

**T.C.  
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**



**POLİNOMLARIN SIFIRLARI İÇİN HALKA BÖLGELER**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**PELİN DEMİR**

**BALIKESİR, KASIM - 2015**

**T.C.  
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**



**POLİNOMLARIN SIFIRLARI İÇİN HALKA BÖLGELER**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**PELİN DEMİR**

**BALIKESİR, KASIM - 2015**

## KABUL VE ONAY SAYFASI

**Pelin DEMİR** tarafından hazırlanan “**POLİNOMLARIN SIFIRLARI İÇİN HALKA BÖLGELER**” adlı tez çalışmasının savunma sınavı 23.11.2015 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.


Jüri Üyeleri

İmza

Danışman  
Prof. Dr. Nihal YILMAZ ÖZGÜR

Üye  
Yrd. Doç. Dr. Aslı GÜLDÜRDEK

Üye  
Yrd. Doç. Dr. Beyza Billur İSKENDER  
EROĞLU



Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Doç. Dr. Necati ÖZDEMİR

.....

## ÖZET

**POLİNOMLARIN SIFIRLARI İÇİN HALKA BÖLGELER  
YÜKSEK LİSANS TEZİ  
PELİN DEMİR  
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. NİHAL YILMAZ ÖZGÜR)**

**BALIKESİR, KASIM - 2015**

Bu tez çalışmasında polinomların sıfırlarını içeren yeni halka bölgeler belirlemek amacıyla genelleştirilmiş Fibonacci sayı dizisi kullanılarak yeni bir özdeşlik elde edilmiştir. Daha sonra bu özdeşlik yardımıyla yeni bir halka bölge elde edilerek bu bölgenin bilinen bölgelerle kıyaslaması yapılmıştır.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde tez konusu tanıtılmıştır.

İkinci bölümde tezin daha kolay anlaşılması için gerekli olan temel tanımlara, önermelere, teoremlere ve çeşitli örneklerle yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde polinomların sıfırlarını içeren halka bölgeler incelenmiştir. Bu halka bölgelerin kıyaslaması örnekler üzerinde yapılmıştır.

Dördüncü bölüm orijinal olup genelleştirilmiş Fibonacci sayı dizisi kullanılarak yeni bir özdeşlik elde edilmiştir. Bu özdeşlik yardımıyla polinomların sıfırlarını içeren yeni bir halka bölge bulunmuştur. Bulunan yeni halka bölgemiz ile bilinen halka bölgelerin kıyaslaması örnekler ile yapılmıştır. Sonuç olarak elde etmiş olduğumuz yeni halka bölgenin bilinen halka bölgelerden daha kesin olduğu görülmüştür

**ANAHTAR KELİMELELER:** Polinomların sıfırları, Fibonacci sayıları, Lucas sayıları, genelleştirilmiş Fibonacci sayıları, genelleştirilmiş Lucas sayıları.

## **ABSTRACT**

**ANNULI FOR THE ZEROS OF POLYNOMIALS  
MSC THESIS  
PELİN DEMİR  
BALIKESİR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE  
MATHEMATICS**

**(SUPERVISOR: PROF. DR. NİHAL YILMAZ ÖZGÜR)**

**BALIKESİR, NOVEMBER 2015**

In this thesis, a new identity is obtained to determine new annuli containing all the zeros of polynomials using generalized Fibonacci number sequence. Then a new annulus obtained using this identity and a comparison is made with the known regions of this region.

This thesis consists of four chapters.

In the first chapter, the subject of the thesis is introduced.

In the second chapter, in order to make understanding easy some basic definitions, propositions, theorems and various examples are given.

In the third chapter, known annuli containing all the zeros of polynomials are investigated. Comparison of these annuli is made by examples.

The fourth chapter is original and in this chapter, a new identity is obtained using the generalized Fibonacci number sequence. A new annulus containing all the zeros of polynomials is found using this identity. Comparison of the new annulus with known annuli is made by examples. Consequently we see that this new annulus is more certain than the known annuli.

**KEYWORDS:** Zeros of polynomials, Fibonacci numbers, Lucas numbers, generalized Fibonacci numbers, generalized Lucas numbers.

# İÇİNDEKİLER

## Sayfa

ÖZET.....	i
ABSTRACT .....	ii
İÇİNDEKİLER .....	iii
ŞEKİL LİSTESİ.....	iv
TABLO LİSTESİ .....	v
SEMBOL LİSTESİ.....	vi
ÖNSÖZ.....	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. ÖN BİLGİLER .....	4
2.1 Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas Dizileri .....	4
2.1 Reel Katsayılı Polinomlar .....	6
2.3 Kompleks Katsayılı Polinomlar.....	7
3. POLİNOMLARIN SIFIRLARINI İÇEREN HALKA BÖLGELER.....	14
3.1 Polinomların Sıfırlarını İçeren Halka Bölgelerin Elde Edilmesi .....	14
3.2 Bölgelerin Karşılaştırılması .....	29
4. POLİNOMLARIN SIFIRLARI İÇİN YENİ BİR HALKA BÖLGE .....	33
4.1 Polinomların Sıfırlarını İçeren Yeni Halka Bölge .....	33
4.2 Karşılaştırma.....	39
5. SONUÇ VE ÖNERİLER .....	47
6. KAYNAKLAR.....	48
7. EKLER.....	50

## ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 2.1: $P_1(z)$ polinomunun sıfırlarını içeren bölge.....	9
Şekil 2.2: $P_2(z)$ polinomunun sıfırlarını içeren bölge.....	11
Şekil 2.3: $P_3(z)$ polinomunun sıfırlarını içeren bölgeler.....	12
Şekil 2.4: $P_4(z)$ polinomunun sıfırlarını içeren bölgeler.....	13
Şekil 3.1: $P_5(z)$ polinomunun sıfırlarını içeren halka bölge.....	18
Şekil 3.2: $P_6(z)$ polinomunun sıfırlarını içeren halka bölge.....	20
Şekil 3.3: $P_7(z)$ polinomunun sıfırlarını içeren halka bölge.....	21
Şekil 3.4: $P_8(z)$ polinomunun sıfırlarını içeren halka bölge.....	24
Şekil 3.5: $P_9(z)$ polinomunun sıfırlarını içeren halka bölge.....	26
Şekil 3.6: $P_{10}(z)$ polinomunun sıfırlarını içeren halka bölge.....	28
Şekil 3.7: $P_{11}(z)$ polinomunun sıfırlarını içeren halka bölge. ....	29
Şekil 3.8: $P_{12}(z)$ polinomunun sıfırlarını içeren halka bölgeler.....	30
Şekil 3.9: $P_{13}(z)$ polinomunun sıfırlarını içeren halka bölgeler.....	32
Şekil 4.1: $P_{14}(z)$ polinomunun bütün sıfırlarını içeren halka bölge.....	39
Şekil 4.2: $P_{14}(z)$ polinomunun bütün sıfırlarını içeren halka bölgeler.....	40
Şekil 4.3: $P_{15}(z)$ polinomunun bütün sıfırlarını içeren halka bölgeler.....	42
Şekil 4.4: $P_{16}(z)$ polinomunun bütün sıfırlarını içeren halka bölgeler.....	43
Şekil 4.5: $P_{17}(z)$ polinomunun bütün sıfırlarını içeren halka bölgeler.....	44

## TABLO LİSTESİ

### Sayfa

<b>Tablo 3.1:</b> $P_{12}(z)$ polinomunun sıfırlarını içeren halka bölgelerin değerleri.....	30
<b>Tablo 3.2:</b> $P_{13}(z)$ polinomunun sıfırlarını içeren halka bölgelerin değerleri.....	31
<b>Tablo 4.1:</b> $P_{14}(z)$ polinomunun sıfırlarını içeren halka bölgelerin değerleri.....	40
<b>Tablo 4.2:</b> $P_{15}(z)$ polinomunun sıfırlarını içeren halka bölgelerin değerleri.....	41
<b>Tablo 4.3:</b> $P_{16}(z)$ polinomunun sıfırlarını içeren halka bölgelerin değerleri.....	43
<b>Tablo 4.4:</b> $P_{17}(z)$ polinomunun sıfırlarını içeren halka bölgelerin değerleri.....	44
<b>Tablo 4.5:</b> $P_{18}(z)$ polinomunun sıfırlarını içeren halka bölgelerin değerleri.....	45
<b>Tablo 4.6:</b> $P_{14}(z)$ polinomunun sıfırlarını içeren halka bölgelerin değerleri.....	46
<b>Tablo 4.7:</b> $P_{19}(z)$ polinomunun sıfırlarını içeren halka bölgelerin değerleri.....	46



## SEMBOL LİSTESİ

Sembol	Tanım
$F_n$	$n$ . Fibonacci sayısı
$L_n$	$n$ . Lucas sayısı
$F_{k,t,n}$	$n$ . genelleştirilmiş Fibonacci sayısı
$L_{k,t,n}$	$n$ . genelleştirilmiş Lucas sayısı
$\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$	$n$ sayısının $k$ sayısına bölümünün tam kısmı
$C(n,k) = \binom{n}{k}$	$n$ ' nin $k$ ' lı kombinasyonu

## ÖNSÖZ

Bu çalışmada, polinomların sıfırlarını içeren halka bölgeler ile ilgili literatürde yapılan çalışmalar ayrıntılı olarak incelenmiş ve genelleştirilmiş Fibonacci sayı dizisi yardımıyla yeni bir özdeşlik elde ederek polinomların sıfırlarını içeren yeni bir halka bölge elde edilmiştir.

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren her türlü konuda destek olan tez danışmanım Prof. Dr. Nihal YILMAZ ÖZGÜR'e, her zaman tavsiyelerinden yararlandığım Prof. Dr. Cihan ÖZGÜR'e, benden yardımını esirgemeyen Araş. Gör. Nihal TAŞ' a ve tüm Fen Bilimleri Enstitüsü personeline teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca çalışmalarım boyunca daima yanımda olan maddi ve manevi desteğini esirgemeyen her durumda yanımda olan aileme sonsuz teşekkürlerimi ve sevgilerimi sunarım.

Balıkesir, 2015

Pelin DEMİR

# 1. GİRİŞ

Polinomlar birçok bilimsel çalışmada adından çokça söz ettiren bir konu olmuştur. Özellikle polinomların sıfır yerlerinin geometrisi; mühendislik, matematiksel kimya ve matematik gibi farklı disiplinlerde; bu alanlar uygulamalı matematiğin kontrol teori, sinyal işleme, iletişim teorisi, kodlama teorisi, kriptografi ve matematiksel biyoloji gibi pek çok alanında uygulaması olan önemli bir alandır.

Polinomların sıfır yerlerinin belirlenmesi problemi Gauss ve Cauchy zamanından beri yoğun bir şekilde çalışılmaktadır. Bu çalışmalarda ele alınan temel problem, bölgenin nasıl olduğu ve nasıl elde edileceğidir. Özellikle polinomların sıfırlarını içeren halka bölgelerin belirlenmesiyle ilgili pek çok çalışma vardır. Bu tip halka bölgeleri bulabilmek için Fibonacci sayı dizisi ve Lucas sayı dizisi gibi sayı dizileri kullanılarak bazı özdeşlikler elde edilmiştir. Bulunan bu özdeşlikler yardımıyla da polinomun sıfırlarını içeren yeni halka bölgeler oluşturulmuştur.

Polinomların sıfır yerlerinin belirlenmesi ile ilgili ilk çalışma Cauchy tarafından yapılmıştır [1]. Cauchy yapmış olduğu bu çalışmada polinomların sıfırlarını içeren bir disk elde etmiştir.

Cauchy'nin bölgesinden daha iyi bölgeler elde etmek için çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Yapılan bu çalışmalar sonucunda elde edilen yeni bölgelerin örnekler üzerinde Cauchy'nin bölgesinden daha iyi olduğu görülmüştür.

J. L. Diaz-Barraro 2002 yılında Fibonacci sayı dizisi ve Binom katsayısının kullanıldığı özdeşlikler yardımıyla polinomların sıfırlarını içeren yeni bir disk bulmuştur [2]. Bulmuş olduğu bu diskin Cauchy'nin bölgesiyle kıyaslamasını örnek üzerinden yapmıştır.

J. L. Diaz-Barraro 2002 yılında Fibonacci sayı dizisini kullanarak bir özdeşlik elde etmiştir [3]. Elde edilen bu özdeşlik yardımıyla polinomların sıfırlarını içeren yeni bir halka bölge vermiştir. Daha sonra J. L. Diaz-Barraro ve J. J. Egozcue 2004 yılında yeni bir halka bölgenin sınırlarını belirlemek için bir sayı dizisini

genelleyerek yeni bir özdeşlik bulmuşlardır. Bu özdeşlik sayesinde de bilinen bazı halka bölgelerin bir geneli olarak yeni bir halka bölge elde edilmiştir [4].

M. Bidkham ve E. Shashahani 2011 yılında  $k$ -Fibonacci sayı dizisini kullanarak yeni bir özdeşlik tanımlamıştır ve bu özdeşlik yardımıyla polinomların sıfırları için uygun bir halka bölge elde etmiştir [5].

M. Bidkham, A. Zireh ve H. A. Soleiman Mezerji 2013 yılında genelleştirilmiş Fibonacci sayı dizisini kullanarak J. L. Diaz-Barraro ve J. J. Egozcue tarafından 2004 yılında yapılan çalışmayı [4] genelleyerek polinomların sıfırlarını içeren yeni bir halka bölge bulmuşlardır [6].

N. A. Rather ve S. G. Mattoo 2013 yılında daha önce yapılan çalışmalara benzer şekilde yeni bir sayı dizisi tanımlayarak yeni bir özdeşlik elde etmişlerdir [7]. Bu özdeşlikten faydalanarak yeni bir halka bölge bulmuşlardır.

A. Dalal ve N. K. Govil 2013 yılında  $1 \leq k \leq n$  için

$$A_k > 0 \text{ ve } \sum_{k=1}^n A_k = 1$$

özdeşliğini sağlayan herhangi bir dizi yardımıyla polinomların sıfırlarını içeren yeni bir halka bölge elde edilebileceğini göstermişlerdir [8]. Elde edilen bu halka bölgenin daha önce bulunan halka bölgelerden daha genel bir yapıda olduğu gösterilmiştir.

Sonuç olarak bu çalışmaların hepsinde sayı dizileri yardımıyla çeşitli özdeşlikler tanımlanmış ve bu özdeşlikler yardımıyla polinomların sıfırlarını içeren yeni halka bölgeler elde edilmiştir. Bulunan halka bölgelerin daha önceden bulunan halka bölgelerle kıyaslanması örnekler üzerinde yapılmıştır. Fakat yapılan bu çalışmalarda her polinom için elde edilecek halka bölge kesin değildir. Yani her bir polinom için polinomun sıfırlarını içeren en iyi halka bölge farklı teoremlere karşılık gelmektedir. Bu nedenle polinomun sıfırlarını içeren kesin bölgeler belirlenmedikçe yeni bölgelerin araştırılması önem kazanmaktadır.

