

**T.C.  
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
FİZİK ANABİLİM DALI**



**KOZMİK ENFLASYON MODELLEMELERİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**ŞULE ÖZDİLEK**

**BALIKESİR, HAZİRAN - 2016**

**T.C.  
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
FİZİK ANABİLİM DALI**



**KOZMİK ENFLASYON MODELLEMELERİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**ŞULE ÖZDİLEK**

**Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Levent SOLMAZ (Tez Danışmanı)**

**Prof. Dr. Ersen METE**

**Doç. Dr. Halil BABACAN**

**BALIKESİR, HAZİRAN – 2016**

## KABUL VE ONAY SAYFASI

**ŞULE ÖZDİLEK** tarafından hazırlanan “**KOZMİK ENFLASYON MODELLEMELERİ**” adlı tez çalışmasının savunma sınavı 08.06.2016 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

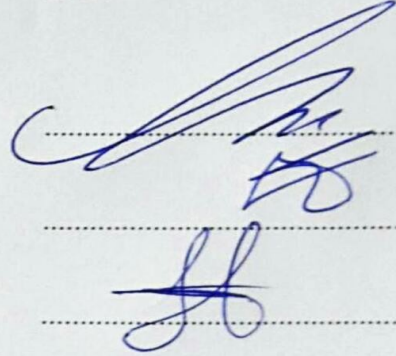
Jüri Üyeleri

İmza

Danışman  
Prof. Dr. Levent SOLMAZ

Üye  
Prof. Dr. Ersen METE

Üye  
Doç. Dr. Halil BABACAN



Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Doç. Dr. Necati ÖZDEMİR

.....

## ÖZET

**KOZMİK ENFLASYON MODELLEMELERİ  
YÜKSEK LİSANS TEZİ  
ŞULE ÖZDİLEK  
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
FİZİK ANABİLİM DALI**

**(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. LEVENT SOLMAZ)**

**BALIKESİR, HAZİRAN - 2016**

Evrenin erken dönemlerine açıklık getirmek üzere en kabul görmüş teori kozmik enflasyondur. Enflasyon teorisine göre evren üstel olarak çok hızlı bir şekilde genişlemiştir. Bu teori Büyük Patlamanın sorunlarına çözüm getirmiş ve evrendeki geniş ölçeklerdeki yapıların oluşum kaynaklarını açıklığa kavuşturmuştur.

Gözlemlere göre evren geniş ölçeklerde homojen ve izotropik özelliğe sahiptir. Bu çalışmada ilk olarak homojen ve izotropik bir evren tanıtılmıştır. Büyük Patlama kozmolojisi için ilk şartları gerektiren ve evrenin üstel olarak genişleme dönemi geçirmesinden sorumlu enflasyon teorisi anlatılmıştır. Enflasyonun en güçlü desteği kozmolojik pertürbasyonlardır. Bu nedenle homojen ve izotropik evrende küçük ölçeklerdeki sapmalara sebep olan pertürbasyonlar incelenmiştir. Ayrıca enflasyona sebep olan modeller en basit seviyede ele alınarak son verilere göre değerlendirilmiştir.

**ANAHTAR KELİMELER:** Einstein denklemleri, FRW metriği, enflasyon, pertürbasyon, inflaton

## **ABSTRACT**

**MODELS ON COSMIC INFLATION  
MSC THESIS  
ŞULE ÖZDILEK  
BALIKESİR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE  
PHYSICS  
(SUPERVISOR: PROF. DR. LEVENT SOLMAZ )**

**BALIKESİR, JUNE 2016**

Cosmic inflation is the most accepted theory to bring clarity of the early periods of the universe. According to the inflation theory, the universe has expanded exponentially and rapidly. The theory has offered a solution to the problems of big bang theory and has made to clarify the sources of the formation of large scale structures in the universe.

According to observations the universe has homogeneous and isotropic properties on large scales. In this study, firstly, a homogeneous and isotropic universe has introduced. The inflationary theory which is responsible for the expansion period as an exponential expansion of the universe is studied by the requiring the initial conditions for the big bang cosmology. Cosmological perturbations are the most powerful support of inflation theory. For this reason, the perturbations of small scales which causing deviations has been investigated on homogeneous and isotropic universe. Also, by considering the models that can lead to inflation were evaluated under the recent data in the simplest form.

**KEYWORDS:** Einstein equations, FRW metric, inflation, perturbation, inflaton

# İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.....	i
ABSTRACT .....	ii
İÇİNDEKİLER .....	iii
ŞEKİL LİSTESİ.....	iv
TABLO LİSTESİ .....	v
SEMBOL LİSTESİ.....	vi
ÖNSÖZ.....	vii
<b>1. GİRİŞ.....</b>	<b>1</b>
<b>2. STANDART KOZMOLOJİ MODELİ .....</b>	<b>4</b>
2.1    Homojen ve İzotropik Evren .....	4
2.1.1    Friedmann-Robertson-Walker Metriği.....	5
2.1.2    Hubble Yasası ve Comoving Koordinatlar .....	6
2.1.3    Kırmızıya Kayma .....	7
2.1.4    Einstein Denklemleri.....	8
2.1.5    Friedmann Denklemleri .....	11
2.2    Büyük Patlama Modeli ve Enflasyon .....	13
2.2.1    Ufuk Problemi .....	13
2.2.1.1    Parçacık Ufku ve Hubble Yarıçapı.....	13
2.2.2    Düzlük Problemi .....	16
<b>3. KOZMİK ENFLASYON .....</b>	<b>18</b>
3.1    Skaler Alan Dinamiği .....	19
3.2    Yavaş Yuvarlanma Yaklaşıklığı .....	21
3.3    Konformal Zaman.....	23
<b>4. ENFLASYON KAYNAKLI İLKEL PERTÜRBASYONLAR.....</b>	<b>24</b>
4.1    Metrik Pertürbasyonları .....	25
4.2    Ayar Dönüşümleri .....	26
4.3    Skaler Pertürbasyonlar .....	27
4.3.1    Enerji-Momentum Tensöründeki Pertürbasyonlar.....	28
4.3.2    Lineerleştirilmiş Einstein Denklemleri .....	29
4.3.3    Korunumlu Eğrilik Pertürbasyonu .....	30
4.4    Klasik Pertürbasyonlar.....	33
4.4.1    İkinci Dereceden Hareket Denklemi .....	34
4.5    Kuantum Dalgalanmaları .....	35
4.5.1    Kuantizasyon.....	36
4.5.2    Skaler Pertürbasyonların Güç Tayfı.....	38
4.6    Tensör Pertürbasyonları.....	40
<b>5. TEK ALANLI ENFLASYON MODELLERİ .....</b>	<b>42</b>
5.1    Model I: İkinci Dereceden Potansiyele Sahip Enflasyon .....	42
5.2    Model II: Polinom Tipli Potansiyele Sahip Enflasyon .....	44
<b>6. SONUÇ VE ÖNERİLER .....</b>	<b>48</b>
<b>7. KAYNAKLAR.....</b>	<b>49</b>

## ŞEKİL LİSTESİ

### Sayfa

<b>Şekil 1.1:</b> Planck Uydusu tarafından ölçülen kozmik mikrodalga arka plan sıcaklık dalgalanmaları.....	2
<b>Şekil 2.1:</b> Galaksilerin dağılımı geniş ölçeklerde aynıdır.....	5
<b>Şekil 2.2:</b> Hubble'ın çalışmasına göre galaksilerin hız dağılımları.....	8
<b>Şekil 3.1:</b> Skaler inflaton alanı için potansiyel örneği.....	19
<b>Şekil 4.1:</b> Klasik $\bar{\phi}(t)$ arka plan alan değerinin etrafında $\delta\phi(t, x)$ kuantum dalgalanmaları.....	32
<b>Şekil 4.2:</b> Enflasyon boyunca ve enflasyon sonrasında eğrilik Pertürbasyonları.....	33
<b>Şekil 5.1:</b> Planck Uydusu'nun son gözlemlerine göre tensör spektral indeks $n_s$ ve $r$ parametrelerinin sınırlamaları.....	46

## TABLO LİSTESİ

### Sayfa

<b>Tablo 5.1:</b> Enflasyon potansiyel modellerinin $N=60$ alınarak hesaplanan skaler tayfsal indeks ve tensör-skaler parametresi.....	47
--	----



## SEMBOL LİSTESİ

$(-,+,+,+)$  : Metriğin İşareti

$K$  : Uzaysal Eğrilik

$H$  : Hubble Sabiti

$g_{\mu\nu}$  : Metrik Tensör

$G_{\mu\nu}$  : Einstein Tensörü

$R_{\mu\nu}$  : Ricci Tensörü

$R^{\mu}_{\alpha\beta\gamma}$  : Riemann Tensörü

$T_{\mu\nu}$  : Enerji-Momentum Tensörü

$a$  : Ölçek Faktörü

$\Omega$  : Yoğunluk Parametresi

$\rho_{krt}$  : Kritik Yoğunluk

$\phi$  : Inflaton

$\omega$  : Durum Denklemi Parametresi

$\epsilon, \eta$  : Yavaş Yuvarlanma Parametreleri

**FRW** : Friedmann-Robertson-Walker

$\mathcal{R}$  : Comoving Eğrilik Pertürbasyonu

$n_s$  : Skaler Pertürbasyonların Tayfsal İndeksi

$r$  : Tensör Pertürbasyonların Skaler Pertürbasyonlara Oranı

## ÖNSÖZ

Öncelikle, yüksek lisans dönemim boyunca tez çalışmamın gerçekleşmesini sağlayan, bilimsel ve sosyal anlamda bilgi ve deneyimlerini paylaşarak bana yol gösteren hocam Prof. Dr. Levent SOLMAZ'a çok teşekkür ederim.

Tez çalışmama jüri üyeliği yaparak büyük katkıda bulunan değerli hocalarım Prof. Dr. Ersen METE'ye ve Doç. Dr. Halil BABACAN'a teşekkür ederim.

Verimli bir çalışma ortamı sağlayan ve bu süreçte her zaman yanımda olan çalışma arkadaşlarım Yaşar HİÇYILMAZ, Gülsün APPAK, Meltem CEYLAN ve Aslı ALTAŞ ve Gülden GÜNEY'e teşekkür ederim. Ayrıca bilgilerini paylaşarak tez çalışmamda yardımlarını esirgemeyen Şükrü Hanif TANYILDIZI'na teşekkür ederim.

Yaşadığım bu süreçte beni yalnız bırakmayan, olumsuz her anımda bana yol gösteren ve tez çalışmamda bana destek veren Görkem Burak ÇAMLAR'a teşekkür ederim.

Öğrenim hayatım boyunca benden desteklerini esirgemeyen ve her zaman yanımda hissettiğim babam Mehmet ÖZDİLEK, annem Gülüstan ÖZDİLEK ve kardeşim Ayşin ÖZDİLEK'e çok teşekkür ederim.

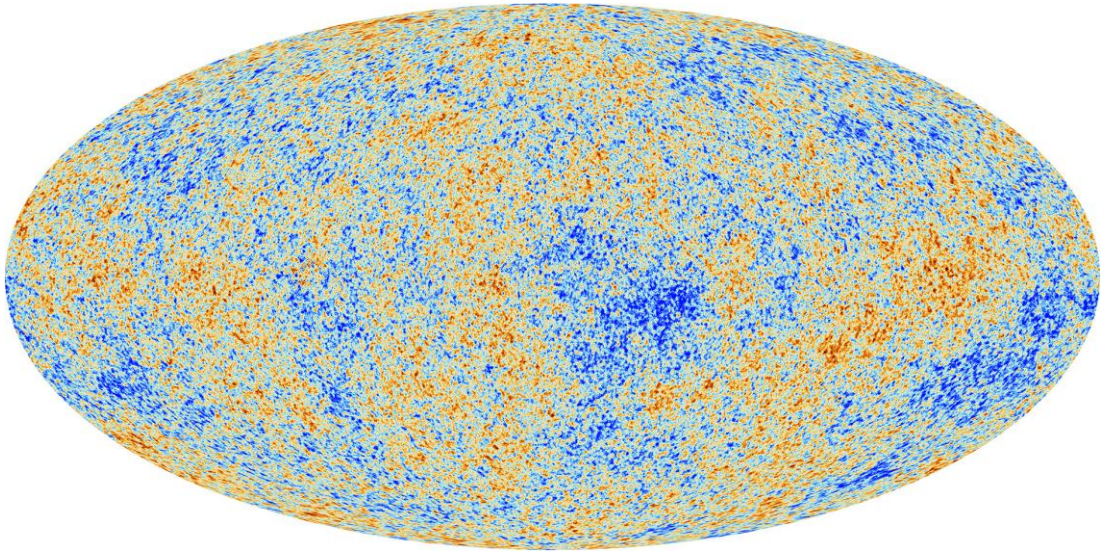
# 1. GİRİŞ

Evrene dair ilk bilimsel anlayış Einstein'ın genel rölativite teorisini ortaya atmasıyla başlamıştır. Genel rölativite kuramı kozmolojik ilke doğrultusunda genişleyen bir evren modeli sunar. Friedmann 1922 yılında yayınladığı çalışmasında genişleyen evreni temsil eden Friedmann-Robertson-Walker (FRW) metriğini ortaya atmıştır [1]. Einstein alan denklemleri çözüldüğünde Friedmann denklemleri olarak adlandırılan ve genişleyen evren modeline işaret eden denklemler elde edilir. Friedmann denklemlerinden evrenin kozmolojik parametrelerine dair bilgiler edinilmektedir. Edwin Hubble'ın gökadalardan kırmızıya kaymasının uzaklıkla doğru orantılı olarak arttığını keşfetmesinin ardından genişleyen evren modeli daha sağlam bir temele sahip olmuştur.

Evrenin başlangıcı sıcak Büyük Patlama teorisine dayanır. Teori, evrenimizin 13,8 milyar yıl önce yüksek bir yoğunlukta olduğunu ve genişlemeye başladığını varsayar. Büyük Patlamadan hemen sonra evren, enflasyon olarak adlandırılan bir dönemden geçerek üstel ve ani bir biçimde genişlemiştir. Evrenin ilk anlarında ışınımın baskın olduğu genişlemeyi, galaksilerin, yıldızların ve gezegen formlarının oluştuğu madde baskın genişleme süreci takip eder. Evrenin çok erken zamanlarında yaklaşık olarak  $t \sim 10^{-11} s$  'de elektromanyetik alanın  $U(1)$  simetrisinden, elektrozayıf alanın  $SU(2) \times U(1)$  simetrisinin ayrıldığı, elektrozayıf faz geçişi meydana gelmiştir [2]. Bu geçiş günümüzdeki madde antimadde asimetrisini anlama konusunda çok önemlidir. Bu sürecin devamında, kuarkların ve gluonların, hadronlara dönüştüğü bir faz geçişi meydana gelir [3]. Faz geçişinden sonra yaklaşık olarak  $t \sim 0.01 s$  'de nükleer füzyon başlamış ve devamında Büyük Patlama nükleosentezi gerçekleşmiştir. Bu fazda ilk elementler oluşmuştur. Üretilen elementler plazma formundadır. Sıcaklık düştüğünde elektronlar ve protonlar elektriksel olarak nötral hidrojen atomlarını oluşturmuştur. Bu faza yeniden birleşme adı verilir.

