T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

AĞIRLIKLI LORENTZ UZAYLARINDA TRİGONOMETRİK YAKLAŞIM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

AHMET HAMDİ AVŞAR

BALIKESİR, HAZİRAN - 2016

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

AĞIRLIKLI LORENTZ UZAYLARINDA TRİGONOMETRİK YAKLAŞIM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

AHMET HAMDİ AVŞAR

Jüri Üyeleri : Doç. Dr. Yunus Emre YILDIRIR (Tez Danışmanı)
Prof. Dr. Ali GÜVEN
Doç. Dr. Gökhan SOYDAN

BALIKESİR, HAZİRAN - 2016

KABUL VE ONAY SAYFASI

Ahmet Hamdi AVŞAR tarafından hazırlanan "**AĞIRLIKLI LORENTZ UZAYLARINDA TRİGONOMETRİK YAKLAŞIM**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 21.06.2016 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman **Doç. Dr. Yunus Emre YILDIRIR**	....
Üye **Prof. Dr. Ali GÜVEN**	....
Üye **Doç. Dr. Gökhan SOYDAN**	....

Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Doç. Dr. Necati ÖZDEMİR ....

Bu tez çalışması Balıkesir Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi tarafından 2016-150 nolu proje ile desteklenmiştir.

ÖZET

AĞIRLIKLI LORENTZ UZAYLARINDA TRİGONOMETRİK YAKLAŞIM
YÜKSEK LİSANS TEZİ
AHMET HAMDİ AVŞAR
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. YUNUS EMRE YILDIRIR)

BALIKESİR, HAZİRAN - 2016

Bu tezde, ağırlıklı Lorentz uzaylarından olan fonksiyonların türevlerine Fourier serilerinin Cesàro, Riesz ve Nörlund ortalamaları ile yaklaşım problemleri incelenmiştir.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, çalışma konusu ile ilgili daha önce elde edilen sonuçlara değinilmiştir.

İkinci bölümde, öncelikle Lebesgue uzayı, ağırlıklı Lorentz uzayı, Fourier serileri, süreklilik modülü ve Lipschitz sınıfı tanımları ve temel özellikleri verilmiştir. Ayrıca Lebesgue uzaylarında yaklaşım teorisinin bazı düz teoremleri incelenmiştir.

Üçüncü bölümde, ağırlıklı Lorentz uzaylarında elde edilen yaklaşım teoremlerinin ispatlarında kullanılacak olan yardımcı önermelere ve teoremlere yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde, ağırlıklı Lorentz uzaylarından olan fonksiyonlara, bu fonksiyonların türevleri için elde edilen Fourier serilerinin Cesàro, Riesz ve Nörlund ortalamaları ile yaklaşım problemleri incelenmiştir.

Son bölüm bu çalışmada elde edilen sonuçlar ile ilgili bazı yorumları ve önerileri içermektedir.

ANAHTAR KELİMELER: Ağırlıklı Lorentz uzayı, Muckenhoupt sınıfı, süreklilik modülü, Fourier serileri.

ABSTRACT

TRIGONOMETRIC APPROXIMATION IN WEIGHTED LORENTZ SPACES
MSC THESIS
AHMET HAMDİ AVŞAR
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS

(SUPERVISOR: ASSOC. PROF. DR. YUNUS EMRE YILDIRIR)

BALIKESİR, JUNE 2016

In this study, approximation properties of Cesàro, Riesz ve Nörlund means of Fourier series of derivatives of functions in weighted Lorentz spaces are investigated.

This study consists of five chapters.

In the first chapter, older results about this study are given.

In the second chapter, definitions and basic properties of Lebesgue spaces, weighted Lorentz spaces, Fourier series, modulus of continuity, Lipschitz class are given. Furthermore, in Lebesgue spaces, some direct theorems of approximation theory are investigated.

In the third chapter, in weighted Lorentz spaces, auxiliary results and theorems which will be used in the proofs of the main theorems are given.

In the fourth chapter, approximation properties of Cesàro, Riesz ve Nörlund means of Fourier series of derivatives of functions in weighted Lorentz spaces are investigated.

The last chapter includes some comments and recommendations about results obtained in this study.

KEYWORDS: Weighted Lorentz space, Muckenhoupt class, modulus of continuity, Fourier series.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

ω	: Ağırlık fonksiyonu
L^p	: Lebesgue uzayı
$L^{p,q}_{\omega}$	: Ağırlıklı Lorentz uzayı
$A_p(T)$	: Muckenhoupt sınıfı
$\Omega(f,\delta)$	: Süreklilik modülü
σ_n	: Cesàro ortalaması
R_n	: Riesz ortalaması
N_n	: Nörlund ortalaması

ÖNSÖZ

Lisansüstü öğrenim hayatım süresince bana değerli zamanını ayıran, bilgi ve tecrübesiyle beni yönlendiren, hiçbir yardımını benden esirgemeyen değerli hocam ve danışmanım Doç. Dr. Yunus Emre YILDIRIR'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca Balıkesir Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi'ne 2016-150 nolu proje kapsamında desteklerinden dolayı teşekkürlerimi sunarım.

1. GİRİŞ

Bu tezde ağırlıklı Lorentz uzaylarında trigonometrik Fourier serilerinin Cesàro, Riesz ve Nörlund ortalamaları ile yaklaşım problemleri incelenmiştir. Lebesgue uzaylarında Cesàro ortalamaları ile yaklaşım problemleri birçok araştırmacı tarafından çalışılmıştır [1-3].

Quade [1], $p > 1$ için Lebesgue uzaylarından olan fonksiyonlara, bu uzaydan olan fonksiyonların Fourier serilerinin Cesàro ortalaması ile yaklaşım problemini inceledi ve yaklaşım hızını $O(n^{-\alpha})$ olarak belirledi.

Quade [1] tarafından elde edilen sonuçların bazı genelleştirmeleri Sahney ve Rao [4], Mohapatra ve Russell [5], Chandra [6-9] ve Leindler [10] tarafından çalışılmıştır.

Chandra [6,7], $1 < p < \infty$ durumunda Lebesgue uzaylarında f fonksiyonunun Fourier serisinin $N_n(f)$ Nörlund ve $R_n(f)$ Riesz ortalamaları ile yaklaşım problemlerini inceledi ve $\|f - N_n(f,\ \cdot)\|_p$, $\|f - R_n(f,\ \cdot)\|_p$ farkları için bazı değerlendirmeler elde etti. Ayrıca [9] nolu çalışmasında $(p_n)_0^\infty$ dizisi üzerine monotonluk koşulunu koyarak Lebesgue uzaylarında $N_n(f)$ ve $R_n(f)$ ortalamaları ile yaklaşım hakkında bazı sonuçlar elde etti.

Leindler [10], Chandra'nın [9] nolu çalışmasındaki $(p_n)_0^\infty$ dizisi üzerindeki monotonluk koşulunu iyileştirerek Lebesgue uzaylarında benzer yaklaşım problemlerini inceledi.

Mohapatra ve Russell [5] ve Sahney ve Rao [4] Lebesgue uzaylarından olan fonksiyonların Fourier serilerinin Nörlund ortalamalarındaki $(p_n)_0^\infty$ dizisi üzerine farklı koşullar koyarak benzer yaklaşım teoremlerini incelemişlerdir.

Güven [11], Lebesgue uzaylarında Nörlund ve Riesz ortalamaları ile ilgili bazı yaklaşım teoremlerini ağırlıklı Lebesgue uzaylarında ispatladı.

Bu çalışmada Nörlund, Riesz ve Cesàro ortalamaları ile ilgili yaklaşım problemleri ağırlıklı Lorentz uzaylarında incelenmiş ve bu uzaya ait olan fonksiyonların türevlerine Fourier serilerinin Nörlund, Riesz ve Cesàro ortalamaları ile yaklaşım teoremleri ispatlanmıştır [12].

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanımlar ve gösterimler yer almaktadır.

2.1 Lebesgue Uzayları

2.1.1 Tanım : $\boldsymbol{T} \coloneqq [0, 2\pi]$ ve $1 \leq p < \infty$ için

$$\|f\|_{\mathrm{p}} = \left(\int_{\boldsymbol{T}} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

koşulunu sağlayan $f: \boldsymbol{T} \to \mathbb{R}$ ölçülebilir fonksiyonların uzayına Lebesgue uzayı denir ve $L^p(\boldsymbol{T})$ ile gösterilir. $L^p(\boldsymbol{T})$, $\|f\|_{\mathrm{p}}$ normuna göre bir Banach uzayıdır.

