T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

FİBONACCİ SAYILARI VE ÜÇGENSEL GRAFLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HURİYE KORKMAZ

BALIKESİR, OCAK - 2016

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

FİBONACCİ SAYILARI VE ÜÇGENSEL GRAFLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HURİYE KORKMAZ

Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Recep ŞAHİN (Tez Danışmanı)
Doç. Dr. Sebahattin İKİKARDEŞ
Doç. Dr. Musa DEMİRCİ

BALIKESİR, OCAK - 2016

KABUL VE ONAY SAYFASI

Huriye KORKMAZ tarafından hazırlanan "**FİBONACCİ SAYILARI VE ÜÇGENSEL GRAFLAR**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 13.01.2016 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Prof. Dr. Recep ŞAHİN	....
Üye Doç. Dr. Sebahattin İKİKARDEŞ	....
Üye Doç. Dr. Musa DEMİRCİ	....

Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Doç. Dr. Necati ÖZDEMİR ....

ÖZET

FİBONACCİ SAYILARI VE ÜÇGENSEL GRAFLAR
YÜKSEK LİSANS TEZİ
HURİYE KORKMAZ
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. RECEP ŞAHİN)

BALIKESİR, OCAK - 2016

Bu tezin amacı üçgensel graflar yardımıyla Fibonacci özdeşliklerinin ispatlarını vermektir.

Tez üç bölümden oluşmuştur.

Birinci bölümde Fibonacci hakkında bilgi ve Fibonacci ve Lucas dizilerinin tanımı ile Fibonacci özdeşlikleri verilmiştir.

İkinci bölümde $\mathcal{F}$ fonksiyonunun tanımı ve ilgili teoremler verilmiş. Ayrıca Fibonacci özdeşliklerinin $\mathcal{F}$ fonksiyonu olduğu gösterilmiştir.

Son bölümde önce üçgensel graf tanımı verilmiştir. Daha sonra Fibonacci özdeşliklerinin üçgensel graflar yardımıyla ispatları incelenmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Fibonacci sayıları, Fibonacci özdeşlikleri, Üçgensel graf.

ABSTRACT

FIBONACCİ NUMBERS AND TRIANGLE GRAPHS
MSC THESIS
HURİYE KORKMAZ
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS

(SUPERVISOR: PROF.DR.RECEP ŞAHİN)

BALIKESİR, JANUARY 2016

The aim of this thesis is to give the proof of the Fibonacci equalities by the triangle graphs.

This thesis consist of three chapter.

In the first chapter, it is given the information about Fibonacci the definition of the Fibonacci and Lucas sequences and their equalities.

In the second chapter, it is given the definition of $\mathcal{F}$ function the theorems related with the $\mathcal{F}$ function. Also, it is showed that Fibonacci equalities are $\mathcal{F}$ functions.

In the last chapter, firstly, it is given the definition of the triangel graph. Later, it is investigated the proofs of the Fibonacci equalities by the triangle graphs.

KEYWORDS: Fibonacci numbers, Fibonacci equalities, Triangle graph.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

TABLO LİSTESİ

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

F_n	Fibonacci dizisi
L_n	Lucas dizisi
$X(n)$	$\mathbb{N}\cup\{0\}$ üzerinde tanımlı $\mathcal{F}$ fonksiyon
e_n	n-inci vektör
$A(n)$	Bir $\mathcal{F}$ fonksiyonu
$B(n)$	Bir $\mathcal{F}$ fonksiyonu
(x,y)	İki boyutlu uzayda vektör
(x,y,z)	Üç boyutlu uzayda vektör

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın ortaya çıkarılmasında akademik bilgi ve birikimiyle bana destek olan danışman hocam Prof. Dr. Recep Şahin'e; çalışmamın birçok aşamasında yardımını gördüğüm hocalarım Doç. Dr. Sebahattin İkikardeş ve Doç. Dr. Fırat Ateş'e içtenlikle teşekkür ediyorum.

Bugünlere gelmemde emeklerini esirgemeyen, her zaman yanımda olup, kahrımı çeken aileme sonsuz teşekkürler.

1. ÖN BİLGİ

İtalyan matematikçi Leonardo de Pisa, gerçek ismi yerine, Filius Bonaccio (Bonaccio'nun oğlu) kelimelerinin kısaltılmışı Fibonacci ile bilinir. Fibonacci Arap sayı sistemi konusunda kafa yordu ve Liber Abaci (Hesaplama Yöntemleri, Abaküs Kitabı) adlı eserini 1202 yılında yayınladı. Bu kitap, Fibonacci serisi (Fibonacci sayı dizisi) nin temeli olan, bir çift tavşanın doğurarak neslini çoğaltmasını ele alan bir problemi de anlatıyordu.

Fibonacci'nin ünlü sorusu:

"Bir çift yetişkin tavşan, her ay yeni bir çift tavşan yavrulamaktadır. Bu yavrular, bir ayın sonunda erişkin hale gelmekte ve sonraki her ay yeni bir çift yavru yapmaktadır. Herhangi bir ay sonunda yavruların ve yetişkin tavşanların sayısını bulunuz. Bu süre zarfında tavşanların hiçbirinin ölmediği varsayılacaktır."

Daha sonra Edouard Lucas, Fibonacci dizisini yeniden keşfetti ve bu diziyi gerçek bulucusuna atfetti [1] .

1.1 Fibonacci ve Lucas Sayı Dizileri

Fibonacci sayı dizisi $F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ başlangıç koşulları ile verilen, $n \geq 0$ tamsayı olmak üzere genel terimi

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

olan bir dizidir. Burada

$$0,\ 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,\ldots$$

sayıları Fibonacci Sayı dizisini oluşturur[1].

Benzer şekilde Lucas sayı dizisi $L_0 = 2$ ve $L_1 = 1$ başlangıç koşulları ile verilen, $n \geq 0$ tamsayı olmak üzere genel terimi

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$$

olan bir dizidir.

Bu sayı dizisi

$$2,1,3,4,7,11,18,29,47,76,123,199,322,521,\ldots$$

şeklinde oluşmuştur [1].

Fibonacci ve Lucas sayı dizileri ile ilgili bağıntılardan bazıları aşağıdaki gibidir [2].

Tablo 1.1: Fibonacci ve Lucas sayı özdeşlikleri.

$F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2$	(1.1)
$F_{n+2}F_{n-1} = F_{n+1}^2 - F_n^2$	(1.2)
$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = \left(-1\right)^n$	(1.3)
$F_n = F_m F_{n+1-m} + F_{m-1}F_{n-m}$	(1.4)
$L_{n+m} + \left(-1\right)^m L_{n-m} = L_m L_n$	(1.5)
$L_{2n} + 2\left(-1\right)^n = L_n^2$	(1.6)
$L_{n-1} + L_{n+1} = 5F_n$	(1.7)
$L_m F_n + L_n F_m = 2F_{n+m}$	(1.8)
$F_n L_m - L_n F_m = 2\left(-1\right)^m F_{n-m}$	(1.9)
$L_{n+m} - \left(-1\right)^m L_{n-m} = 5F_m L_n$	(1.10)
$L_n^2 - 2L_{2n} = -5F_n^2$	(1.11)
$L_{2n} - 2\left(-1\right)^n = 5F_n^2$	(1.12)
$5F_n^2 - L_n^2 = 4\left(-1\right)^{n+1}$	(1.13)
$F_{n-1} + F_{n+1} = L_n$	(1.14)
$F_{n+2} - F_{n-2} = L_n$	(1.15)
$F_n + L_n = 2F_{n+1}$	(1.16)
$F_{2n} = F_n L_n$	(1.17)
$F_{n+1} + L_{n+1} - F_n L_n = F_{2n+1}$	(1.18)

Tablo 1.1:(devamı)

$F_{n+m}+(-1)^m F_{n-m}=L_m F_n$	(1.19)
$F_{n+m}-(-1)^m F_{n-m}=L_n F_m$	(1.20)
$F_{n+1}L_n=F_{2n+1}-1$ (n tek)	(1.21)
$3F_n+L_n=2F_{n+2}$	(1.22)
$5F_n+3L_n=2L_{n+2}$	(1.23)
$F_{n+1}L_n=F_{2n+1}+1$ (n çift)	(1.24)
$L_n=F_n+2F_{n-1}$	(1.25)
$L_n=F_{n+3}-2F_n$	(1.26)

2. $\mathcal{F}$ FONKSİYONUN TANIMI VE ÖZELLİKLERİ

2.1 $\mathcal{F}$ Fonksiyonu

2.1.1 Tanım: $\mathbb{N}\cup\{0\}$ kümesi üzerinde tanımlı bir $X(n)$ fonksiyonu

$$X(n+3)=2\left[X(n+2)+X(n+1)\right]-X(n) \qquad (2.1)$$

indirgeme bağıntısını sağlıyorsa $X(n)$ fonksiyonuna $\mathcal{F}$ fonksiyonu denir [2].

Şimdi aşağıdaki fonksiyonların birer $\mathcal{F}$ fonksiyonu olduğunu gösterelim.

2.1.2 Önerme: $X(n)=(-1)^n$ bir $\mathcal{F}$ fonksiyonudur [2].

İspat: $X(n)=(-1)^n$ fonksiyonu için (2.1) eşitliğini yazalım. Burada

$$(-1)^{n+3}=2[(-1)^{(n+2)}+(-1)^{(n+1)}]-(-1)^n$$

bulunur. Şimdi

$$A(n)=(-1)^{n+3} \text{ ve } \quad B(n)=2[(-1)^{(n+2)}+(-1)^{(n+1)}]-(-1)^n$$

diyelim. Böylece

$$\begin{aligned} A(n) &= (-1)^n(-1)^3 \\ &= -(-1)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{B}(n) &= 2[(-1)^n(-1)^2+(-1)^n(-1)^1]-(-1)^n \\ &= 2[(-1)^n-(-1)^n]-(-1)^n \\ &= -(-1)^n \end{aligned}$$

bulunur.

Buradan da $A(n)=B(n)$ olduğu görülür.

2.1.3 Önerme: $X(n)=F_n^2$ bir $\mathcal{F}$ fonksiyonudur [2].

$F_n^2=F_{n-1}F_{n+1}-(-1)^n$ olduğunu biliyoruz. Burada (2.1) eşitliği kullanılırsa

$$F_{n+3}^2=2\left[F_{n+2}^2+F_{n+1}^2\right]-F_n^2$$

olarak bulunur. Bu eşitlikte

$$A(n)=\mathrm{F}_{n+3}^2 \quad \text{ve} \quad B(n)=2\left[F_{n+2}^2+F_{n+1}^2\right]-F_n^2$$

diyelim. Böylece

$$\begin{aligned}
A(n)&=\mathrm{F}_{n+3}^2\\
&=F_{(n+2)}F_{(n+4)}-(-1)^{(n+3)}\\
&=(F_{(n+1)}+F_n)(3F_{(n+1)}+F_n)+(-1)^n\\
&=3F_{n+1}^2+5F_nF_{n+1}+2F_n^2+(-1)^n
\end{aligned} \tag{2.2}$$

ve

$$\begin{aligned}
B(n)&=2\left[F_{n+2}^2+F_{n+1}^2\right]-F_n^2\\
&=2\left[\left(F_{n+1}F_{n+3}-(-1)^{n+2}\right)+\left(F_nF_{n+2}-(-1)^{n+1}\right)\right]-\left[\left(F_{n-1}F_{n+1}\right)-(-1)^n\right]\\
&=2[F_{(n+1)}(2F_{(n+1)}+F_n)-(-1)^n+F_n(F_{(n+1)}+F_n)+(-1)^n]-[(F_{(n-1)}F_{(n+1)})-(-1)^n]\\
&=2\left[2F_{n+1}^2+2F_nF_{n+1}+F_n^2\right]-\left(F_{n-1}F_{n+1}\right)+(-1)^n\\
&=4F_{(n+1)}^2+4F_nF_{(n+1)}+2F_n^2-(F_{(n-1)}F_{(n+1)})+(-1)^n
\end{aligned} \tag{2.3}$$

bulunur.

