T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MODÜLER GRUP ELEMANLARININ KUTUP NOKTALARI VE REZİDÜLERİNİN HESAPLANMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Taner YARAL

Balıkesir, Haziran - 2011

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MODÜLER GRUP ELEMANLARININ KUTUP NOKTALARI VE REZİDÜLERİNİN HESAPLANMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Taner YARAL

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Özden KORUOĞLU

Sınav Tarihi: 27/06/2011

Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Nihal YILMAZ ÖZGÜR (BAÜ)

Doç. Dr. Özden KORUOĞLU (BAÜ-Danışman)

Yrd. Doç. Dr. Yunus Emre YILDIRIR (BAÜ)

Enstitü Yönetim Kurulunun .... tarih ....sayılı oturumunun .... nolu kararı ile ....Mezun olmuştur.

Balıkesir, Haziran - 2011

ÖZET

MODÜLER GRUP ELEMANLARININ KUTUP NOKTALARI VE REZİDÜLERİNİN HESAPLANMASI

Taner YARAL
Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı

(Yüksek Lisans Tezi / Tez Danışmanı: Doç. Dr. Özden KORUOĞLU)

Balıkesir, 2011

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

Çalışmanın ilk bölümü tezin gelişimini anlatan, tezin bölümlerinin tanıtıldığı giriş bölümüdür.

Çalışmanın ikinci bölümünde, tezin diğer bölümlerinde kullanılacak, tanımlar, metodlar, yöntemler, teoremler verilmiştir.

Çalışmanın üçüncü bölümünde, modüler grup sunuşu ve sürekli kesirlerden faydalanarak, modüler grup elemanlarının kutup noktaları hesaplanmıştır.

Dördüncü bölümde ise modüler grup elemanlarının yine modüler grup sunuşundan yararlanarak rezidülerinin bulunması için formüller elde edilmiştir.

Beşinci bölümde ise çalışmamızda elde edilen sonuçlardan bahsedilmiştir. Ayrıca bundan sonra yapılabilecek bazı çalışmalar için açık problemler verilmiştir.

ANAHTAR SÖZCÜKLER: Modüler grup, kutup noktası, rezidü, parabolik nokta, sürekli kesirler

ABSTRACT

CALCULATION OF POLE POINTS AND RESIDUES OF MODULAR GROUP ELEMENTS

Taner YARAL
Balıkesir University, Institute of Science,
Department of Mathematics

(M. Sc. Thesis / Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Özden KORUOĞLU)

Balıkesir, 2011

This thesis consists of five chapters.

In the first chapter the study is introduced.

In the second chapter, it is given that the definitions, theorems, examples and methods which are used in the other chapters are briefly recalled.

In the third chapter of the study, pole points of modular group elements has been calculated by using modular group presentation and continued fractions.

In the forth chapter, some formulas has been formulated for the finding residues of modular group elements by using modular group presentation.

In the fifth chapter, the results obtained from the thesis are summarized and some open problems for future studies are given.

KEY WORDS : Modular group, pole point, residue, parabolic point, continued fractions

İÇİNDEKİLER

SEMBOL LİSTESİ

Simge	**Tanımı**
$\mathbf{Z}$	Tamsayılar kümesi
$\mathbf{Z}^+$	Pozitif tamsayılar kümesi
$\mathbf{C}$	Karmaşık sayılar kümesi
$\mathbf{C}_\infty$	Genişletilmiş karmaşık sayılar kümesi
$\mathbf{R}$	Reel sayılar kümesi
Aut($\mathbf{C}_\infty$)	$\mathbf{C}_\infty$ kümesinin tüm otomorfizmlerinin kümesi
GL(2, **C**)	**C** de genel lineer grup
PGL(2, **C**)	Projektif lineer grup
SL(2, **C**)	Özel lineer grup
PSL(2, **C**)	Determinantı 1 olan projektif lineer grup
PSL(2, **R**)	$\{ V(z) : V(z)= \dfrac{az+b}{cz+d}; a,b,c,d \in \mathbf{R}, ad-bc=1 \}$
$\mathbf{U}$	Üst yarı-düzlem
$D(z_0,\delta)$	z_0'ın δ komşuluğu
$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[a_n(z-z_0)^n\right]$	Laurent Serisi
$[r_0;r_1,r_2,r_3,...,r_n]$	Sürekli Kesir
$H(\lambda)$	$\lambda \geq 2$ olması durumunda elde edilen Hecke grupları
$H(\lambda_q)$	$\lambda = \lambda_q = 2\cos\dfrac{\pi}{q}, 1 \leq \lambda < 2$ için elde edilen Hecke grupları
F_λ	$H(\lambda)$ Hecke gruplarının temel bölgesi
Γ	Modüler gruplar
C_n	Devirli grup
D_n	Dihedral grup
S_n	Simetrik grup
A_n	Alterne grup
$P = \langle X \mid R^* \rangle$	Grup sunuşu
$A \times B$	Direkt çarpım grubu
$A*B$	Serbest çarpım grubu
$A *_C B$	Karışımlı serbest çarpım grubu

ÖNSÖZ

Yüksek Lisansa başladığım ilk andan beri, öğrencisi olmakla gurur duyduğum, karşılığını veremesem de, tebessümünü ve yardımlarını hiçbir şekilde esirgemeyen, benim için öğretmen-öğrenci ilişkisinden öte, tavsiye ve nasihatlerine her daim ihtiyacım olacak bir büyüğüm olarak gördüğüm saygıdeğer hocam Doç.Dr.Özden KORUOĞLU'na sonsuz teşekkürler.

Mezun olduğum tarih itibariyle, üniversite hakkında sahip olduğum duygu ve düşüncelerimi, 180 derece döndüren, emekleri ve öğretme şevkleri ve eğitimdeki ciddiyetleri, kendilerine duyduğum hayranlığı katlamasından ötürü, kendilerine teşekkürü bir borç bildiğim Prof.Dr.Nihal YILMAZ ÖZGÜR'e, Doç.Dr.Recep ŞAHİN'e ve Yrd.Doç.Dr.Yunus YILDIRIR'a sonsuz teşekkürler.

İşin perde arkasında, her zaman yanı başımda olan ve sonsuza kadarda öyle olmasını istediğim eşime, uykusuz gecelerimin biricik sebebi sevgili Berrin'ime en derin sevgilerimle...

Balıkesir, 2011 Taner YARAL

1. GİRİŞ

Hecke grupları literatüre, E. Hecke'nin 1936 yılında yaptığı "Über die Bestimmung Dirichleter Reichen durch ihre Funktionalgleichungen" isimli çalışması ile girmiştir. H(λ) ile gösterilen Hecke grupları, λ sabit bir pozitif sayı olmak üzere

$$T(z) = -\frac{1}{z} \quad \text{ve } U(z)=z+\lambda$$

kesirli doğrusal dönüşümleri ile üretilir. Ayrıca E. Hecke, H(λ) Hecke gruplarının Fuchsian olması için gerekli ve yeterli şartın $\lambda \geq 2$ veya $\lambda = \lambda_q = 2\cos\frac{\pi}{q}$, ($q \geq 3$ bir tamsayı) olması gerektiğini göstermiştir [1]. H(λ_q) Hecke gruplarında, q=3 değerine karşılık gelen H(λ_3) Hecke grubu daha çok modüler grup olarak adlandırılır ve $\Gamma = PSL(2,Z)$ ile gösterilir. Modüler grup

$$\Gamma = \left\{ \frac{az+b}{cz+d} : a,b,c,d \in \mathbb{Z}, ad-bc=1 \right\}$$

kesirli lineer dönüşümlerinin kümesidir. Ayrıca modüler grup

$$\Gamma = \langle T, S : T^2 = S^3 = I \rangle = C_2 * C_3$$

grup sunuşuna sahiptir [2]. Burada S = T.U yani $S(z) = -\frac{1}{z+1}$ dönüşümüdür.