2.2 Fourier Serileri

2.2.1 Tanım : a_k ve b_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ sabit sayılar olmak üzere

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{2.1}$$

serisine trigonometrik seri denir.

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin kx - b_k \cos kx)$$

serisine de (2.1) serisinin eşlenik serisi denir.

$$t_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \qquad \text{n} = 0,1,2, \ldots.$$

ifadesine ise *n.* dereceden bir trigonometrik polinom denir.

2.2.2 Tanım : $f \in L^1(\boldsymbol{T})$ olsun.

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) cosktdt \ , k = 0,1,2, \ldots$$

ve

$$b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) sinktdt \ , k = 1,2, \ldots$$

olmak üzere

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) coskx + b_k(f) sinkx)$$

serisine f fonksiyonunun Fourier serisi denir. f fonksiyonunun eşlenik Fourier serisi

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) sinkx - b_k(f) coskx)$$

biçiminde tanımlanır.

2.2.3 Tanım : $A_0(f)(x) \coloneqq \frac{a_0}{2}$,

$$A_k(f)(x) \coloneqq a_k(f) coskx + b_k(f) sinkx, \qquad k = 1,2, \ldots$$

olmak üzere

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k(f)(x), \qquad n = 0,1,2, \ldots$$

biçiminde tanımlı $\left(S_n(f)\right)$ dizisine f fonksiyonunun Fourier serisinin kısmi toplamlar dizisi denir.

2.2.4 Tanım : $(p_n)_0^\infty$ pozitif reel sayıların bir dizisi olsun.

$$P_n = \sum_{m=0}^{n} p_m$$

ve $p_{-1} = P_{-1} \coloneqq 0$ olmak üzere, f fonksiyonunun Fourier serisinin $(p_n)_0^\infty$ dizisine göre Nörlund ortalaması

$$N_n(f,x) = \frac{1}{P_n} \sum_{m=0}^{n} p_{n-m} S_m(f,x), \tag{2.2}$$

Riesz ortalaması

$$R_n(f,x) = \frac{1}{P_n} \sum_{m=0}^{n} p_m S_m(f,x) \tag{2.3}$$

biçiminde tanımlanır.

$p_n = 1$ ve $n \geq 0$ olduğu durumda $N_n(f,x)$ ve $R_n(f,x)$ ortalamaları

$$\sigma_n(f,x) = \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^{n} S_m(f,x)$$

Cesàro ortalamasına eşittir.

2.3 Lorentz Uzayları

Bu bölümde Lebesgue uzaylarının önemli bir genelleştirmesi olan Lorentz uzayları incelenecektir.

2.3.1 Tanım : $f: \boldsymbol{T} \to \mathbb{R}$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\lambda > 0$ için f fonksiyonunun dağılım fonksiyonu, μ $\mathbb{R}$ üzerinde Lebesgue ölçümü olmak üzere

$$\mu_f(\lambda) = \mu(\{x \in \mathbb{R}: |f(x)| > \lambda\})$$

biçiminde tanımlanır [13, s. 37].

2.3.2 Önerme : f, 2π periyotlu ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere f fonksiyonunun μ_f dağılım fonksiyonu, negatif olmayan, azalan ve $[0, \infty)$ aralığı üzerinde sağdan sürekli bir fonksiyondur [13, s. 37].

İspat : μ_f dağılım fonksiyonunun negatif olmadığı açıktır.

Şimdi μ_f dağılım fonksiyonunun azalan olduğunu gösterelim.

$E_1 = \{x \in \mathbb{R} : |f(x)| > \lambda_1\}$ ve $E_2 = \{x \in \mathbb{R} : |f(x)| > \lambda_2\}$ biçiminde tanımlı kümeler olsun. Bu durumda, eğer $\lambda_1 > \lambda_2$ ise $E_1 \subset E_2$ olur. Böylece $\mu_f(\lambda_1) < \mu_f(\lambda_2)$ elde edilir.

μ_f dağılım fonksiyonunun sağdan sürekli olduğunu ispatlayalım. $\lambda \geq 0$ için $E(\lambda)$ kümesi $E(\lambda) = \{x \in \mathbb{R} : |f(x)| > \lambda\}$ biçiminde tanımlı ve $\lambda_0 > 0$ sabit sayı olsun. λ büyüdükçe $E(\lambda)$ kümesi daralır ve $E(\lambda_0) = \bigcup_{\lambda > \lambda_0} E(\lambda) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\left(\lambda_0 + \frac{1}{n}\right)$ elde edilir.

$E(\lambda_0) = \bigcup_{\lambda > \lambda_0} E(\lambda)$ olduğunu ispatlayalım.

Eğer $x \in E(\lambda_0)$ ise, bu durumda $|f(x)| > \lambda_0$ olur. $\lambda \geq 0$ ve $|f(x)| > \lambda > \lambda_0$ olsun. Bu durumda $x \in E(\lambda)$ olur. Bu nedenle $E(\lambda_0) \subset \bigcup_{\lambda > \lambda_0} E(\lambda)$ elde edilir. $\bigcup_{\lambda > \lambda_0} E(\lambda) \subset E(\lambda_0)$ olduğu açıktır. Son iki kapsamadan $E(\lambda_0) = \bigcup_{\lambda > \lambda_0} E(\lambda)$ elde edilir.

Şimdi de $\bigcup_{\lambda > \lambda_0} E(\lambda) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\left(\lambda_0 + \frac{1}{n}\right)$ olduğunu ispatlayalım.

Eğer $x \in \bigcup_{\lambda > \lambda_0} E(\lambda)$ ise, bu durumda öyle bir $\lambda > \lambda_0$ sayısı vardır ki $|f(x)| > \lambda$ olur. $\lambda > \lambda_0$ olmak üzere, $\lambda > \lambda_0 + \frac{1}{n}$ olacak biçimde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece $\bigcup_{\lambda > \lambda_0} E(\lambda) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E\left(\lambda_0 + \frac{1}{n}\right)$ elde edilir.

$\bigcup_{n=1}^{\infty} E\left(\lambda_0 + \frac{1}{n}\right) \subset \bigcup_{\lambda>\lambda_0} E(\lambda)$ olduğu açıktır. Son iki kapsamadan $\bigcup_{\lambda>\lambda_0} E(\lambda) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\left(\lambda_0 + \frac{1}{n}\right)$ bulunur.

Bunun bir sonucu olarak, λ büyüdükçe $E(\lambda)$ kümesi daraldığından monoton yakınsaklık teoremi kullanılarak

$$\mu_f\left(\lambda_0 + \frac{1}{n}\right) = \mu_f\left(E\left(\lambda_0 + \frac{1}{n}\right)\right) \uparrow \mu\big(E(\lambda_0)\big) = \mu_f(\lambda_0)$$

elde edilir ve bu durum sağdan sürekliliğin doğruluğunu ortaya koyar.

2.3.3 Tanım : $f\colon \boldsymbol{T} \to \mathbb{R}$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda $t \in [0,\infty)$ için $f^*\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ fonksiyonu

$$f^*(t) = inf\{\lambda\colon \mu_f(\lambda) \le t\}$$

biçiminde tanımlanır ve f fonksiyonunun azalan rearrangement fonksiyonu olarak adlandırılır.

2.3.4 Tanım : f hemen her yerde sonlu, ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda $t > 0$ için

$$f^{**}(t) := \frac{1}{t}\int_0^t f^*(u)du$$

biçiminde tanımlanan f^{**} fonksiyonuna f^* fonksiyonunun maximal fonksiyonu denir.

2.3.5 Tanım : 1<p, q< ∞ olsun.

$$\|f\|_{L^{p,q}} = \left(\int_{\boldsymbol{T}} \left[t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right]^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}$$

ve $\|f\|_{L^{p,q}} < \infty$ koşulunu sağlayan $\boldsymbol{T}$ üzerinde bütün ölçülebilir f fonksiyonlarının sınıfına Lorentz uzayı denir ve $L^{p,q}(\boldsymbol{T})$ ile gösterilir.