(2.2) ve (2.3) eşitliklerinden

$$3F_{n+1}^2+5F_nF_{n+1}+2F_n^2+\left(-1\right)^n=4F_{n+1}^2+4F_nF_{n+1}+2F_n^2-\left(F_{n-1}F_{n+1}\right)+\left(-1\right)^n$$

$$F_nF_{n+1}=F_{n+1}^2-\left(F_{n+1}F_{n-1}\right)$$

$$=(F_{(n+1)}+F_n)F_n-(F_{(n+1)}F_{(n-1)})+(-1)^n$$

$$=\left(F_{n+1}+F_n\right)F_n-\left(F_{n+1}F_{n-1}\right)-\left(-1\right)^n$$

$$=F_{n+1}F_n+F_{n-1}F_{n+1}-\left(-1\right)^n-\left(F_{n+1}F_{n-1}\right)+\left(-1\right)^n$$

$$=F_{n+1}F_n+F_{n-1}F_{n+1}-(-1)^n-(F_{n+1}F_{n-1})+(-1)^n$$

$$=F_nF_{n+1}$$

olarak bulunur ve ispat biter.

2.1.4 Önerme: $X\left(n\right)=F_{2n}$ bir $\mathcal{F}$ fonksiyonudur [2].

İspat: $X\left(n\right)=F_{2n}$ fonksiyonu için (2.1) eşitliği kullanılırsa

$$F_{2(n+3)}=2\left[F_{2(n+2)}+F_{2(n+1)}\right]-F_{2n}$$

elde edilir. Burada

$$F_{2n}=F_n^2+2F_{(n-1)}F_n \qquad \text{ve} \qquad F_n^2=F_{(n-1)}F_{(n+1)}-(-1)^n$$

bağıntılarından yararlanalım. Böylece

$$F_{2(n+3)}=F_{(n+3)}^2+2F_{(n+2)}F_{(n+3)}$$

$$=F_{n+4}F_{n+2}-\left(-1\right)^{n+3}+2F_{n+2}F_{n+3}$$

$$=\left(3F_{n+1}+2F_n\right)\left(F_{n+1}+F_n\right)+\left(-1\right)^n+2\left(F_{n+1}+F_n\right)\left(2F_{n+1}+F_n\right)$$

$$=18F_nF_{(n+1)}+11F_n^2+8(-1)^n \tag{2.4}$$

$$F_{2(n+2)} = F_{n+2}^2 + 2F_{n+1}F_{n+2}$$

$$= F_{(n+3)}F_{(n+1)} - (-1)^{(n+2)} + 2F_{(n+1)}F_{(n+2)}$$

$$= \left(2F_{n+1} + F_n\right)F_{n+1} - \left(-1\right)^n + 2F_{n+1}\left(F_{n+1} + F_n\right)$$

$$= 4F_n^2 + 7F_nF_{(n+1)} + 3(-1)^n \tag{2.5}$$

$$F_2(n+1) = F_{(n+1)}^2 + 2F_{(n+1)}F_n$$

$$= 3F_nF_{(n+1)} + (-1)^n + F_n^2 \tag{2.6}$$

bulunur (2.4),(2.5) ve (2.6) eşitliklerinden

$$18F_nF_{n+1} + 11F_n^2 + 8\left(-1\right)^n = 2\left[5F_n^2 + 10F_nF_{n+1} + 4\left(-1\right)^n\right] - F_n^2 - 2F_{n-1}F_n$$

$$2F_n^2 = 2F_{n+1}F_n - 2F_nF_{n-1}$$

$$2F_n^2 = 2F_n\left(F_{n+1} - F_{n-1}\right)$$

$$F_n = F_n$$

elde edilir.

2.1.5 Önerme: $r \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $X\left(n\right) = F_{n+r}F_n$ bir $\mathcal{F}$ fonksiyondur [2].

İspat: $X\left(n\right) = F_{n+r}F_n$ fonksiyonu için (2.1) eşitliği kullanılırsa

$$F_{n+r+3}F_{n+3} = 2\left[F_{n+r+2}F_{n+2} + F_{n+r+1}F_{n+1}\right] - F_{n+r}F_n$$

elde edilir. Burada $n + r = m$ olsun.

Böylece

$$F_{m+3}F_{n+3} = 2\left[F_{m+2}F_{n+2} + F_{m+1}F_{n+1}\right] - F_mF_n$$

bulunur. Şimdi,

$$A(n) = F_{m+3}F_{n+3} \quad \text{ve} \quad B(n) = 2\left[F_{m+2}F_{n+2} + F_{m+1}F_{n+1}\right] - F_mF_n$$

diyelim. Buradan

$$\begin{aligned} A(n) &= F_{m+3}F_{n+3} \\ &= \left(2F_{m+1} + F_m\right)\left(2F_{n+1} + F_n\right) \\ &= 4F_{m+1}F_{n+1} + 2F_{m+1}F_n + 2F_{n+1}F_m + F_mF_n \end{aligned} \tag{2.7}$$

ve

$$\begin{aligned} \mathrm{F}_{m+2}\, F_{n+2} &= \left(F_{m+1} + F_m\right)\left(F_{n+1} + F_n\right) \\ &= F_{m+1}F_{n+1} + F_{m+1}F_n + F_{n+1}F_m + F_mF_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(n) &= 2\left[F_{m+1}F_{n+1} + F_{m+1}F_n + F_{n+1}F_m + F_mF_n + F_{m+1}F_{n+1}\right] - F_mF_n \\ &= 4F_{m+1}F_{n+1} + 2F_{m+1}F_n + 2F_{n+1}F_m + F_mF_n \end{aligned} \tag{2.8}$$

elde edilir.

(2.7) ve (2.8) eşitliklerinden yararlanarak

$$A(n) = B(n)$$

bulunur.

2.1.6 Önerme: $X(n) = L_n^2$ **,** $X(n) = L_{n+r}L_n$ **,** $X(n) = L_{2n}$ birer $\mathcal{F}$ fonksiyonudur [2].

İspat: : Lucas özdeşliklerinin ispatı yukarıda ispatlarını yaptığımız Fibonacci özdeşliklerinin ispatıyla benzerdir.

2.2 $\mathcal{F}$ Fonksiyonunun Temel Özellikleri

2.2.1 Yardımcı Teorem: $A(n)=B(n)$ $\mathcal{F}$ fonksiyonları ve $r \in \mathbb{Z}$ sabit bir tamsayı olsun. Bu durum da

$$X(n)=A(n+r_0) \quad Y(n)=r_0A(n) \quad \text{ve} \quad A(n)\pm B(n) \quad \text{de}$$

$\mathcal{F}$ fonksiyondurlar [2].

2.2.2 Yardımcı Teorem: $A(n)=B(n)$ birer $\mathcal{F}$ fonksiyonu olsun.

$$A(n)=B(n) \Leftrightarrow k=0,1,2 \text{ için } \mathrm{A}(k)=B(k)$$

olmasıdır [2].

2.2.3 Yardımcı Teorem: $A(n)=B(n)$, $\mathbb{N}\cup\{0\}$ kümesi üzerinde tanımlı fonksiyonlar olsun.

$A(n)=B(n)$ nin her ikisi ya

$$i)\,X(n+2)=-X(n+1)+X(n)$$

ya da

$$ii)\,X(n+3)=-2X(n+2)+2X(n+1)+X(n)$$

eşitliklerini sağlarsa

$$A(n)=B(n) \Leftrightarrow k=0,1,2 \quad \text{için} \quad A(k)=B(k)$$

olur [2].

2.3 Catalan Özdeşliğinin $\mathcal{F}$ Fonksiyonlarla İspatı

2.3.1 Yardımcı Teorem: $4\left(-1\right)^{3-r}+F_{r+3}F_{r-3}-F_r^2=0$ dir [2].

İspat: $r\geq 0$ için $A(r)=4(-1)^{(3-r)}+F_{(r+3)}F_{(r-3)}-F_r^2$ olsun.

Yardımcı Teorem 2.2.1 den $A\left(r\right)$ bir $\mathcal{F}$ fonksiyondur. Yardımcı Teorem 2.2.2 den tüm r değerleri için $A\left(r\right)$=0 dır.

2.3.2 Teorem: (Catalan Özdeşliği)

$$F_n^2-F_{(n+r)}F_{(n-r)}=(-1)^{(n-r)}F_r^2$$

dir [2].

İspat:

Burada

$$F_{-m}=\left(-1\right)^{m+1}F_m$$

olarak alınır. Ayrıca $r\geq 0$ ve $n\geq 1$ dir.

Şimdi

$$A\left(n\right)=F_n^2-F_{n+r}F_{n-r} \quad \text{ve} \quad \mathrm{B}(n)=(-1)^{(n-r)}F_r^2$$

diyelim.

Yardımcı Teorem 2.2.1 den $A\left(n\right)$ ve $B\left(n\right)$ birer $\mathcal{F}$ fonksiyondur.

Burada $n=1,2,3$ için

$$A\left(1\right)=F_1^2-F_{1+r}F_{1-r} \quad \text{ve} \quad B\left(1\right)=\left(-1\right)^{1-r}F_r^2$$

$$A\left(2\right)=F_2^2-F_{2+r}F_{2-r} \quad \text{ve} \quad B\left(2\right)=\left(-1\right)^{2-r}F_r^2$$

$$A(3)=F_3^2-F_{3+r}F_{3-r} \qquad \text{ve} \qquad B(3)=(-1)^{3-r}F_r^2$$

olur.

$r\leq 3$, $n=1,2,3$ iken $\mathrm{A}(n)=B(n)$ olduğu kolayca görülür.

Burada

$r=0$ ise

$$\mathrm{A}(1)=F_1^2-F_{(1+r)}F_{(1-r)}=F_1^2-F_{(1+0)}F_{(1-0)}=1^2-1.1=0$$

$$B(1)=(-1)^{1-r}F_r^2=(-1)^{1-0}F_0^2=(-1).0=0$$

$$A(1)=B(1) \ ,$$

$$A(2)=F_2^2-F_{2+r}F_{2-r}=F_2^2-F_{2+0}F_{2-0}=1^2-1.1=0$$

$$B(2)=(-1)^{(2-r)}F_r^2=(-1)^{(2-0)}F_0^2=0$$

$$A(2)=B(2)$$

ve

$$A(3)=F_3^2-F_{(3+r)}F_{(3-r)}=F_3^2-F_{(3+0)}F_{(3-0)}=2^2-2.2=0$$

$$B(3)=(-1)^{3-r}F_r^2=(-1)^{3-0}F_0^2=0$$

$$A(3)=B(3)$$

bulunur.