Fuchsian grupların en önemlisi olan modüler grubun incelenmesine ise 1820' li yıllarda Abel Gauss ve Jacobi'nin eliptik fonksiyonları keşfetmesiyle başlanmıştır. Bu grubun üst yarı düzlemdeki hareketlerini çalışma isteği yanında eliptik modüler fonksiyonlar (modüler gruba göre değişmez olan meremorf fonksiyonlar) kuramı adıyla gelişen çalışmaları ilerletebilmek arzusu modüler grubun diğer Fuchsian gruplara göre daha fazla çalışılmasına neden olmuştur. Modüler grubun kendisinin yanı sıra önemli bazı alt grupları da (çeşitli seviyelerden temel ve özel denklik altgrupları) çalışmalarda kullanılmıştır. Meşhur Fermat Teoreminin iddia edilen en son ispatında modüler grubun temel denklik alt grupları da kullanılmıştır. M. Newman 1962 ve 1964 yıllarında yaptığı [3, 4] nolu makalelerde bu alt grupları incelemiş ve aralarındaki ilişkiyi göstermiştir. Bununla beraber M. Newman kuvvet alt gruplarından yararlanarak modüler grubun serbest alt grupları hakkında da bilgiler vermiştir. Koruoğlu ve Şahin [5] nolu kaynakta Modüler grup ile Fibonacci sayıları arasındaki ilişkiyi vermiştir. Ayrıca [6] nolu kaynakta Koruoğlu sürekli kesirler ve modüler grup elemanlarının parabolik noktaları arasındaki ilişkiyi, [7] nolu kaynakta ise Tekcan, modüler grubun kuadratik formlarla ilişkisini vermiştir. Özgür [8] nolu kaynakta ise iki kare teoremi ile modüler grup arasında ilişki kurmuştur. Mushtaq ve Hayat [9-10] nolu kaynaklarda Fibonacci, Pell ve Lucas sayılarının modüler grup ile ilişkisini araştırmışlardır.

Modüler grup yukarıda da görüldüğü üzere grup teori, hiperbolik geometri, fonksiyonlar teorisi, otomorf fonksiyonlar, sayılar teorisi ve Riemann yüzeyleri ile çok yakın bir ilişki içindedir. Bu çalışmada, modüler grubun sayılar teorisi ve fonksiyonlar teorisi ile ilişkileri üzerinde durulacaktır.

Modüler grubun elemanları $f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ şeklinde doğrusal kesirli dönüşümlerdir ve bu dönüşümler $c\neq 0$ için basit kutba sahiptirler. Modüler grubun elemanları bu şekilde verildiğinde kutup noktalarını hesaplamak oldukça kolaydır ve $z_0=-\dfrac{d}{c}$ dir. Ayrıca $f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ şeklindeki fonksiyonun rezidüsü de $\lim\limits_{z\to z_0}[(z-z_0)f(z)]=a_{-1}$ ile bulunur [11,12]. Örneğin modüler grup sunuşundan alınan

$$W(T,S)=TSTS^2TS^2TS^2TSTSTSTS^2TSTSTSTSTSTSTS^2$$

kelimesini $f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ şeklinde yazmak uzun bir işlemdir. Çalışmamızda bu şekildeki doğrusal kesirli dönüşümü bulmak yerine, bu kelime

$$W(T,S)=(TS)^1(TS^2)^3(TS)^3(TS^2)^1(TS)^6(TS^2)^1$$

şeklinde bloklar yardımıyla yazılıp, sürekli kesirleri de kullanarak kutup noktası hesaplanmıştır. Ayrıca bu blok yazılımından faydalanarak $z_0=-\dfrac{d}{c}$ noktasındaki rezidüsü için bir formül elde edilmiştir. Sonuç olarak grup teoride önemli yeri olan grup sunuşları ile Analiz ve Fonksiyonlar teorisinin kutup noktası ve rezidü konuları arasında bir ilişki verilmiştir.

Bu çalışmada yapılanları, bölümlere ayırarak kısaca tanıtalım.

Çalışmanın ilk bölümü tezin gelişimini anlatan, tezin bölümlerinin tanıtıldığı giriş bölümüdür.

Çalışmanın ikinci bölümünde, tezin diğer bölümlerinde kullanılacak, tanımlar, metodlar, yöntemler, teoremler verilmiştir.

Çalışmanın üçüncü bölümünde, modüler grup sunuşu ve sürekli kesirlerden faydalanarak modüler grup elemanlarının kutup noktaları hesaplanmıştır.

Dördüncü bölümde ise modüler gruptaki elemanlarının yine grup sunuşundan faydalanarak rezidülerinin bulunması için formüller elde edilmiştir.

Beşinci bölümde ise çalışmamızda elde edilen sonuçlardan bahsedilmiştir. Ayrıca bundan sonra yapılabilecek bazı çalışmalar için açık problemler verilmiştir.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, tezin diğer bölümlerinde kullanılacak tanımlar, metotlar, yöntemler ve de teoremler verilmiştir.

2.1 Möbiüs Dönüşümleri

Çalıştığımız Modüler grup elemanları birer möbiüs dönüşümüdür. Bu alt bölümde, bu dönüşümleri tanıyıp, bu dönüşümler ile 2×2 matrisler arasındaki ilişkileri vereceğiz. $\mathbf{C}_{\infty}=\mathbf{C}\cup\{\infty\}$ olmak üzere şu tanımı verelim:

2.1.1 Tanım: f: $\mathbf{C}_{\infty}\rightarrow\mathbf{C}_{\infty}$ birebir, örten ve meromorf fonksiyonlara $\mathbf{C}_{\infty}$ kümesinin bir *otomorfizmi* denir [11]. □

$\mathbf{C}_{\infty}$ kümesinin tüm otomorfizmlerinin kümesi Aut($\mathbf{C}_{\infty}$) ile gösterilir. Yani,

Aut($\mathbf{C}_{\infty}$)={ f | f: $\mathbf{C}_{\infty}\rightarrow\mathbf{C}_{\infty}$ birebir, örten, meromorf fonksiyon }

şeklindedir.

2.1.2 Teorem: $\mathbf{C}_{\infty}$ kümesinin, tüm otomorfizmlerinin kümesi aşağıdaki gibidir:

$$\mathrm{Aut}(\mathbf{C}_{\infty})=\{\ V(z) : V(z)=\frac{az+b}{cz+d};\ a,b,c,d\in\mathbf{C},\ ad-bc\neq 0\ \}$$ [11].□

2.1.2 Teoremde dikkat edilirse $ad-bc\neq 0$ verilmiştir. Eğer $ad-bc=0$ olsa, $V(z)$ sabit fonksiyon olur ve birebirlik şartı bozulur.

2.1.3 Tanım: $V(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ ($a,b,c,d\in\mathbf{C}$, $ad-bc\neq 0$) biçimindeki dönüşümlere, *möbiüs dönüşümleri* (kesirli doğrusal dönüşüm) denir [11].□

2.1.4 Teorem: Möbiüs dönüşümleri, fonksiyonların bileşke işlemine göre bir gruptur [11].□

2.1.3 Tanımdaki ad-bc değerine V(z) dönüşümünün determinantı denir ve Δ ile gösterilir. Möbiüs dönüşümleri için verilen Δ=ad-bc$\neq 0$ koşulu yerine Δ=ad-bc=1 kullanılabilir. Çünkü pay ve payda $\pm\sqrt{\Delta}$ ile bölünürse, Δ=1 sonucu bulunur.

Matrislerde çarpma işlemi yapmak, fonksiyonların bileşke işlemine göre daha kolaydır. Bunun için, möbiüs dönüşümleri ile matrisler arasında birebir ilişkiyi inceleyelim. Bu ilişki, V(z)= $\dfrac{az+b}{cz+d}$ yerine $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrisini kullanmak olacaktır. Bunun için bazı teoremler verelim.

