T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

$\overline{H}(\lambda)$ İLE $\overline{H}(\lambda_p)$ GENİŞLETİLMİŞ HECKE GRUPLARININ BAZI NORMAL ALT GRUPLARI VE SÜREKLİ KESİRLER

DOKTORA TEZİ

Özden KORUOĞLU

Balıkesir, 2005

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

$\overline{H}(\lambda)$ İLE $\overline{H}(\lambda_p)$ GENİŞLETİLMİŞ HECKE GRUPLARININ BAZI NORMAL ALT GRUPLARI VE SÜREKLİ KESİRLER

DOKTORA TEZİ

Özden KORUOĞLU

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Recep ŞAHİN

Sınav Tarihi : 22.09.2005

Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Mehmet ARISOY (BAÜ)
Doç. Dr. İ. Naci CANGÜL (UÜ)
Doç. Dr. Osman BİZİM (UÜ)
Yrd. Doç. Dr. Recep ŞAHİN (Danışman-BAÜ)
Yrd. Doç. Dr. Müge KANUNİ (BÜ)

Balıkesir, 2005

ÖZET

$\overline{H}(\lambda)$ İLE $\overline{H}(\lambda_p)$ GENİŞLETİLMİŞ HECKE GRUPLARININ BAZI NORMAL ALT GRUPLARI VE SÜREKLİ KESİRLER

Özden KORUOĞLU
Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,
Matematik Anabilim Dalı

(Doktora Tezi / Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Recep ŞAHİN)

Balıkesir, 2005

Bu tez sekiz bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, çalışma tanıtılmıştır.

İkinci bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak tanımlar, örnekler, teoremler ve metodlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde, q çift sayıları (q = 4, 6, 8, ...) için elde edilen $H(\lambda_q)$ Hecke gruplarının, kuvvet alt gruplarının sunuşları ve simgeleri incelenmiştir.

Dördüncü bölüm, $\lambda \geq 2$ değerleri için $H(\lambda)$ Hecke gruplarının bazı normal alt gruplarını içermektedir.

Beşinci bölümde, $p \geq 3$ asal sayıları için elde edilen $\overline{H}(\lambda_p)$ genişletilmiş Hecke gruplarının, kuvvet alt grupları ile kamutatör alt gruplar arasındaki ilişkiler ve serbest normal alt grupları incelenmiştir.

Altıncı bölümde, $\lambda \geq 2$ için bulunan $\overline{H}(\lambda)$ genişletilmiş Hecke gruplarının, çift alt grupları, kuvvet alt grupları, kamutatör alt grupları ile bunların arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Yedinci bölümde, bazı özel λ değerleri $(\lambda = \sqrt{m^2+1}, \sqrt{n^2-1})$ için elde edilen $H(\lambda)$ Hecke gruplarının parabolik noktaları ile sürekli kesirler arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Sekizinci bölümde, tezden elde edilen sonuçlar ve ileride yapılacak çalışmalar için açık problemler verilmiştir.

ANAHTAR SÖZCÜKLER : Hecke grupları, genişletilmiş Hecke grupları, çift alt gruplar, kamutatör alt gruplar, kuvvet alt grupları, serbest alt gruplar, sürekli kesirler, parabolik noktalar.

ABSTRACT

SOME NORMAL SUBGROUPS OF EXTENDED HECKE GROUPS $\overline{H}(\lambda)$ WITH $\overline{H}(\lambda_p)$ AND CONTINUED FRACTIONS

Özden KORUOĞLU
Balıkesir University, Institute of Science,
Department of Mathematics

(Ph. D. Thesis / Supervisor: Asst. Prof. Dr. Recep ŞAHİN)

Balıkesir, 2005

This thesis consists of eight chapters. In the first chapter the study is introduced.

In the second chapter, it is given that the definitions, examples, theorems and methods which are used in the other chapters are briefly recalled.

In the third chapter, the presentations and signatures of power subgroups of the Hecke groups $H(\lambda_q)$ which are obtained for even values of q (q=4, 6, ...) are investigated.

The fourth chapter includes some normal subgroups of Hecke groups $H(\lambda)$ for $\lambda \geq 2$.

In the fifth chapter, the relations between commutator subgroups and power subgroups of extended Hecke groups $\overline{H}(\lambda_p)$ are obtained for prime numbers $p \geq 3$ and their free normal subgroups are investigated.

In the sixth chapter, even subgroups, power subgroups and commutator subgroups of extended Hecke groups $\overline{H}(\lambda)$ for $\lambda \geq 2$ together with the relations between them are discussed.

In the seventh chapter, the relations between the parabolic points of the Hecke groups $H(\lambda)$ for some special values of λ $(\lambda = \sqrt{m^2+1}, \sqrt{n^2-1})$ and continued fractions are investigated.

In the eighth chapter, the results obtained from the thesis are summarized and some open problems for future studies are given.

KEY WORDS : Hecke groups, extended Hecke groups, even subgroups, commutator subgroups, power subgroups, free subgroups, continued fractions, parabolic points.

İÇİNDEKİLER

SEMBOL LİSTESİ

Simge	Adı
$\mathbf{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbf{Z}$	Tamsayılar kümesi
$\mathbf{Z}^+$	Pozitif tamsayılar kümesi
$\mathbf{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbf{Q}\cup\{\infty\}$	Genişletilmiş rasyonel sayılar kümesi
$\mathbf{C}$	Karmaşık sayılar kümesi
$\mathbf{C}_\infty$	Genişletilmiş karmaşık sayılar kümesi
$\mathbf{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbf{R}\cup\{\infty\}$	Genişletilmiş reel sayılar kümesi
$\mathrm{Aut}(\mathbf{C}_\infty)$	$\mathbf{C}_\infty$ kümesinin tüm otomorfizmlerinin kümesi
$GL(2, \mathbf{C})$	$\mathbf{C}$'de genel lineer grup
$PGL(2, \mathbf{C})$	Projektif lineer grup
$SL(2, \mathbf{C})$	Özel lineer grup
$PSL(2, \mathbf{C})$	Determinantı 1 olan projektif lineer grup
$PSL(2, \mathbf{R})$	$\{ V(z) : V(z)=\dfrac{az+b}{cz+d};\ a,b,c,d\in\mathbf{R},\ ad\text{-}bc=1 \}$
$\mathbf{U}$	Üst yarı düzlem
G'	$\{ U(z) : U(z)=\dfrac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d};\ a,b,c,d\in\mathbf{R},\ ad\text{-}bc=-1 \}$
$H(\lambda)$	$\lambda\geq 2$ olması durumunda elde edilen Hecke grupları
$H(\lambda_q)$	$\lambda=\lambda_q=2\cos\dfrac{\pi}{q}, 1\leq\lambda<2$ için elde edilen Hecke grupları
F_λ	$H(\lambda)$ Hecke gruplarının temel bölgesi
$\overline{H}(\lambda)$	$\lambda\geq 2$ için genişletilmiş Hecke grupları
$\overline{H}(\lambda_q)$	$\lambda=\lambda_q=2\cos\dfrac{\pi}{q}, 1\leq\lambda<2$ için genişletilmiş Hecke grupları
Γ	Fuchsian gruplar
$(g;m_1,\ldots,m_r;t;u)$	Fuchsian grupların simgesi
$\mu(\Gamma)$	Γ fuchsian grubun temel bölgesinin hiperbolik alanı
$[G:H]$	İndeks
(l, m, n)	Üçgen grup
C_n	Devirli grup
D_n	Dihedral grup
S_n	Simetrik grup
A_n	Alterne grup

Simge	**Adı**
$P = \langle X \mid R^{*} \rangle$	Grup sunuşu
$F(X)$	X tabanlı serbest grup
$A \times B$	Direkt çarpım grubu
$A*B$	Serbest çarpım grubu
$A *_C B$	Karışımlı serbest çarpım grubu
G^m	Kuvvet alt grubu
G/G^m	G'nin G^m kuvvet alt grubu ile bölüm grubu
$[x_1, x_2]$	x_1 ile x_2 elemanlarının kamutatörü
G'	Birinci kamutatör alt grup
G''	İkinci kamutatör alt grup
G'''	Üçüncü kamutatör alt grup
$G^{(n)}$	n. kamutatör alt grup
G/G'	G'nin G' kamutatör alt grubu ile bölüm grubu
Σ	Schreier transversali
$\mathbf{Z}(\sqrt{D})$	**Z** halkasının $\sqrt{D}$ ile genişlemesi
$\mathbf{Q}(\sqrt{D})$	**Q** cisminin $\sqrt{D}$ ile genişlemesi
$F[X]$	Katsayıları F cismine ait polinom halkası
$H_ç(\lambda)$	$\lambda \geq 2$ için $H(\lambda)$ nın çift alt grubu
$H_t(\lambda)$	$\lambda \geq 2$ için tek elemanların kümesi
$\overline{H}_2(\lambda_p)$	$\overline{H}(\lambda_p)$ nin temel denklik alt grubu
$\overline{H}_ç(\lambda)$	$\lambda \geq 2$ için $\overline{H}(\lambda)$ nın çift alt grubu

ŞEKİL LİSTESİ

ÖNSÖZ

Bu çalışmamda büyük emeği olan sayın hocam ve danışmanım Yrd. Doç. Dr. Recep ŞAHİN'e ne kadar teşekkür etsem azdır.

Her zaman benim yanımda olan, sayın hocalarım Doç. Dr. İ. Naci CANGÜL ile Doç. Dr. Osman BİZİM'in anlayış ve katkılarını hiçbir zaman unutmayacağım. Çalışmamda zamanını ayırarak bana yardımcı olan çalışma ve oda arkadaşım Sebahattin İKİKARDEŞ'e ayrıca teşekkürler.

Ayrıca beni yetiştiren ve bugünlere getiren aileme, uzun yıllar yanında kaldığım sevgili babaanneme, çalışmamda her türlü fedakarlığı yapan eşim Nergiz'e sonsuz teşekkürler. Son olarak tez disketlerimi çöpe atarak büyük katkılar sağlayan sevgili kızım Sinem'e herkeslerden ayrı bir teşekkür...

Balıkesir, 2005 Özden KORUOĞLU

1. GİRİŞ

Hecke grupları literatüre, E. Hecke'nin 1936 yılında yaptığı "Über die Bestimmung Dirichleter Reichen durch ihre Funktionalgleichungen" isimli çalışması ile girmiştir. $H(\lambda)$ ile gösterilen Hecke grupları, λ sabit bir pozitif sayı olmak üzere

$$T(z) = -\frac{1}{z} \quad \text{ve} \quad U(z) = z + \lambda$$

kesirli doğrusal dönüşümleri ile üretilir. Ayrıca E. Hecke, $H(\lambda)$ Hecke gruplarının Fuchsian olması için gerekli ve yeterli şartın $\lambda \geq 2$ veya $\lambda = \lambda_q = 2\cos\frac{\pi}{q}$, ($q \geq 3$ bir tamsayı) olması gerektiğini göstermiştir [1]. Fuchsian grup kavramı ise Jules Henri Poincaré'nin 1880'li yıllarda Paris Akademisinin açtığı matematik yarışmasına katılmasıyla ortaya çıkmıştır. Bu yarışmaya katılan Jules Henri Poincaré'nin amacı, 1820'li yıllarda Abel, Gauss ve Jacobi tarafından tanımlanmış Eliptik fonksiyonları genelleştirmektir. Poincaré, L. Fuchs'un diferansiyel denklemler hakkındaki bir çalışmasından yararlanarak eliptik fonksiyonlar ailesini, adına Fuchsian fonksiyonlar dediği bir fonksiyon ailesine genişletmeyi başarır. Poincaré tarafından Fuchsian fonksiyonlarla olan ilgisi nedeniyle, Fuchsian gruplar adı verilen gruplar bu arada literatüre girmiştir.

$\lambda = \lambda_q = 2\cos\frac{\pi}{q}$, ($q \geq 3$ tek tamsayı ve q=4, 6) değerlerine karşılık gelen $H(\lambda_q)$ Hecke grupları ile bunların normal alt grupları Cangül tarafından çalışılmıştır [2]. $H(\lambda_q)$ Hecke gruplarında, q=3 değerine karşılık gelen $H(\lambda_3)$ Hecke grubu daha çok modüler grup olarak adlandırılır ve PSL(2, **Z**) ile gösterilir. Modüler grup matematikçiler tarafından çok çalışılan bir gruptur. Modüler grubun kendisinin yanı sıra önemli bazı alt grupları (kuvvet ve kamütatör alt grupları) çalışmalarda kullanılmıştır. M. Newman 1962 ve 1964 yıllarında yaptığı [3, 4] nolu makalelerde bu alt grupları incelemiş ve aralarındaki ilişkiyi göstermiştir. Bununla beraber M. Newman kuvvet alt gruplarından yararlanarak modüler grubun serbest alt grupları hakkında da bilgiler vermiştir.

Hecke grupları ile normal alt gruplarını çalışan bazı isimler Lang, Rosen, Sheingorn, Kulkarni, Schmidt, Fine, Rosenberger, Singerman, Jones, Knopp, Cangül, Yılmaz şeklindedir.

1980'li yıllardan itibaren modüler gruptan yararlanarak tanımlanan, genişletilmiş modüler grup $\overline{\Gamma}$=PGL(2, Z) ve onun alt gruplarının cebirsel, geometrik ve fonksiyonel özellikleri Sibner, Jones, Thornton, Singerman, Kulkarni, Schoeneberg, Mushtaq ve Bizim tarafından çalışılmıştır.

$R(z)=\frac{1}{\overline{z}}$ yansıma dönüşümünü $H(\lambda_q)$ Hecke gruplarına katarak elde edilen genişletilmiş Hecke grupları, Bizim ve Şahin tarafından tanıtılmıştır. Bazı genişletilmiş Hecke gruplarının kuvvet, kamutatör, çift, temel denklik, serbest alt grupları ve aralarındaki ilişkiler de Şahin, Bizim, Cangül, Koruoğlu, İkikardeş tarafından verilmiştir.

Bu çalışmada geçen sürekli kesirleri ilk çalışanlardan biri Wallis adlı matematikçidir. Wallis 1695 yılında yazdığı Opera Mathematica isimli kitapta sürekli kesirler konusu için bir ön çalışma yapmıştır. Alman matematikçi Christiaan Huygens, (1629-1695) sürekli kesirler çalışan diğer bir bilim adamıdır.

Bu çalışmada yapılanları, bölümlere ayırarak kısaca tanıtalım.

Çalışmanın ilk bölümü tezin gelişimini anlatan, tezin bölümlerinin tanıtıldığı giriş bölümüdür.

Çalışmanın ikinci bölümünde, tezin diğer bölümlerinde kullanılacak, tanımlar, metodlar, yöntemler, teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde q çift sayısı (q=4, 6,...) için elde edilen $H(\lambda_q)$ Hecke gruplarının, kuvvet alt gruplarının üreteçleri bulunarak, grup sunuşu belirlenmiş ve bu alt grupların simgeleri incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, $\lambda \geq 2$ değerleri için elde edilen $H(\lambda)$ Hecke gruplarının çift alt grubunun, kuvvet alt gruplarının üreteçleri bulunarak grup sunuşları ve simgeleri elde edilmiştir. Bunların arasındaki ilişkilerin yanında g=0 cinsli, sonlu indeksli normal alt grupları ve de serbest normal alt grupları incelenmiştir.

Beşinci bölümde, $p \geq 3$ asal sayıları için $\overline{H}(\lambda_p)$ genişletilmiş Hecke gruplarının kuvvet alt grupları, kamutatör alt grupları ile bunların arasındaki ilişkiler ve serbest normal alt grupları incelenmiştir. Bulunan bu alt gruplarla, $H(\lambda_p)$ Hecke gruplarının, bilinen normal alt grupları arasındaki ilişkiler bir şekil ile gösterilmiştir.

Altıncı bölümde ise $\lambda \geq 2$ için, $\overline{H}(\lambda)$ genişletilmiş Hecke gruplarının, çift alt grubu, kuvvet alt grupları, kamutatör alt grupları ile bunların arasındaki ilişkiler verilmiştir.

Yedinci bölümde, $\lambda = \sqrt{D}$, $D = m^2 + 1$, (m=1, 3, 4, 5, ...) veya $D = n^2 - 1$, (n=2, 3, 4, ...) olacak biçimde kök dışına çıkamayacak D tamsayıları için $H(\lambda)$ Hecke gruplarının, parabolik noktalarının $\mathbf{Z}(\sqrt{D})$ halkasındaki birimler olamayacağı, sürekli kesirler yardımıyla gösterilmiştir.

Sekizinci bölümde ise çalışmamızda elde edilen sonuçlardan bahsedilmiştir. Ayrıca bundan sonra yapılabilecek bazı çalışmalar için açık problemler verilmiştir.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, tezin diğer bölümlerinde kullanılacak tanımlar, metodlar, yöntemler ve de teoremler verilmiştir.

2.1 Möbiüs Dönüşümleri

Çalıştığımız Hecke gruplarının elemanları birer möbiüs dönüşümüdür. Bu alt bölümde, bu dönüşümleri tanıyıp, bu dönüşümler ile 2×2 matrisler arasındaki ilişkileri vereceğiz. $\mathbf{C}_\infty = \mathbf{C}\cup\{\infty\}$ olmak üzere şu tanımı verelim:

2.1.1 Tanım : f: $\mathbf{C}_\infty \to \mathbf{C}_\infty$ birebir, örten ve meromorf fonksiyonlara $\mathbf{C}_\infty$ kümesinin bir *otomorfizmi* denir [5]. □

$\mathbf{C}_\infty$ kümesinin tüm otomorfizmlerinin kümesi Aut($\mathbf{C}_\infty$) ile gösterilir. Yani,

Aut($\mathbf{C}_\infty$)={ f | f: $\mathbf{C}_\infty \to \mathbf{C}_\infty$ birebir, örten, meromorf fonksiyon }

şeklindedir.

2.1.2 Teorem : $\mathbf{C}_\infty$ kümesinin, tüm otomorfizmlerinin kümesi aşağıdaki gibidir:

$$\mathrm{Aut}(\mathbf{C}_\infty)=\{\ V(z) : V(z)=\frac{az+b}{cz+d};\ a,b,c,d\in\mathbf{C},\ ad-bc\neq 0\ \}\ [5].\square$$

2.1.2 Teoremde dikkat edilirse ad-bc$\neq 0$ verilmiştir. Eğer ad-bc=0 olsa, V(z) sabit fonksiyon olur ve birebirlik şartı bozulur.

2.1.3 Tanım: $V(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ ($a,b,c,d\in\mathbf{C}$, $ad-bc\neq 0$) biçimindeki dönüşümlere, *möbiüs dönüşümleri* (kesirli doğrusal dönüşüm) denir [5].□

2.1.4 Teorem : Möbiüs dönüşümleri, fonksiyonların bileşke işlemine göre bir gruptur [6].□

2.1.3 Tanımdaki ad-bc değerine V(z) dönüşümünün determinantı denir ve Δ ile gösterilir. Möbiüs dönüşümleri için verilen Δ=ad-bc$\neq 0$ koşulu yerine Δ=ad-bc=1 kullanılabilir. Çünkü pay ve payda $\pm\sqrt{\Delta}$ ile bölünürse, $\Delta=1$ sonucu bulunur.

Matrislerde çarpma işlemi yapmak, fonksiyonların bileşke işlemine göre daha kolaydır. Bunun için, möbiüs dönüşümleri ile matrisler arasında birebir ilişkiyi inceleyelim. Bu ilişki, V(z)= $\frac{az+b}{cz+d}$ yerine $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrisini kullanmak olacaktır. Bunun için bazı teoremler verelim.

2.1.5 Tanım: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ biçiminde a,b,c,d$\in \mathbf{C}$, Δ=ad-bc$\neq 0$ koşullarını sağlayan 2×2 matrislerin kümesine **C**'de *genel lineer grup* denir ve GL(2, **C**) ile gösterilir.

2.1.6 Teorem : $\theta: GL(2, \mathbf{C}) \to Aut(\mathbf{C}_\infty)$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm bir epimorfizmdir [5].□

Dikkat edilirse 2.1.6 Teoremdeki dönüşüm birebir değildir. Çünkü $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrisi $\frac{az+b}{cz+d}$ dönüşümünün yanında, bu dönüşümün, k katına da gidebilir. Dolayısıyla birebirlik yoktur. θ dönüşümünün çekirdeğini K ile gösterelim

(K=çekθ). Gerekli işlemler yapılırsa çekθ kümesinin $\lambda \in \mathbf{C}\backslash\{0\}$ koşulu altında $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ biçimindeki matrislerden oluştuğu görülür. Bu elemanları

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \lambda I$$

olarak da ifade edebiliriz. Birinci izomorfizma teoreminden aşağıdaki teoremi verebiliriz.

2.1.7 Teorem : $GL(2, \mathbf{C}) / K \cong Aut(\mathbf{C}_\infty)$ [5].□

$GL(2, \mathbf{C})/K$ bölüm grubu için $PGL(2, \mathbf{C})$ simgesi kullanılır ve bu grup *projektif lineer grup* olarak isimlendirilir. $PGL(2, \mathbf{C})$ nin elemanları, Δ=ad-bc$\neq 0$ koşulunu sağlar ve de bu matrislerin k katı da aynı dönüşümü belirler.

Şimdi $GL(2, \mathbf{C})$ kümesinden $\mathbf{C}\backslash\{0\}$ kümesine şöyle bir dönüşüm tanımlayalım:

$$\det: GL(2, \mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{C}\backslash\{0\}$$

dönüşümünün M, N $\in GL(2, \mathbf{C})$ olmak üzere det(M.N)=det(M).det(N) özelliğinden homomorfizmadır. Üstelik örten olduğundan bir epimorfizmdir. Bu epimorfizmin çekirdeği $SL(2, \mathbf{C})$ ile göstereceğimiz, determinantı 1 olan matrislerdir. $SL(2, \mathbf{C})$ kümesine *özel lineer grup* denir. Yine birinci izomorfizma teoreminden aşağıdaki teoremleri verebiliriz.

2.1.8 Teorem : $GL(2, \mathbf{C}) / SL(2, \mathbf{C}) \cong \mathbf{C}\backslash\{0\}$ [5].□

2.1.9 Teorem : $Aut(\mathbf{C}_\infty) \cong PGL(2, \mathbf{C}) = PSL(2, \mathbf{C})$ [5].□

$PSL(2, \mathbf{C})$ nin elemanları, Δ=ad-bc=1 koşulunu sağlar ve de bu matrislerin negatifleri de aynı dönüşümü belirler.

Bu çalışmada Hecke grupları ile çalıştığımız için, reel katsayılı doğrusal dönüşümlerin kümesi olan,

$$\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R}) = \{ V(z) : V(z)= \frac{az+b}{cz+d}; a,b,c,d \in \mathbf{R}, ad-bc=1 \}$$

ile ilgileneceğiz. Şimdi **U**, üst yarı düzlemi göstermek üzere, PSL(2, **R**) ile ilgili şu teoremi verelim.

2.1.10 Teorem : $\mathrm{Aut}(\mathbf{U}) \cong \mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ [5].□

2.1.11 Tanım: $G' = \{ U(z) : U(z)= \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}; a,b,c,d \in \mathbf{R}, ad-bc= -1 \}$ kümesinin elemanlarına **U** üst yarı düzlemin *anti-otomorfizmleri* denir. □

2.1.12 Teorem : $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbf{R}) \cup G'$ bileşke işlemine göre bir gruptur [5].□

2.1.13 Teorem : Hecke grupları, PSL(2, **R**) nin alt grubudur. Genişletilmiş Hecke grupları ise G nin bir alt grubudur.

İspat : Giriş bölümünde verilen, Hecke ile genişletilmiş Hecke gruplarının üreteç kümelerinin elemanlarından sonuç açıktır. □

2.1.1 İz Sınıfları

Burada iz sınıflarından yararlanarak, $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbf{R}) \cup G'$ grubunun elemanlarını sınıflandıracağız ve de sabit noktalarından bahsedeceğiz. Bu alt bölümde vereceğimiz tanım ve teoremler [5], [6] kaynaklarında ayrıntılı olarak bulunabilir.

2.1.1.1 Tanım : $V(z)= \frac{az+b}{cz+d} \in G$, $U(z)= \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} \in G$ dönüşümlerinin, $V(z)=z$ ile $U(z)=z$ şartlarını sağlayan noktalara bu dönüşümlerin, *sabit noktaları* denir.□

Önce PSL(2, **R**) = { V(z) : V(z)= $\dfrac{az+b}{cz+d}$; a,b,c,d$\in$**R**, ad-bc=1 } kümesinin sabit noktalarını inceleyelim.

2.1.1.2 Tanım : tr(V)=a+d değerine *V dönüşümünün izi* denir. □

Dönüşümlerin izlerinden yararlanarak sabit noktaları belirleyebiliriz. Bu sabit noktalardan yararlanarak dönüşümleri de şu şekilde sınıflandırabiliriz:

1. Durum : Eğer $|tr(V)| > 2$ ise $\mathbf{R}\cup\{\infty\}$ üzerinde iki sabit noktası vardır. Bu durumda V(z) ye *hiperbolik dönüşüm* denir.

