappa_1\kappa_2\kappa_3)E_4 - \kappa_1 R^\gamma(E_1, E_2)E_1\} + f''(\kappa_1 E_2)$$

$$+2f'\{\kappa_1' E_2 + \kappa_1\kappa_2 E_3\} - \lambda f(\kappa_1 E_2)$$

bulunur. (4.3) denklemi gereği, son denklem

$$f\{(\kappa_1'' - \kappa_1^3 - \kappa_1\kappa_2^2)E_2 + (2\kappa_1'\kappa_2 + \kappa_1\kappa_2')E_3 + (\kappa_1\kappa_2\kappa_3)E_4 - \kappa_1 R^\gamma(E_1, E_2)E_1\}$$

$$+ f''(\kappa_1 E_2) + 2f'\{\kappa_1' E_2 + \kappa_1\kappa_2 E_3\} - \lambda f(\kappa_1 E_2) = 0 \qquad (4.12)$$

haline dönüşür.

Son denklemin sırasıyla E_2, E_3, E_4 ve E_j, $5 \le j \le n$ ile iç çarpımı alınırsa teoremin ifadesindeki denklemler elde edilir. ■

Eğer γ bir yüzey ya da sabit kesitsel eğrilikli bir 3-boyutlu Riemann manifoldu üzerinde bir eğri ise aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

Sonuç 4.2.4: (1) γ, G Gauss eğrilikli bir yüzey üzerinde bir eğri olsun. γ eğrisinin *f*-biminimal olması için gerek ve yeter şart κ eğriliğinin,

$$f\left(\kappa'' - \kappa^3 + \kappa G\right) + (f'' - \lambda f)\kappa + 2f'\kappa' = 0$$

diferensiyel denklemini sağlamasıdır.

(2) $M^3(c)$, c sabit kesitsel eğrilikli, 3-boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to (M^3(c), g)$ bir eğri olsun. γ eğrisinin *f*-biminimal olması için gerek ve yeter şart γ eğrisinin eğrilik ve torsiyonu olan κ ve τ nun

$$f\left\{\kappa'' - \kappa^3 - \kappa\tau^2 + \kappa c\right\} + (f'' - \lambda f)\kappa + 2f'\kappa' = 0$$

$$f\left\{\kappa'\tau + (\kappa\tau)'\right\} + 2f'\kappa\tau = 0$$

diferensiyel denklem sistemini sağlamasıdır.

İspat: (1) γ bir yüzey üzerinde eğri olduğu için

$$E_3 = 0 \tag{4.13}$$

dır. (4.13), $\kappa_1 = \kappa$ ve $\kappa_2 = \tau$ eşitlikleri ve Önerme 4.2.3 yardımı ile γ eğrisinin *f*-biminimallik şartı

$$f\left\{\kappa'' - \kappa^3 - \kappa\tau^2 - \kappa g(R(T,N)T,N)\right\} + (f'' - \lambda f)\kappa + 2f'\kappa' = 0 \tag{4.14}$$

denklemi ile verilir. Diğer taraftan γ, G Gauss eğrilikli bir yüzey üzerinde bir eğri olduğundan,

$$g(R(T,N)T,N) = -G$$

yazılabilir. Son eşitlik ve $\kappa_2 = \tau = 0$, (4.14) denkleminde yerine yazılır ise

$$f\left(\kappa'' - \kappa^3 + \kappa G\right) + (f'' - \lambda f)\kappa + 2f'\kappa' = 0$$

sonucuna ulaşılır.

(2) $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to (M^3(c), g)$ olduğundan γ eğrisinin Frenet çatısı $\{E_1 = T, E_2 = N, E_3 = B\}$ şeklindedir. Böylece Önerme 4.2.3 kullanılarak, γ eğrisinin *f*-biminimallik şartları olan

$$f\left\{\kappa'' - \kappa^3 - \kappa\tau^2 - \kappa g(R(T,N)T,N)\right\} + (f'' - \lambda f)\kappa + 2f'\kappa' = 0 \qquad (4.15)$$

ve

$$f\left\{\kappa'\tau + (\kappa\tau)' - \kappa g(R(T,N)T,B)\right\} + 2f'\kappa\tau = 0 \qquad (4.16)$$

denklemlerine ulaşılır.

Diğer taraftan $M^3(c)$ c sabit kesitsel eğrilikli 3-boyutlu bir Riemann manifoldu olduğundan,

$$g(R(T,N)T,N) = -c$$

ve

$$g(R(T,N)T,B) = 0$$

denklemleri yazılabilir. Son iki eşitlik (4.15) ve (4.16) denklemlerinde yerlerine yazılır ise istenilen sonuçlar elde edilir. ■

Şimdi $\psi : M^n \to N^{n+1}$ bir izometrik immersiyon olsun. B, υ ve $\eta = H\upsilon$ sırasıyla ψ dönüşümünün ikinci temel formu, birim normal vektör alanı ve ortalama eğrilik vektör alanlarını göstersinler. Böylece aşağıdaki önermeyi verebiliriz:

Önerme 4.2.5: $\psi : M^n \to N^{n+1}$ bir izometrik immersiyon olmak üzere M^n, N^{n+1} de bir hiperyüzey olsun. ψ ' nin *f*-biminimal olması için gerek ve yeter şart

$$\Delta H = H\,\|B\|^2 - HRic(\upsilon,\upsilon) - \frac{\Delta f}{f}H + \lambda H - 2grad\ln f\left(H\right)$$

denkleminin sağlanmasıdır.

İspat: $\{e_i\}$, $1 \le i \le n$ $\chi\left(M\right)$ üzerinde bir lokal geodezik ortonormal çatı alanı olmak üzere, (2.10) denkleminden faydalanılarak,

$$\tau(\psi) = iz\nabla d\psi = \sum_{i=1}^{n}\left\{\nabla_{e_i}^{\psi} d\psi(e_i) - d\psi(\nabla_{e_i} e_i)\right\} = n\eta = nH\upsilon \qquad (4.17)$$

denklemi yazılabilir. (4.17) denkleminin υ ile iç çarpımı alınırsa,

$$\left[\tau(\psi)\right]^{\perp} = nH \tag{4.18}$$

sonucu bulunur.

Benzer şekilde (2.11) denkleminden faydalanılarak

$$\tau_2(\psi) = -\Delta\tau(\psi) - izR^N(d\psi, \tau(\psi))d\psi$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left\{\nabla^{\psi}_{e_i}\nabla^{\psi}_{e_i} - \nabla^{\psi}_{\nabla_{e_i}e_i}\right\}(nH\upsilon) - \sum_{i=1}^{n} R^N(d\psi(e_i), nH\upsilon)d\psi(e_i)$$

$$= n\left\{\sum_{i=1}^{n}\left\{\nabla^{\psi}_{e_i}\nabla^{\psi}_{e_i}(H\upsilon) - \nabla^{\psi}_{\nabla_{e_i}e_i}(H\upsilon)\right\} - H\sum_{i=1}^{n} R^N(d\psi(e_i),\upsilon)d\psi(e_i)\right\}$$

$$= n\sum_{i=1}^{n}\left\{\nabla^{\psi}_{e_i}(e_i[H]\upsilon + H\nabla^{\psi}_{e_i}\upsilon) - (\nabla_{e_i}e_i H)\upsilon - H\nabla^{\psi}_{\nabla_{e_i}e_i}\upsilon\right\}$$

$$-nH\sum_{i=1}^{n} R^N(d\psi(e_i),\upsilon)d\psi(e_i)$$

$$= n\sum_{i=1}^{n}\left\{(e_i(e_i[H])\upsilon + 2e_i[H]\nabla^{\psi}_{e_i}\upsilon + H\nabla^{\psi}_{e_i}\nabla^{\psi}_{e_i}\upsilon) - (\nabla_{e_i}e_i H)\upsilon - H\nabla^{\psi}_{\nabla_{e_i}e_i}\upsilon\right\}$$

$$-nH\sum_{i=1}^{n} R^N(d\psi(e_i),\upsilon)d\psi(e_i)$$

denklemi elde edilir. Son denklemin υ ile iççarpımı alınırsa,

$$\tau_2(\psi) = n\Delta H - nHg(\Delta^{\psi}\upsilon,\upsilon) - nH\sum_{i=1}^{n} g(R^N(d\psi(e_i),\upsilon)d\psi(e_i),\upsilon) \tag{4.19}$$

bulunur.