Lorentz uzayları f^{**} fonksiyonu kullanılarak aşağıdaki şekilde de tanımlanır.

$1 < p, q < \infty$ olsun.

$$\|f\|_{L^{(p,q)}} = \left(\int_{\boldsymbol{T}} \left[t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) \right]^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}$$

ve $\|f\|_{L^{(p,q)}} < \infty$ koşulunu sağlayan $\boldsymbol{T}$ üzerinde bütün ölçülebilir f fonksiyonlarının sınıfına Lorentz uzayı denir ve $L^{(p,q)}(\boldsymbol{T})$ ile gösterilir.

Bu normlar birbirine denktir ve Lorentz uzayları bu normlara göre Banach uzayı olur [13, s. 216-219].

$1 < p < \infty$ için $L^{p,p}(\boldsymbol{T})$ Lorentz uzayı $L^p(\boldsymbol{T})$ Lebesgue uzayı ile çakışır ve $f \in L^p(\boldsymbol{T})$ için

$$\|f\|_{p,p} = \|f\|_p$$

yazılır [13, s. 216].

2.4 Ağırlık Fonksiyonları ve Ağırlıklı Lorentz Uzayı

2.4.1 Tanım : Eğer ω:$\boldsymbol{T}$→[0,∞] fonksiyonu 2π-periyotlu ölçülebilir ve $\omega^{-1}(\{0, \infty\})$ kümesinin Lebesgue ölçümü sıfır ise ω fonksiyonuna ağırlık fonksiyonu denir.

2.4.2 Tanım : ω bir ağırlık fonksiyonu ve e ölçülebilir bir küme olmak üzere

$$\omega(e) := \int_e \omega(x) dx \tag{2.4}$$

olsun. $f: \boldsymbol{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun $f_\omega^*(t)$ azalan rearrangement fonksiyonu (2.4) Borel ölçümüne göre

$$f_\omega^*(t) = inf\{\tau \geq 0: \omega(\{x \in T: |f(x)| > \tau\}) \leq t)\}$$

biçiminde tanımlanır. Buna göre $f_\omega^{**}(t)$ ortalama fonksiyonu

$$f_\omega^{**}(t) := \frac{1}{t} \int_0^t f_\omega^*(u) du$$

olur.

2.4.3 Tanım : $1 < p, q < \infty$ ve $f: \boldsymbol{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu 2π periyotlu ve ölçülebilir olsun.

$$\|f\|_{pq,\omega} = \left(\int_{\boldsymbol{T}} \left(f_\omega^{**}(t) \right)^q t^{\frac{q}{p}} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonlarının sınıfına ağırlıklı Lorentz uzayı denir ve $L_\omega^{p,q}(\boldsymbol{T})$ ile gösterilir [14, s. 21].

$L_\omega^{p,q}(\boldsymbol{T})$ ağırlıklı Lorentz uzayı $\|f\|_{pq,\omega}$ normuna göre Banach uzayıdır.

2.4.4 Tanım : T_n, derecesi *n* yi geçmeyen trigonometrik polinomların kümesi olsun. $f \in L_\omega^{p,q}(T)$ fonksiyonuna, derecesi *n* yi aşmayan trigonometrik polinomlar ile en iyi yaklaşım sayıları dizisi $E_n(f)_{L_\omega^{p,q}}$ ile gösterilir ve

$$E_n(f)_{L_\omega^{p,q}} = \inf_{t_n \in T_n} \|f - t_n\|_{pq,\omega}$$

olarak tanımlanır.

2.4.5 Önerme : $f_1 \in L_\omega^{p_1,q_1}(\boldsymbol{T})$, $f_2 \in L_\omega^{p_2,q_2}(\boldsymbol{T})$, $p = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$ ve $q = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$ olsun. $c > 0$ sayısı için

$$\|f_1 f_2\|_{L_\omega^{p,q}} \le c \|f_1\|_{L_\omega^{p_1,q_1}} \|f_2\|_{L_\omega^{p_2,q_2}}$$

elde edilir [15].

2.4.6 Önerme : $\{f_n\}$ mutlak sürekli fonksiyonların bir dizisi ve $\omega \in A_p(\boldsymbol{T})$ olsun. $1 < p, q < \infty$ için $\{f_n\}$ dizisi $f \in L_\omega^{p,q}(\boldsymbol{T})$ fonksiyonuna yakınsıyor ve $\{f_n'\}$ birinci türev dizisi $g \in L_\omega^{p,q}(\boldsymbol{T})$ yakınsıyor ise, bu durumda f mutlak süreklidir ve hemen her yerde $f'(x) = g(x)$ olur [16, Lemma 4.6].

İspat : $\| f_n - f\|_{L_\omega^{pq}} \to 0$ olduğundan öyle bir p_0 sayısı vardır ki $1 < p_0 < p$ için $\| f_n - f\|_{L^{p_0}} \to 0$ olur.

Böylece $\{f_n\}$ dizisinin öyle bir $\{f_{n_k}\}$ alt dizisi vardır ki hemen her yerde $f_{n_k(x)} \to f_n(x)$ olur. x_0 yakınsaklık noktası olsun. Lorentz uzayları için Hölder eşitsizliği kullanılarak

$$\left| \int_{x_0}^{x} f'_{n_k}(t)dt - \int_{x_0}^{x} g(t)dt \right| \leq \| f'_{n_k} - g\|_{L_\omega^{pq}} \|\omega^{-1}\|_{L_\omega^{p'q'}}$$

elde edilir.

$\omega \in A_p(\boldsymbol{T})$ olduğundan $\|\omega^{-1}\|_{L_\omega^{p'q'}} < \infty$ olur. Dolayısıyla

$$\lim_{k\to\infty} \left| \int_{x_0}^{x} f'_{n_k}(t)dt - \int_{x_0}^{x} g(t)dt \right|$$

bulunur. Bu nedenle

$$\int_{x_0}^{x} g(t)dt = \int_{x_0}^{x} f'_{n_k}(t)dt = \lim_{k\to\infty}\left(f_{n_k}(x) - f_{n_k}(x_0)\right) = f(x) - f(x_0)$$

elde edilir ve bu da ispatı tamamlar.

2.5 Süreklilik Modülü

$L^p(\boldsymbol{T})$ Lebesgue uzaylarında integral süreklilik modülü şöyle tanımlanır.

2.5.2 Tanım : $p > 1$ için $f \in L^p(\boldsymbol{T})$ fonksiyonunun integral süreklilik modülü

$$\omega_p(\delta;\, f) = \sup_{|h|\leq\delta} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\boldsymbol{T}} |f(x+t) - f(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}$$

biçiminde tanımlanır.

$L_\omega^{p,q}(\boldsymbol{T})$ ağırlıklı Lorentz uzaylarında integral süreklilik modülü şöyle tanımlanır.

2.5.2 Tanım : $\delta > 0$ olsun.

$$(A_h f)(x) := \frac{1}{h}\int_0^h |f(x+t) - f(x)|dt$$

olmak üzere,

$$\Omega(f,\delta)_{L_\omega^{p,q}} = \sup_{|h|\le\delta} \|A_h f\|_{pq,\omega}$$

biçiminde tanımlanan $\Omega(f,\delta)_{L_\omega^{p,q}}$ fonksiyonuna $f \in L_\omega^{p,q}(\boldsymbol{T})$ fonksiyonunun süreklilik modülü denir.

2.5.1 Tanım : $1 < p < \infty$ ve $p' = \frac{p}{p-1}$ olsun. $A_p(\boldsymbol{T})$ Muckenhoupt sınıfı

$$sup \frac{1}{|I|}\int_I \omega(x)dx \left(\frac{1}{|I|}\int_I \omega^{1-p'}(x)dx\right)^{p-1} < \infty$$

koşulunu sağlayan ω ağırlık fonksiyonlarının sınıfı olarak tanımlanır. Burada supremum, uzunluğu $\le 2\pi$ olan aralıklar üzerinden alınır. $|I|$, I aralığının uzunluğunu gösterir [17].

$1 < p < \infty$ için $\omega \in A_p(\boldsymbol{T})$ olduğundan $f \in L_\omega^{p,q}(\boldsymbol{T})$ için Hardy-Littlewood maximal fonksiyonu ağırlıklı Lorentz uzaylarında sınırlı olur [18].