2. Durum : Eğer $|tr(V)| = 2$ ise $\mathbf{R}\cup\{\infty\}$ üzerinde çakışık iki sabit noktası vardır. Bu dönüşümler, *parabolik dönüşüm* olarak adlandırılır.

3. Durum : Eğer $|tr(V)| < 2$ ise birbirinin eşleniği olan iki sabit noktası vardır. Sabit noktalardan biri **U** üst yarı düzlemindedir. Bu durumda V(z) ye *eliptik dönüşüm* denir.

Şimdi de G'= { U(z) : U(z)= $\dfrac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$; a,b,c,d$\in$**R**, ad-bc= -1 } kümesinin sabit noktalarını inceleyelim.

2.1.1.3 Tanım : tr(U)=a+d değerine *U dönüşümünün izi* denir. □

Bu dönüşümleri de sınıflandırabiliriz:

1. Durum : tr(U)=a+d$\neq$ 0 ise U dönüşümünün $\mathbf{R}\cup\{\infty\}$ üzerinde iki sabit noktası vardır. Bu tür dönüşümler *kayan-yansıma* olarak adlandırılır.

2. Durum : tr(U)=a+d=0 ise U dönüşümünün sabit noktalarının kümesi bir çemberdir. Bu çemberin merkezi $(\frac{a}{c},0)$ noktası ve de yarıçapı $\frac{1}{|c|}$ şeklindedir. Bu dönüşümlere de *yansıma* denir.

2.2 Hecke Grupları

Erich Hecke, 1936 yılında "Über die Bestimmung Dirichleter Reichen durch ihre Funktionalgleichungen" adlı çalışmasında Hecke gruplarını aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

2.2.1 Tanım : λ sabit bir pozitif sayı olmak üzere ,

$$T(z) = -\frac{1}{z} \quad \text{ve} \quad U(z)=z+\lambda$$

kesirli doğrusal dönüşümleri ile üretilen gruplara *Hecke grupları* denir ve $H(\lambda)$ ile gösterilir. □

Tanımlanan T(z) ve U(z) dönüşümleri yardımıyla S=T.U alınırsa

$$S(z)=-\frac{1}{z+\lambda}$$

elde edilir.

2.2.2 Teorem : $\lambda \geq 2$ veya $q \geq 3$ bir tamsayı olmak üzere,

$$\lambda = \lambda_q = 2\cos\frac{\pi}{q},\ 1 \leq \lambda < 2$$

ise $H(\lambda)$ grubunun bir temel bölgesi,

$$F_\lambda = \left\{ z \in U : |\mathrm{Re}\, z| < \frac{\lambda}{2}, |z| > 1 \right\},$$

kümesidir [1]. □

Ayrıca E. Hecke diğer λ>0 değerleri için F_λ kümesinin bir temel bölge olmadığını da göstermiştir. $\lambda = \lambda_q$ veya $\lambda \geq 2$ olması durumunda $H(\lambda)$ grubunun sonlu üreteçli bir grup olduğu görülür. Ayrıca $H(\lambda)$ grubu, PSL(2, **R**) nin ayrık bir alt grubu olduğundan $H(\lambda)$ grubu Fuchsian bir grup olur. (Ayrık gruplar ve Fuchsian gruplar için ayrıntılı bilgiler [7], [8] nolu kaynaklarda bulunabilir.

2.2.3 Teorem : $H(\lambda)$ Hecke gruplarının Fuchsian olması için gerekli ve yeterli koşul $\lambda \geq 2$ veya $\lambda = \lambda_q = 2\cos\frac{\pi}{q}$, ($q \geq 3$ bir tamsayı) olmasıdır [1].□

$\lambda = \lambda_q = 2\cos\frac{\pi}{q}$, $1 \leq \lambda < 2$, durumuna karşılık gelen Hecke grupları $H(\lambda_q)$ ile gösterilir. Bazı $H(\lambda_q)$ Hecke grupları ve bunların normal alt grupları [2] de çalışılmıştır. $\lambda \geq 2$ değerleriyle elde edilen Hecke grupları için $H(\lambda)$ gösterimi kullanılır. Bu grupların sunuşları ile ilgili iki teorem aşağıdadır.

2.2.4 Teorem : $H(\lambda_q)$ Hecke grubunun sunuşu,

$$H(\lambda_q) = < T, S \mid T^2 = S^q = I > \cong C_2 * C_q \tag{2.1}$$

şeklinde, 2 mertebeli devirli grup ile q mertebeli devirli grubun serbest çarpımıdır [2].□

2.2.5 Teorem : Eğer $\lambda \geq 2$ ise bu grubun sunuşu,

$$H(\lambda) = < T, S \mid T^2 = S^\infty = I > \cong C_2 * C_\infty \tag{2.2}$$

biçiminde, 2 mertebeli devirli grup ve sonsuz mertebeli devirli grubun serbest çarpımıdır [9]. □

2.3 Genişletilmiş Hecke Grupları

Burada 2.2 Bölümde verilen Hecke gruplarından, $R_1(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ yansıma dönüşümü yardımıyla elde ettiğimiz genişletilmiş Hecke gruplarından kısaca bahsedeceğiz. Genişletilmiş modüler ve genişletilmiş Hecke grupları ile ilgili temel bilgilere [10, 11] kaynaklarından ulaşılabilir.

Faydalanacağımız $R_1(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ dönüşümü birim çembere göre yansımadır.

$\lambda \geq 2$ veya $q \geq 3$ bir tamsayı olmak üzere $\lambda = \lambda_q = 2\cos\frac{\pi}{q}, 1 \leq \lambda < 2$ değerleri için $H(\lambda)$ ile gösterilen Hecke gruplarından yararlanarak şu tanımı verelim.

2.3.1 Tanım : Hecke gruplarına, $R_1(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ anti-otomorfizmini ekleyerek elde edilen gruplara *genişletilmiş Hecke grupları* denir. □

Genişletilmiş Hecke grupları $\overline{H}(\lambda)$ ile gösterilir ve otomorfizmler ile anti-otomorfizmleri bulundurur.

Şimdi de genişletilmiş Hecke gruplarının aşağıda vereceğimiz yansımalar yardımıyla grup sunuşunu bulalım.

$\lambda = \lambda_q = 2\cos\frac{\pi}{q}, 1 \leq \lambda < 2$ olmak üzere,

$$R_1(z) = \frac{1}{\bar{z}} \quad , R_2(z) = -\bar{z}, \quad R_3(z) = \frac{-\bar{z}}{\lambda\bar{z}+1}$$

yansımaları yardımıyla, genişletilmiş Hecke gruplarının sunuşu

$$\overline{H}(\lambda_q) = <R_1, R_2, R_3 \mid R_1^{\,2} = R_2^{\,2} = R_3^{\,2} = (R_1R_2)^2 = (R_3R_1)^q = I> \tag{2.3}$$

yazılabilir [11, 12]. Burada $R{=}R_1$, $T = R_1R_2 = R_2R_1$, $S = R_3R_1$ olarak alınırsa $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke gruplarının sunuşu,

$$\overline{H}(\lambda_q) = <T, S, R \mid T^2 = R^2 = S^q = (TR)^2 = (RS)^2 = I> \tag{2.4}$$

olarak bulunur.

$\lambda \geq 2$ değerleri için, yansımalar yardımıyla,

$$\overline{H}(\lambda) = <R_1, R_2, R_3 \mid R_1^{\,2} = R_2^{\,2} = R_3^{\,2} = (R_1R_2)^2 = I> \tag{2.5}$$

ve $R = R_1$, $T = R_1 R_2 = R_2 R_1$, $S = R_3 R_1$ eşitliklerinden,

$\overline{H}(\lambda)$ genişletilmiş Hecke gruplarının sunuşu,

$$\overline{H}(\lambda) = <T, S, R \mid T^2 = R^2 = S^\infty = (TR)^2 = (RS)^2 = I> \qquad (2.6)$$

yazılabilir.

2.3.2 Teorem : $\overline{H}(\lambda)$ genişletilmiş Hecke grupları için temel bölge,

$$\overline{F}_\lambda = \left\{ z \in U : -\frac{\lambda}{2} < \mathrm{Re}(z) < 0, |z| > 1 \right\}$$

kümesidir [12].□

2.4 Fuchsian Gruplar

Bu bölümde Fuchsian gruplarda kullanacağımız bazı metod ve formüllerden bahsedip, Fuchsian gruplara bazı örnekler vereceğiz. Γ ile Fuchsian grupları göstereceğiz. Fuchsian gruplarla ilgili ayrıntılı bilgilere [5, 7, 8] nolu kaynaklardan ulaşılabilir.

2.4.1 Tanım : PSL(2, **R**) kümesinin ayrık alt gruplarına *Fuchsian grup* denir [5]. □

2.4.1 Riemann-Hurwitz Formülü

Bu formül yardımıyla $H(\lambda)$ Hecke gruplarının, sonlu indeksli normal alt gruplarının, cinsini belirleyeceğiz.

Her Γ Fuchsian grubunun aşağıdaki şekilde bir temsili vardır:

Üreteçler: $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$ (hiperbolik)

$x_1, \ldots, x_r$ (eliptik)

$p_1, \ldots, p_t$ (parabolik)

$h_1, \ldots, h_u$ (hiperbolik sınır elemanı)

Bağıntılar: $x_j^{m_j} = \prod_{i=1}^{g}[a_i, b_i]\prod_{j=1}^{r} x_j \prod_{k=1}^{t} p_k \prod_{l=1}^{u} h_l = 1$.

Γ Fuchsian grubuna

$$(g; m_1, \ldots, m_r; t; u) \tag{2.7}$$

simgesine sahiptir denir [2]. Burada $m_1, \ldots, m_r \geq 2$ sayıları tamsayılardır ve bunlara Γ grubunun *periyotları* denir. Ayrıca g, Γ grubunun, üzerinde ayrık olarak hareket ettiği U/Γ Riemann yüzeyinin cinsidir. Çalıştığımız Hecke grupları ile alt gruplarının simgelerinde parabolik elemanları sonsuz mertebeli eliptik elemanlar olarak göstereceğiz.

Şimdi Riemann-Hurwitz formülünü tanımlayalım. Γ, simgesi (2.7) biçiminde olan bir grup ve $2\Pi.\mu(\Gamma)$, Γ grubunun temel bölgesinin hiperbolik alanı olmak üzere,

$$\mu(\Gamma) = 2g - 2 + \sum_{i=1}^{r}(1 - \frac{1}{m_i}) + t + u$$

biçimindedir. Eğer Γ_1, Γ grubunun sonlu indeksli bir normal alt grubu ise

$$|\Gamma / \Gamma_1| = \frac{\mu(\Gamma_1)}{\mu(\Gamma)} \tag{2.8}$$

olur. (2.8) ile gösterilen bu formüle *Riemann-Hurwitz formülü* denir [2].

2.4.2 Permütasyon Metodu

$H(\lambda)$ Hecke gruplarının alt gruplarının simgelerini bulmakta kullanacağımız permütasyon metodunu tanıtalım. Bu metod için şu teoremi verelim:

2.4.2.1 Teorem : p+q=r+t ve $1 < k_i \leq \infty$ $(1 \leq i \leq q)$ olmak üzere Γ grubunun simgesi $(g; m_1, \ldots, m_p, n_1 k_1, \ldots, n_q k_q)$ ve Γ_1, Γ grubunun μ indeksli bir normal alt grubu ise Γ_1 alt grubu $(g_1; k_1^{(\mu/n_1)}, \ldots, k_q^{(\mu/n_q)})$ simgesine sahiptir. Burada $k_i^{(\mu/n_i)}$, k_i mertebeli elemandan μ/n_i tane var demektir ve g_1 cinsi Riemann-Hurwitz formülü ile hesaplanır [2].□

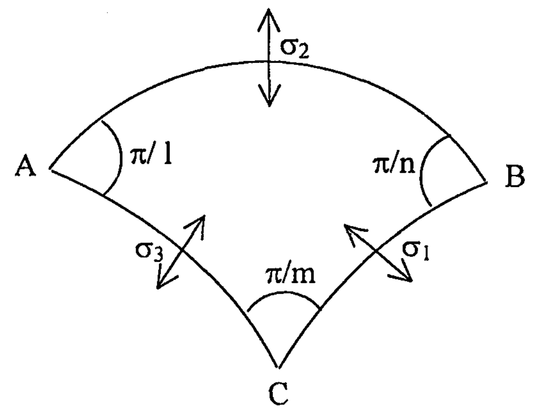
2.4.2.2 Teorem : Γ, Fuchsian grubunun simgesi, $(g;\ m_1, m_2, \ldots, m_r; t)$ ise Γ,

$$F_{2g+t-1} * C_{m_1} * \ldots * C_{m_r}$$

grubuna izomorftur. Yani rankı 2g+t-1 olan serbest grup ile mertebeleri sırasıyla $m_1, m_2, \ldots, m_r$ olan devirli grupların serbest çarpımıdır [13].□

Hecke grupları, üçgen gruplar olduğundan ve çalışmamızda bazı üçgen grupları kullanacağımızdan, bu gruplardan ana hatlarıyla bahsedelim.

$l, m, n \geq 2$ koşulunu sağlayacak şekilde tamsayılar olsunlar. $\pi/l, \pi/m, \pi/n$ açılı hiperbolik üçgeni göz önüne alalım (hiperbolik üçgen tanımı için [5] nolu kaynağa bakınız).



Şekil 2.1

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ Şekil 2.1 deki yansımalar ve Γ^* grubu bu üç yansıma ile üretilen grup olsun.

$$\Gamma^* = < \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \mid \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = (\sigma_2\sigma_3)^l = (\sigma_3\sigma_1)^m = (\sigma_1\sigma_2)^n = I >$$

Dikkat edilirse $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ yön korumayan, $\sigma_2\sigma_3$, $\sigma_3\sigma_1$, $\sigma_1\sigma_2$ yön koruyan elemanlardır. $x=\sigma_2\sigma_3$ ve $y=\sigma_3\sigma_1$ alalım. Böylece x, A etrafında $2\pi/l$, y de B etrafında $2\pi/m$ kadarlık dönme, xy ise C etrafında $2\pi/n$ kadarlık dönmedir. Buradan Γ^* grubunun sadece yön koruyan elemanlarından oluşan bir Γ alt grubunu elde ederiz:

$$\Gamma = < x, y \mid x^l = y^m = (xy)^n = I > .$$

Bu alt grup bir Fuchsian gruptur ve (l, m, n) ile gösterilir. Bu Γ alt grubuna bir *üçgen grup* denir. Γ alt grubu Γ^* grubunun 2 indeksli bir alt grubudur ve böylece normaldir.

$\lambda = \lambda_q = 2\cos\frac{\pi}{q}, 1 \le \lambda < 2$ için elde edilen $H(\lambda_q)$ Hecke grupları (2, q, ∞) şeklinde üçgen gruplardır. $\lambda \ge 2$ değerleri için bulunacak $H(\lambda)$ Hecke grupları ise $(2,\infty,\infty)$ biçiminde üçgen gruplardır. Şimdi de (l, m, n) gösterimine sahip herhangi bir üçgen grup için şu teoremi verelim:

2.4.2.3 Teorem : Eğer $\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n} > 1$ ise üçgen grup sonlu, $\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n} \le 1$ ise sonsuz mertebelidir [11].□

Daha sonraki bölümlerde kullanacağımız sonlu mertebeli bazı üçgen grupları inceleyelim:

(i) C_n Devirli Grupları : C_n grup sunuşları,

$C_n \cong \langle \alpha \mid \alpha^n = I \rangle$

şeklindedir. Bunların üçgen grup gösterimleri (1, n, n) veya (n, 1, n) biçimindedir.

(ii) D_n Dihedral Grupları : D_n gruplarının sunuşları,

$$D_n \cong \langle \alpha, \beta \mid \alpha^2 = \beta^2 = (\alpha\beta)^n = I \rangle$$

veya

$$D_n \cong \langle \alpha, \beta \mid \alpha^2 = \beta^n = (\alpha\beta)^2 = I \rangle$$

veya

$$D_n \cong \langle \alpha, \beta \mid \alpha^n = \beta^2 = (\alpha\beta)^2 = I \rangle$$

şeklindedir ve $|D_n| = 2n$ dir. D_n grubunun üçgen grubu olarak gösterimi (2, 2, n) veya (2, n, 2) veya (n, 2, 2) biçimindedir.

(iii) Simetrik ve Alterne Gruplar : n elemanlı bir kümenin bütün permütasyonlarının kümesi, fonksiyonların bileşke işlemine göre bir grup oluşturur. Bu gruba *simetrik grup* denir ve S_n ile gösterilir. Çift permütasyonların kümesi de bu grubun bir alt grubunu oluşturur. Bu gruba *alterne grup* denir ve A_n ile gösterilir. $|S_n|=n!$ ve $|A_n|=n!/2$ dir. Çok karşılaşılan simetrik ve alterne gruplar $D_3 \cong S_3 \cong (2,2,3)$, $A_4 \cong (2,3,3)$, $S_4 \cong (2,3,4)$ ve $A_5 \cong (2,3,5)$ gruplarıdır [14, 15, 16].

2.5 Serbest Gruplar

Bu bölümde, çalışmamızda yer alan serbest grup, serbest çarpım, direkt çarpım ve karışımlı serbest çarpım kavramları ile bu grupların sunuşlarından bahsedeceğiz.

X bir küme (üreteç sembollerinin kümesi) ve X kümesi üzerinde devirsel indirgenmiş kelimelerden oluşan R^* (bağıntı kelimelerinin kümesi) olsun. Bu durumda,

$$P = \langle X \mid R^{*} \rangle \tag{2.9}$$

ikilisine bir *grup sunuşu* denir. X ve R^{*} kümelerinin her ikisi de sonlu ise P sunuşunun sonlu olduğunu söyleriz.

2.5.1 Tanım : X bir F grubunun alt kümesi ve G herhangi bir grup olmak üzere,

$$\phi_0 : X \to G$$

şeklinde herhangi bir dönüşüm için,

$$\phi : F \to G$$

ϕ_0 dönüşümünün uzantısı olan tek bir ϕ homomorfizması varsa F grubuna X üzerinde *serbesttir* denir [17]. □

2.5.2 Tanım : F(X) ile gösterilen serbest gruplar için X kümesine F(X) serbest grubunun *tabanı* denir. X kümesinin eleman sayısına F(X) grubunun *rankı* denir ve $|X|$ ile gösterilir.□

2.5.3 Teorem : X ve Y kümeleri üzerinde tanımlanan serbest gruplar için

$$|X| = |Y| \Leftrightarrow F(X) \cong F(Y)$$

dir [17]. □

2.5.4 Teorem : X kümesi üzerindeki serbest grubun sunuşu $P = \langle X \mid \ \rangle$ şeklindedir [17].□

Burada dikkat edilirse $R^{*} = \varnothing$ dir.

2.5.5 Teorem : Bir t elemanı tarafından üretilen sonsuz mertebeli devirli grubun sunuşu $P = \langle t \mid \ \rangle$ şeklindedir.

İspat : Sonsuz mertebeli devirli grupta, sonlu mertebeli bir eleman olmadığından $R^{*} = \varnothing$ olur. □

2.5.6 Sonuç: Sonsuz mertebeli devirli gruplar, serbest gruptur.

İspat : 2.5.5 Teoremden sonuç görülür. □

2.5.7 Sonuç : (Z , +) grubu, rankı 1 olan serbest gruptur.

İspat : Grup 1 elemanı tarafından üretilen sonsuz mertebeli devirli grup olduğundan 2.5.6 Sonuç ile açıktır. □

2.5.8 Teorem (Nielsen-Schreier) : Bir serbest grubun her alt grubu da serbest gruptur [17].□

2.5.9 Tanım : Birim elemandan başka sonlu mertebeli eleman bulundurmayan gruplara *bükümsüzdür* (torsion-free) denir. □

Her serbest grup bükümsüzdür. Tersi her zaman doğru değildir. Örneğin

$G = \langle a, b \mid ab=ba \rangle$

grubu bükümsüzdür, fakat serbest grup değildir.

2.5.1 Direkt Çarpım Grubu

A ve B iki grup olmak üzere direkt çarpım $G = A \times B$ ile gösterilir. Sonuç olarak kartezyen çarpımdan dolayı

$|G| = |A||B|$

dir. Bu grupla ilgili ayrıntılı bilgilere [16, 17] nolu kaynaklardan bakılabilir. Biz direkt çarpımın grup sunuşunu verelim.

2.5.1.1 Teorem : A ve B grupları sırasıyla

$P_A = \langle X \mid R_1^* \rangle$ ve $P_B = \langle Y \mid R_2^* \rangle$

sunuşlarıyla verilsin. Bu iki grubun direkt çarpım grubu olan G nin sunuşu

$$P_G = \langle X, Y \mid R_1^*, R_2^*, R^* \rangle \qquad (2.10)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $R^* = \{xyx^{-1}y^{-1} : x \in X, y \in Y\}$ dir [17].□

2.5.2 Serbest Çarpım Grubu

A ve B herhangi iki grup olmak üzere bu iki grubun serbest çarpım grubunun sunuşu aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

2.5.2.1 Teorem : A ve B grupları sırasıyla

$P_A = < X \mid R_1^* >$ ve $P_B = < Y \mid R_2^* >$

sunuşlarına sahip olsun. Bu durumda A ve B gruplarının serbest çarpımı olan G=A*B grubunun sunuşu,

$$P_G = < X, Y \mid R_1^*, R_2^* > \tag{2.11}$$

şeklinde tanımlanır [17].□

Verilen iki grup için serbest çarpımın sunuşunu verdik. Serbest çarpım grubu keyfi sayıdaki gruplar için de tanımlanabilir :

Eğer $A_\alpha = < \text{ür.} A_\alpha \mid \text{bağ.} A_\alpha >$ gruplarının bir koleksiyonu ise bu grupların $G = {*} A_\alpha$ serbest çarpımı, üreteçleri A_α ların üreteçlerinin ayrık birleşimlerinden ve bağıntıları da A_α ların bağıntılarının ayrık birleşimlerinden oluşan gruptur.

2.5.2.2 Teorem (Kurosh) : G, A_α ların serbest çarpımı yani

$$G = \prod_\alpha {*} A_\alpha$$

olsun. Eğer H, G nin bir alt grubu ise

$$H = F * \prod_i {*} A_i$$

olur. Burada F bir serbest grup ve her bir i için A_i, bir A_α grubuna eşleniktir [18].□

2.5.3 Karışımlı Serbest Çarpım Grubu

A ve B herhangi iki grup olsun. $C \leq A$ alt grubu verilsin. $\phi : C \rightarrow B$ birebir homomorfizması için A ve B gruplarının C alt grubu ile tanımladıkları karışımlı serbest çarpım grubu ile ilgili ayrıntılı bilgilere [16, 17] kaynaklarından ulaşılabilir. Bu grup $G = A *_C B$ ile gösterilir ve sunuşu aşağıdaki gibidir.

2.5.3.1 Teorem : A ve B grupları sırasıyla

$$P_A = \langle X \mid R_1^* \rangle \quad \text{ve} \quad P_B = \langle Y \mid R_2^* \rangle$$

sunuşlarıyla verilsin. $C \leq A$ alt grubunun üreteç kümesi Z olmak üzere $G = A *_C B$ grubunun sunuşu

$$P_G = \langle X, Y \mid R_1^*, R_2^*, \{\phi(z)z^{-1} : z \in Z\} \rangle \tag{2.12}$$

şeklinde tanımlanır [17]. □

2.5.3.2 Örnek : $A = \langle a \mid a^4 = I \rangle$ ve $B = \langle b \mid b^6 = I \rangle$ devirli gruplarını alalım. A ile B nin serbest çarpımı

$$A * B = \langle a, b \mid a^4 = b^6 = I \rangle$$

biçimindedir. $C = \langle a^2 \rangle$ olmak üzere A nın alt grubudur.

$$\begin{aligned} \phi : C &\rightarrow B \\ a^2 &\mapsto b^3 \end{aligned}$$

birebir homomorfizması yardımıyla $A *_C B$ grubunun sunuşu,

$$A *_C B = \langle a, b \mid a^4 = b^6 = \phi(a^2)(a^2)^{-1} = I \rangle$$

bulunur. Bu sunuşun kısaltılmış hali

$$A *_C B = \langle a, b \mid a^4 = I,\ a^2 = b^3 \rangle$$

şeklindedir.

2.6 Reidemeister-Schreier Metodu, Kuvvet Alt Gruplar, Kamutatör Alt Gruplar

Bu bölümde çalışmamızın önemli bir kısmını oluşturan kuvvet alt grupları, kamutatör alt gruplarının tanımları ve ilgili teoremler verilecektir. Hecke ve genişletilmiş Hecke gruplarının kuvvet ve kamutatör alt gruplarının üreteçlerini bulmada kullanılan Reidemeister-Schreier Metodu tanıtılacaktır.

