T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

FABER VE GENELLEŞMİŞ FABER POLİNOMLARININ YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

DOKTORA TEZİ

Yunus Emre YILDIRIR

Balıkesir, Nisan-2006

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

FABER VE GENELLEŞMİŞ FABER POLİNOMLARININ YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

DOKTORA TEZİ

Yunus Emre YILDIRIR

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Daniyal M. İSRAFİLOV

Sınav Tarihi: 13. 04. 2006

Jüri Üyeleri:	**Prof. Dr. Daniyal M. İSRAFİLOV**	**(Danışman, BAÜ)**
	Prof. Dr. Musa ERDEM	**(BAÜ)**
	Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL	**(UÜ)**
	Doç. Dr. Osman BİZİM	**(UÜ)**
	Yrd. Doç. Dr. Recep ŞAHİN	**(BAÜ)**

Balıkesir, Nisan-2006

ÖZET

FABER VE GENELLEŞMİŞ FABER POLİNOMLARININ YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Yunus Emre Yıldırır
Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,
Matematik Anabilim Dalı

(Doktora Tezi / Tez Danışmanı: Prof. Dr. Daniyal M. İsrafilov)

Balıkesir, 2006

Bu tez 3 ana bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, daha sonraki bölümlerde kullanılmak üzere, bazı temel tanım, teorem ve özellikler verilmiştir. Bu özelliklerin içinde, esasen, yaklaşımın çalışılacağı Bergman ve ağırlıklı Bergman uzaylarının tanımlandığı kvazikonform sınırlı bölgelerin özellikleri verilmiştir.

İkinci ve üçüncü bölümler, bu tezdeki ana sonuçların verildiği bölümlerdir. İkinci bölümde, ilk olarak, Bergman ve ağırlıklı Bergman uzayları tanıtılmıştır. Ayrıca, sonsuz bölgeler için Faber polinomlarının tanımı ve bazı özellikleri incelenmiştir. Daha sonra, kvazikonform eğriyle sınırlı sonsuz bölgelerde geçerli bir integral gösterimi elde edilmiştir. Bu gösterim yardımıyla, Bergman uzaylarından olan fonksiyonlara Faber serileriyle yaklaşımın mümkünlüğü ispatlanmıştır. Son olarak, seriye açılımın tekliği incelenmiş ve yaklaşım hatası değerlendirilmiştir.

Üçüncü bölümde ise, bir önceki bölümde elde edilen sonuçlar, ağırlıklı Bergman uzaylarına genelleştirilmiştir.

ANAHTAR SÖZCÜKLER: Bergman uzayı / kvazikonform eğri / kvazikonform yansıma / kvazidisk / Faber polinomu / genelleşmiş Faber serisi.

ABSTRACT

APPROXIMATION PROPERTIES OF FABER AND GENERALIZED FABER POLYNOMIALS

Yunus Emre Yıldırır
Balıkesir University, Institue of Science,
Department of Mathematics

(Ph. D. Thesis / Supervisor : Prof. Dr. Daniyal Mehmetoğlu İsrafilov)

Balıkesir, 2006

This thesis contains three main chapters.

In the first chapter, some fundamental definitions, theorems and properties have been given for using next two chapters. In these properties, especially, it has been investigated properties of domains with a quasiconformal boundary where Bergman and weighted Bergman spaces (in which the approximation will be studied) have been defined.

In the second and third chapter, main results of this thesis have been given. In the second chapter, firstly, it has been introduced Bergman and weighted Bergman spaces. Then, it has been investigated the definition and some properties of Faber polynomials on infinite domains. After that, an integral representation on infinite domains with a quasiconformal boundary has been obtained. By using this integral representation, the possibility of the approximation to functions in Bergman spaces by their Faber series has been proved. Finally, the uniqueness of the expantion to the series has been investigated and the rate of the approximation has been evaluated.

In the final chapter, results obtained in the previous chapter have been generalized to the weighted Bergman spaces.

KEY WORDS : Bergman space / quasiconformal curve / quasiconformal reflection / quasidisk / Faber polynomial / generalized Faber series.

İÇİNDEKİLER

ÖZET ii
ABSTRACT iii
İÇİNDEKİLER iv
SEMBOL LİSTESİ v
ÖNSÖZ vi
GİRİŞ 1
1. ÖN BİLGİLER 3
   1.1 Temel Tanım ve Teoremler 3
   1.2 Kvazikonform Eğriler ve Yansımalar 6
2. BERGMAN UZAYLARINDA FABER SERİLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ 14
   2.1 Bergman ve Ağırlıklı Bergman Uzayları 14
   2.2 Sonsuz Bölgeler İçin Faber Polinomları 17
   2.3 Yardımcı Sonuçlar ve İspatları 19
   2.4 Ana Sonuçlar ve İspatları 26
3. AĞIRLIKLI BERGMAN UZAYLARINDA GENELLEŞMİŞ FABER SERİLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ 34
   3.1 Sonsuz Bölgelerde Genelleşmiş Faber Polinomları 34
   3.2 Yardımcı Sonuçlar ve İspatları 36
   3.3 Ana Sonuçlar ve İspatları 45
KAYNAKLAR 52

SEMBOL LİSTESİ

Simge	Adı
$\boldsymbol{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\boldsymbol{R}$	Reel sayılar kümesi
$\boldsymbol{D}$	$\{z \in \boldsymbol{C} : \lvert z \rvert < 1\}$ kümesi (açık birim disk)
$\overline{A}$	*A* kümesinin kapanışı
CA	***C***-A (A kümesinin tümleyeni)
∂A	*A* kümesinin sınırı
$D(z_0, r)$	$\{z \in \boldsymbol{C} : \lvert z - z_0 \rvert < r\}$ kümesi
$\overline{D}(z_0, r)$	$\{z \in \boldsymbol{C} : \lvert z - z_0 \rvert \leq r\}$ kümesi
C(A,B)	A'dan B'ye tanımlı sürekli fonksiyonlar kümesi

ÖNSÖZ

Doktora çalışmalarım boyunca, beni yönlendiren, yoğun çalışmaları arasında bana değerli zamanını ayırıp yardım ve desteğini hiç esirgemeyen değerli Hocam Prof. Dr. Daniyal Mehmetoğlu İsrafilov'a teşekkürlerimi sunarım.

Tüm öğrenim yaşantım süresince, maddi ve manevi destekleriyle bugünlere gelmemde büyük katkıları olan başta annem ve babam olmak üzere aileme çok teşekkür ederim.

Tanıştığımız günden itibaren sonsuz anlayış ve desteğiyle her zaman yanımda olan biricik hayat arkadaşım, sevgili eşim Esra'ya sonsuz teşekkürler…

Balıkesir, 2006 **Yunus Emre YILDIRIR**

GİRİŞ

Yaklaşım teorisinde, incelenmesi zor olan fonksiyonlara iyi özelliklere sahip basit fonksiyonlarla yaklaşım problemleri araştırılmaktadır. Genellikle, iyi özelliklere sahip yaklaşan fonksiyonlar kümesi olarak, üzerinde çalışılan temel fonksiyon uzayının belirli bir alt uzayı seçilir. Bu alt uzayın fonksiyonları temel uzayın fonksiyonlarına göre daha basit özelliklere sahip olmaktadır. Yaklaşım teorisinde, yaklaşan alt uzaylar olarak sıklıkla cebirsel polinomlar, trigonometrik polinomlar veya rasyonel fonksiyonlardan oluşan uzaylar seçilir.

Bu tez çalışmasında, sınırsız kvazidisklerde tanımlı Bergman uzayları ve ağırlıklı Bergman uzayları üzerinde çalışılmış ve yaklaşan polinomlar, yaklaşılan fonksiyonların Faber veya genelleşmiş Faber serilerinin kısmi toplamları yardımıyla inşa edilmiştir. Faber polinomları yaklaşım teorisinde önemli bir rol oynamaktadır. Bu polinomların doğurduğu Faber serileri, analitik fonksiyonların yaklaşımı ile ilgili birçok temel teoremin ispatında önemli rol üstlenmiştir. Özel halde, Faber serileri, dairesel bölgeler için mevcut olan Taylor serilerinin, basit bağlantılı bölgelere doğal bir genelleşmesidir.

Fonksiyonların basit bağlantılı bölgelerde Faber serisine açılabilmeleri için her zaman bir integral gösterimine gerek duyulmaktadır. Bilinen Cauchy integral gösterimi bölge sınırının sonlu uzunluklu olduğu durumlarda bu görevi başarı ile üstlenmektedir. Bölge sınırının sonlu uzunluklu olmadığı durumlarda bu gösterim kullanılamadığından yeni integral gösterimlerine gerek duyulmaktadır. Bu çalışmada, kvazikonform eğriyle sınırlı sonsuz bölgelerde geçerli bir integral gösterimi elde edilmiş olup bu integral gösterimi yardımıyla fonksiyonların Faber serilerine açılabilme durumları, elde edilen serilerin yakınsaklık, teklik problemleri incelenmiş ve bakılan fonksiyonlara bu serilerle yaklaşım hatası değerlendirilmiştir. Bilindiği gibi kvazikonform eğriler özel halde yerel sonlu uzunluklu bile olmayabilir.

Bu tezde elde edilen sonuçların bir kısmı sonlu bölgeler için 1996'da Çavuş tarafından [1] ve 1981, 1989 ve 1998'de İsrafilov tarafından [2,3,4] ispatlanmıştır.

Metin içinde geçen c, c_1, c_2,.., farklı bağıntılarda genelde farklı olan ve tanım ve teoremlerdeki esas parametrelere bağlı olmayan sabitlerdir.

1. ÖN BİLGİLER

1.1 Temel Tanım ve Teoremler

1.1.1 Tanım: Kompleks düzlemde, bağlantılı ve açık bir kümeye bölge, bağlantılı ve kapalı bir kümeye de kontinyum denir[5, s.1].

1.1.2 Tanım: $[a,b] \subset \boldsymbol{R}$ olmak üzere sürekli bir

$$\Gamma : [a,b] \to \boldsymbol{C}$$

fonksiyonuna kompleks düzlemde bir eğri denir. Burada $\Gamma(a)$ ve $\Gamma(b)$ noktalarına sırasıyla eğrinin başlangıç ve bitim noktaları; bir Γ eğrisi verildiğinde $\Gamma(a) = \Gamma(b)$ oluyorsa Γ'ya kapalı eğri; Γ' türevi var ve sürekli ise Γ'ya diferansiyellenebilir eğri; diferansiyellenebilir bir Γ eğrisi için $\Gamma'(t) \neq 0$ oluyorsa Γ'ya düzgün eğri; bir Γ eğrisi için sadece $t_1 = t_2$ durumunda $\Gamma(t_1) = \Gamma(t_2)$ oluyorsa Γ'ya Jordan eğrisi denir[6].

1.1.3 Tanım: $[a,b] \subset \boldsymbol{R}$ olmak üzere

$$\Gamma : z = z(t) = x(t) + iy(t)$$

sürekli eğrisi verilmiş olsun. Eğer, n doğal sayı olduğunda

$$t_1 = a < t_2 < t_3 < \ldots < t_{n+1} = b$$

koşulunu sağlayan $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_{n+1}$ değerlerinin keyfi bir dizisi için

$$\sum_{k=1}^{n} \left| z(t_{k+1}) - z(t_k) \right|$$

toplamı sınırlı kalıyorsa Γ eğrisine sonlu uzunluklu eğri denir. Başka bir deyişle, Γ eğrisini gösteren z fonksiyonu sınırlı değişimli ise Γ'ya sonlu uzunluklu eğri denir[7, s.417].

1.1.4 Teorem(Riemann Dönüşüm Teoremi): $G \subset \mathbf{C}$ sınırı en az iki noktadan oluşan basit bağlantılı bir bölge ve $z_0 \in G$ olsun. Bu durumda, G bölgesini açık birim diske

$$f(z_0) = 0 \text{ ve } f'(z_0) > 0$$

koşulları altında resmeden bir tek konform dönüşüm vardır[6, s.8].

1.1.5 Teorem: Eğer bir G bölgesinin sınırı Jordan eğrisi ise, G'nin $\boldsymbol{D}$ açık birim diskine her konform dönüşümü $\overline{G}$'ye birebir ve sürekli olarak genişletilebilir. Aynı şekilde, G'nin sınırı bir Jordan eğrisi ise, $C\overline{G}$'nin $C\overline{\boldsymbol{D}}$'ye her konform dönüşümü CG'ye birebir ve sürekli olarak genişletilebilir[5, s.24].

1.1.6 Teorem(Sınırsız Bölgeler için Cauchy İntegral Teoremi): G, sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisiyle sınırlanmış sınırlı bölge ve Γ bunun pozitif yönlendirilmiş sınırı olsun. Eğer f, CG bölgesinde analitik bir fonksiyon ise,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \begin{cases} f(\infty) - f(z) & : z \in C\overline{G} \\ f(\infty) & : z \in G \end{cases}$$

olur[7, s.388].