Bu nedenle $A_h f$ Steklov operatörü $L_\omega^{p,q}(\boldsymbol{T})$ ağırlıklı Lorentz uzayına ait olur. Böylece $\Omega(f,\delta)_{L_\omega^{p,q}}$ sürekllik modülü $\omega \in A_p(\boldsymbol{T})$ için anlamlı olur.

Buna ek olarak $\Omega(f,\delta)_{L_\omega^{p,q}}$ sürekllik modülü azalmayan, negatif olmayan, sürekli bir fonksiyondur ve

$$\lim_{\delta\to 0} \Omega(f,\delta)_{L_\omega^{p,q}} = 0$$

ve

$$\Omega(f_1+f_2,\delta)_{L_\omega^{p,q}} \le \Omega(f_1,\delta)_{L_\omega^{p,q}} + \Omega(f_2,\delta)_{L_\omega^{p,q}}$$

özelliklerini sağlar.

2.6 Lipschitz Sınıfı

2.6.1 Tanım : $\delta > 0$ olsun. $0 < \alpha \leq 1$, $1 \leq p < \infty$ için $f \in L^p(\boldsymbol{T})$ fonksiyonlarının oluşturduğu Lipschitz sınıfı

$$Lip(\alpha, L^p) = \{f \in L^p(\boldsymbol{T}) : \omega_p(\delta;\ f) = O(\delta^\alpha)\}$$

biçiminde tanımlanır.

2.6.2 Tanım : $\delta > 0$ olsun. $0 < \alpha \leq 1$, $1 < p, q < \infty$ için $f \in L_\omega^{p,q}(\boldsymbol{T})$ fonksiyonlarının oluşturduğu Lipschitz sınıfı

$$Lip(\alpha, L_\omega^{p,q}) = \left\{f \in L_\omega^{p,q}(\boldsymbol{T}) : \Omega(f, \delta)_{L_\omega^{p,q}} = O(\delta^\alpha)\right\}$$

biçiminde tanımlanır.

Eğer $1 < p < \infty$ için $\omega \in A_p(\boldsymbol{T})$ ise $L_\omega^{p,q}(\boldsymbol{T}) \subset L^1(\boldsymbol{T})$ olduğundan ([16]) $f \in L_\omega^{p,q}(\boldsymbol{T})$ fonksiyonunun Fourier serisi

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) coskx + b_k(f) sinkx)$$

ve f fonksiyonunun eşlenik Fourier serisi

$$\tilde{f}(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) sinkx - b_k(f) coskx)$$

biçiminde tanımlanabilir.

2.7 Bazı Yaklaşım Teoremleri

Öncelikle teoremlerin ispatlarında kullanılacak olan önermeleri verelim.

2.7.1 Önerme : Eğer $f \in Lip(\alpha, L^p)$, $p \geq 1$ ve $0 < \alpha \leq 1$ ise, bu durumda herhangi bir pozitif n tamsayısı için, $f \in L^p(T)$ fonksiyonuna n. dereceden t_n trigonometrik polinomlar ile yaklaşılabilir ve

$$\|f - t_n(f)\|_p = O(n^{-\alpha})$$

olur [1, Teorem 4].

2.7.2 Önerme : $p > 1$ için eğer $f \in Lip(\alpha, L^p)$ ise, bu durumda

$$\|\sigma_n(f) - S_n(f)\|_p = O(n^{-1})$$

olur [1, s. 541].

2.7.3 Önerme : $0 < \alpha \leq 1$ ve $p > 1$ için $f \in Lip(\alpha, L^p)$ olsun. Bu durumda

$$\|f - S_n(f)\|_p = O(n^{-\alpha})$$

olur [1, s. 541].

2.7.4 Önerme : (p_n) dizisi pozitif ve artmayan bir dizi olsun. Bu durumda $0 < \alpha < 1$ için

$$\sum_{m=1}^{n} m^{-\alpha} p_{n-m} = O(n^{-\alpha} P_n)$$

olur.

İspat : r, $\frac{n}{2}$ sayısının tam kısmı olsun. Bu durumda

$$\sum_{m=1}^{n} m^{-\alpha} p_{n-m} = \sum_{m=1}^{r} m^{-\alpha} p_{n-m} + \sum_{m=r+1}^{n} m^{-\alpha} p_{n-m}$$

$$\leq p_{n-r} \sum_{m=1}^{n} m^{-\alpha} + (r+1)^{-\alpha} \sum_{m=0}^{n} p_{n-m}$$

$$= O(n^{1-\alpha}) p_{n-r} + O(n^{-\alpha}) P_n$$

$$= O(n^{-\alpha}) P_n,$$

olmak üzere (p_n) dizisi artmayan olur. Bu durum da ispatı tamamlar.

Aşağıdaki teorem Quade ([1]) tarafından ispatlanmıştır.

2.7.5 Teorem : $f \in Lip(\alpha, L^p)$ ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Bu durumda

(i) $p > 1$, $0 < \alpha \leq 1$ ya da

(ii) $p = 1$, $0 < \alpha < 1$ için

$$\|f - \sigma_n(f)\|_p = O(n^{-\alpha})$$

olur.

Chandra [8], Lebesgue uzaylarından olan fonksiyonların Fourier serilerinin Nörlund ve Riesz ortalamaları ile yaklaşım özelliklerini inceledi ve aşağıdaki yaklaşım teoremlerini ispatladı.

2.7.6 Teorem : $f \in Lip(\alpha, L^p)$ ve (p_n) dizisi

$$(n+1)p_n = O(P_n) \tag{2.5}$$

koşulunu sağlayan pozitif reel sayıların bir dizisi olsun. Eğer

(i) $p > 1$, $0 < \alpha \leq 1$ ve (p_n) monoton ya da

(ii) $p = 1$, $0 < \alpha < 1$ ve (p_n) azalmayan ise, bu durumda

$$\|f - N_n(f)\|_p = O(n^{-\alpha}).$$

İspat. 1. Durum

$p > 1$, $0 < \alpha < 1$ olsun.

$$N_n(f, x) = \frac{1}{P_n} \sum_{m=0}^{n} p_{n-m} S_m(f, x)$$

olduğundan

$$N_n(f, x) - f(x) = \frac{1}{P_n} \sum_{m=0}^{n} p_{n-m} [S_m(f, x) - f(x)]$$

yazılır. Önerme 2.7.3, Önerme 2.7.4 ve (2.5) kullanılarak

$$\|f - N_n(f)\|_p \leq \frac{1}{P_n} \sum_{m=0}^{n} p_{n-m} \|f - S_m(f)\|_p$$

$$= \frac{1}{P_n} \sum_{m=1}^{n} p_{n-m} O(m^{-\alpha}) + O\left(\frac{p_n}{P_n}\right)$$

$$= O(n^{-\alpha})$$

elde edilir.

2. Durum

$p > 1, \alpha = 1$ olsun.

$$S_n(f,x) = \sum_{m=0}^{n} A_m(f,x) = \frac{1}{P_n} \sum_{m=0}^{n} P_n S_m(f,x)$$

olduğundan Abel dönüşümü kullanılarak

$$N_n(f,x) = \frac{1}{P_n} \sum_{m=0}^{n} P_{n-m} A_m(f,x)$$

yazılır. Bunun sonucu olarak, $P_{-1} = 0$ toplamından ve Abel dönüşümünden

$$S_n(f,x) - N_n(f,x) = \frac{1}{P_n} \sum_{m=1}^{n} (P_n - P_{n-m}) A_m(f,x)$$

$$= \frac{1}{P_n} \sum_{m=1}^{n} \Delta_{\mathrm{m}} \left(\frac{P_n - P_{n-m}}{m}\right) \sum_{k=1}^{m} k\, A_k(f,x)$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{m} k\, A_k(f,x)$$

elde edilir. Böylece

$$\|S_n(f) - N_n(f)\|_p = \frac{1}{P_n} \sum_{m=1}^{n} \left|\Delta_{\mathrm{m}} \left(\frac{P_n - P_{n-m}}{m}\right)\right| \left\|\sum_{k=1}^{m} k\, A_k(f)\right\|_p$$

$$+ \frac{1}{n+1} \left\|\sum_{k=1}^{n} k A_k(f)\right\|_p \tag{2.6}$$

olur.

$$\sigma_n(f,x) - S_n(f,x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} kA_k(f,x)$$

olmak üzere Önerme 2.7.2 kulanılarak

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} kA_k(f)\right\|_p = (n+1)\|\sigma_n(f) - S_n(f)\|_p = O(1) \tag{2.7}$$

olur. (2.6) ve (2.7) kullanılarak

$$\|S_n(f) - N_n(f)\|_p = O\left(\frac{1}{P_n}\right)\sum_{m=1}^{n}\left|\Delta_{\mathrm{m}}\left(\frac{P_n - P_{n-m}}{m}\right)\right| + O(n^{-1}) \tag{2.8}$$

elde edilir.