Bu tezde daha önceden bulunan diskler ve halka bölgeler incelenmiş ve genelleştirilmiş Fibonacci sayı dizisi kullanılarak yeni bir özdeşlik bulunmuştur. Son

bölüm orijinal olup bu bölümde bulunan bu yeni özdeşlik yardımıyla polinomların sıfırlarını içeren yeni bir halka bölge edilmiştir. Bilinen halka bölgeler ile bu çalışma da elde edilen halka bölgenin karşılaştırması örnekler yardımıyla yapılmıştır. Sonuç olarak elde etmiş olduğumuz halka bölgenin bilinen halka bölgelerden daha iyi olduğu görülmüştür.

## 2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanımlar ve kavramlar verilecektir.

### 2.1 Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas Dizileri

#### 2.1.1 Tanım: [9]

$k$  ve  $t$  herhangi pozitif reel sayılar olsun. Genelleştirilmiş Fibonacci sayıları, her  $n \geq 1$  tamsayısı için, başlangıç koşulları  $F_{k,t,0} = 0, F_{k,t,1} = 1$  olmak üzere

$$F_{k,t,n+1} = k F_{k,t,n} + t F_{k,t,n-1} \quad n \geq 1 \quad (2.1)$$

bağıntısı ile tanımlanır. Burada  $F_{k,t,n}$  'ye  $n$ .  $k, t$ - Fibonacci sayısı denir.

#### 2.1.2 Sonuç: Özel olarak $t = 1$ ve $k$ herhangi pozitif reel sayısı olmak üzere

$F_{k,n+1} = k F_{k,n} + F_{k,n-1} \quad n \geq 1, F_{k,0} = 0, F_{k,1} = 1$  şeklinde tanımlanan  $n$ .  $k$ - Fibonacci sayı dizisi elde edilir.

**2.1.3 Sonuç:** Özel olarak  $k = t = 1$  için  $F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad n \geq 1, F_0 = 0, F_1 = 1$  şeklinde tanımlanan  $n$ . Fibonacci sayı dizisi elde edilir.

**2.1.4 Sonuç:** Özel olarak  $k = 2, t = 1$  için  $P_{n+1} = P_n + P_{n-1} \quad n \geq 1, P_0 = 0, P_1 = 1$  şeklinde tanımlanan  $n$ . Pell sayı dizisi elde edilir

### 2.1.5 Tanım: [9]

$k$  ve  $t$  herhangi pozitif reel sayılar olsun. Genelleştirilmiş Lucas sayıları, başlangıç koşulları  $L_{k,t,0} = 2$ ,  $L_{k,t,1} = 1$  olmak üzere

$$L_{k,t,n+1} = k L_{k,t,n} + t L_{k,t,n-1} \quad (n \geq 1) \quad (2.2)$$

bağıntısı ile tanımlanır. Burada  $L_{k,t,n}$  'ye  $n$ .  $k$  - Lucas sayısı denir.

**2.1.6 Sonuç:** Özel olarak  $t = 1$  ve herhangi bir  $k$  pozitif reel sayısı olmak üzere  $n$ .  $k$ - Lucas sayı dizisi  $L_{k,0} = 2$  ve  $L_{k,1} = 1$  başlangıç koşullarıyla,  $L_{k,n+1} = k L_{k,n} + L_{k,n-1}$  ( $n \geq 1$ ) şeklinde tanımlanır.

**2.1.7 Sonuç:** Özel olarak  $k = t = 1$  olmak üzere  $n$ . Lucas sayı dizisi  $L_0 = 2$  ve  $L_1 = 1$  başlangıç koşullarıyla,  $L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$  ( $n \geq 1$ ) şeklinde tanımlanır.

### 2.1.8 Teorem: [9] (Binet Formülü)

$k$  ve  $t$  herhangi pozitif reel sayılar olsun.  $x^2 - kx - t = 0$  karakteristik denkleminin kökleri  $\alpha = \frac{k + \sqrt{k^2 + 4t}}{2}$  ve  $\beta = \frac{k - \sqrt{k^2 + 4t}}{2}$  dir . Genelleştirilmiş Fibonacci sayıları için

$$F_{k,t,n} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \quad (2.3)$$

eşitliği sağlanır. Benzer şekilde genelleştirilmiş Lucas sayıları için

$$L_{k,t,n} = \alpha^n + \beta^n \quad (2.4)$$

eşitliği sağlanır.

## 2.2 Reel Katsayılı Polinomlar

Denklemler teorisi, polinom denklemlerin köklerinin yapısı ve kökleri bulma metodları ile ilgili birçok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalar matematik ve fen bilimlerinin her dalında uygulama alanına sahiptir. Polinom denklemler üzerinde yapılan yoğun çalışmalar, bazı gözlemlere ve teoremlerin doğmasına yol açmıştır. Bunlardan biri Descartes işaret kuralıdır. Bu kural kısaca, bir polinom denklemin köklerinin karakterini (pozitif, negatif ya da sanal) belirlemeye yardımcı bir araç olarak geliştirilmiştir.

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \neq 0$  reel sayılar olmak üzere

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (2.5)$$

$n$ . derece gerçel katsayılı polinomunu dikkate alalım. Cebirin temel teoremine göre  $n$ . dereceden bir polinomun (kompleks düzlemde)  $n$  tane kökü vardır. Bu durumda Descartes işaret kuralı ile tam veya rasyonel katsayılı bir denklemin tam ve rasyonel kökleri hakkında çeşitli çalışmalar yapılmıştır.

### 2.2.1 Teorem: [10] (Descartes İşaret Kuralı)

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \neq 0$  reel sayılar olmak üzere (2.5) de tanımlanan  $P(z)$   $n$ . derece gerçel katsayılı polinomunun pozitif köklerinin sayısı; ya denklemin katsayıları arasındaki işaret değişiminin sayısına eşit ya da işaret değişimi sayısının bir çift tam sayı eksiği kadardır. Negatif kökler için (2.5) denkleminde  $x$  yerine  $-x$  koyarsak pozitif köklerdeki aynı durum negatif kökler için de geçerlidir. Descartes işaret kuralı, bir bakıma, denklemin pozitif (negatif) köklerinin sayısının maksimumunu vermektedir. Karmaşık kök için;  $n$ . dereceden bir polinom  $n$  köke sahiptir. Buna göre polinomun sahip olduğu minimum karmaşık kök sayısı ise  $p$  pozitif kök sayısı ve  $q$  negatif kök sayısı olmak üzere  $n - (p + q)$  eşittir.



### 2.2.2 Örnek:

$4x^3 - 5x^2 + 6 = 0$  denklemini ele alalım. Katsayıların işareti sırasıyla  $+, -, +$  olup, katsayılar arasındaki işaret değişimi 2 defa gerçekleşmektedir. O halde pozitif köklerin sayısı ya 2 ya da 0 dir. Negatif kök sayısı denkleminde  $x$  yerine  $-x$  koyarsak  $-4x^3 - 5x^2 + 6 = 0$  denklemini bulunur ve denklemin katsayılar arasındaki işaret değişimi 1 dir. O halde 1 tane negatif köke sahiptir.

## 2.3 Kompleks Katsayılı Polinomlar

Polinomların sıfırlarını içeren bölgelerin araştırılması ile ilgili çalışmalar Gauss'un aşağıdaki sonucu ile başlamıştır.

### 2.3.1 Teorem: [1]

$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$  kompleks katsayılı bir polinom olsun.

$R = \max_{1 \leq k \leq n} \left\{ n \sqrt[k]{2} |a_k| \right\}^{\frac{1}{k}}$  olmak üzere  $P(z)$  polinomunun bütün sıfırları

$$C_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\} \quad (2.6)$$

kapalı diski dışında yer almaz.

Cauchy 1829 yılındaki çalışmasında aşağıdaki teoremi ispatlayarak Gauss'un yukarıdaki sonucunu geliştirmiştir [11].

### 2.3.2 Teorem: [11]

$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$  kompleks katsayılı bir polinom olsun.

$M = \max_{0 \leq k \leq n-1} \{ |a_k| \}$  ve  $\eta$

$$z^n - |a_{n-1}|z^{n-1} - \dots - |a_1|z - |a_0| = 0 \quad (2.7)$$

reel katsayılı denklemin pozitif kökü olmak üzere  $P(z)$ 'nin bütün sıfırları

$$C_2 = \{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1 + M \} \quad (2.8)$$

diskin içerisinde yer alır.

Cauchy'nin iyi bilinen bir çalışmasıdır [1].

### 2.3.3 Teorem: [1]

$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$  kompleks katsayılı bir polinom olsun.

O zaman  $r$  sayısı

$$|a_n|z^n - |a_{n-1}|z^{n-1} - \dots - |a_1|z - |a_0| = 0 \quad (2.9)$$

denkleminin pozitif kökü olmak üzere  $P(z)$ 'nin bütün sıfırları

$$C_3 = \{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq r \} \quad (2.10)$$

diskin içerisinde yer alır.

**İspat:**

$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$  olsun.

$$|P(z)| \geq |a_n z^n| - |a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0| \quad \text{dir.} \quad (2.11)$$

İspatı (2.11) eşitsizliğinden elde edeceğiz.

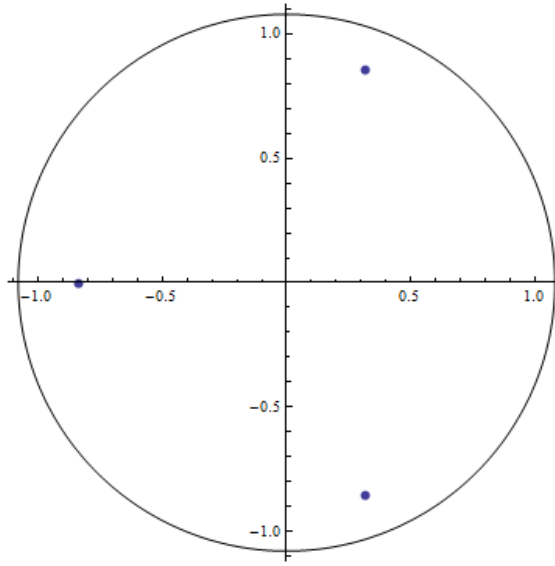
Kabul edelimki  $|z| > r$  olsun. Buna göre  $|z| > r$  için (2.3.4) denkleminin sol tarafı negatif olur. Bu yüzden (2.11) eşitsizliğinin sağ tarafı pozitif elde edilir.  $P(z)$

polinomu (2.11) eşitsizliğine bağlı olduğundan  $|z| > r$  için  $|P(z)| > 0$  dir. Yani  $|z| > r$  için  $P(z) \neq 0$  dır. Buna göre  $P(z)$  polinomunun bütün sıfırları  $C_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$  diski içinde yer alır.

Dikkat edilirse (2.9) denkleminin Descartes kuralı gereğince bir tek pozitif kökü vardır.  $\square$

### 2.3.4 Örnek:

Teorem 2.3.3 kullanılırsa  $P_1(z) = z^3 + 0.2z^2 + 0.3z + 0.7$  polinomunun bütün sıfırlarının  $C_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1.0791\}$  diski içerisinde yer aldığı elde edilir. Köklerin geometrik dağılımı Şekil 2.1 de görülmektedir.



Şekil 2.1:  $P_1(z)$  polinomunun sıfırlarını içeren bölge.

J. L. Díaz-Barrero 2002 yılında yapmış olduğu çalışmada aşağıdaki özdeşliklerden faydalanarak polinomların sıfırlarını içeren yeni bir bölge elde etmiştir [2].

### 2.3.5 Önerme: [2]

$C(n, k)$  Binom katsayısı ve  $F_n$   $n$ . Fibonacci sayısı olmak üzere

$$\sum_{k=1}^n k^2 C(n, k) = 2^{n-2} n(n+1) \quad (2.12)$$

ve

$$\sum_{k=0}^n C(n, k) 2^k F_k = F_{3n} \quad (2.13)$$

özdeşlikleri elde edilir.

### 2.3.6 Teorem: [2]

$P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$  sabit olmayan kompleks bir polinom olsun. O zaman  $P(z)$

polinomunun bütün sıfırları, sınırları

$$r_1 = \max_{1 \leq k \leq n} \left\{ \frac{2^{n-1} C(n+1, 2)}{k^2 C(n, k)} |a_{n-k}| \right\}^{1/k} \quad (2.14)$$

ve

$$r_2 = \max_{1 \leq k \leq n} \left\{ \frac{F_{3n}}{2^k F_k C(n, k)} |a_{n-k}| \right\}^{1/k} \quad (2.15)$$

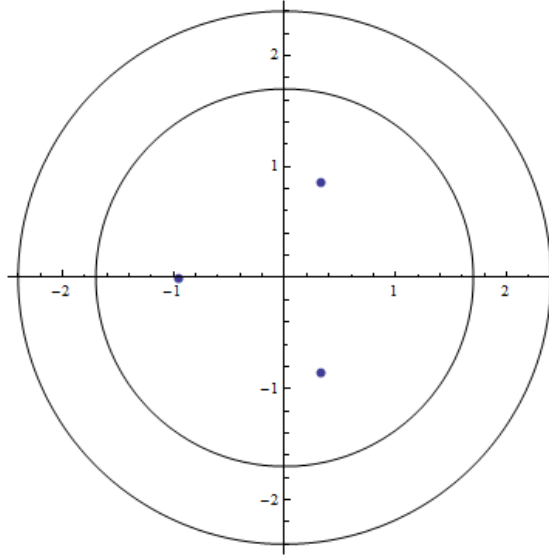
olan  $C_{4.1} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r_1\}$  veya  $C_{4.2} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r_2\}$  diski içinde yer alır.

### 2.3.7 Örnek:

J. L. Díaz-Barrero'nun teoremi kullanılırsa

$$P_2(z) = z^3 + 0.3z^2 + 0.2z + 0.8$$

polinomunun bütün sıfırları, sınırları sırasıyla  $r_1=2.4$  ve  $r_2=1.7$  olan  $C_{4.1} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2.4\}$  veya  $C_{4.2} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1.7\}$  diski içinde yer alır. Dikkat edilirse bu örnekte  $P_2(z)$  polinomunun sıfırları her iki diskin de içinde yer almaktadır (Şekil 2.2).



Şekil 2.2:  $P_2(z)$  polinomunun sıfırlarını içeren bölge.