1.1.7 Teorem(Lebedev-Millin): E, en az iki noktadan oluşan ve tümleyeni bağlantılı olan sınırlı bir kontinyum ve Q, E'de analitik bir fonksiyon olsun. Ψ, birim diskin dışını E'nin dışına resmeden bir konform dönüşüm olsun. Eğer $Q(\Psi(t))$ fonksiyonunun $1 < |t| < \rho$ halkasındaki Laurent açılımı

$$Q(\Psi(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k + \sum_{s=1}^{\infty} b_s t^{-s}$$

ise, E'nin Q fonksiyonu altındaki görüntüsünün, Q fonksiyonunun Riemann yüzeyindeki alanı

$$S(E) = \pi\left(\sum_{k=1}^{\infty} k|a_k|^2 - \sum_{s=1}^{\infty} s|b_s|^2 \right)$$

olur[8, s.170].

1.1.8 Teorem(Green Formülü): G, sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi ile sınırlanmış sınırlı bir bölge ve f, G bölgesinde f_z ve $f_{\bar{z}}$ sürekli kısmi türevlerine sahip ve $\overline{G}$ kümesinde sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $f_{\bar{z}}$ fonksiyonu G üzerinde integrallenebilirse

$$\iint_G f_{\bar{z}} d\sigma_z = \frac{1}{2i} \int_{\partial G} f(z) dz$$

olur[9, s.9].

1.1.9 Teorem(Cauchy-Green Formülü): G, sınırı sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi olan sınırlı bir bölge ve f, G bölgesinde f_z ve $f_{\bar{z}}$ sürekli kısmi türevlerine sahip ve $\overline{G}$ kümesinde sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $f_{\bar{z}}$ fonksiyonu G üzerinde integrallenebilir ise her $z \in G$ için

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{\pi} \iint_G \frac{f_{\bar{\zeta}}}{\zeta - z} d\sigma_\zeta$$

olur[9, s.10].

1.1.10 Teorem(Dini Teoremi): G, kompleks düzlemde açık bir küme, $\{f_n\}$, $C(G,\boldsymbol{R})$ uzayında monoton artan bir fonksiyon dizisi ve $f \in C(G,\boldsymbol{R})$ olmak üzere her $z \in G$ için

$$\lim f_n(z) = f(z)$$

olsun. Bu durumda, G'nin her kompakt alt kümesi üzerinde $\{f_n\}$ dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır[10, s.150].

1.2 Kvazikonform Eğriler ve Yansımalar

1.2.1 Tanım: $G \subset \mathbf{C}$ bir bölge ve u, G'de tanımlı reel değerli ve sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer, kapanışı G'de bulunan ve kenarları x ve y eksenlerine paralel olan her R dikdörtgeni için, u fonksiyonu R'de çizilen yatay ve düşey doğru parçalarının hemen hepsi üzerinde mutlak sürekli ise, u fonksiyonu G bölgesinde *doğrular üzerinde mutlak süreklidir* denir. Bir $h: G \to \mathbf{C}$ fonksiyonunun reel ve sanal bileşenleri G bölgesinde doğrular üzerinde mutlak sürekli iseler, h fonksiyonu G bölgesinde doğrular üzerinde mutlak süreklidir denir[11, s.127].

$G \subset \mathbf{C}$ bir bölge ve $z = x + iy$ olmak üzere $h(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, G bölgesinde doğrular üzerinde mutlak sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda, $y=c$ doğruları üzerinde u ve v fonksiyonları x değişkenli fonksiyonlardır ve bu doğruların hemen hepsi üzerinde mutlak süreklidirler. Bu nedenle, G'de hemen her yerde u_x ve v_x kısmi türevleri vardır. Aynı şekilde, G'de hemen her yerde u_y ve v_y kısmi türevleri vardır. Bu nedenle G'de hemen her yerde

$$h_z = \frac{1}{2}\left(h_x - ih_y\right) \text{ ve } h_{\bar{z}} = \frac{1}{2}\left(h_x + ih_y\right)$$

kısmi türevleri mevcuttur.

1.2.2 Tanım: $G \subset \mathbf{C}$ bir bölge, $h: G \to \mathbf{C}$ bir homeomorfizm ve $K \geq 1$ olsun. Eğer aşağıdaki iki koşul sağlanıyorsa *h* dönüşümüne *G* üzerinde bir K-kvazikonform dönüşüm denir[12, s.24].

1) *h, G* bölgesinde doğrular üzerinde mutlak süreklidir.

2) $k = $(K-1)/(K+1) olmak üzere, *G*'de hemen her yerde $|h_{\bar{z}}| \leq k|h_z|$ olur.

Bir kvazikonform dönüşümün bir yansıma ile bileşkesine yön değiştiren kvazikonform dönüşüm ya da antikvazikonform dönüşüm denir.

1.2.3 Teorem: Kvazikonform dönüşümlerin aşağıdaki özellikleri vardır.

a) Konform dönüşümler 1-kvazikonformdur. Tersine 1-kvazikonform dönüşümler de konformdur.

b) K-kvazikonform bir dönüşümün tersi de K-kvazikonformdur.

c) K_1-kvazikonform bir dönüşüm ile K_2-kvazikonform bir dönüşümün bileşkesi K_1K_2-kvazikonformdur[12, s.22].

1.2.4 Tanım: $\overline{\boldsymbol{C}}$'nin kendi üzerine bir K-kvazikonform dönüşümü altında bir çemberin görüntüsüne bir K-*kvazikonform eğri*, kvazikonform bir eğriyle sınırlı bölgeye de *kvazidisk* denir[11, s.97].

Tanımdan görüldüğü gibi her kvazikonform eğri bir Jordan eğrisidir. Ayrıca, her analitik eğri bir kvazikonform eğridir. Kvazikonform bir eğrinin 2 boyutlu Lebesgue ölçümü sıfırdır, 1 boyutlu Lebesgue ölçümü ise sonlu olmayabilir, yani kvazikonform eğri sonlu uzunluklu olmayabilir[11, s.104].

1.2.5 Tanım: Γ, bir Jordan eğrisi olsun. G_1 ve G_2 ile sırasıyla $\overline{\boldsymbol{C}} - \Gamma$'nın sınırlı ve sınırsız bileşenlerini gösterelim. G_1 bölgesini G_2 bölgesine, G_2 bölgesini G_1 bölgesine resmeden ve Γ eğrisinin noktalarını sabit bırakan bir antikvazikonform dönüşüme Γ'ya göre bir *kvazikonform yansıma* denir[11, s.98].

Γ, K-kvazikonform bir eğri olsun. Γ'nın sınırladığı sınırlı bölgeyi *G* ile gösterelim ve $0 \in G$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, $\overline{\boldsymbol{C}}$'nin kendi üzerine, birim çemberi Γ'ya resmeden bir w K-kvazikonform dönüşümü vardır. Bu dönüşüm $\boldsymbol{D}$'yi G'ye ve $C\overline{\boldsymbol{D}}$'yi $C\overline{G}$'ye resmeder. Birim çembere göre $j(z)=1/\bar{z}$ yansımasını göz önüne alalım. Bu durumda $y=w\circ j\circ w^{-1}$ dönüşümü G'yi $C\overline{G}$'ye, $C\overline{G}$'yi G'ye resmeden ve Γ'nın noktalarını sabit bırakan bir K^2-antikvazikonform dönüşümdür. Yani, Γ'ya göre bir K^2-kvazikonform yansımadır.

Tersine, Γ Jordan eğrisinin bir y kvazikonform yansımasına sahip olduğunu varsayalım. $\boldsymbol{D}$'nin G'ye bir f konform dönüşümünü alalım. Bu durumda,

$$h(z)=\begin{cases} f(z) & ;z\in\overline{\boldsymbol{D}} \\ (y\circ f\circ j)(z) & ;z\in C\overline{\boldsymbol{D}} \end{cases}$$

dönüşümü, birim çemberi Γ'ya resmeden, $\overline{\boldsymbol{C}}$'den $\overline{\boldsymbol{C}}$'ye bir kvazikonform dönüşümdür. O halde Γ bir kvazikonform eğri olur.

Sonuç olarak, bir Jordan eğrisinin kvazikonform bir yansımaya sahip olması için gerekli ve yeterli koşul kvazikonform bir eğri olmasıdır.

G, sınırı kvazikonform bir Γ eğrisi olan sınırlı ve basit bağlantılı bir bölge ve $0\in G$ olsun. Γ'nın bir y kvazikonform yansımasına sahip olduğunu biliyoruz. Bu kvazikonform yansıma, yeterince küçük bir $\delta>0$ sayısı için c_1 ve c_2 sabit sayılar olmak üzere $\delta<|\varsigma|<\dfrac{1}{\delta}$ ve $\varsigma\notin\Gamma$ olduğunda

$$|y_\varsigma|+|y_{\bar{\varsigma}}|\le c_1 \ ,$$

$\dfrac{1}{\delta}<|\varsigma|$ ya da $|\varsigma|\le\delta$ olduğunda ise

$$|y_\varsigma|+|y_{\bar{\varsigma}}|\le c_2\,|\varsigma|^{-2} \tag{1.1}$$

koşullarını sağlayacak, $\Gamma \cup \{0\}$ dışında her yerde türevlenebilecek ve $y(0)=\infty$, $y(\infty)=0$ olacak biçimde seçilebilir[4]. Bundan sonra bu şekildeki yansımaları *doğal kvazikonform yansıma* olarak kullanacağız.

Ayrıca, y K-kvazikonform bir yansıma ise, $\bar{y}$ hemen her yerde türevlenebilen K-kvazikonform bir dönüşüm olur[4].

Sınırlı bir G bölgesinde analitik ve $\overline{G}$ 'de sürekli olan fonksiyonların kümesini $A(\overline{G})$ ile; G 'de analitik olan ve

$$\iint_G |f(z)| d\sigma_z < \infty$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonlarının kümesini de $A^1(G)$ ile göstereceğiz. Burada $d\sigma_z$ iki boyutlu Lebesgue ölçümüdür.

1.2.6 Teorem: G, sınırı kvazikonform bir Γ eğrisi olan, sınırlı, basit bağlantılı bir bölge, $0 \in G$ ve $f \in A(\overline{G})$ olsun. Bu durumda, her $z \in G$ için,

$$f(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{C\overline{G}} \frac{(f \circ y)(\varsigma)}{(\varsigma - z)^2} y_{\bar{\varsigma}}(\varsigma) d\sigma_{\varsigma}$$

olur. Burada y, Γ 'ya göre kvazikonform bir yansımadır.

İspat: f fonksiyonun

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & ; z \in \overline{G} \\ (f \circ y)(z); & z \in C\overline{G} \end{cases}$$

sürekli genişlemesini oluşturalım. $\tilde{f}$ fonksiyonunun hemen her yerde $\tilde{f}_z$ ve $\tilde{f}_{\bar{z}}$ türevleri vardır ve

$$\tilde{f}_z = \begin{cases} f'(z) & ; z \in G \\ (f_y \circ y)(z) y_z(z) & ; z \in C\overline{G} \end{cases}$$

$$\tilde{f}_{\bar{z}} = \begin{cases} 0 & ; z \in G \\ (f_y \circ y)(z) y_{\bar{z}}(z) & ; z \in C\overline{G} \end{cases}$$

olur.

$$F(z) = \int_{\gamma} f(t)dt, \qquad z \in \overline{G}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Burada γ, 0 ve z noktalarını birleştiren ve tümüyle G içinde kalan sonlu uzunluklu bir yaydır. F, G'de analitik, $\overline{G}$'de türevlenebilir ve $F(0) = 0$ dır. F fonksiyonunun,

$$\tilde{F}(z) = \begin{cases} F(z) & ; z \in \overline{G} \\ (F \circ y)(z) & ; z \in C\overline{G} \end{cases}$$

sürekli genişlemesini göz önüne alalım. $\tilde{F}$ fonksiyonu $\overline{\boldsymbol{C}}$'de sürekli ve sınırlıdır. $\tilde{F}(\infty) = \tilde{F}(0) = F(0) = 0$'dır. $\tilde{F}_z$ ve $\tilde{F}_{\bar{z}}$ türevleri vardır. Her $z \in \overline{G}$ için $F'(z) = f(z)$ olduğu açıktır. Şimdi $\tilde{F}_{\bar{z}} \in A^2(\overline{\boldsymbol{C}})$ olduğunu gösterelim. y yansımasının K-kvazikonform olduğunu varsayalım. Bu durumda $\bar{y}$ hemen her yerde türevlenebilir bir K-kvazikonform bir dönüşüm olacağından, $k = (\text{K-1})/(\text{K+1})$ olmak üzere, hemen her yerde

$$\left|\frac{y_z}{y_{\bar{z}}}\right| = \left|\frac{\bar{y}_{\bar{z}}}{\bar{y}_z}\right| \le k < 1$$

olur. y'nin jakobiyeni $J(y) = |y_z|^2 - |y_{\bar{z}}|^2 < 0$ olduğundan,

$$\iint_{CG}|y_{\bar z}|^2 d\sigma_z = \iint_{CG}\left(1-\left|\frac{y_z}{y_{\bar z}}\right|^2\right)^{-1}|J(y)|d\sigma_z \le \frac{1}{1-k^2}\iint_{CG}|J(y)|d\sigma_z$$
$$= \frac{1}{1-k^2}\iint_{G} d\sigma_\zeta = \frac{1}{1-k^2}\,\text{alan}(G) < \infty$$

bulunur. $\tilde F$, G'de analitik olduğundan her $z \in G$ için $\tilde F_{\bar z} = 0$ olur. Ayrıca Γ eğrisinin 2 boyutlu Lebesgue ölçüsü sıfır olduğundan

$$\iint_{G}\left|\tilde F_{\bar z}\right|^2 d\sigma_z = 0$$

elde edilir.

$$\iint_{\boldsymbol{C}}\left|\tilde F_{\bar z}\right|^2 d\sigma_z = \iint_{CG}\left|\tilde F_{\bar z}\right|^2 d\sigma_z = \iint_{CG}\left|(F_y \circ y) y_{\bar z}\right|^2 d\sigma_z = \iint_{CG}\left|F_y(y(z))\right|^2 |y_{\bar z}|^2 d\sigma_z$$
$$= \iint_{CG}\left|f(y(z))\right|^2 |y_{\bar z}|^2 d\sigma_z \le \frac{1}{1-k^2}\iint_{CG}\left|f(y(z))\right|^2 |J(y)| d\sigma_z$$
$$= \frac{1}{1-k^2}\iint_{G}|f(\zeta)|^2 d\sigma_\zeta \le \frac{M^2}{1-k^2}\iint_{G} d\sigma_\zeta = \frac{M^2}{1-k^2}\,\text{alan}(G) < \infty$$

olduğundan $\tilde F_{\bar z} \in A^2(\overline{\boldsymbol{C}})$ olur. Burada $M = \max\{|f(\zeta)| : \zeta \in \overline{G}\}$ olarak alınmıştır.