Eğer $r=1$ ise

$$A(1)=F_1^2-F_{(1+r)}F_{(1-r)}=F_1^2-F_{(1+1)}F_{(1-1)}=1^2-1.0=1$$

$$B(1)=(-1)^{(1-r)}F_r^2=(-1)^{(1-1)}F_1^2=1$$

$$A(1)=B(1) \ ,$$

$$A(2)=F_2^2-F_{(2+r)}F_{(2-r)}=F_2^2-F_{(2+1)}F_{(2-1)}=1^2-2.1=(-1)$$

$$B(2)=(-1)^{2-r}F_r^2=(-1)^{2-1}F_1^2=(-1)$$

$$A(2)=B(2)$$

ve

$$A(3)=F_3^2-F_{(3+r)}F_{(3-r)}=F_3^2-F_{(3+1)}F_{(3-1)}=2^2-3.1=1$$

$$B(3)=(-1)^{3-r}F_r^2=(-1)^{3-1}F_1^2=1$$

$$A(3)=B(3)$$

bulunur.

Eğer $r=2$ ise

$$A(1)=F_1^2-F_{(1+r)}F_{(1-r)}=F_1^2-F_{(1+2)}F_{(1-2)}=1^2-2.(-1)^{(1+1)}.1=(-1)$$

$$B(1)=(-1)^{1-r}F_r^2=(-1)^{1-2}F_2^2=(-1).1=(-1)$$

$$A(1)=B(1)$$

$$A(2)=F_2^2-F_{2+r}F_{2-r}=F_2^2-F_{2+2}F_{2-2}=1^2-3.0=1$$

$$B(2)=(-1)^{(2-r)}F_r^2=(-1)^{(2-2)}F_2^2=1$$

$$\mathrm{A}(2)=B(2)$$

ve

$$A(3)=F_3^2-F_{(3+r)}F_{(3-r)}=F_3^2-F_{(3+2)}F_{(3-2)}=2^2-5.1=(-1)$$

$$B(3)=(-1)^{(3-r)}F_r^2=(-1)^{(3-2)}F_2^2=(-1)$$

$$A(3)=B(3)$$

bulunur.

Eğer $r=3$ ise

$$A(1)=F_1^2-F_{(1+r)}F_{(1-r)}=F_1^2-F_{(1+3)}F_{(1-3)}=1^2-3.(-1)^{(1+2)}.1=4$$

$$B(1)=(-1)^{1-r}F_r^2=(-1)^{1-3}F_3^2=(-1)^{-2}.4=4$$

$$A(1)=B(1)\ ,$$

$$A(2)=F_2^2-F_{(2+r)}F_{(2-r)}=F_2^2-F_{(2+3)}F_{(2-3)}=1^2-5.(-1)^{(1+1)}.1=-4$$

$$B(2)=(-1)^{2-r}F_r^2=(-1)^{2-3}F_3^2=(-1).4=-4$$

$$A(2)=B(2)$$

ve

$$A(3)=F_3^2-F_{3+r}F_{3-r}=F_3^2-F_{3+3}F_{3-3}=2^2-8.0=4$$

$$B(3)=(-1)^{3-r}F_r^2=(-1)^{3-3}F_3^2=4$$

$$A(3)=B(3)$$

bulunur. Böylece

$r\geq 4$ iken Yardımcı Teorem 2.2.2 den $A(n)=B(n)$ elde edilir.

$$\mathrm{A}(3)=4+F(-1)^{(3-r)}F_{(r+3)}F_{(r-3)} \quad \text{ve} \quad B(3)=(-1)^{(3-r)}F_r^2$$

$$\mathrm{A}(3)-B(3)=4+(-1)^{(3-r)}F_{(r+3)}F_{(r-3)}-(-1)^{(3-r)}F_r^2$$

Yardımcı Teorem 2.3.1 den $F_{r+3}F_{r-3}-F_r^2=-4(-1)^{3-r}$ dir.

$$\mathrm{A}(3)-B(3)=4+(-1)^{(3-r)}[\mathrm{F}_{(r+3)}\,F_{(r-3)}-F_r^2]$$

$$=4+(-1)^{(3-r)}[-4(-1)^{(3-r)}]$$

$$=4-4=0$$

$A(3)=B(3)$ elde edilir.

Aynı şekilde;

$$A(1)=1+(-1)^{(1-r)}F_{r+1}F_{r-1} \quad \text{ve} \quad B(1)=(-1)^{1-r}F_r^2$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}(1)-B(1) &= 1+(-1)^{(1-r)}F_{r+1}F_{r-1}-(-1)^{(1-r)}F_r^2 \\
&= 1+(-1)^{1-r}\left[F_{r+1}F_{r-1}-F_r^2\right] \\
&= 1+(-1)^{1-r}\left[(-1)^r\right] \\
&= 1+(-1)=0
\end{aligned}$$

$\mathrm{A}(1)=B(1)$ elde edilir.

$$\mathrm{A}(2)=1+(-1)^{2-r}F_{r+2}F_{r-2} \quad \text{ve} \quad B(2)=(-1)^{2-r}F_r^2$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}(2)-\mathrm{B}(2) &= 1+(-1)^{2-r}F_{r+2}F_{r-2}-(-1)^{2-r}F_r^2 \\
&= 1+(-1)^{2-r}\left[F_{r+2}F_{r-2}-F_r^2\right] \\
&= 1+(-1)^{2-r}\left[(F_{r+1}+F_r)(F_r-F_{r-1})-F_r^2\right] \\
&= 1+(-1)^{2-r}\left[F_{r+1}F_r+F_r^2-F_{r+1}F_{r-1}-F_rF_{r-1}-F_r^2\right] \\
&= 1+(-1)^{2-r}\left[F_r^2+F_{r-1}F_r-F_{r+1}F_{r-1}-F_rF_{r-1}\right] \\
&= 1+(-1)^{2-r}\left[(F_r+F_{r-1})F_r-F_{r+1}F_{r-1}-F_rF_{r-1}\right] \\
&= 1+(-1)^{2-r}\left[F_r^2-F_{r+1}F_{r-1}\right] \\
&= 1+(-1)^{2-r}\left[F_r^2-F_r^2-(-1)^r\right] \\
&= 1+(-1)^{2-r}\left[-(-1)^r\right]
\end{aligned}$$

bulunur.

Burada,

r tek sayı ise

$$\mathrm{A}(2)-\mathrm{B}(2)=1+(-1)\left[-(-1)\right]=1-1=0$$

ve r çift sayı ise

$$\mathrm{A}(2)-\mathrm{B}(2)=1+(+1)\left[-(+1)\right]=1-1=0$$

elde edilir.

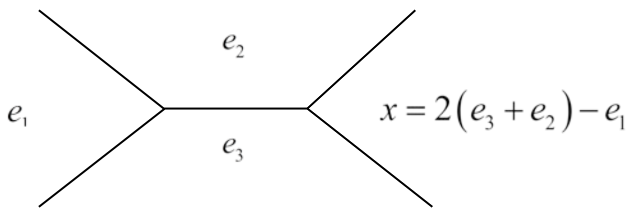
3. ÜÇGENSEL GRAFLAR

3.1 Üçgensel Graf Oluşturma

e_1, e_2, e_3 aşağıdaki üçgensel graftaki yerleştirilen vektörler olsun.

$$e_4 = 2(e_3 + e_2) - e_1$$

formülüyle verilen vektör olsun.



Şekil 3.1: (e_1,e_2,e_3) ile oluşturulan üçgensel graf .

Böyle bir e_4 vektörüne e_3, e_2 ve e_1 ile $\mathcal{F}$ üretilen vektör denir. e_4 vektörü için

$$e_4 = \langle e_3, e_2 : e_1 \rangle = 2(e_3 + e_2) - e_1 \qquad (3.1)$$

sembolünü kullanacağız [2].

Burada $\langle e_3, e_2 : e_1 \rangle \neq \langle e_2, e_1 : e_3 \rangle \neq \langle e_1, e_3 : e_2 \rangle$ olduğuna dikkat edelim.

(3.1) bağıntısının (2.1) de verilen indirgeme bağıntısının bir genelleme bağıntısı olduğu kolayca görülebilir.

Böyle devam edersek

$$e_1, e_2, e_3, e_4 = 2(e_3 + e_2) - e_1, e_5 = 2(e_4 + e_3) - e_2, \ldots \qquad (3.2)$$

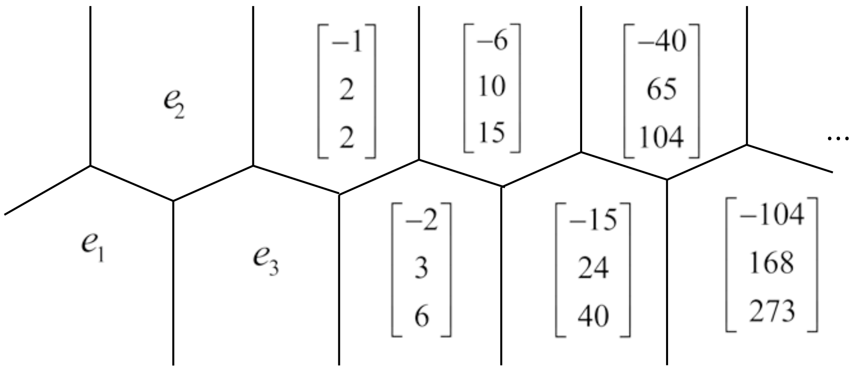
$e_{n+1} = 2(e_n + e_{n-1}) - e_{n-2}$,… şeklinde sonsuz elemanlı vektörlerin bir dizisini oluşturabiliriz.

Bu diziyi $F(e_1, e_2, e_3)$ ile göstereceğiz.

$\{e_1, e_2, e_3\}$ vektörleri $\mathbb{R}^3$ doğal tabanı seçilirse ilk dokuz vektör aşağıdaki gibi bulunur.

$$e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1), e_4 = (-1,2,2), e_5 = (-2,3,6)\ \ldots.$$

Burada $e_2, e_4, e_6, \ldots, e_{2n}$ grafın üst yarısında, $e_1, e_3, e_5, \ldots. e_{2n+1}$ grafın alt yarısında yer alır.



Şekil 3.2: (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1) ile oluşturulan üçgensel graf .

Şekil 3.2 kullanılarak aşağıdakiler kolayca görülebilir:

(a) $e_n = (a,b,c)$ vektörlerinin her bir girdisi iki Fibonacci sayısının çarpımıdır. İlk dokuz terim için vektörler

$$\left(-F_n F_{n+1}, F_n F_{n+2}, F_{n+1} F_{n+2}\right) \tag{3.3}$$

biçimli olurlar.