2.6.1 Kuvvet Alt Grupları

Kuvvet alt grupları, m pozitif bir tamsayı olmak üzere G grubunun tüm elemanlarının m. kuvvetleri ile üretilen alt grup olarak tanımlanır ve G^m ile gösterilir.

2.6.1.1 Tanım : G bir grup ve H bu grubun alt grubu olsun. $f : G \to G$ her endomorfizm için $f(H) \subset H$ oluyorsa H ye *tamamen değişmez* (fully invariant) özelliğe sahiptir denir [19]. □

2.6.1.2 Teorem : Kuvvet alt grupları tamamen değişmez özelliğe sahiptirler [18]. □

2.6.1.3 Teorem : G grubunun H alt grubu, tamamen değişmez özelliğe sahipse, G nin normal alt grubudur [18]. □

2.6.1.2 ve 2.6.1.3 teoremlerinden kuvvet alt gruplarının normal alt gruplar olduğu sonucu bulunur. Kuvvet alt gruplarının tanımından, aşağıda vereceğimiz özellikler kolaylıkla görülebilir. G herhangi bir grup, m ve n pozitif tamsayılar olmak üzere kuvvet alt grupları

$$G^m > G^{mn} \tag{2.13}$$

$$(G^m)^n > G^{mn} \tag{2.14}$$

özelliklerine sahiptir.

Hecke ile genişletilmiş Hecke gruplarının kuvvet alt gruplarının üreteçlerini ve grup sunuşlarını elde edebilmek için Reidemeister-Schreier metodundan yararlanacağımızı söylemiştik. Bunun için önce G/G^m bölüm grubunun sunuşu bulunur. G/G^m bölüm grubunun sunuşu, G grubunun sunuşuna her $X \in G$ için $X^m = I$ bağıntısının eklenmesiyle bulunur. Böylece G/G^m bölüm grubunun mertebesi bulunarak indeks elde edilir [2].

2.6.2 Kamutatör Alt Grupları

Bu bölümde kamutatör, kamutatör alt grup kavramları tanıtılacaktır. Ayrıntılı bilgiler [15, 18] nolu kaynaklarda bulunabilir.

2.6.2.1 Tanım : G bir grup olmak üzere $x_1, x_2 \in G$ elemanları için $[x_1, x_2] = x_1^{-1} x_2^{-1} x_1 x_2$ eşitliğine x_1 ile x_2 elemanlarının *kamutatörü* denir. Bunu n elemana genellersek $[x_1, x_2, ..., x_n] = [[x_1, ..., x_{n-1}], x_n]$ olarak bulunur.

G grubunun boş kümeden farklı X_1 ve X_2 alt gruplarını alalım. X_1 ve X_2 alt gruplarının kamutatör alt grubu,

$$[X_1, X_2] = \langle [x_1, x_2] \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2 \rangle \tag{2.15}$$

olarak tanımlanır. $G' = G^{(1)}$ ile gösterilen birinci kamutatör alt grubu ise

$$G' = [G, G] = \langle [A, B] \mid A, B \in G \rangle \tag{2.16}$$

biçiminde tanımlanır. G grubunun kamutatör alt grupları arasında,

$$G = G^{(0)} > G^{(1)} > G^{(2)} > ...$$

şeklinde bir ilişki vardır. Herhangi $G^{(n)}$ kamutatör alt grubu,

$$G^{(n)} = \langle [A, B] \mid A, B \in G^{(n-1)} \rangle \tag{2.17}$$

biçiminde tanımlanır.

Ayrıca kamutatör alt gruplar tamamen değişmez özelliğe de sahiptirler [18]. Kamutatör alt grupların tanımı ve bu özellikten dolayı normal alt grup oldukları açıktır. Kamutatör alt gruplar için çok önemli olan şu iki teoremi verelim:

2.6.2.2 Teorem : G grubunun G' ile bölüm grubu G/G' değişmelidir [15].□

2.6.2.3 Teorem : N, G grubunun normal alt grubu ve G/N değişmeli olsun. O halde G/N bölüm grubu G/G' nün bir alt grubudur [15]. □

2.6.2.4 Sonuç : G/G' bölüm grubu G grubunun en geniş değişmeli bölüm grubudur. □

2.6.2.5 Sonuç : N, G grubunun normal alt grubu ve G/N değişmeli ise G', N nin alt grubudur.

İspat : Bölüm gruplarının özellikleri ve de 2.6.2.3 Teoremden görülür. □

Hecke ve genişletilmiş Hecke grupları için kamutatör alt grupların üreteçlerini ve grup sunuşlarını elde etmek amaçlarımızdan biridir. Bunun için Reidemeister-Schreier metodundan yararlanacağız. Öncelikle G/G' bölüm grubu oluşturulur. Bölüm grubunun sunuşu da G nin bağıntılar kümesine, üreteç kümesinin elemanlarının birbirleriyle değişmelilik bağıntısı eklenmesiyle bulunur [2].

2.6.3 Reidemeister-Schreier Metodu

Bu metod çalışmamızda çok önemli bir yer tutar. Çalıştığımız grupların sonlu indeksli normal alt gruplarının üreteçlerini bularak, grup sunuşlarını bu metod ile belirleyeceğiz.

G, $\{g_i\}$ üreteçleri ile üretilen bir grup ve H, G grubunun sonlu indeksli bir normal alt grubu olsun. Metod önce H için bir Schreier transversali seçmekle ve sonra da bu transversalin, üreteçlerin ve koset gösterimlerinin elemanlarının sıralı çarpımlarının alınmasıyla, aşağıdaki gibi uygulanır.

Bir Σ Schreier transversali aşağıdaki koşulları sağlayan koset gösterimlerinin bir kümesinden oluşur:

(i) $I \in \Sigma$

(ii) Σ sağ sadeleştirme altında kapalıdır. Yani eğer $g_{i_1}.g_{i_2}...g_{i_r} \in \Sigma$ ise $g_{i_1}.g_{i_2}...g_{i_{r-1}}$ elemanı da Σ kümesinde olmalı.

Σ, H için bir Schreier transversali olsun. H nin bir Schreier üreteci aşağıdaki formda olacaktır [2].

(Σ nın bir elemanı)x(G grubunun bir üreteci)x(önceki çarpımın koset gösterimi)$^{-1}$

2.6.3.1 Örnek : D_5 dihedral grubunun $D_5^{\ 2}$ 2. kuvvet alt grubunu bulalım. D_5 grubunun gösterimi

$$D_5 = \langle a, b \mid a^2 = b^5 = (ab)^2 = I \rangle$$

biçimindedir. $D_5^{\ 2}$ kuvvet alt grubu, D_5 grubunun normal alt grubudur ve bölüm grubu,

$$D_5 / D_5^{\ 2} = \langle a, b \mid a^2 = b^5 = (ab)^2 = a^2 = b^2 = (ab)^2 = ... = I \rangle$$

sunuşuna sahiptir. Gerekli kısaltmalar yapılırsa bu sunuş

$$D_5 / D_5^{\ 2} = \langle a \mid a^2 = I \rangle$$

biçiminde yazılabilir. Buradan $D_5^{\ 2}$ alt grubunun D_5 grubundaki indeksinin 2 olduğu kolayca görülür.

$D_5^{\ 2}$ kuvvet alt grubunun üreteçlerini bulmak için bir Schreier transversali olarak

{I, a}

kümesini seçelim. Burada mümkün olan bütün çarpımlar aşağıdaki gibidir:

$I.a.(a)^{-1} = I$, $\qquad$ $I.b.(I)^{-1} = b$,

$a.a.(I)^{-1} = I$, $\qquad$ $a.b.(a)^{-1} = aba$.

Ayrıca $aba = (b)^{-1}$ olarak yazılabilir. O halde $D_5^{\ 2}$ kuvvet alt grubunun sunuşu,

$$D_5^{\ 2} = \langle b \mid b^5 = I \rangle$$

olarak bulunur.

2.7 Cisim Genişlemeleri

Bu bölümde kısaca cisim genişlemelerinden bahsedeceğiz. Bu konuyla ilgili ayrıntılı bilgilere [14, 19] kaynaklarından ulaşılabilir.

2.7.1 Tanım : F cismi, K cisminin alt cismi ise K' ya F' nin *cisim genişlemesi* denir. □

2.7.2 Örnek : R, Q' nun ve **C** ise **R'**nin cisim genişlemesidir. □

2.7.3 Tanım : K, F cisminin bir genişlemesi ve $\alpha \in K$ olsun. K' nın F'yi ve α 'yı bulunduran en küçük alt cismini $F(\alpha)$ ile gösterelim. $F(\alpha)$ cismine α 'nın F cismine ilavesi ile elde edilmiş F cisminin *basit genişlemesi* denir. □

K' nın bütün alt cisimlerinin arakesiti bir alt cisim olacağından en küçük alt cisim vardır. $F(\alpha)$ K'nın, F ve α 'yı içeren tüm alt cisimlerin arakesitidir.

2.7.4 Örnek : D, kök dışına çıkamayan pozitif bir tamsayı olmak üzere $\mathbf{Q}(\sqrt{D})$ cismi, **R**'nin

$$F=\{\ a+b\sqrt{D} : a,b \in \mathbf{Q}\ \}$$

alt cismine eşittir.

$\mathbf{Q}(\sqrt{D})$ üzerindeki işlemler aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$(a+b\sqrt{D}) \pm (c+d\sqrt{D}) = (a \pm c)+(b \pm d)\sqrt{D}\ ,$$

$$(a+b\sqrt{D})(c+d\sqrt{D}) = (ac+bdD)+(ad+bc)\sqrt{D}\ .$$

2.7.5 Tanım : R' yi (bir alt cisim olarak) ve i' yi ($i^2 = -1$) bulunduran en küçük cisme *kompleks sayılar cismi* denir. □

2.7.6 Teorem : a, $b \in \mathbf{R}$ olmak üzere kompleks sayılar cisminin herhangi bir elemanı, a+ib olarak tek bir şekilde ifade edilebilir [14]. □

2.7.7 Tanım : F bir cisim, K'da F'nin bir genişlemesi ve $k \in K$ olsun. $a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + ... + a_1 k + a_0 = 0$

olacak biçimde hepsi birden sıfır olmayan $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 \in F$ elemanları varsa k elemanına F üzerinde *cebirseldir* denir. Bir başka deyişle k, F[x] de sıfırdan farklı bir polinomun kökü olmalıdır. □

Örneğin 2, $\sqrt{7}$, i, $\sqrt[n]{2} + 7$ sayıları **Q** üzerinde cebirseldir. Bu sayılar sırasıyla, x-2, $x^2 - 7$, $x^2 + 1$ ve $(x - 7)^n - 2$ polinomlarının kökleridir.

2.8 Sürekli Kesirler

Sürekli kesirlerle ilgili bazı tanım ve teoremler, bu bölümde verilmiştir. Sürekli kesirlerle ilgili ayrıntılı bilgiler [20, 21] nolu kaynaklarda bulunabilir.

2.8.1 Tanım : x reel sayısı için,

$$x = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + ...}}}$$

eşitliğine x sayısının, *sürekli kesri* denir. Burada $a_0, a_1, ...$ ile $b_0, b_1, ...$ sayıları birer tamsayıdırlar. □

Çalışmalarda daha çok kullanılan basit sürekli kesiri tanımlayalım. Çoğu kaynakta basit sürekli kesir yerine sürekli kesir tanımı kullanılmaktadır.

2.8.2 Tanım : x reel sayısının,

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + ...}}}$$

eşitine x' in *basit sürekli kesri* denir. □

Bu eşitlikte a_0 bir tamsayı (x sayısının tam değeri), $a_1, a_2, \ldots$ sayıları ise birer pozitif tamsayıdır. Bu sürekli kesir $x=[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ sembolü ile de gösterilir.

Ayrıca

$$[a_0;a_1,a_2,\ldots]=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ldots}}}$$

sonsuz sürekli kesirdir ve

$$[a_0;a_1,a_2,\ldots,a_n]=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\ldots+\cfrac{1}{a_n}}}$$

sonlu sürekli kesirdir. Bu sonlu ve sonsuz kesirlerle ilgili aşağıdaki teoremi verelim.

2.8.3 Teorem : Bir x sayısı rasyoneldir ancak ve ancak sonlu sürekli kesire sahiptir [20].□

Aşağıda rasyonel ve rasyonel olmayan bazı sayıların sürekli kesirleri verilmiştir.

2.8.4 Örnek :

$$\frac{21}{13}=1+\frac{8}{13}=1+\cfrac{1}{\cfrac{13}{8}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{5}{8}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{8}{5}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{3}{5}}}$$

$$=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{5}{3}}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{3}}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{3}{2}}}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}}$$

olarak bulunur. Yani $\frac{21}{13}=[1;\ 1,1,1,1,2]$ dir.

2.8.5 Örnek :

$$-\frac{86}{31}=-3+\frac{7}{31}=-3+\cfrac{1}{\cfrac{31}{7}}=-3+\cfrac{1}{4+\cfrac{3}{7}}=-3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\cfrac{7}{3}}}=-3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}}$$

O halde $-\frac{86}{31}=[-3;4,2,3]$ olur.

2.8.6 Örnek : Sürekli kesir gösterimi [2; 2, 1, 1, 3] olan sayıyı bulalım.

$$2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}}=\frac{43}{18}$$

olarak hesaplanır.

2.8.7 Örnek : $\sqrt{3}$ sayısının sürekli kesrini bulalım.

$$\sqrt{3}=1+(\sqrt{3}-1)=1+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{3}+1}{2}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{\sqrt{3}-1}{2}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{2}{\sqrt{3}-1}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\sqrt{3}+1}}$$

$$=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\sqrt{3}-1}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{3}-1}}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{3}+1}{2}}}}$$

$=\ldots=[1;1,2,1,2,\ldots]$

Dikkat edilirse 1, 2 sayıları sürekli olarak devretmektedir. Bu tür özel sürekli kesirlere *periyodik sürekli kesirler* denir.

2.8.8 Örnek : Altın oranın sürekli kesrini bulalım.

$\left[\left|\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right|\right]=1$ olduğu dikkate alınırsa,

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}=1+\frac{1}{\frac{2}{\sqrt{5}-1}}=1+\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\ldots}}$$

$=\ldots=[1;\ 1,\ 1,\ 1,\ \ldots]=[1;\ \overline{1}\,]$

olarak hesaplanır.

3. $H(\lambda_q)$ HECKE GRUPLARININ KUVVET ALT GRUPLARI VE SİMGELERİ

Bu bölümde amaç, q çift sayı (q = 4, 6, 8, ...) ve m pozitif tamsayı olmak üzere, $H(\lambda_q)$ Hecke gruplarının $H^m(\lambda_q)$ kuvvet alt gruplarının grup yapısını belirleyerek, bu alt grupların simgelerini bulmaktır. Burada $H^m(\lambda_q)$ kuvvet alt gruplarının grup yapısı ve üreteçleri, Reidemeister-Schreier yöntemi ile bulunmuş ve permütasyon metodu ile Riemann-Hurwitz formülü kullanılarak, bu grupların simgeleri ve cinsleri elde edilmiştir. Özel olarak q=4 ve q=6 için elde edilen $H(\sqrt{2})$ ve $H(\sqrt{3})$ gruplarının kuvvet alt grupları [2] nolu kaynakta ayrıntılı olarak çalışılmıştır. Ayrıca bu bölümdeki sonuçlar [22] nolu kaynakta bulunabilir.

3.1 $H(\lambda_q)$ Hecke Grupları

2.2 bölümde tanıtılan ve $\lambda = \lambda_q = 2\,\mathrm{Cos}\dfrac{\pi}{q}$, (q=3, 4, 5, ...) için elde edilen $H(\lambda_q)$ Hecke gruplarından, özel olarak q çift sayı (q=4, 6, 8,...) değerleriyle bulunan $H(\lambda_q)$ Hecke gruplarıyla ilgileneceğiz.

$H(\lambda_q)$ Hecke gruplarının üreteçleri,

$$T(z) = -\frac{1}{z} \text{ ve } S(z) = -\frac{1}{z+\lambda_q}$$

olmak üzere sırasıyla 2 ile q mertebeli eliptik elemanlardır.

$H(\lambda_q)$ Hecke grupları, 2.2.4 Teoremde belirtildiği gibi

$$H(\lambda_q) = \langle T, S \mid T^2 = S^q = I \rangle \cong C_2 * C_q \tag{3.1}$$

sunuşuna sahiptir (2 mertebeli devirli grup ile q mertebeli devirli grubun serbest çarpımıdır). $H(\lambda_q)$ Hecke grupları $(2, q, \infty)$ şeklinde üçgen gruplardır. Ayrıca $H(\lambda_q)$ Hecke grupları $(0; 2, q, \infty)$ simgesine sahiptirler [2].

3.2 $H(\lambda_q)$ Hecke Gruplarının Kuvvet Alt Grupları

$H(\lambda_q)$ Hecke gruplarının, $H^m(\lambda_q)$ kuvvet alt grupları q=3 için M. Newman tarafından [3, 4], $q\geq3$ asal sayılar için Cangül ve Singerman tarafından [23] ve n tam kare olmayan pozitif bir tamsayı olmak üzere $H(\sqrt{n})$ Hecke gruplarının $H^m(\sqrt{n})$ kuvvet alt grupları Cangül ile Özgür tarafından [24] de çalışılmıştır. [25] nolu çalışmada q tek tamsayıları için kuvvet alt grupları ile ilgili sonuçlar verilmiştir.

Ayrıca M. Sheingorn ve T. Schmidt, $H(\lambda_q)$ Hecke gruplarının kuvvet alt gruplarının, M. Newman'ın modüler grubun kuvvet alt grupları için verdiği sonuçların bir genellemesi olduğunu [26, 27, 28] çalışmalarında göstermişlerdir.

Çalışmanın bu kısmında, q çift tamsayı (q = 4, 6, 8, ...) ve m pozitif tamsayı olmak üzere, $H(\lambda_q)$ Hecke gruplarının $H^m(\lambda_q)$ kuvvet alt gruplarının grup sunuşları, bu alt grupların simgeleri ve bunlarla ilgili teorem, sonuç ve örnekleri vereceğiz. Önce m=2 durumu ile başlayalım.

3.2.1 Teorem: q>3 çift tamsayı olsun. $H(\lambda_q)$ Hecke gruplarının $H^2(\lambda_q)$ kuvvet alt grubu, q/2 mertebeli, iki devirli grup ile sonsuz mertebeli devirli bir grubun serbest çarpımıdır. Grup sunuşu

$$H^2(\lambda_q) = \langle S^2, TS^2T, TSTS^{q-1} \mid (S^2)^{q/2} = (TS^2T)^{q/2} = (TSTS^{q-1})^{\infty} = I \rangle$$

ve simgesi de

$$(0; (q/2)^{(2)}, \infty^{(2)})$$

biçimindedir.

İspat : Öncelikle $H(\lambda_q)/H^2(\lambda_q)$ bölüm grubunu oluşturalım. Bunun için (3.1) grup sunuşunda, $H(\lambda_q)$ grubunun tüm elemanlarının 2. kuvvetleri birim elemana eşitlenirse

$$H(\lambda_q)/H^2(\lambda_q) = \langle T,S \mid T^2 = S^q = T^2 = S^2 = (TS)^2 = \ldots = I \rangle$$

elde edilir.

Bu bölüm grubunda gerekli kısaltmalar yapılırsa

$$H(\lambda_q)/H^2(\lambda_q) = \langle T,S \mid T^2 = S^2 = (TS)^2 = I \rangle \cong C_2 \times C_2 \cong D_2$$

sonlu grubu bulunur. Kuvvet alt grubunun üreteçlerini bulmada kullanacağımız Reidemeister- Schreier metodu için {I, T, S, TS} transversalini seçelim. Buradan,

$I.\,T.\,(T)^{-1}=I,$	$I.\,S.\,(S)^{-1}=I,$
$T.\,T.\,(I)^{-1}=I,$	$T.\,S.\,(TS)^{-1}=I,$
$S.\,T.\,(TS)^{-1}=STS^{-1}T,$	$S.\,S.\,(I)^{-1}=S^2,$
$TS.\,T.\,(S)^{-1}=TSTS^{-1},$	$TS.S.\,(T)^{-1}=TS^2T$

bulunur. Dikkat edilirse $(STS^{-1}T)^{-1}=TSTS^{-1}$ eşitliği vardır. Böylelikle $H^2(\lambda_q)$ kuvvet alt grubunun üreteçleri S^2, TS^2T, $TSTS^{q-1}$ olarak bulunur. Bu üreteçlerden yararlanarak grubun sunuşu

$$H^2(\lambda_q) = \langle S^2, TS^2T, TSTS^{q-1} \mid (S^2)^{q/2} = (TS^2T)^{q/2} = (TSTS^{q-1})^{\infty} = I \rangle$$

olarak bulunur. Aynı zamanda

$$H(\lambda_q) = H^2(\lambda_q) \cup T.H^2(\lambda_q) \cup S.H^2(\lambda_q) \cup TS.H^2(\lambda_q)$$

eşitliği de kolaylıkla görülür.

Şimdi bu alt grubun simgesini bulalım.

$$H(\lambda_q) = \langle T,S \mid T^2 = S^q = I \rangle \cong (2, q, \infty)\ ,$$

$$H(\lambda_q)/H^2(\lambda_q) = \langle T,S \mid T^2 = S^2 = (TS)^2 = I \rangle \cong (2,2,2),$$

$$|H(\lambda_q)/H^2(\lambda_q)| = 4$$

olduklarından permütasyon metodundan faydalanarak $H^2(\lambda_q)$ alt grubunun simgesi $(g;\ (q/2)^{(2)}, \infty^{(2)})$ olarak bulunur. Burada bilinmeyen g cinsini bulmak için Riemann-Hurwitz formülünü kullanalım.

$$\left|H(\lambda_q)/H^2(\lambda_q)\right| = \frac{\mu(H^2(\lambda_q))}{\mu(H(\lambda_q))},$$

$$4 = \frac{2g - 2 + (1 - \frac{2}{q}) + (1 - \frac{2}{q}) + 2}{(2.0 - 2) + (1 - \frac{1}{2}) + (1 - \frac{1}{q}) + 1}$$

buradan da g=0 elde edilir ve $H^2(\lambda_q)$ alt grubunun simgesi,

$$(0;\ (q/2)^{(2)}, \infty^{(2)})$$

bulunur. □

3.2.2 Teorem : q>3 bir çift tamsayı ve m, (m,q)=2 olmak üzere bir pozitif tamsayı olsun. $H^m(\lambda_q)$ kuvvet alt grubu, m tane q/2 mertebeli devirli grup ile sonsuz mertebeli bir devirli grubun serbest çarpımıdır. Bununla beraber,

$$H(\lambda_q)/H^m(\lambda_q) \cong D_m,$$

$$H(\lambda_q) = H^m(\lambda_q) \cup T.H^m(\lambda_q) \cup TS.H^m(\lambda_q) \cup TST.H^m(\lambda_q)$$

$$\cup \ldots \cup \underbrace{(TS)(TS)\ldots(TS)}_{m/2\ \text{kez}}.H^m(\lambda_q) \cup S.H^m(\lambda_q) \cup ST.H^m(\lambda_q) \cup STS.H^m(\lambda_q)$$

$$\cup \ldots \cup \underbrace{(ST)(ST)\ldots(ST)}_{(m/2)-1\ \text{kez}} S.H^m(\lambda_q)$$

ve

$$H^m(\lambda_q) = <\underbrace{(TS)(TS)\ldots(TS)}_{m/2\ \text{kez}} T \underbrace{(S^{-1}T)(S^{-1}T)\ldots(S^{-1}T)}_{(m/2)-1\text{kez}} S^{-1}> * <S^2> * <TS^2T>$$

$$* <STS^2TS^{-1}> * \ldots * < \underbrace{(ST)(ST)\ldots(ST)}_{(m/2)-1\ \text{kez}} S^2 \underbrace{(TS^{-1})(TS^{-1})\ldots(TS^{-1})}_{(m/2)-1\ \text{kez}} >$$

$$* < \underbrace{(TS)(TS)\ldots(TS)}_{(m/2)-1\text{kez}} TS^2 \underbrace{(TS^{-1})(TS^{-1})\ldots(TS^{-1})}_{(m/2)-1\ \text{kez}} T >$$

biçimindedir. Bu kuvvet alt grubun simgesi de

$$(0;\ (q/2)^{(m)}, \infty^{(2)})$$

olarak bulunur.