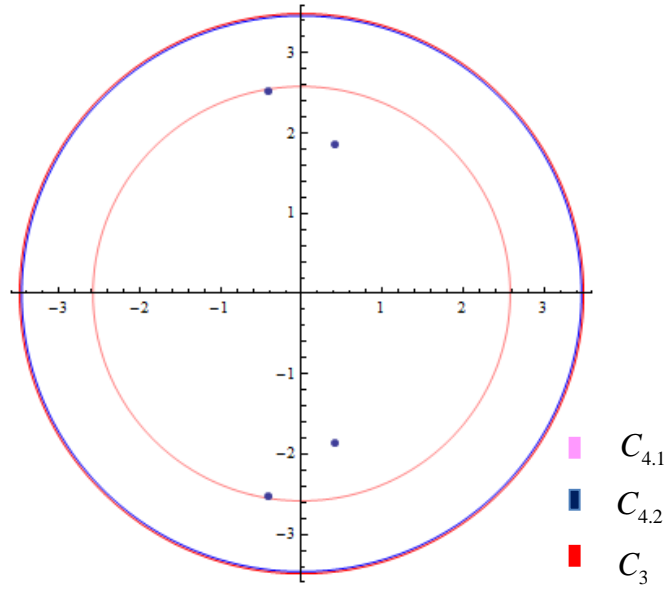
Şimdi bu son iki bölgeyi örnekler üzerinde karşılaştıralım.

### 2.3.8 Örnek:

$$P_3(z) = 0.21z^4 - 0.001z^3 + 2z^2 - 0.5z + 5$$

polinomunun bütün sıfırlarını içeren bölgeyi elde etmek için J. L. Díaz-Barrero'nun teoremi kullanılırsa sınırları sırasıyla  $r_1=2.5819$  ve  $r_2=3.4641$  olan  $C_{4.1} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2.5819\}$  veya  $C_{4.2} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 3.4641\}$  diskleri elde edilir.

Dikkat edilirse bu örnekte  $P_3(z)$  polinomunun sıfırları her iki diskin de içinde yer almaktadır (Şekil 2.3). Şimdi Cauchy'nin teoremi kullanılırsa  $P_3(z)$  polinomunun sıfırları sınırı  $r_1=3.4896$  olan  $C_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 3.4896\}$  diski içerisinde yer almaktadır (Şekil 2.3). J. L. Díaz-Barrero'nun teoremini kullanılarak elde etmiş olduğumuz sınır Cauchy'nin teoremi kullanılarak elde edilen sınırdan daha iyidir. Dolayısıyla  $P_3(z)$  polinomunun bütün sıfırları için elde edilen  $C_{4.1}$  bölgesi daha iyi bir bölgedir (Şekil 2.3) (burada  $P_3(z)$  polinomunun sıfırlarının modülleri  $|z_1|=2.558$ ,  $|z_2|=2.558$ ,  $|z_3|=1.9075$  ve  $|z_4|=1.9075$  dir)



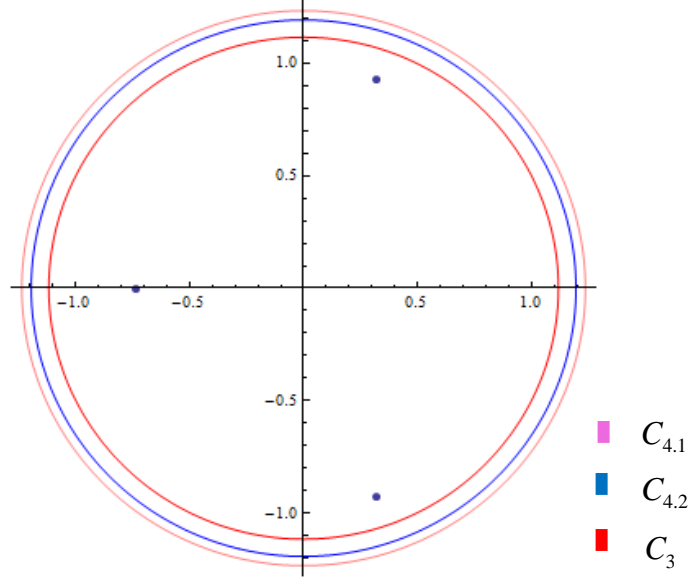
Şekil 2.3:  $P_3(z)$  polinomunun sıfırlarını içeren bölgeler.

### 2.3.9 Örnek: [2] numaralı çalışmada yer alan

$$P_4(z) = z^3 + 0.1z^2 + 0.5z + 0.7$$

polinomunu dikkate alalım. Bu polinomun bütün sıfırlarını içeren bölgeyi elde etmek için J. L. Díaz-Barrero'nun teoremi yardımıyla sınırları sırasıyla  $r_1=1.2312$  ve  $r_2=1.1902$  olan  $C_{4.1} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1.2312\}$  ve  $C_{4.2} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1.1902\}$  diskleri elde edilir. Dikkat edilirse bu örnekte  $P_4(z)$  polinomunun sıfırları her iki diskin de içinde yer almaktadır (Şekil 2.4). Şimdi Cauchy'nin teoremini kullanılırsa sınırı  $r_1=1.1135$  olan  $C_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1.1135\}$  diski elde edilir (Şekil 2.4). Fakat

bu son sınır [2] nolu kaynakta yanlış hesaplanmıştır. Cauchy'nin teoremini kullanarak elde etmiş olduğumuz bölge J. L. Díaz-Barrero teoremi kullanılarak elde edilen bölgelerden daha iyidir. Dolayısıyla  $P_4(z)$  polinomunun bütün sıfırları için elde edilen  $C_3$  bölgesi daha iyi bir bölgedir (Şekil 2.4).



Şekil 2.4:  $P_4(z)$  polinomunun sıfırlarını içeren bölgeler.

### 3. POLİNOMLARIN SIFIRLARINI İÇEREN HALKA BÖLGELER

Bu bölümde polinomların sıfırlarını içeren halka bölgeler incelenecektir. Bu bölgeleri belirlemek için bilinen sayı dizileri yardımıyla uygun özdeşlikler elde edilmiş ve bu özdeşlikler kullanılarak Cauchy'nin sınırını daha iyi hale getirmek için yeni halka bölgeler elde edilmiştir.

#### 3.1. Polinomların Sıfırlarını İçeren Halka Bölgelerin Elde Edilmesi

Bu bölümde polinomların sıfırlarını içeren halka bölgeler hakkında yapılan çalışmalar yer alacaktır. Gauss ve Cauchy'nin elde etmiş olduğu sınırları daha iyi hale getirmek için çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmalar ile Gauss ve Cauchy'nin sınırları arasında karşılaştırmalar yapılarak elde edilen alt sınırların en büyük ve üst sınırların en küçük olması amaçlanmıştır. Bu konu hakkında Díaz- Barrero 2002 yılında yaptığı çalışmada Fibonacci sayıları ve binom katsayılarını içeren aşağıdaki özdeşlikten yararlanarak polinomların sıfırlarını içeren bölgeyi halka bölge olarak elde edilmiştir.

##### 3.1.1 Önerme: [3]

$F_n$   $n$ . Fibonacci sayısı ve  $C(n, k)$  binom katsayısı olmak üzere

$$\sum_{k=1}^n 2^{n-k} 3^k F_k C(n, k) = F_{4n} \quad (3.1)$$

özdeşliği elde edilir.



[3]' de Díaz-Barrero Cauchy'nin klasik sonucundaki bölgeyi daha iyi hale getirmek için yukarıdaki özdeşlik yardımıyla halka bölgenin sınırlarını aşağıdaki teoremden elde etmiştir. Bu teoremin ispatı, yöntemin açıklanması amacıyla verilmiştir.

### 3.1.2 Teorem: [3]

$A(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$  ( $1 \leq i \leq n$ ,  $a_i \neq 0$ ) sabit olmayan kompleks bir polinom

olsun. O zaman  $A(z)$  polinomunun bütün sıfırları sınırları

$$r_1 = \frac{3}{2} \min_{1 \leq k \leq n} \left\{ \frac{2^n F_k C(n,k)}{F_{4n}} \left| \frac{a_0}{a_k} \right| \right\}^{1/k} \quad (3.2)$$

ve

$$r_2 = \frac{2}{3} \max_{1 \leq k \leq n} \left\{ \frac{F_{4n}}{2^n F_k C(n,k)} \left| \frac{a_{n-k}}{a_n} \right| \right\}^{1/k} \quad (3.3)$$

olan

$$C_5 = \{z \in \mathbb{C} : r_1 \leq |z| \leq r_2\} \quad (3.4)$$

halkası içinde yer alır.

**İspat:**  $r_1^k \leq \frac{2^{n-k} 3^k F_k C(n,k)}{F_{4n}} \left| \frac{a_0}{a_k} \right|$  yazabiliriz.

$|z| < r_1$  olduğunu varsayalım. Bu durumda sırasıyla  $|x| - |y| \leq ||x| - |y|| \leq |x + y|$ ,  
 $|x + y| \leq |x| + |y|$  ve  $|xy| = |x||y|$  eşitsizlikleri ve (3.1) özdeşliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} |A(z)| &= \left| \sum_{i=0}^n a_i z^i \right| = \left| a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 \right| \\ &\geq |a_0| - |a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq |a_0| - \left( |a_1 z| + \dots + |a_{n-1} z^{n-1}| + |a_n z^n| \right) \\
&\geq |a_0| - \sum_{k=1}^n |a_k| |z|^k \\
&> |a_0| - \sum_{k=1}^n |a_k| r_1^k \\
&> |a_0| \left[ 1 - \sum_{k=1}^n \left| \frac{a_k}{a_0} \right| r_1^k \right] \\
&> |a_0| \left[ 1 - \sum_{k=1}^n \left| \frac{a_k}{a_0} \right| \frac{2^{n-k} 3^k F_k C(n,k)}{F_{4n}} \left| \frac{a_0}{a_k} \right| \right] \\
&= |a_0| \left[ 1 - \sum_{k=1}^n \frac{2^{n-k} 3^k F_k C(n,k)}{F_{4n}} \right] = 0
\end{aligned}$$

yani  $|A(z)| > 0$  elde edilir. Buna göre  $\{z \in \mathbb{C} : |z| < r_1\}$  içinde  $A(z)$  polinomunun sıfırları yoktur.

$A(z)$  polinomunun bütün sıfırlarının modülleri Cauchy'nin teoreminden dolayı

$$G(z) = |a_n| z^n - |a_{n-1}| z^{n-1} - \dots - |a_1| z - |a_0|$$

denkleminin tek pozitif reel köküne eşit veya daha küçüktür. Dolayısıyla  $G(r_2) \geq 0$  olduğunu gösterirsek ikinci bölümü ispat etmiş olacağız. (3.3) gereğince

$$r_2 = \frac{2}{3} \max_{1 \leq k \leq n} \left\{ \frac{F_{4n}}{2^n F_k C(n,k)} \left| \frac{a_{n-k}}{a_n} \right| \right\}^{1/k} \text{ olduğundan } r_2^k \geq \frac{F_{4n}}{2^{n-k} 3^k F_k C(n,k)} \left| \frac{a_{n-k}}{a_n} \right| \text{ yazabiliriz.}$$

Buradan

$$r_2^k \frac{2^{n-k} 3^k F_k C(n,k)}{F_{4n}} \geq \left| \frac{a_{n-k}}{a_n} \right|$$

elde edilir. Buna göre (3.1) özdeşliği kullanılarak

$$G(r_2) = |a_n| r_2^n - |a_{n-1}| r_2^{n-1} - \dots - |a_1| r_2 - |a_0|$$

$$\begin{aligned}
&= |a_n| \left[ r_2^n - \frac{|a_{n-1}|}{|a_n|} r_2^{n-1} - \dots - \frac{|a_1|}{|a_n|} r_2 - \frac{|a_0|}{|a_n|} \right] \\
&= |a_n| \left[ r_2^n - \sum_{k=1}^n \frac{|a_{n-k}|}{|a_n|} r_2^{n-k} \right] \\
&\geq |a_n| \left[ r_2^n - \sum_{k=1}^n r_2^k \frac{2^{n-k} 3^k F_k C(n,k)}{F_{4n}} r_2^{n-k} \right] \\
&\geq |a_n| \left[ r_2^n - \sum_{i=1}^n \frac{2^{n-k} 3^k F_k C(n,k)}{F_{4n}} r_2^n \right] \\
&\geq |a_n| r_2^n \left[ 1 - \sum_{i=1}^n \frac{2^{n-k} 3^k F_k C(n,k)}{F_{4n}} \right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

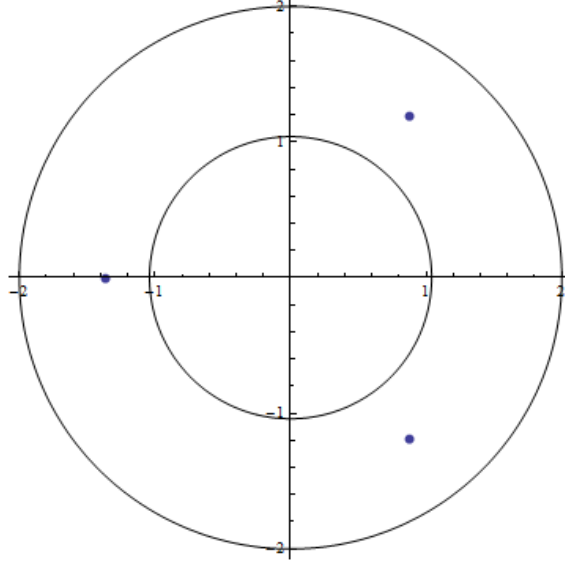
elde edilir. Buna göre  $G(r_2) \geq 0$  olduğunu göstermiş olduk. Dolayısıyla ispat tamamlanmıştır.  $A(z)$  polinomunun sıfırları  $C_5 = \{z \in \mathbb{C} : r_1 \leq |z| \leq r_2\}$  halkası içerisinde yer alır.  $\square$

### 3.1.3 Örnek:

J. L. Díaz-Barrero'nun teoremi kullanılarak

$$P_5(z) = 10z^3 - 4z^2 - 2z + 30$$

polinomunun bütün sıfırlarının, sınırları  $r_1 = 1.04$  ve  $r_2 = 2$  olan  $C_5 = \{z \in \mathbb{C} : 1.04 \leq |z| \leq 2\}$  halkası içinde yer aldığı sonucu elde edilir (Şekil 3.1).



Şekil 3.1:  $P_5(z)$  polinomunun sıfırlarını içeren halka bölge.

Díaz-Barrero 2004' te [4] numaralı çalışmasında aşağıdaki özdeşlikten faydalanarak yeni bir halka bölge elde etmiştir.

### 3.1.4 Önerme: [4]

$a$  ve  $b$  pozitif reel sayı olmak üzere  $x^2 - ax - b = 0$  ikinci dereceden denklemin kökleri  $r$  ve  $s$  olsun. O zaman  $c$  ve  $d$  reel katsayılar olmak üzere

$A_n = cr^n + ds^n$  ve  $B_n = \sum_{k=0}^n r^k s^{n-1-k}$  alalım. Bu durumda

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (bB_{j-1})^{n-k} B_j^k A_k = A_{jn} \quad (3.5)$$

dir (burada  $r = s$  ise  $B_n = n s^{n-1}$  ve  $r \neq s$  ise  $B_n = \frac{(r^n - s^n)}{(r - s)}$  alınacaktır).