Merkezi 0, yarıçapı r olan ve G'yi kapsayan bir disk alalım. Cauchy-Green formülünden, $|z| < r$ biçimindeki her z için

$$\tilde F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}\frac{\tilde F(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|\le r}\frac{\tilde F_{\bar\zeta}}{\zeta - z}d\sigma_\zeta$$

yazılabilir. Buradan, her $z \in G$ için

$$f(z)=\tilde{F}_z=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r}\frac{\tilde{F}(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|\le r}\frac{\tilde{F}_{\overline{\zeta}}}{(\zeta-z)^2}d\sigma_\zeta$$

elde edilir. $\zeta\in C\overline{G}$ için $\tilde{F}_{\overline{\zeta}}=(F_y\circ y)y_{\overline{\zeta}}$ ve $\zeta\in G$ için $\tilde{F}_{\overline{\zeta}}=0$ olduğundan, her $z\in G$ için

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r}\frac{\tilde{F}(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\{\zeta:|\zeta|\le r\}-G}\frac{(F_y\circ y)y_{\overline{\zeta}}}{(\zeta-z)^2}d\sigma_\zeta\\&=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r}\frac{\tilde{F}(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\{\zeta:|\zeta|\le r\}-G}\frac{(f\circ y)(\zeta)y_{\overline{\zeta}}}{(\zeta-z)^2}d\sigma_\zeta\end{aligned}$$

ve

$$\lim_{r\to\infty}\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r}\frac{\tilde{F}(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta\right|\le\lim_{r\to\infty}\frac{1}{2\pi}\max_{|\zeta|=r}\left|\tilde{F}(\zeta)\right|\frac{4}{r^2}\int\limits_{|\zeta|=r}|d\zeta|=\lim_{r\to\infty}\max_{|\zeta|=r}\left|\tilde{F}(\zeta)\right|\frac{4}{r}=0$$

olur. Çünkü r yeterince büyük olduğunda $\frac{r}{2}\le|\zeta-z|$ eşitsizliği sağlanır.

Ayrıca $r\to\infty$ için $\{\zeta:|\zeta|\le r\}\to\overline{\boldsymbol{C}}$ olduğundan, her $z\in G$ için

$$f(z)=-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{CG}\frac{(f\circ y)(\zeta)}{(\zeta-z)^2}y_{\overline{\zeta}}(\zeta)d\sigma_\zeta$$

elde edilir. Fakat, Γ'nın ölçüsü sıfır olduğundan, son eşitlik

$$f(z)=-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{C\overline{G}}\frac{(f\circ y)(\zeta)}{(\zeta-z)^2}y_{\overline{\zeta}}(\zeta)d\sigma_\zeta,\qquad z\in G$$

halini alır.

Bu teorem Belyi tarafından ispatlanmıştır. Daha sonra bu integral gösterimi Batchaev tarafından aşağıdaki şekilde güçlendirilmiştir[13].

1.2.7 Teorem: *G*, sınırı kvazikonform bir eğri olan, sınırlı, basit bağlantılı bir bölge, $0 \in G$ ve *f*, *G*'de tanımlı bir fonksiyon ve *y*, ∂G'ye göre bir doğal kvazikonform yansıma olsun. Bu durumda,

$$f(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{C\overline{G}} \frac{(f \circ y)(\varsigma)}{(\varsigma - z)^2} y_{\bar{\varsigma}}(\varsigma) d\sigma_{\varsigma}, \quad z \in G$$

olması için gerek ve yeter koşul $f \in A^1(G)$ olmasıdır.

Bu Teoremin tam ispatı [14, s.110]'da bulunabilir.

2. BERGMAN UZAYLARINDA FABER SERİLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

2.1 Bergman ve Ağırlıklı Bergman Uzayları

G, kompleks düzlemde basit bağlantılı bir bölge ve ω, G üzerinde bir ağırlık fonksiyonu, yani G üzerinde tanımlı, hemen her yerde sıfırdan farklı, negatif olmayan ve G üzerinde integrallenebilen bir fonksiyon olsun. G 'de analitik olan ve

$$\iint_G |f(z)|^2 \omega(z) d\sigma_z < \infty$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonlarının kümesini $A^2(G,\omega)$ ile gösterelim. Burada $d\sigma_z$ iki boyutlu Lebesgue ölçümüdür. Bir $f \in A^2(G,\omega)$ fonksiyonunun normunu

$$\|f\|_{A^2(G,\omega)} := \left(\iint_G |f(z)|^2 \omega(z) d\sigma_z \right)^{1/2}$$

ile tanımlarsak, $A^2(G,\omega)$ uzayı normlu bir uzay olur. $A^2(G,\omega)$ uzayına G bölgesi üzerinde *ağırlıklı Bergman uzayı* denir. $\omega = 1$ durumunda ise $A^2(G)$ uzayına G üzerinde *Bergman uzayı* denir.

$f, g \in A^2(G)$ için

$$\langle f, g \rangle = \iint_G f(z)\, \overline{g}(z) d\sigma_z$$

biçiminde tanımlanan $\langle \cdot,\cdot \rangle$ iç çarpımına göre $A^2(G)$ bir Hilbert uzayıdır. Ayrıca polinomların kümesi $A^2(G)$'de

$$\|f\|_{A^2(G)} = \left(\langle f, f \rangle\right)^{1/2}$$

normuna göre yoğundur.

Şimdi, Γ, kompleks düzlemde sonlu bir Jordan eğrisi olsun. **C**$\backslash\Gamma$'nın sınırlı ve sınırsız bileşenlerini sırasıyla G_1 ve G_2 ile gösterelim. $f \in A^2(G_2)$ fonksiyonlarının ∞'da en az ikinci dereceden sıfıra sahip oldukları açıktır. Sınırlı durumda olduğu gibi $A^2(G_2)$ uzayının da

$$\langle f, g \rangle = \iint_{G_2} f(z)\,\overline{g}(z) d\sigma_z$$

iç çarpımına göre bir Hilbert uzayı olduğu kolayca gösterilebilir. Ayrıca $1/z$'ye göre polinomların kümesi

$$\|f\|_{A^2(G_2)} = \left(\langle f, f \rangle\right)^{1/2}$$

normuna göre $A^2(G_2)$'de yoğundur. Gerçekten, $f(z) \in A^2(G_2)$ olsun. Eğer $z = 1/\zeta$ dönüşümü yapar ve

$$f(z) = f(1/\zeta) =: f_*(\zeta)$$

tanımlarsak G_2 sonlu bir G_ζ bölgesine dönüşür ve $f_* \in A^2(G_\zeta)$ olur. Çünkü $c>0$ bir sabit olmak üzere

$$\iint_{G_\zeta} |f_*(\zeta)|^2 d\sigma_\zeta = \iint_{G_2} |f(z)|^2 \frac{d\sigma_z}{|z|^4} \le c \iint_{G_2} |f(z)|^2 d\sigma_z < \infty$$

olur. f, ∞'da en az ikinci dereceden sıfıra sahip olduğundan $\zeta = 0$ noktası f_*'ın en az ikinci dereceden sıfırıdır ve

$$\iint_{G_\zeta} \left| \frac{f_*(\zeta)}{\zeta^2} \right|^2 d\sigma_\zeta = \iint_{G_2} |f(z)|^2 d\sigma_z < \infty$$

olur. Dolayısıyla, $f_*(\zeta)/\zeta^2 \in A^2(G_\zeta)$ dır. Eğer $P_n(\zeta)$, ζ'nın bir polinomu ise

$$\begin{aligned}
\iint_{G_\zeta} \left| P_n(\zeta) - \frac{f_*(\zeta)}{\zeta^2} \right|^2 d\sigma_\zeta &= \iint_{G_\zeta} \left| P_n(\zeta)\zeta^2 - f_*(\zeta) \right|^2 \frac{1}{|\zeta|^4} d\sigma_\zeta \\
&= \iint_{G_z} \left| P_n(1/z) \frac{1}{z^2} - f(z) \right|^2 d\sigma_z
\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu, 1/z'ye göre polinomların kümesinin $A^2(G_2)$'de yoğun olduğunu gösterir. Çünkü, $P_n(\zeta)$ polinomlarının kümesi

$$\|f\|_{A^2(G_\zeta)} = \left(\langle f, f \rangle \right)^{1/2}$$

normuna göre $A^2(G_\zeta)$'da yoğundur[11, s:5].

$\wp_n$, derecesi n'yi aşmayan 1/z'ye göre polinomların kümesi olmak üzere, n=1,2,… için

$$E_n(f, G_2) := \inf_{P \in \wp_n} \|f - P\|_{A^2(G_2)}$$

ile derecesi n'yi aşmayan $1/z$'ye göre polinomlarla f'e en iyi yaklaşım sayısını gösteririz. n=1,2,… için

$$E_n(f, G_2) = \left\| f - P_n^* \right\|_{A^2(G_2)}$$

olacak biçimde derecesi n'yi aşmayan $1/z$'in bir $P_n^*(1/z)$ polinomu vardır[16, s.59]. Bu $P_n^*(1/z)$ polinomuna, $f(z) \in A^2(G_2)$ fonksiyonuna en iyi yaklaşan polinom denir.

2.2 Sonsuz Bölgeler İçin Faber Polinomları

$w = \varphi(z)$, G_1'in $C\overline{\mathbf{D}}$'ye

$$\varphi(0) = \infty \text{ ve } \lim_{z \to 0} z\varphi(z) > 0$$

koşullarını sağlayan konform dönüşümü olsun ve ψ ile φ'nin tersini gösterelim. Bu koşullar altında φ fonksiyonu orijinde bir basit kutba sahiptir. Dolayısıyla orijinin bir komşuluğunda

$$\varphi(z) = \frac{\alpha}{z} + \alpha_0 + \alpha_1 z + ... + \alpha_k z^k + ...$$

Laurent açılımı geçerlidir. Bu açılımda her iki tarafın m. kuvvetini alırsak $z \in G_1$ için

$$(\varphi(z))^m = F_m(1/z) + Q_m(z) \tag{2.1}$$

olacak biçimde z'in negatif kuvvetlerinin bir $F_m(1/z)$ polinomu ve z'in negatif olmayan kuvvetlerini içeren ve G_1 bölgesinde analitik olan bir $Q_m(z)$ fonksiyonu vardır. $F_m(1/z)$ polinomuna G_2 bölgesi için *Faber polinomu* denir. $z \in G_2$ için son eşitlikte her iki tarafın Γ boyunca pozitif yönde integralini alırsak

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{(\varphi(\zeta))^m}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{F_m(1/\zeta)}{\zeta - z}d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{Q_m(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

olur. Sınırsız bölgeler için Cauchy integral formülünden

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{F_m(1/\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = -F_m(1/z)$$

ve Cauchy integral teoreminden

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{Q_m(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = 0$$

olur. Dolayısıyla,

$$F_m(1/z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{(\varphi(\zeta))^m}{\zeta - z}d\zeta = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1}\frac{w^m\psi'(w)}{\psi(w) - z}dw$$

elde ederiz. Bu formül $F_m(1/z),\ m = 1,2,...$ polinomlarının,

$$\frac{\psi'(w)}{\psi(w) - z}, \quad z \in G_2, \quad w \in C\overline{\boldsymbol{D}}$$

fonksiyonunun $w = \infty$ noktasının komşuluğundaki seri açılımının Laurent katsayıları olduğunu gösterir. Yani,

$$\frac{\psi'(w)}{\psi(w) - z} = \sum_{m=1}^{\infty} F_m(1/z)\frac{1}{w^{m+1}}, \quad z \in G_2, \quad w \in C\overline{\boldsymbol{D}}$$

açılımı sağlanır. Bu açılımda seri $G_2 \times C\overline{\boldsymbol{D}}$'nin kompakt alt kümeleri üzerinde mutlak ve düzgün yakınsaktır. Bu eşitliğin her iki tarafının z'ye göre diferansiyeli her $(z,w) \in G_2 \times C\overline{\boldsymbol{D}}$ için

$$\frac{\psi'(w)}{(\psi(w)-z)^2} = \sum_{m=1}^{\infty} F_m'(1/z)\left(-\frac{1}{z^2}\right)\frac{1}{w^{m+1}}$$

veya

$$\frac{z^2\psi'(w)}{(\psi(w)-z)^2} = \sum_{m=1}^{\infty} - F_m'(1/z)\frac{1}{w^{m+1}} \tag{2.2}$$

eşitliğini verir. Burada seri $G_2 \times C\overline{\boldsymbol{D}}$'nin kompakt alt kümeleri üzerinde mutlak ve düzgün yakınsaktır.