İspat : m. kuvvet alt grubunu oluştururken ilk olarak $H(\lambda_q)/H^m(\lambda_q)$ bölüm grubunu elde edelim. (3.1) de verilen grup sunuşunda, $H(\lambda_q)$ grubunun tüm elemanlarının m. kuvvetlerini birim elemana eşitler ve bunları sadeleştirirsek,

$$H(\lambda_q)/H^m(\lambda_q) = \langle T,S \mid T^2 = S^2 = (TS)^m = I \rangle \cong D_m$$

sonlu dihedral grubu elde edilir. Dikkat edilirse $\left|H(\lambda_q)/H^m(\lambda_q)\right|$=2m dir. İkinci olarak Schreier transversalini

$$\{I, T, TS, TST, TSTS, \ldots, \underbrace{(TS)(TS)\ldots(TS)}_{m/2 \text{ kez}}, S, ST, STS, STST, \ldots,$$

$$\underbrace{(ST)(ST)\ldots(ST)}_{(m/2)-1 \text{ kez}}S\ \}$$

seçelim. Buradaki bütün çarpmalar aşağıdaki şekilde oluşacaktır:

$I.T.(T)^{-1} = I,$

$T.T.(I)^{-1} = I,$

$TS.T.(TST)^{-1} = I,$

$TST.T.(TS)^{-1} = I,$

$TSTS.T.(TSTST)^{-1} = I,$

.

.

.

$$\underbrace{(TS)(TS)\ldots(TS)}_{m/2 \text{ kez}}.T.\ (\underbrace{(ST)(ST)\ldots(ST)}_{(m/2)-1 \text{ kez}}S)^{-1} = \underbrace{(TS)(TS)\ldots(TS)}_{m/2 \text{ kez}}\ T\underbrace{(S^{-1}T)(S^{-1}T)\ldots(S^{-1}T)}_{(m/2)-1 \text{ kez}}S^{-1},$$

$S.T.(ST)^{-1} = I,$

$ST.T.(S)^{-1} = I,$

$STS.T.(STST)^{-1} = I,$

.

.

.

$$\underbrace{(ST)(ST)\ldots(ST)}_{(m/2)-1 \text{ kez}}S.T.\ (\underbrace{(TS)(TS)\ldots(TS)}_{m/2 \text{ kez}})^{-1} = \underbrace{(TS)(TS)\ldots(TS)}_{m/2 \text{ kez}}\ T\underbrace{(S^{-1}T)(S^{-1}T)\ldots(S^{-1}T)}_{(m/2)-1 \text{ kez}}S^{-1},$$

$I.S.(S)^{-1} = I,$

$T.S.(TS)^{-1} = I,$

$TS.S.(T)^{-1} = TS^2T,$

$TST.S.(TSTS)^{-1} = I,$

$TSTS.S.(TST)^{-1} = TSTS^2TS^{-1}T,$

.

.

.

$$\underbrace{(TS)(TS)...(TS)}_{m/2\ kez} S.((\underbrace{(TS)(TS)...(TS)}_{(m/2)-1\ kez} T)^{-1} = \underbrace{(TS)(TS)...(TS)}_{(m/2)-1\ kez} TS^2 \underbrace{(TS^{-1})(TS^{-1})...(TS^{-1})}_{(m/2)-1\ kez} T,$$

$S.S.(I)^{-1} = S^2,$

$ST.S.(STS)^{-1} = I,$

$STS.T.(ST)^{-1} = STS^2TS^{-1},$

.

.

.

$$\underbrace{(ST)(ST)...(ST)}_{(m/2)-1\ kez} S.S.(\underbrace{(ST)(ST)...(ST)}_{(m/2)-1\ kez})^{-1} = \underbrace{(ST)(ST)...(ST)}_{(m/2)-1\ kez} S^2 \underbrace{(TS^{-1})(TS^{-1})...(TS^{-1})}_{(m/2)-1\ kez}.$$

Buradan da $H^m(\lambda_q)$ kuvvet alt grubunun üreteçleri,

$$\underbrace{(TS)(TS)...(TS)}_{m/2\ kez} T \underbrace{(S^{-1}T)(S^{-1}T)...(S^{-1}T)}_{(m/2)-1\ kez} S^{-1},\ S^2,$$

$$TS^2T,\ STS^2TS^{-1}, ...,\ \underbrace{(ST)(ST)...(ST)}_{(m/2)-1\ kez} S^2 \underbrace{(TS^{-1})(TS^{-1})...(TS^{-1})}_{(m/2)-1\ kez},$$

$$\underbrace{(TS)(TS)...(TS)}_{(m/2)-1\ kez} TS^2 \underbrace{(TS^{-1})(TS^{-1})...(TS^{-1})}_{(m/2)-1\ kez} T$$

biçimindedir. Böylece,

$$H^m(\lambda_q) = <\underbrace{(TS)(TS)...(TS)}_{m/2\ kez} T \underbrace{(S^{-1}T)(S^{-1}T)...(S^{-1}T)}_{(m/2)-1 kez} S^{-1}> * <S^2> * <TS^2T> *$$

$$<STS^2TS^{-1}> * \ldots * < \underbrace{(ST)(ST)...(ST)}_{(m/2)-1\ kez} S^2 \underbrace{(TS^{-1})(TS^{-1})...(TS^{-1})}_{(m/2)-1\ kez} >$$

$$* < \underbrace{(TS)(TS)...(TS)}_{(m/2)-1 kez} TS^2 \underbrace{(TS^{-1})(TS^{-1})...(TS^{-1})}_{(m/2)-1\ kez} T>$$

grup sunuşu elde edilir. Bu alt grubun simgesini bulalım.

$$H(\lambda_q) = < T,S \mid T^2 = S^q = I > \cong (2, q, \infty) ,$$

$$H(\lambda_q)/H^m(\lambda_q) = < T,S \mid T^2 = S^2 = (TS)^m = I > \cong (2,2,m) ,$$

$$|H(\lambda_q)/H^m(\lambda_q)| = 2m$$

olduklarından permütasyon metodunu kullanarak, $H^m(\lambda_q)$ alt grubunun simgesi $(g;\ (q/2)^{(m)}, \infty^{(2)})$ şeklindedir. Buradaki g cinsini de Riemann-Hurwitz formülünden bulalım:

$$|H(\lambda_q)/H^m(\lambda_q)| = \frac{\mu(H^m(\lambda_q))}{\mu(H(\lambda_q))} ,$$

$$2m = \frac{2g - 2 + m.(1 - \frac{2}{q}) + 2}{(2.0 - 2) + (1 - \frac{1}{2}) + (1 - \frac{1}{q}) + 1}$$

buradan da g=0 elde edilir ve $H^m(\lambda_q)$ alt grubunun simgesi,

$$(0;\ (q/2)^{(m)}, \infty^{(2)})$$

olarak bulunur. □

3.2.3 Teorem : q>3 çift tamsayı ve m, (m,2)=1 ile (m,q)=d olacak biçimde bir pozitif tamsayı olsun. Bu durumda $H^m(\lambda_q)$ kuvvet alt grubu, d tane 2 mertebeli devirli grup ile q/d mertebeli devirli bir grubun serbest çarpımıdır. Grup sunuşu,

$$H^m(\lambda_q) = <T> * <STS^{q-1}> * <S^2TS^{q-2}> * \ldots * <S^{d-1}TS^{q-d+1}> * <S^d>,$$

ve grubun simgesi

$$(0;\ 2^{(d)}, q/d, \infty)$$

şeklindedir.

İspat : (m,2)=1 ile (m,q)=d olduğunu kullanarak bölüm grubunu

$$H(\lambda_q)/H^m(\lambda_q) = < S \mid S^d = I > \cong C_d$$

olarak buluruz. Bölüm grubunun mertebesinin $|H(\lambda_q)/H^m(\lambda_q)| = d$ olduğu açıktır. Schreier transversalini $\{I, S, S^2, \ldots, S^{d-1}\}$ biçiminde seçelim. Reidemeister-Schreier metoduyla bulacağımız üreteçler için yapılan çarpımlar aşağıdaki gibidir:

$$I.T.(I)^{-1} = T, \qquad I.S.(S)^{-1} = I,$$
$$S.T.(S)^{-1} = STS^{q-1}, \qquad S.S.(S^2)^{-1} = I,$$
$$S^2.T.(S^2)^{-1} = S^2TS^{q-2}, \qquad S^2.S.(S^3)^{-1} = I,$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$S^{d-1}.T.(S^{d-1})^{-1} = S^{d-1}TS^{q-d+1} \qquad S^{d-1}.S.(I)^{-1} = S^d.$$

Böylelikle T, $S^d, STS^{q-1}, S^2TS^{q-2}, ..., S^{d-1}TS^{q-d+1}$ elemanları üreteç kümesini oluşturur ve de

$$H^m(\lambda_q) = \langle T\rangle * \langle STS^{q-1}\rangle * \langle S^2TS^{q-2}\rangle * \ldots * \langle S^{d-1}TS^{q-d+1}\rangle * \langle S^d\rangle$$

sunuşu yazılabilir. Ayrıca,

$$H(\lambda_q) = H^m(\lambda_q) \cup S.H^m(\lambda_q) \cup S^2.H^m(\lambda_q) \cup \ldots \cup S^{d-1}.H^m(\lambda_q)$$

eşitliği de vardır. Son olarak bu alt grubun simgesini belirleyelim:

$$H(\lambda_q) = \langle T, S \mid T^2 = S^q = I\rangle \cong (2, q, \infty),$$

$$H(\lambda_q)/H^m(\lambda_q) = \langle S \mid S^d = I\rangle \cong (1, d, d),$$

$$|H(\lambda_q)/H^m(\lambda_q)| = d$$

bilgilerini ve de permütasyon metodunu kullanarak $H^m(\lambda_q)$ alt grubunun simgesi $(g;\ 2^{(d)},\ q/d\ , \infty)$ şeklindedir. Şimdi de g cinsini Riemann-Hurwitz formülü ile bulalım:

$$|H(\lambda_q)/H^m(\lambda_q)| = \frac{\mu(H^m(\lambda_q))}{\mu(H(\lambda_q))}$$

$$d = \frac{2g-2+d.(1-\frac{1}{2})+(1-\frac{d}{q})+1}{(2.0-2)+(1-\frac{1}{2})+(1-\frac{1}{q})+1}$$

eşitliğinden g=0 elde edilir ve $H^m(\lambda_q)$ alt grubunun simgesinin,

$$(0;\ 2^{(d)},\ q/d\ , \infty)$$

olduğu görülür. □

3.2.4 Sonuç : Eğer 3.2.3 Teoremdeki d=1 ise,

$$H^m(\lambda_q) = H(\lambda_q)$$

eşitliği vardır. □

Son olarak (m,2)=2 ve (m,q)=d >2 şartlarını sağlayan q>3 çift tamsayısı ile m pozitif tamsayını ele alalım. Burada $H(\lambda_q)/H^m(\lambda_q)$ bölüm grubunun sunuşu

$$H(\lambda_q)/H^m(\lambda_q) \cong \langle T,S \mid T^2 = S^d = (TS)^m = I \rangle$$

olacaktır. $\frac{1}{2}+\frac{1}{d}+\frac{1}{m} \leq 1$ olduğundan bu bölüm grubu sonsuz elemanlıdır. Dolayısıyla $H^m(\lambda_q)$ kuvvet alt grubunun sunuşunu ve simgesini hesaplayamayız.

Verilen bu teoremlerin uygulaması olarak aşağıdaki örneği inceleyelim.

3.2.5 Örnek : q=10 için elde edilen $H(\lambda_{10})$ Hecke grubunu ele alalım ve farklı durumlardaki kuvvet alt gruplarını bulalım.

i) Eğer (m,10)=1 ise

$$H^m(\lambda_{10}) = H(\lambda_{10})$$

olduğu $H(\lambda_{10})/H^m(\lambda_{10})$ bölüm grubundaki bağıntılardan kolaylıkla görülür.

ii) (m,10)=5 olsun. O halde

$$H(\lambda_{10})/H^m(\lambda_{10}) \cong \langle S \mid S^5 = I \rangle \cong C_5$$

elde edilir. Burada {I, S, S^2, S^3, S^4} Schreier transversali seçilerek, Reidemeister-Schreier metodu ile $H^m(\lambda_{10})$ kuvvet alt grubunun sunuşu

$$H^m(\lambda_{10}) \cong \langle T \rangle * \langle STS^9 \rangle * \langle S^2TS^8 \rangle * \langle S^3TS^7 \rangle * \langle S^4TS^6 \rangle * \langle S^5 \rangle$$

olarak bulunur. Bu grubun simgesi de permütasyon metodu ve Riemann-Hurwitz formülü ile

$$(0; 2^{(5)}, 2, \infty) = (0; 2^{(6)}, \infty)$$

yazılır.

iii) (m,10)=2 verilsin.

$$H(\lambda_{10})/H^m(\lambda_{10}) \cong <T,S \mid T^2=S^2=(TS)^m=I> \cong D_m$$

kolayca görülür. Schereier tranversalini $\{I,\ T,\ TS,\ TST,\ TSTS,\ldots,\ \underbrace{(TS)(TS)\ldots(TS)}_{m/2\ kez},S,ST,STS,\ldots,\underbrace{(ST)(ST)\ldots(ST)}_{(m/2)-1\ kez}S\}$ olarak seçip, Reidemeister-Schreier metodundan

$$H^m(\lambda_{10}) = <\underbrace{(TS)(TS)\ldots(TS)}_{m/2\ kez}T\underbrace{(S^9T)(S^9T)\ldots(S^9T)}_{(m/2)-1kez}S^9>*<S^2>*<TS^2T>$$

$$*<STS^2TS^9>*\ldots*<\underbrace{(ST)(ST)\ldots(ST)}_{(m/2)-1kez}S^2\underbrace{(TS^9)(TS^9)\ldots(TS^9)}_{(m/2)-1\ kez}>$$

$$*<\underbrace{(TS)(TS)\ldots(TS)}_{(m/2)-1kez}TS^2\underbrace{(TS^9)(TS^9)\ldots(TS^9)}_{(m/2)-1\ kez}T>$$

sunuşu elde edilir. $H^m(\lambda_{10})$ alt grubunun simgesi de

$$(0;5^{(m)},\infty^{(2)})$$

bulunur.

iv) Son olarak (m,10)=10 olabilir. Yani m=10.k (k=1,2,...) şeklindedir. Elde edeceğimiz bölüm grubunun sonsuz elemanlı olmasından dolayı $H^m(\lambda_{10})$ alt grubunun sunuşunu ve simgesini bu yöntemlerle elde edemeyiz.

4. $H(\lambda)$ HECKE GRUPLARININ NORMAL ALT GRUPLARI

Bu bölümde $\lambda \geq 2$ değerleri için elde edilen $H(\lambda)$ Hecke gruplarının, $H_ç(\lambda)$ çift alt grubunun, $H^m(\lambda)$ kuvvet alt gruplarının sunuşlarını ve simgelerini elde ettik. Bunların arasındaki ilişkilerin yanında g=0 cinsli, sonlu indeksli normal alt gruplarını ve de serbest normal alt gruplarını inceledik. $H(\sqrt{2})$ ve $H(\sqrt{5})$ Hecke gruplarının, çift alt grupları, 0 cinsli normal alt grupları ve serbest alt grupları [29] ve [30] nolu makalelerde çalışılmıştır. $H(\lambda)$ Hecke gruplarının grup yapısı, temel bölgeleri ve parabolik noktalarının yapısı, [9] da Cangül ve Özgür tarafından verilmiştir. Ayrıca [31], [32] nolu makalelerde de $H(\lambda)$ Hecke grupları ve onun normal alt grupları çalışılmıştır. Tezin bu bölümünde $\lambda = \sqrt{2}$ ve $\lambda = \sqrt{5}$ özel değerleri için [29] ve [30] da bulunan sonuçlar tüm $\lambda \geq 2$ değerleri için elde edilmiş ve bir genelleme yapılmıştır. Ayrıca bu bölümde bulunan sonuçlar [33] nolu çalışmada toplanmıştır.

4.1 $H(\lambda)$ Hecke Grupları

2.2 bölümde tanıtılan ve özel olarak $\lambda \geq 2$ sabit sayıları için elde edilen $H(\lambda)$ Hecke gruplarıyla ilgileneceğiz.

Dikkat edilirse $H(\lambda)$ Hecke gruplarının üreteçleri

$$T(z) = -\frac{1}{z} \quad \text{ve de} \quad S(z) = -\frac{1}{z+\lambda}$$

dönüşümleridir. Burada T dönüşümü 2 mertebeli eliptik elemandır. $\lambda = 2$ için S dönüşümü parabolik, $\lambda > 2$ durumunda ise hiperbolik sınır elemanıdır.

2.2.5 Teoremde $H(\lambda)$ Hecke gruplarının,

$$H(\lambda) = \langle T, S \mid T^2 = S^\infty = I \rangle \cong C_2 * C_\infty$$

sunuşuna sahip olduğunu söylemiştik (2 mertebeli devirli grup ile sonsuz mertebeli devirli grubun serbest çarpımıdır) [9]. Ayrıca $H(\lambda)$ Hecke grupları $(2, \infty, \infty)$ şeklinde üçgen gruplardır.

4.1.1 Teorem : $H(\lambda)$ Hecke grupları, $\lambda > 2$ durumu için $(0;\ 2,\infty;1)$ ve de $\lambda = 2$ durumunda $(0;\ 2,\infty^{(2)})$ simgelerine sahiptirler [32]. □

4.2. H(λ) Hecke Gruplarının Çift Alt Grubu

$H(\lambda)$ Hecke gruplarının normal alt grubu olan çift alt grubun yapısından kısaca bahsedelim. $H(\lambda)$ Hecke gruplarının elemanları aşağıdaki gibi iki gruba ayrılabilir:

$$\textbf{(i)} \quad \begin{pmatrix} a & b\lambda \\ c\lambda & d \end{pmatrix}, \quad ad\text{-}bc\lambda^2=1,$$

$$\textbf{(ii)} \quad \begin{pmatrix} a\lambda & b \\ c & d\lambda \end{pmatrix}, \quad ad\lambda^2\text{-}bc=1.$$

Burada a,b,c,d birer tamsayıdır. Yukarıda belirtilen (i) tipindeki elemanlar çift, (ii) tipindekiler ise tek olarak adlandırılır. Çarpma işlemleri yapıldığında,

tek.tek=çift.çift=çift,

tek.çift=çift.tek=tek

olduğu kolayca görülebilir. Çift alt grup, $H(\lambda)$ Hecke grubunun 2 indeksli normal alt grubudur ve $H_ç(\lambda)$ ile gösterilir. Ayrıca bu alt grubu

$$H_ç(\lambda) = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b\lambda \\ c\lambda & d \end{pmatrix} : M \in H(\lambda) \right\}$$

şeklinde gösterebiliriz. Tek elemanların kümesi de

$$H_t(\lambda) = \left\{ N = \begin{pmatrix} a\lambda & b \\ c & d\lambda \end{pmatrix} : N \in H(\lambda) \right\}$$

biçimindedir.

4.2.1 Teorem: $H_ç(\lambda)$ çift alt grup, $H(\lambda)$ Hecke Grubunun 2 indeksli normal alt grubudur ve

$$H(\lambda) = H_ç(\lambda) \cup T.H_ç(\lambda)$$

eşitliği vardır. Ayrıca

$$H_ç(\lambda) \cong \langle TS \rangle * \langle ST \rangle$$

olacak şekilde sonsuz mertebeli iki devirli grubun serbest çarpımıdır.

İspat: İlk olarak $\lambda > 2$ durumunu inceleyelim:

Çift ve tek elemanlardan oluşan $H(\lambda)$ grubu için $H_ç(\lambda)$ alt grubunun indeksinin 2 olduğu kolayca görülür. Buradan $H(\lambda)/H_ç(\lambda)$ bölüm grubu oluşturulabilir ve bu grubun eleman sayısı 2 dir. Sonlu olan bu bölüm grubu için { I, T } Schreier transversali seçilip, Reidemeister-Schreier metodu uygulandığında

$$I.T.(T)^{-1}=I$$
$$T.T.(I)^{-1}=I$$
$$I.S.(T)^{-1}=ST$$
$$T.S.(I)^{-1}=TS$$

elde edilir ki

$$H_ç(\lambda) \cong \langle TS \rangle * \langle ST \rangle$$

sunuşu bulunur. Ayrıca,

$$H(\lambda) = < T, S \,|\, T^2 = S^{\infty} = I > \cong (2, \infty, \infty),$$

$$H(\lambda)/H_ç(\lambda) = < T \,|\, T^2 = I > \cong (2, 1, 2),$$

$$|H(\lambda)/H_ç(\lambda)| = 2$$

olduklarından ve permütasyon metodunu kullanarak $H_ç(\lambda)$ alt grubunun simgesi $(g;\ \infty^{(2)};1)$ şeklinde bulunur. Buradaki g cinsini de Riemann-Hurwitz formülünden bulalım.

$$|H(\lambda)/H_ç(\lambda)| = \frac{\mu(H_ç(\lambda))}{\mu(H(\lambda))},$$

$$2 = \frac{2g-2+2+1}{(2.0-2)+(1-\frac{1}{2})+1+1}$$

buradan da g=0 elde edilir ve $H_ç(\lambda)$ alt grubunun simgesi,

$$(0;\ \infty^{(2)};1)$$

olarak bulunur.

Benzer olarak $\lambda = 2$ için $H_ç(2)$ alt grubunun simgesi $(0;\ \infty^{(3)})$ olarak elde edilir. □

4.3 H(λ) Hecke Gruplarının Kuvvet Alt Grupları

Bu kısımda $H(\lambda)$ Hecke gruplarının $H^m(\lambda)$ kuvvet alt gruplarının üreteçlerini, grup yapılarını ve simgelerini bulacağız. m=2 durumu ile başlayalım.

4.3.1 Teorem: $H(\lambda)$ Hecke gruplarının $H^2(\lambda)$ kuvvet alt grubu, üç tane sonsuz mertebeli devirli grubun serbest çarpımıdır ve grup sunuşu

$$H^2(\lambda) = \langle S^2\rangle * \langle TS^2T\rangle * \langle TSTS^{-1}\rangle$$

biçimindedir.

İspat: İlk önce $\lambda > 2$ durumuna bakalım. Bölüm grubunu

$$H(\lambda)/H^2(\lambda) \cong \langle T,S \mid T^2 = S^\infty = T^2 = S^2 = (TS)^2 = \ldots = I\rangle$$

olarak buluruz. Burada gerekli kısaltmalarla

$$H(\lambda)/H^2(\lambda) \cong \langle T,S \mid T^2 = S^2 = (TS)^2 = I\rangle \cong D_2$$

grup sunuşu elde edilir. Eleman sayısı 4 olan bu grup için Schreier transversali olarak {I, T, S, TS} seçilirse

$$\begin{array}{ll} I.T.(T)^{-1}=I, & I.S.(S)^{-1}=I, \\ T.T.(I)^{-1}=I, & T.S.(TS)^{-1}=I, \\ S.T.(TS)^{-1}=STS^{-1}T, & S.S.(I)^{-1}=S^2, \\ TS.T.(S)^{-1}=TSTS^{-1}, & TS.S.(T)^{-1}=TS^2T \end{array}$$

ve $(STS^{-1}T)^{-1}=TSTS^{-1}$ eşitliğinden $H^2(\lambda)$ grubunun sunuşu

$$H^2(\lambda) = \langle S^2\rangle * \langle TS^2T\rangle * \langle TSTS^{-1}\rangle$$

yazılır. Bununla birlikte,

$$H(\lambda) = \langle T,S \mid T^2 = S^\infty = I\rangle \cong (2, \infty, \infty)\ ,$$

$$H(\lambda)/H^2(\lambda) = \langle T, S \mid T^2 = S^2 = (TS)^2 = I\rangle \cong (2, 2, 2)\,,$$

$$|H(\lambda)/H^2(\lambda)|=4$$

olduğunu bulmuştuk. Permütasyon metoduyla $H^2(\lambda)$ alt grubunun simgesi $(g;\ \infty^{(2)};2)$ şeklindedir. g cinsini de Riemann-Hurwitz formülü ile hesaplayalım:

$$|H(\lambda)/H^2(\lambda)|=\frac{\mu(H^2(\lambda))}{\mu(H(\lambda))},$$

$$4=\frac{2g-2+2+2}{(2.0-2)+(1-\frac{1}{2})+1+1}$$

buradan da g=0 elde edilir ve $H^2(\lambda)$ alt grubunun simgesi,

$$(0;\ \infty^{(2)};2)$$

olarak bulunur.

$\lambda=2$ için de $H^2(2)$ alt grubunun simgesi $(0;\ \infty^{(4)})$ şeklindedir. □

4.3.2 Sonuç: $H^2(\lambda)$ kuvvet alt grubu, $H_ç(\lambda)$ çift alt grubunun 2 indeksli alt grubudur.

İspat : $H^2(\lambda)$ kuvvet alt grubunun üreteçlerinin çift elemanlar oluşu ve de indekslerden kolayca görülür. □

4.3.3 Teorem: Verilen m tek sayısı için $H^m(\lambda)$ kuvvet alt grubu, m tane iki mertebeli devirli grup ile sonsuz mertebeli devirli bir grubun serbest çarpımıdır.