**3.1.5 Teorem:** [4]

$A(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$  ( $1 \leq i \leq n$  için  $a_i \neq 0$ ) sabit olmayan kompleks bir polinom

olsun.  $j \geq 2$  için  $A(z)$  polinomunun bütün sıfırları, sınırları

$$r_1 = \min_{1 \leq k \leq n} \left\{ \frac{\binom{n}{k} (bB_{j-1})^{n-k} B_j^k A_k}{A_{jn}} \left| \frac{a_0}{a_k} \right| \right\}^{1/k} \quad (3.6)$$

ve

$$r_2 = \max_{1 \leq k \leq n} \left\{ \frac{A_{jn}}{\binom{n}{k} (bB_{j-1})^{n-k} B_j^k A_k} \left| \frac{a_{n-k}}{a_n} \right| \right\}^{1/k} \quad (3.7)$$

olan  $C_6 = \{z \in \mathbb{C} : r_1 \leq |z| \leq r_2\}$  halkası içinde yer alır.

**3.1.6 Örnek:**

Díaz-Barrero ve Egozcue' nin teoremi gereğince  $j = 2$  için

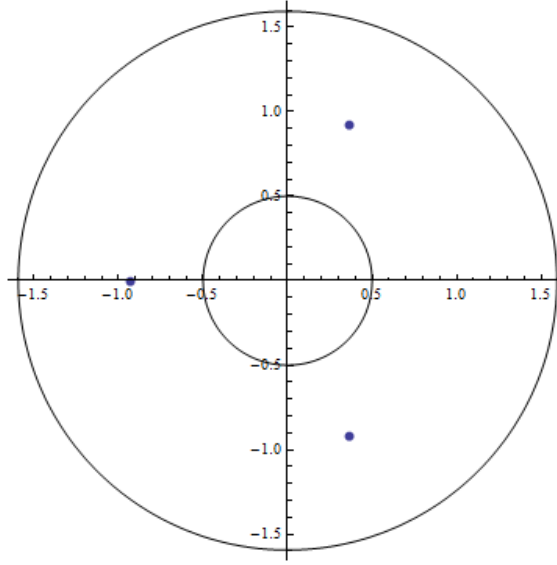
$$P_6(z) = z^3 + 0.2z^2 + 0.3z + 0.9$$

polinomunun bütün sıfırları sınırları  $r_1=0.5$  ve  $r_2=1.5939$  olan  $C_6 = \{z \in \mathbb{C} : 0.5 \leq |z| \leq 1.5939\}$  halkası içinde yer alır.  $a = b = 1$  için

$x^2 - x - 1 = 0$  ikinci dereceden denklemin kökleri  $r = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$  ve  $s = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  dir. O

zaman  $c = d = 1$  reel katsayıları için  $A_n = r^n + s^n$  ve  $B_n = \sum_{k=0}^n r^k s^{n-1-k} = \frac{r^n - s^n}{r - s}$

dir.



**Şekil 3.2:**  $P_6(z)$  polinomunun sıfırlarını içeren halka bölge.

M. Bidkman ve E. Shashahani 2011 de [5] numaralı kaynakta  $k$ -Fibonacci sayısı ve binom katsayısından faydalanılarak elde edilen aşağıdaki özdeşlik yardımıyla aşağıdaki teoremden yeni bir halka bölge elde etmişlerdir.

**3.1.7 Önerme:** [5]

$F_{k,n}$   $n$ .  $k$ -Fibonacci sayısı olmak üzere

$$\sum_{i=1}^n (k^2 + 1)^{n-i} (k^3 + 2k)^i F_{k,i} \binom{n}{i} = F_{k,4n} \quad (3.8)$$

özdeşliği elde edilir.

**3.1.8 Teorem:** [5]

$$P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i \quad (1 \leq i \leq n, a_i \neq 0) \quad n \text{ derece sabit olmayan kompleks polinom}$$

ve  $k$  herhangi pozitif reel sayısı olmak üzere

$$\lambda_i = \frac{(k^2 + 1)^{n-i} (k^3 + 2k)^i F_{k,i} \binom{n}{i}}{F_{k,4n}} \quad (3.9)$$

olsun. O zaman  $P(z)$  polinomunun bütün sıfırları, sınırları

$$r_1 = \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \lambda_i \left| \frac{a_0}{a_i} \right| \right\}^{1/i} \quad (3.10)$$

ve

$$r_2 = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{1}{\lambda_i} \left| \frac{a_{n-i}}{a_n} \right| \right\}^{1/i} \quad (3.11)$$

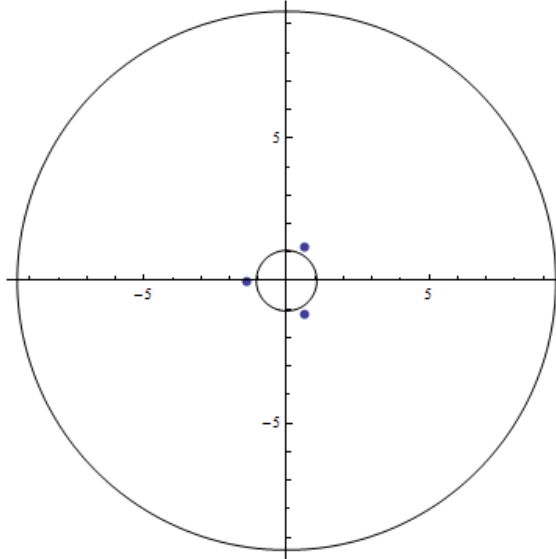
olan  $C_7 = \{z \in \mathbb{C} : r_1 \leq |z| \leq r_2\}$  halkası içinde yer alır.

### 3.1.9 Örnek:

$k = 3$  için M. Bidkham ve Shashahani'nin teoremi kullanılırsa

$$P_7(z) = 20z^3 + 4z^2 + z + 50$$

polinomunun bütün sıfırları, sınırları  $r_1=1.0593$  ve  $r_2=9.44$  olan  $C_7 = \{z \in \mathbb{C} : 1.0593 \leq |z| \leq 9.44\}$  halkası içinde yer aldığı görülür (Şekil 3.3).



Şekil 3.3:  $P_7(z)$  polinomunun sıfırlarını içeren halka bölge.

M. Bidkham, A. Zireh ve H. A. Soleiman Mezerji 2013' de [6] numaralı kaynakta geneleştirilmiş Finocacci sayı dizisi yardımıyla aşağıdaki özdeşliği kullanarak polinomların sıfırlarını içeren yeni halka bölgenin sınırlarını aşağıdaki teorem de elde etmiştir.

**3.1.10 Önerme:** [6]

$F_{k,t,n}$   $n, k, t$  - Fibonacci sayısı olmak üzere

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (tF_{k,t,2^{j-1}})^{n-i} (F_{k,t,2^j})^i F_{k,t,i} = F_{k,t,2^j n} \quad (3.12)$$

özdeşliği elde edilir.

**3.1.11 Teorem:** [6]

$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$  ( $1 \leq i \leq n$  için  $a_i \neq 0$ )  $n$ .derece sabit olmayan kompleks polinom ve  $k$  ve  $t$  herhangi pozitif reel sayılar olsun.  $j \geq 1$  olmak üzere  $P(z)$  polinomunun bütün sıfırları, sınırları

$$r_1 = \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{\binom{n}{i} F_{k,t,i} (F_{k,t,2^j})^i (tF_{k,t,2^{j-1}})^{n-i}}{F_{k,t,2^j n}} \left| \frac{a_0}{a_i} \right| \right\}^{1/i} \quad (3.13)$$

ve

$$r_2 = \max_{1 \leq k \leq n} \left\{ \frac{F_{k,t,2^j n}}{\binom{n}{i} F_{k,t,i} (F_{k,t,2^j})^i (tF_{k,t,2^{j-1}})^{n-i}} \left| \frac{a_{n-i}}{a_n} \right| \right\}^{1/i} \quad (3.14)$$

olan  $C_8 = \{z \in \mathbb{C} : r_1 \leq |z| \leq r_2\}$  halkası içinde yer alır.



Bu teoremdede  $k = 2$  ve  $t = 1$  alınırssa aşağıdaki sonuç elde edilir.

### 3.1.12 Sonuç: [6]

$P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$  ( $1 \leq i \leq n$  için  $a_i \neq 0$ )  $n$ . derece sabit olmayan kompleks bir

polinom,  $k$  ve  $t$  herhangi pozitif reel sayıslar olsun.  $j \geq 1$

$$r_1 = \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{\binom{n}{i} P_i(P_{2^j})^i (P_{2^{j-1}})^{n-i}}{P_{2^j n}} \left| \frac{a_0}{a_i} \right| \right\}^{1/i} \quad (3.15)$$

ve

$$r_2 = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{P_{2^j n}}{\binom{n}{i} P_i(P_{2^j})^i (P_{2^{j-1}})^{n-i}} \left| \frac{a_{n-i}}{a_n} \right| \right\}^{1/i} \quad (3.16)$$

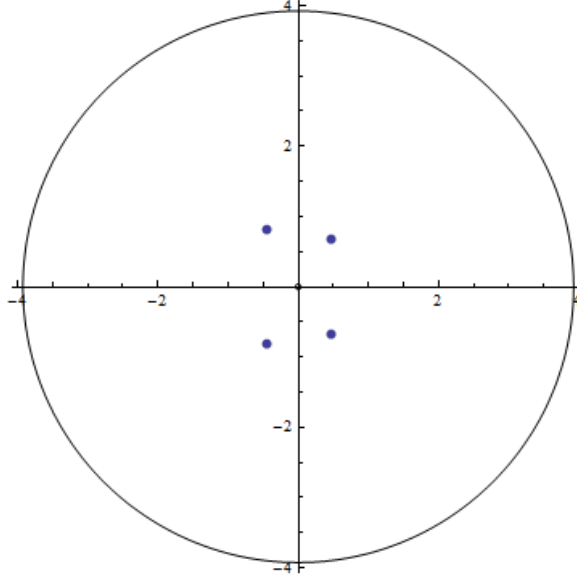
olmak üzere  $P(z)$  polinomunun bütün sıfırları  $C_9 = \{z \in \mathbb{C} : r_1 \leq |z| \leq r_2\}$  halka bölge içerisinde yer alır.

### 3.1.13 rnek:

M. Bidkham , A. Zireh ve H. A. Soleiman Mezerji'nin teoremi ile

$$P_8(z) = z^4 - 0.05z^3 + 0.7z^2 - 0.2z + 0.6$$

polinomunun bütün sıfırları  $j = 2$ ,  $k = 2$  ve  $t = 1$  için sınırları  $r_1 = 0.0382$  ve  $r_2 = 3.9236$  olan  $C_9 = \{z \in \mathbb{C} : 0.0382 \leq |z| \leq 3.9236\}$  halkası içinde yer aldığı görülür (şekil3.4).



Şekil 3.4:  $P_8(z)$  polinomunun sıfırlarını içeren halka bölge.

N. A. Rather ve S. G. Mattoo 2013 de [7] numaralı kaynakta, polinomların sıfırlarını içeren bölgeyi belirlemek için aşağıdaki özdeşlikten yararlanarak, aşağıdaki teoremdeki sınırları elde etmiştir.

### 3.1.14 Önerme: [7]

$a, b, c$  herhangi pozitif reel sayılar olmak üzere  $F_0^{(a,b,c)} = 0$ ,  $F_1^{(a,b,c)} = 1$

ve

$$F_n^{(a,b,c)} = \begin{cases} aF_{n-1}^{(a,b,c)} + cF_{n-2}^{(a,b,c)}, & n \text{ çift} \\ bF_{n-1}^{(a,b,c)} + cF_{n-2}^{(a,b,c)}, & n \text{ tek} \end{cases}, \quad n \geq 2 \quad (3.17)$$

olsun. Bu durumda  $\varepsilon(k) = k - 2 \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$  olmak üzere

$$\sum_{k=1}^n (ab+c)^{n-k} (ab+2c)^k a^{\varepsilon(k)} (ab)^{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor} c^{n-k} F_k^{(a,b,c)} = F_{4n}^{(a,b,c)} \quad (3.18)$$

dir.

### 3.1.15 Teorem: [7]

$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$  ( $1 \leq i \leq n$  için  $a_i \neq 0$ )  $n$ . derece sabit olmayan kompleks bir polinom,  $a, b, c, u, v$  ve  $w$  her hangi pozitif reel sayıları,  $F_0^{(a,b,c)} = 0$ ,  $F_1^{(a,b,c)} = 1$  ve

$$F_n^{(a,b,c)} = \begin{cases} aF_{n-1}^{(a,b,c)} + cF_{n-2}^{(a,b,c)}, & n \text{ çift} \\ bF_{n-1}^{(a,b,c)} + cF_{n-2}^{(a,b,c)}, & n \text{ tek} \end{cases}, \quad n \geq 2$$

$F_m^{(a,b,c)}$  tanımlansın ve  $\varepsilon(k) = k - 2 \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$  olsun.  $s$  herhangi bir pozitif reel sayısı

olsun. O zaman  $P(z)$  polinomunun bütün sıfırları, sınırları

$$r_1 = \frac{uv + 2w}{uvw + w^2} \min_{1 \leq k \leq n} \left\{ \frac{\binom{n}{k} (uvw + w^2)^n u^{\varepsilon(k)} (uv)^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} F_k^{(u,v,w)}}{F_{4n}^{(u,v,w)}} \left| \frac{a_0}{a_k} \right| \right\}^{1/k} \quad (3.19)$$

ve

$$r_2 = \frac{abc + c^2}{ab + 2c} \max_{1 \leq k \leq n} \left\{ \frac{F_{4n}^{(a,b,c)}}{\binom{n}{k} (abc + c^2)^n a^{\varepsilon(k)} (ab)^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} F_k^{(a,b,c)}} \left| \frac{a_{n-k}}{a_n} \right| \right\}^{1/k} \quad (3.20)$$

olan  $C_{10} = \{z \in \mathbb{C} : r_1 \leq |z| \leq r_2\}$  halkası içinde yer alır.

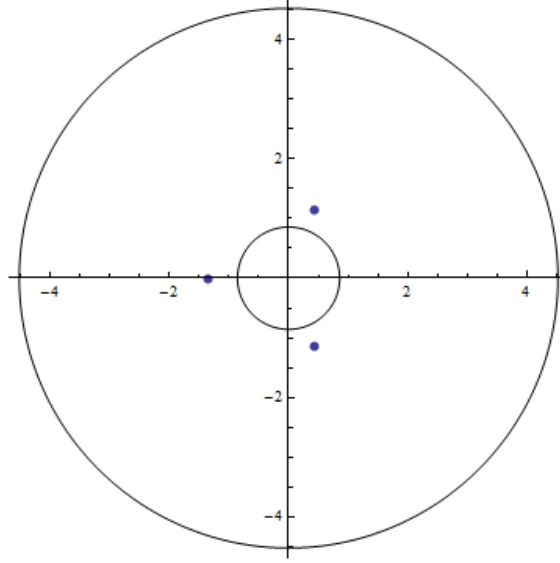
### 3.1.16 Örnek:

N. A. Rather ve S. G. Mattoo'nun teoremi kullanılarak

$$P_9(z) = z^3 + 0.5z^2 + 0.3z + 2$$

polinomunun bütün sıfırlarının, sınırları  $r_1=0.8568$  ve  $r_2=4.5178$  olan  $C_{10} = \{z \in \mathbb{C} : 0.8568 \leq |z| \leq 4.5178\}$  halkası içinde yer aldığı görülür (burada

$a = b = \frac{1}{2}$ ,  $c = \frac{1}{10}$ ,  $u = v = \frac{1}{2}$ ,  $w = \frac{3}{8}$  alınmıştır).