2.3 Yardımcı Sonuçlar ve İspatları

2.3.1 Lemma: $f \in A^2(G_2)$ olsun. Eğer $y(z)$, Γ eğrisine göre bir doğal kvazikonform yansıma ise

$$f(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{G_1} \frac{(f \circ y)(\zeta)z^2}{(\zeta - z)^2[(y(\zeta))]^2} y_{\bar{\zeta}}(\zeta)d\sigma_\zeta, \qquad z \in G_2 \tag{2.3}$$

olur.

İspat: $f \in A^2(G_2)$ ve $y(z)$, Γ eğrisine göre bir doğal kvazikonform yansıma olsun. Eğer $\zeta \in G_2$ için $\zeta = \frac{1}{u}$ dönüşümü yapar ve

$$f(\zeta) = f(1/u) =: f_*(u)$$

tanımlarsak G_2, sonlu bir G_u bölgesine dönüşür ve $f_* \in A^2(G_u)$ olur. Çünkü $c>0$ bir sabit olmak üzere

$$\iint_{G_u} |f_*(u)|^2 d\sigma_u = \iint_{G_2} |f(\zeta)|^2 \frac{d\sigma_\zeta}{|\zeta|^4} \le c \iint_{G_2} |f(\zeta)|^2 d\sigma_\zeta < \infty$$

olur. Eğer $y^*(t)$, ∂G_u'ya göre bir doğal kvazikonform yansıma ise 1.2.7 Teorem'e göre

$$f_*(t) = -\frac{1}{\pi} \iint_{C\overline{G}_u} \frac{\left(f_* \circ y^*\right)(u)}{(u-t)^2} y^*_{\overline{u}}(u) d\sigma_u , \qquad t \in G_u$$

elde ederiz. Bu integral gösteriminde $u = \dfrac{1}{\zeta}$ dönüşümü yaparak

$$\begin{aligned} f(z) = f(1/t) = f_*(t) &= -\frac{1}{\pi} \iint_{G_1} \frac{\left(f_* \circ y^*\right)(1/\zeta)}{(1/\zeta - 1/z)^2} y^*_{\overline{u}}(1/\zeta) J d\sigma_\zeta \\ &= -\frac{1}{\pi} \iint_{G_1} \frac{f\left(1/y^*(1/\zeta)\right)}{(\zeta - z)^2 \dfrac{1}{\zeta^2 z^2}} y^*_{\overline{\zeta}}(1/\zeta)(-1/\zeta^2) \frac{1}{J} J d\sigma_\zeta \\ &= \frac{1}{\pi} \iint_{G_1} \frac{f\left(1/y^*(1/\zeta)\right) z^2}{(\zeta - z)^2} y^*_{\overline{\zeta}}(1/\zeta) d\sigma_\zeta , \qquad z \in G_2 \end{aligned}$$

elde ederiz. Eğer

$$y(\zeta) := \frac{1}{y^*(1/\zeta)}$$

tanımlarsak $y(\zeta)$, Γ eğrisine göre bir doğal kvazikonform yansıma olur. Ayrıca

$$y^{*}_{\bar{\zeta}}(1/\zeta) = -\frac{y_{\bar{\zeta}}(\zeta)}{[y(\zeta)]^2}$$

olduğundan, $f \in A^2(G_2)$ için

$$f(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{G_1} \frac{(f \circ y)(\zeta) z^2}{(\zeta - z)^2 [(y(\zeta))]^2} y_{\bar{\zeta}}(\zeta) d\sigma_\zeta, \qquad z \in G_2$$

elde ederiz.

y(z), Γ'ya göre bir doğal K-kvazikonform yansıma olsun. $f \in A^2(G_2)$ olsun. (2.3)'de $\zeta = \psi(w)$ dönüşümü yaparsak

$$f(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{C\overline{D}} \frac{f(y(\psi(w)))\overline{\psi'}(w) y_{\bar{\zeta}}(\psi(w))}{[y(\psi(w))]^2} \cdot \frac{z^2 \psi'(w)}{(\psi(w) - z)^2} d\sigma_w, \qquad z \in G_2$$

elde edilir. Böylece, bunu ve (2.2)'yi göz önüne alırsak ve $a_m(f)$ katsayılarını

$$a_m(f) := \frac{1}{\pi}\iint_{C\overline{D}} \frac{f(y(\psi(w)))\overline{\psi'}(w)}{w^{m+1}[y(\psi(w))]^2} \cdot y_{\bar{\zeta}}(\psi(w))\, d\sigma_w \qquad m = 1,2,... \qquad (2.4)$$

biçiminde tanımlarsak $f \in A^2(G_2)$ fonksiyonuna $\sum_{m=1}^{\infty} a_m(f) F'_m(1/z)$ serisini karşılık getirmiş oluruz. Yani,

$$f(z) \sim \sum_{m=1}^{\infty} a_m(f) F'_m(1/z)$$

olur. Bu seriye $f \in A^2(G_2)$ fonksiyonunun *Faber serisi* ve $a_m(f)$ katsayılarına da *f* in *Faber katsayıları* deriz.

2.3.2 Lemma: $\{F_m(1/z)\}$, $m=1,2,...,$ G_2 bölgesi için Faber polinomları olsun. Bu durumda

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{\left\| F'_{m,z} \right\|^2_{A^2(G_2)}}{m} \leq n\pi$$

olur.

İspat: $S_m(G_2)$, $F_m(1/z)$'in Riemann yüzeyinde $F_m(1/z)$ altında G_2'nin görüntüsünün alanı olsun. (2.1) gereğince

$$F_m\big(1/\psi(w)\big) = w^m + \sum_{n=1}^{\infty} b_n w^{-n}, \qquad |w|>1$$

olduğundan, 1.1.7 Lebedev-Millin Teoremi aracılığıyla

$$S_m(G_2) = \pi\left(m - \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \right) \leq m\pi$$

elde ederiz. Diğer yandan,

$$S_m(G_2) = \iint_{G_2} \left| F'_{m,z} \right|^2 d\sigma_z = \left\| F'_{m,z} \right\|^2_{A^2(G_2)}$$

dır. Son ikisinden,

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{\left\| F'_{m,z} \right\|^2_{A^2(G_2)}}{m} \leq n\pi$$

elde edilir.

Genelde, yukarıdaki eşitsizlikte $n\pi$ 'yi iyileştiremeyiz. Gerçekten, eğer birim diski göz önüne alırsak, $F_m(1/z) = 1/z^m$ ve

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{\left\|F'_{m,z}\right\|^2_{A^2(C\overline{\boldsymbol{D}})}}{m} = n\pi$$

olur.

2.3.3 Lemma:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left|F'_m(1/z)\right|^2}{m+1}$$

serisi G_2 'nin kompakt alt kümeleri üzerinde düzgün yakınsaktır.

İspat: z, G_2'de sabit bir nokta olsun. Bu durumda

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{F'_m(1/z)}{m+1} w^{m+1}$$

kuvvet serisi $\boldsymbol{D}$'de bir $A(z,w)$ analitik fonksiyonu tanımlar. Yani

$$A(z,w) := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{F'_m(1/z)}{m+1} w^{m+1}, \qquad w \in \boldsymbol{D}$$

olur. Böylece, her iki tarafın w'ya göre türevini alıp, (2.2)'yi göz önüne alırsak

$$A'_w(z,w) := \sum_{m=1}^{\infty} F'_m(1/z) w^m = -\frac{z^2 \psi'(1/w)}{\left(\psi(1/w) - z\right)^2 w}, \qquad w \in \boldsymbol{D} \tag{2.5}$$

elde ederiz. $0<r<1$ olsun.

$$\sum_{m=1}^{\infty} F'_m(1/z)w^m, \qquad z \in G_2$$

serisi $\overline{D}(0,r)$ kapalı diskinde mutlak ve düzgün yakınsak olduğundan (2.5) bağıntısı

$$\iint_{\overline{D}(0,r)} |A'(z,w)|^2 = \pi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|F'_m(1/z)|^2}{m+1} r^{2m+2} \tag{2.6}$$

eşitliğini gerektirir. Dolayısıyla, (2.5) ve (2.6) gereğince

$$\pi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|F'_m(1/z)|^2}{m+1} r^{2m+2} = \iint_{\overline{D}(0,r)} \left| \frac{z^2 \psi'(1/w)}{(\psi(1/w)-z)^2 w} \right|^2 d\sigma_w \tag{2.7}$$

elde ederiz.

$$\lim_{r \to 1^-} \iint_{\overline{D}(0,r)} \left| \frac{z^2 \psi'(1/w)}{(\psi(1/w)-z)^2 w} \right|^2 d\sigma_w = \iint_{D} \left| \frac{z^2 \psi'(1/w)}{(\psi(1/w)-z)^2 w} \right|^2 d\sigma_w < \infty$$

olduğundan (2.7)'den

$$\pi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|F'_m(1/z)|^2}{m+1} = \iint_{D} \left| \frac{z^2 \psi'(1/w)}{(\psi(1/w)-z)^2 w} \right|^2 d\sigma_w$$

elde edilir. Diğer yandan,

$$\iint_{D} \left| \frac{z^2 \psi'(1/w)}{(\psi(1/w)-z)^2 w} \right|^2 d\sigma_w$$

fonksiyonunun G_2'de z'ye göre sürekli olduğu kolayca gösterilebilir. Dolayısıyla, Dini teoremine göre

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left|F_m'(1/z)\right|^2}{m+1}$$

serisi G_2'nin kompakt alt kümelerinde düzgün yakınsaktır.

2.3.4 Lemma: $f \in A^2(G_2)$ ve $y(\zeta)$, Γ'ya göre bir doğal K-kvazikonform yansıma olsun. Bu durumda, $k := $(K-1)/(K+1) olmak üzere

$$\iint_{G_1} |(f \circ y)(\zeta)|^2 \left|y_{\bar{\zeta}}(\zeta)\right|^2 d\sigma_\zeta \leq \frac{\|f\|_{A^2(G_2)}^2}{1-k^2}$$

olur.

İspat: $\bar{y}(\zeta)$, genişletilmiş kompleks düzlemin kendisine bir doğal K-kvazikonform dönüşümü olduğundan

$$\left|\bar{y}_{\bar{\zeta}}\right| / \left|\bar{y}_\zeta\right| \leq k \text{ ve } \left|\bar{y}_\zeta\right|^2 - \left|\bar{y}_{\bar{\zeta}}\right|^2 > 0$$

olur. Yine

$$\left|\bar{y}_{\bar{\zeta}}\right| = \left|y_\zeta\right| \text{ ve } \left|\bar{y}_\zeta\right| = \left|y_{\bar{\zeta}}\right|$$

olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla,

$$\left|y_\zeta\right| / \left|y_{\bar{\zeta}}\right| \leq k \text{ ve } \left|y_{\bar{\zeta}}\right|^2 - \left|y_\zeta\right|^2 > 0$$

olur. Bundan dolayı,

$$\iint_{G_1} |(f\circ y)(\zeta)|^2 \left|y_{\bar\zeta}(\zeta)\right|^2 d\sigma_\zeta = \iint_{G_1} |(f\circ y)(\zeta)|^2 \left(1-\left|y_\zeta\right|^2/\left|y_{\bar\zeta}\right|^2\right)^{-1}\left(\left|y_{\bar\zeta}\right|^2-\left|y_\zeta\right|^2\right)d\sigma_\zeta$$

$$\leq \frac{1}{1-k^2}\iint_{G_1} |(f\circ y)(\zeta)|^2 \left(\left|y_{\bar\zeta}\right|^2-\left|y_\zeta\right|^2\right)d\sigma_\zeta$$

elde ederiz. $y(\zeta)$ 'nın Jakobiyeni

$$\left(\left|y_\zeta\right|^2-\left|y_{\bar\zeta}\right|^2\right)$$

olduğundan son eşitsizliğin sağ tarafında $y(\zeta)=\zeta$ dönüşümü yaparak

$$\iint_{G_1} |(f\circ y)(\zeta)|^2 \left|y_{\bar\zeta}(\zeta)\right|^2 d\sigma_\zeta \leq \frac{\|f\|^2_{A^2(G_2)}}{1-k^2}$$

elde ederiz.

2.4 Ana Sonuçlar ve İspatları

2.4.1 Teorem: $f\in A^2(G_2)$ olsun. *f* in

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m(f)F'_m(1/z)$$

Faber serisi G_2'nin kompakt alt kümelerinde *f*'e düzgün yakınsaktır.