(b) $e_n = (a,b,c)$ nin normu $a+b+c$ toplamıdır. Burada $\mathrm{N}((x_1, x_2, x_3))$ normu

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

olarak tanımlanır.

(c) $e_{2n} - e_{2n-2}$ nin girdilerinin mutlak değeri (üçgensel grafın üst yarısında) ve $e_{2n+1} - e_{2n-1}$ (üçgensel grafın alt yarısında) Fibonacci sayılarıdır.

Örneğin; $\left(-40,65,104\right) - \left(-6,10,15\right) = \left(-F_9, \mathrm{F}_{10}, \mathrm{F}_{11}\right)$ bu bize vektörlerin her bir girdisini Fibonacci sayılarının bir toplamı olarak yazmamıza yardımcı olur.

(a) ve (b) den $n \leq 6$ için

$$(F_n F_{(n+1)})^2 + (F_n F_{(n+2)})^2 + (F_{(n+1)} F_{(n+2)})^2 = (-F_n F_{(n+1)} + F_n F_{(n+2)} + F_{(n+1)} F_{(n+2)})^2 \qquad (3.4)$$

olduğu görülür ki bu bize aşağıdaki yardımcı teoremin ilk kısmının ispatını verir.

Ayrıca

$$-F_n F_{n+1} + F_n F_{n+2} + F_{n+1} F_{n+2} = F_n^2 + F_{n+1} F_{n+2}$$

olduğu unutulmamalıdır.

(a) ve (b) nin iyi incelenmesiyle ilk dokuz vektörün her bir girdisinin Fibonacci sayılarının çarpımlarının toplamı olarak yazılabileceği ve dolayısıyla aşağıdaki yardımcı teoremin $\left(ii\right) - \left(v\right)$ kısımlarının olduğu görülebilir [2].

3.1.1 Yardımcı Teorem: F_{n} n**.** Fibonacci sayısı olsun**,** buna göre aşağıdaki özdeşlikler vardır.

$\left(i\right)\left(F_n F_{n+1}\right)^2 + \left(F_n F_{n+2}\right)^2 + \left(F_{n+1} F_{n+2}\right)^2 = \left(F_n^2 + F_{n+1} F_{n+2}\right)^2$

$\left(ii\right) F_{2n-3} F_{2n-2} = F_1 + F_5 + \ldots + F_{4n-7}$

$\left(iii\right) F_{2n-3} F_{2n-1} = 1 + F_2 + F_6 + \ldots + F_{4n-6}$

$\left(iv\right) F_{2n-2} F_{2n-1} = F_3 + F_7 + \ldots + F_{4n-5}$

$\left(v\right) F_{2n-2} F_{2n} = F_4 + F_8 + \ldots + F_{4n-4}$

İspat: Bu özdeşlikleri üçgensel graflar kullanarak görmek mümkündür.

Burada ,

a) e_4 den başlayarak ilk ardışık $2k-1$ vektörün ilk girdilerinin toplamı bir Fibonacci sayısının bir mükemmel karesinin negatif işaretlisidir.

Örneğin; $k=2$ için ilk 3 vektörün ilk girdilerinin toplamı

$$(-1)+(-2)+(-6)=-9=-3^2=-F_4^2$$

b) e_4 den başlayarak ilk k vektörün ikinci girdilerinin toplamı herhangi iki Fibonacci sayısının çarpımıdır.

Örneğin; $k=4$ için e_4, e_5, e_6, e_7 vektörlerinin ikinci girdileri toplamı

$$2+3+10+24=39=3.13=F_4.F_7$$

c) Her vektörün girdileri iki Fibonacci sayısının bir çarpımıdır. Eğer $(-a,b,c)$ böyle bir vektör ise $c-b-a=\pm 1$ olur.

Örneğin; $e_7=(-15,24,40)$ için

$$15=3.5=F_4.F_5;\ 24=3.8=F_4.F_6;\ 40=5.8=F_5.F_6 \quad \text{elde edilir.}$$

Ayrıca

$$c-b-a=\pm 1 \quad \text{de} \quad 40-24-15=1 \quad \text{olur.}$$

d) Üçgensel grafın üst yarısının herhangi ardışık iki vektörü alınırsa (örneğin $(e_2,e_4),(e_4,e_6),\ldots$) ve onlar $(-a,b,c)$ ve $(-A,B,C)$ ile gösterilirse

$$C-c=(B-b)+(A-a) \quad \text{bulunur.}$$

Örneğin;

e_6 ve e_8 vektörlerini ele alalım. $e_6=(-6,10,15)$, $e_8=(-40,65,104)$

$$104-15=(65-10)+(40-6)$$

e) Üst yarının ardışık iki vektörü (benzer olarak alt yarının) alınıp $(-a,b,c)$ ve $(-C,B,A)$ ile gösterilirse bütün girdiler iki Fibonacci sayısının çarpımıdır. a ve A nın çarpımı bir Fibonacci sayısının dördüncü kuvvetinden bir eksiktir.

Örneğin;

$$1.15 = 2^4 - 1 ,6.104 = 5^4 - 1 ,2.40 = 3^4 - 1 ,15.273 = 12^4 - 1$$

Böylece (a) dan (e) ye kadar olanlar bize iyi bilinen 5 tane özdeşliği verir. Örneğin (e) yi alarak

"*Bir Fibonacci sayısının dördüncü kuvvetinin bir eksiği, 4 tane Fibonacci sayısının çarpımdır.* "

özdeşliğini buluruz.

Yani,

$$F_n^4 - F_{n-2}F_{n-1}F_{n+1}F_{n+2} = 1$$

Gelin-Cesáro özdeşliği görülür [2].

3.2 (1,0,0), (2,1,0), (2,2,1) Vektörleriyle Üçgensel Graf Oluşturma

3.2.1 Tanım: $X(n):\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ fonksiyonu

$$X(n+3) = 2\left[X(n+2) + X(n+1)\right] - X(n) \tag{3.5}$$

özdeşliğini sağlıyorsa $X(n)$ bir $\mathcal{F}$ fonksiyonudur denir [3].

3.2.2 Önerme:

a) $\mathrm{X}(n)=(-1)^n$, b) $\mathrm{X}(n)=F^2_{(n+r)}$,

c) $X(n)=F_{n+r}F_{n+t}$, d) $X(n)=F_{2n+r}$,

e) $X(n)=L^2_{n+r}$, f) $X(n)=L_{n+r}L_{n+t}$,

g) $X(n)=L_{2n+r}$, h) $X(n)=F_{n+r}L_{n+t}$

fonksiyonları birer $\mathcal{F}$ fonksiyondur [3].

İspat:

a) $\mathrm{X}(n)=(-1)^n$ özdeşliği için (3.5) eşitliğini yazarsak

$$(-1)^{n+3}=2\left[(-1)^{n+2}+(-1)^{n+1}\right]-(-1)^n$$

bulunur. Burada

$$A(n)=(-1)^{n+3} \quad \text{ve} \quad B(n)=2\left[(-1)^{n+2}+(-1)^{n+1}\right]-(-1)^n$$

diyelim.

$$A(n)=(-1)^n(-1)^3$$

$$=-(-1)^n$$

$$B(n)=2\left[(-1)^n(-1)^2+(-1)^n(-1)^1\right]-(-1)^n$$

$$=2\left[(-1)^n-(-1)^n\right]-(-1)^n$$

$$=-(-1)^n$$

Buradan $A(n)=B(n)$ dir.

b) $\mathrm{X}(n)=F^2_{(n+r)}$ özdeşliği için (3.5) eşitliğini yazarsak

$$F^2_{n+3+r}=2\left[F^2_{n+2+r}+F^2_{n+1+r}\right]-F^2_{n+r}$$

bulunur.

Burada

$$A(n)=F_{n+3+r}^{2} \quad \text{ve} \quad B(n)=2\left[F_{n+2+r}^{2}+F_{n+1+r}^{2}\right]-F_{n+r}^{2} \quad \text{diyelim.}$$

Böylece

Fibonacci genel terimi $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$ kullanarak,

$$F_{n+r+3}=2F_{n+r+1}+F_{n+r} \quad \text{ve} \quad F_{n+r+2}=F_{n+r+1}+F_{n+r}$$

olacağından

$$\begin{aligned} A(n) &= F_{n+3+r}^{2} \\ &= \left(2F_{n+r+1}+F_{n+r}\right)^{2} \\ &= 4F_{n+r+1}^{2}+4F_{n+r+1}F_{n+r}+F_{n+r}^{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(n) &= 2\left[F_{n+2+r}^{2}+F_{n+1+r}^{2}\right]-F_{n+r}^{2} \\ &= 2\left[\left(F_{n+r+1}+F_{n+r}\right)^{2}+F_{n+1+r}^{2}\right]-F_{n+r}^{2} \\ &= 4F_{n+r+1}^{2}+4F_{n+r+1}F_{n+r}+F_{n+r}^{2} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece $A(n)=B(n)$ elde edilir.

c) $X(n)=F_{n+r}F_{n+t}$ özdeşliği için (3.5) eşitliğini yazarsak

$$F_{n+r+3}F_{n+t+3}=2\left[F_{n+r+2}F_{n+t+2}+F_{n+r+1}F_{n+t+1}\right]-F_{n+r}F_{n+t}$$

bulunur. Burada

$$A(n)=F_{n+r+3}F_{n+t+3}$$

ve

$$B(n)=2\left[F_{n+r+2}F_{n+t+2}+F_{n+r+1}F_{n+t+1}\right]-F_{n+r}F_{n+t}$$

olarak eşitliği ayıralım.

Böylece

$$A(n) = F_{n+r+3}F_{n+t+3}$$
$$= (2F_{n+r+1} + F_{n+r})(2F_{n+t+1} + F_{n+t})$$
$$= 4F_{n+r+1}F_{n+t+1} + 2F_{n+r+1}F_{n+t} + 2F_{n+t+1}F_{n+r} + F_{n+r}F_{n+t}$$

$$B(n) = 2[F_{n+r+2}F_{n+t+2} + F_{n+r+1}F_{n+t+1}] - F_{n+r}F_{n+t}$$
$$= 2[(F_{n+r+1} + F_{n+r})(F_{n+t+1} + F_{n+t}) + F_{n+r+1}F_{n+t+1}] - F_{n+r}F_{n+t}$$
$$= 4F_{n+r+1}F_{n+t+1} + 2F_{n+r+1}F_{n+t} + 2F_{n+t+1}F_{n+r} + F_{n+r}F_{n+t}$$

olur. Yani $A(n) = B(n)$ elde edilir.

d) $X(n) = F_{2n+r}$ özdeşliği için (3.5) eşitliğini yazarsak

$$F_{2n+6+r} = 2[F_{2n+4+r} + F_{2n+2+r}] - F_{2n+r}$$

bulunur .Burada $2n + r = m$ olsun.

Böylece

$$F_{m+6} = 2[F_{m+4} + F_{m+2}] - F_m$$
$$F_{m+6} = 2F_{m+4} + F_{m+2} + F_{m+1}$$
$$2F_{m+4} + F_{m+2} + F_{m+1} = 2F_{m+4} + 2F_{m+2} - F_m$$
$$F_{m+1} = F_{m+2} - F_m$$

bulunur.