İspat: Öncelikle $\lambda>2$ için kuvvet alt grubunu inceleyelim.

$$H(\lambda)/H^m(\lambda)\cong\langle T,S \mid T^2=S^\infty=T^m=S^m=(TS)^m=\ldots=I\rangle$$

bölüm grubundan S^m=T=I eşitliklerini kullanarak

$$H(\lambda)/H^m(\lambda)\cong\langle S \mid S^m=I\rangle\cong C_m$$

m mertebeli devirli grubun sunuşunu elde ederiz. Schreier transversali için $\{I, S, S^2, \ldots, S^{m-1}\}$ seçilip, Reidemeister-Schreier metodu kullanılarak

$$
\begin{array}{ll}
I.T.(I)^{-1}=T, & I.S.(S)^{-1}=I, \\
S.T.(S)^{-1}=STS^{-1}, & S.S.(S^2)^{-1}=I, \\
S^2.T.(S^2)^{-1}=S^2TS^{-2}, & S^2.S.(S^3)^{-1}=I, \\
\vdots & \vdots \\
S^{m-1}.T.(S^{m-1})^{-1}=S^{m-1}TS^{-(m-1)}, & S^{m-1}.S.(I)^{-1}=S^m
\end{array}
$$

elde edilir. $H^m(\lambda)$ kuvvet alt grubunun sunuşu

$$H^m(\lambda) = \langle S^m \rangle * \langle T \rangle * \langle STS^{-1} \rangle * \langle S^2TS^{-2} \rangle * \ldots * \langle S^{m-1}TS^{-(m-1)} \rangle$$

şeklinde bulunur. Diğer yandan,

$$H(\lambda) = \langle T,S \mid T^2 = S^\infty = I \rangle \cong (2, \infty, \infty) \ ,$$

$$H(\lambda)/H^m(\lambda) = \langle S \mid S^m = I \rangle \cong (1, m, m),$$

$$|H(\lambda)/H^m(\lambda)| = m$$

sonuçlarıyla beraber, permütasyon metodu kullanılarak $H^m(\lambda)$ alt grubunun simgesi $(g; 2^{(m)}, \infty; 1)$ olarak bulunur. Ayrıca Riemann-Hurwitz formülünü kullanarak

$$|H(\lambda)/H^m(\lambda)| = \frac{\mu(H^m(\lambda))}{\mu(H(\lambda))},$$

$$m = \frac{2g - 2 + m.(1 - \frac{1}{2}) + 2}{(2.0 - 2) + (1 - \frac{1}{2}) + 1 + 1}$$

eşitliğinden g=0 çıkar ve $H^m(\lambda)$ alt grubunun simgesi,

$$(0; 2^{(m)}, \infty; 1)$$

biçimindedir.

$\lambda = 2$ için de $H^m(2)$ alt grubunun simgesi $(0; 2^{(m)}, \infty^{(2)})$ şeklindedir. □

Son olarak m>2 çift tamsayıları için kuvvet alt gruplarını inceleyelim. Bölüm grubunu bulmak için gerekli bağıntılar eklenirse

$$H(\lambda)/H^m(\lambda) \cong \langle T,S \mid T^2 = S^m = (TS)^m = I \rangle$$

sonsuz mertebeli bölüm grubu bulunur. Kullandığımız metodlar ile $H^m(\lambda)$ kuvvet alt grubunun grup sunuşunu, simgesini elde edemeyiz. Fakat m=2k (k=1, 2, ...) için $H^m(\lambda)$ grubunun serbest olduğu

$$H^2(\lambda) \supset (H^2(\lambda))^k \supset H^{2k}(\lambda),$$

kapsamalarından ve 2.5.8 Teoremden görülür.

4.3.4 Teorem : m>2 çift tamsayı olmak üzere $H^m(\lambda)$ kuvvet alt grupları serbest gruptur.

İspat : 2.5.8 Teoremden bulunur. □

4.4 H(λ) Hecke Gruplarının Cinsi 0 Olan Normal Alt Grupları

$H(\lambda)$ Hecke gruplarının $(2,\infty,\infty)$ şeklinde üçgen gruplar olduğunu daha önce söylemiştik. Bu üçgen gruptan, $H(\lambda)/N$ bölüm grubuna bir grup homomorfizması vardır. Burada $H(\lambda)/N$ grubu C_n, D_n, A_4, S_4, A_5 sonlu üçgen gruplarından birine izomorftur [2]. Bu homomorfizmalardan faydalanarak N normal alt gruplarını inceleyebiliriz. Öncelikle $\lambda > 2$ durumunu göz önüne alalım.

İlk olarak $C_n \cong (1,n,n)$ devirli grubu ile başlayalım . T elemanını C_n grubunun birim elemanına, S elemanını da C_n grubunun n mertebeli üretecine eşlersek $H(\lambda) \to H(\lambda)/N \cong C_n$ olacak şekilde bir grup homomorfizması elde ederiz. Böyle her bir n için 0 cinsli bir normal alt grup elde ederiz. Permütasyon metodu yardımıyla N normal alt grubunun simgesini $(0;\ 2^{(n)},\infty;1)$ olarak buluruz. Bu normal alt grupları $Y_n(\lambda)$ ile gösterelim. $Y_n(\lambda)$ grupları 2 mertebeli, n tane devirli grup ile sonsuz mertebeli devirli bir grubun serbest çarpımıdır. C_n devirli gruplarının özel hali olan C_2 grubunun diğer gösterimi (2,1,2) şeklindedir. Bu gösterim ile yukarıdakinden farklı bir homomorfizma elde edebiliriz. Ancak C_2 nin bu gösterimi D_n dihedral grubunun içinde olacağından (2,1,2) gösterimini ayrıca incelemeye gerek yoktur.

İkinci olarak $C_n \cong (2,1,2)$ gösterimini içine alan $D_n \cong (2,n,2)$ dihedral grubunu ele alalım. $D_n \cong \langle x, y \mid x^2 = y^n = (xy)^2 = I \rangle$ grup sunuşuna sahip, 2n mertebeli dihedral grubu yardımıyla T elemanını x elemanına, S elemanını da y elemanına $H(\lambda) \to H(\lambda)/N \cong D_n$ olacak şekilde eşleyen bir grup homomorfizması vardır. Permütasyon metodu ile N normal alt grubunun $(0;\ \infty^{(2)};n)$ simgesine sahip olduğunu buluruz. Bu normal alt grupları $S_n(\lambda)$ ile gösterelim. $S_n(\lambda)$ grupları 2.4.2.2 Teoremden sonsuz mertebeli n+1 tane devirli grubun serbest çarpımıdır.

Şimdi de $A_4 \cong (2,3,3) \cong \langle x, y \mid x^2 = y^3 = (xy)^3 = I \rangle$ grubunu dikkate alalım. Homomorfizmamızı T elemanını x elemanına, S elemanını da y elemanına $H(\lambda) \to H(\lambda)/N \cong A_4$ olarak seçebiliriz. Permütasyon metodu ile N normal alt grubunun $(0;\ \infty^{(4)};4)$ simgesini buluruz. Bu normal alt grubu $T_1(\lambda)$ ile gösterelim.

Benzer olarak $S_4 \cong (2,3,4) \cong \langle x, y \mid x^2 = y^3 = (xy)^4 = I \rangle$ grubu için T elemanını x elemanına, S elemanını da y elemanına götüren bir homomorfizma $H(\lambda) \to H(\lambda)/N \cong S_4$ olarak alınırsa permütasyon metodu ile N normal alt grubu $(0;\ \infty^{(8)};6)$ simgesine sahiptir. Bu normal alt grubu da $T_2(\lambda)$ ile gösterelim. S_4 grubunun bir diğer gösterimi de (2,4,3) olup benzer işlemlerle N normal alt grubunun simgesi $(0;\ \infty^{(6)};8)$ şeklinde elde edilir. Bu grubu da $T_3(\lambda)$ sembolüyle gösterelim. Elde ettiğimiz iki grup, 2.4.2.2 Teoremden sonsuz mertebeli 13 tane devirli grubun serbest çarpımıdır.

Eğer $H(\lambda)$ Hecke grubunu $A_5 \cong (2,3,5)$ grubuna T elemanını x elemanına, S elemanını da y elemanına gidecek biçimde bir homomorfizma ile eşlersek $(0;\ \infty^{(20)};12)$ simgeli bir N normal alt grubu elde ederiz. Bu normal alt grubu $T_4(\lambda)$ ile gösterelim. $A_5 \cong (2,5,3)$ için benzer şekilde $T_5(\lambda)$ ile göstereceğimiz $(0;\ \infty^{(12)};20)$ simgeli bir normal alt grup bulunur.

Son olarak $D_n \cong (2,2,n)$ dihedral grubu incelenirse $W_n(\lambda)$ ile göstereceğimiz $(0;\ \infty^{(n)};2)$ normal alt grupları elde edilir.

$\lambda = 2$ için benzer sonuçlar elde edilir. $Y_n(2)$, $S_n(2)$, $T_1(2)$, $T_2(2)$, $T_3(2)$, $T_4(2)$, $T_5(2)$, $W_n(2)$ ile göstereceğimiz normal alt grupların simgeleri sırasıyla; $(0;\ 2^{(n)}, \infty^{(2)})$, $(0;\ \infty^{(n+2)})$, $(0;\ \infty^{(8)})$, $(0;\ \infty^{(14)})$, $(0;\ \infty^{(14)})$, $(0;\ \infty^{(32)})$, $(0;\ \infty^{(32)})$, $(0; \infty^{(n+2)})$ şeklinde elde edilir. Dikkat edilirse $S_n(2) \cong W_n(2)$, $T_2(2) \cong T_3(2), T_4(2) \cong T_5(2)$ izomorflukları görülür. Bununla beraber $S_n(2)$ normal alt grubunda n=6, 12, 30 için $T_1(2)$, $T_2(2)$, $T_4(2)$ elde edilir.

4.4.1 Teorem: Eğer $\lambda > 2$ ise $H(\lambda)$ Hecke gruplarının 0 cinsli tüm normal alt grupları, $Y_n(\lambda)$, $S_n(\lambda)$, $W_n(\lambda)$, $T_1(\lambda)$, $T_2(\lambda)$, $T_3(\lambda)$, $T_4(\lambda)$, $T_5(\lambda)$ şeklindedir ($n \in \mathbf{N}$).

Eğer $\lambda = 2$ ise $H(2)$ Hecke grubunun tüm normal alt grupları $Y_n(2)$, $S_n(2)$ biçimindedir ($n \in \mathbf{N}$). □

4.4.2 Sonuç: $\lambda \geq 2$ için $H(\lambda)$ Hecke grupları 0 cinsli, sonsuz sayıda normal alt gruba sahiptir. □

4.4.3 Uyarı: $\lambda \geq 2$ için $S_1(\lambda) \cong H_ç(\lambda)$, $S_2(\lambda) \cong H^2(\lambda) \cong W_2(\lambda)$ ve $Y_n(\lambda) \cong H^n(\lambda)$ (n pozitif tek tamsayı) olduğu görülür. □

4.5 $H(\lambda)$ Hecke Gruplarının Serbest Normal Alt Grupları

Bu bölümün başında $H(\lambda)$ Hecke gruplarının 2 mertebeli devirli grup ile sonsuz mertebeli devirli grubun serbest çarpımı olduğunu söylemiştik. $H(\lambda)$ Hecke gruplarının, Kurosh alt grup teoreminden iki çeşit alt gruba sahip olduğu ortaya çıkar. Birincisi serbest alt gruplardır. İkincisi ise bazı sonsuz devirli gruplar ile iki mertebeli bazı sonlu devirli grupların serbest çarpımları olan gruplardır. Biz bu bölümde bu alt grupları araştıracağız.

4.5.1 Teorem : N, $H(\lambda)$ Hecke grubunun birimden farklı bir normal alt grubu olsun. N normal alt grubu serbesttir ancak ve ancak N normal alt grubu sonlu mertebeli eleman içermez.

İspat : N serbest grupsa, sonlu mertebeli eleman içermeyeceği açıktır. Diğer yönü ispatlayalım.

Kurosh alt grup teoreminden, aranan N normal alt grubu

$$N = F * \prod_{*} G_i$$

şeklindedir. Burada F ya serbesttir ya da birimdir ve her bir G_i, $\{T\}$ grubuna konjugedir. N sonlu mertebeli eleman bulundurmadığından $\prod_{*} G_i$ çarpımı olamaz. Ayrıca N, birimden farklı olduğundan, N serbest grup sonucu bulunur. □

4.5.2 Teorem : $H(\lambda)$ Hecke grubunun sonlu indeksli ve de sonlu mertebeli eleman içeren, normal alt grupları $H(\lambda)$ ile $Y_n(\lambda)$ $(n \in \mathbf{N})$ gruplarıdır.

İspat : Öncelikle ispatı $\lambda > 2$ için verelim. N, $H(\lambda)$ da sonlu mertebeli eleman içeren ve sonlu indeksli olan bir normal alt grup olsun. O zaman N, 2 mertebeli bir eleman içerir. $H(\lambda)$ da 2 mertebeli her eleman T'ye konjuge olduğundan N, T'yi içerir. Buradan N için iki durum söz konusudur:

İlk olarak, N, S dönüşümünü bulundurursa $H(\lambda)$ grubun kendisine eşittir. Çünkü N, T elemanını da bulundurur.

İkinci durumda N, S dönüşümünü içermesin ve $|H(\lambda)/N| = \delta$ sonlu indeksine sahip olsun. Böylece $H(\lambda)$ yı $H(\lambda)/N$ bölüm grubuna eşlersek S, n-devirlerin bir çarpımına ve T, birim dönüşüme eşlenir. Burada $n \mid \delta$ ve $n \in \mathbf{N}$ dir. Böylece TS, n-devirlerin bir çarpımına gider. Permütasyon metodunu kullanarak N'nin simgesini $(g; 2^{(\delta)}, \infty^{(\delta/n)}; \delta/n)$ olarak buluruz. Riemann-Hurwitz formülü yardımıyla

$$|H(\lambda)/N| = \frac{\mu(N)}{\mu(H(\lambda))},$$

$$\delta = \frac{2g-2+\delta.(1-\frac{1}{2})+\frac{\delta}{n}+\frac{\delta}{n}}{(2.0-2)+(1-\frac{1}{2})+1+1}$$

eşitliğinden $1-\frac{\delta}{n}=g$ çıkar. g cinsi bir doğal sayı olacağından $\delta = n$ dolayısıyla g=0 olmak zorundadır. Bu durumda $H(\lambda)/N$ bölüm grubu $C_n \cong (1,n,n)$ ile izomorftur ve N alt grubunun simgesi

$(0;2^{(n)},\infty;1)$

olur ki bu da $Y_n(\lambda)$ $(n \in \mathbf{N})$ gruplarıdır.

Benzer olarak λ=2 ise $N \cong (0;2^{(n)}, \infty^{(2)})$ bulunur. □

4.5.3 Uyarı : 4.5.2 Teoremden $H(\lambda)$ Hecke gruplarının sonsuz sayıda sonlu mertebeli eleman içeren normal alt grubunun bulunduğu açıktır. □

4.5.4 Sonuç : N, $H(\lambda)$ Hecke grubunun sonlu indeksli normal alt grubu olmak üzere eğer N pozitif cinse sahip ise sonlu mertebeli eleman içermez. □

Bu sonucun tersi doğru değildir. Örneğin $W_n(\lambda)$ alt grupları için tersi sağlanmaz.

4.5.5 Teorem : Eğer N, birimden, $H(\lambda)$ Hecke grubu ve de $Y_n(\lambda)$ $(n \in \mathbf{N})$ gruplarından farklı ise serbesttir.

İspat : Yukarıda verilen 4.5.1 ve 4.5.2 Teoremlerinden görülür. □

Şimdi de $\lambda > 2$ için $H(\lambda)$ Hecke grubunun, t tane parabolik öğesi ve u tane de hiperbolik sınır elemanı olan, δ sonlu indekse sahip, N serbest normal alt grubu için şu teoremi verelim:

4.5.6 Teorem : Sonlu indeksli N serbest alt grubunun simgesi,

$$(1+\frac{\delta}{4}-\frac{t}{2}-\frac{u}{2};\ \infty^{(t)};u)$$

biçimindedir.

İspat : N serbest alt grup olduğundan $(g;\infty^{(t)};u)$ simgesine sahiptir. Riemann-Hurwitz formülünden,

$$2g-2+t+u=\delta.(-2+1-\frac{1}{2}+1+1)$$

ve de

$$g=1+\frac{\delta}{4}-\frac{t}{2}-\frac{u}{2}$$

bulunur. □

$\lambda=2$ için H(2) Hecke grubunun, t tane parabolik öğeli, δ sonlu indekse sahip, N serbest normal alt grubu için şu teoremi verelim:

4.5.7 Teorem : Sonlu indeksli N serbest alt grubu

$$(1+\frac{\delta}{4}-\frac{t}{2};\infty^{(t)})$$

simgesine sahiptir.

İspat : 4.5.6 Teoremine benzer şekilde yapılır. □

5. $\overline{H}(\lambda_p)$ GENİŞLETİLMİŞ HECKE GRUPLARININ BAZI NORMAL ALT GRUPLARI

Bu bölümde $p \geq 3$ asal sayıları için, $\overline{H}(\lambda_p)$ genişletilmiş Hecke gruplarının, kuvvet alt grupları, kamutatör alt grupları ile bu alt gruplar arasındaki ilişkiler ve serbest normal alt grupları incelenmiştir. Bulunan bu alt gruplarla, $H(\lambda_p)$ Hecke gruplarının bilinen normal alt gruplarıyla ilişkileri, bir şekil ile gösterilmiştir. Özel olarak p=3 değeri için elde edilen $\overline{H}(\lambda_3)$ genişletilmiş modüler grup ve bazı normal alt grupları [10, 34, 35] nolu kaynaklarda incelenmiştir. Ayrıca p=5 değeri içinde [36] nolu kaynakta $\overline{H}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubunun bazı normal alt grupları araştırılmıştır. Bu bölümdeki sonuçlar [37] nolu çalışmada toplanmıştır.

5.1 $\overline{H}(\lambda_p)$ Genişletilmiş Hecke Grupları

Burada $\overline{H}(\lambda_p)$ genişletilmiş Hecke grupları için özel olarak $H(\lambda_p)$ Hecke gruplarından yararlanacağız. $\lambda_p = 2\,\mathrm{Cos}\frac{\pi}{p}$ ve p=3, 5, 7, ... şeklinde asal sayılardır. $H(\lambda_p)$ nin grup sunuşu,

$$H(\lambda_p) =< T,S \mid T^2 = S^p = I >\cong C_2 * C_p \tag{5.1}$$

biçimindedir [2].

5.1.1 Tanım : $H(\lambda_p)$ Hecke gruplarının (5.1) deki üreteçlerine $R(z) = \frac{1}{\overline{z}}$ yansıma dönüşümünü katarak elde edilen gruplara $\overline{H}(\lambda_p)$ *genişletilmiş Hecke grupları* denir. □

5.1.2 Teorem : $\overline{H}(\lambda_p)$ genişletilmiş Hecke grupları,

$$\overline{H}(\lambda_p) = < T, S, R \mid T^2 = S^p = R^2 = (TR)^2 = (RS)^2 = I > \tag{5.2}$$

sunuşuna sahiptir [12].□

Buradaki $T(z) = -\frac{1}{z}$ elemanı, 2 mertebeli eliptik dönüşüm, $S(z) = -\frac{1}{z+\lambda_p}$ ise p mertebeli eliptik dönüşümdür. $R(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ ise 2 mertebeli yansımadır.

5.1.3 Teorem : $\overline{H}(\lambda_p)$ genişletilmiş Hecke gruplarındaki sonlu mertebeli elemanlar, T, R, TR, S, $S^2, \ldots, S^{\frac{p-1}{2}}$ elemanlarından biri ile konjugedir [38].□

5.1.4 Teorem: $\overline{H}(\lambda_p)$ genişletilmiş Hecke grupları, D_2 ile D_p nin C_2 ile karışımlı serbest çarpımıdır.

İspat : Teoremde yer alan dihedral grupların sunuşları,

$G_1 = < T, R \mid T^2 = R^2 = (TR)^2 = I > \cong D_2$

ve

$G_2 = < S, R \mid S^p = R^2 = (RS)^2 = I > \cong D_p$

şeklindedir.

$A = < R > \leq G_1$ alt grubu için,

$$\begin{aligned} \phi : A &\to G_2 \\ R &\mapsto R \end{aligned}$$

birim dönüşümü ve 2.5.3.1 Teoremi yardımıyla

$\overline{H}(\lambda_p) \cong G_1 *_{C_2} G_2$ ve

$\overline{H}(\lambda_p) = < T, S, R \mid T^2 = S^p = R^2 = (TR)^2 = (RS)^2 = I >$

bulunur. □

5.1.5 Teorem : $H(\lambda_p)$ Hecke grupları, $\overline{H}(\lambda_p)$ içinde 2 indeksli normal bir alt gruptur.

İspat : $\overline{H}(\lambda_p) = H(\lambda_p) \cup R.H(\lambda_p)$ eşitliği ve de $H(\lambda_p) \cap R.H(\lambda_p) = \varnothing$ olduğundan ispat kolaylıkla görülür. □

Bu bölümün amacı olan normal alt grupları incelemeye başlayalım. İlk olarak kuvvet ve kamutatör alt gruplarını inceleyelim.

5.2 $\overline{H}(\lambda_p)$ Genişletilmiş Hecke Gruplarının Kuvvet ve Kamutatör Alt Grupları

Kuvvet alt gruplarının, bütün elemanların m. kuvvetleri tarafından üretildiğini 2.6.1 bölümde söylemiştik. $\overline{H}^m(\lambda_q)$, kuvvet alt grupları q tek sayıları (q=3, 5, ...) için [12] nolu kaynakta çalışılmıştır.

[2, 23] nolu kaynaklarda, $H(\lambda_p)$ Hecke gruplarının kuvvet ve kamutatör alt grupları için bazı sonuçlar aşağıdaki gibidir:

$$|H(\lambda_p)/H^2(\lambda_p)|=2,$$

$$|H(\lambda_p)/H^p(\lambda_p)|=p,$$

$$|H(\lambda_p)/H'(\lambda_p)|=2p,$$

$$H'(\lambda_p)=H^2(\lambda_p)\cap H^p(\lambda_p),$$

$$H^2(\lambda_p)=<S>*<TST>,$$

$$H^p(\lambda_p)=<T>*<STS^{p-1}>*...*<S^{p-1}TS>,$$

$$H'(\lambda_p)=<TSTS^{p-1}>*...*<TS^{p-1}TS>$$

ve $H^{2pm}(\lambda_p)$ kuvvet alt grupları serbest alt grupturlar. Ayrıca Newman, p=3 için çalışmasında $H''(\lambda_3)\subset H^6(\lambda_3)\subset H'(\lambda_3)$ olduğunu ispatlamıştır [4].

$\overline{H}^m(\lambda_p)$ kuvvet alt gruplarının üreteçlerini bulmak için önceki bölümlerde kullandığımız Reidemeister-Schreier metodunu kullanacağız.

5.2.1 Teorem : Genişletilmiş Hecke gruplarının, $\overline{H}^2(\lambda_p)$ kuvvet alt grubu p mertebeli iki devirli grubun serbest çarpımıdır. Bununla beraber

$$\overline{H}(\lambda_p)/\overline{H}^2(\lambda_p) \cong C_2 \times C_2 \text{ ve}$$

$$\overline{H}^2(\lambda_p) = <S>*<TST>$$

eşitliği vardır.