2.1.5 Tanım: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ biçiminde $a,b,c,d \in \mathbf{C}$, Δ=ad-bc$\neq 0$ koşullarını sağlayan 2×2 matrislerin kümesine **C**'de *genel lineer grup* denir ve GL(2, **C**) ile gösterilir. □

2.1.6 Teorem: $\theta : GL(2, \mathbf{C}) \rightarrow Aut(\mathbf{C}_{\infty})$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm bir epimorfizmdir [11].□

Dikkat edilirse 2.1.6 Teoremdeki dönüşüm birebir değildir. Çünkü $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrisi $\dfrac{az+b}{cz+d}$ dönüşümünün yanında, bu dönüşümün, k katına da gidebilir. Dolayısıyla birebirlik yoktur. θ dönüşümünün çekirdeğini K ile gösterelim (K=çekθ). Gerekli işlemler yapılırsa çekθ kümesinin $\lambda \in \mathbf{C}\backslash\{0\}$ koşulu altında $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ biçimindeki matrislerden oluştuğu görülür. Bu elemanları

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \lambda I$$

olarak da ifade edebiliriz. Birinci izomorfizma teoreminden aşağıdaki teoremi verebiliriz.

2.1.7 Teorem: $GL(2, \mathbf{C}) / K \cong Aut(\mathbf{C}_\infty)$ [11].□

$GL(2, \mathbf{C})/K$ bölüm grubu için $PGL(2, \mathbf{C})$ simgesi kullanılır ve bu grup *projektif lineer grup* olarak isimlendirilir. $PGL(2, \mathbf{C})$ nin elemanları, $\Delta = ad-bc \neq 0$ koşulunu sağlar ve de bu matrislerin k katı da aynı dönüşümü belirler.

Şimdi $GL(2, \mathbf{C})$ kümesinden $\mathbf{C}\setminus\{0\}$ kümesine şöyle bir dönüşüm tanımlayalım:

$$\det: GL(2, \mathbf{C}) \to \mathbf{C}\setminus\{0\}$$

dönüşümünün $M, N \in GL(2, \mathbf{C})$ olmak üzere $\det(M.N)=\det(M).\det(N)$ özelliğinden homomorfizmadır. Üstelik örten olduğundan bir epimorfizmdir. Bu epimorfizmin çekirdeği $SL(2, \mathbf{C})$ ile göstereceğimiz, determinantı 1 olan matrislerdir. $SL(2, \mathbf{C})$ kümesine *özel lineer grup* denir. Yine birinci izomorfizma teoreminden aşağıdaki teoremleri verebiliriz.

2.1.8 Teorem: $GL(2, \mathbf{C}) / SL(2, \mathbf{C}) \cong \mathbf{C}\setminus\{0\}$ [11].□

2.1.9 Teorem: $Aut(\mathbf{C}_\infty) \cong PGL(2, \mathbf{C}) = PSL(2, \mathbf{C})$ [11].□

Bu çalışmada özel bir Hecke grubu olan modüler grup ile çalıştığımız için, şimdiki bölümde kısaca Hecke gruplarını tanıtalım.

2.2 Hecke Grupları

Erich Hecke, 1936 yılında "Über die Bestimmung Dirichleter Reichen durch ihre Funktionalgleichungen" adlı çalışmasında Hecke gruplarını aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

2.2.1 Tanım: λ sabit bir pozitif sayı olmak üzere ,

$$T(z) = -\frac{1}{z} \quad \text{ve} \quad U(z)=z+\lambda$$

kesirli doğrusal dönüşümleri ile üretilen gruplara *Hecke grupları* denir ve $H(\lambda)$ ile gösterilir. □

Tanımlanan T(z) ve U(z) dönüşümleri yardımıyla S=T.U alınırsa

$$S(z)=-\frac{1}{z+\lambda}$$

elde edilir.

2.2.2 Teorem: $\lambda \geq 2$ veya $q \geq 3$ bir tamsayı olmak üzere,

$$\lambda = \lambda_q = 2\cos\frac{\pi}{q},\ 1 \leq \lambda < 2$$

ise $H(\lambda)$ grubunun bir temel bölgesi,

$$F_\lambda = \left\{ z \in U : |\mathrm{Re}\, z| < \frac{\lambda}{2}, |z| > 1 \right\},$$

kümesidir [1-2]. □

Ayrıca E. Hecke diğer $\lambda>0$ değerleri için F_λ kümesinin bir temel bölge olmadığını da göstermiştir. $\lambda=\lambda_q$ veya $\lambda \geq 2$ olması durumunda $H(\lambda)$ grubunun sonlu üreteçli bir grup olduğu görülür. Ayrıca $H(\lambda)$ grubu, PSL(2, **R**) nin ayrık bir alt grubu olduğundan $H(\lambda)$ grubu Fuchsian bir grup olur. (Ayrık gruplar ve Fuchsian gruplar için ayrıntılı bilgiler [13], [14] nolu kaynaklarda bulunabilir.

2.2.3 Teorem: H(λ) Hecke gruplarının Fuchsian olması için gerekli ve yeterli koşul $\lambda \geq 2$ veya $\lambda = \lambda_q = 2\cos\frac{\pi}{q}$, ($q \geq 3$ bir tamsayı) olmasıdır [1].□

$\lambda = \lambda_q = 2\cos\frac{\pi}{q}$, $1 \leq \lambda < 2$, durumuna karşılık gelen Hecke grupları H(λ_q) ile gösterilir. Bazı H(λ_q) Hecke grupları ve bunların normal alt grupları [2] de çalışılmıştır. $\lambda \geq 2$ değerleriyle elde edilen Hecke grupları için H(λ) gösterimi kullanılır. Bu grupların sunuşları ile ilgili iki teorem aşağıdadır.

2.2.4 Teorem: H(λ_q) Hecke grubunun sunuşu,

$$H(\lambda_q) = < T, S \mid T^2 = S^q = I > \cong C_2 * C_q \qquad (2.1)$$

şeklinde, 2 mertebeli devirli grup ile q mertebeli devirli grubun serbest çarpımıdır [2].□

2.2.5 Teorem: Eğer $\lambda \geq 2$ ise bu grubun sunuşu,

$$H(\lambda) = < T, S \mid T^2 = S^\infty = I > \cong C_2 * C_\infty \qquad (2.2)$$

biçiminde, 2 mertebeli devirli grup ve sonsuz mertebeli devirli grubun serbest çarpımıdır [15]. □

2.3 Modüler Grup

Bu bölümde $q = 3$ için elde edilen modüler grubu biraz ayrıntılı olarak inceleyeceğiz.

2.3.1 Tanım: $\Gamma = \left\{ f(z) = \frac{az+b}{cz+d} : a,b,c,d \in \mathbb{Z}, ad-bc=1 \right\}$ kesirli lineer dönüşümler kümesine *modüler grup* denir. Modüler grup $\Gamma = PSL(2,\mathbb{Z})$ sembolleri ile gösterilir. □

2.3.2 Teorem: Modüler grubun sunuşu

$$T(z) = -1/z \text{ ve } S(z) = -1/(z+1)$$

olmak üzere iki kesirli dönüşüm tarafından üretilir ve grup sunuşu da

$$\Gamma = \langle T,S : T^2 = S^3 = I \rangle = C_2 * C_3 \quad (2.3)$$

şeklindedir. Kolayca görülebileceği gibi 2 mertebeli devirli grup ile 3 mertebeli devirli grubun serbest çarpımıdır [2].

$\Gamma = PSL(2,\mathbb{Z})$ grubunun herhangi bir f(z) elemanı (2.3) grup sunuşundan aşağıda görüldüğü gibi T ve S üreteçleri sayesinde elde edilir. Burada r_i sayısı 0,1 ya da 2 ($0 \le i \le n$) şeklindedir.

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = S^{r_0}TS^{r_1}T...S^{r_n} = W(T,S) \quad (2.4)$$

Modüler grup elemanlarının kutup noktalarını elde etmek için aşağıdaki tanımdaki iki dönüşümün önemi büyüktür.