Şekil 3.5:  $P_9(z)$  polinomunun sıfırlarını içeren halka bölge.

A. Dalal ve N. K. Govil, 2013' de [8] numaralı kaynakta yukarıdaki tüm çalışmaları genelleyen aşağıdaki teoremi elde etmişlerdir:

**3.1.17 Teorem:** [8]

$1 \leq k \leq n$  için  $A_k > 0$  ve  $\sum_{k=1}^n A_k = 1$  olsun. Eğer

$P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$  ( $1 \leq k \leq n, a_k \neq 0$ ) kompleks katsayılı sabit olmayan bir polinom

ise  $P(z)$ 'nin bütün sıfırları, sınırları

$$r_1 = \min_{1 \leq k \leq n} \left\{ A_k \left| \frac{a_0}{a_k} \right| \right\}^{1/k} \quad (3.21)$$

ve

$$r_2 = \max_{1 \leq k \leq n} \left\{ \frac{1}{A_k} \left| \frac{a_{n-k}}{a_n} \right| \right\}^{1/k} \quad (3.22)$$

olan  $C_{11} = \{z \in \mathbb{C} : r_1 \leq |z| \leq r_2\}$  halkası içinde yer alır.

### 3.1.18 Sonuç: [8]

$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$  ( $1 \leq i \leq n$  için  $a_i \neq 0$ )  $n$ . derece sabit olmayan kompleks katsayılı polinom olsun.  $L_n$   $n$ . Lucas sayısı olmak üzere  $P(z)$  polinomunun bütün sıfırları, sınırları

$$r_1 = \min_{1 \leq k \leq n} \left\{ \frac{L_k}{L_{n+2} - 3} \left| \frac{a_0}{a_k} \right| \right\}^{1/k} \quad (3.23)$$

ve

$$r_2 = \max_{1 \leq k \leq n} \left\{ \frac{L_{n+2} - 3}{L_k} \left| \frac{a_{n-k}}{a_n} \right| \right\}^{1/k} \quad (3.24)$$

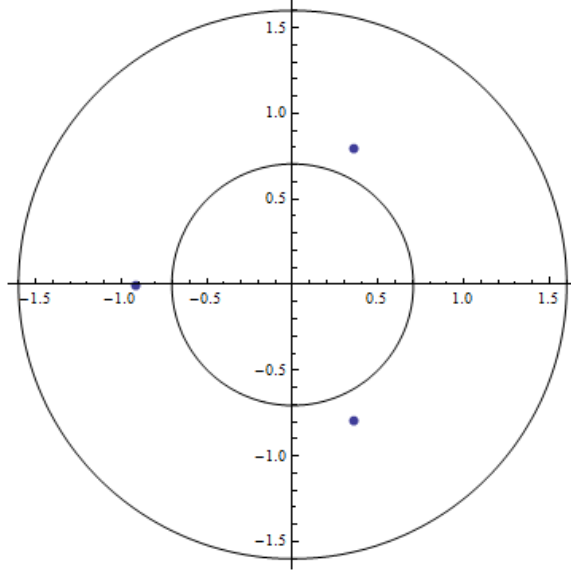
olan  $C_{12} = \{z \in \mathbb{C} : r_1 \leq |z| \leq r_2\}$  halkası içinde yer alır (burada  $\sum_{k=1}^n L_k = L_{n+2} - 3$  özdeşliği kullanılmıştır).

### 3.1.19 Örnek:

Sonuç 3.1.18 kullanılırsa

$$P_{10}(z) = z^3 + 0.2z^2 + 0.1z + 0.7$$

polinomunun bütün sıfırlarının, sınırları  $r_1 = 0.7047$  ve  $r_2 = 1.6$  olan  $C_{12} = \{z \in \mathbb{C} : 0.7047 \leq |z| \leq 1.6\}$  halkası içinde yer aldığı görülür (Şekil 3.6).



Şekil 3.6:  $P_{10}(z)$  polinomunun sıfırlarını içeren halka bölge.

### 3.1.20 Sonuç: [8]

$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$  ( $1 \leq i \leq n$  için  $a_i \neq 0$ )  $n$ . derece sabit olmayan kompleks katsayılı bir polinom olsun.  $C_k = \frac{C(2k, k)}{k+1}$  Catalan sayısı olmak üzere  $P(z)$  polinomunun bütün sıfırları, sınırları

$$r_1 = \min_{1 \leq k \leq n} \left\{ \frac{C_{k-1} C_{n-k}}{C_n} \left| \frac{a_0}{a_k} \right| \right\}^{1/k} \quad (3.25)$$

ve

$$r_2 = \max_{1 \leq k \leq n} \left\{ \frac{C_n}{C_{k-1} C_{n-k}} \left| \frac{a_{n-k}}{a_n} \right| \right\}^{1/k} \quad (3.26)$$

olan  $C_{13} = \{z \in \mathbb{C} : r_1 \leq |z| \leq r_2\}$  halkası içinde yer alır (burada  $C_k = \frac{C(2k, k)}{k+1}$

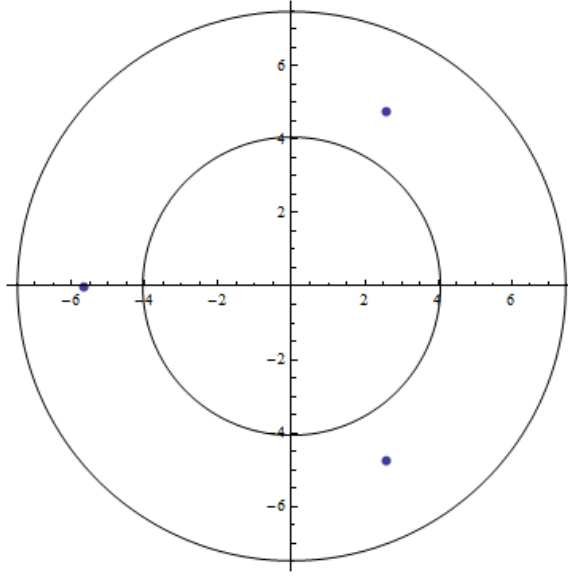
Catalan sayısı yardımıyla  $\sum_{k=1}^n C_{k-1} C_{n-k} = C_n$  özdeşliği kullanılır).

### 3.1.21 Örnek:

Sonuç 3.1.20 kullanılırsa

$$P_{11}(z) = 6z^3 + 3z^2 + z + 1000$$

polinomunun bütün sıfırları sınırları  $r_1 = 4.0548$  ve  $r_2 = 7.469$  olan  $C_{13} = \{z \in \mathbb{C} : 4.0548 \leq |z| \leq 7.469\}$  halkası içinde yer aldığı görülür (Şekil 3.7).



Şekil 3.7:  $P_{11}(z)$  polinomunun sıfırlarını içeren halka bölge.

### 3.2 Bölgelerin Karşılaştırılması

Yukarıda verdiğimiz tüm çalışmalarda elde edilen yeni bölgelerin bilinen bölgelerle kıyaslanması örnek üzerinden yapılmıştır. Bu bölümde polinomların sıfırlarını içeren halka bölgeler arasında karşılaştırmayı bir örnek yardımıyla yaparak, elde edilen teoremlerin alt ve üst sınırları kıyaslayacağız. En iyi halka bölgeyi belirleyeceğiz.

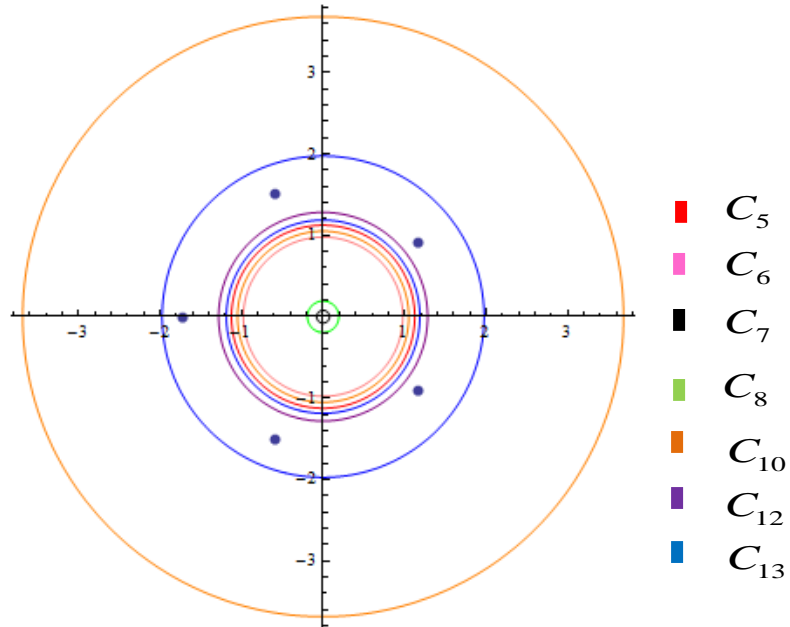
### 3.2.1 Örnek:

$$P_{12}(z) = z^5 + 0.6z^4 + 0.1z^3 + 0.02z^2 - 0.3z + 10$$

polinomunun sıfırları için Teorem 3.1.2, Teorem 3.1.5 ( $a = b = c = d = 1$  ve  $j = 2$ ), Teorem 3.1.8 ( $t = 2$ ), Teorem 3.1.11 ( $j=2, k=1$  ve  $t=2$ ), Teorem 3.1.15 ( $a = b = \frac{1}{5}, c = \frac{2}{5}, u = v = \frac{1}{2}, w = \frac{3}{8}$ ), Sonuç 3.1.18 ve Sonuç 3.1.20 de elde edilen halka bölgeleri çizerek karşılaştıralım.

**Tablo 3.1:**  $P_{12}(z)$  polinomunun sıfırlarını içeren halka bölgelerin değerleri

Bölge	$r_1$	$r_2$	Bölgenin alanı
$C_5$	1.1242	16	894
$C_6$	0.9779	14	681
$C_7$	0.0781	255	205744
$C_8$	0.1931	103	33694
$C_{10}$	1.0505	3.6849	39
$C_{12}$	1.282	15	759
$C_{13}$	1.1868	1.9743	7.8209



**Şekil 3.8:**  $P_{12}(z)$  polinomunun sıfırlarını içeren halka bölgeler.



Burada polinomun sıfırlarını içeren yeni halka bölgelerin alt sınırlarını ve üst sınırlarını karşılaştıralım. Hedefimiz en iyi halka bölgeyi elde etmektir. Bunun için de ilk olarak alt sınırları karşılaştıralım. Amacımız burada polinomun sıfırlarına en yakın alt sınırı bulmaktır. Yani burada en büyük alt sınırı bulmalıyız. Tablo 3.1 e bakılırsa  $C_{12}$  halka bölgesinde en iyi alt sınır elde edilmiştir. İkinci olarak üst sınırları karşılaştıralım. Buradaki amacımız polinomların sıfırlarını içine alan üst sınırların en küçüğünü bulmaktır. Tablo 3.1 den de görülebileceği gibi polinomların sıfırlarına en yakın üst sınır  $C_{13}$  halka bölgesinin üst sınırıdır. Bölgelerin alanları dikkate alınırsa  $P_{12}(z)$  polinomunun sıfırlarını içeren en iyi halka bölge Tablo 3.1 den de görülebileceği gibi  $C_{13}$  halkasıdır (Şekil 3.8).

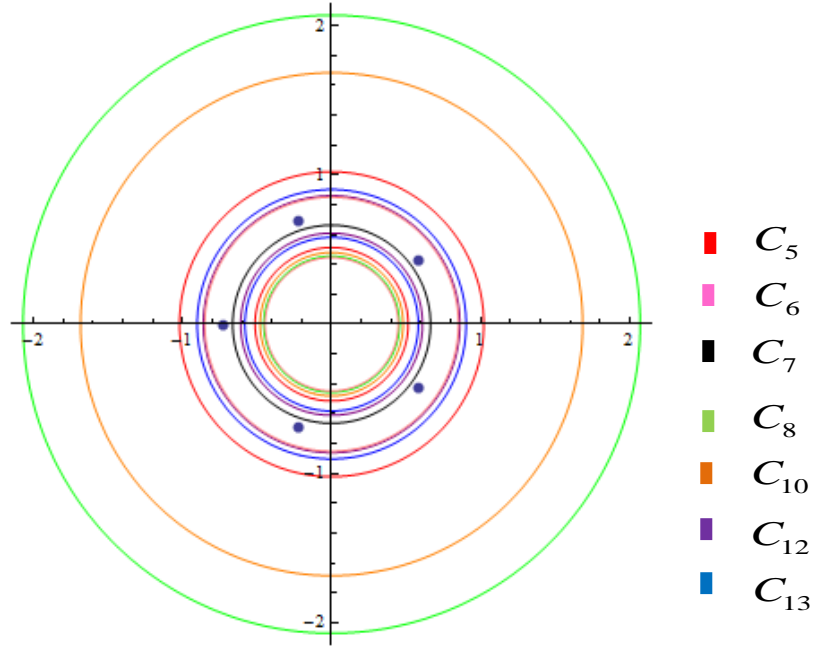
### 3.2.2 Örnek:

$$P_{13}(z) = 50z^5 + 0.6z^4 - 0.01z^3 + 0.05z^2 - 0.002z + 10$$

polinomunun sıfırları için Teorem 3.1.2, 3.1.5 ( $a=b=c=d=1$  ve  $j=2$ ), 3.1.8 ( $t=3$ ), 3.1.11 ( $j=2, k=1$  ve  $t=2$ ), 3.1.15 ( $a=b=\frac{1}{5}, c=\frac{2}{5}, u=v=\frac{1}{2}, w=\frac{3}{8}$ ), Sonuç 3.1.18 ve 3.1.20 teoremlerinde elde ettiğimiz halka bölgeleri çizerek karşılaştıralım.