Evrenin geçirdiği bir diğer çağ ise foton ayrışma çağıdır. Fotonlar, elektronlar tarafından saçılmış ve elektron ile foton etkileşimi sona ermiştir. Bu andan sonra

evren saydam bir hale gelmiş olup elektronlardan saçılan fotonlar evrende serbestçe yolculuk etmeye başlamışlardır. Yayılan bu fotonlar kozmik mikrodalga arka plan ışınımı (CMB) olarak günümüzde de gözlemlenir. CMB ışınımı evrendeki ulaşılabilir en eski fotoğraftır. Bu ışınımın sıcaklığı geniş ölçeklerde her yönde aynıdır ve sadece  $10^{-5}$  civarında bir sıcaklık dalgalanmasına sahiptir. Bu haritadan evrenin homojen ve izotrop olduğu sonucu çıkarılabilir. Işınımın homojenliğindeki istatistiksel sapmalar enflasyon teorisinin en önemli tahminidir. Bu sapmalar Şekil 1.1'de Planck Uydusu tarafından ölçülen CMB sıcaklık dalgalanmalarının haritasından görülebilir.



**Şekil 1.1:** Planck Uydusu tarafından ölçülen kozmik mikrodalga arka plan sıcaklık dalgalanmaları [4].

Bu tezde evrenin Büyük Patlama ile elektrozayıf faz geçişi arasında olduğu tahmin edilen enflasyon dönemi çalışılmıştır. Enflasyon, Büyük Patlama teorisinin sorunlarını çözmek amacıyla 1980'lerin başında Alan Guth tarafından ortaya atılmıştır. İlk başta kozmolojinin sorunlarına çözüm getirmesi amacıyla ortaya atılmış olan enflasyon, kozmik mikrodalga arka plan ışınımındaki dalgalanmalara ve geniş ölçekteki yapıların oluşumuna bir açıklama getirmiştir.

Enflasyon senaryosuna göre erken evrenin çok kısa bir döneminde bilinmeyen bir alanın sıfır olmayan vakum enerji yoğunluğu, enerji yoğunluğunun

bütün formlarına baskın gelmiştir. Enflasyon ile ilgili bir takım senaryolar vardır. Bunlardan en basiti kozmolojik sabitin enflasyonu meydana getirmesidir. Daha karmaşık bir senaryo ise enflasyonun bir potansiyel kuyusunda yavaşça yuvarlanan bir skaler alandan kaynaklandığıdır. Bu tezde ikinci varsayım üzerine durulacaktır.

Bu varsayım çerçevesinde enflasyon fazı boyunca evrenin ölçek faktörü üstel olarak genişlemiş ve erken evrendeki uzayın küçük parçaları gözlemlenebilir evrenden daha büyük ölçeklere genişlemiştir.

Enflasyon teorisinin zenginliklerini çalışmak için kozmolojik pertürbasyon teorisi çok kullanışlı bir yoldur ve günümüzdeki gözlemlerle bağlantı kurulması açısından önemlidir. Pertürbasyon analizinde homojen ve izotrop arka plan evreni etrafında küçük dalgalanmaların evrilmesi çalışılır. Bu dalgalanmaların, enflasyon boyunca üretilen vakum dalgalanmalarının temeli olduğu düşünülür. Dalgalanmalar üstel genişlemeyle kozmolojik ölçeklere genişletilmiştir.

Bölüm 2’de homojen ve izotropik evren incelenmiş, kozmolojinin Büyük Patlama teorisi ve sorunları çalışılmış olup ayrıca enflasyonun bu sorunlara nasıl çözüm getirdiği tartışılmıştır.

Bölüm 3’te enflasyonun bir skaler alandan kaynaklandığı varsayıp bu alana dair evrilme denklemleri elde edilmiştir.

Bölüm 4’te enflasyondan kaynaklanan pertürbasyonların, enflasyon ile bağlantılı skaler ve tensörel kısımları incelenmiştir.

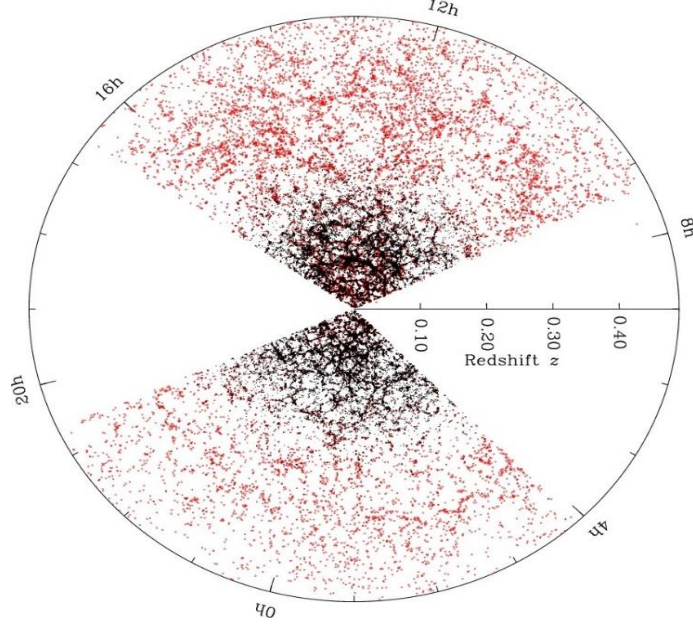
Bölüm 5’te enflasyona sebep olan tekli skaler alanlar üzerine durulmuştur. Enflasyonun ikinci dereceden ve polinom tipli potansiyel modellerinden kaynaklanacağı varsayılmıştır. Bu modellerin sonuçları günümüz gözlemleriyle karşılaştırılmıştır.

## 2. STANDART KOZMOLOJİ MODELİ

Büyük patlama, evrenin  $13,813 \pm 0,038$  milyar yıldan beri süregelen evrimini açıklayan en fazla kabul görmüş başlangıç hipotezlerinden biridir [10]. Evrenle ilgili bazı sorular bu modelde yanıtlanmadan kalmıştır ki bu sorular erken evrende ivmelenen genişleme döneminin ortaya atılmasıyla çözülmüştür. Standart kozmoloji modeli temelde genel rölativite kuramı ve kozmolojik ilke üzerine kurulmuştur [5]. Bu bölümde standart kozmoloji modelinin kısa bir anlatımı verilmiştir.

### 2.1 Homojen ve İzotropik Evren

Evrenin genişlediğine dair gözlemler Edwin Hubble'ın 1929 yılında galaksilerin kırmızıya kaymalarıyla aralarındaki uzaklığın orantılı olduğunu keşfetmesine dayanır [6]. Etrafımızdaki uzayda kozmolojik yapılar ve galaksilerin dağılımı geniş ölçeklerde izotropik görünür (Şekil 2.1). İzotropi evrenin bütün yönlerde aynı görünmesi diğer bir deyişle evrenin eş yönlü olduğu anlamına gelir. İzotropi özelliğine göre etrafımızdaki uzay-zaman geniş ölçeklerde küresel olarak simetriktir. Bu gözlemlerden evrenin merkezinde olmadığı sonucunu çıkartılabilir. Evrenin diğer bir özelliği ise madde yoğunluğunun evrenin her yerinde aynı olmasıdır. Bu özellik homojenlik olarak adlandırılır. Kozmolojik prensip evrenin homojen ve izotrop olduğunu söyler.



**Şekil 2.1:** Galaksilerin dağılımı geniş ölçeklerde ayındır [7].

### 2.1.1 Friedmann-Robertson-Walker Metriği

Kozmolojik prensip bugünkü gözlemlenebilir evrendeki simetri miktarı hakkında bir açıklama getirir. İzotropik ve homojen evreni tanımlayan metrik Einstein denklemlerinin bir çözümü olarak ilk kez Friedmann [1] tarafından çalışılmıştır. Bu çalışmanın devamında Robertson [8] ve Walker [9] izotropi ve homojenliğin tanımına uygun şekilde metriğin daha uygun bir halini türetmişlerdir. Kozmolojik prensip altında uzay-zamanın metriği  $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$  formuna uygun olarak küresel koordinatlarda;

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[ \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad (2.1)$$

şeklinde ifade edilir. Denklem (2.1)'de gösterilen metrik Friedmann-Robertson-Walker (FRW) metriğidir. Bu parametrizasyonda, t kozmik zaman, r comoving radyal koordinat,  $\theta$  ve  $\phi$  ise comoving açısal koordinatlardır buna ek olarak  $a(t)$  niceliği ölçek faktörü olarak adlandırılır ve evrenin genişleme oranının bir ölçüsüdür. Ölçek faktörü uzayın eğriliği ölçülerek bulunabilmektedir. Yukarıdaki denklemde gösterilen K parametresi uzaysal eğriliği ifade eder ve üç değer alabilir;

$$K = \begin{cases} 0, & \text{Öklidyen} \\ +1, & \text{Küresel} \\ -1, & \text{Hiperbolik} \end{cases}$$

Eğrilik sabiti  $K$  uzaysal olarak sırasıyla düz, kapalı ve açık evrene karşılık gelir. Düz evren sonsuz ve düz uzay, kapalı evren sonlu ve küresel uzay olarak ifade edilirken açık evren ise sonsuz ve hiperbolik uzay olarak ifade edilir.

### 2.1.2 Hubble Yasası ve Comoving Koordinatlar

Kozmolojide comoving koordinatlarla çalışmak evreni kavramsal ve matematiksel olarak düşünmeye çok yardımcı olur. Belirtilen metrikte kullanılan koordinatlar  $x^\mu \equiv \{x^1, x^2, x^3\}$  “comoving” koordinatlar olarak adlandırılır. Comoving koordinatlar ve fiziksel koordinatlar arasında;

$$x_{fiz}^\mu = a(t)x_{com}^\mu \quad (2.2)$$

ilişkisi kurulabilir. Friedmann-Robertson-Walker metriğinin diğer bir sonucu hız ve mesafe arasındaki ilişkidir. Denklem (2.2)’nin kozmik zaman  $t$ 'ye göre diferansiyeli alındığında aşağıdaki bağıntı elde edilir.

$$v_{fiz}^\mu \equiv \frac{dx_{fiz}^\mu}{dt} = \frac{\dot{a}}{a}x_{fiz}^\mu = Hx_{fiz}^\mu \quad (2.3)$$

Yukarıda ifade edilen denklem Hubble yasasıdır. Burada,  $H \equiv \dot{a}/a$ , Hubble parametresi olarak adlandırılır. İlk olarak 1929 yılında Edwin Hubble tarafından bulunmuştur [6]. Hubble parametresinin şimdiki değeri burada  $H_0$  olarak gösterilecektir. Bu değer evrenin içeriği hakkında değerli bilgiler vermektedir. Hubble parametresine dair ilk iyi tahmin 1958’de yapılmış olup değeri 75 km/sec/Mpc olarak bulunmuştur. Son olarak en güncel ölçüm Planck Uydusu ile yapılmıştır ve Hubble parametresinin günümüzdeki değeri;

$$H_0 = 67.31 \mp 0.96 \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1} \quad (2.4)$$

olarak açıklanmıştır [10]. Hubble parametresi uzay-zamanın temel fiziksel ölçeğini belirler. Hubble parametresi sayesinde uzunluk ölçeği olan  $H_0^{-1} \simeq 1.364 \times 10^{26}m$



değeri belirlenebilir. Bu, Hubble yarıçapıdır ve gözlemlenebilir evrenin ölçeğini belirler.

### 2.1.3 Kırmızıya Kayma

Evren hakkında bilinen her şey uzak nesnelere bize ulaşan ışığa göre yorumlanır. Gözlemleri doğru yorumlamak için evrenin genişlemesiyle birlikte ışığın dalga boyunun da gerildiği hesaba katılmalıdır. Kuantum mekaniğindeki tanımdan ışığın dalga boyu ile foton momentumunun ters orantılı olduğu bilinir. Işığın dalga boyu ölçek faktörüyle ilişkilendirilebilir. Evrende  $t_1$  zamanında  $\lambda_1$  dalga boyuyla yayılan ve  $t_0$  zamanında gözlenen bir ışık için dalga boyu,

$$\lambda_0 = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} \lambda_1 \quad (2.5)$$

olarak verilir. Uzak galaksilerden  $t_1$  zamanında gelen ve bugün dünyadan gözlenen ışığın kırmızıya kayması;

$$z \equiv \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1} \quad (2.6)$$

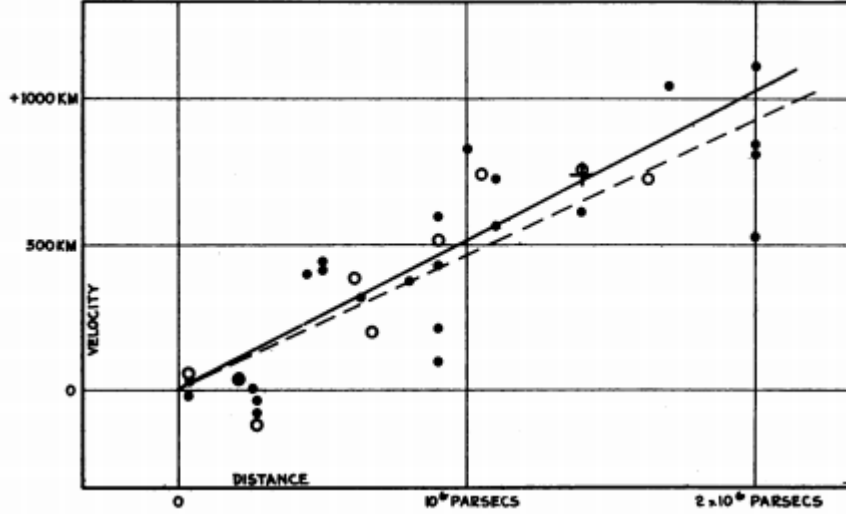
olarak tanımlanır. Burada  $z$  kırmızıya kayma,  $\lambda_0$  ışığın gözlenen dalga boyu,  $\lambda_1$  ise ışığın yayınlandığı zamanda gözlenen dalga boyudur [11]. Buna bağlı olarak,

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} \quad (2.7)$$

çıkarımını yapmak mümkündür. Ölçek faktörünün günümüzdeki değeri genel olarak  $a(t_0) \equiv 1$  olarak tanımlanır. Kırmızıya kaymaya bağlı olarak Hubble kanunu aşağıdaki gibidir;

$$z = H_0 d \quad (2.8)$$

Burada  $z$  galaksinin hızıdır [11]. Hubble'ın çalışması bu alanda ilk olması bakımında önemlidir. Sonuçlara göre gök adaların hız dağılımları Şekil 2.2'de verilmiştir.



**Şekil 2.2:** Edwin Hubble'ın çalışmasına göre galaksilerin uzaklıklarına göre hız dağılımları [6].

#### 2.1.4 Einstein Denklemleri

Evrenin dinamikleri Einstein denklemleriyle tanımlanır;

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} \quad (2.9)$$

Burada  $G_{\mu\nu}$  Einstein tensörü olup uzay-zaman eğriliğinin bir ölçüsüdür. Uzay zaman eğriliğinin geometrik yapısını yansıtan Riemann tensörü aşağıdaki şekilde ifade edilir;

$$R^{\mu}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial\Gamma^{\mu}_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\beta}\Gamma^{\sigma}_{\gamma\alpha} - \Gamma^{\mu}_{\sigma\gamma}\Gamma^{\sigma}_{\beta\alpha} \quad (2.10)$$

Ricci tensörü Riemann metriği tarafından belirlenen uzay zamanda, Riemann tensörünün büzülmesiyle aşağıdaki gibi elde edilir [5];

$$R_{\alpha\beta} = R^{\mu}_{\alpha\beta\mu} \quad (2.11)$$

Ricci eğrilik skaleri ise Ricci eğrilik tensörünün izi olarak tanımlanır;

$$R = R^{\mu}_{\mu} = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \quad (2.12)$$

Einstein alan denklemlerinin tam bir ifadesini vermek gerekirse;

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = -8\pi GT_{\mu\nu} \quad (2.13)$$

yazılabilir. Einstein denklemleri uzay-zamanın geometrisi, enerji yoğunluğu ve momentumu hakkında bilgi verir. Denklem (2.13)'te ifade edilen  $T_{\mu\nu}$  enerji-momentum tensörü olarak adlandırılır ve evrenin madde içeriğini barındırır. Riemann ve Ricci tensörü kullanılarak Friedmann-Robertson-Walker metriği için Einstein tensörleri aşağıdaki gibi hesaplanmıştır;

$$G_{00} = 3 \left[ \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{K}{a^2} \right], \quad G_{0i} = G_{i0} = 0 \quad (2.14)$$

$$G_{ij} = \left[ 2 \frac{\ddot{a}}{a} + \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{K}{a^2} \right] \delta_{ij} \quad (2.15)$$

Homojen ve izotropik evren yaklaşımı sayesinde enerji-momentum tensörü ideal akışkan formunda yazılır.