2.3.3 Tanım: $TS : z \to z+1, \quad TS^2 : z \to \frac{z}{z+1}$

dönüşümlerine *bloklar* denir [6]. □

2.3.4 Teorem: m ve n pozitif tamsayı olmak üzere aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz

$$(TS)^m : z \to z+m, \quad (TS^2)^n : z \to \frac{z}{nz+1}.$$

İspat: Bileşke işleminden kolayca ispatlanır. □

Şimdi de $\Gamma = PSL(2,\mathbb{Z})$ grubundaki elemanların (2.3) gösteriminden farklı olarak herhangi indirgenmiş kelimenin blok formunda nasıl yazılabileceğini gösterelim. İndirgenmiş bir kelime $W(T,S)$ olsun. Örneğin,

$$W(T,S) = TSTS^2TS^2TS^2TSTSTSTS^2TSTSTS$$

bir kelimedir ama bu kelimenin yazılışı çok kullanışlı değildir.

Bu kelime (2.3.3) Tanımda verilen bloklar yardımıyla

$$W(T,S) = (TS)(TS^2)^3(TS)^3(TS^2)(TS)^3$$

şeklinde yazılır.

2.3.5 Teorem: (2.4) deki bir kelime, bloklar kullanılarak i=0,1,2 ve j=0,1 olmak üzere

$$W(T,S)=S^{i}(TS)^{m_0}(TS^2)^{n_0}...(TS)^{m_k}(TS^2)^{n_k}T^{j}$$

şeklinde yazılabilir. Blokların üsleri pozitif tamsayılardır fakat m_0 ve n_k sıfır olabilirler.

İspat: Modüler grubun (2.3) de yer alan sunuşundan kolayca görülür. □

2.4 Grup Sunuşları

2.4.1 Tanım: X bir küme (üreteç sembollerinin kümesi) ve X kümesi üzerinde devirsel indirgenmiş kelimelerden oluşan R^* (bağıntı kelimelerinin kümesi) olsun. Bu durumda,

$$P=<X\,|\,R^*> \qquad (2.5)$$

ikilisine bir *grup sunuşu* denir. X ve R^* kümelerinin her ikisi de sonlu ise P sunuşunun sonlu olduğunu söyleriz [16]. □

(i) C_n Devirli Grupları: C_n devirli grup sunuşları,

$$C_n \cong \langle \alpha \mid \alpha^n = I \rangle$$

şeklindedir.

(ii) D_n Dihedral Grupları: D_n Dihedral gruplarının sunuşları,

$$D_n \cong \langle \alpha, \beta \mid \alpha^2 = \beta^2 = (\alpha\beta)^n = I \rangle$$

veya

$$D_n \cong \langle \alpha, \beta \mid \alpha^2 = \beta^n = (\alpha\beta)^2 = I \rangle$$

veya

$$D_n \cong \langle \alpha, \beta \mid \alpha^n = \beta^2 = (\alpha\beta)^2 = I \rangle$$

şeklindedir ve $|D_n| = 2n$ dir.

(iii) Simetrik ve Alterne Gruplar: n elemanlı bir kümenin bütün permütasyonlarının kümesi, fonksiyonların bileşke işlemine göre bir grup oluşturur. Bu gruba *simetrik grup* denir ve S_n ile gösterilir. Çift permütasyonların kümesi de bu grubun bir alt grubunu oluşturur. Bu gruba *alterne grup* denir ve A_n ile gösterilir. $|S_n| = n!$ ve $|A_n| = n!/2$ dir. □

2.5 Çarpım Grupları

2.5.1 Direkt Çarpım Grubu

A ve B iki grup olmak üzere direkt çarpım $G = A \times B$ ile gösterilir. Sonuç olarak kartezyen çarpımdan dolayı

$$|G| = |A||B|$$

dir. Bu grupla ilgili ayrıntılı bilgilere [16,17] numaralı kaynaklardan bakılabilir. Biz direkt çarpımın grup sunuşunu verelim.

2.5.1.1 Teorem: A ve B grupları sırasıyla

$$P_A = \langle X \mid R_1^* \rangle \text{ ve } P_B = \langle Y \mid R_2^* \rangle$$

sunuşlarıyla verilsin. Bu iki grubun direkt çarpım grubu olan G nin sunuşu

$$P_G = \langle X, Y \mid R_1^*, R_2^*, R^* \rangle \tag{2.6}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $R^* = \{xyx^{-1}y^{-1} : x \in X, y \in Y\}$ dir [16]. □

2.5.2 Serbest Çarpım Grubu

A ve B herhangi iki grup olmak üzere bu iki grubun serbest çarpım grubunun sunuşu aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

2.5.2.1 Teorem: A ve B grupları sırasıyla

$$P_A = \langle X \mid R_1^* \rangle \text{ ve } P_B = \langle Y \mid R_2^* \rangle$$

sunuşlarına sahip olsun. Bu durumda A ve B gruplarının serbest çarpımı olan G=A*B grubunun sunuşu,

$$P_G = \langle X, Y \mid R_1^*, R_2^* \rangle \tag{2.7}$$

şeklinde tanımlanır [16]. □

2.6 Sürekli Kesirler

Sürekli kesirlerle ilgili bazı tanım ve teoremler, bu bölümde verilmiştir. Sürekli kesirlerle ilgili ayrıntılı bilgiler [18, 19] nolu kaynaklarda bulunabilir.

2.6.1 Tanım: x reel sayısı için,

$$x = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \dots}}}$$

eşitliğine x sayısının, *sürekli kesri* denir. Burada $a_0, a_1, \dots$ ile $b_0, b_1, \dots$ sayıları birer tamsayıdırlar. □

Çalışmalarda daha çok kullanılan basit sürekli kesiri tanımlayalım. Çoğu kaynakta basit sürekli kesir yerine sürekli kesir tanımı kullanılmaktadır.

2.6.2 Tanım : x reel sayısının,

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots}}}$$

eşitine x' in *basit sürekli kesri* denir. □

Bu eşitlikte a_0 bir tamsayı (x sayısının tam değeri), $a_1, a_2, \dots$ sayıları ise birer pozitif tamsayıdır. Bu sürekli kesir

$$x = [a_0; a_1, a_2, \dots] \tag{2.8}$$

sembolü ile de gösterilir.

Ayrıca

$$[a_0; a_1, a_2, \dots] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots}}}$$

sonsuz sürekli kesirdir ve

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots + \cfrac{1}{a_n}}}$$

sonlu sürekli kesirdir. Bu sonlu ve sonsuz kesirlerle ilgili aşağıdaki teoremi verelim.

2.6.3 Teorem: Bir x sayısı rasyoneldir ancak ve ancak sonlu sürekli kesire sahiptir [18].□

Aşağıda rasyonel ve rasyonel olmayan bazı sayıların sürekli kesirleri verilmiştir.

2.6.4 Örnek:

$$\frac{21}{13}=1+\frac{8}{13}=1+\frac{1}{\frac{13}{8}}=1+\frac{1}{1+\frac{5}{8}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{8}{5}}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{3}{5}}}$$

$$=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{5}{3}}}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{2}{3}}}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{3}{2}}}}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}}$$

olarak bulunur. Yani $\frac{21}{13}$ = [1; 1, 1, 1, 1, 2] dir. □

2.6.5 Örnek:

$$-\frac{86}{31}=-3+\frac{7}{31}=-3+\frac{1}{\frac{31}{7}}=-3+\frac{1}{4+\frac{3}{7}}=-3+\frac{1}{4+\frac{1}{\frac{7}{3}}}=-3+\frac{1}{4+\frac{1}{2+\frac{1}{3}}}$$

O halde $-\frac{86}{31}$ = [-3; 4, 2, 3] olur. □

2.6.6 Örnek: Sürekli kesir gösterimi [2; 2, 1, 1, 3] olan sayıyı bulalım.

$$2+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}}=\frac{43}{18}$$

olarak hesaplanır. □

2.6.7 Örnek : $\sqrt{3}$ sayısının sürekli kesrini bulalım.

$$\sqrt{3}=1+(\sqrt{3}-1)=1+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{3}+1}{2}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{\sqrt{3}-1}{2}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{2}{\sqrt{3}-1}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\sqrt{3}+1}}$$

$$=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\sqrt{3}-1}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{3}-1}}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{3}+1}{2}}}}$$

$=\ldots=[1;\, 1, 2, 1, 2, \ldots]$

Dikkat edilirse 1, 2 sayıları sürekli olarak devretmektedir. Bu tür özel sürekli kesirlere *periyodik sürekli kesirler* denir. □

2.6.8 Örnek: Altın oranın sürekli kesrini bulalım.