**Tablo 3.2:**  $P_{13}(z)$  polinomunun sıfırlarını içeren halka bölgelerin değerleri

Bölge	$r_1$	$r_2$	Bölgenin alanı
$C_5$	0.5141	1.0217	2.4493
$C_6$	0.4472	0.8513	1.6488
$C_7$	0.6638	48.1179	7272.46
$C_8$	0.4557	2.0712	12.8252
$C_{10}$	0.4804	1.6851	8.19
$C_{12}$	0.6102	0.8608	1.1582
$C_{13}$	0.5818	0.9028	1.4975



Şekil 3.9:  $P_{13}(z)$  polinomunun sıfırlarını içeren halka bölgeler.

$P_{13}(z)$  polinomu için en iyi üst sınır, alt sınır ve halka bölgesinin hangisi olduğunu belirleyelim. Tablo 3.2 incelenirse  $C_7$  halka bölgesinde en iyi alt sınır elde edilmiştir.  $P_{13}(z)$  polinomunun sıfırlarına en yakın üst sınır  $C_{12}$  halka bölgesinin üst sınırıdır. Alanı en küçük olan halka  $C_{12}$  bölgesidir. Buna göre  $P_{13}(z)$  polinomunun sıfırlarını içeren en iyi halka bölge  $C_{12}$  dir.

Bu örnekler karşılaştırıldığında her bir polinom için polinomun sıfırlarını içeren en iyi halka bölgeler farklı teoremlere karşılık gelmektedir. Bu bölgelerin sınırlarının optimalliğini belirlemek için çeşitli sayısal metotlar mevcut olmasına rağmen elde edilen bölgelerin kesinliği ile ilgili çok az çalışma vardır. Burada bölgenin kesinliğinden kastımız, polinomun sıfırlarından birinin halka bölgenin sınırları üzerinde yer almasıdır.

## 4. POLİNOMLARIN SIFIRLARI İÇİN YENİ BİR HALKA BÖLGE

Bu bölümde polinomların sıfırlarını içeren yeni bir halka bölge belirleyerek bu bölgenin sınırlarını 3. bölümde verilen bölgelerin sınırları ile karşılaştıracamız. Bunun için genelleştirilmiş Fibonacci sayıları kullanılarak elde edeceğimiz yeni bir özdeşlik kullanacağız.

### 4.1 Polinomların Sıfırlarını İçeren Yeni Halka Bölge

İlk olarak genelleştirilmiş Fibonacci sayılarını kullanarak aşağıdaki önermeyi ispatlayalım.

#### 4.1.1 Önerme: [12]

$k$  ve  $t$  herhangi pozitif tamsayılar ve  $F_{k,t,n}$   $n$ .  $k$ ,  $t$  - Fibonacci sayısı olmak üzere

$$\sum_{i=1}^n kt^{n-i} F_{k,t,i}^2 = F_{k,t,n} F_{k,t,n+1} \quad (4.1)$$

özdeşliği elde edilir.

**İspat:**

2.1.8 Teoremi gereğince  $\alpha = \frac{k + \sqrt{k^2 + 4t}}{2}$  ve  $\beta = \frac{k - \sqrt{k^2 + 4t}}{2}$  olup

$k = \alpha + \beta$ ,  $t = -\alpha\beta$  olduğu kolayca görülebilir. (2.3) deki Binet formülünden

$$F_{k,t,n} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

dir.

İlk olarak  $n$ 'nin tek olma durumunu inceleyelim. Gerekli sadeleştirmeler yapıldığında

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n kt^{n-i} F_{k,t,i}^2 &= \sum_{i=1}^n (\alpha + \beta)(-\alpha\beta)^{n-i} \left( \frac{\alpha^i - \beta^i}{\alpha - \beta} \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{n-i} (\alpha^{n+i+1} \beta^{n-i} - 2\alpha^{n+1} \beta^n + \alpha^{n-i+1} \beta^{n+i} + \alpha^{n+i} \beta^{n-i+1} - 2\alpha^n \beta^{n+1} + \alpha^{n-i} \beta^{n+i+1})}{(\alpha - \beta)^2} \\ &= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \cdot \left[ \begin{array}{l} +(\alpha^{n+2} \beta^{n-1} - 2\alpha^{n+1} \beta^n + \alpha^n \beta^{n+1} + \alpha^{n+1} \beta^n - 2\alpha^n \beta^{n+1} + \alpha^{n-1} \beta^{n+2}) \\ -(\alpha^{n+3} \beta^{n-2} - 2\alpha^{n+1} \beta^n + \alpha^{n-1} \beta^{n+2} + \alpha^{n+2} \beta^{n-1} - 2\alpha^n \beta^{n+1} + \alpha^{n-2} \beta^{n+3}) \\ +(\alpha^{n+4} \beta^{n-3} - 2\alpha^{n+1} \beta^n + \alpha^{n-2} \beta^{n+3} + \alpha^{n+3} \beta^{n-2} - 2\alpha^n \beta^{n+1} + \alpha^{n-3} \beta^{n+4}) \\ -(\alpha^{n+5} \beta^{n-4} - 2\alpha^{n+1} \beta^n + \alpha^{n-3} \beta^{n+4} + \alpha^{n+4} \beta^{n-3} - 2\alpha^n \beta^{n+1} + \alpha^{n-4} \beta^{n+5}) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ +(\alpha^{2n-3} \beta^4 - 2\alpha^{n+1} \beta^n + \alpha^5 \beta^{2n-4} + \alpha^{2n-4} \beta^5 - 2\alpha^n \beta^{n+1} + \alpha^4 \beta^{2n-3}) \\ -(\alpha^{2n-2} \beta^3 - 2\alpha^{n+1} \beta^n + \alpha^4 \beta^{2n-3} + \alpha^{2n-3} \beta^4 - 2\alpha^n \beta^{n+1} + \alpha^3 \beta^{2n-2}) \\ +(\alpha^{2n-1} \beta^2 - 2\alpha^{n+1} \beta^n + \alpha^3 \beta^{2n-2} + \alpha^{2n-2} \beta^3 - 2\alpha^n \beta^{n+1} + \alpha^2 \beta^{2n-1}) \\ -(\alpha^{2n} \beta - 2\alpha^{n+1} \beta^n + \alpha^2 \beta^{2n-1} + \alpha^{2n-1} \beta^2 - 2\alpha^n \beta^{n+1} + \alpha \beta^{2n}) \\ +(\alpha^{2n+1} - 2\alpha^{n+1} \beta^n + \alpha \beta^{2n} + \alpha^{2n} \beta - 2\alpha^n \beta^{n+1} + \beta^{2n+1}) \end{array} \right] \\ &= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \left[ \alpha^{2n+1} - 2\alpha^{n+1} \beta^n + \alpha^n \beta^{n+1} + \alpha^{n+1} \beta^n - 2\alpha^n \beta^{n+1} + \beta^{2n+1} \right] \\ &= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \left[ \alpha^{2n+1} - \alpha^{n+1} \beta^n - \alpha^n \beta^{n+1} + \beta^{2n+1} \right] \\ &= F_{k,t,n} F_{k,t,n+1}. \end{aligned}$$

Buradan  $n$  tek iken  $\sum_{i=1}^n kt^{n-i} F_{k,t,i}^2 = F_{k,t,n} F_{k,t,n+1}$  özdeşliği elde edilir.

$n$ 'nin çift olması durumunda yine gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n kt^{n-i} F_{k,t,i}^2 &= \sum_{i=1}^n (\alpha + \beta)(-\alpha\beta)^{n-i} \left( \frac{\alpha^i - \beta^i}{\alpha - \beta} \right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{n-i} (\alpha^{n+i+1} \beta^{n-i} - 2\alpha^{n+1} \beta^n + \alpha^{n-i+1} \beta^{n+i} + \alpha^{n+i} \beta^{n-i+1} - 2\alpha^n \beta^{n+1} + \alpha^{n-i} \beta^{n+i+1})}{(\alpha - \beta)^2} \\
&= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \left[ \begin{array}{l}
-(\alpha^{n+2} \beta^{n-1} - 2\alpha^{n+1} \beta^n + \alpha^n \beta^{n+1} + \alpha^{n+1} \beta^n - 2\alpha^n \beta^{n+1} + \alpha^{n-1} \beta^{n+2}) \\
+(\alpha^{n+3} \beta^{n-2} - 2\alpha^{n+1} \beta^n + \alpha^{n-1} \beta^{n+2} + \alpha^{n+2} \beta^{n-1} - 2\alpha^n \beta^{n+1} + \alpha^{n-2} \beta^{n+3}) \\
-(\alpha^{n+4} \beta^{n-3} - 2\alpha^{n+1} \beta^n + \alpha^{n-2} \beta^{n+3} + \alpha^{n+3} \beta^{n-2} - 2\alpha^n \beta^{n+1} + \alpha^{n-3} \beta^{n+4}) \\
+(\alpha^{n+5} \beta^{n-4} - 2\alpha^{n+1} \beta^n + \alpha^{n-3} \beta^{n+4} + \alpha^{n+4} \beta^{n-3} - 2\alpha^n \beta^{n+1} + \alpha^{n-4} \beta^{n+5}) \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
-(\alpha^{2n-2} \beta^3 - 2\alpha^{n+1} \beta^n + \alpha^4 \beta^{2n-3} + \alpha^{2n-3} \beta^4 - 2\alpha^n \beta^{n+1} + \alpha^3 \beta^{2n-2}) \\
+(\alpha^{2n-1} \beta^2 - 2\alpha^{n+1} \beta^n + \alpha^3 \beta^{2n-2} + \alpha^{2n-2} \beta^3 - 2\alpha^n \beta^{n+1} + \alpha^2 \beta^{2n-1}) \\
-(\alpha^{2n} \beta - 2\alpha^{n+1} \beta^n + \alpha^2 \beta^{2n-1} + \alpha^{2n-1} \beta^2 - 2\alpha^n \beta^{n+1} + \alpha \beta^{2n}) \\
+(\alpha^{2n+1} - 2\alpha^{n+1} \beta^n + \alpha \beta^{2n} + \alpha^{2n} \beta - 2\alpha^n \beta^{n+1} + \beta^{2n+1})
\end{array} \right] \\
&= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} [\alpha^{2n+1} - \alpha^{n+1} \beta^n - \alpha^n \beta^{n+1} + \beta^{2n+1}] \\
&= F_{k,t,n} F_{k,t,n+1}
\end{aligned}$$

Buradan  $n$  çift iken  $\sum_{i=1}^n kt^{n-i} F_{k,t,i}^2 = F_{k,t,n} F_{k,t,n+1}$  özdeşliği elde edilir.

Sonuç olarak  $n$ 'nin tek ve çift olma durumlarının her ikisinde de

$$\sum_{i=1}^n kt^{n-i} F_{k,t,i}^2 = F_{k,t,n} F_{k,t,n+1}$$

özdeşliği elde edilir.  $\square$

Şimdi bu özdeşlik yardımıyla yeni bir halka bölge elde edeceğiz.

#### 4.1.2 Teorem: [12]

$n$ . dereceden sabit olmayan kompleks katsayılı

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 \quad (1 \leq i \leq n \text{ için } a_i \neq 0)$$

polinomunu dikkate alalım.  $k$  ve  $t$  herhangi pozitif tamsayılar olmak üzere  $P(z)$  polinomunun bütün sıfırları, yarıçapları

$$r_1 = \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{kt^{n-i} F_{k,t,i}^2}{F_{k,t,n} F_{k,t,n+1}} \left| \frac{a_0}{a_i} \right| \right\}^{1/i} \quad (4.2)$$

ve

$$r_2 = \max_{1 \leq k \leq n} \left\{ \frac{F_{k,t,n} F_{k,t,n+1}}{kt^{n-i} F_{k,t,i}^2} \left| \frac{a_{n-i}}{a_n} \right| \right\}^{1/i} \quad (4.3)$$

olan iki çemberin oluşturduğu  $C_{14} = \{z \in \mathbb{C} : r_1 \leq |z| \leq r_2\}$  halkası içerisinde yer alır. Burada  $F_{k,t,n}$ ,  $n$ .  $k, t$ -Fibonacci sayısıdır.

**İspat:** (4.1) özdeşliğini kullanacağız.

$$r_1 = \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{kt^{n-i} F_{k,t,i}^2}{F_{k,t,n} F_{k,t,n+1}} \left| \frac{a_0}{a_i} \right| \right\}^{1/i} \text{ olsun. Bu durumda}$$

$$r_1 \leq \left\{ \frac{kt^{n-i} F_{k,t,i}^2}{F_{k,t,n} F_{k,t,n+1}} \left| \frac{a_0}{a_i} \right| \right\}^{1/i} \text{ yazılabilir ve buradan da } r_1^i \leq \left\{ \frac{kt^{n-i} F_{k,t,i}^2}{F_{k,t,n} F_{k,t,n+1}} \left| \frac{a_0}{a_i} \right| \right\} \text{ elde}$$

edilir.

$|z| < r_1$  olduğunu varsayalım. Bu durum da sırasıyla  $|x| - |y| \leq ||x| - |y|| \leq |x + y|$ ,  
 $|x + y| \leq |x| + |y|$  ve  $|xy| = |x||y|$  eşitsizlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
|P(z)| &= \left| \sum_{i=0}^n a_i z^i \right| = |a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0| \\
&\geq |a_0| - |a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n| \\
&\geq |a_0| - (|a_1 z| + \dots + |a_{n-1} z^{n-1}| + |a_n z^n|) \\
&\geq |a_0| - \sum_{i=1}^n |a_i| |z|^i \\
&> |a_0| - \sum_{i=1}^n |a_i| r_1^i \\
&> |a_0| \left[ 1 - \sum_{i=1}^n \frac{|a_i|}{|a_0|} r_1^i \right] \\
&> |a_0| \left[ 1 - \sum_{i=1}^n \frac{|a_i|}{|a_0|} \frac{kt^{n-i} F_{k,t,i}^2}{F_{k,t,n} F_{k,t,n+1}} \frac{|a_0|}{|a_i|} \right] = |a_0| \left[ 1 - \sum_{i=1}^n \frac{kt^{n-i} F_{k,t,i}^2}{F_{k,t,n} F_{k,t,n+1}} \right] = 0
\end{aligned}$$

yani  $|P(z)| > 0$  elde edilir. Buna göre  $\{z \in \mathbb{C} : |z| < r_1\}$  içinde  $P(z)$  polinomunun sıfırları yoktur.

$P(z)$  polinomunun bütün sıfırlarının modülleri Cauchy'nin teoreminden dolayı

$$G(z) = |a_n| z^n - |a_{n-1}| z^{n-1} - \dots - |a_1| z - |a_0|$$

denkleminin tek pozitif reel köküne eşit veya daha küçüktür. Dolayısıyla  $G(r_2) \geq 0$

olduğunu gösterirsek ikinci bölümü ispat etmiş olacağız.

