T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

AĞIRLIKLI ORLICZ UZAYLARINDA PERİYODİK FONKSİYONLARIN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

DOKTORA TEZİ

RAMAZAN ÇETİNTAŞ

BALIKESİR, MAYIS - 2016

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

AĞIRLIKLI ORLICZ UZAYLARINDA PERİYODİK FONKSİYONLARIN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

DOKTORA TEZİ

RAMAZAN ÇETİNTAŞ

Jüri Üyeleri : Doç. Dr. Yunus Emre Yıldırır (Tez Danışmanı)

Prof. Dr. Ramazan Akgün

Prof. Dr. Özden Koruoğlu

Doç. Dr. Gökhan Soydan

Yrd. Doç. Dr. Ahmet Delil

BALIKESİR, MAYIS – 2016

KABUL VE ONAY SAYFASI

RAMAZAN ÇETİNTAŞ tarafından hazırlanan "**AĞIRLIKLI ORLİCZ UZAYLARINDA PERİYODİK FONKSİYONLARIN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 12.05.2016 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Doç. Dr. Yunus Emre Yıldırır	....
Üye Prof. Dr. Ramazan Akgün	....
Üye Prof. Dr. Özden Koruoğlu	....
Üye Doç. Dr. Gökhan Soydan	....
Üye Yrd. Doç. Dr. Ahmet Delil	....

Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Doç. Dr. Necati ÖZDEMİR ....

ÖZET

AĞIRLIKLI ORLICZ UZAYLARINDA PERİYODİK FONKSİYONLARIN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

DOKTORA TEZİ
RAMAZAN ÇETİNTAŞ
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. YUNUS EMRE YILDIRIR)

BALIKESİR, MAYIS – 2016

Bu çalışmanın amacı ağırlıklı Orlicz uzaylarında yaklaşım teorisinin bazı düz teoremlerini incelemektir.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm yaklaşım teorisi ve bu teorinin Lebesgue ve Orlicz uzaylarındaki gelişimi ile ilgili bilgi içermektedir.

İkinci bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak olan temel kavramlara ve asıl araştırma konumuz olan Orlicz uzayı tanımı ve genel özelliklerine yer verilmiştir.

Üçüncü bölüm üç kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda ağırlıklı Orlicz uzayı ile ilgili gerekli tanımlar verilmiştir. İkinci kısımda, ana sonuçların ispatı için gerekli olan yardımcı teoremler verilmiştir. Son kısımda ise Muckenhoupt koşulunu sağlayan ağırlık fonksiyonları kullanılarak ağırlıklı Orlicz uzaylarında, periyodik fonksiyonlarla yaklaşım problemleri ifade edilmiş ve elde edilen sonuçlar ispatlanmıştır.

Dördüncü bölümde, önceki bölümde elde edilen sonuçlar konveks olması gerekmeyen Young fonksiyonları ile üretilen ağırlıklı Orlicz uzaylarına genelleştirilmiştir.

Son bölümde ise sonuç ve öneriler yer almaktadır.

ANAHTAR KELİMELER : Orlicz Uzayı, Ağırlıklı Orlicz Uzayı, Muckenhoupt Ağırlığı, Periyodik Fonksiyonlarla Yaklaşım, Düzgünlük Modülü, Kvazikonveks Young Fonksiyonu.

ABSTRACT

APPROXIMATION PROPERTIES OF PERIODIC FUNCTIONS IN WEIHTED ORLICZ SPACES

PH.D THESIS
RAMAZAN ÇETİNTAŞ
BALIKESİR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS

(SUPERVISOR: ASSOC. PROF. DR. YUNUS EMRE YILDIRIR)
BALIKESİR, MAY 2016

The aim of this study is to investigate some direct theorems of approximation theory in weighted Orlicz spaces.

This thesis consists of five chapters. The first chapter includes some information about the approximation theory and its progress in Lebesgue and Orlicz spaces.

In the second chapter, the basic concepts that will be used in the other chapters are given. Furthermore, it contains the definition of Lebesgue spaces, Orlicz spaces and the general properties of Orlicz spaces which is our main research topic.

The third chapter consists of three sections. In the first section, some required definitions about weighted Orlicz spaces are given. In the second section, the lemmas which are necessary for the proof of main results are given. In the last section, the approximation theorems by periodic functions in weighted Orlicz spaces with Muckenhoupt weights are formulated and proved.

In the fourth chapter, the results obtained in the previous chapter are generalized to weighted Orlicz spaces having generating Young functions not necessary to be convex.

In the final chapter, there are results and suggestions.

KEYWORDS: Orlicz Space, Weighted Orlicz Space, Muckenhoupt Weights, Approximation by Periodic Functions, Modulus of Smoothness, Quasiconvex Young Function.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

Simge	Tanımı
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$T(x)$	Trigonometrik polinom
$\prod_n$	Derecesi n'yi aşmayan trigonometrik polinomlar kümesi
$S_n(x)$	Kısmi toplamlar dizisi
L_p	Lebesgue Uzayı
$\Phi(u)$	Young Fonksiyonu
$\Psi(v)$	Tümleyen Young Fonksiyonu
L_Φ	Orlicz Uzayı
$\|.\|_\Phi$	Orlicz normu
$\|.\|_{(\Phi)}$	Lüxemburg normu
$\mathbf{T}$	2π uzunluklu kapalı aralık
ω	Ağırlık fonksiyonu
$\boldsymbol{A_p}$	Muckenhoupt Sınıfı
$L_{\varphi,\omega}(\mathbf{T})$	Ağırlıklı Orlicz uzayı
$I_\alpha(x,f)$	*f'* nin α. kesirli integrali
$f^{(\alpha)}(x)$	*f'* nin kesirli türevi
$\sigma_t f(x)$	Steklov Operatörü
$\Omega^r_{\varphi,\omega}$	r. mertbeden kesirli düzgünlük modülü
$E_n(f)_{\varphi,\omega}$	En iyi yaklaşım sayıları dizisi

ÖNSÖZ

İnsanların hayatlarında çok önemli dönüm noktaları olduğu gibi; o dönüm noktalarına vesile olan unutulmayacak insanlar da vardır. Lisanstan hemen sonra, akademik çalışma yapmama karar verme aşamasından başlayarak, sadece kendisinden aldığım dersleri değil, diğer hocalarımdan aldığım dersleri dahi bana bire bir anlatarak, önemli bir akademik temel oluşturmama vesile olan ve yüksek lisansımı bitirmemdeki en büyük pay sahibi, akabinde doktorada da beni hiç yalnız bırakmayıp engin matematik bilgisi ve donanımının yanında üstün insani değerlerini de benimle paylaşan ve doktorayı da bitirmemdeki yine en büyük pay sahibi, yıllardır birlikte çalıştığımız ve doktora sonrasında da yine birlikte çalışmayı çok arzu ettiğim, çok değerli danışman hocam Doç. Dr. Yunus Emre Yıldırır'a, teşekkürün üst sınırı sonsuzla ifade edilebiliyorsa eğer, sonsuz teşekkürlerimi sunmayı bir vazife bilirim.

Gerek yüksek lisans, gerekse doktora eğitimim boyunca kendimi geliştirmemde önemli katkıları olan ve kendilerini tanımış olmanın şahsım adına önemli bir fırsat olduğunu düşündüğüm değerli hocalarım Prof. Dr. Ramazan Akgün, Prof. Dr. Daniyal M. İsrafilov ve Prof. Dr. Özden Koruoğlu'ya da teşekkürlerimi sunuyorum.

Tüm eğitim hayatımın yanında, hayat eğitimimde maddi ve manevi desteklerini hep yanımda hissettiğim anne ve babama da sevgi ve saygılarımı sunar teşekkür ederim.

Özellikle tez aşamasına geçtikten sonra, ailemle geçirdiğim vakitleri ders çalışarak geçirmemi sabır ve hoşgörüyle karşılayıp, maddi ve manevi desteklerini benden esirgemeyen, oğullarım İhsan ve Furkan'ın anneleri çok kıymetli eşim Sultan'a da kalbi teşekkürlerimi sunuyorum.

1. GİRİŞ

Yaklaşım teorisinde, yeterince iyi özelliklere sahip olmayan fonksiyonlara, iyi özelliklere sahip daha basit fonksiyonlarla yaklaşım problemleri incelenmektedir. Genellikle, yaklaşan fonksiyonlar, üzerinde çalışılan temel fonksiyon uzayının belirli bir alt uzayı olarak seçilir. Bu alt uzaydaki fonksiyonlar temel uzaydaki fonksiyonlara göre daha basit özelliklere sahiptir. Yaklaşım teorisinde, genellikle trigonometrik polinomlar, cebirsel polinomlar veya rasyonel fonksiyonlar yaklaşan fonksiyonlar olarak alınır. Burada hedeflediğimiz ana unsur, verilen fonksiyona alt uzaydan en iyi yaklaşan elemanın varlığı ve bu fonksiyonla, ona en iyi yaklaşan eleman arasındaki hatanın değerlendirilmesi problemidir. Fonksiyonun diferansiyel özelliklerine göre bunun en iyi yaklaşım sayıları dizisinin sıfıra gitme hızının incelendiği teoremlere yaklaşım teorisinin düz teoremleri, yaklaşım sayıları dizisinin sıfıra gitme hızına göre onların diferansiyel özelliklerinin incelendiği teoremlere yaklaşım teorisinin ters teoremleri denir.

Orlicz Uzaylarında ve Lebesgue Uzaylarında trigonometrik/cebirsel polinomlarla yaklaşım problemleri birçok matematikçi tarafından incelenmiştir. Lebesgue uzaylarında yaklaşım ile ilgili sonuçlar [1] ve [2] numaralı kitaplarda bulunabilir. Ağırlıklı Lebesgue uzaylarında, Muckenhoupt ağırlık fonksiyonları kullanılarak trigonometrik polinomlarla yaklaşım problemleri [3] ve [4] numaralı kaynaklarda incelenmiştir. Yine [5] ve [6] numaralı kaynaklarda ağırlıklı Lebesgue uzaylarında polinomlarla yaklaşımla ilgili detaylı bilgi bulmak mümkündür.

Orlicz ve ağırlıklı Orlicz uzaylarında trigonometrik polinomlarla yaklaşım problemleri $[7-17]$ numaralı kaynaklarda incelenmiştir. [13]'te Ponomarenko Fourier serilerinin kısmi toplamları için özel bir toplam metodu kullanarak Orlicz uzaylarında yaklaşım teorisinin bazı düz teoremlerini ispatlamıştır. Ponomarenko'nun elde ettiği sonuçlar [18] numaralı kaynakta Muckenhoupt ağırlık fonksiyonları kullanılarak, [3]'te Gadjieva tarafından tanımlanan düzgünlük modülü yardımıyla, ağırlıklı Orlicz uzaylarına genelleştirilmiştir. [19]'da Chen, farklı bir Orlicz uzayı tanımı yapmıştır. Chen'in tanımladığı Orlicz uzaylarında üreteç Young fonksiyonlarının konveks olması gerekmemektedir. [20]'de Akgün, Chen'in tanımladığı ağırlıklı Orlicz uzaylarında Muckenhoupt ağırlık fonksiyonlarını kullanarak trigonometrik polinmolarla yaklaşımla ilgili yeni sonuçlar elde etmiştir.

Biz bu tez çalışmasında öncelikle [18] numaralı çalışmada elde edilen sonuçların benzerlerinin kesirli düzgünlük modülleri kullanılarak elde edilebileceğini ispatladık. [18] numaralı çalışmada ve bizim elde ettiğimiz yeni sonuçlarda Orlicz uzayını üreten Young fonksiyonları kvazikonveks fonksiyonlar olarak alınmıştır. Her konveks fonksiyon kvazikonveks olduğundan bu bölümde elde edilen sonuçlar klasik Orlicz uzaylarında elde edilen sonuçlardan daha geneldir. Tezin son bölümünde, bir önceki bölümde elde edilen sonuçlar, [21] numaralı çalışmada olduğu şekliyle Chen tarafından tanımlanan ağırlıklı Orlicz uzaylarında genelleştirilmiştir.

Orlicz uzaylarında ispatlanmış bir düz yaklaşım teoremi, ağırlıklı Orlicz uzaylarına genelleştirilirken dikkat edilmesi gereken en önemli nokta; düzgünlük modülünün iyi tanımlanmasıdır. Bilinen anlamda düzgünlük modülü Orlicz uzaylarında iyi tanımlı iken, ağırlıklı Orlicz uzaylarında iyi tanımlı olmamaktadır. Çünkü ağırlıklı Orlicz uzaylarının ötelemede değişmez olmayabileceği bilinmektedir. Bu yüzden ağırlıklı Orlicz uzaylarında düzgünlük modülleri bu uzayda sınırlı olduğu ispatlanan bir ortalama operatörü yardımıyla tanımlanmaktadır. Ağırlıklı Orlicz uzaylarında ağırlık fonksiyonunun Muckenhoupt koşulunu sağlaması koşuluyla ortalama operatörünün sınırlılığı ispatlanmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE ÖN BİLGİLER

2.1 Temel Tanımlar

2.1.1 Tanım $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x+p) = f(x)$ olacak şekilde bir $p > 0$ sayısı varsa $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna ***periyodik fonksiyon*** denir. Buradaki en küçük $p > 0$ sayısına da *f*'nin periyodu denir $[22, s\ 144]$.

2.1.2 Tanım a_n, b_n $(n = 0, 1, 2, \dots)$ $|a_n| + |b_n| \neq 0$ koşulunu sağlayan keyfi reel sayılar olmak üzere

$$T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

ifadesine bir ***trigonometrik polinom***, burada ***n'***ye ise *trigonometrik polinomun derecesi* denir $[23, s. 34]$.

İki trigonometrik polinomun çarpımı da yine bir trigonometrik polinom ifade eder. Dolayısıyla herhangi bir k doğal sayısı için $[T(x)]^k$ da bir trigonometrik polinomdur $[23, s. 34]$.

2.1.3 Tanım $n = 1, 2, \dots$ için derecesi n'yi aşmayan trigonometrik polinomların kümesi $\prod_n$ ile gösterilir

2.1.4 Tanım a_n, b_n $(n = 0, 1, 2, \dots)$ sabit sayılar ve $|a_n| + |b_n| \neq 0$ olmak üzere

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (2.1)$$

serisine bir ***trigonometrik seri*** denir. Burada a_n ve b_n sayılarına serinin katsayıları denir. Eğer böyle bir seri $-\infty < x < +\infty$ aralığındaki her x için yakınsak ise bu durumda seri 2π periyotlu bir fonksiyon ile gösterilebilir $[23, s. 43]$.

Trigonometrik seriler sadece matematikte değil, aynı zamanda onun birçok uygulamalarında da önemli bir yere sahiptir.

2.1.5 Tanım

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \sin nx - b_n \cos nx) \tag{2.2}$$

serisine (2.1) serisinin ***eşlenik serisi*** denir $[23, s. 43]$.

2.1.6 Tanım :

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

ile tanımlanan (S_n) dizisine (2.1) serisinin ***kısmi toplamlar dizisi*** denir $[23, s. 44]$.

2.2 Fourier Formülü [23]

2π periyotlu $f(x)$ fonksiyonunun $-\pi \le x \le \pi$ aralığında düzgün yakınsak bir trigonometrik seri ile gösterildiğini varsayalım. Yani

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{2.3}$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda serinin katsayıları kolayca belirlenebilir.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = 0, \qquad m \ne n, \tag{2.4}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = 0, \qquad m \ne n, \tag{2.5}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx = 0, \qquad m \neq n \text{ ve } m = n, \tag{2.6}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx \, dx = \pi \tag{2.7}$$

eşitliklerinin varlığını biliyoruz. Bu eşitlikleri kullanacağız. İlk olarak (2.3) eşitliğinin her iki tarafını $\cos kx$ ile çarpalım $(k = 0, 1, 2, \dots)$. Böylelikle

$$f(x)\cos kx = \frac{a_0}{2}\cos kx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx \cos kx + b_n \sin nx \cos kx)$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafının $-\pi$ den $+\pi$ ye kadar integralini hesaplayalım:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos kx \, dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} \cos kx \, dx +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{+\pi} \cos nx \cos kx dx + b_n \int_{-\pi}^{+\pi} \sin nx \cos kx \, dx\right).$$

Yukarıdaki eşitlikte;

$$\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} \cos kx \, dx = \left.\frac{\sin kx}{k}\right|_{-\pi}^{+\pi} = 0, \qquad \text{(2.6) dan } b_n \int_{-\pi}^{+\pi} \sin nx \cos kx \, dx = 0$$

ve $(2.4)'\text{den } k \neq n \text{ için } a_n \int_{-\pi}^{+\pi} \cos nx \cos kx dx = 0$ olur.