$\left[\left|\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right|\right]=1$ olduğu dikkate alınırsa,

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}=1+\cfrac{1}{\cfrac{2}{\sqrt{5}-1}}=1+\cfrac{1}{\cfrac{1+\sqrt{5}}{2}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}$$

$=\ldots=[1;\, 1, 1, 1, \ldots]=[1;\, \overline{1}]$

olarak hesaplanır. □

2.7 Kutup Noktaları ve Rezidüler

Bu bölümde, kutup noktası ve rezidü kavramlarıyla ilgili temel bilgiler verilmiştir. Ayrıntılı bilgilere [11], [12] kaynaklarından ulaşılabilir.

2.7.1 Tanım: S, **C** nin herhangi bir alt kümesi olsun. Her $z \in S$ öğesine belli bir $f(z) \in \mathbf{C}$ öğesi karşılık getiren kurala S den **C** ye bir *karmaşık fonksiyon* denir [12]. □

2.7.2 Tanım: Bir f karmaşık fonksiyonu bir z_0 noktasının bir $D(z_0, \delta)$ komşuluğundaki bütün noktalarda diferansiyellenebiliyorsa f, z_0 da *analitiktir*, denir [12]. □

2.7.3 Tanım: Bir $w = f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasının bir $D(z_0, r) - \{z_0\}$ delinmiş komşuluğunda analitik fakat z_0 da analitik değilse f, z_0 da bir ayrık aykırı (singular) noktaya sahiptir denir. Eğer $w = f(z)$ bir $D = \{z \in C \,||\, z| > r\}$ kümesi üzerinde analitik, fakat g(z)=f(1/z), z=0 da ayrık aykırılığa sahipse f nin $z = \infty$ da bir *ayrık aykırılığı* vardır denir [12]. □

2.7.4 Tanım: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[a_n (z - z_0)^n \right]$ serisine f nin z_0 komşuluğundaki *Laurent serisi* denir [12]. □

2.7.5 UYARI: Çok kez f nin Laurent açılımı,

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

şeklinde yazılır [12]. □

2.7.6 Tanım: Eğer f nin Laurent açılımında a_{-n} katsayılarından sonlu tanesi hariç diğerlerinin tümü sıfıra eşitse z_0, f nin bir *kutup (pol) noktasıdır* denir. Eğer k, $a_{-k} \neq 0$ özelliğindeki en büyük sayı ise z_0, f nin *k. kerteden kutup noktasıdır* denir. Özel olarak k=1 ise, z_0 f nin *basit kutbudur* denir [12]. □

2.7.7 Tanım: Laurent açılımındaki a_{-1} katsayısına f nin z_0 daki *kalıntısı* (*rezidüsü*) denir [12]. □

2.7.8 Teorem: f, $z_0 \in B$ deki ayrık aykırılığı hariç bir B bölgesinde analitik olsun. z_0 ın f nin basit kutbu olması için gerekli ve yeterli koşul $\lim_{z \to z_0}[(z-z_0)f(z)]$ var ve $\neq 0$ olmasıdır. Üstelik bu limit f nin z_0 daki kalıntısına eşittir. Yani $\lim_{z \to z_0}[(z-z_0)f(z)] = a_{-1}$ dir [12].

İspat: ($\Rightarrow$) Eğer z_0, f nin bir basit kutbu ise,

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \sum_0^{\infty}(a_n(z-z_0)^n) = \frac{a_{-1}}{z-z_0} + h(z)$$

olur. Burada h fonksiyonu z_0 da analitiktir ve $a_{-1} \neq 0$ dır. O halde

$$\lim_{z \to z_0}[(z-z_0)f(z)] = \lim_{z \to z_0} a_{-1} + \lim_{z \to z_0}(z-z_0)h(z) = a_{-1} \neq 0$$

olur.

($\Leftarrow$) : $\lim_{z \to z_0}[(z-z_0)f(z)]$ var ve $\neq 0$ olsun. O halde

$$\lim_{z \to z_0}[(z-z_0)^2 f(z)] = \lim_{z \to z_0}(z-z_0)(z-z_0)f(z) = 0$$

olur. Böylece görülüyor ki z_0, f için kertesi ≤ 1 olan bir kutup ya da kaldırılabilir bir aykırı noktadır. O halde

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \sum_0^{\infty}(a_n(z-z_0)^n) = \frac{a_{-1}}{z-z_0} + h(z)$$

yazılabilir. Burada h analitik bir fonksiyondur. a_{-1} ise sıfır olabilir veya olmayabilir.

Böylece $\lim_{z \to z_0}[(z-z_0)f(z)] = \lim_{z \to z_0}[a_{-1} + (z-z_0)h(z)] = a_{-1}$

Yani z_0, f nin basit kutbudur. □

Şimdi kutup noktaları ile ilgili örnekler verelim.

2.7.9 Örnek:

$f(z) = \dfrac{3z+5}{2z-8}$ dönüşümünün kutup noktasını bulunuz.

Çözüm:

2z - 8 = 0 olduğundan z = 4 kutup noktasıdır ve k = 1 olduğu için basit kutuptur. □

2.7.10 Örnek:

$f(z) = \dfrac{5z+1}{(2z+6)^2}$ dönüşümünün kutup noktasını bulunuz.

Çözüm:

2z + 6 = 0 olduğunda z = -3 kutup noktası olur ve k = 2 olduğundan 2. kerteden kutup noktasıdır. □

2.7.11 Örnek:

$f(z) = 3z + 8$ dönüşümünün kutup noktasını bulunuz.

Çözüm:

$f(z) = \dfrac{3z+8}{1}$ yazılabileceğinden kutup noktası yoktur. □

3. MODÜLER GRUP ELEMANLARININ KUTUP NOKTALARI

Bu bölümde, modüler grup sunuşundan elde edilen modüler grup elemanlarının, kutup noktalarının sürekli kesirler yardımıyla bulunmasını inceleyeceğiz. $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}\in\Gamma$ dönüşümünün kutup noktası, $f^{-1}(z)=\frac{-dz+b}{cz-a}\in\Gamma$ dönüşümünün parabolik noktasıdır. Koruoğlu [6] nolu kaynakta, Modüler ve genişletilmiş modüler grubun parabolik noktalarını sürekli kesirler yardımıyla elde etmiştir. Bu bölümdeki sonuçlar, parabolik noktalar ve kutup noktaları arasındaki yukarıdaki ilişki ve de [6] nolu kaynak kullanılarak elde edilmiştir.

3.1 Tanım: Modüler grup elemanları altında, ∞ noktasının görüntülerine *parabolik noktalar* denir [15]. □

Modüler grubun, parabolik noktalarının kümesinin $\mathbf{Q}\cup\{\infty\}$ olduğu açıktır.

Kutup noktasının tanımını 2.7.6 Tanımda vermiştik. Modüler grubun $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}\in\Gamma$ $(c\neq 0)$ elemanlarının kutup noktaları paydayı sıfır yapan $z_0=-\frac{d}{c}$ değerleridir. Dikkat edilirse $-\frac{d}{c}$ değeri $f^{-1}(z)$ nin parabolik noktasıdır. Bu sebeple $f^{-1}(z)$ nin parabolik noktası bulunduğunda aynı zamanda $f(z)$ dönüşümünün kutup noktasını da elde etmiş oluruz.

$f(z)=\frac{az+b}{cz+d}\in\Gamma$ dönüşümünde özel olarak c = 0 ise bu dönüşümün kutup noktasının olmadığı kolayca görülür.