Şimdi sırasıyla (4.19) denklemindeki terimleri hesaplayalım:

$$\sum_{i=1}^{n} g(R^N(d\psi(e_i),\upsilon)d\psi(e_i),\upsilon) = -Ric(\upsilon,\upsilon) \tag{4.20}$$

ve

$$g(\Delta^{\psi}\upsilon,\upsilon) = \sum_{i=1}^{n} g(-\nabla^{\psi}_{e_i}\nabla^{\psi}_{e_i}\upsilon + \nabla^{\psi}_{\nabla_{e_i}e_i}\upsilon,\upsilon) = \sum_{i=1}^{n} g(\nabla^{\psi}_{e_i}\upsilon,\nabla^{\psi}_{e_i}\upsilon) \tag{4.21}$$

sonuçları elde edilir. [9] nolu kaynaktan,

$$\sum_{i=1}^{n} g(\nabla^{\psi}_{e_i}\upsilon,\nabla^{\psi}_{e_i}\upsilon) = \|B\|^2 \tag{4.22}$$

olduğu biliniyor. (4.20), (4.21) ve (4.22) denklemleri (4.19) denkleminde yerlerine yazılırlarsa,

$$\left[\tau_2(\psi)\right]^{\perp} = n\Delta H - nH\|B\|^2 + nHRic(\upsilon,\upsilon) \tag{4.23}$$

denklemi elde edilir. Aynı yöntem ile (2.13) ve (4.17) denkleminden faydalanılarak *f*-gerilim alanı

$$\tau_f(\psi) = fnH\upsilon + d\psi(gradf) \tag{4.24}$$

şeklinde hesaplanır. (4.24) denkleminin υ ile iççarpımı alınırsa,

$$\left[\tau_f(\psi)\right]^{\perp} = fnH \tag{4.25}$$

denklemi elde edilir. (4.18) ve (4.23) denklemleri (2.15) denkleminde yerlerine yazılırsa $\tau_{2,f}(\psi)$ nin dik kısmı

$$\left[\tau_{2,f}(\psi)\right]^{\perp} = fn\left\{\Delta H - H\|B\|^2 + HRic(\upsilon,\upsilon)\right\} + \Delta f\left(nH\right) + 2ng\left(\nabla^{\varphi}_{gradf}H\upsilon,\upsilon\right) \tag{4.26}$$

şeklindedir. Diğer taraftan, Weingarten denklemi kullanılarak,

$$\nabla^{\psi}_{gradf}H\upsilon = (gradfH)\upsilon + H\nabla^{\psi}_{gradf}\upsilon$$

$$= (gradfH)\upsilon + H(-A_{\upsilon}gradf + \nabla^{\perp}_{gradf}\upsilon)$$

$$= (gradfH)\upsilon - HA_{\upsilon}gradf \quad (4.27)$$

denklemi bulunur. (4.27) denkleminin υ ile iççarpımı alınırsa,

$$g(\nabla^{\psi}_{gradf} H\upsilon, \upsilon) = (gradf)H \quad (4.28)$$

sonucu elde edilir.

Ayrıca (4.28) denklemi (4.26) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\left[\tau_{2,f}(\psi)\right]^{\perp} = fn\left\{\Delta H - H\left\|B\right\|^2 + HRic(\upsilon,\upsilon)\right\} + \Delta f(nH) + 2n\left(gradf\right)H \quad (4.29)$$

denklemine ulaşılır.

Son olarak *f*-biminimallik tanımı gereği, (4.3) denkleminde (4.25) ve (4.29) denklemleri yerlerine yazılırsa,

$$\Delta H - H\left\|B\right\|^2 + HRic(\upsilon,\upsilon) + \frac{\Delta f}{f}H + 2(grad\ln f)H - \lambda H = 0$$

denklemi elde edilir.

Tersine

$$\Delta H = H\,||\,B\,||^2 - HRic(\upsilon,\upsilon) - \frac{\Delta f}{f}H + \lambda H - 2\left(grad\ln f\right)H$$

olsun. Son denklem nf ile çarpılırsa

$$fn\left\{\Delta H - H\left\|B\right\|^2 + HRic(\upsilon,\upsilon)\right\} + \left\{n\Delta f - nf\lambda\right\}(H) + 2n\left(gradf\right)H = 0 \quad (4.30)$$

denklemi elde edilir. Ayrıca (4.29) den (4.25) denklemi çıkarılırsa (4.30) denklemi bulunur. Bu ise

$$\left[\tau_{2,\lambda,f}\left(\psi\right)\right]^{\perp} = \left[\tau_{2,f}\left(\psi\right)\right]^{\perp} - \lambda\left[\tau_{f}\left(\psi\right)\right]^{\perp} = 0$$

olmasını gerektirir. Böylece, ψ immersiyonu *f*-biminimaldir. ■

Sonuç 4.2.6: $N^{n+1}(c)$, c sabit kesitsel eğrilikli bir Riemann manifoldu olmak üzere, $\psi : M^n \to N^{n+1}(c)$ izometrik immersiyonunun *f*-biminimal olması için gerek ve yeter şart

$$\Delta H - \left(n^2H^2 - 2scal + 2n(n-2)c - \frac{\Delta f}{f} + \lambda \right) H - 2\left(grad \ln f\right) H = 0$$

denkleminin sağlanmasıdır. Burada $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $scal$, M nin skaler eğriliğidir.

Ayrıca $\psi : M^2 \to N^3(c)$ izometrik immersiyon iken, ψ nin *f*-biminimal olması için gerek ve yeter şart $\lambda \in \mathbb{R}$ için,

$$\Delta H - 2H\left(2H^2 - G - \frac{1}{2}\frac{\Delta f}{f} + \frac{1}{2}\lambda \right) - 2\left(grad \ln f\right) H = 0$$

olmasıdır.

İspat: $\{e_i\}$, $1 \le i \le n$ $\chi\left(M\right)$ nin bir lokal geodezik ortonormal çatı alanı ve $scal$, M nin skaler eğrilik fonksiyonu olsun. B ikinci temel formunun normunun karesi

$$\|B\|^2 = \sum_{i=1}^{n} g(Ae_i, Ae_i)$$

$$= g(Ae_1, Ae_1) + ... + g(Ae_n, Ae_n) \tag{4.31}$$

ile verilir. Ayrıca $\{e_i\}$, bazını asli vektör alanlarından oluşan baz olarak seçmek mümkündür. Böylece $\{\kappa_1, \kappa_2, ..., \kappa_n\}$ asli eğrilik fonksiyonları olmak üzere

$$Ae_i = \kappa_i e_i, \ 1 \le i \le n \tag{4.32}$$

yazılabilir.

Diğer taraftan, (4.31) ve (4.32) denklemlerinden yararlanarak K, M 'nin kesitsel eğriliği olmak üzere, B ikinci temel formu ile $\{\kappa_1, \kappa_2, ..., \kappa_n\}$ eğrilik fonksiyonları arasındaki bağıntı,

$$\|B\|^2 = \kappa_1^2 + \kappa_2^2 + ... + \kappa_n^2$$

$$= n^2 H^2 - 2 \sum_{i,j=1, i<j}^{n} \kappa_i \kappa_j$$

$$= n^2 H^2 - 2 \sum_{i,j=1, i<j}^{n} (K(e_i, e_j) - c)$$

$$= n^2 H^2 + 2n(n-1)c - 2 \sum_{i,j=1, i<j}^{n} K(e_i, e_j)$$

$$= n^2 H^2 + 2n(n-1)c - 2scal \quad (4.33)$$

şeklindedir.

Ayrıca $N^{n+1}(c)$, c sabit kesitsel eğrilikli bir Riemann manifoldu için

$$Ric(\upsilon, \upsilon) = nc \quad (4.34)$$

dir. Önerme 4.2.5 den ve (4.33) ve (4.34) denklemlerinden faydalanılarak, *f*-biminimallik şartı

$$\Delta H - \left(n^2 H^2 - 2scal + 2n(n-2)c - \frac{\Delta f}{f} + \lambda \right) H - 2\left(grad \ln f \right) H = 0 \quad (4.35)$$

olarak bulunur.

Diğer taraftan,

$$\psi : M^2 \to N^3(c)$$

izometrik immersiyonu için, (4.35) denkleminde $n = 2$ alınarak istenilen sonuç elde edilir. ■

Teorem 4.2.7: $\psi : \left(M^2, g \right) \to \left(N^n, \tilde{g} \right)$ dönüşümünün bir serbest *f*-biminimal dönüşüm olması için gerek ve yeter şart $\psi : \left(M^2, f^{-1} g \right) \to \left(N^n, \tilde{g} \right)$ bir serbest biminimal dönüşüm olmasıdır.

İspat: (4.3) denklemi kullanılarak, $\psi:\left(M^2,g\right)\to\left(N^n,\tilde{g}\right)$ dönüşümünün bir serbest *f*-biminimal dönüşüm olması için gerek ve yeter şart

$$\left[\tau_{2,f}\left(\psi,g\right)\right]^{\perp}=f\left[\tau_2\left(\psi,g\right)\right]^{\perp}+\Delta f\left[\tau\left(\psi,g\right)\right]^{\perp}+2\left[\nabla^{\psi}{}_{gradf}\tau\left(\psi,g\right)\right]^{\perp}=0$$

denkleminin sağlanmasıdır. Bu denklem de

$$\left[\tau_2\left(\psi,g\right)\right]^{\perp}+\left(\Delta\ln f+\left\|grad\ln f\right\|^2\right)\left[\tau\left(\psi,g\right)\right]^{\perp}+2\left[\nabla^{\psi}{}_{grad\ln f}\tau\left(\psi,g\right)\right]^{\perp}=0$$

denklemine eşittir.