İspat: *M*, G_2'nin bir kompakt alt kümesi ve $y(z)$, Γ'ya göre bir doğal K-kvazikonform yansıma olsun. 2.3.1 Lemma'ya göre $z\in M$ için

$$f(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{G_1} \frac{(f\circ y)(\zeta) z^2}{(\zeta - z)^2 [(y(\zeta))]^2} y_{\bar{\zeta}}(\zeta) d\sigma_\zeta$$
$$= -\frac{1}{\pi}\iint_{CD} \frac{f(y(\psi(w)))\overline{\psi'}(w) y_{\bar{\zeta}}(\psi(w))}{(y(\psi(w)))^2} \frac{z^2\psi'(w)}{(\psi(w) - z)^2} d\sigma_w$$

olduğundan (2.4), Hölder eşitsizliği ve 2.3.4 Lemma aracılığıyla $z \in M$ için

$$\left| f(z) - \sum_{m=1}^{\infty} a_m(f) F'_m(1/z) \right|$$
$$\leq \frac{c_3 \|f\|_{A^2(G_2)}}{\pi\sqrt{1-k^2}} \left(\iint_{CD} \left| \frac{z^2\psi'(w)}{(\psi(w) - z)^2} + \sum_{m=1}^{n} \frac{F'_m(1/z)}{w^{m+1}} \right|^2 d\sigma_w \right)^{1/2} \tag{2.8}$$

elde ederiz. Burada c_3 sabiti sadece Γ'ya bağlıdır.

$1 < r < R < \infty$ olsun. (2.2)'ye göre

$$\iint_{1<|w|<R} \left| \frac{z^2\psi'(w)}{(\psi(w) - z)^2} + \sum_{m=1}^{n} \frac{F'_m(1/z)}{w^{m+1}} \right|^2 d\sigma_w = \iint_{1<|w|<R} \left| \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{F'_m(1/z)}{w^{m+1}} \right|^2 d\sigma_w$$
$$= \pi \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m}\left(\frac{1}{r^{2m}} - \frac{1}{R^{2m}} \right) \left| F'_m(1/z) \right|^2$$
$$\leq 4\pi \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{\left| F'_m(1/z) \right|^2}{m+1}$$

olur ve burada $r \to 1^+$ ve $R \to \infty$ için limit alırsak

$$\iint_{CD} \left| \frac{z^2\psi'(w)}{(\psi(w)-z)^2} + \sum_{m=1}^{n} \frac{F'_m(1/z)}{w^{m+1}} \right|^2 d\sigma_w \leq 4\pi \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{\left| F'_m(1/z) \right|^2}{m+1} \tag{2.9}$$

elde ederiz. Dolayısıyla, (2.8), (2.9) ve 2.3.3 Lemma'ya göre

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m(f) F_m'(1/z)$$

serisinin M üzerinde f'e düzgün yakınsadığı sonucunu elde ederiz.

2.4.2 Teorem: $P_n(1/z)$**,** n dereceli, $1/z$'ye göre bir polinom ve $P_n(1/z) \in A^2(G_2)$ olsun. Eğer $a_m(P_n)$, $P_n(1/z)$'in Faber katsayıları ise her $m \geq n+2$ için $a_m(P_n) = 0$ dır ve

$$P_n(1/z) = \sum_{m=1}^{n+1} a_m(P_n) F_m'(1/z)$$

olur.

İspat: $z \in G_2$ olsun. 2.4.1 Teorem'e göre

$$P_n(1/z) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m(P_n) F_m'(1/z)$$

olur. Diğer yandan, $P_n(1/z)$, $k = 1,2,\ldots,n+1$ için özel A_k katsayılarıyla

$$P_n(1/z) = \sum_{k=1}^{n+1} A_k F_k'(1/z)$$

formunda yazılabilir. $y(\zeta)$, Γ'ya göre bir doğal K-kvazikonform yansıma olsun. $y(\zeta)$, Γ üzerinde özdeş olduğundan Green formülüne göre

$$
\begin{aligned}
a_m(P_n) &= \frac{1}{\pi}\iint_{C\overline{D}} \frac{P_n\left(1/y(\psi(w))\right)\overline{\psi'}(w)}{w^{m+1}\left(y(\psi(w))\right)^2} y_{\overline{\zeta}}(\psi(w))d\sigma_w \\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\frac{A_k}{\pi}\iint_{C\overline{D}} \frac{F_k'\left(1/y(\psi(w))\right)\overline{\psi'}(w)}{w^{m+1}\left(y(\psi(w))\right)^2} y_{\overline{\zeta}}(\psi(w))d\sigma_w \\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\frac{A_k}{\pi}\iint_{C\overline{D}} -\frac{\partial}{\partial \overline{w}}\frac{F_k\left(1/y(\psi(w))\right)}{w^{m+1}}d\sigma_w \\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\frac{A_k}{2\pi i}\int_{|w|=1}\frac{F_k\left(1/\psi(w)\right)}{w^{m+1}}dw
\end{aligned}
$$

elde ederiz. (2.1) gereğince $Q_m(\psi(w))$, $C\overline{\boldsymbol{D}}$ 'de analitik iken

$$F_m\left(1/\psi(w)\right) = w^m - Q_m(\psi(w))$$

olur ve bunun yardımıyla

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1}\frac{F_k\left(1/\psi(w)\right)}{w^{m+1}}dw = \begin{cases} 1 & ;\ k = m \\ 0 & ;\ k \neq m \end{cases} \tag{2.10}$$

elde edilir ki bu da $m = 1,\dots,n+1$ için $a_m(P_n) = A_m$ ve bütün $m \geq n+2$ için $a_m(P_n) = 0$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla,

$$P_n(1/z) = \sum_{m=1}^{n+1} a_m(P_n)F_m'(1/z)$$

olur.

2.4.3 Teorem: $\{a_m\}$ bir kompleks sayı dizisi olsun. Eğer

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m F'_m(1/z)$$

serisi $\|\cdot\|_{A^2(G_2)}$ normunda bir $f \in A^2(G_2)$ fonksiyonuna yakınsıyorsa a_m, $m=1,2,...$ için *f*'in Faber katsayılarıdır.

İspat: $y(\zeta)$, Γ'ya göre bir doğal K-kvazikonform yansıma ve

$$S_n(f,1/z) := \sum_{m=1}^{n+1} a_m F'_m(1/z),$$

$\sum_{m=1}^{\infty} a_m F'_m(1/z)$ serisinin *n*. kısmi toplamı olsun. (2.10)'u kullanarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} \iint_{CD} \frac{S_n(1/y(\psi(w)))\overline{\psi'(w)}}{w^{m+1}(y(\psi(w)))^2} y_{\bar{\zeta}}(\psi(w))d\sigma_w = a_m, \quad m=1,2,... \tag{2.11}$$

olduğu gösterilebilir. Eğer *m* ve *n* doğal sayılar ise Hölder eşitsizliğini ve 2.3.4 Lemma'yı kullanarak

$$\begin{aligned}|a_m(f)-a_m| \le & \frac{1}{\pi}\left| \iint_{CD} \frac{f(y(\psi(w))) - S_n(1/y(\psi(w)))\overline{\psi'(w)}}{w^{m+1}(y(\psi(w)))^2} y_{\bar{\zeta}}(\psi(w))d\sigma_w \right| \\ & + \left| \frac{1}{\pi} \iint_{CD} \frac{S_n(1/y(\psi(w)))\overline{\psi'(w)}}{w^{m+1}(y(\psi(w)))^2} y_{\bar{\zeta}}(\psi(w))d\sigma_w - a_m \right|\end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{\pi}\left(\iint_{\overline{CD}} \frac{d\sigma_w}{|w|^{2m+2}}\right)^{1/2}$$

$$\times\left(\iint_{\overline{CD}} \frac{|f(y(\psi(w))) - S_n(1/y(\psi(w)))|^2 |\psi'(w)|^2 \left|y_{\bar{\zeta}}(\psi(w))\right|^2}{|y(\psi(w))|^4} d\sigma_w\right)^{1/2}$$

$$+\left|\frac{1}{\pi}\iint_{\overline{CD}} \frac{S_n(1/y(\psi(w)))\overline{\psi'}(w)}{w^{m+1}(y(\psi(w)))^2} y_{\bar{\zeta}}(\psi(w)) d\sigma_w - a_m\right|$$

$$\leq \frac{c_4}{\sqrt{m\pi}}\left(\iint_{G_1} |((f - S_n)\circ y)(\zeta)|^2 \left|y_{\bar{\zeta}}(\zeta)\right|^2 d\sigma_\zeta\right)^{1/2}$$

$$+\left|\frac{1}{\pi}\iint_{\overline{CD}} \frac{S_n(1/y(\psi(w)))\overline{\psi'}(w)}{w^{m+1}(y(\psi(w)))^2} y_{\bar{\zeta}}(\psi(w)) d\sigma_w - a_m\right|$$

$$\leq \frac{c_4 \|f - S_n\|_{A^2(G_2)}}{\sqrt{m\pi(1-k^2)}} + \left|\frac{1}{\pi}\iint_{\overline{CD}} \frac{S_n(1/y(\psi(w)))\overline{\psi'}(w)}{w^{m+1}(y(\psi(w)))^2} y_{\bar{\zeta}}(\psi(w)) d\sigma_w - a_m\right| \qquad (2.12)$$

elde ederiz. $\lim_{n\to\infty}\|f - S_n\|_{A^2(G_2)} = 0$ olduğundan (2.11) ve (2.12), $m = 1,2,...$ için $a_m(f) = a_m$ olduğunu gösterir.

2.4.4 Teorem : Eğer $f \in A^2(G_2)$, $\omega(z) := 1/|z|^4$ ve

$$S_n(f, 1/z) = \sum_{m=1}^{n+1} a_m(f) F_m'(1/z),$$

f'in

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m(f) F_m'(1/z)$$

Faber serisinin *n.* kısmi toplamı ise, *c*, *n*'den bağımsız bir sabit olmak üzere, bütün *n* doğal sayıları için

$$\|f - S_n(f,\cdot)\|_{A^2(G_2,\omega)} \le \frac{c}{\sqrt{1-k^2}}\sqrt{n}E_n(f,G_2)$$

olur.

İspat: $y(z)$, Γ'ya göre bir doğal K-kvazikonform yansıma ve $P_n^*(1/z)$, $\|\cdot\|_{A^2(G_2)}$ normunda $f \in A^2(G_2)$ fonksiyonuna en iyi yaklaşan polinom olsun. $z \in G_2$ için Hölder eşitsizliği, 2.3.4 Lemma ve 2.4.2 Teorem gereğince her *n* doğal sayısı için,

$$\begin{aligned}
&|f(z) - S_n(f,1/z)| \\
&\le |f(z) - P_n^*(1/z)| + |P_n^*(1/z) - S_n(f,1/z)| \\
&\le |f(z) - P_n^*(1/z)| + \left|\sum_{m=1}^{n+1}\left(a_m(P_n^*) - a_m(f)\right)F_m'(1/z)\right| \\
&\le |f(z) - P_n^*(1/z)| + \frac{1}{\pi}\left(\iint_{CD}\left|\frac{(f\circ y - P_n^*\circ y)(\psi(w))\overline{\psi'}(w)y_{\bar\zeta}(\psi(w))}{\left(y(\psi(w))\right)^2}\right|^2 d\sigma_w\right)^{1/2} \\
&\qquad \times\left(\iint_{CD}\left|\sum_{m=1}^{n+1}\frac{F_m'(1/z)}{w^{m+1}}\right|^2 d\sigma_w\right)^{1/2} \\
&\le |f(z) - P_n^*(1/z)| + \frac{c_5}{\pi}\left(\iint_{G_1}\left|(f\circ y - P_n^*\circ y)(\zeta)\right|^2\left|y_{\bar\zeta}(\zeta)\right|^2 d\sigma_\zeta\right)^{1/2} \\
&\qquad \times\left(\pi\sum_{m=1}^{n+1}\frac{|F_m'(1/z)|^2}{m}\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

$$\leq \left| f(z) - P_n^*(1/z) \right| + \frac{c_5}{\sqrt{\pi(1-k^2)}} \left\| f - P_n^* \right\|_{A^2(G_2)} \left(\sum_{m=1}^{n+1} \frac{\left| F_m'(1/z) \right|^2}{m} \right)^{1/2}$$

$$= \left| f(z) - P_n^*(1/z) \right| + \frac{c_5}{\sqrt{\pi(1-k^2)}} E_n(f, G_2) \left(\sum_{m=1}^{n+1} \frac{\left| F_m'(1/z) \right|^2}{m} \right)^{1/2}$$

elde edilir. Bu,

$$\left| f(z) - S_n(f, 1/z) \right|^2 \leq 2\left| f(z) - P_n^*(1/z) \right|^2 + \frac{2c_5}{\pi(1-k^2)} E_n^2(f, G_2) \sum_{m=1}^{n+1} \frac{\left| F_m'(1/z) \right|^2}{m}$$

olmasını gerektirir. Bu eşitsizliğin her iki yanını $1/|z|^4$ ile çarpıp, $z \in G_2$ için $1/|z|^4 \leq c_6$ olduğunu dikkate alırsak

$$\left| f(z) - S_n(f, 1/z) \right|^2 \frac{1}{|z|^4} \leq c_7 \left| f(z) - P_n^*(1/z) \right|^2 + \frac{c_8}{\pi(1-k^2)} E_n^2(f, G_2) \sum_{m=1}^{n+1} \frac{\left| F_m'(1/z) \right|^2}{m}$$

elde ederiz. Şimdi, G_2 üzerinden her iki tarafın integralini alır ve 2.3.2 Lemma'yı kullanırsak her *n* doğal sayısı için

$$\begin{aligned} \left\| f(z) - S_n(f, 1/z) \right\|_{A^2(G_2, \omega)}^2 &\leq c_7 E_n^2(f, G_2) + \frac{c_8}{\pi(1-k^2)} E_n^2(f, G_2) \sum_{m=1}^{n+1} \frac{\left\| F_{m,z}' \right\|_{A^2(G_2)}^2}{m} \\ &\leq \left(c_7 + \frac{c_8(n+1)}{1-k^2} \right) E_n^2(f, G_2) \\ &\leq \frac{c_9 n}{1-k^2} E_n^2(f, G_2) \end{aligned}$$

yani,

$$\left\| f(z) - S_n(f, 1/z) \right\|_{A^2(G_2, \omega)} \leq \frac{c}{\sqrt{1-k^2}} \sqrt{n} E_n(f, G_2)$$

elde ederiz.