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)U_\mu U_\nu + P g_{\mu\nu} \quad (2.16)$$

Yukarıdaki ifadede  $U_\mu$  4 bileşenli hızdır. Comoving çerçevede 4 bileşenli hız aşağıdaki şekildedir,

$$U^\mu = (1,0,0,0) \quad (2.17)$$

İdeal akışkan yaklaşımında enerji-momentum tensörü diagonal formda yazılır;

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -P \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Genel rölativite kuramında enerji-momentum tensörünün korunumu aşağıdaki formda gösterilir;

$$\partial_\mu T_\nu^\mu = \partial_\mu T_\nu^\mu + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu T_\nu^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda T_\lambda^\mu = 0 \quad (2.19)$$

Enerji momentum tensörünün çözümünün yapılabilmesinin ilk adımı yukarıda  $\Gamma$  ile tanımlanan Christoffel sembollerinin bulunmasıdır. Christoffel sembolleri,

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\rho} (\partial_{\beta} g_{\rho\gamma} + \partial_{\gamma} g_{\beta\rho} - \partial_{\rho} g_{\beta\gamma}) \quad (2.20)$$

bağıntısıyla metrik üzerinden hesaplanır. Enerji yoğunluğunun evrimi,  $v = 0$  alınarak aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\dot{\rho} + 3 \frac{\dot{a}}{a} (\rho + P) = 0 \quad (2.21)$$

Sistem hakkındaki yorumları ilerletmek adına akışkanın enerji yoğunluğu ve basıncı arasında bir ilişki kurulmalıdır. Bilinen ideal akışkanlar,

$$P = \omega\rho \quad (2.22)$$

şeklinde bir bağıntıya sahiptirler. Burada  $\omega$  basınç ve yoğunluk arasındaki bir durum denklemleri parametresidir. Yoğunluk parametresi  $\omega$  için seçim keyfi olabilir. Toz (dust) için  $\omega$  yoğunluk parametresi  $\omega = 0$ , radyasyon için  $\omega = 1/3$  ve vakum için  $\omega = -1$  yazılabilir. Rölativistik ve etkileşmeyen parçacıkların kümesi toz gibi davranır, foton yahut diğer kütesiz parçacık kümesinin radyasyon gibi davrandığı söylenebilir. Aynı zamanda uzay zamanın her yanında sıfır olmayan enerji yoğunluğu sabiti vakum gibi davranır. Bu bilgilere dayanarak enerji korunumu denklemleri,

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1 + \omega) \frac{\dot{a}}{a} \quad (2.23)$$

olarak bulunur. Yukarıda ifade edilen diferansiyel denklemin çözümünden evren genişledikçe enerji yoğunluğunun nasıl evrildiğine dair yorumlar getirilebilir. Durum denklemleri parametresinin sabit olduğu varsayılarak (2.15) denklemleri çözülürse, enerji yoğunluğu ile  $a(t)$  ölçek faktörü arasındaki ilişki bulunur [5].

$$\rho \propto a^{-3(1+\omega)} \quad (2.24)$$

Belirtilen ifadelerle göre üç durum yazılabilir;

- Madde (rölativistik olmayan):  $P = 0, (\omega = 0)$   
 $\rho \propto a^{-3}$
- Işınım (rölativistik) :  $P = \frac{1}{3}\rho, (\omega = \frac{1}{3})$   
 $\rho \propto a^{-4}$
- Vakum enerjisi :  $P = -\rho, (\omega = 1)$   
 $\rho \propto a^0$

### 2.1.5 Friedmann Denklemleri

Genişleyen evren Friedmann denklemleriyle ifade edilir. FRW metriği için Einstein tensörü olarak elde edilen denklemler (2.14) ve (2.15), (2.18) numaraları enerji-momentum denklemleriyle ortak çözümlerse Friedmann denklemleri bulunabilir;

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P) \quad (2.25)$$

Yukarıdaki denklem iki Friedmann denkleminin bir tanesidir. Evrenin akışkan ve enerji yoğunluğu ile evrenin genişleme oranının zamanla nasıl değiştiğini gösteren ivmelenme denklemdir. İlk Friedmann denkleminde eğrilik sıfır kabul edilmiştir.  $K=0$  kabul edilen düz evrende çalışmak bu tezin amacı için daha uygundur. Eğrilik içeren diğer Friedmann denklemi Einstein tensörünün (0,0) bileşeni ile enerji-momentum tensörü ortak çözümlenerek bulunabilir:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{K}{a^2} \quad (2.26)$$

Denklem (2.26) genellikle Hubble parametresi cinsinden tanımlanır:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{K}{a^2} \quad (2.27)$$

Elde edilen Friedmann denklemlerinin evrenin her üç içeriği (radyasyon, madde ve vakum enerjisi) için çözümü yapılırsa evrenin madde yoğunluğuna göre ölçek faktörünün değerinin değişimi bulunur. Düz kabul edilen evren için ( $K = 0$ ) rölativistik, rölativistik olmayan ve vakum enerjisi için yukarıda elde edilen

denklemlere bağılı olarak ölçek faktörünün zamanla nasıl değişim göstereceği bulunabilir.

- Rölativistik Olmayan Madde:  $\rho \propto a^{-3}$

Rölativistik olmayan madde için (2.26) denkleminin çözümü yapıldığında;

$$a = \left(\frac{3H_0^2}{2}\right)^{2/3} t^{2/3} \quad (2.28)$$

elde edilir. Evrenin yaşı ile Hubble parametresi hakkında aşığıdaki ilişkinin kurulmasına olanak sağlar;

$$t_0 = \frac{2}{3H_0} \quad (2.29)$$

- Relativistik madde:  $\rho \propto a^{-4}$

Denklem (2.26)'in çözümü sonucunda rölativistik madde için ölçek faktörünün evrimi bulunabilir;

$$a = \left(\frac{H_0}{2}\right)^{1/2} t^{1/2} \quad (2.30)$$

Evrenin ölçek faktörü ile ifade edilen  $a$  parametresi  $t^{1/2}$  ile orantılıdır. Evrenin yaşı ve Hubble sabiti arasındaki bağıntı aşığıdaki şekilde yazılır;

$$t_0 = \frac{1}{2H_0} \quad (2.31)$$

- Vakum enerjisi:  $\rho = \text{sabit}$  olarak  $K=0$  düz evren için çözüm yapılır;

$$H_0 = \frac{\dot{a}}{a} \Rightarrow a \propto e^{H_0 t} \quad (2.32)$$

Evrenin enerji yoğunluğunun bileşenleri bu üç senaryoya dayanır. Evrenin tarihi geriye gidildikçe bakılan zamandaki baskın enerji yoğunluğuna göre dönemlere bölünebilir. Böylece evrenin madde baskın, radyasyon baskın ve vakum enerjinin baskın olduğu üç tip evresi vardır.

Ölçek faktörü yukarıda ifade edilen vakum enerjisinin üstel bir formuna sahipse evrenin bir enflasyon periyodu geçirdiği söylenebilir. Enflasyonun fiziğini tartışmadan önce Büyük Patlama modelini incelemek uygun olacaktır.

## **2.2 Büyük Patlama Modeli ve Enflasyon**

Büyük patlama modelinin ortaya koyduğu senaryo evrenin neden genişlediğini, gözlenen elementlerin bolluğunu nükleosentez modeliyle açıklamak ve arka plan ışınımının evrenin fotonlara saydam hale geldiği bir zamandan kaldığını açıklamakta çok başarılıdır. Ancak model ufuk ve düzlük problemlerini açıklamakta başarısız olmuştur. Yapılan birkaç gözlem sıcak büyük patlama modeliyle açıklanamamıştır. İlk olarak 1981 yılında Alan Guth [12] tarafından ortaya atılan evrenin enflasyonel genişleme periyodu büyük patlama modelinin sorunlarına çözüm getirmiştir. Bunlar düzlük ve ufuk problemi olarak adlandırılmıştır.

### **2.2.1 Ufuk Problemi**

Yapılan sıcaklık ölçümlerine göre kozmik mikrodalga arka plan ışınması geniş ölçeklerde evrenin her yerinde aynı değeri göstermiştir [4]. Işınımın her yerde eş yönlü olabilmesi için birbirinden uzakta olan bu bölgelerin etkileşim halinde olması gerekir; fakat evrenin genişliği düşünüldüğünde, aralarındaki büyük mesafeden dolayı birbirleriyle etkileşim halinde olamazlar, bu duruma rağmen evrenin farklı bölgelerindeki yapılar aynı sıcaklığa ve fiziksel özelliklere sahiptir. Problemi ayrıntılarıyla ele alabilmek için, kozmik mikrodalga arka plan ışınımının ne kadar zaman önce son saçılmaya uğramış olduğu ve bu zamandaki parçacık ufku değerinin ne olduğu sorularıyla uğraşılmalıdır.

#### **2.2.1.1 Parçacık Ufku ve Hubble Yarıçapı**

Uzayın nedensel bölgesinin ölçüsü, ışığın belli bir zamanda ne kadar uzağa gidebildiğiyle belirlenir. Genişleyen evrende ışığın yayılması, en iyi bölüm 2.1.2'de

belirtilen comoving koordinatlar kullanılarak çalışılabilir. Bu koordinatlarda ışığın yol aldığı  $ds^2 = 0$  geodezik kullanılarak ışık için metrik;

$$0 = -dt^2 + a(t)^2 dr^2 \quad (2.33)$$

olarak yazılır. Bahsedilmesi gereken bir diğer kavram parçacık ufku'dur. Parçacık ufku, ışığın  $t = 0$  zamanından beri seyahat ettiği maksimum uzaklıktır. Bu aynı zamanda evrende gözlenebilen en eski zamanın sınırını oluşturur. Bir gözlemcinin ışık hızındaki sinyalleri alabileceği en uzak mesafe olan parçacık ufku aşağıdaki şekilde tanımlanır;

$$d \equiv \int_{t_i}^t \frac{dt}{a(t)} \quad (2.34)$$

Kozmolojik hesaplamalar evrenin genişliğinin üzerine temellenir. Uzay-zamanın nedensel yapısı Hubble yarıçapının evrimi ile ilişkilendirilir ve  $H^{-1}$  olarak tanımlanır. Hubble yarıçapı, nedensel süreçlerin etkileşmediği sınırın karakteristik bir uzunluk ölçeğidir, diğer bir ifadeyle ışığın evren genişledikçe ne kadar uzaktan seyahat ettiğinin bir ölçüsüdür. Yararlı bir diğer ifade comoving Hubble yarıçapıdır ve  $aH^{-1}$  olarak ifade edilir [7].

Nedensel süreçler Hubble yarıçapından daha küçük ölçeklerde işlemektedir. Enflasyon teorisi, bu süreçlerde çok önemli bir rol oynar.

Enflasyon teorisi kapsamında iki niceliği Hubble yarıçapının ölçeğiyle kıyaslamak nedensel olayları açıklamakta çok önemlidir. Belirlenen bir zamanda iki parçacık için bir  $\lambda$  uzunluk ölçeği tanımlanır.  $\lambda \gg (aH)^{-1}$  olduğu durum "ufuk-dışı" (süper-ufuk) ölçek olarak adlandırılırken,  $\lambda \ll (aH)^{-1}$  durumu ise "ufuk-içi" olarak adlandırılır. Evrenin evrimi boyunca, enflasyondan dolayı uzunluk ölçekleri Hubble yarıçapından büyük ya da küçük olurlar. Comoving Hubble yarıçapı evren genişledikçe genişler.

Ölçek faktörünün  $a \sim t^p$  olduğu ifade edilir. Probleme daha yakından bakabilmek için ışığın belirli bir zaman aralığında yolculuk ettiği mesafe tanımlanır [11];



$$d = \int_{t_i}^{t_f} \frac{d\eta}{a(\eta)} = \int_{t_i}^{t_s} d\eta \eta^{-p} \propto t_s^{1-p} - t_i^{1-p} \quad (2.35)$$

Eşitlikteki zaman aralıkları için  $t_i$  büyük patlamaya çok yakın olan ilk başlangıç zamanını,  $t_s$  ise günümüzdeki zamanı ifade etmektedir. Evren için bu iki zamanın arasında fotonların son saçılma zamanı olan  $t_{ss}$  yer alır;

$$d_{ss} \equiv t_s^{1-p} - t_{ss}^{1-p} \quad (2.36)$$

$$d_i \equiv t_{ss}^{1-p} - t_i^{1-p}$$

Son saçılma döneminden yolculuğuna çıkan fotonların oluşturduğu kozmik mikrodalga arka plan ışımalarının, birbirleriyle nedensel olarak ilişki içerisinde olmayan bölgelerden oluştuğu görülmüştür. Bunun yanında kozmik mikrodalga arka plan ışıması geniş ölçeklerde izotropik görünür. Birbiriyle ilişki içerisinde olmayan bu bölgelerin nasıl aynı fiziksel özellikleri gösterdiği sorunu ufuk problemi olarak adlandırılır. Bu problemi çözmek için evrenin  $a \sim t^p$  şeklinde genişlediği kabul edilir. Bu durumda parçacık ufku

$$d_i = \int_{t_i}^{t_f} \frac{d\eta}{a(\eta)} = \int_{t_i}^{t_f} d\eta e^{-H\eta} h = \frac{1}{H} (e^{-Ht_i} - e^{-Ht_f}) \quad (2.37)$$

olacaktır. Buradaki durumda  $t_i \ll 1$  ve  $t_f \gg 1$  olur. Büyük patlama zamanına yakın bir andan son saçılma anına dek olan aralık yaklaşık olarak aşağıdaki şekildedir;

$$d_i \approx \frac{1}{H} \quad (2.38)$$

Böylelikle, parçacık ufku enflasyonun bir dönemi boyunca zamanla neredeyse sabit kalmıştır. İlk zamanlarda birbiriyle etkileşen bu bölgeler, yeteri derecede uzun enflasyon süreci sonunda bundan böyle haberleşemezler. Bununla birlikte ufuktan çıkmadan önce bir anda bu bölgeler hala birbirleriyle etkileşim halindeydi ve aynı şartlarda evrildiler. Bu açıklama ufuk problemini çözer.