Yalnızca $k = n$ için (2.7)'den

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos kx \, dx = a_k \int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2 \mathrm{kx} \, dx = a_k \pi$$

ve buradan da

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos kx \, dx \tag{2.8}$$

elde edilir.

$k = 0$ için

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \, dx$$

olup, bu değere f'nin periyot üzerindeki ortalaması denir.

b_k katsayılarını belirtmek için de (2.3) eşitliğinin her iki tarafını $\sin kx$ ile çarpalım ve herbir terimin $-\pi$ den $+\pi$ ye kadar integralini hesaplayalım. Bu durumda

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin kx \, dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} \sin kx \, dx +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{+\pi} \cos nx \sin kx dx + b_n \int_{-\pi}^{+\pi} \sin nx \sin kx \, dx \right)$$

elde edilir. Buradan ikinci taraftaki terimlerden b_k katsayılı olanı hariç, hepsi yukarıda verdiğimiz yardımcı integrallere göre sıfır olacağından

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin kx \, dx = b_k \int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2 kx \, dx = \pi b_k$$

ve buradan da

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin kx \, dx \tag{2.9}$$

elde edilir.

(2.8) ve (2.9)'daki formüllere ***Fourier formülü***, buradaki a_k ve b_k sayılarına ***Fourier katsayıları,*** bu katsayılarla oluşturulmuş (2.3)'deki trigonometrik seriye de $f(x) \in L_1(\mathbf{T})$ fonksiyonunun ***Fourier serisi*** denir ve

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

şeklinde gösterilir.

2.3 L_p Uzayları

2.3.1 Tanım $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçüm uzayı olsun. $M(X, \mathcal{A})$, X üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli ölçülebilir bütün fonksiyonların kümesi, $\mathcal{L}(X, \mathcal{A}, \mu)$ ise X üzerinde μ ölçümüne göre integrallenebilen fonksiyonların sınıfı olmak üzere $0 < p < \infty$ için,

$$\mathcal{L}_p = \{f \in M(X, \mathcal{A}) : |f|^p \in \mathcal{L}(X, \mathcal{A}, \mu)\}$$

kümesine ***p-inci kuvvetten integrallenebilen fonksiyonlar sınıfı*** denir $[24, s. 93]$.

Yukarıdaki tanıma göre $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}$ dir, zira *f*'nin integrallenebilir olması ile $|f|$'in integrallenebilir olması aynı şeydir. $f \in \mathcal{L}_p$ olsun. $\alpha \in \mathbb{R}$ ise $\alpha f \in \mathcal{L}_p$ dir. Çünkü $|f|^p$ integrallenebilir olduğunda $|\alpha|^p |f|^p$ de integrallenebilirdir. Dolayısıyla $|\alpha f|^p$ integrallenebilirdir. Ayrıca $f, g \in \mathcal{L}_p$ ise

$$|f + g|^p \leq (|f| + |g|)^p \leq (2maks\{|f|, |g|\})^p \leq 2^p(|f|^p + |g|^p)$$

olacağından $|f + g|^p$ integrallenebilir ve dolayısıyla $f + g \in \mathcal{L}_p$ olur. O halde $\mathcal{L}_p$ kümesi bir *vektör uzayı*dır $[24, s. 93]$.

$p \geq 1$ olmak üzere,

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

biçiminde tanımlanan $\|.\|_p : \mathcal{L}_p \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\mathcal{L}_p$ üzerinde bir yarınormdur $[24, s. 96]$.

$\mathcal{L}_p$ üzerinde

$$f \sim g \Leftrightarrow \text{hemen her yerde } f = g$$

biçiminde tanımlanan ~ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Dolayısıyla bu bağıntı $\mathcal{L}_p$ uzayını denklik sınıflarına ayırır. Bu denklik sınıflarının kümesi L_p ile gösterilir. Şu halde L_p'nin elemanları $[f]$ biçimindeki denklik sınıflarıdır. L_p uzayı

$$[f] + [g] = [f + g], \qquad \lambda[f] = [\lambda f]$$

şeklinde tanımlanan toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre bir vektör uzayıdır.

$p \geq 1$ olmak üzere

$$\|[f]\|_p = \|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

biçiminde tanımlanan $\|.\|_p$ fonksiyonu L_p üzerinde bir normdur. L_p bu norma göre bir Banach uzayıdır $[24, s. 96]$.

2.3.2 Not: Burada $1 \leq p < \infty$ iken $\|.\|_p$ bir norm belirtir, ama $0 < p < 1$ iken kvazinorm belirtir.

$\exists M > 0$ sayısı için

$$|f(x)| \leq M \;\; h.h.$$

şartını sağlayan $f : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ fonksiyonlarının hemen her yerde eşit olma bağıntısına göre denklik sınıflarının kümesi $\mathrm{L}_\infty([0,2\pi]) = \mathrm{L}_\infty$ ile gösterilir.

Aynı şekilde

$$(u + v)(x) := u(x) + v(x) \;\; ve \;\; (ku)(x) := \; ku(x), \qquad k \in \mathbb{C}$$

işlemleri altında L_∞ bir vektör uzayıdır ve

$$\|f\|_\infty := inf\{M > 0 : |f(x)| \leq M \;\; h.h.\}$$

fonksiyonu L_∞ üzerinde bir normdur. L_∞ bu norma göre bir Banach uzayıdır.

2.3.3 Tanım $1 \leq p < \infty$ olmak üzere L_p Banach uzayına ***Lebesgue Uzayı*** denir $[24, s.99]$.

2.4 Orlicz Uzayları

2.4.1 Tanım $A \subset \mathbb{R}$ bir küme olsun. $\forall x, y \in A$ ve $\forall \alpha \in [0,1]$ için $\alpha x + (1-\alpha)y \in A$ oluyorsa A kümesine ***konveks küme*** denir.

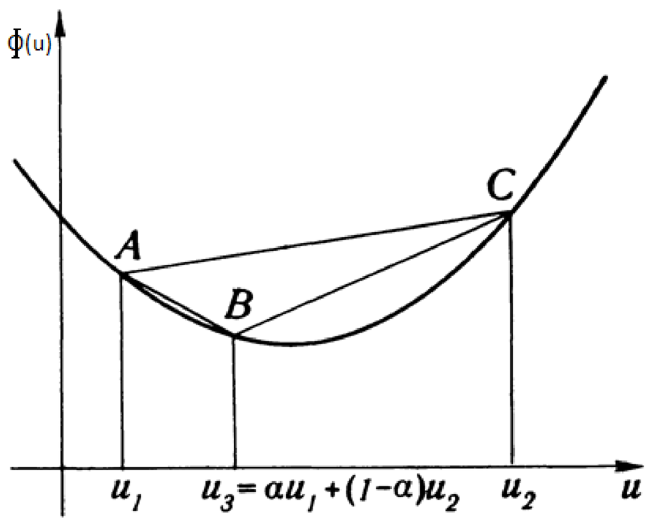
2.4.2 Tanım $u \in \mathbb{R}$, $\Phi(u)$ reel değerli fonksiyonu bütün u_1 ve u_2 değerleri için

$$\Phi\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}[\Phi(u_1) + \Phi(u_2)]$$

eşitsizliğini sağlıyorsa $\Phi(u)$'ya ***konveks fonksiyon*** denir. Bu tanımın bir sonucu olarak $0 \leq \alpha \leq 1$ için

$$\Phi(\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2) \leq \alpha\Phi(u_1) + (1-\alpha)\Phi u_2$$

eşitsizliği her zaman sağlanır. Bu eşitsizlik ***Jensen eşitsizliği*** olarak adlandırılır $[25,\ s.1]$.



Şekil 2.1: Konveks fonksiyon.

2.4.3 Tanım Sürekli, konveks bir $\Phi(u)$ fonksiyonu eğer çift ve

$$\lim_{u\to 0}\frac{\Phi(u)}{u}=0$$

ve

$$\lim_{u\to \infty}\frac{\Phi(u)}{u}=\infty$$

koşullarını sağlıyorsa $\Phi(u)$'ya ***Young fonksiyonu*** denir $[25,\ s.9]$.

2.4.4 Tanım Φ bir Young fonksiyonu olsun.

$v\geq 0$ için

$$\Psi(v) := max\,\{uv-\Phi(u): u\geq 0\}$$

biçiminde tanımlanan Ψ fonksiyonu da bir Young fonksiyonu olur. Bu Ψ Young fonksiyonuna Φ fonksiyonunun ***tümleyen fonksiyonu*** adı verilir $[25,\ s.13]$.

2.4.5 Tanım Φ bir Young fonksiyonu ve Ψ bunun tümleyen Young fonksiyonu olsun.

$$\rho_{\Phi}(f)=\int_{0}^{2\pi}\Phi(|f(x)|)dx$$

olmak üzere $\exists k>0$ için

$$\rho_{\Phi}(kf)<\infty$$

koşulunu sağlayan $f\colon \mathbf{T}\to\mathbb{C}$ ölçülebilir fonksiyonların kümesi

$L_{\Phi}(\mathbf{T})=L_{\Phi}$ ile gösterilir. Göstermek mümkündür ki $L_{\Phi}\subset L_1$'dir. Gerçekten de

$f\in L_{\Phi}$ aldığımızda

$$\int_{0}^{2\pi}\Phi(k|f(x)|)dx<\infty$$

olur. Φ konveks bir fonksiyon olduğundan $ax + b \le \Phi(\mathrm{x})$ olacak şekilde $a, b \in \mathbb{R}$ vardır $[15, s. 5]$. Buradan

$$a|f(x)| + b \le \Phi(k|f(x)|)$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} (a|f(x)| + b)dx \le \int_0^{2\pi} \Phi(k|f(x)|)\, dx$$

yazılabilir. Φ fonksiyonu çift fonksiyon olduğundan $\Phi(|f(x)|) = \Phi(f(x))$ olur. Öyleyse $f \in L_\Phi$ kullanılarak

$$\int_0^{2\pi} (a|f(x)| + b)dx \le \int_0^{2\pi} \Phi(kf(x))\, dx < \infty \text{ ve}$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} (a|f(x)| + b)dx < \infty$$

$$\Rightarrow \left(a \int_0^{2\pi} |f(x)|dx + b \int_0^{2\pi} dx \right) < \infty \;\; \Rightarrow \int_0^{2\pi} |f(x)|dx < \infty \;\Rightarrow f \in L_1$$

olur. Buradan da $L_\Phi \subset L_1$ elde edilir. □

L_Φ bir vektör uzayıdır. L_Φ uzayı

$$\|f\|_\Phi := sup \left\{ \left| \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx \right| : g \,\epsilon L^\Psi, \rho_\Psi(g) \le 1 \right\}$$

Orlicz normu ve

$$\|f\|_{(\Phi)} := inf \left\{ \lambda > 0 \colon \rho_\Psi \left(\frac{f}{\lambda} \right) \le 1 \right\}$$

Lüxemburg normuyla birlikte bir Banach uzayıdır. L_Φ Banach uzayına $[0,2\pi]$ üzerinde Φ ile üretilen ***Orlicz Uzayı*** denir $[25,\; s\colon 60 - 69]$.

Orlicz normu ve Lüxemburg normu için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir. $f \in L_{\Phi}$ olmak üzere

$$\|f\|_{(\Phi)} \leq \|f\|_{\Phi} \leq 2\|f\|_{(\Phi)}$$

ve böylece $\|f\|_{(\Phi)}$ ve $\|f\|_{\Phi}$ normları birbirine denktir $[25,\ s{:}\,80]$.

Ayrıca Orlicz normu, Lüxemburg normu aracılığıyla aşağıdaki gibi de ifade edilebilir $[25,\ s{:}\,79-80]$:

$$\|f\|_{\Phi} := sup\left\{\left|\int_{0}^{2\pi} f(x)g(x)dx\right| : \|g\|_{(\Phi)} \leq 1\right\}.$$

Her $f \in L_{\Phi}([0,2\pi])$ ve $g \in L_{\Psi}([0,2\pi])$ için

$$\int_{0}^{2\pi} f(x)g(x)dx \leq \|f\|_{\Phi}\|g\|_{(\Psi)},$$

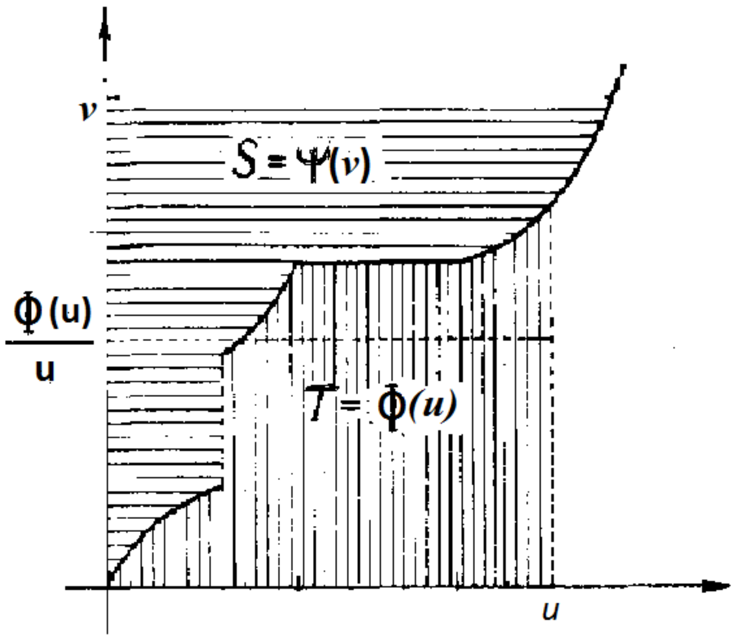
$$\int_{0}^{2\pi} f(x)g(x)dx \leq \|f\|_{(\Phi)}\|g\|_{\Psi}$$

Hölder eşitsizlikleri sağlanır $[25, s{:}\,80]$.

2.4.6 Tanım $\Phi(\mathrm{u})$ $ve\ \Psi(v)$ fonksiyonları, tümleyen Young fonksiyonları çifti ise

$$uv \leq \Phi(\mathrm{u}) + \Psi(v)$$

eşitsizliği bütün u, v değerleri için geçerlidir. Bu eşitsizliğe ***Young Eşitsizliği*** denir $[25,\ s{:}\,12]$. Aşağıdaki şekilde Young eşitsizliğini geometrik olarak görmek mümkündür.



Şekil 2.2: Young eşitsizliği.

2.4.7 Tanım $\Phi(u)$ bir Young fonksiyonu olsun. u'nun büyük değerleri için

$$\Phi(2u) \leq k\Phi(u) \qquad (u \geq u_0)$$

olacak şekilde $k > 0$, $u_0 \geq 0$ sabitleri varsa Φ Young Fonksiyonuna Δ_2 ***koşulunu sağlıyor*** denir ve kısaca $\Phi \in \Delta_2$ şeklinde gösterilir $[25, s{:}\,23]$. Yine $[25, s{:}\,23]$'te gösterilmiştir ki $\Phi \in \Delta_2$ olması için her zaman $k > 2$ olmak zorundadır.

2.4.8 Tanım Negatif olmayan ve $\varphi: [0,\infty) \to [0,\infty)$ şeklinde tanımlanan bir φ fonksiyonu verilsin. Eğer her $x \geq 0$ için

$$\Phi(x) \leq \varphi(x) \leq \Phi(cx)$$

koşulunu sağlayan konveks bir Φ Young Fonksiyonu ve $c \geq 1$ sabiti varsa φ fonksiyonuna ***kvazikonvekstir*** denir $[26, s{:}\,210]$.

2.4.9 Tanım X bir normlu uzay olmak üzere, X üzerinde tanımlı tüm sınırlı lineer fonksiyonellerin uzayına X'in ***dual uzayı*** denir ve X^* ile gösterilir. Eger $(X^*)^* = X$ ise X'e ***yansımalı uzay*** denir.

3. AĞIRLIKLI ORLICZ UZAYLARINDA YAKLAŞIM

3.1 Ağırlıklı Orlicz Uzayı İle İlgili Gerekli Tanımlar

3.1.1 Tanım $\mathbf{T} \coloneqq [0,2\pi]$ olsun. Ölçülebilir bir $\omega\colon \mathbf{T} \to [0,\infty]$ fonksiyonu için, eğer $\omega^{-1}(\{0,\infty\})$ kümesinin Lebesgue ölçümü sıfır ise ω fonksiyonuna bir ***ağırlık fonksiyonu*** denir $[27, s. 27]$.

Bu kısımdan itibaren $[0,2\pi]$ yerine **T** sembolünü kullanacağız.

3.1.2 Tanım $1 < p < \infty$ olmak üzere, eğer *I*'dan bağımsız sonlu bir *C* sabiti için

$$\left(\frac{1}{|I|}\int_I \omega(x)dx\right)\left(\frac{1}{|I|}\int_I \omega^{-\frac{1}{(p-1)}}(x)dx\right)^{p-1} \leq C\,,$$

eşitsizliği geçerli ise, yukarıdaki ω ağırlık fonksiyonuna ***A_p* *Muckenhoupt Sınıfındandır*** denir. Burada *I*, **T**'nin herhangi bir alt aralığıdır ve $|I|$, I'nin uzunluğunu gösterir $[27, s. 28]$.