Γ modüler grubun (2.3) sunuşundan faydalanarak elde edilen elemanları tekrar hatırlayalım. Γ nın elemanları T ve S terimleri kullanılarak üretilir. r_i sayısı 0,1 yada 2 ($0\leq i\leq n$) olmak üzere

$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d}=S^{r_0}TS^{r_1}T...S^{r_n}=W(T,S) \qquad (3.1)$$

yazılabilir. Modüler grubun parabolik noktalarını dolayısıyla kutup noktalarını elde etmek için aşağıdaki dönüşümlere ihtiyacımız vardır.

$$TS : z \to z+1, \qquad TS^2 : z \to \frac{z}{z+1}$$

Bu dönüşümlere bloklar dendiğini 2.3.3 Tanımdan biliyoruz.

2.3.5 Teorem ile (2.4) deki bir kelime, bloklar kullanılarak i=0,1,2 ve j=0,1 olmak üzere

$$W(T,S) = S^i (TS)^{m_0} (TS^2)^{n_0} \ldots (TS)^{m_k} (TS^2)^{n_k} T^j$$

şeklinde yazılabileceğini 2.3.5 Teoremde söylemiştik. Blokların üsleri pozitif tamsayılardır fakat m_0 ve n_k sıfır olabilirler.

Örnek olarak Γ modüler grubunun

$$W(T,S) = TSTS^2TS^2TS^2TSTSTSTS^2TSTSTS$$

kelimesini inceleyelim. Bu kelimenin parabolik noktalarını bulmak pekte kolay değildir. Bu kelime bloklar yardımıyla

$$W(T,S) = (TS)(TS^2)^3 (TS)^3 (TS^2)(TS)^3$$

şeklinde yazılır. [6] nolu kaynaktan da görüleceği üzere sürekli kesirler yardımıyla bu kelimenin parabolik noktaları kolaylıkla bulunabilir.

Aşağıda vereceğimiz dört teorem ile (3.1) ile verilen kelimelerin parabolik noktalarını hesaplamaya çalışacağız. Böylece ters fonksiyonun parabolik noktası esas fonksiyonumuzun kutup noktası olacağından bu dört teorem ile sürekli kesirler yardımıyla kutup noktalarını da hesaplamış oluruz. Bu teoremlerin ispatları [6] nolu kaynakta da yer almaktadır.

Bu dört teorem ve ispatlarında, sürekli kesirlerin (2.8) de verilen gösterimi kullanılacaktır. Kelimelerin genel gösterimlerini dört duruma göre ayrı ayrı inceleyeceğiz. Bu incelemeyi başlangıç ve bitiş bloklarının dört farklı durumuna göre yapacağız.

3.2 Teorem: Γ içinde verilen bir kelime TS ile başlayıp TS^2 ile bitiyorsa, yani kelimemiz

$$W(T,S) = S^i (TS)^{m_0} (TS^2)^{n_0} ... (TS)^{m_k} (TS^2)^{n_k} T^j$$

şeklinde ise parabolik noktamız,

Durumlar	**Parabolik noktalar**
$i=0,\ j=0$	$[m_0;n_0,m_1,n_1,...,m_k,n_k]$
$i=0, j=1$	$[m_0;n_0,m_1,n_1,...,m_k]$
$i=1, j=0$	$-\dfrac{1}{[m_0;n_0,m_1,n_1,...,m_k,n_k]+1}$
$i=1, j=1$	$-\dfrac{1}{[m_0;n_0,m_1,n_1,...,m_k]+1}$
$i=2, j=0$	$-1-\dfrac{1}{[m_0;n_0,m_1,n_1,...,m_k,n_k]}$
$i=2, j=1$	$-1-\dfrac{1}{[m_0;n_0,m_1,n_1,...,m_k]}$

İspat: $i = 0$ ve $j = 0$ ise kelimenin formu ;

$$(TS)^{m_0} (TS^2)^{n_0} ... (TS)^{m_k} (TS^2)^{n_k}$$

şeklinde olur. Tümevarımla ispatlayacağız.

$$(TS)^{m_k} (TS^2)^{n_k} (\infty) = [m_k;n_k]$$

olduğu açıktır.

$$(TS)^{m_1} (TS^2)^{n_1} ... (TS)^{m_k} (TS^2)^{n_k} (\infty) = [m_1;n_1,...,m_k,n_k] = K$$

olduğunu kabul edelim. 2.3.4 Teoremden,

$$(TS)^{m_0} (TS^2)^{n_0} (K) = m_0 + \cfrac{1}{n_0 + \cfrac{1}{K}} = [m_0;n_0,m_1,n_1,...,m_k,n_k]$$

bulunur. Böylece $i = 0, j = 0$ için ispat biter.

$i = 0$ ve $j = 1$ ise kelimenin formu;

$$(TS)^{m_0} (TS^2)^{n_0} ... (TS)^{m_k} (TS^2)^{n_k} T$$

şeklindedir. $T(\infty) = 0$, $(TS^2)^{n_k}(0) = 0$ ve $(TS)^{m_k}(0) = m_k$ olduğu açıktır. Diğer adımlar yukarıdaki ispat gibi kolaylıkla gösterilir.

Böylece

$$(TS)^{m_0}(TS^2)^{n_0}...(TS)^{m_k}(TS^2)^{n_{k-1}}(m_k)=[m_0;n_0,m_1,n_1,...,m_k]$$

olur ki bu bize i = 0, j = 0 durumu için parabolik noktayı verir.

$W(T,S)=S^i(TS)^{m_0}(TS^2)^{n_0}...(TS)^{m_k}(TS^2)^{n_k}T^j$ genel durumundaki $0\leq i\leq 2$ ve $0\leq j\leq 1$ değerleri için $T(\infty)=0$, $S(z)=-1/(z+1)$ ile $S^2(z)=-1-1/z$ eşitlikleri kullanılarak istenen sonuçlar elde edilir. Bu yüzden kalan üç teorem ve ispatlarında sadece i = 0, j = 0 durumlarını inceleyeceğiz. $0\leq i\leq 2$ ve $0\leq j\leq 1$ olmak üzere tüm *W(T,S)* kelimeleri için yukarıdaki ana eşitlikler kullanılarak, sürekli kesirler yardımıyla parabolik noktaları kolaylıkla bulunabilir. □

3.3 Teorem: Eğer kelime TS ile başlayıp TS ile bitiyorsa kelimenin formu

$$W(T,S)=S^i(TS)^{m_0}(TS^2)^{n_0}...(TS)^{m_k}(TS^2)^{n_k}(TS)^{m_{k+1}}T^j$$

şeklindedir. Burada i = 0, j = 0 için

$$W^*(T,S)=(TS)^{m_0}(TS^2)^{n_0}...(TS)^{m_k}(TS^2)^{n_k}(TS)^{m_{k+1}}$$

kelimesi için parabolik noktalar

$$[m_0;n_0,m_1,n_1,...,m_k,n_k]$$

formundadır.

İspat: 3.2 Teoremde olduğu gibi ispatlanır. □

3.4 Teorem: Eğer kelime (TS^2) ile başlayıp (TS^2) ile bitiyorsa kelimenin formu

$$W(T,S)=S^i(TS^2)^{m_0}(TS)^{n_0}...(TS^2)^{m_k}(TS)^{n_k}(TS^2)^{m_{k+1}}T^j$$

şeklindedir. Burada da i = 0, j = 0 için

$$W^*(T,S)=(TS^2)^{m_0}(TS)^{n_0}...(TS^2)^{m_k}(TS)^{n_k}(TS^2)^{m_{k+1}}$$

kelimesinin parabolik noktası

$$\frac{1}{[m_0;n_0,m_1,n_1,...,m_k,n_k,m_{k+1}]}$$

formundadır.