Buna ek olarak (p_n) dizisi azalmayan ve negatif olmayan bir dizi ya da artmayan ve pozitif olmayan bir dizi olduğunda

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathrm{m}}\left(\frac{P_n - P_{n-m}}{m}\right) &= \frac{P_{n-m-1} - P_{n-m}}{m} + \frac{P_n - P_{n-m-1}}{m(m+1)} \\ &= \frac{P_n - P_{n-m-1}}{m(m+1)} - \frac{p_{n-m}}{m} \\ &= \frac{1}{m(m+1)}\{(P_n - P_{n-m-1}) - (m+1)p_{n-m}\} \\ &= \frac{1}{m(m+1)}\left\{\sum_{k=n-m}^{n} p_k - (m+1)p_{n-m}\right\}\end{aligned}$$

yazılır. Bundan dolayı (p_n) dizisi monoton ise $\left\{\frac{P_n - P_{n-m}}{m}\right\}_{m=1}^{n+1}$ dizisi de monotondur ve $P_{-1} = 0$ toplamı kullanılarak

$$\sum_{m=1}^{n}\left|\Delta_{\mathrm{m}}\left(\frac{P_n - P_{n-m}}{m}\right)\right| = \left|p_n - \frac{P_n}{n+1}\right| \tag{2.9}$$

elde edilir. Böylece (2.8) eşitsizliğinde (2.9) ve (2.5) kullanılarak

$$\|S_n(f) - N_n(f)\|_p = O\left(n^{-1}\right) \tag{2.10}$$

elde edilir. Son olarak (2.10) ve Önerme 2.7.3 kullanılarak $\alpha = 1$ için

$$\|f - N_n(f)\|_p = O(n^{-\alpha})$$

olur.

3. Durum

$p = 1$, $0 < \alpha < 1$ olsun.

$p_{-1} = 0$ ve Abel dönüşümü kullanılarak

$$N_n(f,x) - f(x) = \frac{1}{P_n}\sum_{m=0}^{n} p_{n-m}[S_m(f,x) - f(x)]$$

$$= \frac{1}{P_n}\sum_{m=0}^{n} \Delta_m p_{n-m} \sum_{k=0}^{m} [S_k(f,x) - f(x)]$$

$$= \frac{1}{P_n}\sum_{m=0}^{n} (m+1)\Delta_m p_{n-m}[\sigma_m(f,x) - f(x)]$$

olur. Böylece (p_n) dizisinin azalmayan olması, (2.5) ve Teorem 2.7.5 kullanılarak

$$\|f - N_n(f)\|_1 \leq \frac{1}{P_n}\sum_{m=0}^{n} (m+1)|\Delta_m p_{n-m}|\ \|f - \sigma_m(f)\|_1$$

$$= O\left(\frac{1}{P_n}\right)\sum_{m=0}^{n} (m+1)^{1-\alpha}|\Delta_m p_{n-m}|$$

$$= O\left(\frac{n^{1-\alpha}}{P_n}\right)\sum_{m=0}^{n} |\Delta_m p_{n-m}|$$

$$= O(n^{-\alpha})$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

2.7.7 Teorem : $f \in Lip(\alpha, L^p)$ ve (p_n) pozitif reel sayıların dizisi olsun. Eğer

(i) $p > 1$, $0 < \alpha \leq 1$ ve

(ii)

$$\sum_{m=0}^{n} \left| \Delta \left(\frac{P_m}{m+1} \right) \right| = O\left(\frac{P_n}{n+1} \right) \tag{2.12}$$

ya da

(i) $p = 1$, $0 < \alpha < 1$ ve

(ii) (p_n) dizisi (2.5) koşulunu sağlayan pozitif ve azalmayan bir dizi ise

$$\|f - R_n(f)\|_p = O(n^{-\alpha})$$

olur.

İspat. 1. Durum

$p > 1$, $0 < \alpha < 1$ olsun.

$$R_n(f,x) = \frac{1}{P_n} \sum_{m=0}^{n} p_m S_m(f,x)$$

olduğundan

$$f(x) - R_n(f,x) = \frac{1}{P_n} \sum_{m=0}^{n} p_m [f(x) - S_m(f,x)]$$

olur. Abel dönüşümü ve (2.12) kullanarak

$$\sum_{m=1}^{n} m^{-\alpha} p_m = O(1) \sum_{m=1}^{n-1} m^{-\alpha} \left(\frac{P_m}{m+1} \right) + n^{-\alpha} P_n = O(n^{-\alpha} P_n) \tag{2.13}$$

olur. Böylece Önerme 2.7.3 kullanılarak

$$\|f - R_n(f)\|_p \leq \frac{1}{P_n} \sum_{m=0}^{n} p_m \|f - S_m\|_p$$

$$= O\left(\frac{1}{P_n}\right)\sum_{m=1}^{n} m^{-\alpha}p_m \tag{2.14}$$

elde edilir. (2.14) eşitsizliğinde (2.13) kullanılarak

$$\|f - R_n(f)\|_p = O(n^{-\alpha})$$

elde edilir.

2. Durum

$p > 1$, $\alpha = 1$ olsun. $R_n(f)(x)$'e Abel dönüşümü uygulayarak

$$f(x) - S_n(f,x) = -\frac{1}{P_n}\sum_{m=0}^{n-1} P_m A_{m+1}(f,x) \tag{2.15}$$

olur ve tekrar Abel dönüşümünü uygulayarak

$$\sum_{m=0}^{n-1} P_m A_{m+1}(f,x) = \sum_{m=0}^{n-1} \Delta\left(\frac{P_m}{m+1}\right)\sum_{k=0}^{m}(k+1)A_{m+1}(f,x)$$

$$+\frac{P_n}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)A_{m+1}(f,x)$$

olur ve böylece (2.12) kullanılarak

$$\left\|\sum_{m=0}^{n-1} P_m A_{m+1}(f)\right\|_p = O(1)\sum_{m=0}^{n-1}\left|\Delta\left(\frac{P_m}{m+1}\right)\right| + O\left(\frac{P_n}{n+1}\right)$$

$$= O\left(\frac{P_n}{n+1}\right) \tag{2.16}$$

olur. Bu durumda (2.16) kullanarak (2.15) eşitsizliğinden

$$\|f - R_n(f)\|_p = O(n^{-1}) \tag{2.17}$$

elde edilir. Son olarak (2.17) ve Önerme 2.7.3 e başvurarak ve

$$\|f - R_n(f)\|_p \le \|f - S_n(f)\|_p + \|S_n(f) - R_n(f)\|_p$$

eşitsizliğinden $p > 1$, $\alpha = 1$ için

$$\|f - R_n(f)\|_p = O(n^{-\alpha})$$

elde edilir.

3. Durum

$p = 1$, $0 < \alpha < 1$ olsun. Teorem 2.7.5, (p_n) azalamayanlığından ve (p_n) dizisinin (2.5) koşulunu sağlamasından

$$\|f - R_n(f)\|_1 = \frac{1}{P_n}\left\|\sum_{m=0}^{n} p_m\{f - S_m\}\right\|_1$$

$$\le \frac{1}{P_n}\sum_{m=0}^{n-1}(m+1)|\Delta p_m|\,\|f - \sigma_m(f)\|_1$$

$$+\frac{(n+1)p_n}{P_n}\|f - \sigma_n(f)\|_1$$

$$= O\left(\frac{n^{1-\alpha}}{P_n}\right)\sum_{m=0}^{n-1}|\Delta p_m| + O(n^{-\alpha})$$

$$= O(n^{-\alpha})$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

3. YARDIMCI TEOREMLER

Bu bölümde, dördüncü bölümde ifade edilecek olan ağırlıklı Lorentz uzayları ile ilgili elde edilen ana teoremlerin ispatlarında kullanılacak olan önermeler ve tanımlar verilecektir.