3.1.3 Tanım: φ, kvazikonveks bir Young Fonksiyonu olsun. $L_{\varphi,\omega}(\mathbf{T})$ ile pozitif bir reel *c* sabiti için

$$\int_{\mathbf{T}} \varphi(c|f(x)|)\,\omega(x)dx < \infty$$

koşulunu sağlayan $f\colon \mathbf{T} \to \mathbb{C}$ ***Lebesgue ölçülebilir fonksiyonların sınıfı***nı gösteriyoruz.

$L_{\varphi,\omega}(\mathbf{T})$ sınıfı

$$\|f\|_{\varphi,\omega} \coloneqq sup\left\{\int_{\mathbf{T}} |f(x)g(x)|\,\omega(x)dx : \int_{\mathbf{T}} \psi(|g(x)|)\omega(x)\,dx \leq 1\right\}, \tag{3.1}$$

Orlicz normuna göre bir normlu uzay olur. Burada ψ fonksiyonu, φ'nin tümleyen Young fonksiyonudur.

$$\|f\|_{(\varphi,\omega)} := inf\left\{k > 0 : \int_{\mathbf{T}} \varphi(k^{-1}|f(x)|)\omega(x)\,dx \leq 1\right\} \tag{3.2}$$

şeklinde ifade edilen norma da ***Lüxemburg normu*** denir.

Bu iki norm birbirine denktir. Yani;

$$\|f\|_{(\varphi,\omega)} \leq \|f\|_{\varphi,\omega} \leq 2\|f\|_{(\varphi,\omega)}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu normların denkliği aşağıdaki gibi ispatlanır.

$[25, s. 74]$'te gösterilmiştir ki,

$$\int_{\mathbf{T}} \varphi\left[\frac{f(x)}{\|f\|_{\varphi,\omega}}\right]\omega(x)dx \leq 1 \tag{3.3}$$

eşitsizliği geçerlidir. (3.2) ve (3.3)'ü birlikte değerlendirdiğimizde $\|f\|_{(\varphi,\omega)}$ normu, k' ların infimumu olacağından $\forall k$ için

$$\|f\|_{(\varphi,\omega)} \leq \|f\|_{\varphi,\omega} \tag{3.4}$$

elde edilir.

Young eşitsizliğini kullanarak ve her $f \in L_{\varphi,\omega}(\mathbf{T})$ ve $g \in L_{\varphi,\omega}(\mathbf{T})$ için

$$(f,g) = \int_{\mathbf{T}} f(x)g(x)\,\omega(x)dx \leq \rho(f,\varphi) + \rho(g,\psi) < \infty \tag{3.5}$$

olur $[25, s. 67]$. Burada her iki tarafın supremumu alınarak (3.1) göz önünde bulundurulursa,

$$\|f\|_{\varphi,\omega} = \sup_{\rho(g,\psi)\leq 1} |(f,g)| \leq \rho(f,\varphi) + 1 \tag{3.6}$$

elde edilir $[25, s. 72]$. Yine $[25, s. 78]$'te ispatlanmıştır ki;

$$\rho\left(\frac{f}{\|f\|_{(\varphi,\omega)}}, \varphi\right) = \int_{\mathbf{T}} \varphi\left[\frac{f(x)}{\|f\|_{(\varphi,\omega)}}\right]\omega(x)dx \leq 1 \tag{3.7}$$

değerlendirmesi geçerlidir. (3.6) ve (3.7) birlikte düşünülür ve (3.6)'da f yerine $\frac{f}{\|f\|_{(\varphi,\omega)}}$ alınırsa;

$$\left\|\frac{f}{\|f\|_{(\varphi,\omega)}}\right\|_{\varphi,\omega} \leq \rho\left(\frac{f}{\|f\|_{(\varphi,\omega)}}, \varphi\right) + 1$$

$$= \int_{\mathbf{T}} \varphi\left[\frac{f(x)}{\|f\|_{\varphi,\omega}}\right] \omega(x)dx + 1 \ \leq 1 + 1 = 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\|f\|_{(\varphi,\omega)}} \|f\|_{\varphi,\omega} \leq 2 \ \Rightarrow \ \|f\|_{\varphi,\omega} \leq 2\|f\|_{(\varphi,\omega)} \qquad (3.8)$$

elde edilir. (3.4) ve (3.8)'den de

$$\|f\|_{(\varphi,\omega)} \leq \|f\|_{\varphi,\omega} \leq 2\|f\|_{(\varphi,\omega)}$$

elde edilir. □

Kvazikonveks bir φ fonksiyonu için, φ nin ***p(φ)* indisini**

$$\frac{1}{p(\varphi)} \coloneqq inf\{\beta : \beta > 0, \ \ \varphi^{\beta} \ kvazikonveks\}$$

şeklinde tanımlıyoruz. $[26, s. 218]$

Eğer $\omega \in A_{p(\varphi)}$ ise, $L_{\varphi,\omega}(\mathbf{T}) \subset L_1(\mathbf{T})$ olduğunu göstermek mümkündür. $L_{\varphi,\omega}(\mathbf{T})$ uzayı, Orlicz normu ve Lüxemburg normu ile birlikte bir Banach uzayı olur. $L_{\varphi,\omega}(\mathbf{T})$ Banach uzayına, ***Ağırlıklı Orlicz Uzayı*** denir.

Bir ω ağırlığı için,

$$\int_{\mathbf{T}} \varphi(c|f(x)|)\, \omega(x)dx < \infty$$

İntegralinde özel olarak $\varphi(x) := x^p$ alınırsa $1 < p < \infty$, için ağırlıklı Lebesgue uzayı elde edilir.

Bu çalışma boyunca c'yi genel bir sabit olarak tanımlayacağız; yani bir eşitsizlikler dizisinde ortaya çıkan farklı sonuçlara göre farklı değerler alabilen bir sabit.

3.1.4 Tanım Verilen bir $f \in L_1(\mathbf{T})$ için

$$\int_{\mathbf{T}} f(x)dx = 0 \tag{3.9}$$

olsun.

f nin $\boldsymbol{\alpha}$. ***kesirli integrali*** $(\alpha > 0)$,

$$I_\alpha(x,f) := \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} c_k (ik)^{-\alpha} e^{ikx},$$

olarak tanımlanır $[28, \text{v}.2, \text{s}.134]$. Burada

$$(ik)^{-\alpha} := |k|^{-\alpha} e^{\left(-\frac{1}{2}\right)\pi i a \, sign \, k},$$

ve $\mathbb{Z}^* := \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ dir.

3.1.5 Tanım $\alpha > 0$ verilsin. (3.9) koşulunu sağlayan bir $f \in L_1(\mathbf{T})$ fonksiyonu için, aşağıdaki eşitliğin sağ tarafı mevcut ise $f \in L_1(\mathbf{T})$ fonksiyonunun ***kesirli türevi***

$$f^{(\alpha)}(x) := \frac{d^{[\alpha]+1}}{dx^{[\alpha]+1}} I_{1+\alpha-[\alpha]}(x,f),$$

olarak tanımlanır $[28, \text{v}.2\ , \text{s}.134]$. Burada $[\alpha]$, α'nın tam değerini gösterir.

Bu bölümde kullandığımız kesirli türev ve integral tanımları Hermann Weyl tarafından verilmiş olan tanımlardır. Riemann ve Liouville'nin yapmış olduğu kesirli türev ve integral tanımlarında incelenen f fonksiyonu periyodik olsa bile, f'nin kesirli türevi periyodik olmayabilir. Weyl'in $[29, p.347]$ ve $[28, v.2, p.134]$

numaralı kaynaklarda yapmış olduğu tanımlamalarda ise kesirli türev ve integral periyodikliği korur. Bu nedenle bu tanımlamaları kullandık.

3.1.6 Tanım Periyodik bir f fonksiyonu için ***Hardy-Littlewood maximal fonksiyonu***

$$f^*(x) := \sup_{0<h\leq\pi} \int_{-h}^{h} f(x+t)dt \tag{3.10}$$

olarak tanımlanır $[30, s. 104]$.

$\varphi \in \Delta_2$, $\omega \in A_{p(\varphi)}$ ve $\alpha \in (0,1)$ için φ^α kvazikonveks olması koşulları altında, [26]'da Hardy-Littlewood maximal fonksiyonunun modüler anlamda $L_{\varphi,\omega}(\mathbf{T})$'de sınırlı bir operatör olduğu gösterilmiştir $[26,\ Teorem\ 6.4.4,\ p. 250]$. Bunun sonucu olarak ***Steklov operatörü*** diye bilinen

$$\sigma_t f(x) := \frac{1}{2t} \int_{-t}^{t} f(x+u)du, \qquad x \in \mathbf{T}, \quad 0 < t < \pi,$$

operatörü $L_{\varphi,\omega}(\mathbf{T})$'de norma göre sınırlı olduğu elde edilir$[31, Lemma\ 2]$. Bu koşullar altında $x, t \in \mathbf{T}$, $0 < r$ ve $f \in L_{\varphi,\omega}(\mathbf{T})$ için

$$\sigma_t^r f(x) := (I - \sigma_t)^r f(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [C_k^r] \frac{1}{(2t)^k} \int_{-t}^{t} \ldots \int_{-t}^{t} f(x + u_1 + \cdots + u_k) du_1 \ldots du_k,$$

tanımlanır.

Burada $k > 1$ için $[C_k^r] := \frac{r(r-1)...(r-k+1)}{k!}$, $[C_1^r] := r$ ve $[C_0^r] := 1$ ifadeleri binom katsayılarıdır. $|[C_k^r]| \leq \frac{c}{k^{r+1}}$, $k \in \mathbb{Z}^+$, olduğundan $[29, (1.51), p. 14]$

$$\sum_{k=0}^{\infty} |[C_k^r]| < \infty$$

elde ederiz. Eğer $\varphi \in \Delta_2$, $\omega \in A_{p(\varphi)}$ ve $\alpha \in (0,1)$ için φ^α kvazikonveks ise, $\mathbf{T}$'de sürekli fonksiyonların $L_{\varphi,\omega}(\mathbf{T})$'de yoğun olması kullanılarak

$$\|\sigma_t^r f\|_{\varphi,\omega} \leq c\|f\|_{\varphi,\omega} < \infty \tag{3.11}$$

olur.

3.1.7 Tanım $r > 0$ olmak üzere $\varphi \in \Delta_2$, $\omega \in A_{p(\varphi)}$ ve $\alpha \in (0,1)$ için φ^α kvazikonveks koşulları altında $f \in L_{\varphi,\omega}(\mathbf{T})$ fonksiyonunun ***r. mertebeden kesirli düzgünlük modülü***

$$\Omega_{\varphi,\omega}^r(f,\delta) \coloneqq \sup_{0<h_i,t\leq\delta} \left\| \prod_{i=1}^{[r]} \left(I - \sigma_{h_i}\right)(I - \sigma_t)^{r-[r]} f \right\|_{\varphi,\omega} \tag{3.12}$$

olarak tanımlanır. $0 < r < 1$ için $\Omega_{\varphi,\omega}^r(f,\delta) \coloneqq \sigma_t^r(f)$ olur.

σ_t^r operatörü $L_{\varphi,\omega}(\mathbf{T})$'de sınırlı olduğundan, $\varphi \in \Delta_2$, $\omega \in A_{p(\varphi)}$ ve $\alpha \in (0,1)$ için φ^α kvazikonveks koşulları altında (3.11)'den

$$\Omega_{\varphi,\omega}^r(f,\delta) \leq c\|f\|_{\varphi,\omega}$$

elde edilir.

3.1.8 Uyarı $r > 0$, $f \in L_{\varphi,\omega}(\mathbf{T})$, $\varphi \in \Delta_2$, $\omega \in A_{p(\varphi)}$ ve $\alpha \in (0,1)$ için φ^α kvazikonveks olsun. Bu durumda düzgünlük modülü aşağıdaki özelliklere sahiptir.

(i) $\Omega_r(f,\delta)_{\varphi,\omega}$ negatif olmayandır ve $\delta \geq 0$ ın azalmayan fonksiyonudur.

(ii) $\Omega_r(f_1 + f_2,\delta)_{\varphi,\omega} \leq \Omega_r(f_1,\delta)_{\varphi,\omega} + \Omega_r(f_2,\delta)_{\varphi,\omega}.$

(iii) $\lim_{\delta\to 0} \Omega_r(f,\delta)_{\varphi,\omega} = 0.$

3.1.9 Tanım $f \in L_{\varphi,\omega}(\mathbf{T})$ fonksiyonunun derecesi n'yi aşmayan trigonometrik polinomlarla ***en iyi yaklaşımı***

$$E_n(f)_{\varphi,\omega} = inf\left\{\|f - \boldsymbol{T}_n\|_{\varphi,\omega} \colon \boldsymbol{T}_n \in \Pi_n, n = 1,2,\dots\right\}$$

şeklinde ifade edilir [32]. $[1, Theorem\ 1.1,\ p.59]$ da $E_n(f)_{\varphi,\omega} = \|f - \boldsymbol{T}_n{}^*\|_{\varphi,\omega}$ şeklindeki $\boldsymbol{T}_n{}^* \in \Pi_n$ in varlığı görülür.

3.1.10 Tanım “$\preceq$” bağıntısı

$$\text{" } A \preceq B \Leftrightarrow A \leq CB \text{ olacak şekilde bir C sabiti vardır "}$$

şeklinde tanımlanır.

3.2 Yardımcı Sonuçlar

Bu altbölümde ana sonuçların ispatı için gerekli olan yardımcı teoremleri vereceğiz.

3.2.1 Önerme Eğer $0 < \alpha \leq \beta,\ \varphi \in \Delta_2,\ \omega \in A_{p(\varphi)},\ f \in L_{\varphi,\omega}(\mathbf{T})$ ve $\alpha \in (0,1)$ için φ^α kvazikonveks ise $n = 1, 2, \ldots$ için

$$\Omega^{\beta}_{\varphi,\omega}\left(f, \frac{1}{n}\right) \preceq \Omega^{\alpha}_{\varphi,\omega}\left(f, \frac{1}{n}\right). \tag{3.13}$$

İspat : $0 < \alpha \leq \beta,\ \alpha, \beta \in \mathbb{N}$ ise bu durumda (3.12)'den kolayca görülebilir ki

$$\Omega^{\beta}_{\varphi,\omega}\left(f, \frac{1}{n}\right) \preceq \Omega^{\alpha}_{\varphi,\omega}\left(f, \frac{1}{n}\right). \tag{3.14}$$

$0 < \alpha \leq \beta < 1$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $\psi(.) := \sigma_t^\alpha f(.)$ yazarsak

$$\sigma_t^{\beta-\alpha}\psi(.) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \left[C_j^{\beta-\alpha}\right] \frac{1}{(2t)^j} \int_{-t}^{t} \ldots \int_{-t}^{t} \psi(. + u_1 + \ldots + u_j)\, d\,u_1 \ldots du_j$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \left[C_j^{\beta-\alpha}\right] \frac{1}{(2t)^j} \int_{-t}^{t} \dots \int_{-t}^{t} \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{\alpha-k} \left[C_k^{\alpha}\right] \frac{1}{(2t)^k}\right.$$

$$. \int_{-t}^{t} \dots \int_{-t}^{t} f\big(.+u_1+\dots+u_j+u_{j+1}+\dots+u_{j+k}\big)$$

$$\left. . \ du_1 \dots du_j du_{j+1} \dots du_{j+k}\right]$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \left[C_j^{\beta-\alpha}\right] \left[C_k^{\alpha}\right]$$

$$. \left[\frac{1}{(2t)^{j+k}} \int_{-t}^{t} \dots \int_{-t}^{t} f\big(.+u_1+\dots.+u_{j+k}\big) du_1 \dots du_{j+k}\right]$$

$$= \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \left[C_v^{\beta}\right] \frac{1}{(2t)^v} \int_{-t}^{t} \dots \int_{-t}^{t} f(.+u_1+\dots.+u_v) du_1 \dots du_v = \sigma_t^{\beta} f(.) \ h.h.$$

Öyleyse (3.11)’den

$$\left\|\sigma_t^{\beta} f(.)\right\|_{\varphi,\omega} = \left\|\sigma_t^{\beta-\alpha} \Psi(.)\right\|_{\varphi,\omega} \preceq \|\sigma_t^{\alpha} f(.)\|_{\varphi,\omega}$$

ve

$$\Omega_{\varphi,\omega}^{\beta}\left(f, \frac{1}{n}\right) \preceq \Omega_{\varphi,\omega}^{\alpha}\left(f, \frac{1}{n}\right). \tag{3.15}$$

$1 \leq \alpha \leq \beta$ durumunda ispat (3.14) ve (3.15)’den görülür.