İspat : İlk olarak $\overline{H}(\lambda_p)/\overline{H}^2(\lambda_p)$ bölüm grubunu bulalım. (5.2) ile gösterdiğimiz grup sunuşundaki tüm elemanların 2. kuvvetleri birim elemana eşitlenirse

$$\overline{H}(\lambda_p)/\overline{H}^2(\lambda_p) = < T,S,R \mid T^2 = S^p = R^2 = (TR)^2 = (RS)^2 = S^2 = (TS)^2 = \ldots = I >$$

elde edilir. $S^p = S^2 = I$ eşitliklerinden S=I yazılır ve bu bölüm grubunun sunuşunun sadeleşmiş hali,

$$\overline{H}(\lambda_p)/\overline{H}^2(\lambda_p) = < T,R \mid T^2 = R^2 = (TR)^2 = I > \cong C_2 \times C_2 \cong D_2$$

olur. Kuvvet alt grubunun sunuşunu bulabilmek için kullandığımız Reidemeister-Schreier yöntemi için {I, T, R, TR} transversalini alalım. Buradan,

$I.\,T.\,(T)^{-1}=I,$	$I.\,S.\,(I)^{-1}=S,$	$I.R.(R)^{-1}=I,$
$T.\,T.\,(I)^{-1}=I,$	$T.\,S.\,(T)^{-1}=TST,$	$T.R.(TR)^{-1}=I,$
$R.\,T.\,(TR)^{-1}=RTRT,$	$R.\,S.\,(R)^{-1}=RSR,$	$R.R.(I)^{-1}=I,$
$TR.\,T.\,(R)^{-1}=TRTR,$	$TR.S.(TR)^{-1}=TRSRT,$	$TR.R.(T)^{-1}=I$

yazılır. Ayrıca RTRT=I, TRTR=I, $RSR=S^{-1}$, $TRSRT=TS^{-1}T=(TST)^{-1}$ bağıntılarından $\overline{H}^2(\lambda_p)$ nin üreteç kümesi S ve TST elemanlarından oluşur. Böylece,

$$\overline{H}^2(\lambda_p) = <S, TST \mid S^p = (TST)^p = I > \cong C_p * C_p$$

bulunur. □

5.2.2 Teorem : $p \geq 3$ asal sayıları için $\overline{H}^p(\lambda_p) = \overline{H}(\lambda_p)$ dir.

İspat : Bütün elemanların p. kuvvetleri birim elemana eşitlenirse T=S=R=I olur ki

$$\left|\overline{H}(\lambda_p)/\overline{H}^p(\lambda_p)\right| = 1$$

yani $\overline{H}^{p}(\lambda_p)=\overline{H}(\lambda_p)$ bulunur. □

5.2.3 Teorem : m pozitif bir tamsayı ve $p\geq 3$ asal sayı olsun. Eğer,

(i) m tek tamsayı ise $\overline{H}^{m}(\lambda_p)=\overline{H}(\lambda_p)$,

(ii) m çift tamsayı fakat 2p nin katı değilse $\overline{H}^{m}(\lambda_p)=\overline{H}^{2}(\lambda_p)$

şeklindedir.

İspat : (i) m pozitif tek tamsayısı için bütün elemanların m. kuvveti birim elemana eşitlenirse,

$$T^2=T^m=R^2=R^m=I,\ (RS)^2=(RS)^m=I$$

sonuçlarından T=S=R=I dolayısıyla $|\overline{H}(\lambda_p)/\overline{H}^{m}(\lambda_p)|=1$ olacaktır. Yani $\overline{H}^{m}(\lambda_p)=\overline{H}(\lambda_p)$ olması açıktır.

(ii) $2|m$ ve 2p nin m'yi bölmeyecek olmasından (2, m)=2 elde edilir. (5.2) ile gösterdiğimiz sunuşta, tüm elemanların m. kuvvetleri birim elemana eşitlenirse,

$$T^2=T^m=R^2=R^m=I,\ S^p=S^m=I$$

olur. Gerekli kısaltmalar yapıldığında

$$\overline{H}(\lambda_p)/\overline{H}^{m}(\lambda_p)=\langle T,R \mid T^2=R^2=(TR)^2=I\rangle\cong C_2\times C_2\cong D_2$$

bulunur. İspatın geri kalan kısmı 5.2.1 Teoremdeki gibidir. Böylece istenen elde edilir. □

Kuvvet alt gruplarındaki son durum olan $\overline{H}^{2pm}(\lambda_p)$ durumunda, bölüm grubu sonlu olmayacağından Reidemeister-Schreier yöntemini kullanamayız. Bu alt gruplar hakkında birşeyler söyleyebilmek için kamutatör alt grupların incelenmesine ihtiyaç vardır.

Kamutatör alt gruplarının sunuşunu elde edebilmek için de önce $\overline{H}(\lambda_p)/\overline{H}'(\lambda_p)$ bölüm grubu oluşturulur. $\overline{H}'(\lambda_p)$ nin sunuşu,

$$\langle [A,B] \mid A,B\in\overline{H}(\lambda_p)\rangle$$

şeklindedir [15]. Bunu bulabilmek içinse $\overline{H}(\lambda_p)$ nin üreteç kümesinin elemanlarına değişmelilik eklenerek $\overline{H}(\lambda_p)/\overline{H}'(\lambda_p)$ bölüm grubununun sunuşu elde edilir [2].

5.2.4 Teorem : (i) $\overline{H}(\lambda_p)/\overline{H}'(\lambda_p) \cong V_4 \cong C_2 \times C_2$,

(ii) $\overline{H}'(\lambda_p) = \langle S \rangle * \langle TST \rangle$,

(iii) $\overline{H}'(\lambda_p)/\overline{H}''(\lambda_p) \cong V_{p^2} \cong C_p \times C_p$,

(iv) $\overline{H}''(\lambda_p)$ tabanı [S, TST], [S, TS^2T], ... , [S, $TS^{p-1}T$], [S^2, TST], [S^2, TS^2T], ... , [S^2, $TS^{p-1}T$], ... , [S^{p-1}, TST], [S^{p-1}, TS^2T], ... , [S^{p-1}, $TS^{p-1}T$] olan serbest gruptur.

(v) n>2 tamsayıları için $\left|\overline{H}(\lambda_p)/\overline{H}^{(n)}(\lambda_p)\right| = \infty$.

İspat : (i)-(iv) ispatları için [39] nolu kaynağa bakınız.

(v) $\overline{H}''(\lambda_p)$ ikinci kamutatör alt grubunun üreteçlerine değişmelilik kattığımızda elde edilen $\overline{H}''(\lambda_p)/\overline{H}'''(\lambda_p)$ bölüm grubu sonsuz mertebeli çıkar. Yani $\overline{H}'''(\lambda_p)$, $\overline{H}''(\lambda_p)$ içinde sonsuz indekslidir. Bu şekilde kamutatör alt grupların serisine devam edilirse $\left|\overline{H}(\lambda_p)/\overline{H}^{(n)}(\lambda_p)\right| = \infty$ olduğu bulunur. □

5.2.5 Teorem : $\overline{H}(\lambda_p)$ genişletilmiş Hecke gruplarının, birinci kamutatör alt grubu, ikinci kuvvet alt grubuna eşittir $\overline{H}'(\lambda_p) = \overline{H}^2(\lambda_p)$.

İspat : 5.2.1 ve 5.2.4 teoremlerinden görülür. □

5.2.6 Teorem : $p \geq 3$ asal sayıları için,

(i) $H^2(\lambda_p) = \overline{H}^2(\lambda_p) = \overline{H}^2(\lambda_p) \cap \overline{H}^p(\lambda_p)$,

(ii) $(\overline{H}'(\lambda_p))^p \subset \overline{H}''(\lambda_p)$

olur.

İspat : [37] nolu kaynakta bulunabilir. □

5.2.7 Teorem : (i) α, $T \mapsto RT$, $S \mapsto S$, $R \mapsto R$ olacak biçimde bir otomorfizm olmak üzere $\overline{H}'(\lambda_p) = H(\lambda_p) \cap \alpha(H(\lambda_p))$ eşitliği sağlanır.

(ii) $H'(\lambda_p)$, $\overline{H}'(\lambda_p)$ grubunun p indeksli alt grubudur.

(iii) $\overline{H}''(\lambda_p)$, $H'(\lambda_p)$ grubunun p indeksli alt grubudur.

İspat : (i) Hem $H(\lambda_p)$ hem de $\alpha(H(\lambda_p))$, $\overline{H}(\lambda_p)$ genişletilmiş Hecke grubunun 2 indeksli normal alt grupları olduklarından, $H(\lambda_p) \cap \alpha(H(\lambda_p))$, 4 indeksli tek normal alt grup olan $\overline{H}'(\lambda_p)$ birinci kamutatör alt grubuna eşit olur.

(ii) $|H(\lambda_p)/H'(\lambda_p)| = |H(\lambda_p)/H^2(\lambda_p)|.|H^2(\lambda_p)/H'(\lambda_p)|$ eşitliği ile bulunur.

(iii) $|\overline{H}'(\lambda_p)/\overline{H}''(\lambda_p)| = |\overline{H}'(\lambda_p)/H'(\lambda_p)|.|H'(\lambda_p)/\overline{H}''(\lambda_p)|$ olacağından ispat biter.□

5.2.8 Teorem : m pozitif tamsayı olmak üzere $\overline{H}^{2pm}(\lambda_p)$ kuvvet alt grupları, $\overline{H}''(\lambda_p)$ nin alt gruplarıdır.

İspat : Kuvvet alt gruplarının (2.13) ve (2.14) özelliklerinden, $\overline{H}^{2p}(\lambda_p) \subset (\overline{H}^2(\lambda_p))^p \subset \overline{H}^2(\lambda_p)$ kapsamaları vardır. $\overline{H}'(\lambda_p)=\overline{H}^2(\lambda_p)$ eşitliğini yerine yazarsak $\overline{H}^{2p}(\lambda_p) \subset (\overline{H}'(\lambda_p))^p \subset \overline{H}'(\lambda_p)$ bulunur. 5.2.6 Teoremden de $(\overline{H}'(\lambda_p))^p \subset \overline{H}''(\lambda_p)$ yazılabilir. Son olarak kuvvet alt gruplarının (2.13) özelliğinden $\overline{H}^{2pm}(\lambda_p) \subset \overline{H}''(\lambda_p)$ sonucu bulunur. □

Dikkat edilirse $\overline{H}''(\lambda_p)$ yansıma bulundurmadığından, alt kümesi olan $\overline{H}^{2pm}(\lambda_p)$ de bulundurmaz. Dolayısıyla $\overline{H}^{2pm}(\lambda_p) = H^{2pm}(\lambda_p)$ eşitliği yazılabilir. Ayrıca,

$$|\overline{H}(\lambda_p)/\overline{H}^{2pm}(\lambda_p)| = |\overline{H}(\lambda_p)/H^{2pm}(\lambda_p)|$$

$$= |\overline{H}(\lambda_p)/H(\lambda_p)|.|H(\lambda_p)/H^{2pm}(\lambda_p)| = 2.|H(\lambda_p)/H^{2pm}(\lambda_p)|$$

yazılabilir.

5.2.9 Teorem : $\overline{H}^{2pm}(\lambda_p)$ kuvvet alt grupları serbesttir.

İspat : 2.5.8 Schreier Teoreminden açıktır. □

5.2.10 Teorem: $\overline{H}(\lambda_p)$ genişletilmiş Hecke gruplarının iki indeksli üç tane normal alt grubu vardır. Bunlar,

$$H(\lambda_p) = < T, S \mid T^2 = S^p = I > \cong C_2 * C_p,$$

$$\overline{H}_0(\lambda_p) = < R, S, TST \mid R^2 = S^p = (TST)^p = (RS)^2 = (RTST)^2 = I > \cong D_p *_{C_2} D_p$$

ve

$$\alpha(H(\lambda_p)) = < TR, S \mid (TR)^2 = S^p = I > \cong C_2 * C_p$$

alt gruplarıdır.

İspat : N, $\overline{H}(\lambda_p)$ genişletilmiş Hecke grubunun 2 indeksli normal alt grubu ise $\overline{H}(\lambda_p)/N$ bölüm grubu değişmelidir ve $\overline{H}'(\lambda_p) \subset N \subset \overline{H}(\lambda_p)$ kapsaması ile $\overline{H}(\lambda_p)/\overline{H}'(\lambda_p) \cong C_2 \times C_2 \cong D_2$ oluşundan ispat biter. □

5.2.11 Teorem : $\overline{H}(\lambda_p)$ genişletilmiş Hecke gruplarının üç indeksli normal alt grubu yoktur.

İspat : Varsayalım ki N, $\overline{H}(\lambda_p)$ genişletilmiş Hecke grubunun 3 indeksli normal alt grubu olsun. Yani A=$\overline{H}(\lambda_p)/N$ olmak üzere $|A| = 3$ olur. Dolayısıyla A, değişmelidir. Ayrıca $\overline{H}(\lambda_p)/N \subset \overline{H}(\lambda_p)/\overline{H}'(\lambda_p)$ ve $|\overline{H}(\lambda_p)/\overline{H}'(\lambda_p)| = 4$ olduğundan varsayımımız yanlış çıkar. □

5.2.12 Teorem: $\overline{H}(\lambda_p)$ genişletilmiş Hecke grupları 2p indeksli iki normal alt gruba sahiptir. Bunlar

$$H^p(\lambda_p) = < T > * < STS^{p-1} > * \ldots * < S^{p-1}TS >$$

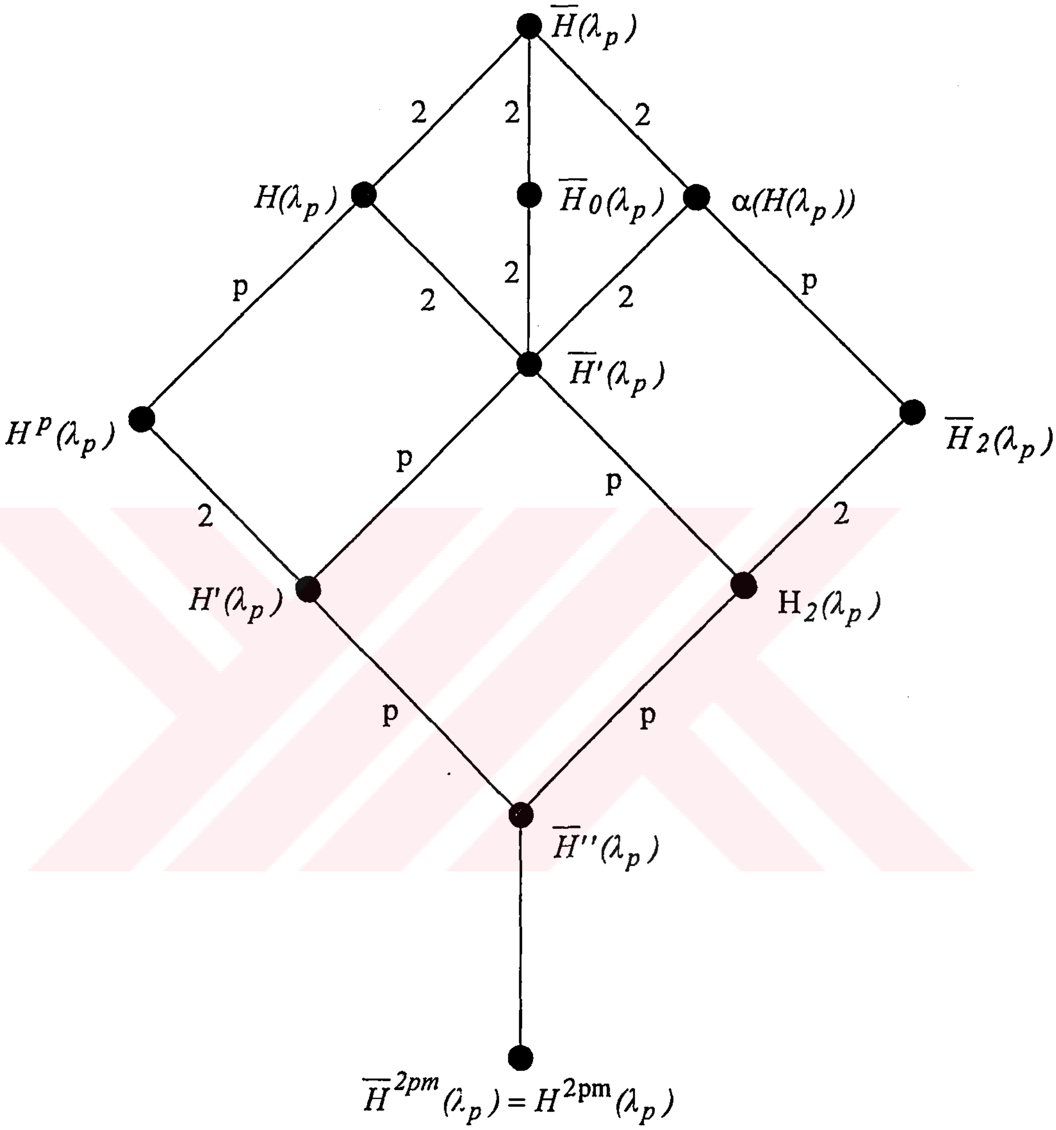
ve

$$\overline{H}_2(\lambda_p) = < TR > * < RSTS > * \ldots * < RS^{p-1}TS^{p-1} >$$

dir. ($\overline{H}_2(\lambda_p)$,$\overline{H}(\lambda_p)$ nin temel denklik alt grubudur).

İspat : [10, 39, 40] nolu kaynaklara bakınız. □

Aşağıda $\overline{H}(\lambda_p)$ genişletilmiş Hecke gruplarının, kuvvet ve kamutatör alt grupları arasındaki ilişkiyi gösteren şekil verilmiştir:



Şekil 5.1

5.3 $\overline{H}(\lambda_p)$ Genişletilmiş Hecke Gruplarının Serbest Normal Alt Grupları

5.1.4 Teoremde $\overline{H}(\lambda_p)$ genişletilmiş Hecke gruplarının, D_2 ile D_p nin C_2 ile karışımlı serbest çarpımı olduğunu göstermiştik. (5.2) ile verilen sunuş

$$\overline{H}(\lambda_p) = < T,S,R \mid T^2 = S^p = R^2 = (TR)^2 = (RS)^2 = I >$$

şeklindeydi. Kurosh alt grup teoremi yardımıyla, $\overline{H}(\lambda_p)$ genişletilmiş Hecke grupları, iki çeşit alt gruba sahiptir. Birincisi serbest alt gruplardır. Diğeri ise sonsuz mertebeli devirli gruplar, bazı 2 ve p mertebeli devirli gruplar, bazı D_2 ve D_p dihedral gruplar ile bazı D_{m_1} ve D_{m_2} dihedral grupların serbest çarpımlarından oluşan alt gruplardır. Burada m_i indisi 2 veya p sayısını böler. İşte biz bu alt grupları ve cebirsel yapılarını araştıracağız. Modüler grup için, [4] nolu kaynakta Newman, q asalları için $H(\lambda_q)$ Hecke grupları için Cangül [2], genişletilmiş modüler grup içinse [34] de Şahin, İkikardeş, Koruoğlu tarafından çalışılmıştır.

5.3.1 Teorem : $\overline{H}(\lambda_p)$ genişletilmiş Hecke gruplarının birimden farklı N normal alt grubunun serbest olması için gerekli ve yeterli koşul N normal alt grubunun, sonlu mertebeli eleman içermemesidir.

İspat: $\overline{H}(\lambda_p)$ genişletilmiş Hecke grupları 4 mertebeli D_2 ve 2p mertebeli D_p dihedral gruplarının C_2 grubu ile karışımlı serbest çarpım grubu olduğunu 5.1.4 Teoremden biliyoruz. Aradığımız N grubunun yapısı şu şekildedir:

$$N = F * \prod\nolimits_{*} C_r * \prod\nolimits_{*} *(D_{m_1} *_{C_2} D_{m_2})$$

Burada F ya serbest ya da birim grup; C_r ise {T}, {S}, {TR} elemanları tarafından üretilen gruplara izomorftur. Her bir D_{m_i} dihedral grubu {T, R}, {S, R} elemanları ile üretilen gruplarından biridir. N sonlu mertebeli eleman bulundurmadığından

$$\prod\nolimits_{*} C_r * \prod\nolimits_{*} *(D_{m_1} *_{C_2} D_{m_2})$$

serbest çarpımları olamaz. Ek olarak N, birimden farklı olduğundan tek seçenek F serbest grubu olmak zorundadır.

İspatın diğer tarafı serbest grup tanımından açıktır. □

5.3.2 Teorem: $\overline{H}(\lambda_p)$ genişletilmiş Hecke gruplarının, sonlu indeksli, sonlu mertebeli eleman içeren normal alt grupları aşağıdaki gibidir:

$\overline{H}(\lambda_p)$, $H(\lambda_p)$, $\overline{H}_0(\lambda_p)$, $\alpha(H(\lambda_p))$, $H^2(\lambda_p)$, $H^p(\lambda_p)$ ve $\overline{H}_2(\lambda_p)$.

İspat: N, genişletilmiş Hecke grubunun sonlu mertebeli eleman içeren, sonlu indeksli normal alt grubu olsun. Sonlu mertebeli elemanlar, N alt grubunda şu şekilde bulunabilir: 2 mertebeli bir eleman; p mertebeli bir eleman; 2 mertebeli iki eleman; 2 ve p mertebeli iki eleman; 2 mertebeli iki eleman ile p mertebeli üç eleman. $\overline{H}(\lambda_p)$ genişletilmiş Hecke grubunun, sonlu mertebeli elemanlarının, 2 mertebeli T, R veya TR elemanına, p mertebeli bir eleman da S elemanın bir $S, S^2, \ldots, S^{\frac{p-1}{2}}$ kuvvetine konjuge olacağını 5.1.3 Teoremde belirtmiştik. Buradan sonlu indeksli N normal alt grubu sonlu mertebeli bir eleman içeriyorsa; T, R, TR veya S nin $S, S^2, \ldots, S^{\frac{p-1}{2}}$ kuvvetlerinden birini içerir. Burada incelenecek dokuz durum ortaya çıkar. Bunları teker teker inceleyelim:

(i) Eğer N alt grubu, T, R elemanları ile $S, S^2, \ldots, S^{\frac{p-1}{2}}$ elemanlarından birini içeriyorsa, $N = \overline{H}(\lambda_p)$ olur.

(ii) N alt grubu, T dönüşümü ve $S, S^2, \ldots, S^{\frac{p-1}{2}}$ dönüşümlerinden birini içerip; R ve TR dönüşümlerini içermesin. Buradan,

$$\overline{H}(\lambda_p)/N \cong \langle R \mid R^2 = I \rangle \cong C_2$$

bölüm grubu elde edilir. 2 indeksli ve bu şartlara uyan normal alt grup $H(\lambda_p)$ dir.

(iii) Eğer N alt grubu, R dönüşümü ile $S, S^2, \ldots, S^{\frac{p-1}{2}}$ dönüşümlerinden birini bulundurup; T ve TR dönüşümlerini bulundurmasın.

$$\overline{H}(\lambda_p)/N \cong \langle T \mid T^2 = I \rangle \cong C_2$$

elde edilir ki 2 indeksli ve şartları sağlayan $N = \overline{H}_o(\lambda_p)$ alt grubudur.

(iv) Şimdi de N alt grubu, TR ve $S, S^2, \ldots, S^{\frac{p-1}{2}}$ dönüşümlerini içerip, T ve R dönüşümlerini içermesin.

$$\overline{H}(\lambda_p)/N \cong \langle T \mid T^2 = I \rangle \cong C_2$$

olur ki 2 indeksli bu alt grup, $N=\alpha(H(\lambda_p))$ bulunur.

(v) T ve R elemanlarını N alt grubuna ait olup $S, S^2, \ldots, S^{\frac{p-1}{2}}$ dönüşümleri, N de bulunmasın. O halde bölüm grubu,

$\overline{H}(\lambda_p)/N \cong C_1$

olur ki $N=\overline{H}(\lambda_p)$ grubun kendisi çıkar.

(vi) Eğer N alt grubu $S, S^2, \ldots, S^{\frac{p-1}{2}}$ dönüşümlerini bulundurup, T ve R dönüşümlerini içermiyorsa,

$\overline{H}(\lambda_p)/N \cong \langle T, R \mid T^2 = R^2 = (TR)^2 = I \rangle \cong D_2$

olur ki $N = H^2(\lambda_p)$ sonucu çıkar.

(vii) N alt grubu, T dönüşümünü içerip, $R, S, S^2, \ldots, S^{\frac{p-1}{2}}$ dönüşümlerini içermezse bölüm grubu,

$\overline{H}(\lambda_p)/N \cong \langle S, R \mid S^p = R^2 = (SR)^2 = I \rangle \cong D_p$

bulunur ve de $N = H^p(\lambda_p)$ olur.

(viii) Eğer N alt grubu, TR dönüşümünü içerip, $T, R, S, S^2, \ldots, S^{\frac{p-1}{2}}$ dönüşümlerini içermezse,

$\overline{H}(\lambda_p)/N \cong \langle T, S \mid T^2 = S^p = (TS)^2 = I \rangle \cong D_p$

ve $N=\overline{H}_2(\lambda_p)$ bulunur.

(ix) N alt grubu, R dönüşümünü içerip, $T, S, S^2, \ldots, S^{\frac{p-1}{2}}$ dönüşümlerini içermesin. Bu durumda

$\overline{H}(\lambda_p)/N \cong \langle T \mid T^2 = I \rangle \cong C_2$

olur ve de bu mümkün değildir. □

5.3.3 Teorem : $\overline{H}(\lambda_p)$ genişletilmiş Hecke gruplarının sonlu indeksli ve birimden farklı N normal alt grubu,

$\overline{H}(\lambda_p), H(\lambda_p), \overline{H}_0(\lambda_p), \alpha(H(\lambda_p)), H^2(\lambda_p), H^p(\lambda_p)$ ve $\overline{H}_2(\lambda_p)$

gruplarından farklı ise N serbesttir.