İspat: Kelimenin formu

$$W^*(T,S)=(TS^2)^{m_0}(TS)^{n_0}...(TS^2)^{m_k}(TS)^{n_k}(TS^2)^{m_{k+1}}$$

olsun. $(TS^2)^{m_{k+1}}(\infty)=\dfrac{1}{m_{k+1}}$ bulunur. İspat için yine tümevarıma başvuracağız.

$$(TS^2)^{m_k}(TS)^{n_k}(\frac{1}{m_{k+1}})=\frac{1}{[m_k;n_k,m_{k+1}]}$$

olduğu açıktır.

$$(TS^2)^{m_1}(TS)^{n_1}...(TS^2)^{m_k}(TS)^{n_k}(\frac{1}{m_{k+1}})=\frac{1}{[m_1;n_1,...,m_k,n_k,m_{k+1}]}$$

olduğunu kabul edelim. Son olarak bu sonucu $(TS^2)^{m_0}(TS)^{n_0}$ da yerine yazarsak

$$(TS^2)^{m_0}(TS)^{n_0}...(TS^2)^{m_k}(TS)^{n_k}(TS^2)^{m_{k+1}}(\infty)=\frac{1}{[m_0;n_0,m_1,n_1,...,m_k,n_k,m_{k+1}]}$$

elde ederiz. □

3.5 Teorem: Kelimemiz TS^2 ile başlayıp TS ile bitiyorsa kelimenin formu

$$W(T,S)=S^i(TS^2)^{m_0}(TS)^{n_0}...(TS^2)^{m_k}(TS)^{n_k}T^j$$

şeklinde olur. Bu yüzden i = 0, j = 0 koşuluyla elde edilen kelime

$$W^*(T,S)=(TS^2)^{m_0}(TS)^{n_0}...(TS^2)^{m_k}(TS)^{n_k}$$

şeklindedir ve parabolik noktalarda

$$\frac{1}{[m_0;n_0,m_1,n_1,...,m_k]}$$

formundadır.

İspat: 3.2 Teoremdeki yöntemle benzer şekilde ispatlanır. □

Şimdi yukarıda verilen teoremlerle ilgili örnekler verelim.

3.6 Örnek: $f(z)=STS^2TST\in\Gamma$ olmak üzere bu elemanın kutup noktasını hesaplayınız.

Çözüm:

$T(z)=-1/z$ ve $S(z)=-1/(z+1)$ olduğunu biliyoruz. Fonksiyonlarda bileşke işlemini kullanarak $f(z)=STS^2TST=\dfrac{-2z+1}{3z-2}$ eşitliğini elde ederiz. Bu eşitlikten kutup noktasının $z=\dfrac{2}{3}$ olduğu kolaylıkla görülmektedir. Şimdi bu noktayı yukarıda verilen teoremler yardımıyla hesaplayalım. Dikkat edilirse

$f(z)=\dfrac{-2z+1}{3z-2}$ in kutup noktası $f^{-1}(z)=\dfrac{2z+1}{3z+2}$ in parabolik noktasıdır. O halde f fonksiyonunun tersi

$$f^{-1}(z)=TS^2TSTS^2=(TS^2)(TS)(TS^2)$$

şeklinde yazıldığında fonksiyonun parabolik noktası sürekli kesirler yardımıyla kolayca hesaplanabilir. 3.4 Teoremden

$f^{-1}(z)=(TS^2)^{m_0}(TS)^{n_0}(TS^2)^{m_1}$ fonksiyonunda $m_0=1$, $n_0=1$ ve $m_1=1$ eşitlikleri alınırsa

$$\frac{1}{[m_0;n_0,m_1]}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}=\frac{2}{3}$$

elde edilir. □

3.7 Örnek: S^2TSTS^2T fonksiyonunun kutup noktasını hesaplayınız.

Çözüm:

Bileşke işleminden $f(z)=S^2TSTS^2T=\dfrac{-2z+3}{z-2}$ dönüşümünü elde ederiz.

Buradan kutup noktasının z = 2 olduğu açıktır.

$f^{-1}(z)=(TS)(TS^2)(TS)$ olduğundan 3.3 Teoremden [1;1] sürekli kesrinden 2 sonucu elde edilir. □

4. MODÜLER GRUP ELEMANLARININ REZİDÜLERİ

Modüler grubun $f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ $(c\neq 0)$ elemanları basit kutba sahiptir. 2.7.7 Teoremde basit kutba sahip fonksiyonların rezidülerinin, limit yardımıyla nasıl bulunduğunu vermiştik. Bu bölümde, modüler grup elemanlarının rezidüleri, bu yoldan farklı olarak, modüler grup sunuşu kullanılarak elde edilmiştir.

Şimdi vereceğimiz teorem, modüler gruptaki $f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ $(c\neq 0)$ elemanlarının rezidülerinin c katsayısı yardımıyla hesaplanabileceği ile ilgilidir.

4.1 Teorem: $f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ $(c\neq 0)$ şeklindeki modüler grup elemanlarının rezidüsü $-\dfrac{1}{c^2}$ dir.

İspat: Teoremde verilen f(z) dönüşümü için rezidü $\lim\limits_{z\to z_0}[(z-z_0)f(z)]=a_{-1}$ olduğundan şimdi bu limiti modüler grup elemanlarına uygulayalım. Burada $z_0=-\dfrac{d}{c}$ noktasının basit kutup noktasıdır.

$$\lim_{z\to -\frac{d}{c}}[(z+\frac{d}{c})\frac{az+b}{cz+d}]=\lim_{z\to -\frac{d}{c}}[(z+\frac{d}{c})\frac{az+b}{c(z+\frac{d}{c})}]=\lim_{z\to -\frac{d}{c}}[\frac{a(-\frac{d}{c})+b}{c}]$$

$$=\lim_{z\to -\frac{d}{c}}[\frac{\frac{bc-ad}{c}}{c}]=-\frac{1}{c^2}.\square$$

4.2 Sonuç: $f(z)$ dönüşümünün rezidüsü ile $f^{-1}(z)$ dönüşümünün rezidüsü aynıdır.

İspat: $f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ ve $f^{-1}(z)=\dfrac{-dz+b}{cz-a}$ olduğundan ve 4.1 Teoremden açıktır. □

O halde modüler grup elemanlarından basit kutba sahip olanların rezidülerini bulurken c katsayısını bulmak yeterlidir. Ancak kelime şeklinde verilen bir elemanın rezidüsünü bu yolla bulmak her zaman çokta kolay değildir. Şimdi de kelime şeklinde verilen modüler grup elemanlarının blok yazılışlarındaki üslerini kullanarak rezidüyü bulmaya yarayan teoremler için ön bilgileri verelim.

Modüler grup elemanlarını, aşağıda vereceğimiz teoremler için, genel olarak

$$S^{i}(TS)^{n_k}(TS^2)^{m_k}\ldots(TS)^{n_2}(TS^2)^{m_2}(TS)^{n_1}(TS^2)^{m_1}T^{j} \qquad (4.1)$$

şeklinde göstereceğiz. Burada n_k ve m_1 sıfır olabilir. Bu gösterimde i = 0, 1, 2 ve j = 0, 1 şeklindedir.

Öncelikle i = 0, j = 0 durumunu inceleyelim. Bu durumda (4.1) deki kelimemiz

$$W(T,S)=(TS)^{n_k}(TS^2)^{m_k}\ldots(TS)^{n_2}(TS^2)^{m_2}(TS)^{n_1}(TS^2)^{m_1} \qquad (4.2)$$

şeklinde olacaktır. (4.2) deki başlangıç ve bitiş bloklarına göre dört durum vardır. Rezidüyü hesaplamak için bulacağımız c katsayısı için öncelikle bir yardımcı teorem verelim.

4.3 Yardımcı Teorem: (4.2) ile verilen kelimenin c katsayısını hesaplarken baştaki ve sondaki TS bloklarının bir önemi yoktur.

İspat: $(TS)^{n_k}=z+n_k$ ve $(TS)^{n_1}=z+n_1$ olduğundan açıktır. □

Bu yardımcı teoremden sonra (4.2) deki kelimenin c katsayısı için şu teoremi verebiliriz.