3.1 Önerme : $f \in L_{\omega}^{p,q}(\boldsymbol{T})$, 1<p, q<∞, $\omega \in A_p(\boldsymbol{T})$ ve $\left(S_n(f)\right)$, f fonksiyonunun Fourier serisinin n. dereceden kısmi toplamı olsun. Bu durumda

$$\|S_n(f)\|_{pq,\omega} \leq c\|f\|_{pq,\omega}$$

olacak şekilde $c > 0$ sabiti vardır [16].

3.2 Önerme : $1 < p,q < \infty, \omega \in A_p(\boldsymbol{T})$ olsun. Eğer $f \in L_{\omega}^{p,q}(\boldsymbol{T})$ ve $r = 1,2,3,...$ ise, bu durumda sadece r'ye bağlı $c > 0$ sabit sayısı vardır ve

$$E_n(f)_{L_{\omega}^{p,q}} \leq c\Omega_r\left(f,\frac{1}{n}\right)_{L_{\omega}^{p,q}}$$

olur [19, Lemma 2.3].

3.3 Önerme : $f \in L_{\omega}^{p,q}(\boldsymbol{T})$, 1<p, q<∞, $\omega \in A_p(\boldsymbol{T})$ ve $\tilde{f}$, f fonksiyonunun eşlenik fonksiyonu olsun. Bu durumda

$$\left\|\tilde{f}\right\|_{pq,\omega} \leq c\|f\|_{pq,\omega}$$

olacak şekilde f fonksiyonundan bağımsız $c > 0$ sabiti vardır [16].

3.4 Tanım : $r = 1,2,...$ için ağırlıklı Sobolev tipli uzaylar

$$W_{pq,\omega}^{r} = \left\{f \in L_{\omega}^{p,q}(\boldsymbol{T}) : f^{(r-1)}\ mutlak\ süreklidir\ ve\ f^{(r)} \in L_{\omega}^{p,q}(\boldsymbol{T})\right\}$$

$$W_{pq,\omega}^{r,\alpha} = \left\{f \in W_{pq,\omega}^{r} : f^{(r)} \in Lip\left(\alpha, L_{\omega}^{p,q}\right)\right\}$$

biçiminde tanımlanır.

3.5 Önerme : 1<p, q<∞, $\omega \in A_p(\boldsymbol{T})$, 0<α≤1 ve r ∈ ℕ olsun. Bu durumda her $f \in W^{r,\alpha}_{pq.\omega}$ için

$$\left\|f^{(r)} - S_n\left(f^{(r)}\right)\right\|_{pq,\omega} = O(n^{-\alpha}), \qquad \text{n=1,2, …} \qquad (3.1)$$

olur.

İspat t_n^*, $f^{(r)} \in L_\omega^{p,q}(T)$ fonksiyonuna en iyi yaklaşan trigonometrik polinom olsun. Bu durumda derecesi n yi aşmayan bütün t_n trigonometrik polinomları üzerinden infimum alındığında

$$\left\|f^{(r)} - t_n^*\right\|_{pq,\omega} = inf\left\|f^{(r)} - t_n\right\|_{pq,\omega}$$

elde edilir. Önerme 3.2 kullanılarak

$$\left\|f^{(r)} - t_n^*\right\|_{pq,\omega} = O\left(\Omega\left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right)_{L_\omega^{pq}}\right)$$

olur ve böylece

$$\left\|f^{(r)} - t_n^*\right\|_{pq,\omega} = O(n^{-\alpha}).$$

$L_\omega^{p,q}(\boldsymbol{T})$ ağırlıklı Lorentz uzayında $S_n(f)$ kısmi toplamları düzgün sınırlı olduğundan

$$\left\|f^{(r)} - S_n\left(f^{(r)}\right)\right\|_{pq,\omega} \leq \left\|f^{(r)} - t_n^*\right\|_{pq,\omega} + \left\|t_n^* - S_n(f^{(r)})\right\|_{pq,\omega}$$

$$= \left\|f^{(r)} - t_n^*\right\|_{pq,\omega} + \left\|S_n\left(t_n^* - f^{(r)}\right)\right\|_{pq,\omega}$$

$$= O\left(\left\|f^{(r)} - t_n^*\right\|_{pq,\omega}\right) = O(n^{-\alpha}).$$

3.6 Önerme : 1<p, q<∞, $\omega \epsilon \mathrm{A_p(T)}$ ve r∊ℕ olsun. Bu durumda her $f \in \mathrm{W^{r,1}_{pq.\omega}}$ ve $f^{(r+1)} \in L_\omega^{p,q}(\boldsymbol{T})$ için

$$\left\|S_n\left(f^{(r)}\right) - \sigma_n\left(f^{(r)}\right)\right\|_{pq,\omega} = O(n^{-1}), \qquad \text{n=1,2, …} \qquad (3.2)$$

olur.

İspat : Eğer $f^{(r)}$ fonksiyonunun Fourier serisi

$$f^{(r)}(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} A_k\big(f^{(r)}\big)(x)$$

ise, bu durumda $\tilde{f}^{(r+1)}(x)$ eşlenik fonksiyonun Fourier serisi

$$\tilde{f}^{(r+1)}(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} kA_k\big(f^{(r)}\big)(x)$$

olur. Diğer yandan

$$S_n\big(f^{(r)}\big)(x) - \sigma_n\big(f^{(r)}\big)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{n+1} A_k\big(f^{(r)}\big)(x)$$

$$= \frac{1}{n+1} S_n\big(\tilde{f}^{(r+1)}\big)(x)$$

olur. Önerme 3.1 ve Önerme 3.3 kullanılarak

$$\left\|S_n\big(f^{(r)}\big) - \sigma_n\big(f^{(r)}\big)\right\|_{pq,\omega} = \frac{1}{n+1}\left\|S_n\big(\tilde{f}^{(r+1)}\big)\right\|_{pq,\omega} \le C\frac{1}{n+1}\left\|\tilde{f}^{(r+1)}\right\|_{pq,\omega}$$

$$\le C\frac{1}{n+1}\left\|f^{(r+1)}\right\|_{pq,\omega} = O(n^{-1}), \qquad n = 1,2,\dots$$

elde edilir.

4. AĞIRLIKLI LORENTZ UZAYLARINDA YAKLAŞIM TEOREMLERİ

Tezde bu bölüm yeni sonuçlar içermektedir.

4.1 Teorem : $1< p,\ q <\infty$, $\omega \epsilon A_p(\boldsymbol{T})$, $0<\alpha\leq 1$, $r \epsilon \mathbb{N} \cup \{0\}$ ve $(p_n)_0^\infty$

$$(n+1)p_n = O(P_n) \tag{4.1}$$

koşulunu sağlayan pozitif reel sayıların bir monoton dizisi olsun.

Eğer $f \in W_{pq.\omega}^{r,\alpha}$ ise

$$\left\|f^{(r)} - N_n\left(f^{(r)}\right)\right\|_{pq,\omega} = O(n^{-\alpha}), \qquad \mathrm{n} = 1,2, \dots.$$

olur.

İspat. 1. Durum

$0 < \alpha < 1$ olsun.

$$f^{(r)}(x) = \frac{1}{P_n}\sum_{m=0}^{n} p_{n-m}\left(f^{(r)}\right)(x)$$

olduğundan

$$f^{(r)}(x) - N_n\left(f^{(r)}\right)(x) = \frac{1}{P_n}\sum_{m=0}^{n} p_{n-m}\left[f^{(r)}(x) - S_m\left(f^{(r)}\right)(x)\right]$$

olur. Önerme 3.5, Önerme 2.7.4 ve (4.1) kullanılarak

$$\left\|f^{(r)} - N_n\left(f^{(r)}\right)\right\|_{pq,\omega} \leq \frac{1}{P_n}\sum_{m=0}^{n} p_{n-m}\left\|f^{(r)} - S_m\left(f^{(r)}\right)\right\|_{pq,\omega}$$

$$= \frac{1}{P_n} \sum_{m=1}^{n} p_{n-m} O(m^{-\alpha}) + \frac{p_n}{P_n} \left\| f^{(r)} - S_0\left(f^{(r)}\right) \right\|_{pq,\omega}$$

$$= \frac{1}{P_n} O(n^{-\alpha} P_n) + O\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

$$= O(n^{-\alpha})$$

elde edilir.