### 2.2.2 Düzlük Problemi

Düzlük problemini incelemek adına diğer bir kozmolojik ifade ele alınmalıdır.

$$\Omega = \frac{8 \pi G \rho}{3H^2} = \frac{\rho}{\rho_{krt}} \quad (2.39)$$

Burada  $\Omega$  ile ifade edilen nicelik yoğunluk parametresi olup,  $\rho_{krt}$  ise evrenin kritik enerji yoğunluğunu ifade eder. Kritik enerji yoğunluğu aşağıdaki şekilde yazılır;

$$\rho_{krt} = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (2.40)$$

Yukarıdaki nicelik zamanla değişir. Evrenin toplam enerji yoğunluğu (2.26) denklemini kullanılarak;

$$\Omega - 1 = \frac{K}{a^2 H^2} \quad (2.41)$$

olarak verilir. Buradan hareketle  $K=0$  ,  $K=1$  ve  $K=-1$  için evrendeki enerji yoğunlukları hakkında aşağıdaki ifadeler yazılabilir [5];

$$\begin{aligned} \Omega > 1 \text{ ya da } \rho > \rho_{krt} \quad K > 0 &\leftrightarrow \text{kapalı} \\ \Omega = 1 \text{ ya da } \rho = \rho_{krt} \quad K = 0 &\leftrightarrow \text{düz} \\ \Omega < 1 \text{ ya da } \rho < \rho_{krt} \quad K < 0 &\leftrightarrow \text{açık} \end{aligned} \quad (2.42)$$

Evrenin ilk anlarında  $a(t)$  ölçek faktörünün çok küçük olduğu düşünülmektedir, buradan evrenin erken zamanlarında eğriliğin sabit olduğu sonucu çıkartılabilir. Kozmik mikrodalga arka plan anizotropi ölçümlerinden evrenin,  $\Omega$  yoğunluk parametresinin 1 değerine yaklaştığını görülmektedir. Evrenin ilk dönemlerinde yoğunluk parametresi, kritik yoğunluktan biraz büyük veya biraz küçük olmuş olsa bile sonraki genişleme, yoğunluk parametresini bu kritik değerden uzaklaştıracaktır. Gözlemler evrenin ilk dönemlerindeki yoğunluk parametresinin, kritik yoğunluğa olağanüstü yakın olması gerektiğini göstermektedir. Evrenin ilk dönemlerindeki yoğunluk parametresinin neden kabul edilebilir bir değere bu kadar hassas bir şekilde uyduğunun nedeni büyük patlama modeli çerçevesinde açıklanamamıştır ve bu problem düzlük problemi olarak adlandırılır.

Enflasyonun bu sorunu nasıl çözdüğünü görebilmek için (2.26) denklemi, Hubble parametresinin tanımından yararlanarak aşağıdaki gibi yazılır;

$$1 = \Omega - \frac{K}{a^2 H^2} \quad (2.43)$$

Enflasyon periyodu boyunca H sabit kalacaktır, bu yüzden  $K/a^2 H^2$  terimi sifıra gider, yani eğrilikten gelen terim sürekli olarak küçülecektir. Böylece  $\Omega$  yoğunluk parametresi bir değerine yaklaşacaktır. Enflasyon periyodu boyunca evrenin enerji yoğunluğu kritik yoğunluk ile yönetilmiştir. Böylece yoğunluk parametresinin bir değerine yaklaşması enflasyon döneminin ne kadar sürdüğü ile ilişkilendirilir. Eğer enflasyon yeterince uzun sürerse, yoğunluk parametresi istenilen değere yaklaşacaktır. Enflasyon döneminde evren çok büyük bir faktörle genişlemiştir. Uzayın kaç kat genişlediğini (e-folding) gösterebilmek için aşağıdaki parametre tanımlanır [13];

$$N = \int_{t_i}^{t_s} H dt \quad (2.44)$$

Bu değer enflasyonun  $t_i$  ve  $t_f$  değeri arasında miktarını belirler. Enflasyon, yukarıda hesaplanabilecek parametre ile uzayı devasa boyutlara ulaştıracaktır ve gözlenebilir ufku, evrenin çok küçük bir kısmını oluşturacaktır. Böylece evrenin tamamı eğri olsa bile, gözlemlenebilir evren neredeyse düz görünür. Evren ilk başlarında kritik yoğunluk değerinden uzak olsa da enflasyondan kaynaklı büyük genişleme, gözlemlenebilir evrenin bölgelerinin eğriliğinin düz olmasını ve yoğunluk parametresinin kritik değere çok yakın olmasını sağlar.

### 3. KOZMİK ENFLASYON

Evrenin ivmelenerek genişlemesi enflasyonun temel tanımı olarak adlandırılır ve  $\ddot{a}(t) > 0$  olarak gösterilir. Buradaki  $\ddot{a}(t)$  gösterimi ivmelenme parametresini ifade eder. Önceki bölümlerde bahsedilen Büyük Patlama modelinin sorunlarını, radyasyon döneminden önce veya radyasyon dönemi boyunca gerçekleşen böylesi bir enflasyon döneminin çözdüğü gösterilmiştir [12]. Bu bölümde enflasyon fazını yöneten mekanizmalar tartışılacaktır. Friedmann denklemlerinden, denklem (2.25),  $\ddot{a}(t) > 0$  ivmelenmesinin  $\rho + 3p < 0$  olduğunda meydana geldiğine işaret eder.

$$P < -\frac{1}{3}\rho \quad (3.1)$$

Yukarıdaki ifade enflasyon şartlarından biridir ve enerji yoğunluğu pozitif olduğunda, basıncın negatif olacağını işaret eder.

Enflasyon dönemi  $10^3$  ve  $10^{15}$  GeV gibi çok yüksek enerji aralığında gerçekleşmiştir [14]. Böylesi yüksek enerjilerde maddeyi tanımlamak ve enflasyon mekanizmasını anlamak için alan teorisi uygun çalışma alanıdır. Bu nedenle enflasyonu incelemek amacıyla, evrenin ilk anlarında, maddenin enerji yoğunluğu dengesine baskın olan ve “*inflaton*” olarak adlandırılan bir  $\phi$  skaler alanı tanımlanır. Bu skaler alanın  $V(\phi)$  potansiyeli yeterince düz olursa alan yavaşça hareket eder ve negatif bir basınç kaynağı sağlar. Bu varsayım evrendeki gözlenen homojenlik ve izotropi özelliği ile uyumludur. Buna ek olarak inflaton alanının fiziksel doğası ve parçacık fiziğinin standart modeliyle ilişkisi hala açıklığa kavuşmamıştır çünkü enflasyon mekanizmasını incelemek için parçacık hızlandırıcılarının test edemediği çok yüksek enerjilere ihtiyaç vardır. Bu, alanının potansiyel şeklinin enflasyon fazını desteklemesi için yeterince düz olması gerektiği tahminini destekler niteliktedir.

Enflasyonun kuantum mekaniğiyle uyumlu olması kuramın iyi başarılarından biridir. Aynı zamanda enflasyon, kuantum dalgalanmalarının temeli olan kozmik mikrodalga arka plan ışıması anizotropilerinin oluşumuna ve galaksilerin tohumlarının atılması adına doğal bir mekanizma sağlamıştır. Hassaslaşan astrofiziksel veriler enflasyon periyodu hakkında daha fazla bilgi edinilme fırsatını

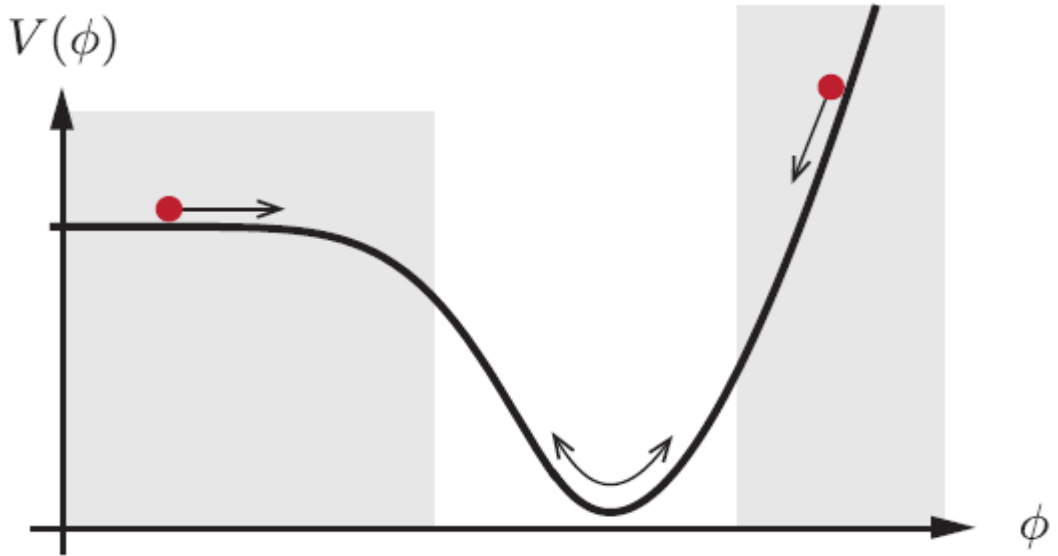
vermiştir. Son açıklanan Planck Uydusu gözlemleri [10] ve WMAP ölçümleri [13] kozmolojik parametrelerin yüksek duyarlılıkla ölçümlerini sağlamıştır. Gözlemlerden elde edilen kozmolojik parametre değerlerinden enflasyon mekanizmasına ve evrenin yapı oluşumuna dair bilgiler edinilmiştir. Bu bölümde enflasyonun temel mekanizması ve bu mekanizmanın kaynağı olan inflaton alanının dinamiği ele alınacaktır.

### 3.1 Skaler Alan Dinamiği

Enflasyon mekanizmasının nasıl işlediğinin anlaşılması adına yukarıda bahsedildiği üzere skaler bir  $\phi(t, x)$  inflaton alanı tanımlanır. Hızlanan genişlemeyi sağlayan şartları incelemek için skaler alanın özellikleri belirlemek ve FRW uzay-zamanında nasıl davrandığını analiz etmek gereklidir. Böyle bir skaler alanın hareket denklemleri aşağıdaki gibidir;

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L} \equiv \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right] \quad (3.2)$$

Burada  $V(\phi)$  skaler alanın potansiyel terimidir (Şekil 3.1). Alanın fiziksel doğası tam olarak bilinmemektedir bu yüzden  $V(\phi)$  potansiyelleri için birçok farklı çeşit mevcuttur.



Şekil 3.1: Skaler inflaton alanı için potansiyel örneği [7].

Böyle bir alan için enerji-momentum tensörü;

$$T_{\mu\nu}(\phi) = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + g_{\mu\nu} \left[ -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi + V(\phi) \right] \quad (3.3)$$

şeklindedir. Homojen bir skaler alanın ideal akışkan formunda enerji-momentum tensörü bileşenleri (2.18) denkleminde göre çözülerek enerji yoğunluğu ve basıncı elde edilebilir;

$$\rho = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (3.4)$$

$$P = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad (3.5)$$

Bu sonuca göre durum denklemi yazılabilir;

$$\omega \equiv \frac{P}{\rho} = \frac{\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi)} \quad (3.6)$$

Bu denklem basınç, enerji, skaler alan ve potansiyeli arasında kullanışlı bir bağıntı sunar. Bunu görmek için inflaton  $\phi(t)$  ve FRW ölçek faktörü  $a(t)$ 'nin nasıl evrildiğine daha detaylı bakılmalıdır. Yoğunluk parametresi için yukarıda gösterilen denklem (3.4), Friedmann denklemlerinden (2.27) numaralı denklemde ve yine (3.4) ile (3.5) denklemleri (2.25) yerine yazılıp, uzayın eğriliği  $K = 0$  kabul edilirse aşağıdaki denklemler elde edilir;

$$H^2 = \frac{1}{3M_{pl}^2} \left[ \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right] \quad (3.7)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{3} [\dot{\phi}^2 - V(\phi)] \quad (3.8)$$

Burada  $M_{pl}^2 \equiv \frac{1}{8\pi G}$  olarak tanımlanan nicelik Planck kütesidir. Aynı zamanda yukarıdaki eşitliklerden yararlanarak (2.21) ile verilen enerji süreklilik denklemini aşağıdaki gibi yazabiliriz;

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V' = 0 \quad (3.9)$$

Bu denklem Klein-Gordon denklemidir ve burada  $V' \equiv \frac{dV}{d\phi}$  ifade eder. Yukarıdaki denklem skaler alanın evrilme denklemidir.

### 3.2 Yavaş Yuvarlanma Yaklaşıklığı

Evreninin enflasyon dönemi için yeterli şartlardan biri de yukarıda açıklanan  $P = -\rho$  şeklinde de Sitter genişlemesi şartıdır. Bu çalışmada skaler alanın evrendeki baskın enerji kaynağı olduğu varsayılarak çalışılmıştır. Durum denklemi parametresinin sonucundan anlaşıldığı gibi eğer  $V(\phi)$  potansiyel enerjisi, kinetik enerjiye baskın gelirse,  $V(\phi) \gg \dot{\phi}^2$ , skaler alan potansiyel boyunca yavaşça yuvarlanacaktır. Bu yavaş yuvarlanma periyodu olarak adlandırılır ve bu eşitsizlik yavaş yuvarlanma şartı olarak atfedilmiştir. Bu şartlar altında (3.4) ve (3.5) denklemleri;

$$P \approx -V(\phi) \approx -\rho \quad (3.10)$$

olduğunu gösterir. Bu yüzden eğer evren böyle bir skaler alanın potansiyel enerjisi ile yönetilmişse ve aynı skaler alan kendi potansiyelinde yavaşça yuvarlanıyorsa o zaman de Sitter evresinin kesin bir şart olduğu anlaşılır. Böylece enflasyon sonucu ortaya çıkar. Yavaş yuvarlanma şartı enflasyonu garantiler. Bu yaklaşım altında denklem (3.7) aşağıdaki şekildedir;

$$H^2 \approx \frac{V(\phi)}{3M_{pl}^2} \quad (3.11)$$

Yavaş yuvarlanma yaklaşımında Hubble genişlemesi tamamen potansiyel enerji ile belirlenir ve denklem (3.9);

$$3H\dot{\phi} \approx -V' \quad (3.12)$$

şeklinde olur. FRW uzay-zamanında zaman bağımlı Hubble parametresinin evrenin hızlanması için uyması gereken yeterli ve şart koşul;

$$\varepsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{1}{H} \frac{dH}{dN} = -\frac{d \ln H}{dN} < 1 \quad (3.13)$$

olmasıdır. Burada  $dN = Hdt$  şeklinde tanımlanır ve uzayın kaç kat genişlediğinin bir ölçüsüdür. Enflasyonun Büyük Patlama sorunlarını çözebilmek adına yavaş yuvarlanma şartlarını sağlaması gerekir. Enflasyonun ne kadar sürdüğü önemlidir. Bu şartı sağlamak adına ikinci bir parametre tanımlanır;

$$\eta \equiv \frac{d \ln \varepsilon}{dN} = \frac{\dot{\varepsilon}}{H\varepsilon} \quad (3.14)$$

Yavaş yuvarlanma şartlarına göre bu iki parametre yukarıdaki elde edilen denklemlerle yeniden düzenlenirse

$$\varepsilon \equiv \frac{M_{pl}^2}{2} \left( \frac{V'}{V} \right)^2, \quad |\eta| \equiv M_{pl}^2 \left| \frac{V''}{V} \right| \quad (3.15)$$

şekline gelir.

Başarılı bir enflasyon dönemi bu iki yavaş yuvarlanma parametrelerinin yeterince küçük olduğu,  $\{\varepsilon, |\eta|\} \ll 1$ , olduğu zaman meydana gelir.

Diğer bir önemli kavram ise enflasyonun miktarıdır. Ufuk problemini çözebilmek için enflasyonun başındaki ufuk ile şu an ki ufku karşılaştırmak gereklidir.

$$(a_0 H_0)^{-1} < (a_{ilk} H_{ilk})^{-1} \quad (3.16)$$

Basit olması açısından enflasyon sonlana kadar evreni ışınım baskın olarak tanımlamak uygundur. Günümüzde Hubble parametresi ve ölçek faktörü  $H \propto a^{-2}$  formundadır.

$$\frac{a_0 H_0}{a_{son} H_{son}} \sim \frac{a_{son}}{a_0} \sim \frac{T_0}{T_{yen.ısl.}} \sim 10^{-28} \quad (3.17)$$

Eğer enflasyonun GUT ölçeğinde olduğunu varsayılırsa yaklaşık olarak  $10^{-28}$  düzeyinde bir sonuca ulaşılır. Enflasyon süresinde Hubble küresinin küçülmesi temel fikirlerden biridir ve bu küçülme  $10^{28}$  düzeyinde meydana gelir [7]. Enflasyonun başlangıç ve bitiş zamanında ki ölçek faktörleri kıyaslanırsa;

$$\frac{a_{son}}{a_{ilk}} > 10^{28} \implies N = \ln \frac{a_{son}}{a_{ilk}} > 64 \quad (3.18)$$



şeklinde olur. Yukarıdaki bu durum ufuk probleminin çözümü için sunulan en kullanışlı ifadedir ve uzayın enflasyon sonunda uzayı yaklaşık olarak 60 kat büyümüş olması gerektiğini anlatır.