Aşağıdaki Marcinkiewicz interpolasyon teoremi olarak bilinen önerme; [33] da ispatlanmıştır.

3.2.2 Önerme Varsayalım ki bir T kvazi-lineer operatörü $1 \leq \alpha < \beta < \infty$ için (α, α) ve (β, β) zayıf tipli ve $\mu(\Omega) < \infty$ olsun. Eğer $L_{\varphi}(\mu)$ yansımalı ve

$$\int_{u}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t^{\beta+1}} dt = O\left\{\frac{\varphi(u)}{u^{\beta}}\right\},$$

$$\int_{0}^{u} \frac{\varphi(t)}{t^{\alpha+1}} dt = O\left\{\frac{\varphi(u)}{u^{\alpha}}\right\},$$

ise $g \coloneqq Tf,\ f \in L_{\varphi}(\mu)$ tanımlıdır ve f'den bağımsız K' lar için

$$\int_{\Omega} \varphi(Tf) d\mu \leq K\left(\int_{\Omega} \varphi(f) d\mu + 1\right)$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $L_{\phi}(\mu)$, (Ω, Σ, μ) ölçüm uzayı üzerinde tanımlıdır.

3.2.3 Önerme $L_{\varphi,\omega}(\mathbf{T})$ yansımalı, $f \in L_{\varphi,\omega}(\mathbf{T})$, $\omega \in A_{p(\varphi)}(\mathbf{T})$ olsun. Bu durumda f'den bağımsız c ve C sabitleri için

$$c\left\|\left(\sum_{\mu=1}^{\infty}\left|\Delta_{\mu}\right|^{2}\right)^{1/2}\right\|_{\varphi,\omega} \leq \|f\|_{\varphi,\omega} \leq C\left\|\left(\sum_{\mu=1}^{\infty}\left|\Delta_{\mu}\right|^{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{\varphi,\omega} \tag{3.16}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada

$$\Delta_{\mu} \coloneqq \Delta_{\mu}(x,f) \coloneqq \sum_{v=2^{\mu-1}}^{2^{\mu}-1} c_{v} e^{ivx}$$

dir.

İspat: $f \in L_{\varphi,\omega}(\mathbf{T})$ ve

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{k} e^{ikx} \tag{3.17}$$

serisi de $c_0 = 0$ olacak şeklide f fonksiyonunun Fourier serisi olsun. $[34]$'ten $f \in L_{p,\omega}(\mathbf{T})$, $p > 1$ için,

$$E\int_0^{2\pi}\left|\sum_{\mu=1}^{\infty}\left|\Delta_\mu\right|^2\right|^{\frac{p}{2}}\omega(x)dx \le \int_0^{2\pi}|f(x)|^p\omega(x)dx \le F\int_0^{2\pi}\left|\sum_{\mu=1}^{\infty}\left|\Delta_\mu\right|^2\right|^{\frac{p}{2}}\omega(x)dx \quad (3.18)$$

olacak şekilde f'den bağımsız E ve F sabitleri vardır.

$L_{\varphi,\omega}(\mathbf{T})$ yansımalı olduğundan, $[35, Teorem\, 7, s. 193]$ ispatına benzer yöntemler kullanılarak $1 < \alpha < a < b < \beta < \infty$ olacak şekilde α, β, a, b sayıları ve φ'ye denk olan ve aşağıdaki eşitsizlikleri sağlayan bir φ_1 Young fonksiyonu bulabiliriz;

$$\int_u^{\infty}\frac{\varphi_1(t)}{t^{\beta+1}}dt \le \frac{1}{\beta - b}\left\{\frac{\varphi_1(u)}{u^{\beta}}\right\},$$

$$\int_0^{u}\frac{\varphi_1(t)}{t^{\alpha+1}}dt \le \frac{1}{a - \alpha}\left\{\frac{\varphi_1(u)}{u^{\alpha}}\right\}.$$

(3.17) yardımıyla, (3.18)'den her $p > 1$ için $L_{p,\omega}(\mathbf{T})$'de sınırlı olan (özel olarak (p, p) zayıf tipli)

$$Tf(x) := \left(\sum_{\mu=1}^{\infty}\left|\Delta_\mu(x, f)\right|^2\right)^{1/2}$$

bir kvazi-lineer operatörü tanımlıyoruz. Bu nedenle 3.2.2 Önermenin hipotezleri sağlanmış olur. 3.2.2 Önermede $d\mu = \omega(x)dx$ için

$$\int_0^{2\pi}\varphi_1\left(\left(\sum_{\mu=1}^{\infty}\left|\Delta_\mu\right|^2\right)^{1/2}\right)\omega(x)dx \le K\left(\int_0^{2\pi}\varphi_1(|f(x)|)\omega(x)dx + 1\right) \quad (3.19)$$

olacak şekilde $K > 1/2$ vardır. Eğer $\|f\|_{(\varphi_1,\omega)} = 1$ ise bu durumda

$$\int_0^{2\pi}\varphi_1(|f(x)|)\omega(x)dx \le 1$$

olur. Buradan

$$\int_0^{2\pi} \varphi_1\left(\frac{1}{2K}\left(\sum_{\mu=1}^{\infty}\left|\Delta_\mu\right|^2\right)^{1/2}\right)\omega(x)d\,x \le \frac{1}{2K}\int_0^{2\pi} \varphi_1\left(\left(\sum_{\mu=1}^{\infty}\left|\Delta_\mu\right|^2\right)^{1/2}\right)\omega(x)d\,x$$

$$\le \frac{1}{2K}\left(\int_0^{2\pi} \varphi_1(|f(x)|)\omega(x)dx + 1\right) \le 1$$

elde edilir ve eğer $\|f\|_{(\varphi_1,\omega)} = 1$ ise $\|Tf\|_{(\varphi_1,\omega)} \le 2K$ olur. Son eşitsizlik gösterir ki

$$\left\|\left(\sum_{\mu=1}^{\infty}\left|\Delta_\mu\right|^2\right)^{1/2}\right\|_{(\varphi_1,\omega)} \le 2K\|f\|_{(\varphi_1,\omega)}$$

ve

$$\left\|\left(\sum_{\mu=1}^{\infty}\left|\Delta_\mu\right|^2\right)^{1/2}\right\|_{\varphi_1,\omega} \le 4K\|f\|_{\varphi_1,\omega}$$

bu da (3.16) ifadesinin sol tarafının sağlandığını gösterir, yani

$$\left\|\left(\sum_{\mu=1}^{\infty}\left|\Delta_\mu\right|^2\right)^{1/2}\right\|_{\varphi,\omega} \le C\|f\|_{\varphi,\omega} \tag{3.20}$$

elde edilir.

$[25, s.80]$ de ispatlanmıştır ki; Orlicz normu ve Lüxemburg normu aşağıdaki eşitsizliği sağlar:

$$\|f\|_{(\varphi)} \le \|f\|_\varphi \le 2\|f\|_{(\varphi)}, \qquad f \in L_\varphi(\mathbf{T}),$$

dolayısıyla bu normlar denktirler.

$f \in L_{\varphi,\omega}(\mathbf{T})$ ve $g \in L_{\psi,\omega}(\mathbf{T})$ için Hölder eşitsizliği, (3.20) ve yukarıdaki denklik kullanılarak aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir :

$$\int_0^{2\pi} |f(x)g(x)|\omega(x)dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \left|\sum_{\mu=1}^{\infty} \Delta_\mu(x,f)\Delta_\mu(x,g)\right| \omega(x)d\,x \le \int_0^{2\pi} \sum_{\mu=1}^{\infty} \left|\Delta_\mu(x,f)\Delta_\mu(x,g)\right| \omega(x)d\,x$$

$$\le \int_0^{2\pi} \left[\sum_{\mu=1}^{\infty} \left|\Delta_\mu(x,f)\right|^2\right]^{1/2} \left[\sum_{\mu=1}^{\infty} \left|\Delta_\mu(x,g)\right|^2\right]^{1/2} \omega(x)d\,x$$

$$\le \left\|\left[\sum_{\mu=1}^{\infty} \left|\Delta_\mu(x,f)\right|^2\right]^{1/2}\right\|_{\varphi,\omega} \left\|\left[\sum_{\mu=1}^{\infty} \left|\Delta_\mu(x,g)\right|^2\right]^{1/2}\right\|_{(\psi,\omega)}$$

$$\le 2c \left\|\left[\sum_{\mu=1}^{\infty} \left|\Delta_\mu(x,f)\right|^2\right]^{1/2}\right\|_{\varphi,\omega} \|g\|_{(\psi,\omega)}.$$

Son eşitsizlikte $\|g\|_{(\psi,\omega)} \le 1$ koşulunu sağlayan bütün $g \in L_{\psi,\omega}(\mathbf{T})$ fonksiyonları için supremum alırsak

$$\|f\|_{\varphi,\omega} \le C \left\|\left(\sum_{\mu=1}^{\infty} \left|\Delta_\mu\right|^2\right)^{1/2}\right\|_{\varphi,\omega}$$

elde edilir ve 3.2.3 Önermenin ispatı tamamlanmış olur.

3.2.4 Önerme $f_n(x)$ $(n = 1,2,\ldots)$, bir yansımalı Orlicz uzayı $L_{\varphi,\omega}(\mathbf{T})$'de 2π periyotlu fonksiyonların bir dizisi olsun, $\omega \in A_{p(\varphi)}(\mathbf{T})$ ve $S_{n,k_n}(x)$ ise $f_n(x)$ fonksiyonunun Fourier serisinin k-ncı mertebeden kısmi toplamı olsun, $k = k_n$, *n*'nin bir fonksiyonudur. Bu durumda

$$\left\|\left(\sum_{n=1}^{\infty} \left|S_{n,k_n}(x)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{\varphi,\omega} \le C \left\|\left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{\varphi,\omega}$$

olacak şekilde pozitif bir C sabiti vardır, bu C sabiti $f_n(x)$'den bağımsızdır.

İspat:

$$f(x) := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

için, [33] den (ayrıca [36] ve $[28, v.2, s.225]$ kaynaklarına da bakılabilir) her $p > 1$ için $L_p(\mathbf{T})$'de sınırlı olan (özel olarak (p,p) zayıf tipli)

$$Tf(x) := \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left|S_{n,k_n}(x)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

kvazi-lineer operatörünü tanımlıyoruz. İstenen eşitsizliklik 3.2.3 Önermeyi uygulayarak ve 3.2.3 Önermenin sol tarafının ispatı adım adım tekrar edilerek elde edilir.

3.2.5 Önerme $\omega \in A_{p(\varphi)}(\mathbf{T})$ ve $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$ dizisi

$$|\lambda_l| \leq M, \qquad \sum_{v=2^l}^{2^{l+1}-1} |\lambda_v - \lambda_{v+1}| \leq M \qquad (l = 0,1,2,\ldots) \tag{3.21}$$

olacak şekilde bir sayılar dizisi olsun. Bu durumda

$\frac{a_0\lambda_0}{2} + \sum_{v=0}^{\infty} \lambda_v \ (a_v \cos vx + b_v \sin vx)$ serisi herhangi bir $h(x) \in L_{\varphi,\omega}(\mathbf{T})$ fonksiyonunun bir Fourier serisidir ve aşağıdaki değerlendirme geçerlidir. Burada a_v, b_v ifadeleri $f(x) \in L_{\varphi,\omega}(\mathbf{T})$ fonksiyonunun Fourier katsayılarıdır.

$$\int_0^{2\pi} \varphi(|h(x)|)\, \omega(x)dx \leq C \int_0^{2\pi} \varphi(|f(x)|)\, \omega(x)dx. \tag{3.22}$$

İspat: $\Delta_{\mu,s} := \sum_{v=2^{\mu-1}}^{s} A_v(x)$, $A_v(x) := a_v \cos vx + b_v \sin vx$

$(s \geq 2^{\mu} - 1;\ \mu = 1, 2, \dots)$, $\Delta'_{\mu} \coloneqq \sum_{v=2^{\mu-1}}^{2^{\mu}-1} \lambda_v A_v(x)$ alalım. Bu durumda $[37, \text{v.} 1, \text{s.} 347]$'den

$$\left|\Delta'_{\mu}\right|^2 \leq 2M\left(\sum_{s=2^{\mu-1}}^{2^{\mu}-1} \left|\Delta_{\mu,s}\right|^2 |\lambda_s - \lambda_{s+1}| + \left|\Delta_{\mu}\right|^2 \left|\Delta_{2\mu}\right|\right)$$

olur. 3.2.4 Önermeyi ve (3.21)'i kullanarak bu önermenin ispatı aşağıdaki gibi tamamlanır. 3.2.4 Önermede

$$\int_0^{2\pi} \varphi\left(\left(\sum_{n=0}^{\infty} \left|S_{n,k_n}(x)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)\omega(x)dx \ \leq C \int_0^{2\pi} \varphi\left(\left(\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)\omega(x)dx$$

olduğunu biliyoruz. Burada

$S_{n,k_n}(x) \coloneqq \Delta'_{\mu}$ ve $f_n(x) \coloneqq \left(2M\left(\sum_{s=2^{\mu-1}}^{2^{\mu}-1} \left|\Delta_{\mu,s}\right|^2 |\lambda_s - \lambda_{s+1}| + \left|\Delta_{\mu}\right|^2 \left|\Delta_{2\mu}\right|\right)\right)^{1/2}$

alınırsa; (3.21) kullanılarak

$$\int_0^{2\pi} \varphi\left(\left(\sum_{\mu=1}^{\infty} \left|\Delta'_{\mu}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)\omega(x)dx$$

$$\leq \int_0^{2\pi} \varphi\left(\left(\sum_{\mu=1}^{\infty} 2M\left(\sum_{s=2^{\mu-1}}^{2^{\mu}-1} \left|\Delta_{\mu,s}\right|^2 |\lambda_s - \lambda_{s+1}| + \left|\Delta_{\mu}\right|^2 \left|\Delta_{2\mu}\right|\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right)\omega(x)dx$$

$$\leq \int_0^{2\pi} \varphi\left((2M)^{1/2}\left(\sum_{\mu=1}^{\infty}\left(\sum_{s=2^{\mu-1}}^{2^{\mu}-1} \left|\Delta_{\mu,s}\right|^2 |\lambda_s - \lambda_{s+1}| + \left|\Delta_{\mu}\right|^2 \left|\Delta_{2\mu}\right|\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right)\omega(x)dx$$

$$\leq C\int_0^{2\pi}\varphi\left((2M)^{1/2}\left(\sum_{\mu=1}^{\infty}\left|\Delta_\mu\right|^2\left(\sum_{s=2^{\mu-1}}^{2^{\mu}-1}|\lambda_s-\lambda_{s+1}|+\left|\Delta_{2\mu}\right|\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right)\omega(x)dx$$

$$\leq C\int_0^{2\pi}\varphi\left((2M)^{1/2}\left(\sum_{\mu=1}^{\infty}\left|\Delta_\mu\right|^2(2M)\right)^{\frac{1}{2}}\right)\omega(x)dx$$

$$\leq C\int_0^{2\pi}\varphi\left(2M\left(\sum_{\mu=1}^{\infty}\left|\Delta_\mu\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)\omega(x)dx$$

elde edilir. (3.22) eşitliği de 3.2.4 Önermeden görülür. □

3.3 Ana Sonuçlar ve İspatları

. Bu bölümde ağırlıklı Orlicz uzaylarında, Muckenhoupt ağırlık fonksiyonları kullanılarak periyodik fonksiyonlarla yaklaşımın bazı düz teoremlerini inceledik. Üç tane ana sonuç elde ettik. Elde ettiğimiz ana sonuçlar aşağıdaki gibidir.

3.3.1 Teorem Eğer $r>0$, $f\in L_{\varphi,\omega}(\mathbf{T})$, $\varphi\in\Delta_2$, $\omega\in A_{p(\varphi)}$ ve $\alpha\in(0,1)$ için φ^{α} kvazikonveks ise n=1, 2, . . . için

$$E_n(f)_{\varphi,\omega}\preceq\Omega^r_{\varphi,\omega}\left(f,\frac{1}{n}\right)\tag{3.23}$$

değerlendirmesi geçerlidir.

Bu teorem [38] numaralı kaynakta Akgün tarafından $1<p<\infty$ iken $f\in L_{\mathrm{p},\omega}(\mathbf{T})$ için; [31] numaralı kaynakta Akgün ve İsrafilov tarafından $r\in\mathbb{N}$ iken; [13] numaralı kaynakta da Ponomarenko tarafından $L_{\varphi}(\mathbf{T})$ de $r\in\mathbb{N}$ iken ispatlanmıştır. Biz de $f\in L_{\varphi,\omega}(\mathbf{T})$ olmak üzere $r>0$ için ispatladık.