2. Durum

$\alpha = 1$ olsun.

$$N_n\left(f^{(r)}\right)(x) = \frac{1}{P_n} \sum_{m=0}^{n} p_{n-m} A_m\left(f^{(r)}\right)(x)$$

olmak üzere Abel dönüşümü kullanılarak

$$S_n\left(f^{(r)}\right)(x) - N_n\left(f^{(r)}\right)(x) = \frac{1}{P_n} \sum_{m=1}^{n} (P_n - P_{n-m}) A_m\left(f^{(r)}\right)(x)$$

$$= \frac{1}{P_n} \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{P_n - P_{n-m}}{m} - \frac{P_n - P_{n-m-1}}{m+1}\right) \left(\sum_{k=1}^{m} k A_k\left(f^{(r)}\right)(x)\right)$$
$$+ \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=1}^{n} k A_k\left(f^{(r)}\right)(x)\right)$$

elde edilir ve böylece

$$\left\| S_n\left(f^{(r)}\right) - N_n\left(f^{(r)}\right) \right\|_{pq,\omega} \leq \frac{1}{P_n} \sum_{m=1}^{n} \left| \frac{P_n - P_{n-m}}{m} - \frac{P_n - P_{n-m-1}}{m+1} \right|$$

$$\times \left\| \sum_{k=1}^{m} k A_k\left(f^{(r)}\right) \right\|_{pq,\omega} + \frac{1}{n+1} \left\| \sum_{k=1}^{n} k A_k\left(f^{(r)}\right) \right\|_{pq,\omega}$$

olur.

$$S_n\left(f^{(r)}\right)(x)-\sigma_n\left(f^{(r)}\right)(x)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}kA_k\left(f^{(r)}\right)(x)$$

olmak üzere, Önerme 2.7.4 kullanılarak

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}kA_k(f)\right\|_{pq,\omega}=(n+1)\left\|S_n\left(f^{(r)}\right)-\sigma_n\left(f^{(r)}\right)\right\|_{pq,\omega}=O(1)$$

elde edilir. Böylece

$$\left\|S_n\left(f^{(r)}\right)-N_n\left(f^{(r)}\right)\right\|_{pq,\omega}$$

$$\leq\frac{1}{P_n}\sum_{m=1}^{n}\left|\frac{P_n-P_{n-m}}{m}-\frac{P_n-P_{n-m-1}}{m+1}\right|\,O(1)+O\,(n^{-1})$$

$$=O\left(\frac{1}{P_n}\right)\sum_{m=1}^{n}\left|\frac{P_n-P_{n-m}}{m}-\frac{P_n-P_{n-m-1}}{m+1}\right|+O\,(n^{-1}) \tag{4.2}$$

elde edilir.

$$\frac{P_n-P_{n-m}}{m}-\frac{P_n-P_{n-m-1}}{m+1}=\frac{1}{m(m+1)}\left(\sum_{k=n-m+1}^{n}p_k-mp_{n-m}\right).$$

Bu eşitlik (p_n) dizisi azalmayan olduğunda $\left(\frac{P_n-P_{n-m}}{m}\right)_{m=1}^{n+1}$ dizisinin artmayan olmasını, (p_n) dizisi artmayan olduğunda $\left(\frac{P_n-P_{n-m}}{m}\right)_{m=1}^{n+1}$ dizisinin azalmayan olmasını gerektirir.Aynı zamanda bu eşitlik

$$\sum_{m=1}^{n}\left|\frac{P_n-P_{n-m}}{m}-\frac{P_n-P_{n-m-1}}{m+1}\right|=\left|p_n-\frac{P_n}{n+1}\right|=\frac{1}{n+1}O(P_n)$$

olduğunu gösterir. Bu eşitsizlik ve (4.2) kullanılarak

$$\left\|S_n\left(f^{(r)}\right)-N_n\left(f^{(r)}\right)\right\|_{pq,\omega}=O(n^{-1})$$

elde edilir.Son değerlendirme ve (3.1) kullanılarak

$$\left\|f^{(r)} - N_n\left(f^{(r)}\right)\right\|_{pq,\omega} = O(n^{-1})$$

elde edilir.

4.2 Teorem : $1 < p, q < \infty, \omega \epsilon A_p(T), 0 < \alpha \leq 1$, r$\epsilon \mathbb{N} \cup \{0\}$ ve (p_n)

$$\sum_{m=0}^{n-1} \left|\frac{P_m}{m+1} - \frac{P_{m+1}}{m+2}\right| = O\left(\frac{P_n}{n+1}\right) \tag{4.3}$$

koşulunu sağlayan pozitif reel sayıların bir dizisi olsun.

Eğer $f \epsilon W_{ps,\omega}^{r,\alpha}$ ve $f^{(r+1)} \in L_\omega^{p,q}(\boldsymbol{T})$ ise

$$\left\|f^{(r)} - R_n\left(f^{(r)}\right)\right\|_{pq,\omega} = O(n^{-\alpha}), \qquad n = 1,2, \ldots$$

olur.

İspat. 1. Durum

$0 < \alpha < 1$ olsun.

$$f(x) = \frac{1}{P_n} \sum_{m=0}^{n} p_{n-m} f(x)$$

olmak üzere $R_n\left(f^{(r)}, x\right)$ tanımı da kullanılarak

$$f^{(r)}(x) - R_n\left(f^{(r)}\right)(x) = \frac{1}{P_n} \sum_{m=0}^{n} p_m[f(x) - S_m(f)(x)]$$

elde edilir. Önerme 3.5 kullanılarak

$$\left\|f^{(r)} - R_n\left(f^{(r)}\right)\right\|_{pq,\omega} = \frac{1}{P_n} \sum_{m=0}^{n} p_m \left\|f - S_m\left(f^{(r)}\right)\right\|_{pq,\omega}$$

$$= O\left(\frac{1}{P_n}\right) \sum_{m=1}^{n} p_m m^{-\alpha} + \frac{p_0}{P_n} \left\|f^{(r)} - S_0\left(f^{(r)}\right)\right\|_{pq,\omega}$$

$$= O\left(\frac{1}{P_n}\right)\sum_{m=1}^{n} p_m m^{-\alpha} \tag{4.4}$$

elde edilir ve Abel dönüşümü kullanılarak

$$\sum_{m=1}^{n} p_m m^{-\alpha} = \sum_{m=1}^{n-1} P_m[m^{-\alpha} - (m+1)^{-\alpha}] + n^{-\alpha}P_n$$

$$\leq \sum_{m=1}^{n-1} m^{-\alpha}\frac{P_m}{m+1} + n^{-\alpha}P_n$$

elde edilir ve (4.3) kullanılarak

$$\sum_{m=1}^{n-1} m^{-\alpha}\frac{P_m}{m+1} = \sum_{m=1}^{n-1}\left(\frac{P_m}{m+1} - \frac{P_{m+1}}{m+2}\right) + \left(\sum_{k=1}^{m} k^{-\alpha}\right) + \frac{P_n}{n+1}\sum_{m=1}^{n-1} m^{-\alpha}$$

$$= O(n^{-\alpha}P_n)$$

elde edilir. Bu durum

$$\sum_{m=1}^{n} p_m m^{-\alpha} = O(n^{-\alpha}P_n)$$

olmasını gerektirir. Bu eşitsizlik ve (4.4) kullanılarak

$$\left\|f^{(r)} - R_n\left(f^{(r)}\right)\right\|_{pq,\omega} = O(n^{-\alpha})$$

elde edilir.