Aynı şekilde

e) $X(n) = L_{n+r}^2$, f) $X(n) = L_{n+r}L_{n+t}$, g) $X(n) = L_{2n+r}$, h) $X(n) = F_{n+r}L_{n+t}$

eşitliklerinin birer $\mathcal{F}$ fonksiyon oldukları gösterilebilir.

3.2.3 Yardımcı Teorem: $A(n)$ ve $B(n)$ bir $\mathcal{F}$ fonksiyon olsun. Bu durumda

$$A(n) = B(n) \Leftrightarrow k = 0,1,2 \quad \text{için} \quad \mathrm{A}(k) = B(k) \qquad \text{dir [3].}$$

3.2.4 Önerme: F_n ve L_n n. Fibonacci ve Lucas sayıları olsun Bu durumda

$$L_{n-1}^2 - F_{n-4}F_n - F_nF_{n+1} = F_{n-2}^2$$

olur [3].

İspat:

Burada

$$L_{-m} = (-1)^m L_m \quad \text{ve} \quad F_{-m} = (-1)^{m+1} F_m$$

olur.

$n \geq 0$ için özdeşliğin sağ ve sol tarafını $A(n)$ ve $B(n)$ olarak tanımlayalım.

$$A(n) = L_{n-1}^2 - F_{n-4}F_n - F_nF_{n+1} \quad \text{ve} \quad B(n) = F_{n-2}^2$$

$A(n)$ ve $B(n)$ $\mathcal{F}$ fonksiyondur ;

$k = 0$ ise

$$A(0) = L_{0-1}^2 - F_{0-4}F_0 - F_0F_{0+1} = L_{-1}^2 - F_{-4}F_0 - F_0F_1$$

$$= \left((-1)^1 L_1\right)^2 - (-1)^{4+1} F_4F_0 - F_0F_1$$

$$= (1)^2 + 3.0 - 0.1 = 1$$

ve

$$B(0)=F_{0-2}^{2}=F_{-2}^{2}=\left((-1)^{1+2}F_2\right)^2=F_2=1$$

$$A(0)=B(0)=1$$

$k=1$ ise

$$A(1)=L_{1-1}^{2}-F_{1-4}F_1-F_1F_{1+1}$$

$$=L_0^2-F_{-3}F_1-F_1F_2$$

$$=L_0^2-(-1)^{3+1}F_3F_1-F_1F_2\ =2^2-2.1-1.1=1$$

ve

$$B(1)=F_{1-2}^{2}=F_{-1}^{2}=\left((-1)^{1+1}F_1\right)^2=1$$

$$A(1)=B(1)=1$$

$k=2$ ise

$$A(2)=L_{2-1}^{2}-F_{2-4}F_2-F_2F_{2+1}=L_1^2-F_{-2}F_2-F_2F_3$$

$$=L_1^2-(-1)^{2+1}F_2F_2-F_2F_3=1^2+1.1-1.2=0$$

ve

$$B(2)=F_{2-2}^{2}=F_0^2=0$$

$$\mathrm{A}(2)=\mathrm{B}(2)=0$$

Böylece 3.2.2 Yardımcı Teoreminden $A(n)=B(n)$ olduğu görülür.

3.2.3 Önermesinin üçgensel graf yardımıyla ispatını verelim.

Burada

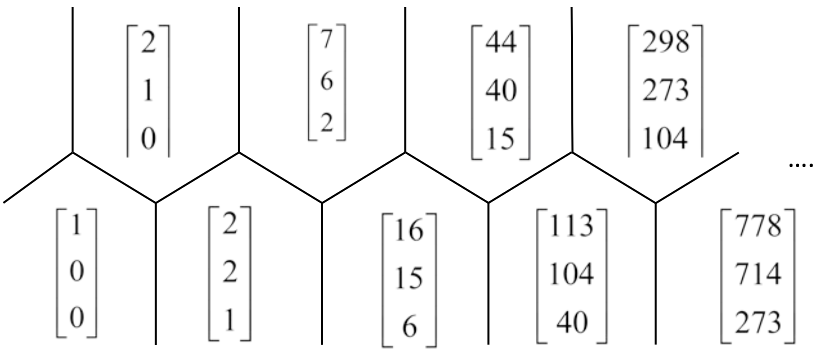
$$e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$$

alalım.

$F(e_1, 2e_1 + e_2, 2e_1 + 2e_2 + e_3)$ ün ilk dokuz terimi aşağıdaki gibi verilir.

$$u_1 = e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad u_2 = 2e_1 + e_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} , \quad u_3 = 2e_1 + 2e_2 + e_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u_{n+3} = 2(u_{n+2} + u_{n+1}) - u_n \qquad , \quad n \geq 0$$



Şekil 3.3: (1,0,0), (2,1,0), (2,2,1) ile oluşturulan üçgensel graf .

Dizimizin ilk dokuz teriminden aşağıdaki ilginç durumlar görülebilir.

(*i*) İkinci girdiler F_n ile F_{n+1} Fibonacci sayılarının bir çarpımıdır [3].

Örneğin;

$$1 = 1.1 = F_1F_2 \ , \ 2 = 1.2 = F_2F_3 \ , \ 6 = 2.3 = F_3F_4 \ , \ldots$$

(*ii*) Her bir vektörün birinci ve ikinci girdilerinin farkı F_{n-2} Fibonacci sayısının karesidir [3].

Örneğin;

$$7 - 6 = 1 = F_1^2 \ , 44 - 40 = 4 = F_3^2 \ , 113 - 104 = 9 = F_4^2 \ldots$$

Yukarıdaki (i) ve (ii) Fibonacci ve Lucas terimlerindeki ilk girdiyi açıklamayı bizlere gösterir.

(iii) Her vektörün ilk girdileri $L_{n-1}^2 - F_{n-4}F_n$ biçimlidir [3].

Örneğin;

$$L_2^2 - F_{-1}F_3 = 3^2 - 1.2 = 7\ , L_3^2 - F_0F_4 = 4^2 - 0.3 = 16\ , \ldots$$

(i),(ii) ve (iii) kullanarak yukarıdaki grafın ilk dokuz vektörü için

$$L_{n-1}^2 - F_{n-4}F_n - F_nF_{n+1} = F_{n-2}^2$$

olduğu görülür [3].

Ayrıca

(iv) İlk $2k+1$ terimin üçüncü girdilerinin toplamı bir Fibonacci sayısının karesidir [3].

(v) Her vektörün ikinci ve üçüncü girdileri Fibonacci sayılarının bir çarpımıdır.Toplamları da başka bir Fibonacci sayısıdır [3].

Örneğin;

$$2+1=3=F_4\ ,6+2=8=F_6\ ,15+6=21=F_8$$

3.3 (1,2), (2,1), (1,2) Vektörleri için Üçgensel Graf Oluşturma

Bu kısımda Fibonacci sayılarının toplamını içeren iki özdeşlik sunacağız. Bunların ispatlarını üçgensel graf kullanarak yapacağız.

3.3.1 Önerme:

(i) $3\left(F_4 + F_{12} + F_{20} + \ldots + F_{4+8n}\right) = F_{4n+4}^2$

(ii) $1 + 3\left(F_6 + F_{14} + F_{22} + \ldots + F_{6+8n}\right) = F_{4n+5}^2$

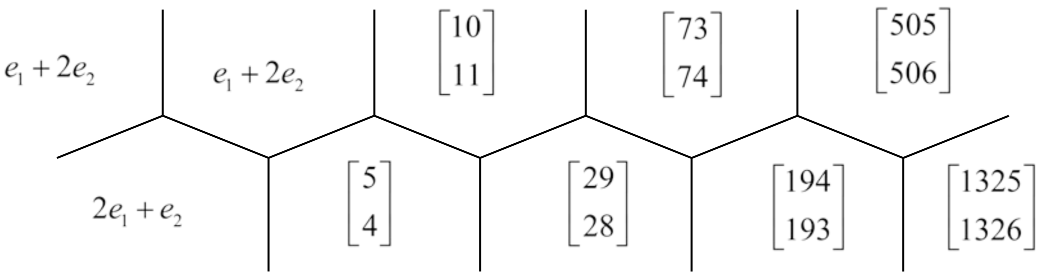
olur [3].

İspat:

$e_1=(1,0), e_2=(0,1)$ ve $u_1=e_1+2e_2, u_2=2e_1+e_2$ $, u_3=e_1+2e_2$ alalım.

Başlangıçta e_1+2e_2 nin iki kez alındığına dikkat ediniz.

Burada $F(u_1,u_2,u_3)$ ilk on terimi aşağıdaki gibi verilir.



Şekil 3.4: (1,0), (0,1) ile oluşturulan üçgensel graf .

Buradan

$(i)(u_5,u_3),(u_9,u_7),(u_{13},u_{11}),\dots$ grafın üst yarısının vektörlerinin girdileri d_i farkları bazı Fibonacci sayılarının 3 katıdır [3].

İlk üç fark

$10-1=9=3F_4$ $,505-73=432=3F_{12}$ ve $23761-3466=20295=3F_{20}$ olur.

(ii) Ardışık d_i lerin toplamı karedir [3].

Örneğin;

$$9=3^2 \;,\; 9+432=21^2 \;,\; 9+432+20295=144^2$$

(i) ve (ii) den

$$3F_4+3F_{12}=F_8^2 \ ,3F_4+3F_{12}+3F_{20}=F_{12}^2$$

olduğu görüleceğinden Önerme (3.3.1)-(i) ispatlanır [3].

Burada grafın alt yarısını inceleyelim. İlk 5 vektörün girdileri

$$1+3F_6+3F_{14}=(-1+2)+(-5+29)+(-194+1325)=34^2=F_9^2$$

olduğunu gösterir.

Böylece önerme (3.3.1)-(ii) ispatlanır [3].

3.4 Bazı Fibonacci ve Lucas Özdeşliklerinin Üçgensel Graf Yardımıyla İspatı

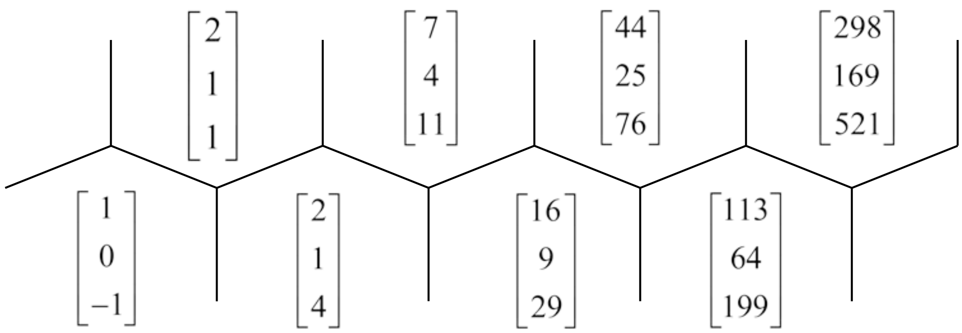
3.4.1 Önerme: $L_{2n+1}-F_{n+1}^2-\left(L_n^2-F_{n-3}F_{n+1}+F_{2n-2}\right)=(-1)^{n-1}$ [3].