İspat : $[31, \text{Teorem } 2]$ de $\varphi \in \Delta_2$, $\omega \in A_{p(\varphi)}$ ve $\alpha \in (0,1)$ için φ^α kvazikonveks koşulları altında $f \in L_{\varphi,\omega}(\mathbf{T})$ için $n, r \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$E_n(f)_{\varphi,\omega} \preceq \Omega^r_{\varphi,\omega}\left(f, \frac{1}{n}\right) \tag{3.24}$$

değerlendirmesi ispatlanmıştır. Biz aynı koşullar altında $r > 0$ için bu değerlendirmeyi elde etmeye çalışıyoruz. 3.2.1 Önermede $0 < \alpha \leq \beta$ ve bu teoremdeki koşullar altında

$$\Omega^\beta_{\varphi,\omega}\left(f, \frac{1}{n}\right) \preceq \Omega^\alpha_{\varphi,\omega}\left(f, \frac{1}{n}\right) \tag{3.13}$$

değerlendirmesi elde edilmişti. (3.24)'ten $r > 0$ için

$$E_n(f)_{\varphi,\omega} \preceq \Omega^{[r]+1}_{\varphi,\omega}\left(f, \frac{1}{n}\right), \qquad n \in \mathbb{N}$$

yazılabilir. $0 < r \leq [r] + 1$ olduğundan (3.13) kullanılarak

$$E_n(f)_{\varphi,\omega} \preceq \Omega^{[r]+1}_{\varphi,\omega}\left(f, \frac{1}{n}\right) \preceq \Omega^r_{\varphi,\omega}\left(f, \frac{1}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

ve dolayısıyla da

$$E_n(f)_{\varphi,\omega} \preceq \Omega^r_{\varphi,\omega}\left(f, \frac{1}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. □

Aşağıdaki elde ettiğimiz ana sonuçlarda ise yine Ponomarenko'nun $[13]$'te ağırlıksız Orlicz uzayları için ve Yıldırır'ın $[18]$'de ağırlıklı Orlicz uzaylarında $r \in \mathbb{N}$ için elde ettiği sonuçları; ağırlıklı Orlicz uzaylarında $r > 0$ için ispatladık.

3.3.2 Teorem $f \in L_{\varphi,\omega}(\mathbf{T})$, $\varphi \in \Delta_2$, $\omega \in A_{p(\varphi)}$ ve $\alpha \in (0,1)$ için φ^α kvazikonveks olsun. $r > 0$ ve

$\lambda_v^{(n)} = 1 - \left(\frac{v}{n}\right)^{2r}$ $(v \le n)$ sayılar sistemi için;

$$R_n(f,\lambda)_{\varphi,\omega} := \left\| f(x) - \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{v=1}^{n} \lambda_v^{(n)} (a_v \cos vx + b_v \sin vx)\right]\right\|_{\varphi,\omega} \le \Omega_{\varphi,\omega}^{r}\left(f, \frac{1}{n}\right)$$

değerlendirmesi geçerlidir.

İspatı : $2^m \le n < 2^{m+1}$ olsun. Normun özelliklerinden

$$\left\| f(x) - \sum_{v=0}^{n} \lambda_v^{(n)} A_v(x)\right\|_{\varphi,\omega} = \left\| \sum_{v=0}^{\infty} A_v(x) - \sum_{v=0}^{n} \lambda_v^{(n)} A_v(x)\right\|_{\varphi,\omega}$$

$$= \left\| \sum_{v=0}^{n} A_v(x) + \sum_{v=n+1}^{\infty} A_v(x) - \sum_{v=0}^{n} \lambda_v^{(n)} A_v(x)\right\|_{\varphi,\omega}$$

$$= \left\| \sum_{v=0}^{n} (1 - \lambda_v^{(n)}) A_v(x) + \sum_{v=n+1}^{\infty} A_v(x)\right\|_{\varphi,\omega}$$

$$\le \left\| \sum_{v=0}^{n} (1 - \lambda_v^{(n)}) A_v(x)\right\|_{\varphi,\omega} + \left\| \sum_{v=n+1}^{\infty} A_v(x)\right\|_{\varphi,\omega}$$

$$= I_1 + I_2$$

burada $A_v(x) = a_v \cos vx + b_v \sin vx$ dir.

$[31, Lemma\ 3]$'de bu teoremdeki koşullar altında

$$\|S_n(f,x)\|_{\varphi,\omega} \preceq \|f(x)\|_{\varphi,\omega} \tag{3.25}$$

$$\|f(x) - S_n(f,x)\|_{\varphi,\omega} \preceq E_n(f)_{\varphi,\omega} \tag{3.26}$$

değerlendirmeleri elde edilmiştir.

$$\|f(x) - S_n(f,x)\|_{\varphi,\omega} = \left\| \sum_{v=0}^{\infty} A_v(x) - \sum_{v=0}^{n} A_v(x)\right\|_{\varphi,\omega}$$

$$= \left\| \sum_{v=n+1}^{\infty} A_v(x) \right\|_{\varphi,\omega} = I_2 \quad \text{olur.}$$

(3.26) ve (3.23)'ten

$$I_2 = \left\| \sum_{v=n+1}^{\infty} A_v(x) \right\|_{\varphi,\omega} = \|f(x) - S_n(f,x)\|_{\varphi,\omega} \preceq E_n(f)_{\varphi,\omega} \preceq \Omega_{\varphi,\omega}^{r}\left(f, \frac{1}{n}\right)$$

ve dolayısıyla

$$I_2 \preceq \Omega_{\varphi,\omega}^{r}\left(f, \frac{1}{n}\right)$$

elde edilir.

Şimdi de

$$I_1 = \left\| \sum_{v=0}^{n} (1 - \lambda_v^{(n)}) A_v(x) \right\|_{\varphi,\omega} \preceq \Omega_{\varphi,\omega}^{r}\left(f, \frac{1}{n}\right)$$

olduğunu göstermeliyiz. Bunun için normun içini $\left(1 - \frac{sin\frac{v}{n}}{\frac{v}{n}}\right)^r$ ile çarpıp bölelim. Yani

$$I_1 = \left\| \sum_{v=0}^{n} \frac{1 - \lambda_v^{(n)}}{\left(1 - \frac{sin\frac{v}{n}}{\frac{v}{n}}\right)^r} A_v(x) \left(1 - \frac{sin\frac{v}{n}}{\frac{v}{n}}\right)^r \right\|_{\varphi,\omega}$$

olur.

$n = 1, 2, \ldots$ iken

$$\mu_{v,r}^{(n)} = \begin{cases} \dfrac{1-\lambda_v^{(n)}}{\left(1-\dfrac{\sin\frac{v}{n}}{\frac{v}{n}}\right)^r}, & v \le n \text{ için} \\ 0\ , & v > n \text{ için} \end{cases}$$

olacak şekilde bir $\mu_{v,r}^{(n)}$ fonksiyonu alalım.

$\left(\mu_{v,r}^{(n)}\right)$ dizisi 3.2.5 Önermedeki koşulları sağlar [38]. Bu durumda 3.2.5 Önermeye göre

$$I_1 = \left\| \sum_{v=0}^{n} \mu_{v,r}^{(n)} A_v(x) \left(1-\frac{\sin\frac{v}{n}}{\frac{v}{n}}\right)^r \right\|_{\varphi,\omega} \preceq \left\| \left(I-\sigma_{1/n}\right)^r f \right\|_{\varphi,\omega}$$

$$= \left\| \left(I-\sigma_{1/n}\right)^{[r]} \left(I-\sigma_{1/n}\right)^{r-[r]} f \right\|_{\varphi,\omega}$$

$$\preceq \sup_{0<h_i,t\le\frac{1}{n}} \left\| \prod_{i=1}^{[r]} \left(I-\sigma_{h_i}\right)(I-\sigma_t)^{r-[r]} f \right\|_{\varphi,\omega} \preceq \Omega_{\varphi,\omega}^r\left(f,\frac{1}{n}\right)$$

olur; yani $I_1 \preceq \Omega_{\varphi,\omega}^r\left(f,\frac{1}{n}\right)$ olduğunu göstermiş olduk. Sabitler istenen şekilde seçilebileceğinden

$$R_n(f,\lambda)_{\varphi,\omega} := \left\| f(x) - \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{v=1}^{n} \lambda_v^{(n)} \left(a_v \cos vx + b_v \sin vx\right)\right] \right\|_{\varphi,\omega}$$

$$\preceq I_1 + I_2 \preceq \Omega_{\varphi,\omega}^r\left(f,\frac{1}{n}\right)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. □

3.3.3 Teorem $f \in L_{\varphi,\omega}(\mathbf{T})$, $\varphi \in \Delta_2$, $\omega \in A_{p(\varphi)}$ ve $\alpha \in (0,1)$ için φ^α kvazikonveks olsun. $k > 0$ ve reel eksen üzerindeki herhangi bir E kümesi üzerinde tanımlı

$$\lambda_\upsilon(r) = 1 - (\upsilon|r - r_0|)^{2k}, \qquad \left(\upsilon \le \left[\frac{1}{|r - r_0|}\right]\right), r_0 \in E$$

fonksiyonlar dizisi için eğer

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{\upsilon=1}^{\infty} \lambda_\upsilon(r)\,(a_\upsilon \cos \upsilon x + b_\upsilon \sin \upsilon x)$$

serisi $L_{\varphi,\omega}(\mathbf{T})$ uzayında yakınsak ise

$$R_r(f,\lambda)_{\varphi,\omega} := \left\| f(x) - \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{\upsilon=1}^{\infty} \lambda_\upsilon(r)\,(a_\upsilon \cos \upsilon x + b_\upsilon \sin \upsilon x)\right] \right\|_{\varphi,\omega}$$

$$\le C\Omega_{\varphi,\omega}^{k}(f, |r - r_0|)$$

değerlendirmesi geçerlidir.

İspat: Norm özelliğinden dolayı

$$R_r(f,\lambda)_{\varphi,\omega} := \left\| f(x) - \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{\upsilon=1}^{\infty} \lambda_\upsilon(r)\,(a_\upsilon \cos \upsilon x + b_\upsilon \sin \upsilon x)\right] \right\|_{\varphi,\omega}$$

$$= \left\| \sum_{\upsilon=1}^{\infty} A_\upsilon(x) - \sum_{\upsilon=1}^{\infty} \lambda_\upsilon(r) A_\upsilon(x) \right\|_{\varphi,\omega}$$

$$= \left\| \sum_{\upsilon=1}^{\left[\frac{1}{|r-r_0|}\right]} A_\upsilon(x) + \sum_{\upsilon=\left[\frac{1}{|r-r_0|}\right]+1}^{\infty} A_\upsilon(x) - \sum_{\upsilon=1}^{\left[\frac{1}{|r-r_0|}\right]} \lambda_\upsilon(r) A_\upsilon(x) - \sum_{\upsilon=\left[\frac{1}{|r-r_0|}\right]+1}^{\infty} \lambda_\upsilon(r) A_\upsilon(x) \right\|_{\varphi,\omega}$$

$$\le \left\| \sum_{\upsilon=1}^{\left[\frac{1}{|r-r_0|}\right]} (1 - \lambda_\upsilon(r)) A_\upsilon(x) \right\|_{\varphi,\omega} + \left\| \sum_{\upsilon=\left[\frac{1}{|r-r_0|}\right]+1}^{\infty} (1 - \lambda_\upsilon(r)) A_\upsilon(x) \right\|_{\varphi,\omega}$$

$$= I_1' + I_2'.$$

$$I_1' = \left\| \sum_{v=1}^{\left[\frac{1}{|r-r_0|}\right]} \frac{1-\lambda_v(r)}{\left(1-\frac{sinv|r-r_0|}{v|r-r_0|}\right)^k} A_v(x) \left(1-\frac{sinv|r-r_0|}{v|r-r_0|}\right)^k \right\|_{\varphi,\omega}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

biçiminde yazalım.

$$\mu_{v,r} = \begin{cases} \dfrac{1-\lambda_v(r)}{\left(1-\frac{sinv|r-r_0|}{v|r-r_0|}\right)^k}, & v \le \left[\dfrac{1}{|r-r_0|}\right] \, için \\ \\ 0, & v > n \, için \end{cases}$$

alalım. $\left(\mu_{v,r}^{(n)}\right)$ dizisi 3.2.5 Önermedeki koşulları sağlar. Bu nedenle 3.2.5 Önermeye göre

$2^m \le \left[\frac{1}{|r-r_0|}\right] < 2^{m+1}$için

$$I_1' \le \left\| \sum_{v=1}^{2^{m+1}} \mu_{v,r} A_v(x) \left(1-\frac{sinv|r-r_0|}{v|r-r_0|}\right)^k \right\|_{\varphi,\omega}$$

$$\preceq \left\| \sum_{v=1}^{\infty} A_v(x) \left(1-\frac{sinv|r-r_0|}{v|r-r_0|}\right)^k \right\|_{\varphi,\omega} \preceq \left\| \left(I-\sigma_{|r-r_0|}\right)^k f \right\|_{\varphi,\omega}$$

$$= \left\| \left(I-\sigma_{|r-r_0|}\right)^{[k]} \left(I-\sigma_{|r-r_0|}\right)^{k-[k]} f \right\|_{\varphi,\omega}$$

$$\preceq \sup_{0<h_i,t\le|r-r_0|} \left\| \prod_{i=1}^{[k]} \left(I-\sigma_{h_i}\right)(I-\sigma_t)^{k-[k]} f \right\|_{\varphi,\omega} \preceq \Omega_{\varphi,\omega}^k(f, |r-r_0|).$$

Böylece

$$I_1' \preceq \Omega_{\varphi,\omega}^k(f, |r-r_0|) \tag{3.27}$$

elde etmiş olduk.

Şimdi de I_2''yi değerlendirelim. $\{1-\lambda_v(r)\}$ sayılar sistemi, 3.2.5 Önermenin koşullarını sağlar. Öyleyse 3.2.5 Önermeye göre;

$$I_2' = \left\| \sum_{v=\left[\frac{1}{|r-r_0|}\right]+1}^{\infty} (1-\lambda_v(r)) A_v(x) \right\|_{\varphi,\omega} \preceq \left\| \sum_{v=\left[\frac{1}{|r-r_0|}\right]+1}^{\infty} A_v(x) \right\|_{\varphi,\omega}$$

olur. Burada 3.3.2 Teoremin ispatındaki yöntemi kullanacağız. $[31, Lemma\ 3]$'te

$$\|f(x)-S_n(f,x)\|_{\varphi,\omega} \preceq E_n(f)_{\varphi,\omega} \tag{3.26}$$

değerlendirmesi elde edilmişti.

(3.26) ve (3.23)'ten

$$I_2' \preceq \left\| \sum_{v=\left[\frac{1}{|r-r_0|}\right]+1}^{\infty} A_v(x) \right\|_{\varphi,\omega} = \left\| \sum_{v=0}^{\infty} A_v(x) - \sum_{v=0}^{n=\left[\frac{1}{|r-r_0|}\right]} A_v(x) \right\|_{\varphi,\omega}$$

$$= \|f(x)-S_n(f,x)\|_{\varphi,\omega} \preceq E_n(f)_{\varphi,\omega} \preceq \Omega_{\varphi,\omega}^k(f,|r-r_0|)$$

ve dolayısıyla

$$I_2' \preceq \Omega_{\varphi,\omega}^k(f,|r-r_0|) \tag{3.28}$$

elde edilir. (3.27) ve (3.28)'den

$$R_r(f,\lambda)_{\varphi,\omega} := \left\| f(x) - \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{v=1}^{\infty} \lambda_v(r)\,(a_v \cos vx + b_v \sin vx) \right] \right\|_{\varphi,\omega}$$

$$\leq I_1' + I_2'$$

$$\leq C\Omega_{\varphi,\omega}^k(f,|r-r_0|)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. □

4. KONVEKS OLMASI GEREKMEYEN ÜRETEÇ YOUNG FONKSİYONUNA SAHİP AĞIRLIKLI ORLICZ UZAYLARINDA YAKLAŞIM

4.1. Giriş ve Gerekli Tanımlar

[19] numaralı kaynakta Chen, 1963 yılında Orlicz Uzayının tanımını, çoğu özelliklerini koruyarak biraz daha genelleştirmiştir. Bu tanımda Orlicz Uzayının üretici olan Young Fonksiyonu konveks olmak zorunda değildir.

Bu bölümde önceki bölümde incelediğimiz yaklaşımı geliştireceğiz ve yaklaşım teorisinin bazı düz teoremlerini Chen'in yapmış olduğu Orlicz uzayı tanımına göre inceleyeceğiz. [13, 18, 32] numaralı kaynaklarda elde edilen sonuçları, konveks olması gerekmeyen üretici Young fonksiyonlarına sahip ağırlıklı Orlicz uzaylarına genelleştireceğiz. Ağırlık fonksiyonları yine Muckenhoupt koşulunu sağlayan fonksiyonlar olarak alınacaktır. Chen anlamında ağırlıklı Orlicz uzayları ilk olarak [20]'de Akgün ve [39]'de Akgün-Koç tarafından tanımlanmış ve bu uzayda yaklaşım teorisine uygulamaları ilk defa bu çalışmalarda yapılmıştır.