Hipotezden

$$r_2 = \max_{1 \leq k \leq n} \left\{ \frac{F_{k,t,n} F_{k,t,n+1}}{kt^{n-i} F_{k,t,i}^2} \left| \frac{a_{n-i}}{a_n} \right| \right\}^{1/i} \text{ olduğundan } r_2 \geq \left\{ \frac{F_{k,t,n} F_{k,t,n+1}}{kt^{n-i} F_{k,t,i}^2} \left| \frac{a_{n-i}}{a_n} \right| \right\}^{1/i} \text{ yazabiliriz.}$$

Buradan

$$r_2^i \geq \left\{ \frac{F_{k,t,n} F_{k,t,n+1}}{kt^{n-i} F_{k,t,i}^2} \left| \frac{a_{n-i}}{a_n} \right| \right\} \text{ ve } r_2^i \frac{kt^{n-i} F_{k,t,i}^2}{F_{k,t,n} F_{k,t,n+1}} \geq \left| \frac{a_{n-i}}{a_n} \right| \text{ elde edilir. Buna göre}$$

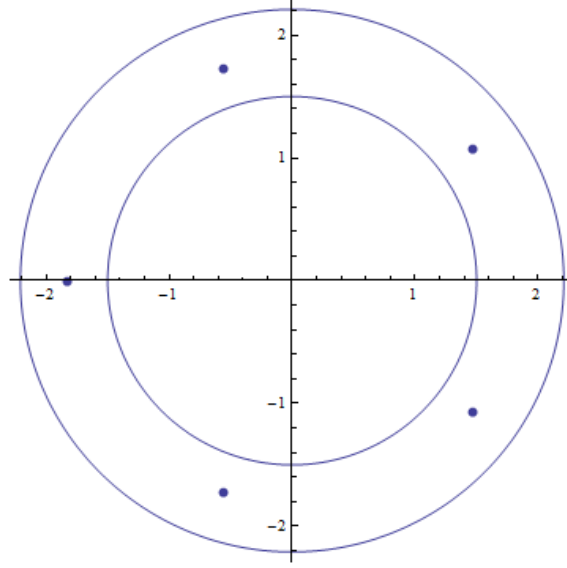
$$\begin{aligned}
G(r_2) &= |a_n| r_2^n - |a_{n-1}| r_2^{n-1} - \dots - |a_1| r_2 - |a_0| \\
&= |a_n| \left[ r_2^n - \frac{|a_{n-1}|}{|a_n|} r_2^{n-1} - \dots - \frac{|a_1|}{|a_n|} r_2 - \frac{|a_0|}{|a_n|} \right] \\
&= |a_n| \left[ r_2^n - \sum_{i=1}^n \frac{|a_{n-i}|}{|a_n|} r_2^{n-i} \right] \\
&\geq |a_n| \left[ r_2^n - \sum_{i=1}^n r_2^i \frac{kt^{n-i} F_{k,t,i}^2}{F_{k,t,n} F_{k,t,n+1}} r_2^{n-i} \right] \\
&\geq |a_n| \left[ r_2^n - \sum_{i=1}^n \frac{kt^{n-i} F_{k,t,i}^2}{F_{k,t,n} F_{k,t,n+1}} r_2^n \right] \\
&\geq |a_n| r_2^n \left[ 1 - \sum_{i=1}^n \frac{kt^{n-i} F_{k,t,i}^2}{F_{k,t,n} F_{k,t,n+1}} \right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Elde edilir. Dolayısıyla  $G(r_2) \geq 0$  olduğunu göstermiş olduk. Sonuç olarak  $P(z)$  polinomunun sıfırları  $C_{14} = \{z \in \mathbb{C} : r_1 \leq |z| \leq r_2\}$  halkası içerisinde yer alır.  $\square$

#### 4.1.3 Örnek: [12]

$P_{14}(z) = 5z^5 - 0.002z^4 - 0.03z^3 + 0.05z^2 - 0.01z + 100$  polinomunun bütün sıfırları sınırları yukarıdaki 4.1.2 teoreminden yararlanarak  $k=1$  ve  $t=11$  için  $r_1 = 1.5001$  ve  $r_2 = 2.2093$  olan  $C_{14} = \{z \in \mathbb{C} : 1.5001 \leq |z| \leq 2.2093\}$  halkası içinde yer alır.





**Şekil 4.1:**  $P_{14}(z)$  polinomunun bütün sıfırlarını içeren halka bölge.

## 4.2 Karşılaştırma

Bu bölümde Teorem 4.1.2 de elde edilen  $C_{14}$  halka bölgesini daha önceden bilinen halka bölgeleri örnekler yardımıyla karşılaştıracamız.

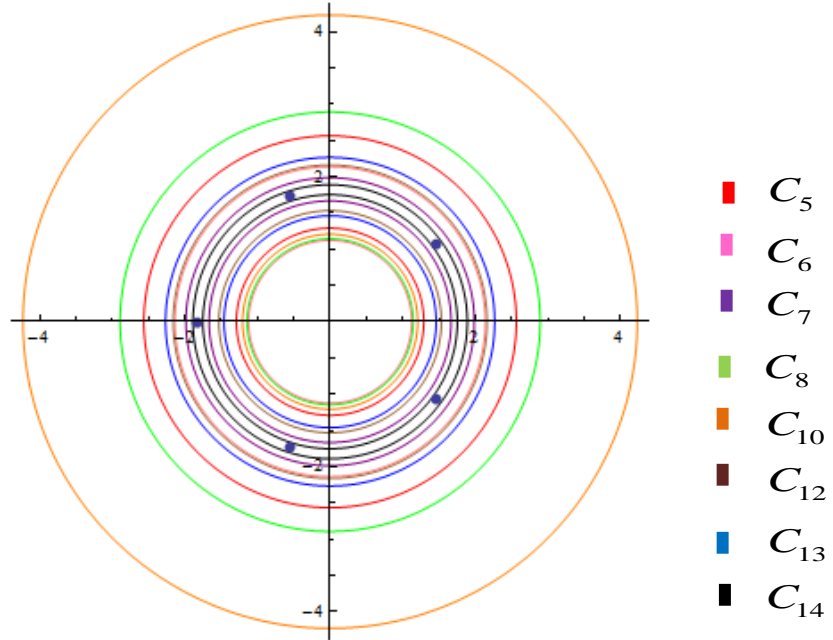
### 4.2.1 Örnek: [12]

$$P_{14}(z) = 5z^5 - 0.002z^4 - 0.03z^3 + 0.05z^2 - 0.01z + 100$$

polinomunun sıfırları için Teorem 3.1.2, Teorem 3.1.5 ( $a=b=c=d=1$  ve  $j=2$ ), Teorem 3.1.8 ( $t=3$ ), Teorem 3.1.11 ( $k=1$ ,  $t=2$  ve  $j=2$ ), Teorem 3.1.15 ( $a=b=\frac{1}{5}$ ,  $c=\frac{2}{5}$ ,  $u=v=\frac{1}{2}$ ,  $w=\frac{3}{8}$ ), Teorem 4.1.2 ( $k=2$  ve  $t=1$ ), Sonuç 3.1.18 ve Sonuç 3.1.20 de elde edilen  $C_5$ ,  $C_6$ ,  $C_7$ ,  $C_8$ ,  $C_{10}$ ,  $C_{12}$  ve  $C_{13}$  halka bölgelerini  $C_{14}$  halka bölgesi ile karşılaştıralım.

**Tablo 4.1:**  $P_{14}(z)$  polinomunun sıfırlarını içeren halka bölgelerin değerleri

Bölge	$r_1$	$r_2$	Bölgenin alanı
$C_5$	1.2914	2.5665	15.4543
$C_6$	1.1233	2.1385	10.4032
$C_7$	1.6675	1.9876	3.6749
$C_8$	1.1448	2.8950	22.2125
$C_{10}$	1.2067	4.2328	51.7136
$C_{12}$	1.5328	2.1623	7.3078
$C_{13}$	1.4614	2.2679	9.4489
$C_{14}$	<b>1.7533</b>	<b>1.8903</b>	<b>1.5679</b>



**Şekil 4.2:**  $P_{14}(z)$  polinomunun bütün sıfırlarını içeren halka bölgeler.

$P_{14}(z)$  polinomu için en iyi üst sınır, alt sınır ve halka bölgenin hangisi olduğunu belirleyelim. İlk olarak, alt sınırları karşılaştıralım. Tablo 4.1 incelenirse Teorem 4.1.2 kullanılarak elde edilen  $C_{14}$  halka bölgesinde en iyi alt sınır elde edilmiştir. İkinci olarak üst sınırları karşılaştıralım.  $P_{14}(z)$  polinomunun sıfırlarına en yakın üst sınır Teorem 4.1.2 kullanılarak elde edilen  $C_{14}$  halka bölgesinin üst sınırındır. En son olarak Tablo 4.1 incelenirse alanı en küçük olan halka bölge  $C_{14}$

bölgesidir. Buna göre  $P_{14}(z)$  polinomunun sıfırlarını içeren en iyi halka bölge  $C_{14}$  dir.

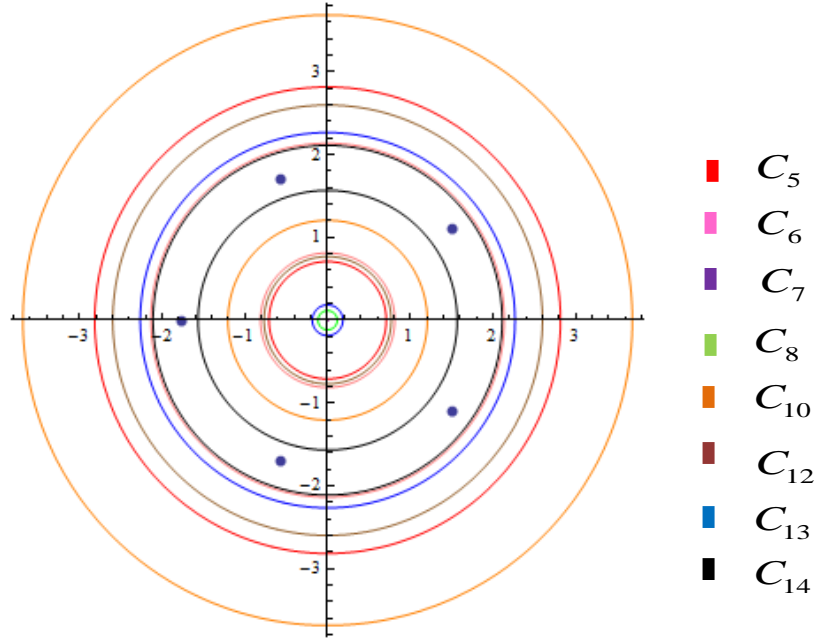
#### 4.2.2 Örnek: [12]

$$P_{15}(z) = z^5 - 0.1z^4 - 0.06z^3 + 0.001z^2 + z + 20$$

polinomunun sıfırları için Teorem 3.1.2, Teorem 3.1.5 ( $a=b=c=d=1$  ve  $j=2$ ), Teorem 3.1.8 ( $t=3$ ), Teorem 3.1.11 ( $k=1$  ,  $t=2$  ve  $j=2$ ), Teorem 3.1.15 ( $a = b = \frac{1}{3}, c = \frac{2}{3}, u = v = \frac{1}{2}, w = \frac{3}{8}$ ), Teorem 4.1.2 ( $k=1$  ve  $t=3$ ), Sonuç 3.1.18 ve Sonuç 3.1.20 de elde edilen  $C_5, C_6, C_7, C_8, C_{10}, C_{12}$  ve  $C_{13}$  halka bölgelerini  $C_{14}$  halka bölgesi ile karşılaştıralım.

**Tablo 4.2:**  $P_{15}(z)$  polinomunun sıfırlarını içeren halka bölgelerin değerleri

Bölge	$r_1$	$r_2$	Bölgenin alanı
$C_5$	0.7095	2.8187	23.3795
$C_6$	0.8130	2.1385	12.2909
$C_7$	0.0049	400	505128
$C_8$	0.1158	17	935
$C_{10}$	1.2067	3.6885	38.1678
$C_{12}$	0.7692	2.6	19.3782
$C_{13}$	0.1851	2.2679	16.0511
$C_{14}$	<b>1.5687</b>	<b>2.1128</b>	<b>6.2932</b>



**Şekil 4.3:**  $P_{15}(z)$  polinomunun bütün sıfırlarını içeren halka bölgeler.

Tablo 4.2 incelenirse Teorem 4.1.2 kullanılarak elde edilen  $C_{14}$  halka bölgesinde en iyi alt sınırın elde edildiği görülür. Yine  $P_{15}(z)$  polinomunun sıfırlarına en yakın üst sınır, Teorem 4.1.2 kullanılarak elde edilen  $C_{14}$  halka bölgesinin üst sınırıdır. Son olarak Tablo 4.2 den alanı en küçük olan halka bölgenin  $C_{14}$  bölgesi olduğu görülmektedir. Buna göre  $P_{15}(z)$  polinomunun sıfırlarını içeren en iyi halka bölge  $C_{14}$  dir.

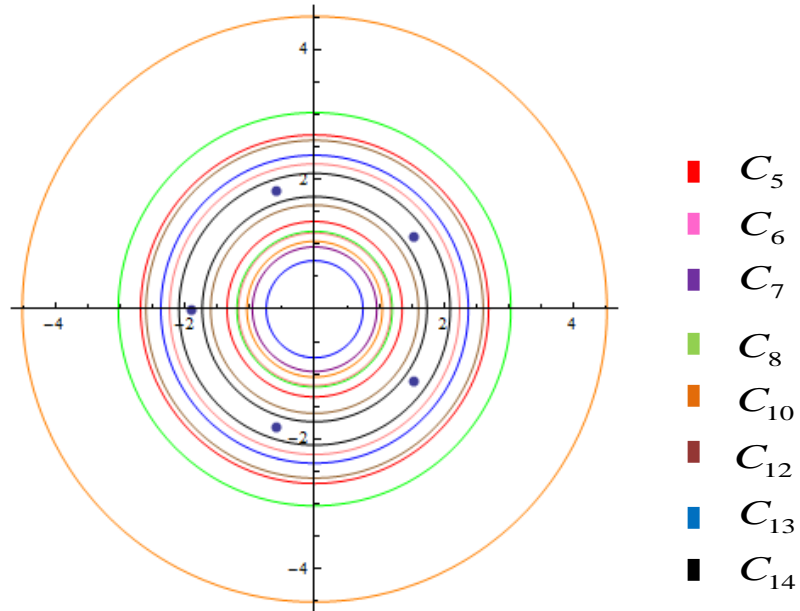
#### 4.2.3 Örnek: [12]

$$P_{16}(z) = 2z^5 + 0.007z^4 - 0.06z^3 + 0.02z^2 - 0.013z + 50$$

polinomunun sıfırları için Teorem 3.1.2, Teorem 3.1.5 ( $a=b=c=d=1$  ve  $j=2$ ), Teorem 3.1.8 ( $t=3$ ), Teorem 3.1.11 ( $k=1$  ,  $t=2$  ve  $j=2$ ), Teorem 3.1.15 ( $a=b=\frac{1}{4}$ ,  $c=\frac{2}{3}$ ,  $u=v=\frac{1}{3}$ ,  $w=\frac{3}{7}$ ), Teorem 4.1.2 ( $k=1$  ve  $t=1$ ), Sonuç 3.1.18 ve Sonuç 3.1.20 de elde edilen  $C_5$ ,  $C_6$ ,  $C_7$ ,  $C_8$ ,  $C_{10}$ ,  $C_{12}$  ve  $C_{13}$  halka bölgelerini  $C_{14}$  halka bölgesi ile karşılaştıralım.