İspat : 5.3.1 ve 5.3.2 teoremlerinden görülür. □

5.3.4 Teorem : Verilen sonlu indeksli N normal alt grubu, $\overline{H}(\lambda_p), H(\lambda_p), \overline{H}_0(\lambda_p)$, $\alpha(H(\lambda_p))$, $H^2(\lambda_p)$, $H^p(\lambda_p)$ ve $\overline{H}_2(\lambda_p)$ gruplarından farklı ve de $|\overline{H}(\lambda_p)/N|=\mu$ ise μ indeksi, 4.p tarafından bölünür.

İspat : Elde edilecek bölüm grubu, 2, 4 ve de 2p mertebeli alt gruplar bulunduracağından sonuç çıkar. □

6. $\overline{H}(\lambda)$ GENİŞLETİLMİŞ HECKE GRUPLARININ NORMAL ALT GRUPLARININ YAPISI

Bu bölümde, (2.2) ile sunuşu verilen $H(\lambda)$ Hecke gruplarına $R(z)=\frac{1}{\overline{z}}$ yansıma dönüşümü katılarak elde edilen, $\overline{H}(\lambda)$ genişletilmiş Hecke gruplarının, çift alt grubu, kuvvet alt grupları, kamutatör alt grupları ile bunların arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Bu bölümdeki sonuçlar [41] de toplanmıştır.

6.1 $\overline{H}(\lambda)$ Genişletilmiş Hecke Grupları

4. bölümde, $\lambda \geq 2$ reel sayıları için tanımı verilen Hecke gruplarına $R(z)=\frac{1}{\overline{z}}$ anti-otomorfizmini, üreteç kümesine ekleyerek, bu grubu genişleteceğiz. Böylece grubun üreteç kümesinin elemanları $T(z)=-\frac{1}{z}$ eliptik elemanı, $\lambda = 2$ için parabolik eleman, $\lambda > 2$ için hiperbolik sınır elemanı olan $S(z)=-\frac{1}{z+\lambda}$ dönüşümü ve $R(z)=\frac{1}{\overline{z}}$ yansıma dönüşümleri olur. Burada dikkat edilirse $S(z)$ dönüşümünün mertebesi sonsuzdur.

2.3.1 Tanımda $H(\lambda)$ Hecke gruplarına $R(z)=\frac{1}{\overline{z}}$ yansıma dönüşümünü katarak elde ettiğimiz gruplara $\overline{H}(\lambda)$ genişletilmiş Hecke grupları dendiğini söylemiştik.

$\overline{H}(\lambda) = H(\lambda) \cup R.H(\lambda)$ ile $H(\lambda) \cap R.H(\lambda) = \varnothing$ eşitliklerinden $H(\lambda)$ nın $\overline{H}(\lambda)$ içinde 2 indeksli normal alt grup olduğu kolayca görülür.

Ayrıca (2.2) de verilen $H(\lambda)$ Hecke grubunun sunuşuna $R(z)=\frac{1}{\bar{z}}$ eklendiğinde,

$$TR=RT,\ RS=S^{-1}R$$

eşitlikleri ile bunlara denk olan

$$(TR)^2=(RS)^2=I$$

eşitliklerinin olduğu kolaylıkla görülebilir. Bunlardan faydalanarak şu teoremi verebiliriz:

6.1.1 Teorem : $\overline{H}(\lambda)$ genişletilmiş Hecke gruplarının sunuşu,

$$\overline{H}(\lambda) = < T,S,R \mid T^2 = S^{\infty} = R^2 = I,\ TR = RT,\ RS = S^{-1}R > \qquad (6.1)$$

veya buna denk olarak

$$\overline{H}(\lambda) = < T,S,R \mid T^2 = S^{\infty} = R^2 = (TR)^2 = (RS)^2 = I> \qquad (6.2)$$

şeklindedir.

İspat : (2.2) ile verilen $H(\lambda)$ Hecke gruplarının sunuşu ve yukarıdaki T, S, R dönüşümleri arasındaki eşitliklerden kolaylıkla görülür. □

(6.1) ve (6.2) de verilen grup sunuşlarından faydalanarak $\overline{H}(\lambda)$ grubunun yapısını belirleyelim.

6.1.2 Teorem : $\overline{H}(\lambda)$ genişletilmiş Hecke grupları, D_2 ile D_{∞} dihedral gruplarının 2 mertebeli devirli grup ile karışımlı serbest çarpımıdır.

İspat : Teoremde yer alan dihedral grupların sunuşları,

$$H_1 = < T, R \mid T^2 = R^2 = (TR)^2 = I > \cong D_2$$

ve

$$H_2 = < S, R \mid S^{\infty} = R^2 = (RS)^2 = I > \cong D_{\infty}$$

şeklindedir.

$A = < R > \leq H_1$ alt grubu için,

$$\begin{aligned} \phi : A &\to H_2 \\ R &\mapsto R \end{aligned}$$

birim dönüşümü ve 2.5.3.1 Teoremi yardımıyla

$\overline{H}(\lambda) \cong H_1 *_{C_2} H_2$ ve

$\overline{H}(\lambda) = < T, S, R \mid T^2 = S^\infty = R^2 = (TR)^2 = (RS)^2 = I >$

bulunur. □

6.2 $\overline{H}(\lambda)$ Genişletilmiş Hecke Gruplarının Kamutatör Alt Grupları

Bu bölümde ilk olarak $\overline{H}'(\lambda)$ birinci kamutatör alt grubu, sonra da $\overline{H}''(\lambda)$ ikinci kamutatör alt grubu ve $\overline{H}^{(n)}(\lambda)$ n. kamutatör alt grupları ve arasındaki ilişkiler incelenmiştir (n=1, 2, ...). Bunları incelerken öncelikle $\overline{H}^{(n)}(\lambda)/\overline{H}^{(n+1)}(\lambda)$ bölüm grubu elde edilir. Eğer bölüm grubu sonlu ise (n+1). kamutatör alt grubunun sunuşu bulunabilir. $\overline{H}^{(n)}(\lambda)/\overline{H}^{(n+1)}(\lambda)$ bölüm grubunu bulurken, $\overline{H}^{(n)}(\lambda)$ grubunun üreteç kümesinin elemanlarına değişmelilik bağıntısı eklenir. Buna göre ilk olarak bulacağımız $\overline{H}'(\lambda)$ birinci kamutatör alt grubu için şu teoremi verelim.

6.2.1 Teorem : Birinci kamutatör alt grubu $\overline{H}'(\lambda)$, $\overline{H}(\lambda)$ içinde sekiz indekslidir ve grup sunuşu,

$\overline{H}'(\lambda) \cong < S^2 > * < TS^2T > * < TSTS^{-1} >$

biçiminde olan üç ranklı serbest alt gruptur.

İspat : Birinci kamutatör alt grubun grup sunuşunu bulmak için önce $\overline{H}(\lambda)/\overline{H}'(\lambda)$ bölüm grubu oluşturulur. Bunu yaparken (6.2) de verilen $\overline{H}(\lambda)$ grubunun sunuşuna değişmelilik koşulunu ekleriz. Yani TR=RT, TS=ST, RS=SR eşitliklerini (6.2) de yerine yazarsak $\overline{H}(\lambda)/\overline{H}'(\lambda)$ bölüm grubunun sunuşu,

$\overline{H}(\lambda)/\overline{H}'(\lambda) = < T, S, R \mid T^2 = S^\infty = R^2 = (TR)^2 = (RS)^2 = I, TR = RT, TS = ST, RS = SR >$

olarak bulunur. $(RS)^2 = I$ ve $RS = SR$ eşitliklerinden $S^2 = I$ bulunur. Gerekli kısaltmalarla

$\overline{H}(\lambda)/\overline{H}'(\lambda) = < T, S, R \mid T^2 = S^2 = R^2 = I,\ TR = RT, TS = ST, RS = SR >$

elde edilir. Buradan da

$\overline{H}(\lambda)/\overline{H}'(\lambda) \cong C_2 \times C_2 \times C_2$

olduğu görülür. Ayrıca $|\overline{H}(\lambda)/\overline{H}'(\lambda)|=8$ sonlu olduğundan $\overline{H}'(\lambda)$ birinci kamutatör alt grubunun, grup sunuşunu elde edebiliriz. Bu işleme

$$\{I, T, R, S, TR, SR, TS, TSR\}$$

Schreier transversalini seçerek başlayalım. $\overline{H}'(\lambda)$ birinci kamutatör alt grubunun üreteçlerini bulmak için şu çarpma işlemlerini gerçekleştirelim:

$I.T.(T)^{-1}=I$,	$I.S.(S)^{-1}=I$,	$I.R.(R)^{-1}=I$,
$T.T.(I)^{-1}=I$,	$T.S.(TS)^{-1}=I$,	$T.R.(TR)^{-1}=I$,
$R.T.(TR)^{-1}=RTRT$,	$R.S.(SR)^{-1}=RSRS^{-1}$,	$R.R.(I)^{-1}=I$,
$S.T.(TS)^{-1}=STS^{-1}T$,	$S.S.(I)^{-1}=S^2$,	$S.R.(SR)^{-1}=I$,
$TR.T.(R)^{-1}=TRTR$,	$TR.S.(TSR)^{-1}=TRSRS^{-1}T$,	$TR.R.(T)^{-1}=I$,
$SR.T.(TSR)^{-1}=SRTRS^{-1}T$,	$SR.S.(R)^{-1}=SRSR$,	$SR.R.(S)^{-1}=I$,
$TS.T.(S)^{-1}=TSTS^{-1}$,	$TS.S.(T)^{-1}=TS^2T$,	$TS.R.(TSR)^{-1}=I$,
$TSR.T.(SR)^{-1}=TSRTRS^{-1}$,	$TSR.S.(TR)^{-1}=TSRSRT$,	$TSR.R.(TS)^{-1}=I$.

Dikkat edilirse ,

$(STS^{-1}T)^{-1}=TSTS^{-1}$,

$(TRTR)^{-1}=RTRT=I$,

$RSRS^{-1}=(S^2)^{-1}$,

$SRSR=I$,

$(SRTRS^{-1}T)^{-1}=TSRTRS^{-1}=TSTS^{-1}$,

$TRSRS^{-1}T=(TS^2T)^{-1}$,

$TSRSRT=I$

bağıntılarından $\overline{H}'(\lambda)$ birinci kamutatör alt grubunun üreteçleri $S^2, TS^2T, TSTS^{-1}$ olarak bulunur. Böylece

$$\overline{H}'(\lambda)=<S^2>*<TS^2T>*<TSTS^{-1}>$$

sunuşu elde edilir. □

Şimdi de $\overline{H}''(\lambda)$ ikinci kamutatör alt grubunu araştıralım. $\overline{H}^{(n+1)}(\lambda)$ nin $\overline{H}^{(n)}(\lambda)$ grubunun normal alt grubu olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla 2.5.8 Teoremden $\overline{H}''(\lambda)$ ikinci kamutatör alt grubu da serbest alt grup olur. $\overline{H}''(\lambda)$ ikinci kamutatör alt grubunun sunuşunu elde etmek için $\overline{H}'(\lambda)$ grubuna değişmelilik koşulunu eklersek şu teoremi verebiliriz.

6.2.2 Teorem : İkinci kamutatör alt grubu olan $\overline{H}''(\lambda)$, $\overline{H}'(\lambda)$ birinci kamutatör alt grubunun sonsuz indeksli serbest alt grubudur.

İspat : $\overline{H}'(\lambda)/\overline{H}''(\lambda)$ bölüm grubunu bulmak için $\overline{H}'(\lambda)$ grubunun sunuşuna değişmelilik koşulu eklenirse, bu bölüm grubunun eleman sayısının sonsuz olduğu görülür. Yani $\overline{H}''(\lambda)$, $\overline{H}'(\lambda)$ birinci kamutatör alt grubunun sonsuz indeksli serbest alt grubudur. Sonlu olmadığından, Reidemeister-Schreier metodunu kullanamayız ve $\overline{H}''(\lambda)$ grup sunuşunu bulamayız. □

6.2.3 Teorem : $\overline{H}^{(n)}(\lambda)$ kamutatör alt grupları serbest gruplardır (n=1, 2,...).

İspat : 2.5.8 Teoremden görülür. □

6.3 $\overline{H}(\lambda)$ Genişletilmiş Hecke Gruplarının Çift Alt Grubu

$\overline{H}(\lambda)$ genişletilmiş Hecke gruplarının çift alt gruplarının yapısından kısaca bahsedelim. $\overline{H}(\lambda)$ Hecke gruplarının elemanlarını aşağıdaki gibi iki gruba ayırabiliriz.

$$\textbf{(i)} \quad \begin{pmatrix} a & b\lambda \\ c\lambda & d \end{pmatrix}, \quad ad\text{-}bc\,\lambda^2 = \pm 1,$$

$$\textbf{(ii)} \quad \begin{pmatrix} a\lambda & b \\ c & d\lambda \end{pmatrix}, \quad ad\,\lambda^2\text{-}bc = \pm 1.$$

Burada a,b,c,d birer tamsayıdır. Yukarıda belirtilen (i) tipindeki elemanlar çift, (ii) tipindekiler ise tek olarak adlandırılır. Matrislerde çarpma işleminden,

tek.tek=çift.çift=çift,

tek.çift=çift.tek=tek

olduğu kolayca görülebilir. Çift alt grup, $\overline{H}(\lambda)$ genişletilmiş Hecke grubunun 2 indeksli normal alt grubudur ve $\overline{H}_ç(\lambda)$ ile gösterilir.

Çift elemanların kümesi

$$\overline{H}_ç(\lambda)=\left\{ A=\begin{pmatrix} a & b\lambda \\ c\lambda & d \end{pmatrix} : A\in\overline{H}(\lambda) \right\}$$

biçimindedir.

6.3.1 Teorem : $\overline{H}_ç(\lambda)$ çift normal alt grubu, $\overline{H}(\lambda)$ içinde iki indekslidir ve grup gösterimi ,

$$\overline{H}_ç(\lambda) \cong \langle a,b,c \mid c^2=(bc)^2=I \rangle$$

şeklindedir (Burada TS=a, ST=b, TR=c eşitlikleri vardır).

İspat : Kolaylıkla

$$\overline{H}(\lambda)=\overline{H}_ç(\lambda) \cup T.\overline{H}_ç(\lambda)$$

eşitliğinden 2 indeksli normal alt grubu olduğu görülür. Üreteç kümesini bulmak için Schreier transversalini {I, T} olarak alalım. Reidemeister-Schreier metodunu kullanırsak,

$I.T.(T)^{-1}=I$,	$I.S.(T)^{-1}=ST$,	$I.R.(T)^{-1}=RT$,
$T.T.(T)^{-1}=I$,	$T.S.(I)^{-1}=TS$,	$T.R.(I)^{-1}=TR$

sonuçları bulunur. Bununla beraber TR=RT olduğundan üreteç kümesinin elemanları TS, ST, TR olarak bulunur. Grubun sunuşunu da bu şekilde elde etmiş oluruz. □

Şimdi de çift alt grup ile birinci kamutatör alt grup arasındaki ilişkiyi inceleyelim. Birinci kamutatör alt grubun

$$\overline{H}'(\lambda)=\langle S^2\rangle * \langle TS^2T\rangle * \langle TSTS^{-1}\rangle$$

sunuşuna dikkat edilirse üreteç kümesinin elemanları çift elemanlardır. O halde şu teoremi verebiliriz:

6.3.2 Teorem : Birinci kamutatör alt grubu $\overline{H}'(\lambda)$, $\overline{H}_ç(\lambda)$ nin dört indeksli normal alt grubudur.

İspat : Birinci kamutatör alt grubunun üreteç kümesinin elemanları çift idi. Ayrıca $\overline{H}'(\lambda)$, $\overline{H}(\lambda)$ içinde 8 indeksli ve de $\overline{H}_ç(\lambda)$ çift normal alt grubu, $\overline{H}(\lambda)$ genişletilmiş Hecke grubunun iki indeksli normal alt grubu olduğundan sonuç görülür. □

6.3.3 Sonuç : Birinci kamutatör alt grubunun elemanları çifttir. □

6.4 $\overline{H}(\lambda)$ Genişletilmiş Hecke Gruplarının Kuvvet Alt Grupları

Bu bölümde $\overline{H}(\lambda)$ genişletilmiş Hecke gruplarının kuvvet alt gruplarının yapısını ve de birinci kamutatör alt grupla ilişkisini inceleyeceğiz. Önce m=2 için $\overline{H}^2(\lambda)$ kuvvet alt grubunu bulalım.

6.4.1 Teorem : $\overline{H}^2(\lambda)$ kuvvet alt grubu sonsuz mertebeli üç devirli grubun serbest çarpımıdır. Bu grubun sunuşu,

$$\overline{H}^2(\lambda) \cong < S^2 > * < TS^2T > * < TSTS^{-1} >$$

şeklindedir.

İspat : Reidemeister-Schreier yöntemini kullanabilmek için $\overline{H}(\lambda)/\overline{H}^2(\lambda)$ bölüm grubunu oluşturalım. $\overline{H}(\lambda)$ nın sunuşundaki tüm elemanların 2. kuvvetini birim elemana eşitlersek, özellikle de $S^2 = I$, $(TS)^2 = I$ olduğundan,

$$\overline{H}(\lambda)/\overline{H}^2(\lambda) = < T, S, R \mid T^2 = S^2 = R^2 = I,\ TR = RT, TS = ST, RS = SR >$$

bulunur. Kolayca,

$$\overline{H}(\lambda)/\overline{H}^2(\lambda) \cong C_2 \times C_2 \times C_2$$

olduğu görülür. Ayrıca $\left|\overline{H}(\lambda)/\overline{H}^2(\lambda)\right| = 8$ sonlu olduğundan $\overline{H}^2(\lambda)$ kuvvet alt grubunun grup sunuşunu elde edebiliriz. Bu işleme

$$\{I, T, R, S, TR, SR, TS, TSR\}$$

Schreier transversalini alarak başlarsak 6.2.1 Teoremin ispatındaki gibi $\overline{H}^2(\lambda)$ kuvvet alt grubunun sunuşunu

$$\overline{H}^2(\lambda) \cong \langle S^2 \rangle * \langle TS^2T \rangle * \langle TSTS^{-1} \rangle$$

olarak buluruz. □

6.4.2 Sonuç : Yukarıdaki 6.2.1 ve 6.4.1 teoremlerinden $\overline{H}'(\lambda) = \overline{H}^2(\lambda)$ eşitliği vardır. □

6.4.3 Teorem : m pozitif tek tamsayı ise $\overline{H}^m(\lambda) = \overline{H}(\lambda)$ eşitliği sağlanır.

İspat : Grup sunuşunda bütün elemanların m. kuvvetlerini birim elemana eşitlersek,

$$R^2 = R^m = I,\ (RS)^2 = (RS)^m = I,\ T^2 = T^m = I$$

bağıntılarından T=S=R=I eşitlikleri çıkar. Yani,

$$\left|\overline{H}(\lambda) / \overline{H}^m(\lambda)\right| = 1$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\overline{H}^m(\lambda) = \overline{H}(\lambda)$$

olduğu bulunur. □

Son durum olan m>2 çift tamsayıları için kuvvet alt gruplarını araştıralım. $\overline{H}(\lambda) / \overline{H}^m(\lambda)$ bölüm grubu ,

$$T^2 = S^m = R^2 = (TS)^m = (TR)^2 = (RS)^2 = I$$

eşitliklerine sahip olacağından sonsuz mertebeli bir gruptur. Dolayısıyla Reidemeister-Schreier metodunu kullanamayız ve de $\overline{H}^m(\lambda)$ kuvvet alt grubunun sunuşunu elde edemeyiz. Fakat $\overline{H}^m(\lambda)$ kuvvet alt grubu hakkında şu teoremi verebiliriz.

6.4.4 Teorem : m>2 çift tamsayı olmak üzere $\overline{H}^m(\lambda)$ kuvvet alt grupları serbesttir.

İspat : Kuvvet alt grupları için verilen (2.13) özelliğinden $\overline{H}^2(\lambda) \supset \overline{H}^m(\lambda)$ olacağından ve de 2.5.8 Teoremden sonuç görülür. □

7. SÜREKLİ KESİRLER İLE HECKE GRUPLARI ARASINDAKİ İLİŞKİLER

Bu bölümde, $\lambda = \sqrt{D}$, $D=m^2+1$ (m=1, 3, 4, 5, ...) veya $D=n^2-1$, (n=2, 3, 4, ...) olacak biçimde kök dışına çıkamayacak (square free) D tamsayıları için, $H(\lambda)$ Hecke gruplarını ele aldık. [42] nolu çalışmadan yararlanarak, $H(\lambda)$ Hecke gruplarının parabolik (cusp) noktaları için bu bölümü oluşturduk. Ele aldığımız $H(\lambda)$ Hecke gruplarının parabolik noktaları $\mathbf{Q}(\sqrt{D})$ cisimlerinin elemanlarıdır. Bu bölümde, $\mathbf{Q}(\sqrt{D})$ cisimlerinin alt kümeleri olan $\mathbf{Z}(\sqrt{D})$ halkalarının birimlerinin (unit), $H(\lambda)$ Hecke gruplarının parabolik noktası olamayacağı, sürekli kesirler yardımıyla gösterildi. Ayrıca bu bölümdeki sonuçlar [43] nolu çalışmada toplanmıştır.

[42] nolu çalışmada, Rosen ve Towse, q=4 ve 6 için elde edilen $H(\lambda_q)$ Hecke grupları için, $\mathbf{Z}(\lambda_q)$ nun birimlerinin parabolik nokta olamayacağını göstermişlerdir.

7.1 Bir Reel Sayıya Bağlı Sürekli Kesirler

Sürekli kesirlerden 2.8 bölümde bahsetmiştik. [44] nolu çalışmada λ reel sayısına bağlı sürekli kesir tanımı aşağıdaki gibi verilmiştir.

7.1.1 Tanım : $r_0\lambda + \cfrac{\varepsilon_1}{r_1\lambda + \cfrac{\varepsilon_2}{r_2\lambda + \dots}}$ şeklindeki sürekli kesre, λ *reel sayısına bağlı sürekli kesir* denir. Burada $\varepsilon_i = \pm 1$, $r_i \in \mathbf{Z}^+$ $(i>0)$ ve $r_0 \in \mathbf{Z}$ biçimindedir. □

Ayrıca tanımladığımız bu sürekli kesir,

$[r_0\lambda, \varepsilon_1 / r_1\lambda, \varepsilon_2 / r_2\lambda, \ldots]$

olarak da ifade edilir.

Şimdi de [44] den yararlanarak, herhangi bir α reel sayısı için elde edilen λ sayısına bağlı sürekli kesri tanıyalım.

r_0 tamsayısı, $r_0\lambda$ çarpımı α reel sayısına en yakın olacak biçimde ve $0 \leq R_1 < \lambda/2$ olmak üzere, ilk olarak

$\alpha = r_0\lambda + \varepsilon_1 R_1$ olarak yazarız. Daha sonra bu algoritmaya $\dfrac{1}{R_1}$ sayısı için devam edilirse α reel sayısının, λ sayısına bağlı sürekli kesrini elde etmiş oluruz.

7.1.2 Örnek : $\alpha = 3$ ve $\lambda = \sqrt{2}$ değerleri için, 3 sayısının, λ sayısına bağlı sürekli kesrini bulalım.

$$3 = 2\sqrt{2} + 3 - 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2} + \frac{1}{3 + 2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} + \frac{1}{4\sqrt{2} + 3 - 2\sqrt{2}}$$

$$= 2\sqrt{2} + \cfrac{1}{4\sqrt{2} + \cfrac{1}{3 + 2\sqrt{2} + \ldots}} = [2\lambda, +1/4\lambda, +1/4\lambda, \ldots]$$

olarak bulunur.

Dikkat edilirse 3 rasyonel sayısının, λ sayısına bağlı sürekli kesri sonsuz elemanlıdır. 2.8 bölümde tanımladığımız sürekli kesirlerde, bir rasyonel sayının sonlu kesre sahip olduğunu belirtmiştik.

7.1.3 Örnek : $\alpha = 7 + 2\sqrt{2}$ ve $\lambda = \sqrt{2}$ alınırsa, α reel sayısının λ sayısına bağlı sürekli kesrini aşağıdaki gibi hesaplarız.

$$7+2\sqrt{2}=7\sqrt{2}-5\sqrt{2}+7=7\sqrt{2}-(5\sqrt{2}-7)=7\sqrt{2}+\frac{-1}{5\sqrt{2}+7}$$

$$=7\sqrt{2}+\frac{-1}{10\sqrt{2}-5\sqrt{2}+7}=7\sqrt{2}+\cfrac{-1}{10\sqrt{2}+\cfrac{-1}{5\sqrt{2}+7+...}}$$

$$=[7\lambda,-1/10\lambda,-1/10\lambda,...]$$

olarak hesaplanır.