4.1.1 Tanım $[19, s.62]$ $-\infty < p \leq q < \infty$ olsun. $\phi: [0,\infty) \to [0,\infty)$ fonksiyonu $\phi(\infty) = \lim_{x\to\infty} \phi(x) = \infty$ koşulunu sağlayan artan, çift bir fonksiyon olmak üzere; $\phi \in N[p,q]$ ile;

i) x artarken; $\phi(x)/x^p$ azalan olmayan;

ii) x artarken; $\phi(x)/x^q$ artan olmayan;

koşullarını sağlayan ϕ fonksiyonlar sınıfını ifade ediyoruz.

Eğer $p < q$ ise, yeterince küçük $\varepsilon, \delta > 0$ sayıları için $N[p+\varepsilon, q-\delta]$'a ait olan ϕ fonksiyonlar sınıfını $N\langle p,q\rangle$ ile göstereceğiz.

Φ_p ile, $1 < p \leq q < \infty$ için, $N\langle p,q\rangle$ sınıfına ait fonksiyonların sınıfını göstereceğiz. Her $M \in \Phi_p$ fonksiyonu süreklidir ve $M(0) = 0$ ve Δ_2 koşulu sağlanır $[19,\ s.64, Lemma\ 1]$. $M \in \Phi_p$ fonksiyonu **konveks olmak zorunda değildir**.

4.1.2 Örnek : $\varphi(1) = 1$ ve

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^{5/2}, & 0 \leq x \leq 1 \\ x^{9/4}, & x > 1 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan φ fonksiyonu $N\langle 2,3\rangle$ dendir. Diğer yandan $\varphi'(x)$ türevi $x = 1$ noktası hariç heryerde vardır. Burada $\varphi'(1^-) = 5/2$ ve $\varphi'(1^+) = 9/4$ dir. Bu yüzden $\varphi(x)$, azalan olmayan bir fonksiyonun integraline eşit değildir. Öyleyse $\varphi(x)$ konveks bir fonksiyon değildir. ($\varphi(x)$ konveks ise $\varphi(x) = \int_0^x p(t)dt$, *p(t)* azalan olmayandır) $[19,\ s.67-68]$. □

$[25,\ s.5\, Teorem\ 1.1]$'de $[a,b]$'den alınan herhangi bir u için, $\Phi(a) = 0$ koşulunu sağlayan her $\Phi(\mathrm{u})$ konveks fonksiyonunun, $p(t)$ azalmayan, sağ sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$\Phi(u) = \int_a^u p(t)\, dt$$

şeklinde gösterilebildiği ispatlanmıştır.

$\mathrm{M} \in \Phi_p$ ve ω, **T** üzerinde bir ağırlık olsun. $\varphi_M(t) = \frac{M(t)}{t}$ gösterimini kullanalım. $1 < p < q < \infty$ olduğundan $t \to \infty$ iken $\varphi_M(t) \to \infty$ olur.

$\psi_M(t)$ fonksiyonu, pozitif azalmayan sürekli $\varphi_M(t)$ fonksiyonunun ters fonksiyonu olsun.

$$\Phi_M(x) = \int_0^x \varphi_M(t)\, dt$$

ve

$$\Psi_M(x) = \int_0^x \psi_M(t)\, dt$$

yazarız. Φ_M fonksiyonu konvekstir ve bundan dolayı Φ_M ve Ψ_M fonksiyonları Young anlamında eşlenik fonksiyonlardır.

4.1.3 Tanım Reel değerli pozitif bir *c* sabiti için,

$$\int_{\mathbf{T}} \Phi_M\,(c|f(x)|)\omega(x)dx < \infty \tag{4.1}$$

koşulunu sağlayan $f\colon \mathbf{T} \to \mathbb{R}$ Lebesgue ölçülebilir fonksiyonlarının sınıfı $L_{M,\omega}(\mathbf{T})$ ile gösterilir[20]. $L_{M,\omega}(\mathbf{T})$ uzayı üzerinde ***Orlicz normunu***

$$\|f\|_{M,\omega} \coloneqq \sup_{g}\left\{\int_{\mathbf{T}} |f(x)g(x)|\,\omega(x)dx : \int_{\mathbf{T}} \psi_M(|g(x)|)\omega(x)\,dx \le 1\right\} \tag{4.2}$$

biçiminde ve ***Lüxemburg normunu*** da

$$\|f\|_{(M),\omega} \coloneqq \inf\left\{k > 0 : \int_{T} \Phi_M(k^{-1}|f(x)|)\omega(x)\,dx \le 1\right\} \tag{4.3}$$

biçiminde tanımlıyoruz.

Bu durumda

$$\|f\|_{M,\omega} \sim \|f\|_{(M),\omega} \tag{4.4}$$

denkliği geçerlidir. Bu denkliğin ispatı da bir önceki bölümde $\|f\|_{\varphi,\omega} \sim \|f\|_{(\varphi,\omega)}$ nin ispatına benzer yöntemle yapılır.

Göstermek mümkündür ki $L_{M,\omega}(\mathbf{T}) \subset L_1(\mathbf{T})$ dir ve $L_{M,\omega}(\mathbf{T})$ yukarıdaki normlara göre bir Banach uzayı olur.

$L_{M,\omega}(\mathbf{T})$ uzayına ***ağırlıklı Orlicz uzayı*** denir.

Bir ω ağırlığı için, özel olarak $M(x,p) := x^p$ alınırsa $1 < p < \infty$, için $L_p(\mathbf{T}, \boldsymbol{\omega}) \coloneqq L_{M(.,p),\omega}(\mathbf{T})$ ağırlıklı Lebesgue uzayı elde edilir.

$[20,\ s.4]$'de, $M \in \Phi_p$ ve $\omega \in A_p$ olduğunda, $L_{M,\omega}(\mathbf{T})$'de Hardy-Littlewood Maximal operatörünün norm sınırlı olduğu gösterilmiştir. Dolayısıyla $f \in L_{M,\omega}(\mathbf{T})$ için

$$A_h f(x) := \frac{1}{h} \int_{x-\frac{h}{2}}^{x+\frac{h}{2}} f(t)dt \tag{4.5}$$

olarak tanımlanan ***Steklov operatörü*** $L_{M,\omega}(\mathbf{T})$'de sınırlıdır, yani $L_{M,\omega}(\mathbf{T})$'de $M \in \Phi_p,\ p > 1$ ve $\omega \in A_p$ için Hardy-Littlewood maximal operatörünün sınırlılığını kullanarak

$$\|A_h f\|_{(M),\omega} \leq C(M,\omega)\|f\|_{(M),\omega} < \infty \tag{4.6}$$

elde edilir [20]. Bunu kullanarak ve $x, h \in \mathbf{T}$, $r \in \mathbb{R}^+$ için Binom açılımı yardımıyla $f \in\ L_{M,\omega}(\mathbf{T})$, $x \in \mathbf{T}$ için

$$\sigma_h^r f(x) := (I - A_h)^r f(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [C_k^r] \frac{1}{h^k} \int_{-h/2}^{h/2} \dots \int_{-h/2}^{h/2} f(x + u_1 + \dots + u_k) du_1 \dots du_{k,}$$

tanımlarız.

$$\sum_{k=0}^{\infty} |[C_k^r]| < \infty$$

olması ve **T**'de tanımlı sürekli fonksiyonlar ailesinin $L_{M,\omega}(\mathbf{T})$'de yoğun olması kullanılarak

$$\|\sigma_h^r f\|_{(M),\omega} \leq C(r, M, \omega)\|f\|_{(M),\omega} < \infty \tag{4.7}$$

elde ederiz [20, $s.5$].

4.1.4 Tanım Bir $f \in L_{M,\omega}(\mathbf{T})$ fonksiyonu ve $r \in \mathbb{R}^+$ için, $M \in \Phi_p,\ p > 1,\ \omega \in A_p$ olmak üzere *r* indeksine göre ***ağırlıklı kesirli düzgünlük modülünü***

$$\Omega_r(f,\delta)_{M,\omega} := \sup_{0<h_i,t\leq\delta} \left\| \prod_{i=1}^{[r]} (I - A_{h_i}) \sigma_t^{\,r-[r]} f \right\|_{(M),\omega} \tag{4.8}$$

şeklinde tanımlıyoruz. $0 < r < 1$ için $\Omega_r(f,\delta)_{M,\omega} := \sigma_t^r(f)$ olur.

Bu durumda

$$\Omega_r(f,\delta)_{M,\omega} \leq C(r,M,\omega)\|f\|_{(M),\omega} \qquad (4.9)$$

olur [20].

Klasik düzgünlük modülü ağırlıksız durumda sınırlıdır ama ağırlıklı durumda sınırlı değildir. Bu yüzden klasik düzgünlük modülü yerine Gadjieva modülü dediğimiz (4.8)'deki düzgünlük modülünü kullanacağız. Ağırlıklı uzaylar ötelemede değişmez (translation invaryant) olmayabilir. Yani $f(x)$ fonksiyonu ağırlıklı uzayda iken aynı ağırlıklı uzayda $f(x+t)$ olmayabilir. Bu yüzden bu modülü kullanıyoruz.

Kesirli düzgünlük modülü kavramı yeni bir kavram değildir. ([40] ve [41] kaynaklarına bakılabilir)

4.1.5 Tanım $f \in L_{M,\omega}(\mathbf{T})$ için

$$E_n(f)_{M,\omega} = inf\{\|f-T\|_{(M),\omega} \colon T \in \mathcal{T}_n\} \qquad (4.10)$$

alalım, burada $\mathcal{T}_n$ derecesi n'den büyük olmayan trigonometrik polinomların sınıfını ifade eder. Verilen bir $f \in L_1(\mathbf{T})$ için

$$f(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx) := \sum_{k=0}^{\infty} A_k(x,f) \qquad (4.11)$$

ve

$$\tilde{f}(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k(f)\sin kx - b_k(f)\cos kx) := \sum_{k=0}^{\infty} A_k(x,\tilde{f}) \qquad (4.12)$$

ifadeleri f'nin Fourier serisi ve f'nin eşlenik Fourier Serisi olsun. f'nin Fourier serisinin ***kısmi toplamını***

$$S_n(x,f) := S_n(f) := \sum_{k=0}^{n} A_k(x,f), \qquad n = 0,1,2,\ldots\ldots için \tag{4.13}$$

olarak tanımlıyoruz.

[20]’de ispatlanmıştır ki; $\mathrm{M} \in \Phi_p,\ p > 1,\ \omega \in A_p$ ve $f \in L_{M,\omega}(\mathbf{T})$ için

$S_n: L_{M,\omega}(\mathbf{T}) \to L_{M,\omega}(\mathbf{T})$ ve $\tilde{f}: L_{M,\omega}(\mathbf{T}) \to L_{M,\omega}(\mathbf{T})$ operatörleri $L_{M,\omega}(\mathbf{T})$’de norma göre sınırlıdır.

Bu nedenle bu koşullar altında

$$\|\tilde{f}\|_{(M),\omega} \leq C\|f\|_{(M),\omega}, \quad \|S_n(f)\|_{(M),\omega} \leq C\|f\|_{(M),\omega}, \qquad n = 0,1,2,\ldots \tag{4.14}$$

ve

$$\|f - S_n(f)\|_{(M),\omega} \leq CE_n(f)_{M,\omega} \qquad n = 0,1,2,\ldots \tag{4.15}$$

elde edilir.

Dahası $\mathrm{M} \in \Phi_\mathrm{p},\ \omega \in A_p$ için [42] nolu kaynakta Lemma 3 deki hipotezler sağlandığından trigonometrik polinomlar kümesi, $L_{M,\omega}(\mathbf{T})$’nin yoğun bir alt kümesidir. Öyleyse yaklaşım problemleri $L_{M,\omega}(\mathbf{T})$’de anlamlı hale gelir.

Bundan dolayı $n \to \infty$ $iken$ $E_n(f)_{M,\omega} \to 0$ dır ve bu yüzden de f’nin Fourier serisi $L_{M,\omega}(\mathbf{T})$’de f’e normda yakınsar, yani,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(x,f). \tag{4.16}$$

4.2 Yardımcı Sonuçlar

Bu alt bölümde, ana sonuçların ispatı için çok önemli olan $L_{M,\omega}(\mathbf{T})$’de çarpan teoremi, Littlewood-Paley Teoremi ve Jackson teoremi olarak da bilinen yaklaşımın düz teoremini vereceğiz.

4.2.1 Uyarı [20] $M \in \Phi_{\mathrm{p}}$, $1 < p < q < \infty$ ise, bu durumda $[19, \mathit{Lemma}\ 3]$ den $p\Phi_1 \leq M(x) \leq q\Phi_1$ ve buradan da M kvazikonveks olur. Ayrıca $M \sim \Phi_1$ elde ederiz.

4.2.2 Önerme (Çarpan Teoremi) $[20, \mathrm{Teo.}\, 8]$ Bir $\lambda_k$dizisi

$$|\lambda_k| \leq A, \qquad \sum_{k=2^{j-1}}^{2^j-1} |\lambda_k - \lambda_{k+1}| \leq A \tag{4.17}$$

koşulunu sağlasın, burada $A > 0$ ve k'ya ve j'ye bağlı değildir. Eğer $\mathrm{M} \in \Phi_{\mathrm{p}}$, $\omega \in A_p$, $p > 1$ ve $f \in L_{M,\omega}(\mathbf{T})$ ise bir $F \in L_{M,\omega}(\mathbf{T})$ fonksiyonu vardır öyle ki

$$\frac{\lambda_0 a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

serisi F için bir Fourier serisidir ve

$$\|F\|_{(M),\omega} \leq CA\|f\|_{(M),\omega}, \tag{4.18}$$

değerlendirmesi f'den bağımsız pozitif bir C sabiti ile sağlanır.

4.2.2 Önerme nin ispatı; [34] da Teorem 1 ve Teorem 2 deki sonuçlar göz önünde tutularak, extrapolasyon teoremi ve 4.2.1 Uyarı dan elde edilir [20].

4.2.3 Önerme (Littlewood-Paley Teoremi) [20] $\mathrm{M} \in \Phi_{\mathrm{p}}$, $\omega \in A_p, p > 1$ ve $f \in L_{M,\omega}(\mathbf{T})$ olsun. Öyleyse M'ye bağlı bir $C > 0$ sabiti ile ω'ya bağlı bir $c > 0$ sabiti vardır öyle ki

$$c\|f\|_{(M),\omega} \leq \left\| \left(\sum_{j=0}^{\infty} \left| \sum_{k=2^{j-1}}^{2^j-1} A_k(x,f) \right|^2 \right)^{1/2} \right\|_{(M),\omega} \leq C\|f\|_{(M),\omega} \tag{4.19}$$

değerlendirmesi geçerlidir.

4.2.4 Önerme $\mathrm{M} \in \Phi_p$, $p > 1$, $\omega \in A_p$ ve $f \in L_{M,\omega}(\mathbf{T})$ olsun. Öyleyse $r \in \mathbb{R}^+$ ve $n = 1,2, \dots$ için

$$E_n(f)_{M,\omega} \preceq \Omega_r\left(f,\frac{1}{n}\right)_{M,\omega} \tag{4.20}$$

değerlendirmesi geçerlidir [20].

Bu düz yaklaşım teoremi [38, $\ddot{o}nerme$ 1] ve [10, $teorem$ 2 ve 4]‘te verilen benzer metotlarla ispatlanır.

4.3 Ana Sonuçlar ve İspatları

Bu bölüm boyunca kullandığımız c sabiti genel bir sabit olup, bir eşitsizlik zincirinde ortaya çıkan farklı sonuçlara göre değerleri değişebilen bir sabittir.

Elde ettiğimiz ana sonuçlar aşağıdaki gibidir.

4.3.1 Teorem $M \in \Phi_p,\ p > 1,\ \omega \in A_p$ ve $f \in L_{M,\omega}(\mathbf{T})$ olsun.

$\lambda_v^{(n)} = 1 - \left(\frac{v}{n}\right)^{2r}$ $(v \leq n\,, r\ >\ 0)$ sayılar sistemi için;

$$R_n(f,\lambda)_{M,\omega} := \left\| f(x) - \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{v=1}^{n} \lambda_v^{(n)}\,(a_v \cos vx + b_v \sin vx)\right]\right\|_{(M),\omega}$$

$$\leq \Omega_r\left(f,\frac{1}{n}\right)_{M,\omega}$$

değerlendirmesi geçerlidir.