İspat:

$$u_1=(1,0,-1)\ ,\ u_2=(2,1,1)\ ,\ u_3=(2,1,4) \quad \text{ile}$$

$$u_{n+1}=2(u_n+u_{n-1})-u_{n-2}$$

formülünün yardımıyla grafın diğer vektörlerini oluşturalım[3].



Şekil 3.5: (1,0,-1), (2,1,1), (2,1,4) ile oluşturulan üçgensel graf.

- u_{n+2} vektörünün üçüncü girdisi L_{2n+1} Lucas sayısını verir.

Örneğin;

$$4 = L_3 \ ,11 = L_5 \ ,29 = L_7 \ ,\ldots$$

- u_{n+2} vektörünün ikinci girdisi F_{n+1}^2 Fibonacci sayısını verir.

Örneğin;

$$1 = F_2^2 \ ,4 = F_3^2 \ ,9 = F_4^2 \ ,\ldots$$

- u_{n+2} vektörünün birinci girdisi $L_n^2 - F_{n-3}F_{n+1}$ değerini verir.

Örneğin;

$$2 = L_1^2 - F_{1-3}F_{1+1} = L_1^2 - F_{-2}F_2$$

$\left[L_1 = 1, F_{-2} = -1, F_2 = 1\right]$

3.4.2 Önerme: $F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$ [3].

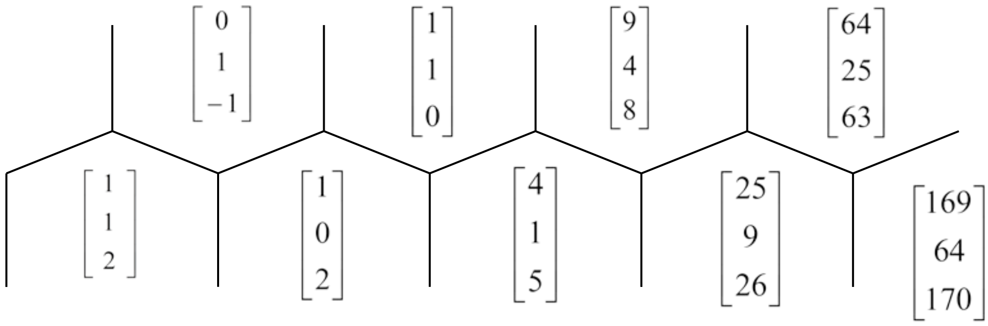
İspat:

$(1,1,2),(0,1,-1),(1,0,2)$ vektörlerini kullanarak özdeşliği üçgensel graf yardımıyla ispatlayabiliriz [3].

$$u_1 = (1,1,2), u_2 = (0,1,-1), u_3 = (1,0,2) \quad \text{ile}$$

$$u_{n+1} = 2(u_n + u_{n-1}) - u_{n-2}$$

formülünü kullanarak grafın diğer vektörlerini elde edebiliriz.



Şekil 3.6: (1,1,2), (0,1,-1), (1,0,2) ile oluşturulan üçgensel graf .

- n sayısı tek iken u_{n+3} vektörünün birinci girdileri F_{n+1} Fibonacci sayısının karesini verir.

Örneğin;

$$1 = F_2^2 \ ,9 = F_4^2 \ ,64 = F_6^2 \dots$$

- n sayısı tek iken u_{n+2} vektörünün ikinci girdileri F_{n-1} Fibonacci sayısının karesini verir.

Örneğin;

$$0 = F_0^2 \ ,1 = F_2^2 \ ,9 = F_4^2 \dots$$

- n sayısı tek iken $u_{n+4} - u_{n+2}$ nin ikinci terimlerinin farkı F_{2n} Fibonacci sayısını verir.

Örneğin;

$$1 - 0 = 1 = F_2 \ ,9 - 1 = 8 = F_6 \ ,\dots$$

- n sayısı çift iken u_{n+1} vektörünün birinci girdileri F_{n-1} Fibonacci sayısının karesini verir.

Örneğin;

$$1 = F_1^2 \ ,4 = F_3^2 \ ,25 = F_5^2 \ ,\dots$$

- n sayısı çift iken u_{n+4} vektörünün ikinci girdileri F_{n+1} Fibonacci sayısının karesini verir.

- n sayısı çift iken $u_{n+2} - u_n$ nin ikinci terimlerinin farkı F_{2n} Fibonacci sayısını verir.

  Yukarıda verilenlerden yararlanılarak $F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$ özdeşliği ispatlanır.

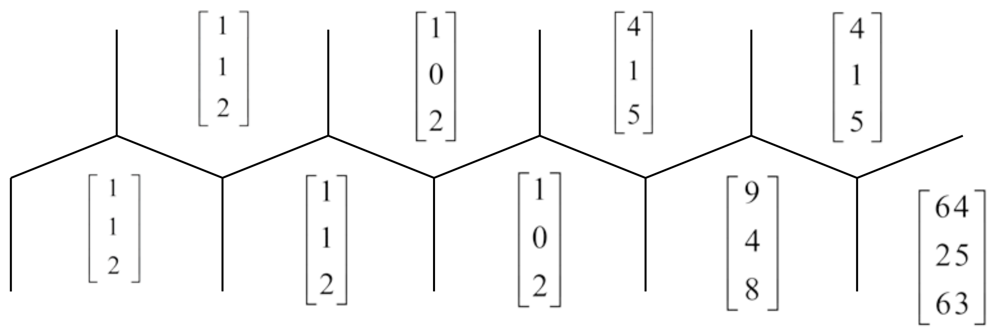
3.4.3 Önerme: $F_{2\boldsymbol{n}+1} = F_{\boldsymbol{n}+1}^2 + F_{\boldsymbol{n}}^2$ [3].

İspat: $(1,1,2),(0,1,-1),(1,0,2)$ vektörlerini kullanarak özdeşliği üçgensel graf yardımıyla ispatlayabiliriz [3].

$$u_1 = (1,1,2), u_2 = (0,1,-1), u_3 = (1,0,2) \quad \text{kullanılarak}$$

$$u_{n+1} = 2(u_n + u_{n-1}) - u_{n-2}$$

formülünün de yardımıyla diğer vektörleri elde edebiliriz.



Şekil 3.7: (1,1,2), (0,1,-1), (1,0,2) ile oluşturulan üçgensel graf .

- n sayısı hem tek hem de çift iken u_{n+3} vektörünün birinci girdileri F_{n+1} Fibonacci sayısının karesini verir.

Örneğin;

$$4 = F_{2+1}^2 \;, 64 = F_{5+1}^2 \;, \ldots$$

- n sayısı hem tek hem de çift iken u_{n+3} vektörünün ikinci girdileri F_n Fibonacci sayısının karesini verir.

Örneğin;

$$1 = F_1^2 \ ,9 = F_4^2 \ ,\ldots$$

- n hem çift hem tek iken u_{n+3} vektörünün birinci girdisi ve ikinci girdisinin toplamı F_{2n+1} Fibonacci sayısını verir.

Örneğin;

$$4+1=5=F_5 \ ,4+9=13=F_7 \ ,\ldots$$

3.4.4 Önerme: $F_{n+2}F_{n-1} = F_{n+1}^2 - F_n^2$ [3].

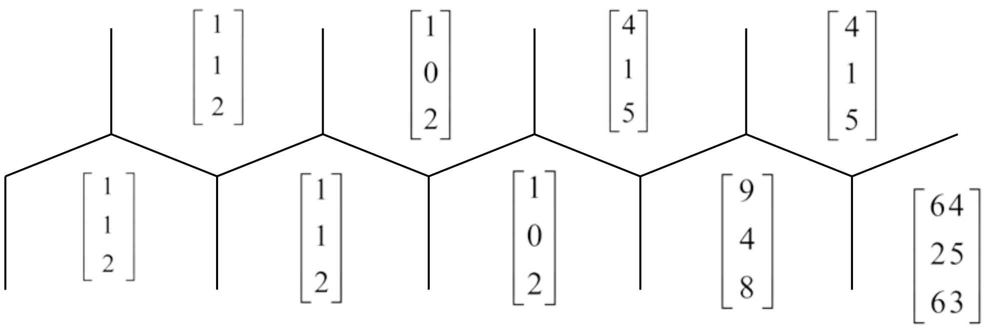
İspat: :

$(1,1,2),(0,1,-1),(1,0,2)$ vektörlerini kullanarak özdeşliği üçgensel graf yardımıyla ispatlayabiliriz [3].

$$u_1 = (1,1,2), u_2 = (0,1,-1), u_3 = (1,0,2) \quad \text{ile}$$

$$u_{n+1} = 2(u_n + u_{n-1}) - u_{n-2}$$

formülü kullanılarak diğer vektörleri elde edebiliriz.



Şekil 3.8: (1,1,2), (0,1,-1), (1,0,2) ile oluşturulan üçgensel graf.

- u_{n+3} vektörünün birinci girdileri F_{n+1} Fibonacci sayısının karesini verir.

Örneğin;

$$4 = F_{2+1}^2 \ ,64 = F_{5+1}^2 \ ,\ldots$$

- u_{n+3} vektörünün ikinci girdileri F_n Fibonacci sayısının karesini verir.

Örneğin;

$$1 = F_1^2 \ ,9 = F_4^2 \ ,\ldots$$

- u_{n+3} vektörünün birinci girdisi ve ikinci girdisinin farkı $F_{n+2}F_{n-1}$ iki Fibonacci sayısının çarpımını verir.

Örneğin;

$$9-4 = F_{3+2}F_{3-1} \ ,25-9 = F_{4+2}F_{4-1} \ ,\ldots$$

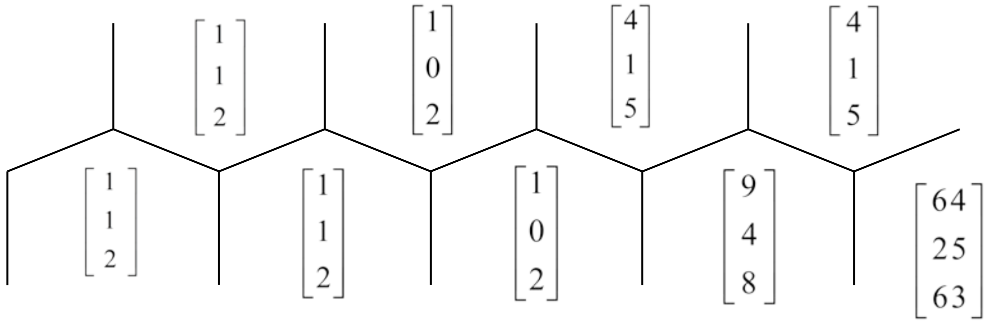
3.4.5 Önerme: $F_n^2 - F_{n-2}F_{n+2} = (-1)^n$ [3].

$(1,1,2),(0,1,-1),(1,0,2)$ vektörlerini kullanarak özdeşliği üçgensel graf yardımıyla ispatlayabiliriz [3].

$$u_1 = (1,1,2), u_2 = (0,1,-1), u_3 = (1,0,2) \text{ ile}$$

$$u_{n+1} = 2(u_n + u_{n-1}) - u_{n-2}$$

formülü kullanılarak diğer vektörleri elde edebiliriz.