Enflasyon, yavaş yuvarlanma şartları artık sağlanmadığı zaman sonlanmış olur;

$$\varepsilon(\phi_{son}) = 1, \quad \eta(\phi_{son}) = 1 \quad (3.19)$$

### 3.3 Konformal Zaman

Bu bölümde ve sonraki bölümlerde sık sık kullanılacak bir diğer parametre ise  $\tau$  ile ifade edilen konformal zamandır. Kozmik zaman  $t$  ve konformal zaman  $\tau$ ;

$$d\tau \equiv \frac{dt}{a(t)} \quad (3.20)$$

şeklinde ilişkilendirilir. Yukarıdaki tanımdan konformal zaman

$$\tau(t) = \int \frac{dt}{a(t)} \quad (3.21)$$

olarak verilir. Bu tanıma uygun olarak conformal Hubble oranı  $\mathcal{H} \equiv \frac{a'}{a}$  olarak tanımlanabilir. Burada ' işareti conformal zamana göre türevi ifade eder.  $H$  ve  $\mathcal{H}$  aşağıdaki şekilde ilişkilendirilir.

$$aH = \mathcal{H} \quad (3.22)$$

Yukarıdaki eşitlikte  $\mathcal{H}$  değeri comoving Hubble oranıdır.

Uzaysal olarak düz FRW metriği, conformal zaman kullanılarak tekrar ifade edilebilir.

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -a^2(\tau) d\tau^2 + a^2(\tau) [dr^2 + r^2 d\Omega^2] \quad (3.23)$$

Yukarıdaki metrik uzaysal olarak düz bir metriktir. Bundan sonraki çalışılacak bölümlerde kolaylık sağlaması açısından önemlidir.

## 4. ENFLASYON KAYNAKLI İLKEL PERTÜRBASYONLAR

Önceki bölümde, homojen ve izotropik evren tanımı verilmiş ve Büyük Patlama modelinin ufuk ve düzlük sorunlarına enflasyon döneminin önerilmesiyle çözüm getirildiği gösterilmiştir. Enflasyonun en önemli unsuru evrenin ilk koşullarının açıklanmasında yatar ve teori evrendeki yapıların kaynağına da ışık tutar. Enflasyon, evrenin ilk zamanlarındaki homojenlikten sapmaların temelini açıklayabilir ve spektrumları hakkında bir tahmin yapar. Bu, erken evrenin enflasyon teorisi ve günümüz gözlemleri arasında bir ilişki kurar. Bugün ilkel homojensizlikler (inhomogeneous) CMB gözlemlerindeki sıcaklık farklarından görülebilir. Aynı zamanda enflasyon, evrendeki geniş ölçekteki yapıların başlangıç kaynaklarına doğal bir mekanizma sağlamıştır.

Bu bölümde enflasyon süresinde olan kuantum dalgalanmalarının yarattığı homojensizliklerin ilkel spektrumlarının hesapları ele alınacaktır. İlkel spektrumlar genel rölativitedeki lineer pertürbasyon teorisi aracılığıyla hesaplanabilir. Bu bölümde yoğunluk pertürbasyonlarının spektrumunun gözlemlerle uyduğu gösterilecek ve homojen arka plan çözümleri etrafında inflaton alanının vakum kuantum dalgalanmaları tanıtılacaktır. Enflasyon boyunca bu kuantum dalgalanmaları ufuk dışına genişleyecektir. Enflasyon sonlandığında, ufuk genişlemeye başlar ve yoğunluk pertürbasyonları tekrar ufkun içine girer. Bu olay evrenin ilk anlarında küçük ölçekteki kuantum fiziği ile günümüzdeki çok geniş kozmolojik ölçekler arasında ilişki kurulmasını sağlar.

CMB gözlemlerinden evrenin geniş ölçeklerde homojen olduğu görülür. Küçük ölçeklerde bakıldığında CMB sıcaklık dağılımında küçük homojensizlikler  $10^{-5}$  düzeyindedir ki bu erken evrenin şartlarının homojen arka plan etrafında küçük pertürbasyonların olduğunu öne sürer. Pertürbasyonları tanımlamak amacıyla homojen arka plan  $\tilde{X}(t)$  değerinin etrafında,  $\delta X(t, x)$  şeklinde bir nicelik tanımlanır [7];

$$X(x, t) = \tilde{X}(t) + \delta X(t, x) \quad (4.1)$$

Yukarıdaki tanıma uygun olarak evrenin metriğinin ve inflaton alanının pertürbasyonları sonraki konularda incelenmiştir

#### 4.1 Metrik Pertürbasyonları

Kozmolojik dalgalanma modelini çalışmak için önceki bölümde anlatılan homojen ve izotrop metrik etrafında küçük pertürbasyonlar varsayılmakla başlanabilir;

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} \quad (4.2)$$

Burada  $\bar{g}_{\mu\nu}$ , (1.1) denkleminde verilen FRW metriği,  $\delta g_{\mu\nu}$  homojen metrik etrafındaki pertürbasyon olup,  $g_{\mu\nu}$  ise pertürbe olmuş evrenin metriğini ifade eder. Metrikte uzaysal olarak düz kabulü yapılmıştır. Konformal zaman formalizmi kullanılarak pertürbe olmuş metrik aşağıdaki gibi yazılır [7];

$$ds^2 = a^2(\tau) \left[ (1 + 2A)d\tau^2 - 2B_i dx^i d\tau - (\delta_{ij} + h_{ij}) dx^i dx^j \right] \quad (4.3)$$

Burada  $A$ ,  $B_i$  ve  $h_{ij}$  metrik pertürbasyonları olup uzay ve zamanın fonksiyonudur. Kozmolojik pertürbasyonları çalışmak için metrik pertürbasyonlarını; skaler, vektör ve tensör olarak üç kısma ayırmak kullanışlıdır [16]. Bu ayırımın kullanılması sayesinde Einstein denklemleri skalerler, vektörler ve tensörler olarak ayrı ayrı çalışılabilir [17].  $B_i$  vektörü bir skalerin gradyenti ve diverjansız vektör olarak yazılabilir;

$$B_i = \partial_i B + \hat{B}_i, \quad \partial^i B_i = 0 \quad (4.4)$$

Aynı şekilde herhangi bir tensör alanı;

$$h_{ij} = 2C\delta_{ij} + 2\partial_{(i}\partial_{j)}E + 2\partial_{(i}\hat{E}_{j)} + 2\hat{E}_{ij}, \quad \partial^i \hat{E}_i = 0, \quad \partial^i \hat{E}_{ij} = 0 \quad (4.5)$$

şeklinde skaler, vektör ve tensör olarak ayrıştırılabilir. Burada  $\hat{E}_j^i = 0$  ve

$$\partial_{(i}\partial_{j)}E \equiv \left( \partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla^2 \right) E \quad (4.6)$$

$$\partial_{(i}\hat{E}_{j)} \equiv \frac{1}{2}(\partial_i\hat{E}_j + \partial_j\hat{E}_i) \quad (4.7)$$

nicelikleri yazılabilir. Metrik pertürbasyonlarının 4 skaler 4 vektörel ve 2 tensör olmak üzere 10 serbestlik derecesi vardır;

- Skalerler: A, B, C, E
- Vektörler:  $\widehat{B}_i, \widehat{E}_i$
- Tensörler:  $\widehat{E}_{ij}$

Bu çalışma kapsamında skaler ve tensör pertürbasyonlarıyla ilgilenilecektir çünkü vektör pertürbasyonları enflasyon süresince hızlıca bozunmuşlardır [17,18]. Skaler pertürbasyonlar, madde homojensizliği ve yapıların oluşumuna neden olduğu için bu kapsamda çok önemlidir. Bundan sonraki bölümde inflaton alanının vakum dalgalanmalarının yapıların oluşumuna sebep olan skaler dalgalanmalar incelenecektir.

## 4.2 Ayar Dönüşümleri

Kozmolojik pertürbasyonlar koordinat seçimindeki serbestlikle belirlenir. Homojen ve izotrop evren için tercih edilen (1.1) denkleminde koordinat sisteminin aksine, pertürbasyonları analiz etmek için belirlenmiş bir koordinat sistemi yoktur. Metrik pertürbasyonları koordinat seçimine bağlıdır ve uygun koordinat seçimi yapılmazsa gerçek olmayan pertürbasyonlar ortaya çıkar. Bu sebeple koordinat dönüşümü altında değişmez kalacak doğru koordinat seçimi yapılmalıdır. Bu bağlamda aşağıdaki şekilde koordinat seçimi yapılabilir;

$$X^\mu \rightarrow \tilde{X}^\mu \equiv X^\mu + \xi^\mu(\tau, x) \quad (4.8)$$

$$\xi^0 \equiv T, \quad \xi^i \equiv L^i = \partial^i + L^i \quad (4.9)$$

Bu dönüşümler altında metriğin nasıl değiştiğini görmek için aşağıdaki dönüşüm kuralı uygulanır;

$$g_{\mu\nu}(X) = \frac{\partial \tilde{X}^\alpha}{\partial X^\mu} \frac{\partial \tilde{X}^\beta}{\partial X^\nu} \tilde{g}_{\alpha\beta}(\tilde{X}) \quad (4.10)$$

Yukarıdaki ifade eski koordinatlardaki metrik  $g_{\mu\nu}$  ile, yeni koordinatlardaki metrik  $\tilde{g}_{\alpha\beta}$  ile ilişki kurar.

Yukarıda bahsedilen koordinat seçimine göre metrikteki parametreler için aşağıdaki bağıntılar elde edilir;

$$\begin{aligned}
A &\mapsto A - T' - \mathcal{H}T, & B &\mapsto B + T - L', & C &\mapsto C - \mathcal{H}T - \frac{1}{3}\nabla^2 L \\
E &\mapsto E - L, & \hat{E}_i &\mapsto \hat{E}_i - L, & \hat{E}_{ij} &\mapsto \hat{E}_{ij}, & \hat{B}_i &\mapsto \hat{B}_i - \hat{L}_i'
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Ayar problemlerinden sakınmak için koordinat dönüşümleri altında değişmeyen özel metrik pertürbasyonları tanımlanmalıdır;

$$\begin{aligned}
\Psi &\equiv A + \mathcal{H}(B - E') + (B - E')', & \hat{\phi}_i &\equiv \hat{E}_i - \hat{B}_i, & \hat{E}_{ij} \\
\phi &\equiv -C - \mathcal{H}(B - E') + \frac{1}{3}\nabla^2 E
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Yukarıdaki eşitlikler Bardeen değişkenleri olarak adlandırılır [7].

### 4.3 Skaler Pertürbasyonlar

Homojen arka plan ve skaler metrik pertürbasyonları için metrik aşağıdaki şekilde yazılır;

$$ds^2 = a^2(\tau) \left[ -(1 + 2\psi) d\tau^2 + 2\partial_i B dx^i d\tau + \left( (1 - 2\Phi)\delta_{ij} + 2\partial_i \partial_j E \right) dx^i dx^j \right] \tag{4.13}$$

Buradaki metrik konformal zaman kullanılarak yazılmıştır ve  $\Phi$  skaler eğrilik pertürbasyonunu temsil eder. Pertürbasyonların evrimini yöneten denklemleri türetebilmek için özel bir ayar belirlenmelidir. İlerleyen bölümlerde  $B = E = 0$  olarak seçilen *Newtonyen ayar* seçildi. Bu ayarda, metrik;

$$ds^2 = a^2(\tau) \left[ (1 + 2\psi) d\tau^2 - (1 - 2\Phi)\delta_{ij} dx^i dx^j \right] \tag{4.14}$$

olarak ifade edilir. Bu ayardaki metrik pertürbasyonları (4.12) denklemindeki Bardeen değişkenleriyle bağlantılı olması açısından  $A \equiv \Psi$  ve  $C \equiv -\Phi$  alınmıştır.

### 4.3.1 Enerji-Momentum Tensöründeki Pertürbasyonlar

2. bölümde homojen ve izotrop evrendeki enerji-momentum tensörünün ideal akışkan formunda olduğu kabul edilmişti;

$$\bar{T}_\nu^\mu = (\bar{\rho} + \bar{P})\bar{U}^\mu\bar{U}^\nu - \bar{P}\delta_\nu^\mu \quad (4.15)$$

Burada  $\bar{U}_\mu = a\delta_\mu^0$ ,  $\bar{U}^\mu = a^{-1}\delta_0^\mu$  ifadeleri comoving gözlemci için hızı ifade eder. Homojen ve izotropik enerji-momentum tensörünün etrafında küçük pertürbasyonlar aşağıdaki şekildedir;

$$T_\nu^\mu = \bar{T}_\nu^\mu + \delta T_\nu^\mu \quad (4.16)$$

Pertürbe olmuş evrende enerji yoğunluğu  $\rho$ , basınç  $P$  ve 4 bileşenli hız  $U^\mu$  konumun bir fonksiyonu olabilir;

$$\rho(\tau, x) = \bar{\rho}(\tau) + \delta\rho(\tau, x), \quad P(\tau, x) = \bar{P}(\tau) + \delta P(\tau, x), \quad \delta U^i = \frac{1}{a}v^i(\tau, x) \quad (4.17)$$

Burada  $v^i \equiv dx^i/d\tau$  koordinat hızıdır.  $U^\mu = \bar{U}^\mu + \delta U^\mu = a^{-1}[1 - A, v^i]$  denklemleri kullanılarak birinci dereceden enerji momentum tensörüne gelen pertürbasyon katkıları aşağıdaki gibidir;

$$\delta T_0^0 = \delta\rho$$

$$\delta T_0^i = (\bar{\rho} + \bar{P})v^i \quad (4.18)$$

$$\delta T_j^0 = -(\bar{\rho} + \bar{P})(v^j + B_j)$$

$$\delta T_j^i = (\bar{\rho} + \bar{P})(v^i + \Pi_j^i)$$

Burada  $\Pi_j^i$  izotropik olmayan baskı enerji tensörüdür. Yukarıda enerji-momentum tensörüne katkısı gösterilmiştir fakat bundan sonraki bölümlerde baskı enerji tensörü  $\Pi_j^i = 0$  olarak kabul edilecek ve hesaba katılmayacaktır. Metrik pertürbasyonları için kullanılan dönüşüm kuralı (4.10) tensörler için uygulanırsa, (4.8) ve (4.9) denklemlerindeki koordinat dönüşümleri altında enerji-momentum tensörü için ayar dönüşüm şartları elde edilir;

$$\delta\rho \mapsto \delta\rho - T\bar{\rho},'$$

$$\delta P \mapsto \delta P - T\bar{P}',$$

$$v^i \mapsto v^i + L'_i,$$

$$\Pi_{ij} \mapsto \Pi_{ij}$$

### 4.3.2 Lineerleştirilmiş Einstein Denklemleri

Homojen ve izotrop evren etrafında küçük pertürbasyonlar varsayıldığında, pertürbe olmuş evren için Einstein denklemleri elde edilir. Bu bölümde pertürbe olmuş metrik ve enerji-momentum tensörü kullanılarak Einstein alan denklemleri çözülecektir. Einstein denklemlerinin pertürbe olmuş hali genel olarak;

$$\delta R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta R g_{\mu\nu} = \delta G_{\mu\nu} = 8\pi G\delta T_{\mu\nu} \quad (4.19)$$