Diğer taraftan [26] nolu kaynaktan faydalanılarak $\psi:\left(M^2,\bar{g}=F^{-2}g\right)\to\left(N^n,\tilde{g}\right)$ dönüşümünün serbest biminimal olması için gerek ve yeter şart

$$\left[\tau_2\left(\psi,\bar{g}\right)\right]^{\perp}=F^4\left\{\left[\tau_2\left(\psi,g\right)\right]^{\perp}+\left(\Delta\ln F^2+\left\|grad\ln F^2\right\|^2\right)\left[\tau\left(\psi,g\right)\right]^{\perp}\right\}$$

$$+2F^4\left[\nabla^{\psi}{}_{grad\ln F^2}\tau\left(\psi,g\right)\right]^{\perp}$$

şeklinde elde edilir. Bu denklem de

$$\left[\tau_2\left(\psi,g\right)\right]^{\perp}+\left(\Delta\ln F^2+\left\|grad\ln F^2\right\|^2\right)\left[\tau\left(\psi,g\right)\right]^{\perp}+2\left[\nabla^{\psi}{}_{grad\ln F^2}\tau\left(\psi,g\right)\right]^{\perp}=0$$

denklemine eşittir. Son denklemde $F^2=f$ yazılır ise istenilen sonuç elde edilir. ■

Şimdi Teorem 4.2.7 kullanılarak, *f*-biminimal yüzey örnekleri elde edilecektir:

Örnek 4.2.8: $\psi:\left(\mathbb{S}^2,d\theta^2\right)\to\left(\mathbb{R}^3\setminus\{0\}=\mathbb{R}^+\times_{t^2}\mathbb{S}^2,dt^2+t^2d\theta^2\right)$ olmak üzere, $\mathbb{S}^2$ üzerindeki bir serbest biminimal eğri üzerindeki koni, $\mathbb{R}^3$ üzerinde serbest biminimal yüzeydir [9]. Burada $\times_{t^2}$ katlı çarpımı belirtir. Böylece Teorem 4.2.7 kullanılarak $\psi:\left(\mathbb{S}^2,fd\theta^2\right)\to\left(\mathbb{R}^3\setminus\{0\}=\mathbb{R}^+\times_{t^2}\mathbb{S}^2,dt^2+t^2d\theta^2\right)$ dönüşümünün bir serbest *f*-biminimal yüzey olduğu görülür.

Örnek 4.2.9: $\beta : I \to \mathbb{R}^2$, $\kappa = \dfrac{1}{\sqrt{2s}}$ eğrilikli bir logaritmik spiral ve $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olan bir β düzlem eğrisinde kurulan silindirin üzerindeki helis olsun. $X : (\mathbb{R}^2, g) \to (\mathbb{R}^3, \tilde{g})$ dönüşümünün parametrik denklemi $X(u,s) = \alpha(s) + u(B,T)$ şeklindedir. $X : (\mathbb{R}^2, g) \to (\mathbb{R}^3, \tilde{g})$ dönüşümü bir serbest biminimal yüzeydir [9]. O zaman Teorem 4.2.7 kullanılarak, $X : (\mathbb{R}^2, fg) \to (\mathbb{R}^3, \tilde{g})$ dönüşümü bir serbest *f*-biminimal yüzeydir.

[7] ve [9] nolu kaynaklarda Y-L. Ou ve E. Loubeau, S. Montaldo sırası ile aşağıdaki teorem ve önermeyi ifade ve ispat etmişlerdir:

Teorem 4.2.10: $\psi : M^n \to N^{n+1}$ bir izometrik immersiyon olsun. ψ immersiyonunun *f*-biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$2A(\mathit{grad}H) + \frac{n}{2}\mathit{grad}H^2 - 2H\left(Ric(\upsilon,\upsilon)\right)^T + 2HA(\mathit{grad}\ln f) = 0$$

ve

$$\Delta H - H\,\|A\|^2 + HRic(\upsilon,\upsilon) + \frac{\Delta f}{f}H + 2\left(\mathit{grad}\ln f\right)H = 0$$

denkleminin sağlanmasıdır. Burada $\left(Ric(\upsilon,\upsilon)\right)^T$ ile $Ric(\upsilon,\upsilon)$ nin teğet kısmı gösterilmektedir [7].

Önerme 4.2.11: $\psi : M^n \to N^{n+1}$ bir izometrik immersiyon olsun. ψ immersiyonunun biminimal olması için gerek ve yeter şart

$$\Delta H - H\,\|B\|^2 + HRic(\upsilon,\upsilon) - \lambda H = 0$$

denkleminin sağlanmasıdır [9].

Örnek 4.2.12: $\psi : D = \{(u,v) \in (0,2\pi) \times \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}^3$ olmak üzere $\psi(u,v) = (r\cos u, r\sin u, v)$ şeklinde tanımlanan dairesel silindir yüzeyi, $\lambda = -\dfrac{1}{r^2}$ olmadıkça $f = c_1 e^{\sqrt{-1-\lambda r^2}\,u} + c_2 e^{-\sqrt{-1-\lambda r^2}\,u}$ olan bir has *f*-biminimal yüzeydir.

Ayrıca bu yüzey *f*-biharmonik değildir.

Gerçekten, dairesel silindir yüzeyi için

$$\|B\|^2 = \frac{1}{r^2}, \quad H = -\frac{1}{2r} \quad \text{ve} \quad \Delta = -\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial u^2} + \frac{\partial}{\partial v^2}\right)$$

olduğu kolayca gösterilebilir. Bu denklemlerden faydalanılarak,

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{1+\lambda r^2}{r^2}$$

denklemi elde edilir. Bu denklemler Önerme 4.2.5 de yerlerine yazılırsa, bu dairesel silindirin *f*-biminimal yüzey olduğu görülür.

Benzer şekilde Teorem 4.2.10 kullanılarak yüzeyin *f*-biharmonik olmadığı ve Önerme 4.2.11 kullanılarak $\lambda = -\frac{1}{r^2}$ olmadıkça biminimal olmadığı kolaylıkla görülür.

4.3 Sasakian Uzay Formlar Üzerinde *f*-Biminimal Legendre Eğriler

Bu kısımda, $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ Sasakian uzay formu üzerindeki f-biminimal Legendre eğriler incelenecek ve *f*-biminimal eğri örneği elde edilecektir.

Öncelikle aşağıdaki teoremi ifade ve ispat edelim:

Teorem 4.3.1: $\gamma : (a,b) \to M = (M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ oskülatör mertebesi r olan geodezik olmayan bir Legendre eğrisi olsun. γ eğrisinin f-biminimal olması için gerek ve yeter şart

$$\kappa_1'' - \kappa_1^3 - \kappa_1\kappa_2^2 + \frac{(c+3)}{4}\kappa_1 + 2\kappa_1'\frac{f'}{f} + \kappa_1\frac{f''}{f} - \lambda\kappa_1 + \frac{3(c-1)}{4}[\kappa_1 g(\varphi T, E_2)^2]^{\perp} = 0,$$

$$\kappa_1'\kappa_2 + (\kappa_1\kappa_2)' + 2\kappa_1\kappa_2\frac{f'}{f} + \frac{3(c-1)}{4}[\kappa_1 g(\varphi T, E_2) g(\varphi T, E_3)]^{\perp} = 0,$$

$$\kappa_1\kappa_2\kappa_3+\frac{3(c-1)}{4}[\kappa_1 g(\varphi T,E_2)g(\varphi T,E_4)]^{\perp}=0$$

denklemlerinin sağlanmasıdır.

İspat: $M=(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ bir Sasakian uzay form ve $\gamma:(a,b)\to M$ oskülatör mertebesi r olan bir Legendre eğrisi olsun. O halde

$$\eta(T)=0 \tag{4.36}$$

ifadesi türevlenerek, Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\eta(E_2)=0 \tag{4.37}$$

elde edilir. (2.9) eşitliği kullanılırsa,

$$R(T,\nabla_T T)T=-\kappa_1\frac{(c+3)}{4}E_2-3\kappa_1\frac{(c-1)}{4}g(\varphi T,E_2)\varphi T \tag{4.38}$$

bulunur. (4.12) ve (4.38) denklemleri kullanılarak

$$\left(\kappa_1''-\kappa_1^3-\kappa_1\kappa_2^2+\frac{(c+3)}{4}\kappa_1+2\kappa_1'\frac{f'}{f}+\kappa_1\frac{f''}{f}-\lambda\kappa_1\right)E_2$$

$$+\left(\kappa_1'\kappa_2+(\kappa_1\kappa_2)'+2\kappa_1\kappa_2\frac{f'}{f}\right)E_3$$

$$\left(\kappa_1\kappa_2\kappa_3\right)E_4+\frac{3(c-1)}{4}[\kappa_1 g(\varphi T,E_2)\varphi T]^{\perp}=0 \tag{4.39}$$

elde edilir. (4.39) denkleminin sırasıyla E_2,E_3,E_4 ile iç çarpımı alınırsa, istenilen sonuçlar elde edilir. ■

Teorem 4.3.2: $\gamma:(a,b)\to M=(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ oskülatör mertebesi r olan geodezik olmayan bir Legendre eğrisi olsun. γ eğrisinin f-biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$3\kappa_1' + 2\kappa_1\frac{f'}{f}=0,$$

$$\kappa_1^2+\kappa_2^2-\frac{(c+3)}{4}-2\frac{\kappa_1'}{\kappa_1}\frac{f'}{f}-\frac{f''}{f}-\frac{3(c-1)}{4}[g(\varphi T,E_2)^2]^{\perp}-\frac{\kappa_1''}{\kappa_1}=0,$$

$$\kappa_2'+2\kappa_2\frac{\kappa_1'}{\kappa_1}+2\kappa_2\frac{f'}{f}+\frac{3(c-1)}{4}[g(\varphi T,E_2)g(\varphi T,E_3)]^{\perp}=0,$$

$$\kappa_2\kappa_3+\frac{3(c-1)}{4}[g(\varphi T,E_2)g(\varphi T,E_4)]^{\perp}=0$$

denklemlerinin sağlanmasıdır [27].