Şekil 3.9: (1,1,2), (0,1,-1), (1,0,2) ile oluşturulan üçgensel graf.

- u_{n+2} vektörünün birinci girdisi F_n Fibonacci sayısının karesini verir.

Örneğin;

$$1 = F_1^2 \ ,9 = F_4^2 \ ,\ldots$$

- u_{n+2} vektörünün üçüncü girdisi $F_{n-2}F_{n+2}$ iki Fibonacci sayısının çarpımını verir.

Örneğin;

$$0 = F_{2-2}F_{2+2} \ ,26 = F_{5-2}F_{5+2} \ ,\ldots$$

- u_{n+2} vektörünün birinci girdisi ve üçüncü girdisi arasındaki fark $(-1)^n$ dir.

Örneğin;

$$(-1)^3 = 4-5 \ , (-1)^6 = 64-63 \ ,\ldots$$

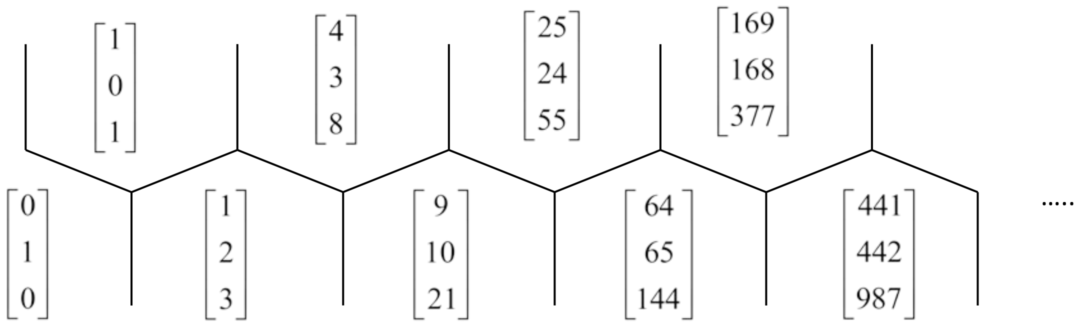
3.4.6 Önerme: $\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$ [3].

İspat: $(0,1,0),(1,0,1),(1,2,3)$ vektörlerini kullanarak özdeşliği üçgensel graf yardımıyla ispatlayabiliriz [3].

$$u_1 = (0,1,0), u_2 = (1,0,1), u_3 = (1,2,3) \text{ ile}$$

$$u_{n+1} = 2(u_n + u_{n-1}) - u_{n-2}$$

formülü kullanılarak diğer vektörleri elde edebiliriz.



Şekil 3.10: (0,1,0), (1,0,1), (1,2,3) ile oluşturulan üçgensel graf .

- n sayısı tek iken u_{n+2} vektörünün $\frac{(\text{üçüncü girdisi} - \text{birinci girdisi})}{2}$ oranı $F_n F_{n+1}$ iki Fibonacci sayısının çarpımını verir.

Örneğin;

$$\frac{21-9}{2} = F_3 F_4 \ ,\ldots$$

- n sayısı çift iken u_n vektörünün tüm girdilerinin toplamı $\sum_{i=1}^{n} F_i^2$ Fibonacci sayılarının toplamını verir.

Örneğin;

$$4+3+8 = \sum_{i=1}^{4} F_i^2 \ ,\ldots$$

3.4.7 Önerme: $F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^{n-1}$ [3].

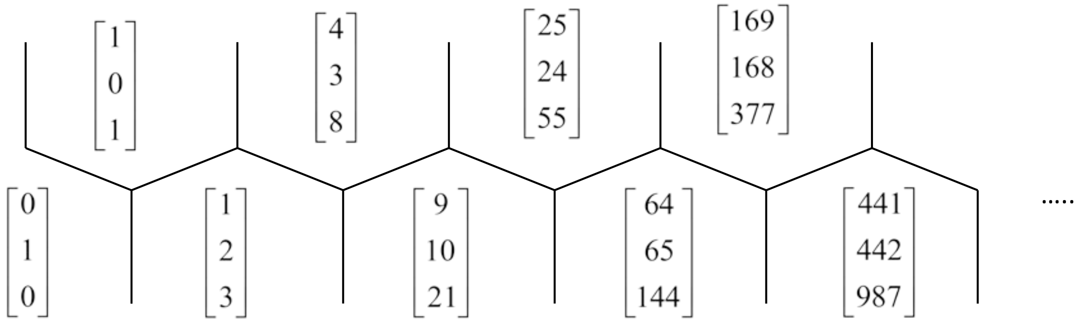
İspat:

$(0,1,0),(1,0,1),(1,2,3)$ vektörlerini kullanarak özdeşliği üçgensel graf yardımıyla ispatlayabiliriz [3].

$$u_1 = (0,1,0), u_2 = (1,0,1), u_3 = (1,2,3) \quad \text{ile}$$

$$u_{n+1} = 2(u_n + u_{n-1}) - u_{n-2}$$

formülü kullanılarak diğer vektörleri elde edebiliriz.



Şekil 3.11: (0,1,0), (1,0,1), (1,2,3)ile oluşturulan üçgensel graf .

- u_{n+1} vektörünün birinci girdisi F_n Fibonacci sayısının karesini verir.

Örneğin;

$$64 = F_6^2 \ ,441 = F_8^2 \ ,\ldots$$

- u_{n+1} vektörünün ikinci girdisi $F_{n-1}F_{n+1}$ iki Fibonacci sayısının çarpımını verir.

Örneğin;

$$24 = F_4F_6 \ ,168 = F_6F_8 ,\ldots$$

- u_{n+1} vektörünün birinci girdisi ve ikinci girdisi arasındaki fark $\left(-1\right)^{n-1}$ değerini verir.

Örneğin;

$$9-10=\left(-1\right)^{3}\ ,25-24=\left(-1\right)^{6}\ ,\dots$$

3.4.8 Önerme: $F_nF_{n+3}=F_{n+1}F_{n+2}+\left(-1\right)^{n-1}$ [3].

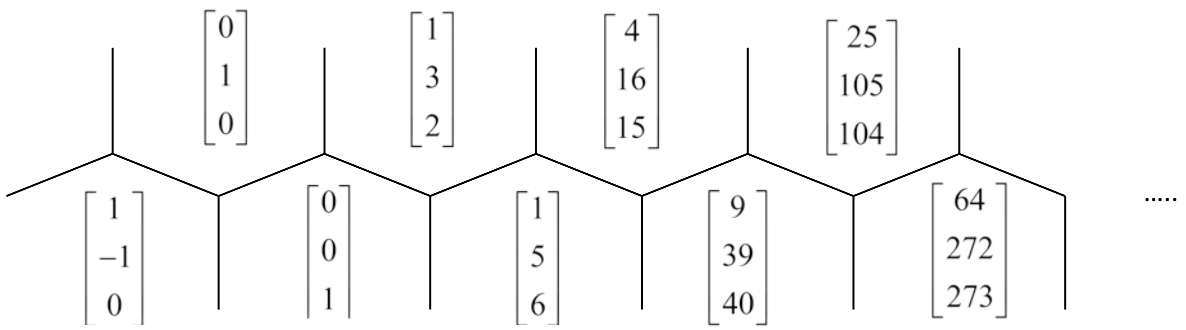
İspat:

$\left(1,-1,0\right),\left(0,1,0\right),\left(0,0,1\right)$ vektörlerini kullanarak özdeşliği üçgensel graf yardımıyla ispatlayabiliriz [3].

$$u_1=\left(1,-1,0\right),u_2=\left(0,1,0\right),u_3=\left(0,0,1\right)\quad \text{ile}$$

$$u_{n+1}=2\left(u_n+u_{n-1}\right)-u_{n-2}$$

formülü kullanılarak diğer vektörleri elde edebiliriz.



Şekil 3.12: (1,-1,0), (0,1,0), (0,0,1) ile oluşturulan üçgensel graf .

- u_{n+3} vektörünün ikinci girdisi $F_n F_{n+3}$ iki Fibonacci sayısının çarpımını verir.

Örneğin;

$$105 = F_5 F_8 \ ,272 = F_6 F_9 \ ,\ldots$$

- u_{n+3} vektörünün üçüncü girdisi $F_{n+1} F_{n+2}$ iki Fibonacci sayısının çarpımını verir.

Örneğin;

$$6 = F_3 F_4 \ ,15 = F_4 F_5 \ ,\ldots$$

- u_{n+3} vektörünün ikinci girdisi ve üçüncü girdisi arsındaki fark $(-1)^{n-1}$ değerini verir.

Örneğin;

$$39 - 40 = (-1)^3 \ ,715 - 714 = (-1)^6 \ ,\ldots$$

3.4.9 Önerme: $F_n^2 - F_{n-1}^2 = F_n F_{n-1} + (-1)^{n-1}$ [3].

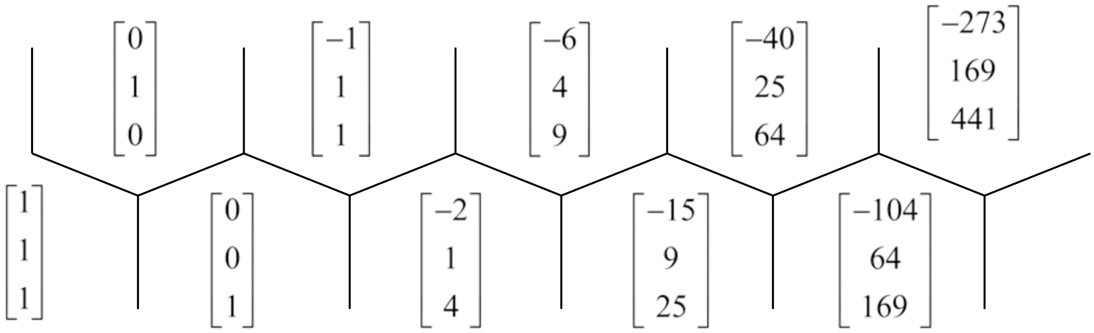
İspat:

$(1,1,1),(0,1,0),(0,0,1)$ vektörlerini kullanarak özdeşliği üçgensel graf yardımıyla ispatlayabiliriz [3].

$$u_1 = (1,1,1), u_2 = (0,1,0), u_3 = (0,0,1) \text{ ile}$$

$$u_{n+1} = 2(u_n + u_{n-1}) - u_{n-2}$$

formülü kullanılarak diğer vektörleri elde edebiliriz.



Şekil 3.13: (1,1,1), (0,1,0), (0,0,1) ile oluşturulan üçgensel graf .

- u_{2n} vektörünün ikinci girdisi F_n Fibonacci sayısının karesini verir.

Örneğin;

$$1 = F_2^2 \ ,4 = F_3^2 \ ,\ldots$$

- u_{n+2} vektörünün birinci girdisinin ters işaretlisi $F_n F_{n-1}$ iki Fibonacci sayısının çarpımını verir.

Örneğin;

$$-(-6) = F_4 F_3 \ ,-(-15) = F_5 F_4 \ ,\ldots$$

- u_{n+1} vektörünün üçüncü girdisi F_{n-1} Fibonacci sayısının karesini verir.