3. AĞIRLIKLI BERGMAN UZAYLARINDA GENELLEŞMİŞ FABER SERİLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

3.1 Sonsuz Bölgelerde Genelleşmiş Faber Polinomları

$g(z)$, G_1'de analitik, $z=0$ noktasında $\nu \geq 2$ mertebeli sıfıra sahip bir fonksiyon ve φ ve ψ 2.2 bölümde tanımlandığı gibi olsun. Bu durumda, her $m \geq 1$ doğal sayısı için $g(z)\varphi^{m+\nu}(z)$ fonksiyonu orijinde *m.* dereceden bir kutba sahiptir. Dolayısıyla, $F_m(1/z, g)$, z'in negatif kuvvetlerinin oluşturduğu polinomu, $Q_m(z, g)$ ise z'in negatif olmayan kuvvetlerinin oluşturduğu fonksiyonu göstermek üzere $z \in G_1$ için

$$g(z)\varphi^{m+\nu}(z) = F_m(1/z, g) + Q_m(z, g) \tag{3.1}$$

açılımı geçerlidir. Buradaki $F_m(1/z, g)$ polinomuna G_2 bölgesi için *genelleşmiş Faber polinomu* denir.

$z \in G_2$ için son eşitlikte her iki tarafın Γ boyunca pozitif yönde integralini alırsak

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{g(\zeta)(\varphi(\zeta))^{m+\nu}}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{F_m(1/\zeta, g)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{Q_m(\zeta, g)}{\zeta - z} d\zeta$$

olur. Sınırsız bölgeler için Cauchy integral formülünden

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{F_m(1/\zeta, g)}{\zeta - z} d\zeta = -F_m(1/z, g)$$

ve Cauchy integral teoreminden

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{Q_m(\zeta,g)}{\zeta-z}d\zeta=0$$

olur. Dolayısıyla,

$$F_m(1/z,g)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{g(\zeta)\left(\varphi(\zeta)\right)^{m+\nu}}{\zeta-z}d\zeta=-\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1}\frac{g(\psi(w))w^{m+\nu}\psi'(w)}{\psi(w)-z}dw$$

elde ederiz. Bu formüle göre, $F_m(1/z,g)$, $m=1,2,...$ polinomları,

$$\frac{g(\psi(w))\psi'(w)}{\psi(w)-z},\quad z\in G_2,\quad w\in C\overline{\boldsymbol{D}}$$

fonksiyonunun $w=\infty$ noktasının komşuluğundaki seri açılımının Laurent katsayıları olur. Yani,

$$\frac{g[\psi(w)]\psi'(w)}{\psi(w)-z}=\sum_{m=1}^{\infty}F_m\left(1/z,g\right)\frac{1}{w^{m+\nu+1}}$$

bağıntısı geçerlidir ve seri $G_2\times C\overline{\boldsymbol{D}}$'nin kompakt alt kümelerinde mutlak ve düzgün yakınsaktır. Bu eşitliğin z'ye göre türevini alarak her $(z,w)\in G_2\times C\overline{\boldsymbol{D}}$ için

$$\frac{g[\psi(w)]\psi'(w)}{\left(\psi(w)-z\right)^2}=\sum_{m=1}^{\infty}F_m{}'\left(1/z,g\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right)\frac{1}{w^{m+\nu+1}}$$

veya

$$\frac{z^2g[\psi(w)]\psi'(w)}{\left(\psi(w)-z\right)^2}=\sum_{m=1}^{\infty}-F_m{}'\left(1/z,g\right)\frac{1}{w^{m+\nu+1}} \tag{3.2}$$

elde ederiz ki burada seri $G_2 \times C\overline{\mathbf{D}}$'nin kompakt alt kümelerinde mutlak ve düzgün yakınsaktır.

3.2 Yardımcı Sonuçlar ve İspatları

Aşağıdaki Lemma, (2.3) integral gösteriminin $A^1(G_2)$ uzaylarında da geçerli olduğunu göstermektedir.

3.2.1 Lemma: $f \in A^1(G_2)$ olsun. Eğer $y(z)$, Γ eğrisine göre bir doğal kvazikonform yansıma ise

$$f(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{G_1} \frac{(f \circ y)(\zeta) z^2}{(\zeta - z)^2 [(y(\zeta))]^2} y_{\bar{\zeta}}(\zeta) d\sigma_\zeta, \qquad z \in G_2 \tag{3.3}$$

olur.

İspat: $f \in A^1(G_2)$ ve $y(z)$, Γ eğrisine göre bir doğal kvazikonform yansıma olsun. Eğer $\zeta \in G_2$ için $\zeta = \dfrac{1}{u}$ dönüşümü yapar ve

$$f(\zeta) = f(1/u) =: f_*(u)$$

tanımlarsak G_2, sonlu bir G_u bölgesine dönüşür ve $f_* \in A^1(G_u)$ olur. Çünkü c>0 bir sabit olmak üzere

$$\iint_{G_u} |f_*(u)| d\sigma_u = \iint_{G_2} |f(\zeta)| \frac{d\sigma_\zeta}{|\zeta|^4} \le c \iint_{G_2} |f(\zeta)| d\sigma_\zeta < \infty$$

olur. Eğer $y^*(t)$, ∂G_u'ya göre bir doğal kvazikonform yansıma ise 1.2.7 Teorem'e göre

$$f_*(t) = -\frac{1}{\pi}\iint_{C\overline{G}_u} \frac{\left(f_* \circ y^*\right)(u)}{(u-t)^2} y^*_{\overline{u}}(u)\,d\sigma_u, \qquad t \in G_u$$

elde ederiz. Bu integral gösteriminde $u = \frac{1}{\zeta}$ dönüşümü yaparak

$$\begin{aligned} f(z) = f(1/t) = f_*(t) &= -\frac{1}{\pi}\iint_{G_1} \frac{\left(f_* \circ y^*\right)(1/\zeta)}{(1/\zeta - 1/z)^2} y^*_{\overline{u}}(1/\zeta) J d\sigma_\zeta \\ &= -\frac{1}{\pi}\iint_{G_1} \frac{f\left(1/y^*(1/\zeta)\right)}{(\zeta - z)^2 \frac{1}{\zeta^2 z^2}} y^*_{\overline{\zeta}}(1/\zeta)(-1/\zeta^2)\frac{1}{J} J d\sigma_\zeta \\ &= \frac{1}{\pi}\iint_{G_1} \frac{f\left(1/y^*(1/\zeta)\right) z^2}{(\zeta - z)^2} y^*_{\overline{\zeta}}(1/\zeta)\,d\sigma_\zeta, \qquad z \in G_2 \end{aligned}$$

elde ederiz. Eğer

$$y(\zeta) := \frac{1}{y^*(1/\zeta)}$$

tanımlarsak $y(\zeta)$, Γ eğrisine göre bir doğal kvazikonform yansıma olur. Ayrıca

$$y^*_{\overline{\zeta}}(1/\zeta) = -\frac{y_{\overline{\zeta}}(\zeta)}{[y(\zeta)]^2}$$

olduğundan, $f \in A^1(G_2)$ için

$$f(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{G_1} \frac{(f \circ y)(\zeta) z^2}{(\zeta - z)^2 [(y(\zeta))]^2} y_{\overline{\zeta}}(\zeta)\,d\sigma_\zeta, \qquad z \in G_2$$

elde ederiz.

y(z), Γ'ya göre bir doğal K-kvazikonform yansıma ve $f \in A^1(G_2)$ olsun. (3.3)'de $\zeta = \psi(w)$ dönüşümü yaparsak $z \in G_2$ için

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{\pi}\iint_{CD} \frac{f(y(\psi(w)))\overline{\psi'}(w)\, y_{\bar{\zeta}}(\psi(w))}{[y(\psi(w))]^2} \cdot \frac{z^2\psi'(w)}{(\psi(w)-z)^2}\, d\sigma_w \\ &= -\frac{1}{\pi}\iint_{CD} \frac{f(y(\psi(w)))\overline{\psi'}(w)\, y_{\bar{\zeta}}(\psi(w))}{[y(\psi(w))]^2\, g(\psi(w))} \cdot \frac{g(\psi(w))z^2\psi'(w)}{(\psi(w)-z)^2}\, d\sigma_w, \end{aligned} \tag{3.4}$$

elde ederiz. Böylece, bunu ve (3.2)'yi göz önüne alıp $a_m(f,g)$ katsayılarını

$$a_m(f,g) := \frac{1}{\pi}\iint_{CD} \frac{f(y(\psi(w)))\overline{\psi'}(w)}{w^{m+\nu+1} g[\psi(w)][y(\psi(w))]^2} \cdot y_{\bar{\zeta}}(\psi(w))\, d\sigma_w, \qquad m = 1,2,... \tag{3.5}$$

biçiminde tanımlarsak $f \in A^1(G_2)$ fonksiyonuna $\sum_{m=1}^{\infty} a_m(f,g)F'_m(1/z,g)$ serisini karşılık getirmiş oluruz. Yani,

$$f(z) \sim \sum_{m=1}^{\infty} a_m(f,g)F'_m(1/z,g)$$

olur. Bu seriye $f \in A^1(G_2)$ fonksiyonunun *genelleşmiş Faber serisi* ve $a_m(f,g)$ katsayılarına da *f* in *genelleşmiş Faber katsayıları* deriz.

$R > 1$ için

$$G_{2,R} := \{z : z \in G_1,\, 1 < |\varphi(z)| < R\} \cup \overline{G}_2$$

kümesini tanımlayalım.

3.2.2 Lemma: $g(z)$, G_1'de analitik ve $z=0$ noktasında $\nu\geq 2$ mertebeli sıfıra sahip bir fonksiyon ve bir $R_0 \in (1,\infty)$ sabiti için

$$\iint_{G_{2,R_0}-G_2} |g(z)|^2 d\sigma_z < \infty$$

olsun. Bu durumda,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|F_m'(1/z,g)|}{m+1}$$

serisi G_2'nin kompakt alt kümelerinde düzgün yakınsaktır.

İspat: z, G_2'de sabit bir nokta olsun. Bu durumda,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{F_m'(1/z,g)}{m+1} w^{m+1}$$

kuvvet serisi $\boldsymbol{D}$'de

$$A(z,w) := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{F_m'(1/z,g)}{m+1} w^{m+1}, \qquad w \in \boldsymbol{D}$$

biçiminde bir analitik fonksiyon tanımlar. $A(z,w)$ fonksiyonunun w'ya göre türevini alır ve (3.2)'yi göz önünde bulundurursak,

$$A_w'(z,w) = \sum_{m=1}^{\infty} F_m'(1/z,g) w^m = -\frac{z^2 \psi'(1/w) g(\psi(1/w))}{(\psi(1/w)-z)^2 w^{\nu+1}}, \qquad w \in \boldsymbol{D} \qquad (3.6)$$

elde ederiz. $0<r<1$ olsun.

$$\sum_{m=1}^{\infty} F'_m(1/z,g)w^m$$

serisi $\overline{D}(0,r)$ kapalı diski üzerinde mutlak ve düzgün yakınsak olduğundan (3.6) bağıntısı

$$\iint_{\overline{D}(0,r)} \left|A'_w(z,w)\right|^2 d\sigma_w = \pi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left|F'_m(1/z,g)\right|^2}{m+1} r^{2m+2} \tag{3.7}$$

bağıntısını gerektirir. Dolayısıyla (3.6) ve (3.7) gereğince

$$\pi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left|F'_m(1/z,g)\right|^2}{m+1} r^{2m+2} = \iint_{\overline{D}(0,r)} \left| \frac{z^2 \psi'(1/w) g\big(\psi(1/w)\big)}{\big(\psi(1/w)-z\big)^2 w^{\nu+1}} \right|^2 d\sigma_w \tag{3.8}$$

elde ederiz. Diğer yandan, bir $R_0 \in (1,\infty)$ sabiti için

$$\begin{aligned}
S(z) &:= \iint_{D} \left| \frac{z^2 \psi'(1/w) g\big(\psi(1/w)\big)}{\big(\psi(1/w)-z\big)^2 w^{\nu+1}} \right|^2 d\sigma_w \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left| \frac{z^2 \psi'(e^{-i\theta}/r) g\big(\psi(e^{-i\theta}/r)\big)}{\big(\psi(e^{-i\theta}/r)-z\big)^2 r^{\nu+1} e^{(\nu+1)i\theta}} \right|^2 r\,d\theta dr \\
&= \int_1^{\infty} \int_0^{2\pi} \left| \frac{z^2 \psi'(\mathrm{Re}^{-i\theta}) g\big(\psi(\mathrm{Re}^{-i\theta})\big)}{\big(\psi(\mathrm{Re}^{-i\theta})-z\big)^2 (1/R^{\nu+1}) e^{(\nu+1)i\theta}} \right|^2 \frac{1}{R^3} d\theta dR \\
&= \left(\int_1^{R_0} \int_0^{2\pi} + \int_{R_0}^{\infty} \int_0^{2\pi} \right) \cdots =: J_1 + J_2 .
\end{aligned}$$

ve

$$J_1 = \int_1^{R_0}\int_0^{2\pi} \frac{|z|^4 \left|\psi'(\mathrm{Re}^{-i\theta})\right|^2 \left|g\left(\psi(\mathrm{Re}^{-i\theta})\right)\right|^2}{\left|\psi(\mathrm{Re}^{-i\theta}) - z\right|^4} R^{2\nu-1} d\theta dR$$

$$\leq c_3 \int_1^{R_0}\int_0^{2\pi} \left|\psi'(\mathrm{Re}^{-i\theta})\right|^2 \left|g\left(\psi(\mathrm{Re}^{-i\theta})\right)\right|^2 d\theta dR$$

$$= c_3 \iint_{G_{2,R_0} - \overline{G}_2} |g(z)|^2 d\sigma_z < \infty$$

elde ederiz. Benzer şekilde J_2 integralinin de sınırlılığı gösterilebilir. Sonuç olarak,

$$S(z) < \infty$$

elde ederiz. Öte yandan, (3.8)'de $r \to 1$ için limit alarak

$$\pi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|F'_m(1/z, g)|^2}{m+1} = S(z)$$

elde edilir. $S(z)$, G_2'de z'ye göre sürekli olduğundan Dini teoremine göre

$$\pi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|F'_m(1/z, g)|^2}{m+1}$$

serisi G_2'nin kompakt alt kümelerinde düzgün yakınsaktır.