Şimdi, Teorem 4.3.1 için örnek elde edeceğimiz $\mathbb{R}^{2n+1}(-3)$ Sasakian uzay formunu tanıtacağız [15].

Standart koordinat fonksiyonları $(x_1,...,x_n,y_1,...,y_n,z)$, kontakt yapısı $\eta=\frac{1}{2}(dz-\sum_{i=1}^{n}y_i dx_i)$, karakteristik vektör alanı $\xi=2\frac{\partial}{\partial z}$ ve $(1,1)$-tipinden tensör alanı

$$\varphi=\begin{pmatrix}0 & \delta_{ij} & 0\\ -\delta_{ij} & 0 & 0\\ 0 & y_j & 0\end{pmatrix}$$

olan $M=\mathbb{R}^{2n+1}$ manifoldunu ele alalım.

M üzerinde $g=\eta\otimes\eta+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}((dx_i)^2+(dy_i)^2)$ Riemann metriği olmak üzere $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ sabit $\varphi-$kesitsel eğrilikli ($c=-3$) bir Sasakian uzay formudur.

$$X_i=2\frac{\partial}{\partial y_i},\ X_{i+n}=\varphi X_i=2\left(\frac{\partial}{\partial x_i}+y_i\frac{\partial}{\partial y_i}\right),\ 1\le i\le n,\ \xi=2\frac{\partial}{\partial z}$$

vektör alanları bir g-ortonormal baz oluştururlar ve bu baza göre Levi-Civita koneksiyonu

$$\nabla_{X_i} X_j = \nabla_{X_{i+n}} X_{j+n} = 0, \quad \nabla_{X_i} X_{j+n} = \delta_{ij}\xi, \qquad \nabla_{X_{i+n}} X_j = -\delta_{ij}\xi,$$
$$\nabla_{X_i}\xi = \nabla_{\xi} X_i = -X_{i+n}, \qquad \nabla_{X_{i+n}}\xi = \nabla_{\xi} X_{i+n} = X_i$$

şeklinde hesaplanmıştır [15].

Yukarıdaki denklemlerden faydalanarak $\mathbb{R}^5(-3)$ de has f-biminimal Legendre eğri örneği elde edeceğiz:

$\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_5)$, $\mathbb{R}^5(-3)$ de birim hızlı bir eğri olsun. γ eğrisinin teğet vektör alanı

$$T = \frac{1}{2}\{\gamma_3' X_1 + \gamma_4' X_2 + \gamma_1' X_3 + \gamma_2' X_4 + (\gamma_5' - \gamma_1'\gamma_3 - \gamma_2'\gamma_4)\xi\}$$

şeklinde yazılabilir. Yukarıdaki denklem kullanılarak, γ eğrisinin birim hızlı bir Legendre eğrisi olması için gerek ve yeter şart $\eta(T) = 0$ ve $g(T, T) = 1$ olmasıdır.

Yani,

$$\gamma_5' = \gamma_1'\gamma_3 + \gamma_2'\gamma_4$$

ve

$$(\gamma_1')^2 + ... + (\gamma_5')^2 = 4$$

şeklindedir. Diğer taraftan basit bir hesaplama ile

$$\nabla_T T = \frac{1}{2}(\gamma_3'' X_1 + \gamma_4'' X_2 + \gamma_1'' X_3 + \gamma_2'' X_4),$$

$$\varphi T = \frac{1}{2}(-\gamma_1' X_1 - \gamma_2' X_2 + \gamma_3' X_3 + \gamma_4' X_4)$$

denklemleri elde edilir. Bu son iki denklem kullanıldığında $\varphi T \perp E_2$ olması için gerek ve yeter şart

$$\gamma_1'\gamma_3'' + \gamma_2'\gamma_4'' = \gamma_3'\gamma_1'' + \gamma_4'\gamma_2''$$

olmasıdır.

Sonuç olarak, aşağıdaki örneği verebiliriz:

Örnek 4.3.2: $\lambda = -3$, $\varphi T \perp E_2$ ve $f = e^t$ alındığında $\mathbb{R}^5(-3)$ Sasakian uzay formunda

$$\gamma(t) = (sin2t, -cos2t, 0, 0, 1)$$

eğrisi oskülatör meretebesi $r = 2$ ve $\kappa_1 = 2$ olan bir Legendre eğrisidir. Teorem 4.3.1 kullanılarak $\gamma : (a,b) \to M$ eğrisinin has *f*-biminimal Legendre eğrisi olduğu görülür. Ayrıca Teorem 4.3.2 gereği γ eğrisi *f*-biharmonik değildir.

5. *f*-BİHARMONİK EĞRİLER

[7] nolu kaynakta Y-L. Ou, 3-boyutlu Öklid uzayları üzerinde *f*-biharmonik eğrileri çalışmıştır. Benzer şekilde bu kısım da Sol uzayları, Cartan-Vranceanu 3-boyutlu uzayları ve homojen kontakt 3-manifoldları üzerinde *f*-biharmonik eğriler incelenecektir.

5.1 Sol Uzayları Üzerinde *f*-Biharmonik Eğriler

[11] nolu kaynakta Y-L. Ou and Z-P. Wang, Sol uzayında biharmonik dönüşümleri çalışmışlar ve Sol uzaylarında geodezik olmayan biharmonik eğrilerin karekterizasyonunu elde etmişlerdir.

Biz de [11] nolu kaynak yardımıyla Sol uzayında eğrilerin *f*-biharmonik olma şartlarını elde edeceğiz.

$\left(\mathbb{R}^3, g_{sol}\right)$ Sol uzayı için Riemann metriği

$$g_{sol} = e^{2z}dx^2 + e^{-2z}dy^2 + dz^2$$

şeklinde tanımlanır [11]. $\left(\mathbb{R}^3, g_{sol}\right)$ uzayının ortonormal çatı alanı

$$e_1 = e^{-z}\frac{\partial}{\partial x}\ ,\ e_2 = e^{z}\frac{\partial}{\partial y}\ ,\ e_3 = \frac{\partial}{\partial z}$$

olsun. Burada $\{e_1, e_2, e_3\}$ ortonormal çatı alanını kullanılarak Lie parentez operatörü

$$[e_1, e_2] = 0,\ [e_3, e_1] = e_1,\ [e_2, e_3] = -e_2$$

şeklinde hesaplanmıştır [11].

$\gamma : I \to \left(\mathbb{R}^3, g_{sol}\right)$ bir birim hızlı diferensiyellenebilir eğri olsun. $\{T, N, B\}$ ise $\left(\mathbb{R}^3, g_{sol}\right)$ de γ boyunca ortonormal çatı alanı olsun.

Ayrıca

$$T = T_1e_1 + T_2e_2 + T_3e_3,$$

$$N = N_1e_1 + N_2e_2 + N_3e_3,$$

$$B = B_1e_1 + B_2e_2 + B_3e_3$$

olarak alalım. Böylece aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz:

Teorem 5.1.1: $\gamma : I \to \left(\mathbb{R}^3, g_{sol}\right)$ birim hızlı bir eğri olsun. γ eğrisinin $\left(\mathbb{R}^3, g_{sol}\right)$ Sol uzayında *f*-biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$-3f\kappa\kappa' - 2f'\kappa^2 = 0,$$

$$f\kappa'' - f\kappa^3 - f\kappa\tau^2 - f\kappa + 2f\kappa B_3^2 + 2f'\kappa' + f''\kappa = 0,$$

$$2f\kappa'\tau + f\kappa\tau' - 2f\kappa N_3B_3 + 2f'\kappa\tau = 0 \qquad (5.1)$$

denklemlerinin sağlanmasıdır.