2. Durum

$\alpha = 1$ olsun. Abel dönüşümünü kullanarak

$$R_n\left(f^{(r)}\right)(x) = \frac{1}{P_n}\sum_{m=0}^{n-1}\left[P_m\left(S_m\left(f^{(r)}\right)(x) - S_{m+1}\left(f^{(r)}\right)(x)\right) + P_n S_n\left(f^{(r)}\right)(x)\right]$$

$$=\frac{1}{P_n}\sum_{m=0}^{n-1} P_m\left(-A_{m+1}\big(f^{(r)}\big)(x)\right)+S_n\big(f^{(r)}\big)(x),$$

ve böylece

$$R_n\big(f^{(r)}\big)(x)-S_n\big(f^{(r)}\big)(x)=-\frac{1}{P_n}\sum_{m=0}^{n-1} P_m\left(A_{m+1}\big(f^{(r)}\big)(x)\right)$$

olur. Abel dönüşümünü tekrar uygulayarak

$$\sum_{m=0}^{n-1} P_m A_{m+1}\big(f^{(r)}\big)(x)=\sum_{m=0}^{n-1}\frac{P_m}{m+1}(m+1)A_{m+1}\big(f^{(r)}\big)(x)$$

$$=\sum_{m=0}^{n-1}\left(\frac{P_m}{m+1}-\frac{P_{m+1}}{m+2}\right)\left(\sum_{k=0}^{m}(k+1)A_{k+1}\big(f^{(r)}\big)(x)\right)$$

$$+\frac{P_n}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)A_{k+1}\big(f^{(r)}\big)(x)$$

elde edilir. (3.2) ve (4.3) kullanılarak

$$\left\|\sum_{m=0}^{n-1} P_m\left(A_{m+1}\big(f^{(r)}\big)\right)\right\|_{pq,\omega}$$

$$\leq\sum_{m=0}^{n-1}\left|\frac{P_m}{m+1}-\frac{P_{m+1}}{m+2}\right|\left\|\sum_{k=0}^{m}(k+1)\left(A_{k+1}\big(f^{(r)}\big)\right)\right\|_{pq,\omega}$$

$$+\frac{P_n}{n+1}\left\|\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\left(A_{k+1}\big(f^{(r)}\big)\right)\right\|_{pq,\omega}$$

$$=\sum_{m=0}^{n-1}\left|\frac{P_m}{m+1}-\frac{P_{m+1}}{m+2}\right|(m+2)\left\|S_{m+1}\big(f^{(r)}\big)-\sigma_{m+1}\big(f^{(r)}\big)\right\|_{pq,\omega}$$

$$+P_n\left\|S_n\big(f^{(r)}\big)-\sigma_n\big(f^{(r)}\big)\right\|_{pq,\omega}$$

$$= O(1)\sum_{m=0}^{n-1}\left|\frac{P_m}{m+1}-\frac{P_{m+1}}{m+2}\right| + O\left(\frac{P_n}{n}\right)$$

elde edilir. Bu durumda

$$\left\|R_n\left(f^{(r)}\right)-S_n\left(f^{(r)}\right)\right\|_{L_\omega^{pq}} = \frac{1}{P_n}\left\|\sum_{m=0}^{n-1} P_m\left(A_{m+1}\left(f^{(r)}\right)\right)\right\|_{pq,\omega}$$

$$= \frac{1}{P_n} O\left(\frac{P_n}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

olur. Bu durum ve (3.1) kullanılarak

$$\left\|f^{(r)} - R_n\left(f^{(r)}\right)\right\|_{pq,\omega} = O(n^{-1})$$

elde edilir. Bu ispatı tamamlar.

Eğer $p_n = A_n^{\beta-1}(\beta > 0)$ ise, $k \geq 1$ için $A_0^\beta = 1$, $A_k^\beta = \frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+k)}{k!}$ olmak üzere

$$N_n\left(f^{(r)}\right)(x) = \sigma_n^\beta\left(f^{(r)}\right)(x) = \frac{1}{A_n^\beta}\sum_{m=0}^{n} A_{n-m}^{\beta-1} S_m\left(f^{(r)}\right)(x)$$

elde edilir. Dolayısıyla $\sigma_n^\beta\left(f^{(r)}\right)$ Cesàro ortalamaları ile $f \epsilon L_\omega^{pq}(\boldsymbol{T})$ fonksiyonuna yaklaşım ile ilgili aşağıdaki sonuç elde edilir.

4.3 Sonuç : $1 < p, q < \infty$, $\omega \epsilon A_p(T), 0 < \alpha \leq 1, r \epsilon N$ ve $\beta > 0$ olsun. Eğer $f \epsilon W_{ps,\omega}^{r,\alpha}$ ise, bu durumda

$$\left\|f^{(r)} - \sigma_n^\beta\left(f^{(r)}\right)\right\|_{pq,\omega} = O(n^{-\alpha}), \qquad n = 1,2,\ldots.$$

olur.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada öncelikle Lebesgue uzaylarında bazı yaklaşım teoremleri verilmiştir. Aynı yaklaşım teoremleri bu uzayın bir genelleşmesi olan ağırlıklı Lorentz uzaylarına taşınmış ve bu uzaydan olan fonksiyonların türevleri için ispatlanmıştır.

Bu çalışmada ispatlanan yaklaşım teoremleri ağırlıklı Lorentz uzayına ait olan fonksiyonların kesirli türevleri için de değerlendirilebilir.

6. KAYNAKLAR

[1] Quade, E. S., “Trigonometric approximation in the mean”, *Duke Math. J.*, 529-542, (1937).

[2] Timan, M. F., “The absolute Cesàro summability of orthogonal Fourier series”, *(Russian) Ural. Gos. Univ. Mat. Zap.* 6 1968 tetrad.4, 109-113, (1968).

[3] Ulyanov, P. L., “On approximation of functions”, *Sibirskii Matematicheskii Zhunal.* 5, 2, (1964).

[4] B. N. Sahney, V.V. Rao, “Error bounds in approximation of function”, *Bull. Austral. Math. Soc.* 6, 11-18, (1972).

[5] Mohapatra, R. N. and Russell, D. C., “Some direct and inverse theorems in approximation of functions”, *J. Aust. Math. Soc. (Ser. A)* 34, 143-154, (1983).

[6] Chandra, P., “Approximation by Nörlund operators”, *Mat. Vesn.*, 38, 263-269, (1986).

[7] Chandra, P., “Functions of classes L_p and Lip(α, p) and their Riesz means”, *Riv. Mt. Univ. Parma*, (4) 12, 275-282, (1986).

[8] Chandra, P., “A note on degree of approximation by Nörlund and Riesz operators”, *Mat. Vesn.*, 42, 9-10, (1990).

[9] Chandra, P., “Trigonometric approximation of functions in L_p norm”, *J. Math. Anal. Appl.*, 275, 13-26, (2002).

[10] Leindler, L., “Trigonometric approximation in Lp norm”, *J. Math. Anal. Appl.*, 302, 129-136, (2005).

[11] Guven A., “Trigonomeric approximations of functions in weighted L^p spaces”, *Sarajevo J. Math.* 5, (17), 99-108, (2009).

[12] Yildirir, Y. E. ve Avsar, A. H., “Trigonomeric approximations of functions in weighted L^p spaces”, *Sarajevo J. Math.* Yayına kabul edildi.

[13] Bennet C. and Sharpley R., *Interpolation of operators*, Academic Press, Inc., Boston, MA, (1968).

[14] Genebashvili, I., Gogatishvili, A., Kokilashvili, V. and Krbec, M., *Weight theory for integral transforms on spaces of homogeneous type*, USA: Longman, (1998).

[15] Kokilashvili, V. and Krbec, M., *Weighted inequalities in Lorentz and Orlicz spaces*, World Scientic Publishing Co. Inc. River Edge, NJ, (1991).

[16] Kokilashvili, V. and Yildirir, Y. E., “On the approximation by trigonometric polynomials in weighted Lorentz spaces”, *J. Funct. Space. Appl*., 8 67-86, (2010).

[17] Muckenhoupt, B., “Weighted Norm Inequalities for the Hardy Maximal Function”, *Trans. Amer. Math. Soc*. 165, 207-226, (1972).

[18] Chang, H.M., Hunt, R. A. and Kurtz, D. S., “The Hardy-Littlewood maximal functions on $L^{p,q}$ spaces with weights”, *Indiana Univ. Math. J*. 31, 109-120, (1982).

[19] Yildirir, Y. E. and Israfilov, D. M., “Approximation theorems in weighted Lorentz Spaces”, *Carpathian J. Math*. 26, 108-119, (2010).