şeklindedir. Newtonyen ayardaki metrik;

$$g_{\mu\nu} = a^2 \begin{pmatrix} 1 + 2\Psi & 0 \\ 0 & -(1 + 2\Phi)\delta_{ij} \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

olarak ifade edilebilir. Birinci dereceden Einstein tensörü;

$$\begin{aligned} G_{00} &= 3\mathcal{H}^2 + 2\nabla^2\Phi - 6\mathcal{H}\Phi' \\ G_{0i} &= 2\partial_i(\Phi' + \mathcal{H}\Psi) \\ G_{ij} &= -(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\delta_{ij} \\ &\quad + [\nabla^2(\Psi - \Phi) + 2\Phi'' + 2(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)(\Phi + \Psi) + 2\mathcal{H}\Psi' \\ &\quad + 4\mathcal{H}\Phi']\delta_{ij} + \partial_i\partial_j(\Phi - \Psi) \end{aligned} \quad (4.21)$$

şeklindedir. Enerji-momentum tensörü yukarıda gösterildiği gibi izotropik olmayan baskı tensörü içermektedir, fakat evrenin bir ideal akışkan formunda olduğu varsayımından dolayı izotropik olmayan nicelik hesaba katılmamıştır. Einstein tensörünün  $ij$  bileşenine bakılırsa  $\Pi = 0$  olduğunda  $\Phi = \Psi$  haline gelir. Böylece skaler metrik dalgalanmaları tek bir ayar değişmez serbestlik derecesi ile tanımlanır. Elde edilen Einstein tensörleri (4.19)'da yazılan enerji momentum tensörü ile eşitlenirse skaler pertürbasyonlar için hareket denklemleri elde edilir;

$$\nabla^2\Phi - 3\mathcal{H}(\Phi' + \mathcal{H}\Phi) = 4\pi G a^2 \delta\rho, \quad (4.22)$$

$$\Phi' + \mathcal{H}\Phi = -4\pi G a^2 (\bar{\rho} + \bar{P})v, \quad (4.23)$$

$$\Phi'' + 3\mathcal{H}\Phi' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi = 4\pi G a^2 \delta P \quad (4.24)$$

### 4.3.3 Korunumlu Eğrilik Pertürbasyonu

Mukhanov ve Chibisov 1981 yılında kozmik mikrodalga arka plan ışımada görülen ve evrendeki geniş ölçekteki yapıların oluşumunu sağlayan ilk dalgalanmaların adyabatik olduğunu göstermişlerdir [19]. Enflasyon dönemdeki metrik dalgalanmalar adyabatiktir ve adyabatik dalgalanmalarda Hubble ölçeğinin dışında (süper-Hubble) korunan bir nicelik vardır;

$$\mathcal{R} = -\Phi + \mathcal{H}(B + v) \quad (4.25)$$

Burada  $\mathcal{R}$  *comoving eğrilik pertürbasyonu*dur ve evrenin sonraki dönemlerinde görülen dalgalanmalar ve enflasyondan kaynaklı ilk dalgalanmalar arasında bağıntı kurar. Comoving eğrilik pertürbasyonunun Newtonyen ayarındaki daha kullanışlı ifadesi aşağıdaki şekildedir;

$$\mathcal{R} = -\Phi - \frac{\mathcal{H}(\Phi' + \mathcal{H}\Phi)}{4\pi G a^2 (\bar{\rho} + \bar{P})} \quad (4.26)$$

Evrende yeterince geçmişe gidilirse gözlemlenen dalgalanma modları Hubble ölçeğinin dışında kalır,  $k/\mathcal{H} \ll 1$ . Burada  $k$  pertürbasyonların Fourier modların dalga sayısını ifade eder. Enflasyon bu ufuk dışındaki modlar için başlangıç koşullarını belirler. Enflasyon tahminlerine göre eğrilik pertürbasyonu olan  $\mathcal{R}$  parametresini, dalgalanmaların bir spektrumu cinsinden göstermek en uygun gösterimdir.

$$\mathcal{R} = -\Phi - \frac{2}{3(1 + \omega)} \left( \frac{\Phi'}{\mathcal{H}} + \Phi \right) \quad (4.27)$$

Yukarıdaki eğrilik pertürbasyonu için  $B = 0$  ayarı seçilmiştir. Denklem (4.26)'nin diferansiyeli alınıp Friedmann denklemi kullanılırsa;



$$-4\pi G a^2 (\bar{\rho} + \bar{P}) \mathcal{R}' = 4\pi G a^2 \mathcal{H} \delta P_{aol} + \mathcal{H} \frac{\bar{P}'}{\bar{\rho}'} \nabla^2 \Phi \quad (4.28)$$

elde edilir. Burada  $P_{aol}$  adyabatik olmayan basınç pertürbasyonunu temsil eder;

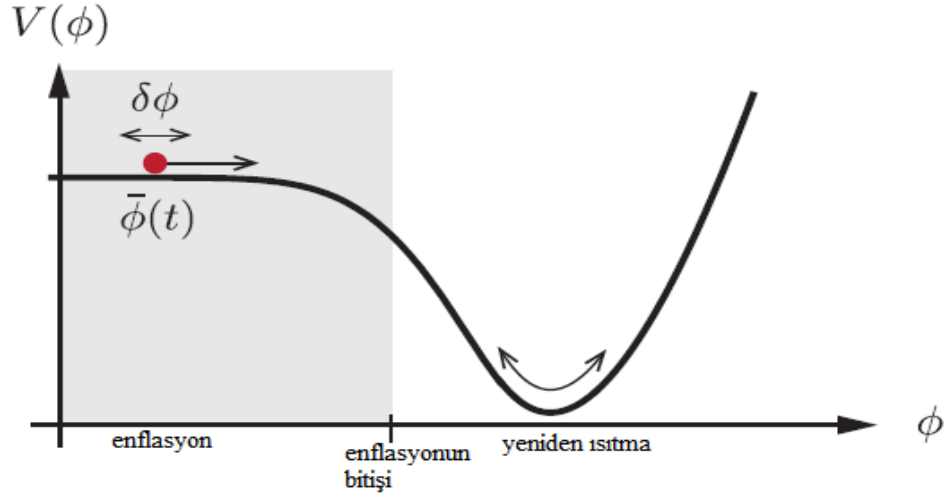
$$\delta P_{aol} \equiv \delta P - \frac{\bar{P}'}{\bar{\rho}'} \delta \rho \quad (4.29)$$

Adyabatik olmayan basınç pertürbasyonu Hubble ölçeği dışında  $\delta P_{aol} = 0$  olur. Denklem (4.28) sağ tarafı  $\mathcal{H} k^2 \Phi \sim \mathcal{H} k^2 \mathcal{R}$  şeklinde ölçeklenebilir. Bu yüzden

$$\frac{d \ln \mathcal{R}}{d \ln a} \sim \left( \frac{k}{\mathcal{H}} \right)^2 \quad (4.30)$$

olur. Yukarıdaki eşitliğe göre Hubble ölçeği dışında  $\mathcal{R}$  eğrilik pertürbasyonu korunur.

Enflasyon teorisinin en önemli sonuçlarından biri de çevremizdeki geniş ölçeklerdeki yapıların oluşumlarının tohumlarının atılmasına doğal bir mekanizma sağlamış olmasıdır. Inflaton alanı  $\phi(t)$ 'nin evrilmesi, ilk anlardaki evrenin  $\rho(t)$  madde yoğunluğunu etkiler. Buna ek olarak inflaton alanı enflasyondan kaynaklanan evrenin genişleme miktarını da belirler. Belirsizlik ilkesi sebebiyle inflaton alanının değişken dalgalanmaları vardır (Şekil 4.1):  $\delta\phi(t, x) \equiv \phi(t, x) - \bar{\phi}(t)$ . Enflasyon sonlandığında zamanda lokal farklılıklar olacaktır. Bu yüzden uzayın farklı bölgeleri farklı miktarlarda evrilecektir. Enflasyon sonlandığında genişlemedeki lokal farklılıklar, evrende lokal  $\delta\rho(t, x)$  farklılıklarına yol açar ve aynı zamanda kozmik mikrodalga arka plan ışımasının sıcaklığında  $\delta T(x)$  farklılıklarına da yol açar. Bundan sonraki kısmın asıl amacı bu etkiyi hesaplamaktır.



**Şekil 4.1:** Klasik  $\bar{\phi}(t)$  arka plan alan değerinin etrafında  $\delta\phi(t, x)$  kuantum dalgalanmaları [7].

Evrenin ilk zamanlarında inflaton süresince ilgilenilen bütün durumlar ufkun içerisinde. Inflaton alanın küçük ölçekteki dalgalanmaları harmonik salıncı olarak davranır. Dalgalanmalar  $k$  dalgasına sahip olup, uzunluk ölçeğinde oluşmuşlardır ve yaşamlarına Hubble ufkunun içinde başlarlar:

$$\text{Ufuk içinde: } k \gg aH$$

Comoving dalga sayısı enflasyon süresince sabit kalır ve comoving Hubble yarıçapı küçülür, bu yüzden bütün dalgalanmalar ufkun dışına çıkarlar:

$$\text{Ufuk dışı: } k \ll aH$$

Enflasyondan kaynaklı kuantum dalgalanmalarını incelemek amacıyla ufuk çıkışında,  $k = aH$ , inflaton dalgalanmalarının kuantum mekaniksel değişimi hesaplanmalıdır;

$$\langle |\delta\phi_k|^2 \rangle \equiv \langle 0 | |\delta\phi_k|^2 | 0 \rangle \quad (4.31)$$

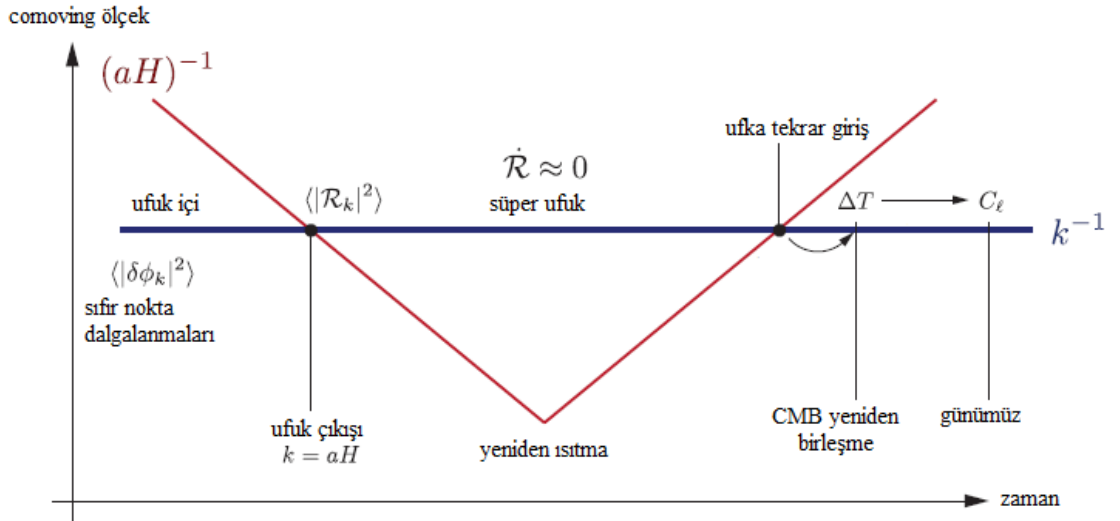
Ufuk çıkışında inflaton dalgalanmaları,  $\delta\phi$ , korunumlu eğrilik pertürbasyonları ile yer değiştirir. Eğrilik pertürbasyonu  $\mathcal{R}$  ile  $\delta\phi$  arasında uzaysal olarak düz ayarda en basit olarak aşağıdaki gibi bir ilişki vardır;

$$\mathcal{R} = -\frac{H}{\bar{\phi}'} \delta\phi \quad (4.32)$$

Bundan sonraki aşamada inflaton dalgalanmaları, comoving eğrilik dalgalanmalarına dönüşmesi kolaylık sağlar:  $\langle |\delta\phi_k|^2 \rangle \rightarrow \langle |\mathcal{R}_k|^2 \rangle$ ;

$$\langle |\mathcal{R}_k|^2 \rangle = \left( \frac{H}{\dot{\phi}} \right)^2 \langle |\delta\phi_k|^2 \rangle \quad (4.33)$$

Ufkun dışındaki alanın kuantum doğası yok olur ve kuantum beklenen değeri klasik alanın averajıyla belirlenir. Ufkun dışındaki ölçeklerde eğrilik pertürbasyonunun korunması, ufkun çıkışındaki yapılan tahminlerle ufka yeniden girişteki gözlemler arasında bağlantı kurulmasını sağlar (Şekil 4.2). Enflasyondan kaynaklanan genişleme bu dalgalanmaları ufkun dışındaki ölçeklere genişletmiştir.



Şekil 4.2: Enflasyon boyunca ve enflasyon sonrasında eğrilik pertürbasyonları [7].

#### 4.4 Klasik Pertürbasyonlar

Inflaton dalgalanmalarının,  $\delta\phi$ , klasik dinamiklerini incelemek için ilk olarak inflaton hareket denklemini aşağıdaki gibi yazılır;

$$S = \int dt d^3x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right] \quad (4.34)$$

#### 4.4.1 İkinci Dereceden Hareket Denklemi

Pertürbasyon denklemleri 2. dereceden diferansiyel denklemlerdir. Pertürbasyonlar hakkında yorum yapabilmek adına metrik ve alandaki dalgalanmaların 2. Dereceden hareket denklemine ihtiyaç duyulur. İşleyişi basitleştirmek adına uzay-zaman geometrisindeki dalgalanmalar ihmal edilecektir.

Pertürbe olmamış FRW denklemi için (4.34) yazılırsa;

$$S = \int d\tau d^3x \left[ \frac{1}{2} a^2 ((\phi')^2 - (\nabla\phi)^2) - a^4 V(\phi) \right] \quad (4.35)$$

şeklinde olur. Pertürbe olmuş inflaton alanı aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$\phi(\tau, x) = \bar{\phi}(\tau) + \frac{f(\tau, x)}{a(\tau)} \quad (4.36)$$

Yukarıdaki denklemde  $f(\tau, x)$  için hareket denklemini lineerleştirmek amacıyla (4.35) denklemi dalgalanmalarda ikinci dereceden açılmalıdır:

$$S = \bar{S} + S^{(1)} + S^{(2)} + \dots$$

Birinci dereceden:  $f$  alanı için;

$$\begin{aligned} S^{(1)} &= - \int d\tau d^3x [\partial_\tau(a\bar{\phi}') + a'\bar{\phi}' + a^3 V_{,\phi}] f, \\ &= - \int d\tau d^3x a [\phi'' + 2H\bar{\phi}' + a^2 V_{,\phi}] f. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Bütün  $f$  alanları için  $S^{(1)} = 0$  olursa bu daha önceden (3.9) denklemde elde edilen Klein-Gordon denklemini verir.