İspat: $\{e_i\}$, $1 \le i \le 3$ γ eğrisinin lokal ortonormal çatı alanı olmak üzere, (2.10) denlemi kullanılarak,

$$\tau(\gamma) = \kappa N \qquad (5.2)$$

yazılabilir. Ayrıca [11] nolu kaynakta,

$$R\left(T, N, T, N\right) = 2B_3^2 - 1, \qquad (5.3)$$

$$R\left(T, N, T, B\right) = -2N_3B_3 \qquad (5.4)$$

ve γ eğrisinin ikinci gerilim alanı,

$$\tau_2(\gamma) = \left(-3\kappa\kappa'\right)T + \left(\kappa'' - \kappa^3 - \kappa\tau^2\right)N + \kappa R(T, N)T$$

$$+\left(2\kappa'\tau + \kappa\tau'\right)B \qquad (5.5)$$

şeklinde hesaplanmıştır.

(5.5) denkleminin sırası ile T, N, B ile iç çarpımı alınır ve (5.3) ve (5.4) denklemleri (5.5) denkleminde yerlerine yazılırsa $\tau_2(\gamma)$ elde edilir.

Diğer taraftan,

$$\nabla^{\gamma}{}_{gradf}\tau(\gamma) = \nabla^{\gamma}{}_{gradf}(\kappa N) = f\,'\nabla_T(\kappa N) = f\,'\left(-\kappa^2 T + \kappa' N + \kappa\tau B\right) \tag{5.6}$$

şeklinde yazılabilir.

Son olarak, (2.15) denkleminde elde edilen $\tau_2(\gamma)$, (5.2) ve (5.6) denklemleri yerine yazılırsa, istenilen sonuç elde edilir. ■

Teorem 5.1.1 i dört farklı durum için inceleyeceğiz.

Durum 1. $\kappa = sabit \neq 0$ olması.

Sonuç 5.1.2: $\gamma : I \to \left(\mathbb{R}^3, g_{sol}\right)$ Sol uzayında birim hızlı bir *f*-biharmonik eğri olsun. Eğer $\kappa = sabit \neq 0$ ise γ eğrisi biharmoniktir.

İspat: (5.1) denklemleri ve $\kappa = sabit \neq 0$ kullanılarak

$$f\,' = 0$$

denklemi elde edilir. Bu da γ eğrisinin biharmonik olması anlamına gelir. ■

Durum 2. $\kappa \neq 0$ ve $\tau = sabit \neq 0$ olması.

Sonuç 5.1.3: $\gamma : I \to \left(\mathbb{R}^3, g_{sol}\right)$ Sol uzayında birim hızlı bir *f*-biharmonik eğri olsun. Eğer, $\tau = sabit \neq 0$ ve $N_3 B_3 = 0$ ise γ eğrisi biharmoniktir.

İspat: Farzedelimki γ bir *f*-biharmonik eğri, $\tau = sabit \neq 0$ ve $N_3 B_3 = 0$ olsun. (5.1) denklemleri,

$$\frac{\kappa'}{\kappa} = -\frac{2f\,'}{3f} \tag{5.7}$$

ve

$$\tau\left(\frac{\kappa'}{\kappa}+\frac{f'}{f}\right)=0 \tag{5.8}$$

denklemlerine dönüşür. Son olarak, (5.7) denklemi (5.8) denkleminde yerine yazılırsa $f=e^{c}$ bulunur. Yani, γ eğrisi biharmoniktir. ■

Sonuç 5.1.4: $\gamma : I \to \left(\mathbb{R}^3, g_{sol}\right)$ Sol uzayında birim hızlı bir *f*-biharmonik eğri olsun. Eğer, $\tau = sabit \neq 0$ ise $f = c_1 e^{\int \frac{3N_3B_3}{\tau}}$ dir.

İspat: Farzedelimki γ bir *f*-biharmonik eğri ve $\tau = sabit \neq 0$ olsun.

(5.1) denklemleri,

$$\frac{\kappa'}{\kappa}=-\frac{2f'}{3f} \tag{5.9}$$

ve

$$2f\kappa'\tau-2f\kappa N_3B_3+2f'\kappa\tau=0 \tag{5.10}$$

denklemlerine dönüşür. Son olarak, (5.9) denklemi (5.10) denkleminde yerine yazılırsa istenilen sonuç elde edilir. ■

Durum 3. $\tau = 0$ olması.

Sonuç 5.1.5: $\gamma : I \to \left(\mathbb{R}^3, g_{sol}\right)$ Sol uzayında birim hızlı, geodezik olmayan bir eğri olsun. γ eğrisinin has *f*-biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$f^2\kappa^3=c_1^{\,2}, \qquad c_1 \in \mathbb{R} \tag{5.11}$$

$$(f\kappa)''=f\kappa\left(\kappa^2-2B_3^2+1\right) \tag{5.12}$$

$$N_3B_3=0 \tag{5.13}$$

denklemlerinin sağlanmasıdır.

İspat: Farzedelimki $\tau = 0$ olsun. (5.1) denklemlerinden birinci denklem integrallenirse ve ikinci ve üçüncü denklemler düzenlenirse istenilen sonuç elde edilir. ■

Durum 4. $\kappa \neq sabit \neq 0$ ve $\tau \neq sabit \neq 0$ olması.

Sonuç 5.1.6: $\gamma : I \to \left(\mathbb{R}^3, g_{sol}\right)$ Sol uzayında birim hızlı, geodezik olmayan bir eğri olsun. γ eğrisinin has *f*-biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$f^2\kappa^3 = c_1^2, \quad c_1 \in \mathbb{R} \tag{5.14}$$

$$(f\kappa)'' = f\kappa\left(\kappa^2 + \tau^2 - 2B_3^2 + 1\right) \tag{5.15}$$

$$f^2\kappa^2\tau = e^{\int \frac{2N_3B_3}{\tau}} \tag{5.16}$$

olmasıdır.

İspat: Farzedelimki $\kappa \neq sabit \neq 0$ ve $\tau \neq sabit \neq 0$ olsun. (5.1) denklemlerinden birinci ve üçüncü denklemler integrallenirse istenilen sonuç elde edilir. ■

Sonuç 5.1.5 ve Sonuç 5.1.6 dan faydalanılarak aşağıdaki teorem ifade edilebilir:

Teorem 5.1.7: $\gamma : I \to \left(\mathbb{R}^3, g_{sol}\right)$ Sol uzayında birim hızlı, geodezik olmayan bir eğri olsun. γ eğrisinin has *f*-biharmonik olması için gerek ve yeter şart

(1) $\tau = 0$, $f = c_1\kappa^{-3/2}$ ve κ'nın

$$3(\kappa')^2 - 2\kappa\kappa'' = 4\kappa^2(\kappa^2 - 2B_3^2 + 1)$$

denklemini sağlamasıdır.

(2) $\tau \neq 0$, $\dfrac{\tau}{\kappa} = \dfrac{e^{\int \frac{2N_3B_3}{\tau}}}{c_1^2}$, $f = c_1\kappa^{-3/2}$ ve κ 'nın

$$3(\kappa')^2 - 2\kappa\kappa'' = 4\kappa^2 \left\{ \kappa^2 \left(1 + \frac{e^{\int \frac{4N_3B_3}{\tau}}}{c_1^4}\right) - 2B_3^2 + 1 \right\}$$

denklemini sağlamasıdır.

İspat: (1) (5.11) denklemi kullanılarak,

$$f = c_1\kappa^{-3/2} \tag{5.17}$$

elde edilir. (5.17) denklemi (5.12) denkleminde yerine yazılırsa, istenilen sonuç bulunur.

(2) (5.14) denklemi çözülürse

$$f = c_1\kappa^{-3/2} \tag{5.18}$$

elde edilir. (5.18) eşitliği (5.16) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\frac{\tau}{\kappa} = \frac{e^{\int \frac{2N_3B_3}{\tau}}}{c_1^2} \tag{5.19}$$

bulunur. Son olarak, (5.18) ve (5.19) eşitlikleri (5.15) denkleminde yerine yazılırsa istenilen sonuç bulunur. ■

Teorem 5.1.7 den aşağıdaki önermeyi kolaylıkla yazabiliriz:

Önerme 5.1.8: $\gamma : I \to (\mathbb{R}^3, g_{sol})$ Sol uzayında birim hızlı bir *f*-biharmonik eğri olsun. γ sabit geodezik eğriliğe sahip ise biharmoniktir.

5.2 3-Boyutlu Cartan-Vranceanu Uzayları Üzerinde *f*-Biharmonik Eğriler

[12] nolu kaynakta R. Caddeo, S. Montaldo, C. Oniciuc ve P. Piu, Cartan-Vranceanu 3-boyutlu uzayında bütün biharmonik eğrileri karekterize etmişlerdir.

Bu bölümde 3-boyutlu Cartan-Vranceanu uzaylarında *f*-biharmonik eğriler incelenecek ve bu tip de eğrilerin bazı özellikleri elde edilecektir.