İspat : $2^m \leq n < 2^{m+1}$ olsun. Norm özelliğinden dolayı

$$\left\| f(x) - \sum_{v=0}^{n} \lambda_v^{(n)}\, A_v(x)\right\|_{(M),\omega} = \left\| \sum_{v=0}^{\infty} A_v(x) - \sum_{v=0}^{n} \lambda_v^{(n)}\, A_v(x)\right\|_{(M),\omega}$$

$$= \left\| \sum_{v=0}^{n} A_v(x) + \sum_{v=n+1}^{\infty} A_v(x) - \sum_{v=0}^{n} \lambda_v^{(n)}\, A_v(x)\right\|_{(M),\omega}$$

$$= \left\| \sum_{v=0}^{n} (1 - \lambda_v^{(n)}) A_v(x) + \sum_{v=n+1}^{\infty} A_v(x) \right\|_{(M),\omega}$$

$$\leq \left\| \sum_{v=0}^{n} (1 - \lambda_v^{(n)}) A_v(x) \right\|_{(M),\omega} + \left\| \sum_{v=n+1}^{\infty} A_v(x) \right\|_{(M),\omega}$$

$$= I_1 + I_2$$

yazabiliriz.

[20]'de bu teoremdeki koşullar altında

$$\|S_n(f,x)\|_{(M),\omega} \preceq \|f(x)\|_{(M),\omega} \tag{4.14}$$

$$\|f(x) - S_n(f,x)\|_{(M),\omega} \preceq E_n(f)_{(M),\omega} \tag{4.15}$$

değerlendirmeleri elde edilmiştir.

(4.15) ve 4.2.4 Önermedeki (4.20)'den

$$I_2 = \left\| \sum_{v=n+1}^{\infty} A_v(x) \right\|_{(M),\omega} = \left\| \sum_{v=0}^{\infty} A_v(x) - \sum_{v=0}^{n} A_v(x) \right\|_{(M),\omega}$$

$$= \|f(x) - S_n(f,x)\|_{(M),\omega} \preceq E_n(f)_{M,\omega} \preceq \Omega_r\left(f, \frac{1}{n}\right)_{M,\omega}$$

ve dolayısıyla

$$I_2 \preceq \Omega_r\left(f, \frac{1}{n}\right)_{M,\omega}$$

elde edilir.

Şimdi de

$$I_1 = \left\| \sum_{v=0}^{n} (1 - \lambda_v^{(n)}) A_v(x) \right\|_{(M),\omega} \preceq \Omega_r\left(f, \frac{1}{n}\right)_{M,\omega}$$

olduğunu göstermeliyiz. Bunun için normun içini $\left(1-\frac{\sin\frac{v}{n}}{\frac{v}{n}}\right)^r$ ile çarpıp bölelim. Yani

$$I_1 = \left\| \sum_{v=0}^{n} \frac{1-\lambda_v^{(n)}}{\left(1-\frac{\sin\frac{v}{n}}{\frac{v}{n}}\right)^r} A_v(x) \left(1-\frac{\sin\frac{v}{n}}{\frac{v}{n}}\right)^r \right\|_{(M),\omega}$$

olur.

$n = 1, 2, \ldots$ iken

$$\mu_{v,r}^{(n)} = \begin{cases} \dfrac{1-\lambda_v^{(n)}}{\left(1-\frac{\sin\frac{v}{n}}{\frac{v}{n}}\right)^r}, & v \leq n \text{ için} \\ 0\ , & v > n \text{ için} \end{cases}$$

olacak şekilde bir $\mu_{v,r}^{(n)}$ fonksiyonu alalım.

$\left(\mu_{v,r}^{(n)}\right)$ dizisi 4.2.2 Önermedeki koşulları sağlar [38]. Bu durumda 4.2.2 Önermeye göre

$$I_1 = \left\| \sum_{v=0}^{n} \mu_{v,r}^{(n)} A_v(x) \left(1-\frac{\sin\frac{v}{n}}{\frac{v}{n}}\right)^r \right\|_{(M),\omega} \leq \left\| \left(I-\sigma_{1/n}\right)^r f \right\|_{(M),\omega}$$

$$= \left\| \left(I-\sigma_{1/n}\right)^{[r]} \left(I-\sigma_{1/n}\right)^{r-[r]} f \right\|_{(M),\omega}$$

$$\leq \sup_{0<h_i,t\leq\frac{1}{n}} \left\| \prod_{i=1}^{[r]} \left(I-\sigma_{h_i}\right)\left(I-\sigma_t\right)^{r-[r]} f \right\|_{(M),\omega} \leq \Omega_r\left(f,\frac{1}{n}\right)_{M,\omega}$$

olur; yani $I_1 \preceq \Omega_r\left(f, \frac{1}{n}\right)_{M,\omega}$ değerlendirmesi elde edilir. Sabitler istenen şekilde seçilebileceğinden

$$R_n(f,\lambda)_{\varphi,\omega} := \left\| f(x) - \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{v=1}^{n} \lambda_v^{(n)} \left(a_v \cos vx + b_v \sin vx\right)\right]\right\|_{M,\omega}$$

$$\preceq \; I_1 + I_2 \; \preceq \; \Omega_r\left(f, \frac{1}{n}\right)_{M,\omega}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. □

4.3.2 Teorem $M \in \Phi_p,\; p > 1,\; \omega \in A_p$ ve $f \in L_{M,\omega}(\mathbf{T})$ olsun.

$k > 0,\; E \subset \mathbb{R}\,,\; r, r_0 \in E$ olmak üzere eğer

$$\lambda_v\,(r) = 1 - (v|r - r_0|)^{2k}, \qquad \left(v \leq \left[\frac{1}{|r - r_0|}\right]\right)$$

fonksiyonlar dizisi için,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{v=1}^{\infty} \lambda_v\,(r)\,(a_v \cos vx + \; b_v \sin vx)$$

serisi $L_{M,\omega}(\mathbf{T})$ uzayında yakınsak ise

$$R_r(f,\lambda)_{M,\omega} := \left\| f(x) - \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{v=1}^{\infty} \lambda_v(r)\,(a_v \cos vx + b_v \sin vx\right]\right\|_{(M),\omega}$$

$$\leq C\Omega_k(f, |r - r_0|)_{M,\omega}$$

olur.

İspat : Norm özelliğinden dolayı

$$R_r(f,\lambda)_{M,\omega} := \left\| f(x) - \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{v=1}^{\infty} \lambda_v(r)\,(a_v \cos vx + b_v \sin vx)\right]\right\|_{(M),\omega}$$

$$= \left\| \sum_{v=1}^{\infty} A_v(x) - \sum_{v=1}^{\infty} \lambda_v(r) A_v(x) \right\|_{(M),\omega}$$

$$= \left\| \sum_{v=1}^{\left[\frac{1}{|r-r_0|}\right]} A_v(x) + \sum_{v=\left[\frac{1}{|r-r_0|}\right]+1}^{\infty} A_v(x) - \sum_{v=1}^{\left[\frac{1}{|r-r_0|}\right]} \lambda_v(r) A_v(x) - \sum_{v=\left[\frac{1}{|r-r_0|}\right]+1}^{\infty} \lambda_v(r) A_v(x) \right\|_{(M),\omega}$$

$$\leq \left\| \sum_{v=1}^{\left[\frac{1}{|r-r_0|}\right]} (1 - \lambda_v(r)) A_v(x) \right\|_{(M),\omega} + \left\| \sum_{v=\left[\frac{1}{|r-r_0|}\right]+1}^{\infty} (1 - \lambda_v(r)) A_v(x) \right\|_{(M),\omega}$$

$$= I_1' + I_2'$$

yazabiliriz.

$$I_1' = \left\| \sum_{v=1}^{\left[\frac{1}{|r-r_0|}\right]} \frac{1 - \lambda_v(r)}{\left(1 - \frac{sinv|r-r_0|}{v|r-r_0|}\right)^k} A_v(x) \left(1 - \frac{sinv|r-r_0|}{v|r-r_0|}\right)^k \right\|_{(M),\omega} , \qquad k > 0$$

olsun.

$$\mu_{v,r} = \begin{cases} \dfrac{1 - \lambda_v(r)}{\left(1 - \frac{sinv|r-r_0|}{v|r-r_0|}\right)^k}, & v \leq \left[\dfrac{1}{|r-r_0|}\right] \; için \\ 0, & v > n \; için \end{cases}$$

alalım. $\left(\mu_{v,r}^{(n)}\right)$ dizisi 4.2.2 Önermedeki koşulları sağlar. Bu nedenle 4.2.2 Önermeye göre

$2^m \leq \left[\frac{1}{|r-r_0|}\right] < 2^{m+1}$ için

$$I_1' \leq \left\| \sum_{v=1}^{2^{m+1}} \mu_{v,r} A_v(x) \left(1 - \frac{sinv|r-r_0|}{v|r-r_0|}\right)^k \right\|_{(M),\omega}$$

$$\preceq \left\| \sum_{v=1}^{\infty} A_v(x) \left(1 - \frac{sinv|r-r_0|}{v|r-r_0|}\right)^k \right\|_{(M),\omega} \preceq \left\| \left(I - \sigma_{|r-r_0|}\right)^k f \right\|_{(M),\omega}$$

$$= \left\| \left(I - \sigma_{|r-r_0|}\right)^{[k]} \left(I - \sigma_{|r-r_0|}\right)^{k-[k]} f \right\|_{(M),\omega}$$

$$\preceq \sup_{0<h_i,t\leq|r-r_0|} \left\| \prod_{i=1}^{[k]} \left(I - \sigma_{h_i}\right)(I - \sigma_t)^{k-[k]} f \right\|_{(M),\omega} \preceq \Omega_k(f, |r-r_0|)_{M,\omega}.$$

Böylece

$$I_1' \preceq \Omega_k(f, |r-r_0|)_{M,\omega} \tag{4.21}$$

elde edilir.

Şimdi de I_2' yi değerlendirelim. $\{1 - \lambda_v(r)\}$ sayılar sistemi, 4.2.2 Önermenin koşullarını sağlar. Öyleyse 4.2.2 Önermeye göre;

$$I_2' = \left\| \sum_{v=\left[\frac{1}{|r-r_0|}\right]+1}^{\infty} (1 - \lambda_v(r)) A_v(x) \right\|_{(M),\omega} \preceq \left\| \sum_{v=\left[\frac{1}{|r-r_0|}\right]+1}^{\infty} A_v(x) \right\|_{(M),\omega}$$

olur. Burada bir önceki teorem olan 4.3.1 Teoremin ispatındaki yöntemi kullanacağız. [20]'de

$$\|f(x) - S_n(f,x)\|_{(M),\omega} \preceq E_n(f)_{M,\omega} \tag{4.15}$$

değerlendirmesi elde edilmişti.

(4.15) ve 4.2.4 Önermedeki (4.20)'den

$$I_2' \preceq \left\| \sum_{v=\left[\frac{1}{|r-r_0|}\right]+1}^{\infty} A_v(x) \right\|_{(M),\omega} = \left\| \sum_{v=0}^{\infty} A_v(x) - \sum_{v=0}^{n=\left[\frac{1}{|r-r_0|}\right]} A_v(x) \right\|_{(M),\omega}$$

$$= \|f(x) - S_n(f,x)\|_{(M),\omega} \preceq E_n(f)_{M,\omega} \preceq \Omega_k(f, |r-r_0|)_{M,\omega}$$

ve dolayısıyla

$$I_2' \leq \Omega_k(f, |r - r_0|)_{M,\omega} \tag{4.22}$$

elde edilir. (4.21) ve (4.22)'den

$$R_r(f,\lambda)_{M,\omega} := \left\| f(x) - \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{v=1}^{\infty} \lambda_v(r)\,(a_v \cos vx + b_v \sin vx\right]\right\|_{(M),\omega}$$

$$\leq I_1' + I_2'$$

$$\leq C\Omega_k(f, |r - r_0|)_{M,\omega}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. □

4.3.3 Teorem $\mathrm{M} \in \Phi_p,\ p > 1,\ \omega \in A_p$ ve $f \in L_{M,\omega}(\mathbf{T})$ ve bir $c > 0$ sabiti için

$$\Phi_M(uv) \leq c\Phi_M(u)\Phi_M(v), \tag{4.23}$$

olsun. Öyleyse $\left\{\lambda_v^{(n)}\right\}$ sayıları üçgen bir matrisi için

$$\left(\lambda_0^{(n)} = 1, \qquad \lambda_v^{(n)} = 0, v > n, n = 0,1,2, \ldots\ \right)$$

eğer $\Phi_M(\sqrt{u})$ konveks ise;

$$R_n(f,\lambda)_{M,\omega} \leq \left\{\left[\sum_{v=0}^{m} E_{2^v-1}^2(f)_{M,\omega}\, \delta_{2^v-1}^2\right]^{1/2} + E_n(f)_{M,\omega}\right\}$$

olur ve eğer $\Phi_M(\sqrt{u})$ konkav ise

$$R_n(f,\lambda)_{M,\omega} \leq \inf_{k>0} \frac{1}{k}\left\{1 + \sum_{v=0}^{m} \varphi\left[ckE_{2^v-1}(f)_{M,\omega}\delta_{2^v-1}\right]\right\} + CE_n(f)_{M,\omega}$$

olur, burada

$$\delta_{2^r,n} := \sum_{l=2^r}^{2^{r+1}-1} \left|\lambda_{v+1}^{(n)} - \lambda_v^{(n)}\right| + \left|1 - \lambda_{2^r}^{(n)}\right|,$$

$2^m \leq n < 2^{m+1}$ dir.

İspat : $2^m \leq n < 2^{m+1}$ olsun. Norm özelliklerinden ve (4.15)'den

$$R_n(f,\lambda)_{M,\omega} = \left\| f(x) - \sum_{v=0}^{n} \lambda_v{}^{(n)} A_v(x) \right\|_{(M),\omega}$$

$$= \left\| \sum_{v=0}^{\infty} A_v(x) - \sum_{v=0}^{n} \lambda_v{}^{(n)} A_v(x) \right\|_{(M),\omega}$$

$$= \left\| \sum_{v=1}^{n} A_v(x) + \sum_{v=n+1}^{n} A_v(x) - \sum_{v=1}^{n} \lambda_v{}^{(n)} A_v(x) \right\|_{(M),\omega}$$

$$\leq \left\| \sum_{v=1}^{n} \left(1 - \lambda_v{}^{(n)}\right) A_v(x) \right\|_{(M),\omega} + \left\| \sum_{v=n+1}^{n} A_v(x) \right\|_{(M),\omega}$$

$$(4.15)'\text{den } \|f(x) - S_n(f,x)\|_{(M),\omega} = \left\| \sum_{v=0}^{\infty} A_v(x) - \sum_{v=0}^{n} A_v(x) \right\|_{(M),\omega}$$

$$= \left\| \sum_{v=n+1}^{\infty} A_v(x) \right\|_{(M),\omega} \leq E_n(f)_{M,\omega} \text{ olur.}$$

Öyleyse;

$$R_n(f,\lambda)_{M,\omega} \leq \left\| \sum_{v=1}^{n} \left(1 - \lambda_v{}^{(n)}\right) A_v(x) \right\|_{(M),\omega} + E_n(f)_{(M),\omega} \text{ olur.}$$

$\Phi_M(\sqrt{u})$ bir konveks fonksiyon olsun. 4.2.3 Önerme ve (4.2) ve (4.3) normlarının denkliğini kullanarak

$$\left\|\sum_{v=1}^{n}\left(1-\lambda_v{}^{(n)}\right)A_v(x)\right\|_{(M),\omega}$$

$$= inf\left(k>0: \int_{\boldsymbol{T}} \Phi_M\left(k^{-1}\left|\sum_{v=1}^{n}\left(1-\lambda_v{}^{(n)}\right)A_v(x)\right|\right)\omega(x)dx \le 1\right)$$

$$\le \left\|\left(\sum_{\mu=0}^{m}\left|\sum_{v=2^{\mu}}^{2^{\mu+1}-1}\left(1-\lambda_v{}^{(n)}\right)A_v(x)\right|^2\right)^{1/2}\right\|_{(M),\omega}$$

$$\le inf\left(k>0: c_M \int_{\boldsymbol{T}} \Phi_M\left(k^{-1}\left(\sum_{\mu=0}^{m}\left|\sum_{v=2^{\mu}}^{2^{\mu+1}-1}\left(1-\lambda_v{}^{(n)}\right)A_v(x)\right|^2\right)^{1/2}\right)\omega(x)dx \le 1\right).$$

Dahası (4.23)’e göre D_M sabiti

$$c_M\Phi_M(u) \le \Phi_M(D_M u) \qquad (4.24)$$

olarak seçilebilir. Bu durumda

$$\left\|\sum_{v=1}^{n}\left(1-\lambda_v{}^{(n)}\right)A_v(x)\right\|_{(M),\omega}$$

$$\le inf\left(k>0: \int_{0}^{2\pi} \Phi_M\left(D_M k^{-1}\left(\sum_{\mu=0}^{m}\sigma_{n,\mu}^2(x)\right)^{1/2}\right)\omega(x)dx \le 1\right)$$

olur; burada

$$\sigma_{n,\mu}(x) = \sum_{v=2^{\mu}}^{2^{\mu+1}-1}\left(1-\lambda_v{}^{(n)}\right)A_v(x)$$

dir.