**Tablo 4.3:**  $P_{16}(z)$  polinomunun sıfırlarını içeren halka bölgelerin değerleri

Bölge	$r_1$	$r_2$	Bölgenin alanı
$C_5$	1.3503	2.6836	16.8971
$C_6$	1.1745	2.2361	11.3745
$C_7$	0.9591	14.0344	615
$C_8$	1.1971	3.0271	24
$C_{10}$	1.0445	4.5089	60
$C_{12}$	1.6027	2.2610	7.99
$C_{13}$	0.7462	2.3714	15.9178
$C_{14}$	<b>1.7328</b>	<b>2.0912</b>	<b>4.3059</b>



**Şekil 4.4:**  $P_{16}(z)$  polinomunun bütün sıfırlarını içeren halka bölgeler.

Tablo 4.3 incelenirse Teorem 4.1.2 kullanılarak elde edilen  $C_{14}$  halka bölgesinde en iyi alt sınır elde edilmiştir. Yine  $P_{16}(z)$  polinomunun sıfırlarına en yakın üst sınır, Teorem 4.1.2 kullanılarak elde edilen  $C_{14}$  halka bölgesinin üst sınırıdır. Son olarak Tablo 4.3 den alanı en küçük olan halka bölgesinin  $C_{14}$  bölgesi olduğu görülmektedir. Buna göre  $P_{16}(z)$  polinomunun sıfırlarını içeren en iyi halka bölge  $C_{14}$  dir.

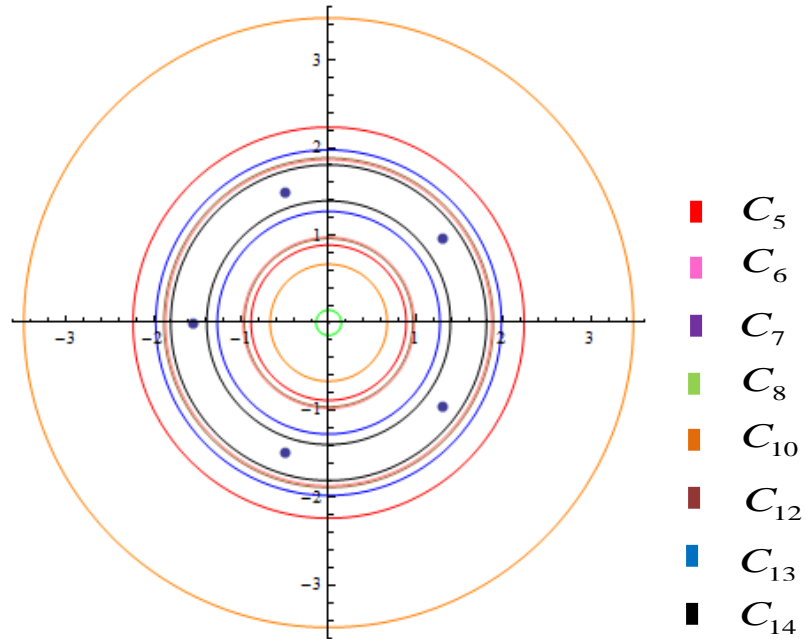
#### 4.2.4 Örnek: [12]

$$P_{17}(z) = z^5 - 0.07z^4 - 0.003z^3 + 0.06z^2 + 0.4z + 10$$

polinomunun sıfırları için Teorem 3.1.2, Teorem 3.1.5 ( $a=b=c=d=1$  ve  $j=2$ ), Teorem 3.1.8 ( $t=3$ ), Teorem 3.1.11 ( $k=1$ ,  $t=2$  ve  $j=2$ ), Teorem 3.1.15 ( $a=b=\frac{2}{7}$ ,  $c=\frac{2}{3}$ ,  $u=v=\frac{1}{5}$ ,  $w=\frac{3}{7}$ ), Teorem 4.1.2 ( $k=1$  ve  $t=2$ ), Sonuç 3.1.18 ve Sonuç 3.1.20 de elde edilen  $C_5$ ,  $C_6$ ,  $C_7$ ,  $C_8$ ,  $C_{10}$ ,  $C_{12}$  ve  $C_{13}$  halka bölgelerini  $C_{14}$  halka bölgesi ile karşılaştıralım.

**Tablo 4.4:**  $P_{17}(z)$  polinomunun sıfırlarını içeren halka bölgelerin değerleri

Bölge	$r_1$	$r_2$	Bölgenin alanı
$C_5$	0.8869	2.2342	13.2117
$C_6$	0.9779	1.8616	7.8841
$C_7$	0.0062	280	246301
$C_8$	0.1448	12	452
$C_{10}$	0.6682	3.4823	36
$C_{12}$	0.9615	1.8824	8.2275
$C_{13}$	1.2722	1.9743	7.1609
$C_{14}$	<b>1.3926</b>	<b>1.8037</b>	<b>4.1278</b>



**Şekil 4.5:**  $P_{17}(z)$  polinomunun bütün sıfırlarını içeren halka bölgeleri.

$P_{17}(z)$  polinomunun sıfırlarına en yakın alt sınır Tablo 4.1 incelendiğinde Teorem 4.1.2 kullanılarak elde edilen  $C_{14}$  halka bölgesi olduğu görülür. Yine  $P_{17}(z)$  polinomunun sıfırlarına en yakın üst sınır Teorem 4.1.2 kullanılarak elde edilen  $C_{14}$  halka bölgesinin üst sınırıdır. Son olarak Tablo 4.1 den alanı en küçük olan halka bölge ise  $C_{14}$  bölgesidir. Buna göre  $P_{17}(z)$  polinomunun sıfırlarını içeren en iyi halka bölge  $C_{14}$  dir.

#### 4.2.5 Uyarı:

4.2.1, 4.2.2, 4.2.3 ve 4.2.4 örneklerine bakılırsa  $P_{14}(z)$ ,  $P_{15}(z)$ ,  $P_{16}(z)$  ve  $P_{17}(z)$  polinomlarının sıfırlarını içeren en iyi halka bölge Teorem 4.1.2' de genelleştirilmiş Fibonacci sayıları yardımıyla elde edilen  $C_{14}$  halka bölgesidir. Sonuç olarak Teorem 4.1.2 deki  $C_{14}$  halka bölgesi için uygun  $k$  ve  $t$  parametreleri seçilmesi durumunda polinomların sıfırlarını içeren daha iyi halka bölgeler elde edilebilir.

Aşağıdaki örnekte  $k$  parametresi sabit tutulup  $t$ ' nin bazı değerleri için Teorem 4.1.2 yardımıyla elde edilecek halka bölgelerin kıyaslaması yapılacaktır.

#### 4.2.6 Örnek: [12]

$$P_{18}(z) = z^6 + 0.09z^5 - 0.32z^4 - 0.13z^3 + 0.6z^2 + 0.4z + 10$$

**Tablo 4.5:**  $P_{18}(z)$  polinomunun sıfırlarını içeren halka bölgelerin değerleri

$k$ değeri	$t$ değeri	$r_1$	$r_2$	Bölgenin alanı
1	1	0.2403	9	254
1	2	0.5434	4.2497	55
1	3	0.5898	3.91	46
1	4	0.6022	3.8348	45

Aşağıdaki örnekte  $t$  parametresi sabit tutulup  $k$ ' nın bazı değerleri için Teorem 4.1.2 yardımıyla elde edilecek halka bölgelerin kıyaslaması yapılacaktır.

#### 4.2.7 Örnek : [12]

$$P_{14}(z) = 5z^5 - 0.002z^4 - 0.03z^3 + 0.05z^2 - 0.01z + 100$$

**Tablo 4.6:**  $P_{14}(z)$  polinomunun sıfırlarını içeren halka bölgelerin değerleri

$k$ değeri	$t$ değeri	$r_1$	$r_2$	Bölgenin alanı
2	1	1.7533	1.8903	1.5679
2	2	1.7110	1.9370	2.59
2	3	1.6806	1.9721	3.3450
2	7	1.6106	2.0579	5.1551

#### 4.2.8 Örnek: [12]

$$P_{19}(z) = 100z^7 + 2z^6 + 9z^5 - 0.32z^4 - 0.13z^3 + 0.6z^2 + 0.4z + 40$$

**Tablo 4.7:**  $P_{19}(z)$  polinomunun sıfırlarını içeren halka bölgelerin değerleri

$k$ değeri	$t$ değeri	$r_1$	$r_2$	Bölgenin alanı
1	7	0.7561	2.62	19
2	7	0.71	3.41	34
3	7	0.18	11	380



## 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde polinomun sıfırlarını içeren disk ve halka bölgeler ile ilgili yapılan bazı çalışmalar incelenmiş ve son bölümde polinomların sıfırlarını içeren yeni bir halka bölge elde edilmiştir. Bilinen halka bölgeler ile bu çalışmada elde edilen yeni halka bölgenin karşılaştırması örnekler yardımıyla yapılmıştır. Sonuç olarak uygun  $k$  ve  $t$  parametresi seçildiğinde elde etmiş olduğumuz halka bölgenin bilinen halka bölgelerden daha iyi olduğu görülmüştür.

## 6. KAYNAKLAR

- [1] Marden, M. 1966, *Geometry of Polynomials*, Mathematical Surveys, No. 3 American Mathematical Society, Providence, R.I., (1966).
- [2] Diaz-Barraro, J. L., “Note on bounds of the zeros”, *Missouri J. Math. Sci.*, 14, 88–91, (2002).
- [3] Diaz-Barraro, J. L., “An annulus for the zeros of polynomials”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 273, 349-352, (2002).
- [4] Diaz-Barraro, J. L. and Egozcue, J. J., “Bounds for the moduli of zeros”, *Applied Mathematics Letters*, 17, 993-996, (2004).
- [5] Bidkham, M. and Shashahani, E., “An annulus for the zeros of polynomials”, *Applied Mathematics Letters*, 24, 122-125, (2011).
- [6] Bidkham, M., Zireh, A. and Soleiman Mezerji, H. A., “Bound for the zeros of polynomials”, *Journal of Classical Analysis*, 3, 2, 149-155, (2013).
- [7] Rather, N. A. and Mattoo, S. G., “On annulus containing all the zeros of a polynomial”, *Applied Mathematics E- Notes*, 13, 155-159, (2013).
- [8] Dalal, A. and Govil, N. K. “On region containing all the zeros of a polynomial”, *Applied Mathematics and Computation*, 219, 9609-9614, (2013).
- [9] Şiar, Z. and Keskin, R., “Some new identities concerning generalized Fibonacci and Lucas numbers”, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 42, 3, 211 - 222, (2013).
- [10] Smith, D.E. and Latham, M. L., *The Geometry of Rene Descartes with a facsimile of the first edition*, Dover, New York, (1954).
- [11] Cauchy, A.L., “Exercices de Mathématiques, IV”, *Anné de Bure Frères, Paris*, (1829).
- [12] Özgür, N. Y. and Demir, P., “A new region containing all the zeros of a polynomial”, Submitted.

[13] Wolfram Research, Inc., Mathematica, Trial Version, Champaign, IL (2015).

# **EKLER**

## 7. EKLER

**EK A:** Genelleştirilmiş Fibonacci dizisinin ilk 20 terimi

$$F_{k,t,0} = 0$$

$$F_{k,t,1} = 1$$

$$F_{k,t,2} = k$$

$$F_{k,t,3} = k^2 + t$$

$$F_{k,t,4} = k^3 + 2 k t$$

$$F_{k,t,5} = k^4 + 3 k^2 t + t^2$$

$$F_{k,t,6} = k^5 + 4 k^3 t + 3 k t^2$$

$$F_{k,t,7} = k^6 + 5 k^4 t + 6 k^2 t^2 + t^3$$

$$F_{k,t,8} = k^7 + 6 k^5 t + 10 k^3 t^2 + 4 k t^3$$

$$F_{k,t,9} = k^8 + 7 k^6 t + 15 k^4 t^2 + 10 k^2 t^3 + t^4$$

$$F_{k,t,10} = k^9 + 8 k^7 t + 21 k^5 t^2 + 20 k^3 t^3 + 5 k t^4$$

$$F_{k,t,11} = k^{10} + 9 k^8 t + 28 k^6 t^2 + 35 k^4 t^3 + 15 k^2 t^4 + t^5$$

$$F_{k,t,12} = k^{11} + 10 k^9 t + 36 k^7 t^2 + 56 k^5 t^3 + 35 k^3 t^4 + 6 k t^5$$

$$F_{k,t,13} = k^{12} + 11 k^{10} t + 45 k^8 t^2 + 84 k^6 t^3 + 70 k^4 t^4 + 21 k^2 t^5 + t^6$$

$$F_{k,t,14} = k^{13} + 12 k^{11} t + 55 k^9 t^2 + 120 k^7 t^3 + 126 k^5 t^4 + 56 k^3 t^5 + 7 k t^6$$

$$F_{k,t,15} = k^{14} + 13 k^{12} t + 66 k^{10} t^2 + 165 k^8 t^3 + 210 k^6 t^4 + 126 k^4 t^5 + 28 k^2 t^6 + t^7$$

$$F_{k,t,16} = k^{15} + 14 k^{13} t + 78 k^{11} t^2 + 220 k^9 t^3 + 330 k^7 t^4 + 252 k^5 t^5 + 84 k^3 t^6 + 8 k t^7$$

$$F_{k,t,17} = k^{16} + 15 k^{14} t + 91 k^{12} t^2 + 286 k^{10} t^3 + 495 k^8 t^4 + 462 k^6 t^5 + 210 k^4 t^6 + 36 k^2 t^7 + t^8$$

$$F_{k,t,18} = k^{17} + 16 k^{15} t + 105 k^{13} t^2 + 364 k^{11} t^3 + 715 k^9 t^4 + 792 k^7 t^5 + 462 k^5 t^6 + 120 k^3 t^7 + 9 k t^8$$

$$F_{k,t,19} = k^{18} + 17 k^{16} t + 120 k^{14} t^2 + 455 k^{12} t^3 + 1001 k^{10} t^4 + 1287 k^8 t^5 + 924 k^6 t^6 + 330 k^4 t^7 + 45 k^2 t^8 + t^9$$

$$F_{k,t,20} = k^{19} + 18 k^{17} t + 136 k^{15} t^2 + 560 k^{13} t^3 + 1365 k^{11} t^4 + 2002 k^9 t^5 + 1716 k^7 t^6 + 792 k^5 t^7 + 165 k^3 t^8 + 10 k t^9$$