$\left(M, ds^2_{\ell,m}\right)$ 3-boyutlu Cartan-Vranceanu uzayı için Riemann metriği

$$ds^2_{\ell,m} = \frac{dx^2+dy^2}{[1+m(x^2+y^2)]^2} + (dz + \frac{\ell}{2}\frac{ydx-xdy}{[1+m(x^2+y^2)]})^2$$

$\ell, m \in \mathbb{R}$ şeklinde tanımlanır [12].

$\left(M, ds^2_{\ell,m}\right)$ 3-boyutlu Cartan-Vranceanu uzayının ortonormal çatı alanı

$$e_1 = \frac{dx}{(1+m(x^2+y^2))},\ e_2 = \frac{dy}{(1+m(x^2+y^2))},\ e_3 = dz + \frac{\ell}{2}\frac{ydx-xdy}{(1+m(x^2+y^2))}$$

olsun [12].

$\gamma : I \to \left(M, ds^2_{\ell,m}\right)$ birim hızlı bir diferensiyellenebilir eğri olsun. $\{T, N, B\}$ ise $\left(M, ds^2_{\ell,m}\right)$ de γ boyunca ortonormal çatı alanı olsun. Ayrıca

$$T = T_1e_1 + T_2e_2 + T_3e_3,$$

$$N = N_1e_1 + N_2e_2 + N_3e_3,$$

$$B = B_1e_1 + B_2e_2 + B_3e_3$$

alalım.

Teorem 5.2.1: $\gamma : I \to \left(M, ds^2_{\ell,m}\right)$ birim hızlı bir eğri olsun. γ eğrisinin $\left(M, ds^2_{\ell,m}\right)$ 3-boyutlu Cartan-Vranceanu uzayında *f*-biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$-3f\kappa\kappa' - 2f'\kappa^2 = 0,$$

$$f\kappa'' - f\kappa^3 - f\kappa\tau^2 - (\ell^2 - 4m)f\kappa B_3^2 + \frac{\ell^2}{4}f\kappa + 2f'\kappa' + f''\kappa = 0,$$

$$2f\kappa'\tau + f\kappa\tau' + (\ell^2 - 4m)f\kappa N_3 B_3 + 2f'\kappa\tau = 0 \tag{5.20}$$

denklemlerinin sağlanmasıdır.

İspat: [12] nolu kaynakta,

$$R\left(T,N,T,N\right) = \frac{\ell^2}{4} - (\ell^2 - 4m)B_3^2, \tag{5.21}$$

$$R\left(T,N,T,B\right) = (\ell^2 - 4m)N_3 B_3, \tag{5.22}$$

ve γ eğrisinin ikinci gerilim alanı

$$\tau_2(\gamma) = \left(-3\kappa\kappa'\right)T + \left(\kappa'' - \kappa^3 - \kappa\tau^2\right)N + \kappa R(T,N)T$$

$$+\left(2\kappa'\tau + \kappa\tau'\right)B \tag{5.23}$$

şeklinde hesaplanmıştır. (5.23) denkleminin sırası ile T, N, B ile iç çarpımı alınır ve (5.21) ve (5.22) denklemleri (5.23) denkleminde yerlerine yazılırsa $\tau_2(\gamma)$ elde edilir.

Son olarak, (2.15) denkleminde (5.2) ve (5.6) denklemleri ile elde edilen $\tau_2(\gamma)$ yerine yazılırsa, istenilen sonuç elde edilir. ■

Teorem 5.2.1 kullanılarak, ℓ ve m nin durumlarına göre sınıflandırmalar yapacağız.

i. Eğer $\ell = m = 0$ ise, $\left(M, ds^2_{\ell,m}\right)$ bir Öklid uzayıdır [12] ve γ bir *f*-biharmonik eğridir.

ii. Eğer $\ell^2 = 4m$ ve $\ell \neq 0$ ise, $\left(M, ds^2_{\ell,m}\right)$ 3-boyutlu küre $\mathbb{S}^3$ küresidir [12] ve γ 3-boyutlu küre $\mathbb{S}^3$ üzerinde bir *f*-biharmonik eğridir.

iii. Eğer $\ell = 0$ ve $m < 0$ ise, $\left(M, ds^2_{\ell,m}\right)$, $\mathrm{H}_2 \times \mathbb{R}$ uzayına izometriktir [12] ve γ bir *f*-biharmonik eğridir.

iv. Eğer $m = 0$ ve $\ell \neq 0$ ise, $\left(M, ds^2_{\ell,m}\right)$ 3-boyutlu bir Heisenberg uzayıdır [12] ve γ bu uzayda bir *f*-biharmonik eğridir.

v. Eğer $\ell = 1$ ise, $\left(M, ds^2_{\ell,m}\right)$ 3- boyutlu bir Sasakian uzay formdur [12] ve γ bu uzayda bir *f*-biharmonik eğridir.

Son olarak, $\ell^2 \neq 4m$ ve $m \neq 0$ olma durumlarını inceleyeceğiz.

Durum 1. $\kappa = sabit \neq 0$ olması.

Sonuç 5.2.2: $\gamma : I \to \left(M, ds^2_{\ell,m}\right)$ 3- boyutlu Cartan-Vranceanu uzayında birim hızlı bir *f*-biharmonik eğri olsun. Eğer $\kappa = sabit \neq 0$ ise γ eğrisi biharmoniktir.

İspat: $\kappa = sabit \neq 0$ denklemi (5.20) denkleminde yerine yazılırsa γ eğrisi biharmonik olduğu kolaylıkla görülür. ■

Durum 2. $\kappa \neq 0$, $\tau = sabit \neq 0$ olması.

Sonuç 5.2.3: $\gamma : I \to \left(M, ds^2_{\ell,m}\right)$ 3-boyutlu Cartan-Vranceanu uzayında birim hızlı bir *f*-biharmonik eğri olsun. Eğer $\tau = sabit \neq 0$, $\ell^2 \neq 4m$ ve $N_3 B_3 = 0$ ise γ eğrisi biharmoniktir.

İspat: Farzedelimki γ bir *f*-biharmonik eğri, $\tau = sabit \neq 0$, $\ell^2 \neq 4m$ ve $N_3B_3 = 0$ olsun. (5.20) denklemleri,

$$\frac{\kappa'}{\kappa} = -\frac{2f'}{3f} \tag{5.24}$$

ve

$$\tau\left(f\kappa' + f'\kappa\right) = 0 \tag{5.25}$$

denklemlerine dönüşür. Son olarak, (5.24) denklemi (5.25) denkleminde yerine yazılırsa, γ nın biharmonik eğri olduğu kolaylıkla görülür. ■

Sonuç 5.2.4: $\gamma : I \to \left(M, ds^2_{\ell,m}\right)$ 3-boyutlu Cartan-Vranceanu uzayında birim hızlı bir *f*-biharmonik eğri olsun. Eğer $\tau = sabit \neq 0$, $\ell^2 \neq 4m$ ise $f = c_1 e^{\int \frac{3(\ell^2 - 4m)N_3B_3}{2\tau}}$ dir.

İspat: Farzedelimki γ bir *f*-biharmonik eğri, $\tau = sabit \neq 0$, $\ell^2 \neq 4m$ olsun. (5.20) denklemleri,

$$\frac{\kappa'}{\kappa} = -\frac{2f'}{3f} \tag{5.26}$$

ve

$$\left(2\tau\frac{\kappa'}{\kappa} + (\ell^2 - 4m)N_3B_3 + 2\tau\frac{f'}{f}\right) = 0 \tag{5.27}$$

denklemlerine dönüşür. Son olarak, (5.26) denklemi (5.27) denkleminde yerine yazılırsa, istenilen sonuç elde edilir. ■

Durum 3. $\tau = 0$ olması.

Sonuç 5.2.5: $\gamma : I \to \left(M, ds^2_{\ell,m}\right)$ 3-boyutlu Cartan-Vranceanu uzayında birim hızlı, geodezik olmayan bir eğri olsun. γ eğrisinin has *f*-biharmonik olması için gerek ve yeter koşul

$$f^2\kappa^3 = c_1^2, \qquad c_1 \in \mathbb{R} \tag{5.28}$$

$$(f\kappa)'' = f\kappa\left(\kappa^2 - \frac{\ell^2}{4} + (\ell^2 - 4m)B_3^2\right) \tag{5.29}$$

$$N_3B_3 = 0, \qquad \ell^2 \neq 4m \tag{5.30}$$

denklemlerinin sağlanmasıdır.

İspat: Varsayalımki $\tau = 0$ olsun. (5.20) denklemlerinden birinci denklem integrallenirse, ikinci ve üçüncü denklemler düzenlenirse istenilen sonuç elde edilir. ■

Durum 4. $\kappa \neq sabit \neq 0$ ve $\tau \neq sabit \neq 0$ olması.