Örneğin;

$$25 = F_5^2 \ ,64 = F_6^2 \ ,\ldots$$

3.4.10 Önerme: $F_{2n+1} + (-1)^n = F_{n-1} F_{n+1} + F_{n+1}^2$ [3].

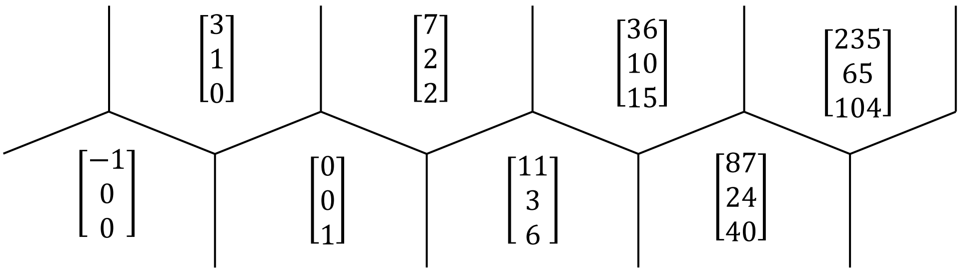
İspat:

$(-1,0,0),(3,1,0),(0,0,1)$ vektörlerini kullanarak özdeşliği üçgensel graf yardımıyla ispatlayabiliriz [3].

$u_1 = (-1,0,0), u_2 = (3,1,0)$ ve $u_3\,(0,0,1)$ vektörleri ile

$$u_{n+1} = 2(u_n + u_{n-1}) - u_{n-2}$$

formülünü kullanılarak diğer vektörleri elde edebiliriz.



Şekil 3.14: (-1,0,0), (3,1,0), (0,0,1) ile oluşturulan üçgensel graf .

- n sayısı tek iken u_{n+2} vektörünün birinci girdisinin 2 fazlası F_{2n+1} Fibonacci sayısını verir.

Örneğin;

$$11 + 2 = 13 = F_7 \;, 87 + 2 = 89 = F_{11} \;, \dots$$

- n sayısı çift iken u_{n+2} vektörünün birinci girdisinin 2 eksiği F_{2n+1} Fibonacci sayısını verir.

Örneğin;

$$7 - 2 = 5 = F_5 \;, 36 - 2 = 34 = F_9 \;, \dots$$

- u_{n+2} vektörünün ikinci girdisi $F_{n-1}F_{n+1}$ iki Fibonacci sayısının çarpımını verir.

Örneğin;

$$3 = F_2 F_4 \;, 10 = F_3 F_5 \;, \dots$$

- u_{n+2} vektörünün ikinci girdisi ve üçüncü girdisinin toplamı F_{n+1} Fibonacci sayısının karesini verir.

Örneğin; $24+40=8^2=F_6^2$ $,65+104=13^2=F_7^2$ $,\dots$

3.4.11 Önerme:

$$F_n^3=\frac{\left(F_{n-1}F_{n+1}F_{n+2}+F_{n-2}F_{n-1}F_{n+1}\right)}{6}+\frac{\left(F_{n-2}F_{n+1}F_{n+2}-F_{n-2}F_{n-1}F_{n+2}\right)}{2}$$ [3].

İspat:

e_1=(0,0,0,1), e_2=(0,0,1,0), e_3=(0,0,0,0), e_4=(0,1,0,0) ve e_5=(1,0,0,0) vektörleri kullanılarak

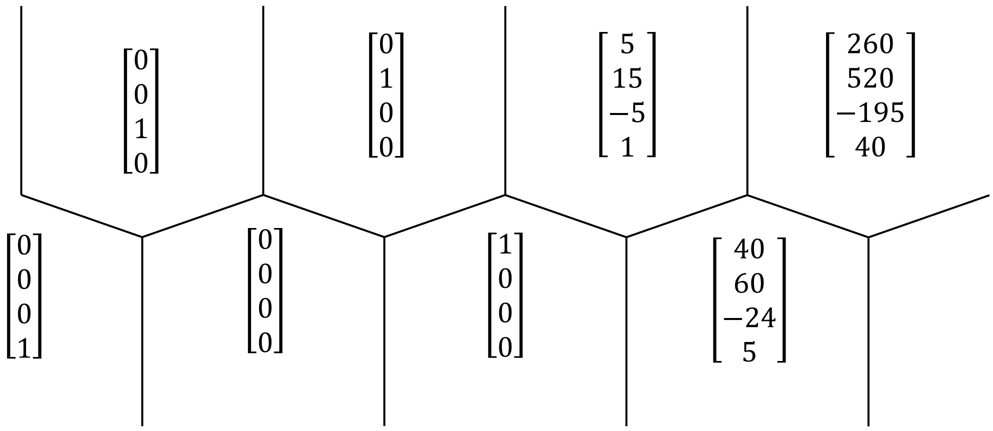
$$e_n=5e_{n-1}+15e_{n-2}-15e_{n-3}-5e_{n-4}+e_{n-5} \tag{3.6}$$

formülünün yardımıyla diğer vektörleri bulup, üçgensel grafı oluşturabiliriz.

(3.6) indirgeme bağıntısını elde etmek için

$$e_{n+1}=-\sum_{r=1}^{n+1}\left(-1\right)^{r(r+1)/2}\frac{F_{n+1}F_n\dots F_{n+2-r}}{F_rF_{r-1}\dots F_1}e_{n+1-r} \tag{3.7}$$

denklemi kullanılır [3].



Şekil 3.15: (0,0,0,1), (0,0,1,0), (0,0,0,0), (0,1,0,0) ,(1,0,0,0) ile oluşturulan üçgensel graf .

- Her bir $e_i = (a, b, -c, d)$ vektörünün girdileri $6a, 2b, 2c$ ve $6d$ sayıları dört Fibonacci sayısının çarpımıdır.

  Örneğin; $e_6 = (5,15,-5,1)$ için

  $6a = 6.5 = 30 \qquad 30 = 1.2.3.5 = F_2F_3F_4F_5$

  $2b = 2.15 = 30 \qquad 30 = 1.2.3.5 = F_2F_3F_4F_5$

  $2c = 2.5 = 10 \qquad 10 = 1.1.2.5 = F_1F_2F_3F_5$

  $6d = 6.1 = 6 \qquad 6 = 1.1.2.3 = F_1F_2F_3F_4$

- $a + b - c + d$ eşitliğide bir Fibonacci sayısının dördüncü kuvvetini verir.

Örneğin;

$5 + 15 - 5 + 1 = 16 = 2^4 = F_3^4$

$40 + 60 - 24 + 5 = 81 = 3^4 = F_4^4$

$260 + 520 - 195 + 40 = 625 = 5^4 = F_5^4$

- $6a = F_{n+1}F_{n+2}F_{n+3}F_{n+4}$

  $6d = F_nF_{n+1}F_{n+2}F_{n+3}$

  $2b = F_{n+1}F_{n+2}F_{n+3}F_{n+4}$

  $2c = F_nF_{n+1}F_{n+2}F_{n+3}$

$$a+d = \frac{F_{n+1}F_{n+2}F_{n+3}\left(F_{n+4}+F_n\right)}{6}$$

$$b-c = \frac{F_{n+1}F_{n+2}F_{n+4}\left(F_{n+3}-F_n\right)}{2}$$

$$a+d+b-c = F_{n+2}^4$$

$$F_{n+2}^4 = F_{n+2}F_{n+1}\left[\frac{F_{n+3}\left(F_{n+4}+F_n\right)}{6}+\frac{F_{n+4}\left(F_{n+3}-F_n\right)}{2}\right]$$

$$F_{n+2}^3 = F_{n+1}\left[\frac{F_{n+3}\left(F_{n+4}+F_n\right)}{6}+\frac{F_{n+4}\left(F_{n+3}-F_n\right)}{2}\right]$$

$$= \frac{F_{n+1}F_{n+3}F_{n+4}+F_{n+1}F_{n+3}F_n}{6}+\frac{F_{n+1}F_{n+4}F_{n+3}-F_{n+1}F_{n+4}F_n}{2}$$

$n+2 \rightarrow n$ olsun.

Böylece

$$\mathrm{F}_n^3 = \frac{\left(F_{n-1}F_{n+1}F_{n+2}+F_{n-2}F_{n-1}F_{n+1}\right)}{6}+\frac{\left(F_{n-2}F_{n+1}F_{n+2}-F_{n-2}F_{n-1}F_{n+2}\right)}{2}$$

elde edilir.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde Fibonacci ve Lucas özdeşliklerinden bazılarının $\mathcal{F}$ fonksiyonu olduğu gösterilmiştir.

Ayrıca bazı Fibonacci özdeşliklerinin üçgensel graflar kullanılarak ispatları verilmiştir.

Benzer yöntem kullanılarak diğer Fibonacci ve Lucas özdeşliklerinin ispatı verilebilir. Ayrıca yeni özdeşlikler bulunabilir. Bu yöntem kullanılarak Genelleştirilmiş Fibonacci ,Lucas sayı dizilerinde ispatlar yapılabilir. Ayrıca yöntem Pell , Pell-Lucas sayı dizilerinde de kullanılabilir.

5. KAYNAKLAR

[1] R.A. Dunlap, Altın Oran ve Fibonacci Sayıları, (Tübitak),2013.

[2] C.L. Lang ve M.L. Lang,Fibonacci Numbers and Identities, arXiv:math/1303.5162v2 [math.NT] (2013).

[3] C.L. Lang ve M.L. Lang,Fibonacci Numbers and Trivalent Graphs, arXiv:math/1306.4491v1 [math.NT] (2013) .

[4] C.L. Lang ve M.L. Lang, Fibonacci Numbers and Identities II , arXiv:math/1304.3388v4 [math.NT] (2013).

[5] C.L. Lang ve M.L. Lang, Recurrence Of Product Of Recursive Functions, arXiv:math/1304.7685v3 [math.NT] (2013).

[6] C.L. Lang ve M.L. Lang, Generalised Binomial Coefficients And Jarden's Theorem, arXiv:math/1305.2146v2 [math.NT] (2013).

[7] C.L. Lang ve M.L. Lang,Three Term Recurrence And Residue Completeness, arXiv:math/1307.7463v1 [math.NT] (2013).

[8] Civciv, H., "Fibonacci ve Lucas matris dizileri ve özellikleri", Doktora tezi, Konya Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Konya(2009)

[9] Akgül, R.,"Fibonacci Sayısal Yarı Grupları", Yüksek Lisans tezi, Diyarbakır Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Diyarbakır(2008)

[10] Akçağıl, Ş.,"Fibonacci Sayıları ve Altın Oran", Yüksek Lisans tezi, Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Balıkesir(2005)

[11] Şen, E.,"Fibonacci Sayıları, Altın Oran ve Uygulamaları",Lisans bitirme ödevi, Gebze İleri Teknoloji Enstitüsü Fen Fakültesi Matematik Bölümü, Matematik Anabilim Dalı, Gebze(2008)

[12] Vorobiev, N.N.,"Fibonacci Numbers"(Springer Basel AG),2002