$\xi(u) = \Phi_M(\sqrt{u}\,)$ olsun. Öyleyse

$$\left\|\sum_{v=1}^{n}\left(1-\lambda_v^{(n)}\right)A_v(x)\right\|_{(M),\omega}$$

$$\leq inf\left(k>0:\int_{\boldsymbol{T}}\xi\left(D_M^2k^{-2}\sum_{\mu=0}^{m}\sigma_{n,\mu}^2\,(x)\right)\omega(x)dx\leq 1\right)$$

$$=\left[inf\left(k>0:\int_{\boldsymbol{T}}\xi\left(D_M^2k^{-1}\sum_{\mu=0}^{m}\sigma_{n,\mu}^2\,(x)\right)\omega(x)dx\leq 1\right)\right]^{1/2}$$

$$=D_M\left\|\sum_{\mu=0}^{m}\sigma_{n,\mu}^2\,(x)\right\|_{(\xi,\omega)}^{1/2}\leq D_M\left[\sum_{\mu=0}^{m}\left\|\sigma_{n,\mu}^2(x)\right\|_{(\xi,\omega)}\right]^{1/2}$$

$$=D_M\left[\sum_{\mu=0}^{m}\left\|\sigma_{n,\mu}(x)\right\|_{(M),\omega}^2\right]^{1/2}$$

olur, burada

$$\left\|\sigma_{n,\mu}^2(x)\right\|_{(\xi,\omega)}=\inf\left(k>0:\int_{\boldsymbol{T}}\xi\left(k^{-1}\sigma_{n,\mu}^2(x)\right)\omega(x)dx\leq 1\right)$$

$$=\inf\left(k>0:\int_{\boldsymbol{T}}\Phi_M\left(k^{-1/2}\sigma_{n,\mu}(x)\right)\omega(x)dx\leq 1\right)$$

$$=\inf\left(t^2>0:\int_{\boldsymbol{T}}\Phi_M\left(t^{-1}\sigma_{n,\mu}(x)\right)\omega(x)dx\leq 1\right)$$

$$=\left\|\sigma_{n,\mu}(x)\right\|_{(M),\omega}^2\ \text{ olur.}$$

$\sigma_{n,\mu}$’ye Abel dönüşümünü uygularsak

$$\sigma_{n,\mu}(x) = \sum_{v=2^\mu}^{2^{\mu+1}-1} \left(1-\lambda_v^{(n)}\right) A_v(x)$$

$$= \sum_{v=2^\mu}^{2^{\mu+1}-1} \left(S_v(f,x) - S_{2^{\mu+1}-1}(f,x)\right)\left(\lambda_{v+1}^{(n)} - \lambda_v^{(n)}\right) +$$

$$+\left(S_{2^{\mu+1}-1}(f,x) - S_{2^\mu-1}(f,x)\right)\left(1-\lambda_{2^\mu}^{(n)}\right)$$

olur , öyleyse (4.15) eşitsizliğinden ve en iyi yaklaşım dizisinin monotonluğundan

$$\left\|\sigma_{n,\mu}(x)\right\|_{(M),\omega} \leq \sum_{v=2^\mu}^{2^{\mu+1}-1} \left\|\left(S_v(f,x) - S_{2^{\mu+1}-1}(f,x)\right)\right\|_{(M),\omega} \left|\lambda_{v+1}^{(n)} - \lambda_v^{(n)}\right| +$$

$$+\|S_{2^{\mu+1}-1}(f,x) - S_{2^\mu-1}(f,x)\|_{(M),\omega}\left|1-\lambda_{2^\mu}^{(n)}\right|$$

$$\leq E_{2^\mu-1}(f)_{M,\omega}\delta_{2^\mu,n}$$

olur. Bu durumda

$$\left\|\sum_{v=1}^{n}\left(1-\lambda_v^{(n)}\right)A_v(x)\right\|_{(M),\omega} \leq D_M\left[\sum_{\mu=0}^{m}\left\|\sigma_{n,\mu}(x)\right\|_{(M),\omega}^2\right]^{1/2}$$

$$\leq D_M\left(\sum_{\mu=0}^{m} E_{2^\mu-1}^2\,(f)_{M,\omega}\delta_{2^\mu,n}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Sonuç olarak $\Phi_M(\sqrt{u}\,)$ konveks olduğu durumda

$$R_n(f,\lambda)_{M,\omega} \leq \left\{\left[\sum_{v=0}^{m} E_{2^v-1}^2(f)_{M,\omega}\,\delta_{2^v-1}^2\right]^{1/2} + E_n(f)_{M,\omega}\right\}$$

eşitsizliğini elde ettik.

$\Phi_M(\sqrt{u})$ bir konkav fonksiyon olsun. Normun hesaplanmasında kullanılan $[25, s.92]$'deki formül kullanılarak

$$\left\|\sum_{v=1}^{n}\left(1-\lambda_v^{(n)}\right)A_v(x)\right\|_{(M),\omega} = \inf_{k>0} k^{-1}\left(1+\int_{T}\Phi_M\left(k\sum_{v=1}^{n}\left(1-\lambda_v^{(n)}\right)A_v(x)\right)\omega(x)dx\right)$$

eşitliği elde edilir. 4.2.3 Önermeyi ve (4.24)'ü uygulayarak,

$$\left\|\sum_{v=1}^{n}\left(1-\lambda_v^{(n)}\right)A_v(x)\right\|_{(M),\omega} = \inf_{k>0} k^{-1}\left(1+\int_{T}\Phi_M\left(D_M^2k^2\sum_{\mu=0}^{m}\sigma_{n,\mu}^2(x)\right)^{\frac{1}{2}}\omega(x)dx\right)$$

bulunur. $\Phi_M(\sqrt{u})$ konkav olduğundan

$$\left\|\sum_{v=1}^{n}\left(1-\lambda_v^{(n)}\right)A_v(x)\right\|_{(M),\omega} = \inf_{k>0} k^{-1}\left(1+\sum_{\mu=0}^{m}\int_{T}\Phi_M\left(D_M k\sigma_{n,\mu}(x)\right)\omega(x)dx\right)$$

eşitliği yazılabilir. $[25, s.74]$'deki Lemma 9.2'nin ispatı kullanılarak, aşağıdaki eşitsizlik kolayca görülebilir;

$$\int_{T}\Phi_M\left[\frac{u(x)}{\|u(x)\|_{(M),\omega}}\right]\omega(x)dx \leq 1.$$

Bu eşitsizlikle birlikte (4.23) ve (4.24) numaralı eşitsizlikler kullanılarak

$$\int_{T}\Phi_M\left(D_M k\sigma_{n,\mu}(x)\right)\omega(x)dx =$$

$$= C\int_{T}\Phi_M\left(\frac{\sigma_{n,\mu}(x)}{\left\|\sigma_{n,\mu}(x)\right\|_{(M),\omega}}\right)\Phi_M\left(D_{\mathrm{M}}k\left\|\sigma_{n,\mu}(x)\right\|_{(M),\omega}\right)\omega(x)dx$$

$$\leq \Phi_M\left(D'_{\varphi}k\left\|\sigma_{n,\mu}(x)\right\|_{M,\omega}\right)$$

olur. Sonuç olarak

$$\left\|\sum_{v=1}^{n}\left(1-\lambda_v^{(n)}\right)A_v(x)\right\|_{(M),\omega} \leq \inf_{k>0} k^{-1}\left(1+\sum_{\mu=0}^{m}\Phi_M\left(D'_{\mathrm{M}}k\left\|\sigma_{n,\mu}(x)\right\|_{(M),\omega}\right)\right)$$

$$\leq \inf_{k>0} k^{-1}\left(1+\sum_{\mu=0}^{m}\Phi_M\left(D'_M k E_{2^{\mu}-1}(f)_{M,\omega}\delta_{2^{\mu},n}\right)\right)$$

elde edilir ve bu da ispatı tamamlar. □

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmamızda elde ettiğimiz yeni sonuçlar, üçüncü ve dördüncü bölümde ana sonuçlar kısmında yer almaktadır.

Üçüncü bölümde, ağırlıklı Orlicz uzaylarında, Muckenhoupt koşulunu sağlayan ağırlık fonksiyonları kullanılarak, Weyl'in tanımlamış olduğu kesirli düzgünlük modülüne göre, periyodik fonksiyonlarla yaklaşımın düz teoremleri ispatlanmıştır. Bu teoremlerde ele aldığımız Orlicz uzayının üretildiği Young fonksiyonu kvazikonvekstir. Her konveks fonksiyonun kvazikonveks olduğu düşünüldüğünde, kvazikonveks üretici Young fonksiyonu ile elde ettiğimiz bu sonuçlar, klasik Orlicz uzayında elde edilen sonuçlara göre daha genel ve orijinaldir.

Dördüncü bölümde, ilk olarak, klasik Orlicz uzayından daha geniş olup benzer özelliklere sahip olan, Chen tarafından verilen Orlicz uzayı tanımlanmıştır. Bu tanımda Orlicz uzayının üretildiği Young fonksiyonunun konveks olma şartı yoktur. Bu durum, üzerinde çalıştığımız bu Orlicz uzayında incelenecek olan yaklaşım teorisi problemlerinde önemli bir koşulun iyileştirilmesini sağlamıştır. Ana sonuçlarda, bu tanımlama ile oluşturulan ağırlıklı Orlicz uzaylarında, Muckenhoupt koşulunu sağlayan ağırlık fonksiyonuna sahip periyodik fonksiyonlarla yaklaşımın bazı düz teoremleri ispatlanmıştır.

Chen tarafından verilen Orlicz uzaylarında yaklaşım teorisinin diğer önemli problemleri de incelenebilir.

6. KAYNAKLAR

[1] De Vore, R. A. and Lorentz, G. G. *Constructive Approximation*, New York, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, (1993).

[2] Timan, A. F., *Theory of Approximation of Functions of a Real Variable*, International Series of Monographs on Pure and Applied Mathematics 3, Oxford, London, New york: Pergamon Press and Macmillan, (1963).

[3] Gadjieva, E. A., "Investigation of the Properties of Functions with Quasimonotone Fourier Coefficients in Generalized Nikolskii-Besov Spaces", *Author's summary of dissertation, Tbilisi, Russian*, (1986).

[4] Ky, N. X., "On approximation by trigonometric polynomials in L_u^p-spaces", *Studia Sci.Math. Hungar*, 28, 183-188, (1993).

[5] Ditzian, Z. and Totik, V., *Moduli of Smoothness,* New York, Berlin and Heidelberg: Springer Ser. Comput. Math. 9, (1987).

[6] Mhaskar, H. N., *Introduction to the Theory Weighted Polynomial Approximation*, Series in Approximation and Decompositions 7, Singapore: World Sci., River Edge, NJ, (1996).

[7] Akgun, R. and Israfilov, D. M., "Approximation and moduli of fractional order in Smirnov- Orlicz classes", *Glasnik Matematicki*, 43, 121-136, (2008).

[8] Garidi, W., "On approximation by polynomials in Orlicz spaces", *Approx. Theory Appl* . 7(3), 97-110, (1991).

[9] Israfilov, D. M. and Akgun, R. "Approximation in weighted Smirnov-Orlicz classes", *J.Math. Kyoto Univ*. 46, 755-770, (2006).

[10] Israfilov, D. M. and Guven, A., "Approximation by trigonometric polynomials in weighted Orlicz spaces", *Studia Math*., 174(2), 147-168, (2006).

[11] Kokilashvili, V. M., “On analytic functions of Smirnov-Orlicz spaces”, *Studia Math.*, 31, 43-59, (1968).

[12] Kokilashvili, V. M., “A direct theorem on mean approximation of analytic functions by polynomials”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 10, 411-414, (1969).

[13] Ponomarenko, V. G., “Approximation of periodic functions in Orlicz spaces”, *Translated from Sibirskii Matematicheskii Zhurnal*, 7(6), 1337-1346, (1966).

[14] Ramazanov, A. R-K., “On approximation by polynomials and rational functions in Orlicz spaces”, *Anal. Math*. 10, 117-132, (1984).

[15] Rao, M. M. and Ren, Z. D., *Theory of Orlicz Spaces*, New York: Marcel Dekker, (1991).

[16] Runovski, K., “On Jackson type inequality in Orlicz classes”, *Rev. Mat. Comput*., 14, 395-404, (2001).

[17] Yildirir, Y. E. and Israfilov, D. M., “The properties of convolution type transforms in weighted Orlicz spaces”, *Glasnik Matematicki*, 45, 461-474, (2010).

[18] Yildirir, Y. E., “Approximation of periodic functions in weighted Orlicz spaces”, *Glasnik Matematicki*, 47(67), 401-413, (2012).

[19] Chen, Y. M., “On two functional spaces”, *Studia Math*. 24, 61-88, (1964).

[20] Akgun, R., “Some inequalities of trigonometric approximation in wieghted Orlicz spaces”, *Math. Slovaca*, 66(1), 1-18, (2016)

[21] Yildirir, Y. E. and Cetintas, R., “Trigonometric Approximation in Weighted Orlicz Spaces”, *Proc. Inst. Math. Mech.*, (in press) (2016).

[22] Bartle, Robert G. and Sherbert, Donald R., *Introduction To Real Analysis*, Third Edition, USA: John Wiley and Sons, (2000).

[23] Bary, N. K., *A Treatise on Trigonometric Series,* Oxford, London: Pergamon (1964).

[24] Balcı, M., *Reel Analiz,* Ankara: Ankara Üniversitesi, (2000).

[25] Krasnosel'skii, M. A. and Rutickii, Ya. B., *Convex Functions and Orlicz Spaces,* Netherland: P. Noordholf, Ltd-Groningen (1961).

[26] Genebashvili, I., Gogatishvili, A., Kokilashvili, V. and Krbec, M., *Weight Theory for Integral Transforms on Spaces of Homogeneous Type*, London: Longman, (1998).

[27] Böttcher, A. and Karlovich, Y. I., *Carleson Curves Muckenhoupt Weights and Toeplitz Operators*, Berlin: Springer Basel AG, (1997).

[28] Zygmund, A., *Trigonometric Series,* 2nd Edition, Vols. II, New York: Cambridge University Press, (1959).

[29] Samko, S. G., Kilbas, A. A and Marichev, O. I., *Fractional integrals and derivates, Theory and applications,* Gordon and Breach Science Publishers, (1993).

[30] Wheeden, R. L. and Zygmund, A., *Measure and Integral*, New York, Basel: Marcel Dekker, (1977).

[31] Akgun, R. and Israfilov, D. M., "Approximation of weighted Orlicz spaces", *Math. Slovaca*, 61(4), 601-608, (2011).

[32] Yildirir, Y. E, Cetintas, R., "Approximation theorems in weighted Orlicz spaces", *J. Math. Sci. Adv. Appl.*, 14(1), 35-49, (2012).

[33] Marcinkiewicz, J., "Sur les multiplicatuers des series de Fourier", *Studia Mathematica,* 8, 78-91, (1939)

[34] Kurtz, D. S., "Littlewood-Paley and multiplier theorems on weighted Lp spaces", *Trans. Amer. Math. Soc., 259*(1), 235-254, (1980).

[35] Rao, M. M. and Ren, Z. D., *Application of Orlicz spaces*, New York, Basel: Marcel Dekker, (2002)

[36] Sunouchi, G. I., "On the Walsh-Kaczmarz series", Proc. Amer. Math. Soc. 2, 5-11, (1951)

[37] Zygmund, A., *Trigonometric Series,* 2nd Edition, Vols. I, New York: Cambridge University Press, (1959).

[38] Akgun, R., "Sharp Jackson and converse theorems of trigonometric approximation in wieghted Lebesgue spaces", *Proc. A. Razmadze Math. Inst*., 152, 1-18, (2010).

[39] Akgün, R. and Koç, H., "Simultaneous approximation of functions in Orlicz spaces with Muckenhoupt weights", *Complex Var. Elliptic Equ.,* 61(8), 1107-1115, (2016)

[40] Butzer, P. L., Dyckhoff, H., G¨örlich, E. and Stens, R. L., "Best trigonometric approximation, fractional order derivates and Lipschitz classes", *Canad. J. Math.,* 29(4), 781-793, (1977).

[41] Taberski, R., "Differences, moduli and derivates of fractional orders", Comment, Math. Prace Mat., 19(2), 389-400, (1976/77).

[42] Khabazi, M., "The mean convergence of trigonometric Fourier series in weighted Orlicz classes"*, Proc. A. Razmadze Math. Inst*., 129, 65-76, (2002).