Sonuç 5.2.6: $\gamma : I \to \left(M, ds^2_{\ell,m}\right)$ 3-boyutlu Cartan-Vranceanu uzayında birim hızlı, geodezik olmayan bir eğri olsun. γ eğrisinin has *f*-biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$f^2\kappa^3 = c_1^2, \qquad c_1 \in \mathbb{R} \tag{5.31}$$

$$(f\kappa)'' = f\kappa\left(\kappa^2 + \tau^2 - \frac{\ell^2}{4} + (\ell^2 - 4m)B_3^2\right) \tag{5.32}$$

$$f^2\kappa^2\tau = e^{\int -(\ell^2-4m)\frac{N_3B_3}{\tau}} \tag{5.33}$$

denklemlerinin sağlanmasıdır.

İspat: Farzedelimki $\kappa \neq sabit \neq 0$ ve $\tau \neq sabit \neq 0$ olsun. (5.20) denklemlerinden birinci ve üçüncü denklemler integrallenirse istenilen sonuç elde edilir. ■

Sonuç 5.2.5 ve Sonuç 5.2.6 dan yararlanılarak aşağıdaki teorem ifade edilebilir:

Teorem 5.2.7: $\gamma : I \to \left(M, ds^2_{\ell,m}\right)$ 3-boyutlu Cartan-Vranceanu uzayında birim hızlı, geodezik olmayan bir eğri olsun. γ eğrisinin has *f*-biharmonik olması için gerek ve yeter şart

(1) $\tau = 0$, $f = c_1\kappa^{-3/2}$ ve κ' nın

$$3(\kappa')^2 - 2\kappa\kappa'' = 4\kappa^2\left\{\kappa^2 - \frac{\ell^2}{4} + \left(\ell^2 - 4m\right)B_3^2\right\}$$

denklemini sağlamasıdır.

(2) $\tau \neq 0$, $\dfrac{\tau}{\kappa} = \dfrac{e^{\int -(\ell^2-4m)\frac{N_3B_3}{\tau}}}{c_1^2}$, $f = c_1\kappa^{-3/2}$ ve κ'nın

$$3(\kappa')^2 - 2\kappa\kappa'' = 4\kappa^2\left\{\kappa^2\left(1 + \frac{e^{\int -(\ell^2-4m)\frac{2N_3B_3}{\tau}}}{c_1^4}\right) - \frac{\ell^2}{4} + \left(\ell^2 - 4m\right)B_3^2\right\}$$

denklemini sağlamasıdır.

İspat: (1) (5.28) denklemi kullanılarak,

$$f = c_1\kappa^{-3/2} \tag{5.34}$$

elde edilir. (5.34) denklemi (5.29) denkleminde yerine yazılırsa, istenilen sonuç bulunur.

(2) (5.31) denklemi çözülürse

$$f = c_1\kappa^{-3/2} \tag{5.35}$$

elde edilir. (5.35) denklemi (5.33) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\frac{\tau}{\kappa} = \frac{e^{\int -(\ell^2-4m)\frac{N_3B_3}{\tau}}}{c_1^2} \tag{5.36}$$

bulunur. Son olarak, (5.35) ve (5.36) denklemleri (5.32) denkleminde yerine yazılırsa istenilen sonuç bulunur. ■

Teorem 5.2.7 den aşağıdaki önerme kolaylıkla yazılabilir:

Önerme 5.2.8: $\gamma : I \to \left(M, ds^2_{\ell,m}\right)$ 3-boyutlu Cartan-Vranceanu uzayında birim hızlı bir *f*-biharmonik eğri olsun. γ sabit geodezik eğriliğe sahip ise biharmoniktir.

5.3 Homojen Kontakt 3-Manifoldlar Üzerinde *f*-Biharmonik Eğriler

[13] nolu kaynakta Jun-ichi Inoguchi, homojen kontakt 3-manifoldlarda biminimal eğrileri çalışmıştır.

Bu bölümde [13] nolu kaynaktan faydalanılarak homojen kontakt 3-manifoldlar üzerinde Legendre eğrilerinin *f*-biharmonik olma koşulları elde edilecektir.

$(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir kontakt metrik manifold olsun. Eğer izometrilerin bir G Lie grubu var ve G nin her bir elemanı bir kontakt dönüşüm ise M kontakt manifolduna *homojen kontakt manifold* adı verilir [13].

$\{e_i\}$, $1 \le i \le 3$ $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ homojen kontakt 3-manifoldunun ortonormal çatı alanı olmak üzere, Lie parantez operatörü

$$\left[e_1, e_2\right] = 2e_3, \quad \left[e_2, e_3\right] = c_2 e_1, \quad \left[e_3, e_1\right] = c_3 e_2$$

$c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ olacak şekilde hesaplanmıştır [28].

γ, homojen kontakt 3-manifoldlarda birim hızlı bir eğri olsun. $\{T, N, B\}$ ise M homojen kontakt 3-manifoldun da γ boyunca ortonormal çatı alanı olsun. Ayrıca

$$T = T_1 e_1 + T_2 e_2 + T_3 e_3,$$

$$N = N_1 e_1 + N_2 e_2 + N_3 e_3,$$

$$B = B_1 e_1 + B_2 e_2 + B_3 e_3$$

alalım.

Teorem 5.3.1: γ homojen kontakt 3-manifoldlarda birim hızlı bir eğri olsun. γ eğrisinin *f*-biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$-3f\kappa\kappa' - 2f'\kappa^2 = 0,$$

$$f\kappa'' - f\kappa^3 - f\kappa\tau^2 + f\kappa(\frac{1}{4}(c_3 - c_2)^2 - 3 + c_2 + c_3) + 2f'\kappa' + f''\kappa = 0,$$

$$2f\kappa'\tau + f\kappa\tau' + 2f'\kappa\tau = 0 \quad (5.37)$$

denklemlerinin sağlanmasıdır. Burada $c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ dir.

İspat: [13] nolu kaynakta,

$$R(T,N,T,N) = (\frac{1}{4}(c_3 - c_2)^2 - 3 + c_2 + c_3), \quad (5.38)$$

$$R(T,N,T,B) = 0, \quad (5.39)$$

ve γ eğrisinin ikinci gerilim alanı

$$\tau_2(\gamma) = (-3\kappa\kappa')T + (\kappa'' - \kappa^3 - \kappa\tau^2)N + \kappa R(T,N)T$$

$$+(2\kappa'\tau + \kappa\tau')B \quad (5.40)$$

şeklinde hesaplanmıştır. (5.40) denkleminin sırası ile T, N, B ile iç çarpımı alınır ve (5.38) ve (5.39) denklemleri (5.40) denkleminde yerlerine yazılırsa $\tau_2(\gamma)$ elde edilir.

Son olarak, (2.15) denkleminde (5.2) ve (5.6) denklemleri ile elde edilen $\tau_2(\gamma)$ yerine yazılırsa, istenilen sonuç elde edilir. ■

Teorem 5.3.1 i dört farklı durum için inceleyeceğiz:

Durum 1. $\kappa = sabit \neq 0$ olması.

Sonuç 5.3.2: γ homojen kontakt 3-manifoldlarda bir birim hızlı *f*-biharmonik Legendre eğrisi olsun. Eğer $\kappa = sabit \neq 0$ ise γ eğrisi biharmoniktir.

İspat: $\kappa = sabit \neq 0$ denklemi (5.37) denkleminde yerine yazılırsa, γ eğrisinin biharmonik olduğu kolaylıkla görülür. ■

Durum 2. $\kappa \neq 0,\ \ \tau = sabit \neq 0$ olması.

Sonuç 5.3.3: γ homojen kontakt 3-manifoldlarda birim hızlı *f*-biharmonik Legendre eğrisi olsun. Eğer $\tau = sabit \neq 0$ ise γ eğrisi biharmoniktir.

İspat: Farzedelimki γ bir *f*-biharmonik eğri, $\tau = sabit \neq 0$ olsun.

(5.37) denklemleri,

$$\frac{\kappa'}{\kappa} = -\frac{2f'}{3f} \tag{5.41}$$

ve

$$\tau\left(f\kappa' + f'\kappa\right) = 0 \tag{5.42}$$

denklemlerine dönüşür. Son olarak, (5.41) denklemi (5.42) denkleminde yerine yazılırsa, γ nın biharmonik eğri olduğu kolaylıkla görülür. ■

Durum 3. $\tau = 0$ olması.

Sonuç 5.3.4: γ homojen kontakt 3-manifoldlarda geodezik olmayan, birim hızlı bir Legendre eğrisi olsun. γ eğrisinin has *f*-biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$f^2\kappa^3 = c_1^2 \tag{5.43}$$

$$(f\kappa)'' = f\kappa\left(\kappa^2 - (\frac{1}{4}(c_3 - c_2)^2 - 3 + c_2 + c_3)\right), \tag{5.44}$$

$c_i \in \mathbb{R},\quad 1 \leq i \leq 3$ denklemlerinin sağlanmasıdır.

İspat: Farzedelimki $\tau = 0$ olsun. (5.37) denklemlerinden birinci denklem integrallenir, ikinci ve üçüncü denklemler düzenlenirse ispat tamamlanır. ■

Durum 4. $\kappa \neq sabit \neq 0$ ve $\tau \neq sabit \neq 0$ olması.