3.2.3 Lemma: Eğer $f \in A^2(G_2, \omega)$ ve $y(\zeta)$, Γ'ya göre bir doğal K-kvazikonform yansıma ise $k := (K-1)/(K+1)$ olmak üzere

$$\iint_{G_1} |(f \circ y)(\zeta)|^2 \omega(y(\zeta)) \left|y_{\overline{\zeta}}(\zeta)\right|^2 d\sigma_\zeta \leq \frac{\|f\|^2_{A^2(G_2,\omega)}}{1-k^2}$$

olur.

İspat: $\bar{y}(\zeta)$, genişletilmiş kompleks düzlemin kendisine bir doğal K-kvazikonform dönüşümü olduğundan

$$\left|\bar{y}_{\bar{\zeta}}\right| / \left|\bar{y}_{\zeta}\right| \leq k \text{ ve } \left|\bar{y}_{\zeta}\right|^2 - \left|\bar{y}_{\bar{\zeta}}\right|^2 > 0$$

olur. Yine

$$\left|\bar{y}_{\bar{\zeta}}\right| = \left|y_{\zeta}\right| \text{ ve } \left|\bar{y}_{\zeta}\right| = \left|y_{\bar{\zeta}}\right|$$

olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla,

$$\left|y_{\zeta}\right| / \left|y_{\bar{\zeta}}\right| \leq k \text{ ve } \left|y_{\bar{\zeta}}\right|^2 - \left|y_{\zeta}\right|^2 > 0$$

olur. Bundan dolayı,

$$\begin{aligned}
&\iint_{G_1} |(f \circ y)(\zeta)|^2 \omega(y(\zeta)) \left|y_{\bar{\zeta}}(\zeta)\right|^2 d\sigma_{\zeta} \\
&\qquad = \iint_{G_1} |(f \circ y)(\zeta)|^2 \omega(y(\zeta)) \left(1 - \left|y_{\zeta}\right|^2 / \left|y_{\bar{\zeta}}\right|^2\right)^{-1} \left(\left|y_{\bar{\zeta}}\right|^2 - \left|y_{\zeta}\right|^2\right) d\sigma_{\zeta} \\
&\qquad \leq \frac{1}{1-k^2} \iint_{G_1} |(f \circ y)(\zeta)|^2 \omega(y(\zeta)) \left(\left|y_{\bar{\zeta}}\right|^2 - \left|y_{\zeta}\right|^2\right) d\sigma_{\zeta}
\end{aligned}$$

elde ederiz. $y(\zeta)$ 'nın Jakobiyeni

$$\left(\left|y_{\zeta}\right|^2 - \left|y_{\bar{\zeta}}\right|^2\right)$$

olduğundan son eşitsizliğin sağ tarafında $y(\zeta) = \zeta$ dönüşümü yaparak

$$\iint_{G_1} \left|(f \circ y)(\zeta)\right|^2 \omega(y(\zeta)) \left|y_{\bar{\zeta}}(\zeta)\right|^2 d\sigma_\zeta \le \frac{\|f\|^2_{A^2(G_2,\omega)}}{1-k^2}$$

elde ederiz.

3.2.4 Lemma: *g*, G_1'de analitik, sınırlı, $G_1 - \{0\}$'da sıfırdan farklı ve $z = 0$ noktasında $\nu \ge 2$ dereceli sıfıra sahip bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$a_n(F'_m, g) = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \ne n \end{cases}$$

olur.

İspat: $y(z)$, Γ üzerinde özdeş olduğundan, Green formülü ve Cauchy integral teoremini kullanarak

$$\begin{aligned} a_n(F'_m, g) &= \frac{1}{\pi} \iint_{CD} \frac{F'_m\left(1/y(\psi(w)), g\right)\overline{\psi'}(w)}{w^{n+\nu+1}\left(y(\psi(w))\right)^2 g\left(\psi(w)\right)} y_{\bar{\zeta}}(\psi(w)) d\sigma_w \\ &= \frac{1}{\pi} \iint_{CD} -\frac{\partial}{\partial \overline{w}} \left(\frac{F_m\left(1/y(\psi(w)), g\right)}{w^{n+\nu+1} g\left(\psi(w)\right)} \right) d\sigma_w \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} \frac{F_m\left(1/\psi(w), g\right)}{w^{n+\nu+1} g\left(\psi(w)\right)} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R>1} \frac{F_m\left(1/\psi(w), g\right)}{w^{n+\nu+1} g\left(\psi(w)\right)} dw \end{aligned}$$

elde ederiz. (3.1) gereğince, $Q_m(z, g)$, G_1'de analitik ve $Q_m(0, g)$, bir sabit olmak üzere

$$F_m\left(1/z, g\right) = g(z)\varphi^{m+\nu}(z) + Q_m(z, g)$$

olur ve bunun yardımıyla

$$a_n(F'_m, g) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R>1} w^{m-n-1} dw + \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R>1} \frac{Q_m(\psi(w), g)}{w^{n+\nu+1} g(\psi(w))} dw$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R>1} w^{m-n-1} dw = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

elde ederiz.

3.2.5 Lemma: Her n doğal sayısı ve $R > 1$ için

$$\sum_{m=n+2}^{\infty} \frac{\|F'_{m,z}\|^2_{A^2(G_2)}}{mR^{2m}} \leq \frac{\pi}{R^{2(n+1)}(R^2-1)}, \qquad m = 1,2,...$$

değerlendirmesi sağlanır.

İspat: $S_m(G_2)$, $F_m(1/z)$'in Riemann yüzeyinde $F_m(1/z)$ altında G_2'nin görüntüsünün alanı olsun. (2.1)'i göz önüne alarak

$$(F_m(1/z) \circ \psi(w)) = w^m + \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu w^{-\nu}, \qquad |w| > 1$$

elde ederiz ve bu durumda, 1.1.7 Lebedev-Millin Teoremi aracılığıyla

$$S_m(G_2) = \pi\left(m - \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu |b_\nu|^2\right) \leq m\pi$$

olduğu görülür. Diğer yandan,

$$S_m(G_2) = \iint_{G_2} |F'_{m,z}|^2 d\sigma_z = \|F'_{m,z}\|^2_{A^2(G_2)}$$

dır. Son ikisinden

$$\sum_{m=n+2}^{\infty} \frac{\left\| F'_{m,z} \right\|^2_{A^2(G_2)}}{mR^{2m}} \leq \pi \sum_{m=n+2}^{\infty} \frac{1}{R^{2m}} = \frac{\pi}{R^{2(n+1)}(R^2-1)},$$

elde ederiz.

Genelde, yukarıdaki eşitsizlikte

$$\frac{\pi}{R^{2(n+1)}(R^2-1)}$$

ifadesini iyileştiremeyiz. Gerçekten, eğer birim diski göz önüne alırsak, $F_m(1/z) = 1/z^m$ ve

$$\sum_{m=n+2}^{\infty} \frac{\left\| F'_{m,z} \right\|^2_{A^2(C\overline{D})}}{mR^{2m}} = \frac{\pi}{R^{2(n+1)}(R^2-1)}$$

olur.

3.3 Ana Sonuçlar ve İspatları

$g(z)$, G_1'de analitik, G_1-{0}'da sıfırdan farklı ve z=0 noktasında $\nu \geq 2$ mertebeli sıfıra sahip bir fonksiyon ve

$$\iint_{G_1} |g(z)|^2 d\sigma_z < \infty \tag{3.9}$$

olsun. Bu koşulları sağlayan her g fonksiyonu için bir ω ağırlık fonksiyonunu

$$\omega(z) := \frac{1}{\left|(g \circ y)(z)\right|^2}, \qquad z \in G_2$$

biçiminde tanımlayalım. Bu şekilde tanımlanan bütün ω ağırlık fonksiyonlarının kümesini $W^2(G_2)$ ile gösteririz.

3.3.1 Teorem: $f \in A^2(G_2,\omega)$ ve $\omega \in W^2(G_2)$ olsun. f' in genelleşmiş Faber serisi

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m(f,g) F_m'(1/z, g)$$

G_2'nin kompakt alt kümeleri üzerinde f'e düzgün yakınsaktır.

İspat: $f \in A^2(G_2,\omega)$ ve $\omega \in W^2(G_2)$ olsun. Öncelikle, $f \in A^1(G_2)$ olduğunu gösterelim. g fonksiyonunun z=0 noktasında $\nu \geq 2$ dereceli bir sıfıra sahip olduğunu göz önüne alıp (1.1) ve (3.9) bağıntılarını kullanarak

$$\begin{aligned}
\iint_{G_2} \left|(g \circ y)(z)\right|^2 d\sigma_z &= \iint_{G_1} |g(z)|^2 \left(|y_{\bar{z}}|^2 - |y_z|^2\right) d\sigma_z \\
&\leq \iint_{G_1} |g(z)|^2 |y_{\bar{z}}|^2 d\sigma_z = \iint_{G_{2,R}-\overline{G}_2} |g(z)|^2 |y_{\bar{z}}|^2 d\sigma_z + \iint_{CG_{2,R}} |g(z)|^2 |y_{\bar{z}}|^2 d\sigma_z \\
&\leq c_4 \iint_{G_{2,R}-\overline{G}_2} |g(z)|^2 d\sigma_z + c_5 < \infty
\end{aligned}$$

elde ederiz. Dolayısıyla, Hölder eşitsizliğine göre

$$\left(\iint_{G_2} |f(z)| d\sigma_z\right)^2 \leq \left(\iint_{G_2} |f(z)|^2 \omega(z) d\sigma_z\right)\left(\iint_{G_2} \left|(g \circ y)(z)\right|^2 d\sigma_z\right) < \infty$$

olur. Buradan (3.4), (3.5) ve Hölder eşitsizliği yardımıyla her $z \in G_2$ için

$$\begin{aligned}
&\left| f(z) - \sum_{m=1}^{n} a_m(f,g) F_m'(1/z,g) \right|^2 \\
&\qquad \leq \frac{1}{\pi} \iint_{CD} \left| \frac{f\big(y(\psi(w))\big)\overline{\psi'}(w)\, y_{\bar{\zeta}}(\psi(w))}{\big(y(\psi(w))\big)^2 g(\psi(w))} \right|^2 d\sigma_w \\
&\qquad \times \iint_{CD} \left| \frac{g(\psi(w)) z^2 \psi'(w)}{(\psi(w)-z)^2} + \sum_{m=1}^{n} \frac{F_m'(1/z,g)}{w^{m+\nu+1}} \right|^2 d\sigma_w \\
&\qquad = \frac{1}{\pi} J_1 \cdot J_2
\end{aligned} \tag{3.10}$$

elde ederiz. Bir $C>0$ sabiti için

$$\max_{z \in \overline{G}_1} |y(z)| \geq C$$

olduğundan 3.2.3 Lemma'ya göre

$$\begin{aligned}
J_1 = \iint_{G_1} \left| \frac{f\big(y(z)\big) y_{\bar{z}}(z)}{\big(y(z)\big)^2 g(z)} \right|^2 d\sigma_z &\leq c_6 \iint_{G_1} \left| f\big(y(z)\big) \right|^2 \omega(y(z)) \left| y_{\bar{z}}(z) \right|^2 d\sigma_z \\
&\leq c_6 \frac{\|f\|^2_{A^2(G_2,\omega)}}{1-k^2} < \infty
\end{aligned} \tag{3.11}$$

elde ederiz. Burada c_6 sabiti sadece Γ'ya bağlıdır. Şimdi J_2 integralini değerlendirelim. $1 < r < R < \infty$ olsun. (3.2)'ye göre

$$\begin{aligned}
&\iint_{r<|w|<R} \left| \frac{g(\psi(w)) z^2 \psi'(w)}{(\psi(w)-z)^2} + \sum_{m=1}^{n} \frac{F_m'(1/z,g)}{w^{m+\nu+1}} \right|^2 d\sigma_w = \iint_{r<|w|<R} \left| \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{F_m'(1/z,g)}{w^{m+\nu+1}} \right|^2 d\sigma_w \\
&\qquad = \pi \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m+\nu} \left(\frac{1}{r^{2(m+\nu)}} - \frac{1}{R^{2(m+\nu)}} \right) \left| F_m'(1/z,g) \right|^2 \leq \pi \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{\left| F_m'(1/z,g) \right|^2}{m+\nu}
\end{aligned}$$

olur ve $r \to 1$, $R \to \infty$ için limit alırsak

$$J_2 \le \pi \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{\left|F_m'(1/z,g)\right|^2}{m+\nu} \tag{3.12}$$

elde ederiz. Dolayısıyla (3.10), (3.11) ve (3.12)'den

$$\left| f(z) - \sum_{m=1}^{n} a_m(f,g) F_m{}'(1/z,g) \right|^2 \le c_7 \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{\left|F_m'(1/z,g)\right|^2}{m+\nu}$$

değerlendirmesi elde edilir ve 3.2.2 Lemma, ispatı tamamlar.