7.2 Birimler ve Temel Birim

Bu alt bölümde $\mathbf{Q}(\sqrt{D})$ cisminin alt kümesi olan, $\mathbf{Z}(\sqrt{D})$ halkasındaki birimlerle ilgileneceğiz. $\mathbf{Z}(\sqrt{D})$ nin birimlerini üreten temel birimin tanımını ve ilgili teoremleri vereceğiz.

7.2.1 Tanım : Bir halkada, çarpma işlemine göre tersi olan elemanlara *birim eleman* denir. □

Biz çalışmamızda $\mathbf{Z}(\sqrt{D})$ nin birimlerini araştıracağız. [45] de D>0 olmak üzere $\mathbf{Q}(\sqrt{D})$ cisminin alt kümesi olan $\mathbf{Z}(\sqrt{D})$ halkasının birimlerinin kümesi,

$$\{\pm\omega^s : s=0,\pm 1,\pm 2, ...\}$$

biçimindedir. $\pm\omega,\pm\frac{1}{\omega}$ elemanlarından biri 1' den mutlaka büyüktür. $\omega>1$ olarak varsayarsak şu tanımı verebiliriz.

7.2.2 Tanım : 1' den büyük en küçük ω birimine *temel birim* denir. □

$\mathbf{Z}(\sqrt{D})$ nin birimleri, yukarıda verdiğimiz tanımdaki temel birim tarafından elde edilir. Kısacası temel birim, birimleri üreten elemandır. Şimdi de $\mathbf{Z}(\sqrt{D})$ halkasının temel birimlerini bulmada yararlanacağımız Pell denklemini verelim.

$\mathbf{Q}(\sqrt{D})$ cisminin alt kümesi olan $\mathbf{Z}(\sqrt{D})$ nin birimlerini bulmakta kullandığımız,

$$T^2 - DU^2 = \pm 4 \tag{7.1}$$

eşitliğine *Pell denklemi* denir [45]. Burada bu denklemi sağlayan en küçük pozitif tamsayılarından oluşan (T, U) ikilileriyle ilgileneceğiz. Çünkü bu (T, U) ikilileri yardımıyla temel birimin formatını elde edeceğiz. Bu (T, U) ikilisi yerine (T, U)=(2x, 2y) alınırsa (7.1) eşitliğinden daha kullanışlı

$$x^2 - Dy^2 = \pm 1 \tag{7.2}$$

eşitliğini birimler için kullanabiliriz. Şimdi temel birimler ile ilgili aşağıdaki teoremi verelim.

7.2.3 Teorem : D>0 olmak üzere, $\mathbf{Z}(\sqrt{D})$ halkalarının temel birimleri,

$$\eta = \frac{1}{2}(T + U\sqrt{D})$$

biçimindedir [45]. □

Örneğin D=21 için $T^2 - DU^2 = 4$ denklemini sağlayan (T, U) =(5, 1) ikilisinden yararlanarak $\mathbf{Z}(\sqrt{21})$ halkasının temel birimini $\eta = \frac{1}{2}(5 + \sqrt{21})$ olarak buluruz.

7.3 Parabolik Noktalar

Hecke gruplarının elemanlarını aşağıdaki gibi iki gruba ayrılabildiğini önceki bölümlerden biliyoruz.

(i) $\begin{pmatrix} a & b\lambda \\ c\lambda & d \end{pmatrix}$, $ad\text{-}bc\lambda^2=1$,

(ii) $\begin{pmatrix} a\lambda & b \\ c & d\lambda \end{pmatrix}$, $ad\lambda^2\text{-}bc=1$.

Burada a, b, c, d birer tamsayıdır. Yukarıda belirtilen (i) tipindeki elemanlar çift, (ii) tipindekiler ise tek olarak adlandırılır. Buradaki matris gösterimlerine Hecke gruplarına ait özel möbiüs dönüşümleri karşılık gelmektedir.

7.3.1 Tanım : $H(\lambda)$ Hecke gruplarının elemanları altında, ∞ noktasının görüntülerine *parabolik noktalar* denir. □

Tanıma dikkat edilecek olursa $H(\lambda)$ Hecke gruplarının parabolik noktalarının kümesinin elemanları ya $\frac{a}{c\lambda}$ ya da $\frac{a\lambda}{c}$ biçimindedir. En önemli Hecke gruplarından biri olan modüler grubun, parabolik noktalarının kümesinin $\mathbf{Q} \cup \{\infty\}$ olduğu açıktır.

7.3.2 Teorem : α, $H(\lambda)$ Hecke grubunda parabolik noktadır ancak ve ancak α, sonlu λ sayısına bağlı sürekli kesre sahiptir [44]. □

7.3.3 Teorem : D=2 veya 3 olmak üzere, $\mathbf{Z}(\sqrt{D})$ halkalarındaki birimler $H(\sqrt{D})$ Hecke gruplarında parabolik nokta olamaz [42]. □

Amacımız $\lambda = \sqrt{D}$, $D = m^2 + 1$ (m=1, 3, 4, 5, ...) veya $D = n^2 - 1$ (n=2, 3, 4, ...) olacak biçimde kök dışına çıkamayacak D tamsayıları için 7.3.3 Teoremi $H(\lambda)$ Hecke grupları için genelleştirmektir.

7.3.4 Teorem : $\mathbf{Z}(\sqrt{D})$ nin temel birimi, $D = m^2 + 1$ (m=1, 3, 4, 5, ...) için $\eta = m + \sqrt{D}$ ve $D = n^2 - 1$ (n=2, 3, 4, ...) için $\eta = n + \sqrt{D}$ şeklindedir [45].□

İlk olarak $\lambda = \sqrt{D}$, $D = m^2 + 1$ (m=1, 3, 4, 5, ...) olacak biçimde kök dışına çıkamayan D tamsayıları ile ilgilenelim.

7.3.5 Teorem : $D = m^2 + 1$ (m=1, 3, 4, 5, ...) ve kök dışına çıkamayacak tamsayı ise $\mathbf{Z}(\sqrt{D})$ içindeki birimler, sonsuz λ sayısına bağlı sürekli kesre sahiptirler.

İspat : $D=m^2+1$ $(m=1, 3, 4, 5, \ldots)$ olmak üzere 7.3.4 Teoremden $\mathbf{Z}(\sqrt{D})$ halkasının temel birimi $\eta = m+\sqrt{D}$ biçimindedir. $\mathbf{Z}(\sqrt{D})$ içindeki tüm birimler $\pm(m+\sqrt{D})^k$ $(k\in \mathbf{Z})$ olarak yazılabilir. İlk olarak $k \geq 2$ olmak üzere $(m+\sqrt{D})^k$ birimleri için ispatı yapalım. İspatta kullanacağımız $\{.\}$, en yakın tamsayı fonksiyonunu şöyle tanımlayalım: $\{\frac{\alpha}{\lambda}\}$, α reel sayısına $\lambda.\{\frac{\alpha}{\lambda}\}$ çarpımını en yakın yapan tamsayıdır.

Birimleri daha kullanışlı olan $\eta^k = (m+\sqrt{D})^k = (a_k + b_k\sqrt{D})$ olarak ifade edelim. λ sayısına bağlı sürekli kesri bulabilmek için $\left\{\frac{a_k + b_k\sqrt{D}}{\sqrt{D}}\right\}$ değerini hesaplamalıyız.

$(a_k + b_k\sqrt{D})$ biriminin $\left|a_k^{\,2} - Db_k^{\,2}\right| = 1$ eşitliğini sağladığını biliyoruz. Ayrıca $\eta^k = (a_k + b_k\sqrt{D})$ olduğundan yararlanarak,

$(a_{k+1} + b_{k+1}\sqrt{D}) = (a_k + b_k\sqrt{D})\,(m+\sqrt{D}) = (a_k m + b_k D + (a_k + mb_k)\sqrt{D})$

olacağından $a_{k+1} = a_k m + b_k D$ ve $b_{k+1} = a_k + mb_k$ yazılabilir. Bunun yanında $b_{k+1} > b_k$ ve $k \geq 2$ için $b_k \geq 2m$ olduğu açıktır. Bu son eşitsizlikten,

$$\left|\frac{a_k^{\,2}}{b_k^{\,2}} - D\right| = \frac{1}{b_k^{\,2}} \leq \frac{1}{4m^2}$$

elde edilir. O halde,

$$\left\{\frac{a_k + b_k\sqrt{D}}{\sqrt{D}}\right\} \approx \left\{\frac{b_k\sqrt{D} + b_k\sqrt{D}}{\sqrt{D}}\right\} = 2b_k$$

bulunur. Bunlardan yararlanarak $(a_k + b_k\sqrt{D})$ birim elemanının λ sayısına bağlı sürekli kesri aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$(a_k + b_k\sqrt{D}) = 2b_k\sqrt{D} - (-a_k + b_k\sqrt{D}) = 2b_k\sqrt{D} + \frac{a_k^{\,2} - Db_k^{\,2}}{a_k + b_k\sqrt{D}}$$

olarak bulunur. Sonuç olarak

$$\eta^k = (a_k + b_k\sqrt{D}) = 2b_k\sqrt{D} + \frac{\varepsilon}{a_k + b_k\sqrt{D}}$$

yazılabilir. Burada $\varepsilon = a_k^2 - Db_k^2 = \pm 1$ yani $\varepsilon = (-1)^k$ biçimindedir. λ sayısına bağlı sürekli kesir, bu verilerle

$$\eta^k = [2b_k\lambda, \varepsilon / 2b_k\lambda, \varepsilon / 2b_k\lambda, \ldots]$$

olarak elde ederiz.

Bu teoremde eksik kalan k=0 durumu [44] de incelenmiştir. k=1 durumunu özel olarak bulalım:

$\eta = (m + \sqrt{m^2+1})$ temel biriminin, λ sayısına bağlı sürekli kesrini bulmak için $\left\{\dfrac{m+\sqrt{m^2+1}}{\sqrt{m^2+1}}\right\} \approx 2$ olduğundan yararlanalım. Benzer işlemler yapıldığında,

$$m + \sqrt{m^2+1} = 2\sqrt{m^2+1} - (-m + \sqrt{m^2+1}) = 2\sqrt{m^2+1} - \frac{1}{m + \sqrt{m^2+1}}$$
$$= 2\sqrt{m^2+1} - \frac{1}{\eta}$$

bulunur. Başka bir ifadeyle,

$$m + \sqrt{m^2+1} = [2\lambda, -1/2\lambda, -1/2\lambda, \ldots]$$

sonsuz λ sayısına bağlı sürekli kesrine sahiptir.

Geriye kalan k<0 durumuna bakalım. Önce k=-1 durumunu özel olarak verelim.

$$(m + \sqrt{m^2+1})^{-1} = \frac{1}{m + \sqrt{m^2+1}} = \cfrac{1}{2\sqrt{m^2+1} - \cfrac{1}{2\sqrt{m^2+1} + \ldots}}$$
$$= [0, +1/2\lambda, -1/2\lambda, -1/2\lambda, \ldots]$$

bulunur.

Diğer k durumlarında, kolaylık olsun diye k>0 alarak, $(m + \sqrt{D})^{-k}$ birimlerini inceleyelim.

$$(m+\sqrt{D})^{-k} = \frac{1}{(m+\sqrt{D})^k}$$

yazılabilir. $k \geq 2$ için $(m+\sqrt{D})^k$ birimlerinin, λ sayısına bağlı sürekli kesirlerini yukarıda $\eta^k = [2b_k\lambda, \varepsilon/2b_k\lambda, \varepsilon/2b_k\lambda, ...]$ olarak bulmuştuk. Dolayısıyla $(m+\sqrt{D})^{-k}$ biriminin λ sayısına bağlı sürekli kesri,

$$\eta^{-k} = [0, 1/2b_k\lambda, \varepsilon/2b_k\lambda, \varepsilon/2b_k\lambda, ...]$$

olarak bulunur. □

7.3.6 Örnek : 7.3.5 Teoremde m=3 ve k=1 alınırsa $\lambda = \sqrt{D}$ için,

$$3+\sqrt{10} = [2\lambda, -1/2\lambda, -1/2\lambda, ...]$$

bulunur. k=-1, -2 içinse

$$(3+\sqrt{10})^{-1} = [0, +1/2\lambda, -1/2\lambda, -1/2\lambda, ...]$$

$$(3+\sqrt{10})^{-2} = [0, +1/12\lambda, +1/12\lambda, +1/12\lambda, ...]$$

yazılabilir.

7.3.7 Teorem : D=n^2-1 (n=2, 3, 4, …) ve kök dışına çıkamayacak tamsayı ise $\mathbf{Z}(\sqrt{D})$ içindeki birimler, sonsuz λ sayısına bağlı sürekli kesre sahiptirler.

İspat : Burada incelediğimiz temel birim $\eta = n+\sqrt{D}$ şeklindedir. $\mathbf{Z}(\sqrt{D})$ içindeki tüm birimler $\pm(n+\sqrt{D})^k$ ($k \in \mathbf{Z}$) formundadır.

$\eta^k = (n+\sqrt{D})^k = (a_k + b_k\sqrt{D})$ olarak yazalım. Benzer şekilde, $k \geq 2$ koşuluyla,

$$\left\{\frac{a_k + b_k\sqrt{D}}{\sqrt{D}}\right\} \approx \left\{\frac{b_k\sqrt{D} + b_k\sqrt{D}}{\sqrt{D}}\right\} = 2b_k$$

bulunur. 7.3.5 Teoremin ispatına benzer olarak,

$$\eta^k = [2b_k\lambda, \varepsilon/2b_k\lambda, \varepsilon/2b_k\lambda, ...]$$

olduğu bulunur.

Diğer durumlarda benzer olarak gösterilir. □

7.3.8 Örnek : 7.3.7 Teoremde n=6 ve k=1 alınırsa $\lambda = \sqrt{D}$ için,

$$6+\sqrt{35} = [2\lambda, +1/2\lambda, +1/2\lambda, ...]$$

bulunur. k=2 içinse

$$(6+\sqrt{35})^2 = [24\lambda, +1/24\lambda, +1/24\lambda, ...]$$

elde edilir.

7.3.9 Teorem : $\lambda = \sqrt{D}$, $D=m^2+1$ (m=1, 3, 4, 5, ...) veya $D=n^2-1$ (n=2, 3, 4, ...) olacak biçimde kök dışına çıkamayacak D tamsayıları için, $\mathbf{Z}(\sqrt{D})$ halkalarının birimleri, $H(\lambda)$ Hecke gruplarının parabolik noktası olamaz.

İspat : 7.3.2, 7.3.5 ve 7.3.7 teoremlerinden istenen sonuç çıkar. □

8. SONUÇLAR

Bu çalışmada elde edilen sonuçları, bölümlere ayırarak verelim.

3. Bölümde, q çift sayı (q=4, 6, ...) olmak üzere $H(\lambda_q)$ Hecke grupları tanıtılmış, tanımlanan $H(\lambda_q)$ Hecke gruplarının, $H^m(\lambda_q)$ kuvvet alt grupları sınıflandırılıp, grup sunuşları elde edilmiştir. Ayrıca bu kuvvet alt gruplarının simgeleri bulunmuştur.

4. Bölümde, ilk olarak $\lambda \geq 2$ sabit sayıları için elde edilen $H(\lambda)$ Hecke grupları tanımlanmış, $H(\lambda)$ Hecke gruplarının, çift alt gruplarıyla ilgilenilmiş, bu grupların sunuşları ve simgeleri bulunmuştur. Ayrıca $H(\lambda)$ Hecke gruplarının kuvvet alt grupları sınıflandırılmış, $H^m(\lambda)$ ile gösterdiğimiz bu grupların sunuşları ile simgeleri incelenmiştir. Son olarak $H(\lambda)$ Hecke gruplarının cinsi 0 olan normal alt grupları ile serbest normal alt grupları çalışılmıştır.

5. Bölümde, çalışacağımız $\overline{H}(\lambda_p)$ genişletilmiş Hecke grupları kısaca tanıtılmış (p asal sayı), $\overline{H}(\lambda_p)$ genişletilmiş Hecke gruplarının , kuvvet ve kamutatör alt grupları ile ilgilenilmiştir. Ayrıca bu alt gruplar arasındaki ilişki bir şekil ile gösterilmiştir. Son olarak $\overline{H}(\lambda_p)$ genişletilmiş Hecke gruplarının, serbest normal alt grupları ve sonlu indeksli normal alt grupları incelenmiştir.

6. Bölümde, $\lambda \geq 2$ reel sayıları için tanımlanan $\overline{H}(\lambda)$ genişletilmiş Hecke gruplarının genel yapısından kısaca bahsedilmiş ve bu grupların kamutatör alt grupları incelenmiş, grup sunuşları elde edilmiştir. Ek olarak $\overline{H}(\lambda)$ genişletilmiş Hecke gruplarının, çift alt grupları ile kuvvet alt grupları bulunmuştur.

7. Bölümde, parabolik noktalar tanıtılmıştır ve $\mathbf{Z}(\sqrt{D})$ içindeki birimlerin $H(\lambda)$ Hecke gruplarının ($\lambda=\sqrt{m^2+1},\sqrt{n^2-1}$), parabolik noktaları olamayacağı gösterilmiştir.

İleride yapılabilecek çalışmalar için, açık problemlerin bazılarını aşağıdaki gibi verebiliriz.

Bu çalışmada verilen 5. ve 6. bölümlerdeki genişletilmiş Hecke gruplarının (sırasıyla $\overline{H}(\lambda_p),\overline{H}(\lambda)$) grup simgelerini elde etmeye yönelik çalışmalar yapılabilir.

Yine 5. Bölümdeki $\overline{H}(\lambda_p)$ genişletilmiş Hecke gruplarında p asal sayısı yerine çift sayılar alınarak, normal alt grupları incelenebilir.

Bu çalışmada elde edilen sonlu indeksli normal alt gruplar ile Cayley graflar arasında ilişkiler kurulabilir.

Bulunan sonsuz indeksli normal alt grupların sunuşları ve simgeleri için çalışmalar yapılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Hecke E., "Über die Bestimmung Dirichletscher Reichen durch ihre Funktionalgleichungen", *Math. Ann.*, 112, (1936), s.664-699.

[2] Cangül İ. N., Normal Subgroups of Hecke Groups, Ph.D. Thesis, Southampton University, (1993).

[3] Newman M., "The Structure of Some Subgroups of The Modular Group", *Illionis J. Math.*, 8, (1962), s. 480-487.

[4] Newman M., "Free Subgroups and Normal Subgroups of The Modular Group", *Illionis J. Math.,* 8, (1964), s. 262-265.

[5] Jones G. A., Singerman D., Complex Functions, Cambridge University Press, (1987), s. 17-19, 221-267.

[6] Başkan T., Kompleks Fonksiyonlar Teorisi, Vipaş, Bursa (2001), s. 318-324.

[7] Başkan T., Ayrık Gruplar, H.Ü. Fen Fakültesi Yayınları, Beytepe, Ankara, (1980), s.1-29.

[8] Ford L. R., Automorphic Functions, Chelsea Publishing Company, New York, (1951), s. 66-82.

[9] Yılmaz N., Cangül İ. N., "On the Group Structure and Parabolic Points of the Hecke Group H(λ)", *Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math.*, 51 (2002), s. 35-46.

[10] Jones G. A., Thornton, J. S., "Automorphisms and Congrunce Subgroups of The Extended Modular Group", *J. London Math. Soc.,* (2), 34, (1986), s. 26-40.

[11] Coxeter H. S. M., Moser W. O. J., Generators and Relations For Discrete Groups, second ed., Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg-New York, (1965), s. 35-38.

[12] Şahin R., Genişletilmiş Hecke Grupları, Doktora Tezi, Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Balıkesir, (2001).

[13] Cangül İ. N., "Determining Isomorphism Class of a Fuchsian Group From Its Signature", *Academica Sinica*, (2001), s. 313-316

[14] Bayraktar M., Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi, Uludağ Üniversitesi Yayınları, Bursa, (1998), s. 108-117, 256-266.

[15] Fraleigh J. B., A First Course in Abstract Algebra, sixthed edition, Addison-Wesley Pub. Comp., (1974), s. 85, 105, 157, 181-189, 224-231.

[16] Magnus W., Karrass A., Solitar D., Combinatorial Group Theory, Dover Publications, Inc. New York, (1976).

[17] Johnson D. L., Presentation of Groups, Cambridge University Press, (1990), s. 1-17, 41-45.

[18] Robinson D. J. S., A Course in the Theory of Groups, Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin, (2001), s. 28, 119-120, 167.

[19] Hungerford T. W., Algebra, Springer-Verlag, New York Inc., (1974), s. 103, 230-238.

[20] Leveque W. J., Fundamentals of Number Theory, Dover, (1996).

[21] Cangül İ. N., Çelik B., Sayılar Teorisi Problemleri, Paradigma Basın Yayın Ltd. Şti., Bursa, (2002), s. 305-330.

[22] İkikardeş S., Şahin R., Koruoğlu Ö., "Power Subgroups of Some Hecke Groups", *Rocky Mountain J. Math.*, yayına kabul edildi.

[23] Cangül İ. N., Singerman D., "Normal Subgroups of Hecke Groups and Regular Maps", *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* (1998), s. 59-74.

[24] Yılmaz N., Cangül İ. N., "Power Subgroups of Hecke Groups H($\sqrt{n}$)", *Int. J. Math. Sci.*, 11, (2001), s. 703-708.

[25] Cangül İ. N., Şahin R., İkikardeş S., Koruoğlu Ö., "Power Subgroups of Some Hecke Groups II" *Houston Journal of Mathematics*, yayına kabul edildi.

[26] Schmidt T. A., Sheingorn M., "Length spectra of the triangle Hecke Groups", *Math. Z.* 220 (1995), s. 369-397.

[27] Schmidt T. A., Sheingorn M., "Covering the Hecke Triangle Surfaces", *The Ramanujan Journal* 1, (1997), s. 155-163.

[28] Sheingorn M., "Geodesics on Riemann Surfaces with Ramification Points of Order Greater than Two", *New York J. Math.*, 7, (2001), s. 189-199.

[29] Cangül İ. N., "Normal Subgroups of the Hecke Group $H(\sqrt{2})^{*}$", *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A*, 43, (1994), s. 129-135.

[30] Yılmaz N., Cangül İ. N., "Normal Subgroups of Hecke Group $H(\sqrt{5})$", *Bull. Inst.Math. Acad. Sinica*, 28, no 4, (2000), s. 277-283.

[31] Knopp M. I., Scheingorn M., "On Dirichlet Series and Hecke Triangle Groups on Infinite Volume", *Acta Arith.*, 76, no 3, (1996), s. 227-244.

[32] Schmidt T., Scheingorn M., "On the Infinite Volume Hecke Surfaces", *Compositio Math.*, 95, no 3, (1995), s. 247-262.

[33] Koruoğlu Ö., Şahin R., İkikardeş S., "Normal Subgroups of Hecke Groups $H(\lambda)$", yayına sunuldu.

[34] Şahin R., İkikardeş S., Koruoğlu Ö., "On the Power Subgroups of the Extended Modular Group $\overline{\Gamma}$", *Turk. J. Math.* ,28, (2004), s. 143-151.

[35] Bizim O., Genişletilmiş Modüler Grup, Doktora Tezi, Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Bursa, (1995).

[36] Şahin R., Koruoğlu Ö., İkikardeş S., "On the Extended Hecke Group $\overline{H}(\lambda_5)$", *Algebra Colloquium.*, yayına kabul edildi.

[37] Şahin R., İkikardeş S., Koruoğlu Ö., "Some Normal Subgroups of The Hecke Groups ($\overline{H}(\lambda_p)$)", *Rocky Mountain J. Math.*, yayına kabul edildi.

[38] Özgür N. Y., Şahin R., "On The Extended Hecke Groups", *Turk. J. Math.*, 27, (2003), s. 473-480.

[39] Şahin R., Bizim O., Cangül İ. N., "Commutator Subgroups of the Extended Hecke Groups $\overline{H}(\lambda_q)$" *Czechoslovak Mathematical Journal*, 54, (2004), s. 253-259.

[40] Lang M. L., Lim C. H., Tan S. P., "Principal congruence subgroups of the Hecke Groups", *Journal of Number Theory*, 85, (2000), s. 220-230.

[41] Koruoğlu Ö., Şahin R., İkikardeş S., "The Normal Subgroup Structure of the Extended Hecke Groups", yayına sunuldu.

[42] Rosen D., Towse Christopher, "Continued Fraction Representations of Units Associated with Certain Hecke Groups", *Archiv der Mathematik* 77, (2001), s. 294-302.

[43] Şahin R., İkikardeş S., Koruoğlu Ö., Cangül İ. N., "The Connections Between Continued Fraction Representations of Units and the Hecke Groups", yayına sunuldu.

[44] Rosen D., "A Class of Continued Fractions Associated with Certain Properly Discontinuous Groups", *Duke Math. J.* 21, (1954), s. 549-564.

[45] Weiss E., Algebraic Number Theory, McGraw-Hill Book Company, Inc. (1963), s. 231-241.