Sonuç 5.3.5: γ homojen kontakt 3-manifoldlarda geodezik olmayan, birim hızlı bir Legendre eğrisi olsun. γ eğrisinin has *f*-biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$f^2\kappa^3 = c_1^2 \tag{5.45}$$

$$(f\kappa)'' = f\kappa\left(\kappa^2 + \tau^2 - (\frac{1}{4}(c_3 - c_2)^2 - 3 + c_2 + c_3)\right) \tag{5.46}$$

$$f^2\kappa^2\tau = c_4, \tag{5.47}$$

$c_i \in \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq 4$ denklemlerinin sağlanmasıdır.

İspat: Farzedelimki $\kappa \neq sabit \neq 0$ ve $\tau \neq sabit \neq 0$ olsun. (5.37) denklemlerinden birinci ve üçüncü denklemler integrallenirse ispat tamamlanır. ■

Sonuç 5.3.4 ve Sonuç 5.3.5 den faydalanılarak aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 5.3.6: γ homojen kontakt 3-manifoldlarda birim hızlı bir Legendre eğrisi olsun. γ eğrisinin has *f*-biharmonik olması için gerek ve yeter şart

(1) $\tau = 0$, $f = c_1\kappa^{-3/2}$ ve κ'nın

$$3(\kappa')^2 - 2\kappa\kappa'' = 4\kappa^2\left(\kappa^2 - (\frac{1}{4}(c_3 - c_2)^2 - 3 + c_2 + c_3)\right)$$

denklemini sağlamasıdır.

(2) $\tau \neq 0$, $\dfrac{\tau}{\kappa} = c_5$, $f = c_1\kappa^{-3/2}$ ve κ'nın

$$3(\kappa')^2 - 2\kappa\kappa'' = 4\kappa^2\left(\kappa^2(1 + c_5^2) - (\frac{1}{4}(c_3 - c_2)^2 - 3 + c_2 + c_3)\right)$$

$c_i \in \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq 5$ denklemini sağlamasıdır.

İspat: (1) (5.43) denklemi kullanılarak,

$$f = c_1 \kappa^{-3/2} \tag{5.48}$$

yazılabilir. (5.48) denklemi (5.44) denkleminde yerine yazılırsa, istenilen sonuç bulunur.

(2) (5.45) denklemi çözülürse

$$f = c_1 \kappa^{-3/2} \tag{5.49}$$

elde edilir. (5.49) eşitliği (5.47) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\frac{\tau}{\kappa} = c_5 \tag{5.50}$$

bulunur. Son olarak, (5.49) ve (5.50) denklemleri (5.46) denkleminde yerine yazılırsa teoremin ispatı tamamlanır. ■

Teorem 5.3.6 den aşağıdaki önerme ifade edilebilir:

Önerme 5.3.7: γ homojen kontakt 3-manifoldlarda birim hızlı bir *f*-biharmonik Legendre eğrisi olsun. γ sabit geodezik eğriliğe sahip ise biharmoniktir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

3. bölümde, iki reel uzay formun çarpım manifoldunun bir altmanifoldunun *f*-biharmonik olma koşulları Teorem 3.5 ile verilmiştir. Bu teoremden faydalanılarak, Sonuç 3.6, Sonuç 3.7, Sonuç 3.8 ve Önerme 3.9 elde edilmiştir.

4. bölümde, Tanım 4.2.1 de *f*-biminimal immersiyon tanımı verilmiştir. Bu tanımdan faydalanarak, Önerme 4.2.3 ve Önerme 4.2.5 de bir Riemann manifoldu üzerindeki eğrinin ve hiperyüzeyin *f*-biminimal olma koşulları incelenmiştir. Elde edilen sonuçları destekleyen Örnek 4.2.8, Örnek 4.2.9 ve Örnek 4.2.12 verilmiştir. Son olarak, Sasakian uzay formlar üzerinde *f*-biminimal Legendre eğrileri ele alınarak, Örnek 4.3.2 elde edilmiştir.

5. bölümde, Teorem 5.1.1, Teorem 5.2.1 ve Teorem 5.3.1 de sırasıyla Sol uzayları, Cartan-Vranceanu 3-boyutlu uzayları ve homojen kontakt 3-manifoldları için *f*-biharmonik olma şartları verilmiştir.

İleriki çalışmalar için elde edilen sonuçların farklı uzaylar üzerinde karşılıklarının incelenebilmesi mümkün görülmektedir.

7. KAYNAKLAR

[1] Eells, Jr. J. and Sampson, J. H., “Harmonic mappings of Riemannian manifolds”, Amer. J. Math., 86, 109-160, (1964)

[2] Eells, Jr. J. and Lemaire, L. “Selected topics in harmonic maps”, *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*, 50. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, by the American Mathematical Society, Providence, RI, (1983).

[3] Jiang, G. Y., “2-harmonic maps and their first and second variational formulas”, *Chinese Ann. Math. Ser. A*, 7, 389-402, (1986).

[4] Chen, B.Y., “A report on submanifolds of finite type”, *Soochow J. Math.*, 22, 117-337, (1996).

[5] Course, N., “*f*-Harmonic maps”, Ph.D. Thesis, *University of Warwick*, Conventry, CV4 7AL, UK, (2004).

[6] Lu, W-J., “On *f*-biharmonic maps between Riemannian manifolds”, *arXiv:1305.5478*, (2013).

[7] Ou, Y.L., “On *f*-biharmonic maps and *f*-biharmonic submanifolds”, *Pacific J. Math.* 271, 461-477, (2014).

[8] Roth, J., “A note on biharmonic submanifolds of product spaces”, *J. Geom*. 104, 375-381, (2013).

[9] Loubeau, L. and Montaldo, S., “Biminimal immersions”, *Proc. Edinb. Math. Soc.(2)*, 51(2), 421-437, (2008).

[10] Caddeo, R., Oniciuc, C. and Piu, P., “Explicit formulas for non-geodesic biharmonic curves of the Heisenberg group”, *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino* 62, no. 3, 265–277, (2004).

[11] Ou, Y-L. and Z-P. Wang., “Biharmonic maps into Sol and Nil spaces” ,*arXiv preprint math/0612329*, (2006).

[12] Caddeo, R., Montaldo, S., Oniciuc, C. and Piu, P., "The classification of biharmonic curves of Cartan-Vranceanu 3-dimensional spaces", *Modern trends in geometry and topology*, Cluj Univ. Press, Cluj-Napoca, 121-131, (2006).

[13] Inoguchi, Jun-ichi., "Biminimal submanifolds in contact 3-manifolds", *Balkan Journal of Geometry and Its Applications,* 12(1), 56, (2007).

[14] Hacısalihoğlu, H. H., *Diferensiyel Geometri*, İnönü Üniversitesi Yayınları, (1983).

[15] Blair, D. E., *Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds, Second Edition*, Progress in Mathematics, 203, Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA,(2010).

[16] Carmo, M. P., *Riemannian geometry*, Translated from the second Portuguese edition by Francis Flaherty, Mathematics: Theory & Applications Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, (1992).

[17] Yano, K. and Kon, M., *Structures on manifolds,* Series in Pure Mathematics, 3.World Scientific Publishing Co., Singapore, (1984).

[18] Kobayashi, S. and Nomizu, K., "Foundations of differential geometry", John Wiley and Sons, Inc., New York, (1996).

[19] Warner, F. W., *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Corrected reprint of the 1971 edition. Graduate Texts in Mathematics, 94. Springer-Verlag, New York-Berlin, (1983).

[20] Chen, B.Y., *Geometry of submanifolds,* Pure and Applied Mathematics, No. 22. Marcel Dekker, Inc., New York, (1973).

[21] Ferus, D. and Schirrmacher, S., "Submanifolds in Euclidean Space with simple geodesics", *Math Ann.*, 260, no. 1, 57-62, (1982).

[22] O'Neill, B., "Semi-Riemannian geometry with applications to relativity", *Pure and Applied Mathematics, 103. Academic Press, Inc. (Harcourt Brace Jovanovich, Publisher), New York,* (1983).

[23] Blair, D. E.,“Geometry of manifolds with structural group $\mathcal{U}(n)\times\mathcal{O}(s)$ ”, *J. Differential Geometry*, 4, 155-167, (1970).

[24] Ouakkas, S., Nasri, R. and Djaa, M., “On the *f*-harmonic and *f*-biharmonic maps”, *JP J.Geom. Topol*. 10(1), 11-27, (2010).

[25] Dillen, F. and Kowalczyk, D., “Constant angle surfaces in product spaces”, *J. Geom. Phys.* 62, 1414-1432, (2012).

[26] Ou, Y.L., “On conformal biharmonic immersions”, *Ann. Global Analysis and Geometry*, 36(2), 133–142, (2009).

[27] Güvenç, S., “Riemann Manifoldları Üzerinde Slant Eğriler”, Doktora Tezi, *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Matematik Anabilim Dalı, Balıkesir, (2015).

[28] Perrone, D., “Homogeneous contact Riemannian three-manifolds.” *Illinois Journal of Mathematics* 42(2), 243-256, (1998).