İkinci Dereceden  $f$  alanı için ikinci dereceden hareket denklemi aşağıda verildiği haldedir;

$$S^{(2)} = \frac{1}{2} \int d\tau d^3x \left[ (f')^2 - (\nabla f)^2 + \left( \frac{a''}{a} - a^2 V_{,\phi\phi} \right) f^2 \right] \quad (4.38)$$

Yavaş yuvarlanma enflasyonu süresince,

$$\frac{V_{,\phi\phi}}{H^2} \approx \frac{3M_{pl}^2 V_{,\phi\phi}}{V} = 3\eta_v \ll 1 \quad (4.39)$$

olur ve  $a' = a^2 H$ ,  $H \approx \text{sabit}$  olduğu için aşağıdaki sonuç elde edilir;

$$\frac{a''}{a} \approx 2a'H = 2a^2 H^2 \gg a^2 V_{,\phi\phi} \quad (4.40)$$

Yukarıdaki şart sebebiyle hareket denkleminde  $V_{,\phi\phi}$  terimi ihmal edilirse

$$S^{(2)} \approx \int d\tau d^3x \frac{1}{2} \left[ (\dot{f}')^2 - (\nabla f)^2 + \frac{a''}{a} f^2 \right] \quad (4.41)$$

şeklinde olur. Euler-Lagrange denklemlerine göre  $f$  için hareket denklemi;

$$\frac{dS^{(2)}}{df} = 0, \quad (4.42)$$

$$f'' + \left( \nabla^2 - \frac{a''}{a} \right) f = 0 \quad (4.43)$$

şeklinindedir ve **Mukhanov-Sasaki** denklemi olarak adlandırılır. Her bir Fourier mod için (4.43) denklemi aşağıdaki gibidir;

$$f''_k + \left( k^2 - \frac{a''}{a} \right) f_k = 0 \quad (4.44)$$

$$f_k(\tau) \equiv \int \frac{d^3x}{(2\pi)^{3/2}} f(\tau, x) e^{-ik \cdot x}$$

Ufuk içindeki ölçeklerde  $k^2 \gg a''/a \approx 2\mathcal{H}^2$  olduğu için adyabatik değişme çok çok küçük oluyorsa ihmal edilir ve (4.43) denklemi harmonik salınıcı denklemine indirgenir.

$$f''_k + k^2 f_k \approx 0 \quad (4.45)$$

## 4.5 Kuantum Dalgalanmaları

Inflaton alanının kuantum dalgalanmaları olduğu hesaba katılmalıdır.

### 4.5.1 Kuantizasyon

Denklem (4.41) ile verilen hareket denklemindeki  $f$  alanını kuantize etmek için Heisenberg çerçevesinde standart kanonik kuantizasyon işlemi uygulanır. Inflaton alanının dalgalanmaları  $f = a\delta\phi$  olarak ifade edilirse,  $f$  alanının momentum konjugesi;

$$\pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f'} = f' \quad (4.46)$$

şeklindedir. Daha kolay işlem yapabilmek için inflaton alanını,  $f(\tau, x)$ , ve alanın momentum konjugesini,  $\pi(\tau, x)$ ,  $\hat{f}(\tau, x)$  ve  $\hat{\pi}(\tau, x)$  operatörleri cinsinden ifade etmek daha uygundur. Operatörler kanonik komütasyon bağıntısını sağlarlar;

$$[\hat{f}(\tau, x), \hat{\pi}(\tau, x')] = i\delta(x - x') \quad (4.47)$$

Burada delta fonksiyonu yerelliğin bir işaretidir: uzaydaki farklı noktalardaki modlar yer değiştirirler. Fourier uzayında aşağıdaki gibi ifade edilir;

$$\begin{aligned} [\hat{f}_k(\tau), \hat{\pi}_{k'}(\tau)] &= \int \frac{d^3x}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3x'}{(2\pi)^{3/2}} \frac{[\hat{f}(\tau, x), \hat{\pi}(\tau, x')]}{i\delta(x-x')} e^{-ikx} e^{-ik'.x'} \\ &= i \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{-i(k+k').x} \\ &= i\delta(k + k') \end{aligned} \quad (4.48)$$

Yukarıda delta fonksiyonu farklı dalga boylarında yer değiştiren modları işaret eder. Denklem (4.44) ile verilen fourier modu harmonik salınıcıya uygun olarak yaratma ve yok etme operatörleri cinsinden yazılabilir;

$$\hat{f}_k(\tau) = f_k(\tau)\hat{a}_k + f_k^*(\tau)a_k^\dagger \quad (4.49)$$

Burada  $f_k(\tau)$  ve  $f_k^*(\tau)$  Mukhanov-Sasaki denkleminin iki bağımsız çözümüdür; Bu çözümler iki tane sınır şartıyla sabitlenmiştir.

$$f_k'' + \omega_k^2(\tau)f_k = 0, \quad \omega_k^2(\tau) \equiv k^2 - \frac{a''}{a} \quad (4.50)$$

Bu problemin klasik çözümüdür. Denklem (4.49) ile verilen eşitliği denklem (4.48) ile verilen ifade yerine konulursa mod fonksiyonlarının Wronskianı cinsinden bir normalize şartı elde edilmiş olur;

$$W[f_k, f_k^*] \times [\hat{a}_k, a_{k'}^\dagger] = \delta(k + k'), \quad (4.51)$$

$$W[f_k, f_k^*] = 1 \Rightarrow [\hat{a}_k, a_{k'}^\dagger] = \delta(k + k')$$

Yukarıdaki denklemler Mukhanov-Sasaki denkleminin çözümleri üzerinde sınır koşullarından bir tanesini oluşturmuştur. 2. sınır koşulu ise vakum durumunun seçiminden gelmektedir.

Evrenin uzak geçmişine,  $\tau \rightarrow -\infty$ , bakıldığında bütün gözlenebilir modların ufkun içinde olduğu görülür:  $k/\mathcal{H} \sim |k\tau| \gg 1$ . Standart vakum seçimi comoving bir gözlemcinin Minkowski vakumu olabilir.

$$\omega_k^2 = k^2 - \frac{a''}{a} \approx k^2 - \frac{2}{\tau^2} \xrightarrow{\tau \rightarrow -\infty} k^2 \quad (4.52)$$

Yukarıdaki denkleme göre Mukhanov-Sasaki denklemi;

$$f_k'' + k^2 f_k \approx 0 \quad (4.53)$$

Denklem (4.53) Minkowski uzayındaki bir serbest alan için yazılmıştır ve bu denklemin  $f_k \propto e^{\pm ik\tau}$  olmak üzere iki tane bağımsız çözümü vardır. Vakum durumunun Hamiltonyenin temel durumu olabilmesi ve enflasyonel vakum durumunu tanımlamak için  $f_k \propto e^{-ik\tau}$  çözümü seçilecektir. Bu duruma göre denklem (4.43) çözüldüğünde aşağıdaki gibi ifade edilir;

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} f_k(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{-ik\tau} \quad (4.54)$$

Belirlenen iki sınır şartı ile mod fonksiyonu bütün ölçeklerde sabitlemiş oldu.

Enflasyonun vakum durumunu tanımlamak için bu seçimin yapılması uygundur. Operatörü;

$$\hat{f}(\tau, x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} [f_k(\tau)\hat{a}_k + f_k^*(\tau)a_k^\dagger] e^{ik.x} \quad (4.55)$$

olarak yaratma ve yok etme operatörleri cinsinden inflaton dalgalanmalarının varyansı olarak aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$\begin{aligned}
\langle |\hat{f}|^2 \rangle &\equiv \langle 0 | \hat{f}^\dagger(\tau, 0) \hat{f}(\tau, 0) | 0 \rangle \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^{3/2}} \langle 0 | (f_k^*(\tau) \hat{a}_k^\dagger + f_k(\tau) \hat{a}_k) f_{k'}(\tau) \hat{a}_{k'} + f_{k'}^*(\tau) \hat{a}_{k'}^\dagger | 0 \rangle \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^{3/2}} f_k(\tau) f_{k'}^*(\tau) \langle 0 | [\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] | 0 \rangle \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} |f_k(\tau)|^2 \\
&= \int d \ln k \frac{k^3}{2\pi^2} |f_k(\tau)|^2 \tag{4.56}
\end{aligned}$$

Buna göre güç spektrumu olarak aşağıda gösterilen ifade elde edilir;

$$\Delta_f^2(k, \tau) \equiv \frac{k^3}{2\pi^2} |f_k(\tau)|^2 \tag{4.57}$$

Mod fonksiyonunun karesi kuantum dalgalanmalarının değişimini tanımlar.

#### 4.5.2 Skaler Pertürbasyonların Güç Tayfı

Önceki bölümlerde mod denklemi için iki tane sınır şartı olduğu gösterilmiştir. Güç tayfını elde etmek için (4.44) denkleminin tam çözümü yapılmalıdır. Mod fonksiyonunun analitik çözümü de Sitter limiti ve yavaş-yuvarlanma yaklaşıklığında elde edilebilir. Bu limitteki çözüm, ufuk çıkışındaki yavaş-yuvarlanma enflasyonu süresince olan güç tayfı için doğru çözümler vermektedir. Mod fonksiyonunun de Sitter limitindeki çözümü;

$$f_k'' + \left( k^2 - \frac{2}{\tau^2} \right) f_k = 0 \tag{4.58}$$

şeklindedir. Genel çözüm ise aşağıda verilmiştir;

$$f_k(\tau) = \alpha \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}} \left( 1 - \frac{i}{k\tau} \right) + \beta \frac{e^{ik\tau}}{\sqrt{2k}} \left( 1 + \frac{i}{k\tau} \right) \tag{4.59}$$



(4.51) ve (4.54) denklemlerinde ki sınır şartları dolayısıyla  $\alpha = 1, \beta = 0$  olur. Böylece mod fonksiyonu için tek bir çözüm vardır;

$$f_k(\tau) = \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}} \left(1 - \frac{i}{k\tau}\right) \quad (4.60)$$

$$\Delta_{\delta\phi}^2(k, \tau) = a^{-2} \Delta_f^2(k, \tau) = \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 \left(1 + \left(\frac{k}{aH}\right)\right)^2 \xrightarrow{\text{ufuk dışı}} \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 \quad (4.61)$$

Yukarıda elde edilen mod fonksiyonu kullanılarak kuantum dalgalanmalarının güç tayfı (4.61) denklemi ile ifade edilir. Ufuk çıkışında güç tayfı;

$$\Delta_{\delta\phi}^2(k) \approx \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 \Big|_{k=aH} \quad (4.62)$$

şeklindedir. Ufuk çıkışında,  $k = aH$ , inflaton dalgalanmaları korunumlu eğrilik pertürbasyonuna dönüşür. Böylece güç tayfı;

$$\Delta_R^2 = \frac{1}{12\pi^2} \frac{V^3}{M_{pl}^6 (V')^2} \quad (4.63)$$

olarak ifade edilir. Enflasyon ile üretilen pertürbasyonlar ölçek değişmezliğine yakındır. Enflasyon boyunca  $\phi$  yavaşça değiştiği için, ölçek faktörü  $a$  hızlı bir şekilde büyür. Bu durumda  $k$ 'ya bağlı spektrum aşağıdaki gibi olur;

$$\Delta_R^2(k) = A_s^2 k^{n_s-1} \quad (4.64)$$

Burada  $n_s$  skaler pertürbasyonların tayfsal indeksi,  $A_s$  olarak gösterilen ifade isedir.

$$n_s - 1 = -6\varepsilon + 2\eta \quad (4.65)$$

Yukarıda  $\varepsilon$  ve  $\eta$  yavaş-yuvarlanma parametreleridir ve  $n_s$  enflasyon dinamiklerini inceler. Bu indeks ideal de Sitter limitinden sapmayı ölçer. Gözlemler bu parametrede çok küçük sapmalar gözlemiştir ve başarılı enflasyon modellerinde her zaman küçüktür.

## 4.6 Tensör Pertürbasyonları

Enflasyonun en önemli özelliklerin biri ilksel gravitasyonel dalgaları öngörmesidir. Skaler pertürbasyonlara benzer olarak, tensör tayfi kuantum dalgaları ile oluşmuştur. Tensör modların incelenmesi, skaler modların incelenmesine çok benzerdir. Tensör pertürbasyonlarında ayar problemi olmadığı için skaler pertürbasyonlara göre daha basit olduğu söylenebilir. Tensör pertürbasyonları için uzaysal metrik;

$$ds^2 = a^2(\tau)[d\tau^2 - (\delta_{ij} + 2\hat{E}_{ij})dx^i dx^j] \quad (4.66)$$

şeklindedir. Denklem (4.66) Einstein-Hilbert hareket denkleminde yerine konulup, 2. dereceye kadar genişletildiğinde;

$$S = \frac{M_{pl}^2}{2} \int d^4 x \sqrt{-g} R \Rightarrow S^{(2)} = \frac{M_{pl}^2}{8} \int d\tau d^3 x a^2 [(\hat{E}'_{ij})^2 + (\nabla \hat{E}_{ij})^2] \quad (4.67)$$

şeklindedir. Tensör pertürbasyonları aşağıdaki şekilde tanımlanabilir [7];

$$\frac{M_{pl}}{2} a \hat{E}_{ij} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} f_+ & f_x & 0 \\ f_x & -f_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.68)$$

2. dereceden hareket denklemini;

$$S^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{l=+,x} \int d\tau d^2 x \left[ (f'_l)^2 - (\nabla f_l)^2 + \frac{a''}{a} f_l^2 \right] \quad (4.69)$$

elde edilir. Denklem (4.69) skaler pertürbasyonlar için bulunan ikinci dereceden hareket denkleminin çok benzeridir. Burada  $f_+$  ve  $f_x$  gravitasyonel dalgaların polarizasyon modlarıdır. Tensör modlarının güç tayfi  $\Delta_t^2$  doğrudan önceki  $\Delta_f^2$  sonucundan çıkartılabilir;

$$\Delta_t^2 \equiv 2 \times \Delta_E^2 = 2 \times \left( \frac{2}{a M_{pl}} \right)^2 \times \Delta_f^2 \quad (4.70)$$

Denklem (4.62) kullanılırsa;

$$\Delta_t^2(k) = \frac{2}{\pi^2} \frac{H^2}{M_{pl}^2} \Big|_{k=aH} \quad (4.71)$$

Bu sonuç enflasyonun en güçlü tahminidir ve model bağımsızdır. Tensör genliği enflasyon süresince doğrudan H sabitinin genişleme oranının ölçüsüdür. Bu skaler genliğin tam tersidir. Tensör spektrumlarının ölçek bağımlılığı;

$$\Delta_t^2(k) = A_t^2 k^{n_t} \quad (4.72)$$

Burada  $n_t$  tensör spektral indeksidir. Tanımlanması gereken bir diğer parametre;

$$r \equiv \frac{A_t}{A_s} \quad (4.73)$$

şeklindedir. Burada  $r$  parametresi ise tensör pertürbasyonlarının skaler pertürbasyonlara oranıdır. Tensör pertürbasyonları yani gravitasyonel dalgalar enflasyon sırasında oluşmuştur. Tensör-skaler oranı yavaş yuvarlanma şartında aşağıdaki hali alır;

$$r = 16\varepsilon \quad (4.74)$$

Son gözlemlere göre tensör-skaler oranının üst limiti  $r \leq 0.11$  olarak açıklanmıştır [21].

## 5. TEK ALANLI ENFLASYON MODELLERİ

Genel karakteristik enflasyon için birçok model önerilmiştir bununla beraber enflasyon potansiyellerine bakıldığında bazı özel modeller olduğu görülür. Bu bölümde enflasyon modellerinden bazıları incelenmiştir.

### 5.1 Model I: İkinci Dereceden Potansiyele Sahip Enflasyon

Tek alanlı enflasyon, verilen  $V(\phi)$  potansiyel alanı içinde evrilen  $\phi$  inflaton alanına dayanan bir enflasyon senaryosundan bahseder. Bütün basit modellerin ortak yanı enflasyonun, potansiyelin çok düzgün olduğu bir kısımda meydana geldiğini söylemesidir. Tek alanlı enflasyon bir kütle terimi tarafından verilir.

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2 \quad (5.1)$$

Bu şekilde potansiyele sahip bir enflasyonda  $\rho$  ve  $p$  denklemleri aşağıdaki şekilde olur;

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \quad (5.2)$$

$$p = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2$$

Potansiyel fonksiyonu  $\phi = 0$  değerinde minimuma sahiptir ve skaler alan  $\phi$  bu minimum etrafında salınım yapar. Durağan bir evrende skaler inflaton alanı  $\phi$ , potansiyelin minimumu etrafında salınır ve basit bir harmonik salıncı gibi davrandığı söylenebilir,  $\ddot{\phi} = -m^2\phi$ . Bununla beraber genişleyen bir evrende Hubble sabiti sıfırdan büyük olduğu için ( $H > 0$ ) direnç terimi olarak adlandırılan  $3H\dot{\phi} > 0$  olur ve  $\phi$  alanı sürtünme altında harmonik salıncı denkleminde olur [20].