3.3.2 Teorem: $g(z)$, G_1'de analitik, sınırlı, $G-\{0\}$'da sıfırdan farklı ve $z=0$ noktasında $\nu \ge 2$ mertebeli sıfıra sahip bir fonksiyon ve $\{b_m\}$ bir kompleks sayı dizisi olsun. Eğer

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m F_m{}'(1/z,g)$$

serisi bir $f \in A^2(G_2,\omega)$ fonksiyonuna $\|\cdot\|_{A^2(G_2,\omega)}$ normunda yakınsıyorsa b_m katsayıları f'in genelleşmiş Faber katsayılarıdır.

İspat:

$$\tilde{S}_n(1/z) := \sum_{m=1}^{n+1} b_m F_m'(1/z,g),$$

$\sum_{m=1}^{\infty} b_m F_m'(1/z,g)$ serisinin n. kısmi toplamı olsun. 3.2.4 Lemma'yı kullanarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} \iint_{CD} \frac{(\tilde{S}_n \circ y)(\psi(w))\overline{\psi'}(w)}{w^{m+\nu+1} g(\psi(w))\left(y(\psi(w))\right)^2} y_{\bar{\zeta}}(\psi(w))\, d\sigma_w = b_m, \quad m = 1,2,... \tag{3.13}$$

elde ederiz. Diğer yandan, Hölder eşitsizliğini ve 3.2.3 Lemma'yı kullanarak her n doğal sayısı için

$$
\begin{aligned}
\left|a_m(f,g)-b_m\right| &\le \frac{1}{\pi}\left|\iint\limits_{CD}\frac{\big((f\circ y)(\psi(w))-(\tilde{S}_n\circ y)(\psi(w))\big)\overline{\psi'}(w)}{w^{m+\nu+1}g(\psi(w))\big(y(\psi(w))\big)^2}y_{\bar{\zeta}}(\psi(w))d\sigma_w\right| \\
&\quad+\left|\frac{1}{\pi}\iint\limits_{CD}\frac{(\tilde{S}_n\circ y)(\psi(w))\overline{\psi'}(w)}{w^{m+\nu+1}g(\psi(w))\big(y(\psi(w))\big)^2}y_{\bar{\zeta}}(\psi(w))d\sigma_w-b_m\right| \\
&\le \frac{1}{\pi}\left(\iint\limits_{CD}\frac{d\sigma_w}{|w|^{2(m+\nu+1)}}\right)^{1/2} \\
&\quad\times\left(\iint\limits_{CD}\frac{\left|(f\circ y)(\psi(w))-(\tilde{S}_n\circ y)(\psi(w))\right|^2\left|\psi'(w)\right|^2\left|y_{\bar{\zeta}}(\psi(w))\right|^2}{\left|y(\psi(w))\right|^4\left|g(\psi(w))\right|^2}d\sigma_w\right)^{1/2} \\
&\quad+\left|\frac{1}{\pi}\iint\limits_{CD}\frac{(\tilde{S}_n\circ y)(\psi(w))\overline{\psi'}(w)}{w^{m+\nu+1}g(\psi(w))\big(y(\psi(w))\big)^2}y_{\bar{\zeta}}(\psi(w))d\sigma_w-b_m\right| \\
&\le \frac{c_8}{\sqrt{m+\nu}}\left(\iint\limits_{G_1}\left|\frac{\big((f-\tilde{S}_n)\circ y\big)(\zeta)}{g(\zeta)}\right|^2\left|y_{\bar{\zeta}}(\zeta)\right|^2 d\sigma_\zeta\right)^{1/2} \\
&\quad+\left|\frac{1}{\pi}\iint\limits_{CD}\frac{(\tilde{S}_n\circ y)(\psi(w))\overline{\psi'}(w)}{w^{m+\nu+1}g(\psi(w))\big(y(\psi(w))\big)^2}y_{\bar{\zeta}}(\psi(w))d\sigma_w-b_m\right| \\
&\le \frac{c_4\left\|f-\tilde{S}_n\right\|_{A^2(G_2,\omega)}}{\sqrt{(m+\nu)(1-k^2)}} \qquad\qquad (3.14) \\
&\quad+\left|\frac{1}{\pi}\iint\limits_{CD}\frac{(\tilde{S}_n\circ y)(\psi(w))\overline{\psi'}(w)}{w^{m+\nu+1}g(\psi(w))\big(y(\psi(w))\big)^2}y_{\bar{\zeta}}(\psi(w))d\sigma_w-b_m\right|
\end{aligned}
$$

elde ederiz. $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|f-\tilde{S}_n\right\|_{A^2(G_2,\omega)}=0$ olduğundan (3.13) ve (3.14), $m=1,2,...$ için $a_m(f,\omega)=b_m$ olduğunu gösterir.

Keyfi bir R>1 sayısı için

$$\Gamma_R := \{z : |\varphi(z)| = R\}, \qquad G_{2,R} := \{z : z \in G_1, 1 < |\varphi(z)| < R\} \cup \overline{G_2}$$

tanımlayalım. y_R, Γ_R sınırına göre K_R-kvazikonform yansıma olsun. Aşağıdaki teorem, $\omega(z) := 1/|z|^4$ özel ağırlığı için $\|\cdot\|_{A^2(G_2,\omega)}$ ağırlıklı normunda

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m(f) F_m'(1/z)$$

serisinin kısmi toplamları ile $f \in A^2(G_{2,R})$ fonksiyonlarına yaklaşım hatasını $E_n(f, G_{2,R})$ minimal hatasına göre değerlendirir.

3.3.3 Teorem: $R>1$ olsun. Eğer $f \in A^2(G_{2,R})$, $\omega(z) := 1/|z|^4$ ve

$$S_n(f, 1/z) := \sum_{m=1}^{n+1} a_m(f) F_m'(1/z),$$

f'in

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m(f) F_m'(1/z)$$

genelleşmiş Faber serisinin n. kısmi toplamı ise her n doğal sayısı için

$$\|f - S_n(f,\cdot)\|_{A^2(G_2,\omega)} \leq \frac{c}{\sqrt{(1-k_R{}^2)(R^2-1)}} \frac{E_n(f, G_{2,R})}{R^{n+1}}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada c sabiti sadece Γ eğrisine bağlıdır ve $k_R = (K_R - 1)/(K_R + 1)$ dir.

İspat: P_n^*, $f \in A^2(G_{2,R})$ fonksiyonuna $\|\cdot\|_{A^2(G_{2,R})}$ normunda en iyi yaklaşan polinom, yani

$$\left\| f - P_n^* \right\|_{A^2(G_{2,R})} = E_n(f, G_{2,R})$$

olsun. 3.3.1 Teorem'in ispatına benzer olarak $S_n(f, 1/z)$, $n = 1,2,...$ kısmi toplamlarının $\{S_n\}$ dizisinin, $G_{2,R}$'nin kompakt alt kümelerinde $f \in A^2(G_{2,R})$ fonksiyonuna düzgün yakınsak olduğunu ispatlayabiliriz. Bu, her $z \in G_2$ için

$$\begin{aligned} \left| f(z) - S_n(f, 1/z) \right| &= \left| \sum_{m=n+2}^{\infty} a_m(f) F_m'(1/z) \right| \\ &= \frac{1}{\pi} \left| \sum_{m=n+2}^{\infty} \iint_{|w|>R} \frac{((f - P_n^*) \circ y_R)(\psi(w)) \overline{\psi'}(w) y_{R_{\bar{\zeta}}}(\psi(w))}{\left(y_R(\psi(w))\right)^2} \frac{F_m'(1/z)}{w^{m+1}} d\sigma_w \right| \end{aligned}$$

olmasını gerektirir. Buna Hölder eşitsizliğini ve 3.2.3 Lemma'yı uygulayarak

$$\left| f(z) - S_n(f, 1/z) \right|^2 \le \frac{c_9 E_n^2(f, G_{2,R})}{\pi(1 - k_R^2)} \sum_{m=n+2}^{\infty} \frac{\left| F_m'(1/z) \right|^2}{m R^{2m}}$$

elde ederiz. Bu eşitsizliğin her iki yanını $1/|z|^4$ ile çarparak

$$\left| f(z) - S_n(f, 1/z) \right|^2 \frac{1}{|z|^4} \le \frac{c_9 E_n^2(f, G_{2,R})}{\pi(1 - k_R^2)} \sum_{m=n+2}^{\infty} \frac{\left| F_{m,z}'(1/z) \right|^2}{m R^{2m}}$$

elde ederiz. Şimdi, her iki yanın G_2 üzerinde integrali alınırsa 3.2.5 Lemma'ya göre, her n doğal sayısı için

$$\left\| f(z) - S_n(f, \cdot) \right\|_{A^2(G_2, \omega)}^2 \le \frac{c_9 E_n^2(f, G_{2,R})}{(1 - k_R^2)(R^2 - 1) R^{2(n+1)}}$$

yani

$$\left\| f(z) - S_n(f, \cdot) \right\|_{A^2(G_2, \omega)} \le \frac{c E_n(f, G_{2,R})}{\sqrt{(1 - k_R^2)(R^2 - 1)}\, R^{(n+1)}}$$

sonucu elde edilir.

KAYNAKLAR

[1] Çavuş, A., "Approximation by generalized Faber series in Bergman spaces on finite regions with a quasiconformal boundary", *J. Approx. Theory*. 87 (1996) 25.

[2] Israfilov, D. M., "On Approximation of functions by partial sums of generalized Faber series in domains with quasiconformal boundary (in Russian)". *Izv. Acad. Nauk Az. SSR*. 5, (1981) 10.

[3] Israfilov, D. M. "Approximative properties of generalized Faber series", *In: Proc. All-Union Scholl on Approximation Theory*, Baku, May, (1989).

[4] Israfilov, D. M., Approximation by generalized Faber series in weighted Bergman spaces on finite domains with quasiconformal boundary, *East Journal on Approx*., 4, (1998), 1.

[5] Pommerenke, C., Univalent functions, Vandenhoeck & Ruprecht, 1975.

[6] Markushevich, A.I., Theory of Functions of a Complex Variable III, Prentice hall, Inc. 1967.

[7] Goluzin, G. M., Geometric Theory of Functions of a Complex Variable, Translations of Mathematical Monographs, Vol.26, Amer. Math. Soc. 1969.

[8] Suetin, P. K., Series of Faber Polynomials, Gordan and Breach Science Publishers, Amsterdam, 1998.

[9] Conway, J. B.,Functions of One Complex Variable II, Springer-Verlag 1995.

[10] Conway, J. B.,Functions of One Complex Variable I, Springer-Verlag (1995).

[11] Lehto, O., Virtanen, K., I., Quasiconformal Mappings in The Plane, Springer-Verlag, New York/Berlin, 1973.

[12] Ahlfors, L., Lectures on Quasiconformal Mapping,,Wadsworth, Belmont, CA, 1987.

[13] Batchaev, I. M., “Integral Representations in a Region with Quasiconformal Boundary and Some Applications”, Doctoral dissertation, Baku, (1980).

[14] Andrievskii, V. V., Belyi, V. I. ve Dzyadyk, V. K., Conformal Invariants in Constructive Theory of Functions of Complex Variable, Adv. Series in Math. Sciences and Engineer., WEP Co., Atlanta, Georgia, 1995.

[15] Gaier, D., Lectures on Complex Approximation, Birkhauser, Boston/ Basel/ Stuttgart , 1987.

[16] De Vore, R. A., Lorentz, G. G., Constructive Approximation, Springer-Verlag, New York/Berlin, 1993.

[17] Belyi, V. I., “Conformal mappings and the approximation of analytic functions in domains with a quasiconformal boundary”, *Math. USSR Sbornik* 31, (1997), 289.

[18] Israfilov D. M. ve Yildirir Y. E. “Approximation by generalized Faber series in weighted Bergman spaces on infinite domains with a quasiconformal boundary”, *Sarajevo Journal of Mathematics,* 2, 1, (2006), 14.

[19] Israfilov D. M. ve Yildirir Y. E., “Approximation in weighted Bergman spaces on infinite domains”, *Proc. A. Razmadze Math. Inst.* 133, (2005), 120.