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -m^2\phi \quad (5.3)$$

Önceden elde edilen Friedmann denklemleri ikinci dereceden bu potansiyel modeli altında aşağıdaki şekilde olur;

$$\begin{aligned}
H^2 &= \frac{1}{6}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{6}m^2\phi^2 \\
\frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{1}{3}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{6}m^2\phi^2
\end{aligned}
\tag{5.4}$$

Başlangıçta skaler alan  $\phi$  eğer çok büyükse, Hubble parametresi de büyük olacaktır. Bu, direnç terimi  $3H\dot{\phi}$ 'nin çok büyük olması anlamına gelir ve skaler alan çok yavaş değişir. Dolayısıyla skaler alanın enerji yoğunluğu hemen hemen sabit kalır.  $\phi$  alanının yavaş değişimi ve evrenin ölçek faktörünün hızla büyümesi sebebiyle, bu dönemin başlamasından sonra  $\ddot{\phi} \ll 3H\dot{\phi}$ ,  $\dot{\phi}^2 \ll m^2\phi^2$  şeklinde olur ve denklem sistemleri aşağıdaki şekillere dönüşür [20];

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{m\phi}{\sqrt{6}}, \quad \dot{\phi} = -\sqrt{\frac{2}{3}}m
\tag{5.5}$$

Yukarıdaki ilk denklem  $\phi$  alanının yavaş değişmesi halinde, bu dönemde evrenin genişliğinin yaklaşık olarak  $e^{Ht}$  şeklinde olduğu görülür [20]. Bu denklemler çözüldüğünde, skaler inflaton alanı  $\phi$ 'nin ve evrenin ölçek faktörünün zamana bağlı değişimi şöyle olur;

$$\phi \cong \phi_{ilk} - \sqrt{\frac{2}{3}}mt
\tag{5.6}$$

Yukarıdaki denklemlerin ölçek faktörüne göre çözümü yapılırsa;

$$a \cong a_{ilk} e^{\frac{m}{\sqrt{6}}\left(\phi_{ilk}t - m\sqrt{\frac{2}{3}}t^2\right)}
\tag{5.7}$$

olur. Yukarıda  $\phi_{ilk}$  skaler inflaton alanının ilk değeri olmak üzere,  $a_{ilk}$  ifadesi ise ölçek faktörünün ilk değeridir. Bu sonuca göre enflasyonun ilk adımında evren üstel olarak genişlemiştir. Enflasyonun yeterince uzun sürmesi adına yavaş yuvarlanma koşullarını sağlayıp sağlamadığını kontrol etmek için parametrelere bakılır.

$$V'(\phi) = m^2\phi \quad , \quad V''(\phi) = m^2
\tag{5.8}$$

Yavaş yuvarlanma parametreleri;

$$\varepsilon_v(\phi) = 2 \left( \frac{M_{pl}}{\phi} \right)^2, \quad \eta_v(\phi) = 2 \left( \frac{M_{pl}}{\phi} \right)^2 \quad (5.9)$$

olur. Yavaş yuvarlanma şartı  $\{\varepsilon, |\eta|\} \ll 1$  uygulandığında inflaton alanı için aşağıdaki durum elde edilmiş olur.

$$2 M_{pl}^2 \ll \phi^2 \rightarrow \phi_{son} \equiv \sqrt{2} M_{pl} < \phi \quad (5.10)$$

Seçilen potansiyel için enflasyon sonlanmadan önce inflaton alanının değeri ve uzayın genişleme oranını gösteren

$$N(\phi) = \frac{\phi}{4M_{pl}^2} - \frac{1}{2} \quad (5.11)$$

olarak elde edilir. Ufuk ve düzlük problemini çözmek için  $N \geq 60$  şartı gereklidir.

$$\phi_{ilk} = 11\sqrt{2} M_{pl} = 15,556 M_{pl} \quad (5.12)$$

(5.12) denkleminde bulunan inflaton alanının ilk değeri (5.11) denkleminde yerine konulduğunda enflasyonun uzayı genişletme oranı aşağıdaki gibi elde edilmiştir;

$$N(\phi) = 59,997 \quad (5.13)$$

Buna göre skaler pertürbasyonların tayfsal indeksi;

$$n_s = 0,9644 \quad (5.14)$$

Tensör skaler oranı ise;

$$r = 0,13 \quad (5.15)$$

olarak hesaplanmıştır.

## 5.2 Model II: Polinom Tipli Potansiyele Sahip Enflasyon

Bu tür enflasyon modeline örnek olarak;

$$V(\phi) = \lambda \phi^p \quad (5.16)$$

potansiyeli incelenmiştir. Buradaki  $\lambda$  parametresi sabittir. Yukarıdaki potansiyelin yavaş yuvarlanma şartlarını sağlayıp sağlamadığı parametrelere bakılarak kontrol edilir;

$$\varepsilon = \frac{p^2 M_{pl}^2}{2\phi^2} \quad (5.17)$$

$$\eta = \frac{p(p-1)M_{pl}^2}{\phi^2}$$

Yavaş yuvarlanma şartlarına göre  $\varepsilon \ll 1$  ve  $\eta \ll 1$  olmalıdır. Şartlar uygulandığında;

$$p M_{pl} \ll \phi \quad (5.18)$$

durumu elde edilir. Bu durum gösteriyor ki enflasyon süresince skaler alanın genliği Planck kütesinin üzerindedir. Potansiyel, yavaş yuvarlanmanın hareket denklemleri  $H^2 = \frac{8\pi G}{3}V$  ve  $3H\dot{\phi} + V' = 0$  denklemlerinde yerine yazılıp integral alınır;

$$\phi^{2-\frac{p}{2}} - \phi_{ilk}^{2-\frac{p}{2}} = -\frac{2p}{4-p} \sqrt{\frac{\lambda}{3}} M_{pl} (t - t_{ilk}) \quad (5.19)$$

elde edilir. Yukarıdaki diferansiyel denklemin çözümü  $p \neq 4$  göre yapıldığında;

$$\phi = \phi_{ilk} \exp \left[ -4 \sqrt{\frac{\lambda}{3}} M_{pl} (t - t_{ilk}) \right] \quad (5.20)$$

olur.  $p = 4$  için çözümler yapılırsa skaler alanın ölçek faktörüne bağlı ifadesi elde edilebilir;

$$a = a_{son} \exp \left[ -\frac{(\phi^2 - \phi_{son}^2)}{2p M_{pl}^2} \right] \quad (5.21)$$

Enflasyon son bulduğunda  $\varepsilon = 1$  ve  $\phi_{son} = \frac{p M_{pl}}{\sqrt{2}}$  elde edilir ve buna göre enflasyonun toplam miktarı hesaplanabilir;

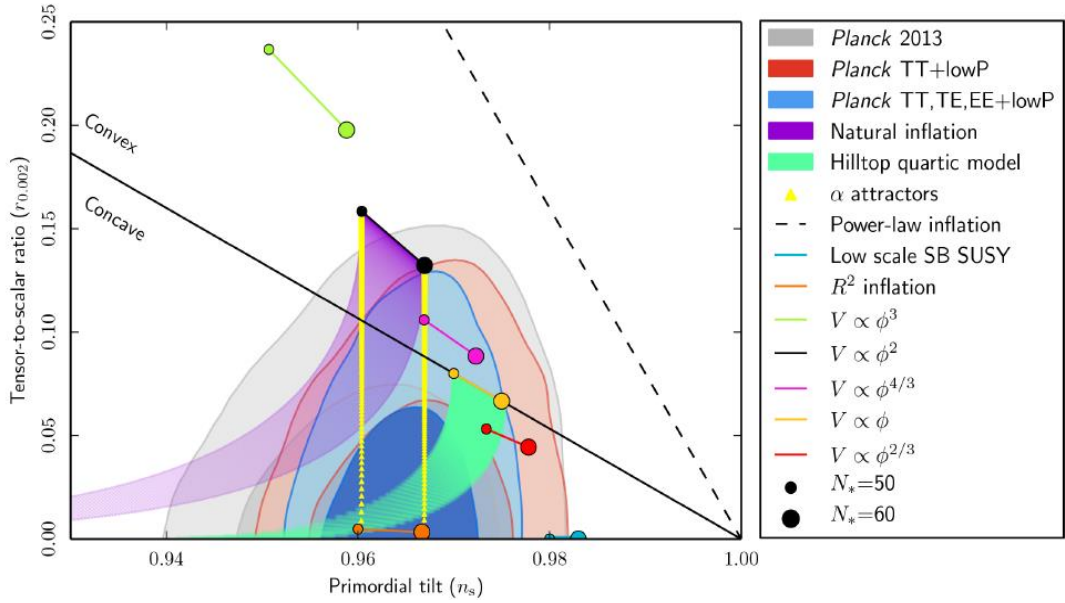
$$N(\phi) \cong \frac{\phi^2}{2pM_{pl}^2} - \frac{p}{4} \quad (5.22)$$

Skaler pertürbasyonların tayfsal indeksi ve tensör-skaler oranı aşağıdaki şekilde elde edilmiştir;

$$n_s = 1 - 6\varepsilon + 2\eta = 1 - \frac{\frac{1}{2}p + 1}{N + \frac{p}{4}} \quad (5.23)$$

$$r = 16\varepsilon = \frac{4p}{N + \frac{p}{4}} \quad (5.24)$$

Enflasyon modelleri spektral indeks ve tensör pertürbasyonların skaler pertürbasyonlara oranı olan  $n_s$  ve  $r$  parametrelerinin sonuçlarıyla değerlendirilirler. Planck Uydusu'nun açıkladığı son gözlemlere göre tek alanlı potansiyel modellerinin skaler tayfsal indeks ve tensör genliği değerleriyle uyumu aşağıdaki gibidir;



**Şekil 5.1:** Planck Uydusu'nun son gözlemlerine göre tensör spektral indeks  $n_s$  ve  $r$  parametrelerinin sınırlamaları [21].

Aşağıdaki tabloda uzayın genişleme miktarını ifade eden  $N$  değeri 60 alınarak çeşitli tekli skaler enflasyon modellerine göre  $n_s$  ve  $r$  parametreleri hesaplanmıştır.



**Tablo 5.1:** Enflasyon potansiyeli modellerinin  $N=60$  alınarak hesaplanan skaler tayfsal indeks ve tensör-skaler oranı parametresi

$N = 60$	$n_s$	$r$
$\lambda \phi^{2/3}$	0.9778	0.04
$\lambda \phi$	0.9751	0.06
$\lambda \phi^{4/3}$	0.9723	0.08
$m^2 \phi^2$	0.9644	0.13
$\lambda \phi^3$	0.9588	0.19
$\lambda \phi^4$	0.9540	0.26

## 6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada Büyük Patlama sorunlarına çözüm getiren enflasyon dönemi anlatılmış ve enflasyona sebep olabilecek tekli bir skaler alan varsayıp çeşitli modelleri incelenmiştir.

Günümüzde hala tam olarak açıklanamamış olan erken evrenin geçirdiği evreler, bu tez kapsamında ele alınmıştır ve buna bağlı olarak homojen arka plan evrenin etrafında küçük pertürbasyonlar varsayıp bugünkü geniş ölçekteki yapıların oluşumuna nasıl zemin hazırladığı incelenmiştir. Pertürbasyonlardan elde edilen parametrelerle enflasyon modelleri sınanmıştır. Özellikle tensör pertürbasyonların skaler pertürbasyonlarına oranı ve tensör genliği parametrelerine göre, belirlenen potansiyellerin sonuçları hesaplanmış ve en son verilerle uyumluluğu karşılaştırılmıştır.

Planck Uydusu'nun verilerine göre skaler tayfsal indeks,  $n_s = 0,9655 \mp 0.0062$  ve tensör pertürbasyonların skaler pertürbasyonlara oranı,  $r \leq 0.11$  olarak açıklanmıştır. Bu çalışma kapsamında incelenen tekli skaler alana sahip potansiyellerin sonuçları yaklaşık olarak  $0.95 \leq n_s \leq 0.97$  ve  $0.04 \leq r \leq 0.26$  olarak bulunmuştur.

Tekli skaler alan potansiyelleri yaklaşık olarak gözlemlerle uyumludur.

## 7. KAYNAKLAR

- [1] Friedmann, A., “On the possibility of a world with constant negative curvature of space”, *Z. Phys.*, 21, 326-332, (1924); Friedmann, A., “On the Curvature of space”, *Z. Phys.*, 10 377-386, (1922).
- [2] Weinberg, S., “Gauge and Global Symmetries at High Temperature”, *Phys. Rev. D*9, 3357-3378, (1974).
- [3] Olive, K. A., “The Thermodynamics of the Quark-Hadron Phase Transition in the Early Universe”, *Nucl. Phys.*, B190, 483, (1981).
- [4] Planck Collaboration, “Planck 2013 results. I. Overview of products and scientific results”, [arXiv:1303.5062], [[astro-ph]], (2013).
- [5] Carroll, S. M., *Spacetime and Geometry: an Introduction to General Relativity*, San Francisco : Addison Wesley, (2004).
- [6] Hubble, E., “A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae”, *Prock. Nat. Acad. Sci.*, 15, 168-173, (1929)
- [7] Baumann, D., “Cosmology [online]”, (15 Aralık 2015)  
<http://www.damtp.cam.ac.uk/user/db275/Cosmology/Lectures.pdf>, (2015).
- [8] Robertson, H. P., “Kinematics and World-Structure”, *Astrophys. J.*, 82, 284-301, (1935).
- [9] Walker A. G., “On the formal comparison of Milne’s kinematical system with the sytems of general relativity”, “*Mon. Not. Roy. Aston.Soc.*, 95, 265-269, (1935).
- [10] Planck Collaboration, “Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters”, [arXiv:1303.5076], [astro-ph], (2013).
- [11] Weinberg, S., “*Cosmology*”, New York: Oxford University Press, (2008).
- [12] Guth, A. H., “Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems”, *Phys. Rev. D.*, 23 (1981)

- [13] Baumann, D., “TASI Lectures on Inflation”, [*hep-th*], [arXiv: 0907.5424], (2012)
- [14] Martin, J. and Ringeval, “Inflation after WMAP3: Confronting the Slow-Roll and Exact Power Spectra to CMB data”, [*astro-ph*], [arXiv:0605367], (2006).
- [15] Bennett, C., Larson, D., Weiland, J., Jarosik, N., and Hinshaw, G., “Nine-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Final Maps and Results”, [*astro-ph*], [arXiv:1212.5225], (2013).
- [16] Bardeen, J., “Gauge invariant cosmological perturbations”, *Phys. Rev. D*, 22, (1981).
- [17] Mukhanov, V. F., Feldman, H., and Brandenberger, H., “Theory of cosmological perturbations, Part 1. Classical perturbations. Part 2., Quantum theory of perturbations.,Part 3. Extensions”, *Phys. Rept.* 215, (1992)
- [18] Peter, P., and Uzan, J. P., “*Primordial cosmology*” ,England:Oxford University Press, (2009).
- [19] Mukhanov, V. F., and Chibisov, G. V., “Quantum Fluctuation and Nonsingular Universe”, *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, 33, (1981).
- [20] Linde, A., “Inflationary Cosmology”, [*hep-th*], [arXiv:0705.0165v2], (2007).
- [21] Planck Collaboration, “Planck 2015 results. XX. Constraints on inflation”, [arXiv:1502.02114].