4.4 Teorem: $W(T,S)=(TS)^{n_k}(TS^2)^{m_k}...(TS)^{n_2}(TS^2)^{m_2}(TS)^{n_1}(TS^2)^{m_1}=\dfrac{az+b}{cz+d}$

için

$$c=\sum_{r=1}^{k}\{[(r!)C(m_i,r)][(r-1)!C(n_i,(r-1))]\}$$

formülüyle hesaplanır.

(Not: Seçilecek her bir n_i üssü ardışık her iki m_i arasında bir tane olacak şekilde seçilmelidir. $0\le i\le k$, $i,k\in\mathbf{N}$)

İspat: Tümevarımla ispatlayacağız.

k = 1 için kelime $(TS)^{n_1}(TS^2)^{m_1}$ şeklinde ise

c = $1!C(m_i,1).0!C(n_i,0)=m_1$ bulunur.

Gerçektende $(TS)^{n_1}(TS^2)^{m_1}=\dfrac{(1+m_1n_1)z+n_1}{m_1z+1}$ den c = m_1 dir.

k = n için kelime $(TS)^{n_k}(TS^2)^{m_k}...(TS)^{n_2}(TS^2)^{m_2}(TS)^{n_1}(TS^2)^{m_1}$ şeklinde ise

c = $\sum_{r=1}^{n}\{[(r!)C(m_i,r)][(r-1)!C(n_i,(r-1))]\}$ olduğunu kabul edelim.

k = n + 1 için kelime $(TS)^{n_{k+1}}(TS^2)^{m_{k+1}}(TS)^{n_k}(TS^2)^{m_k}...(TS)^{n_1}(TS^2)^{m_1}$ şeklinde olup

$$c=[(n+1)!C(m_i,n+1)n!C(n_i,n)]+\sum_{r=1}^{n}\{[(r!)C(m_i,r)][(r-1)!C(n_i,(r-1))]\}$$ dir.

Buradan da

c = $\sum_{r=1}^{n+1}\{[(r!)C(m_i,r)][(r-1)!C(n_i,(r-1))]\}$ elde edilir. □

Şimdi de (4.1) genel durumunda i = 0 ve j = 1 durumu olan

$$W(T,S)=(TS)^{n_k}(TS^2)^{m_k}...(TS)^{n_2}(TS^2)^{m_2}(TS)^{n_1}(TS^2)^{m_1}T \qquad (4.3)$$

kelimesini ele alalım. Yine burada başlangıç ve bitiş bloklarına göre dört durum söz konusudur. Bununla ilgili önce yardımcı teoremi verelim.

4.5 Yardımcı Teorem: (4.3) deki kelimenin c katsayısının hesaplanmasında sondaki TS^2 ve baştaki TS bloklarının bir önemi yoktur.

İspat: $(TS)^{n_k} = z + n_k$ ve $(TS^2)^{m_1} T = -\dfrac{1}{z - m_1}$ olduğundan açıktır. □

Yukarıdaki Teorem yardımıyla şimdi i = 0 ve j = 1 durumu için ana teoremi verelim.

4.6 Teorem:

$$W(T,S) = (TS)^{n_k}(TS^2)^{m_k}...(TS)^{n_2}(TS^2)^{m_2}(TS)^{n_1}(TS^2)^{m_1}T = \frac{az+b}{cz+d}$$

kelimesi için

$$c = \sum_{r=0}^{k}\left[(r!)^2 C(n_i,r)C(m_i,r)\right]$$

formülüyle hesaplanır.

(Not: Önce n_i ler seçilir. Daha sonra seçilecek her bir m_i üssü sırasıyla, seçilmiş her bir n_i nin solundan, eğer varsa her iki n üssü arasında bir m üssü olacak şekilde seçilir.)

İspat: İspatı tümevarımla yapacağız.

(4.3) teki kelime

$$(TS)^{n_k}(TS^2)^{m_k}...(TS)^{n_2}(TS^2)^{m_2}(TS)^{n_1}(TS^2)^{m_1}T$$

olduğundan k = 0 için kelimemiz sadece T den oluşur ve c = 1 olduğu kolayca görülür.

k = n için $\sum_{r=0}^{k}\left[(r!)^2 C(n_i,r)C(m_i,r)\right]$ olduğunu kabul edelim.

k = n+1 için ;

$$\left[((n+1)!)^2 C(n_i,n+1)C(m_i,n+1)\right] + \sum_{r=0}^{n}\left[(r!)^2 C(n_i,r)C(m_i,r)\right]$$

buradan da

$$c = \sum_{r=0}^{n+1}\left[(r!)^2 C(n_i,r)C(m_i,r)\right]$$

elde edilir. □

Sıradaki i = 2 ve j = 0 durumunu inceleyelim. Bu durumda

$$W(T,S)=S^2(TS)^{n_k}(TS^2)^{m_k}...(TS)^{n_2}(TS^2)^{m_2}(TS)^{n_1}(TS^2)^{m_1} \qquad (4.4)$$

kelimesinin c katsayısını hesaplamak için öncelikle yardımcı teoremimizi verelim.

4.7 Yardımcı Teorem:

$$S^2(TS)^{n_k}(TS^2)^{m_k}...(TS)^{n_2}(TS^2)^{m_2}(TS)^{n_1}(TS^2)^{m_1}$$

kelimesinin rezidüsü ile

$$(TS^2)^{n_k}(TS)^{m_k}...(TS^2)^{n_2}(TS)^{m_2}(TS^2)^{n_1}(TS)^{m_1}T$$

kelimesinin rezidüsü aynıdır.

İspat: Dikkat edilirse baştaki S^2 atılarak tüm TS ler ile TS^2 ler yer değiştirilip sona T eklenmiştir.

$S^2(TS^2)^{m_1}=-\dfrac{(1+m_1)z+1}{z}$ kelimesindeki c katsayısı ile $(TS)^{m_1}T=\dfrac{m_1z-1}{z}$ kelimesindeki c katsayısının eşit olduğu açıktır. □

4.8 Teorem: Genel gösterimi (4.4) ile verilen

$$W(T,S)=S^2(TS)^{n_k}(TS^2)^{m_k}...(TS)^{n_2}(TS^2)^{m_2}(TS)^{n_1}(TS^2)^{m_1}$$

kelimenin c katsayısı

$$c=\sum_{r=0}^{k}\left[(r!)^2C(n_i,r)C(m_i,r)\right]$$

formülüyle bulunur.

İspat: 4.6 Teoremin ispatına benzer şekilde yapılır. □

. Şimdi de i = 2 ve j = 1 durumunu inceleyelim. Genel gösterimi

$$W(T,S)=S^2(TS)^{n_k}(TS^2)^{m_k}...(TS)^{n_2}(TS^2)^{m_2}(TS)^{n_1}(TS^2)^{m_1}T \qquad (4.5)$$

olan kelimenin c katsayısını hesaplamak için önce bir yardımcı teorem verelim.

4.9 Yardımcı Teorem:

$$S^2(TS)^{n_k}(TS^2)^{m_k}...(TS)^{n_2}(TS^2)^{m_2}(TS)^{n_1}(TS^2)^{m_1}T$$

kelimesinin c katsayısı ile

$$(TS^2)^{n_k}(TS)^{m_k}...(TS^2)^{n_2}(TS)^{m_2}(TS^2)^{n_1}(TS)^{m_1}$$

kelimesinin c katsayısı aynıdır.

İspat: Dikkat edilirse baştaki S^2 ve sondaki T atılıp, tüm TS ler ile TS^2 ler yer değiştirilmiştir.

$S^2(TS^2)^{m_1}T = z - m_1 - 1$ kelimesindeki c katsayısı ile $(TS)^{m_1} = z + m_1$ kelimesindeki c katsayısı ve yine $S^2(TS)^{m_1}T = -\dfrac{(1+m_1)z-1}{m_1 z - 1}$ kelimesindeki c katsayısı ile $(TS^2)^{m_1}$ kelimesindeki c katsayısının aynı olduğu kolayca görülür.□

Şimdi de (4.5) te verilen kelimenin rezidüsünü hesaplamak için bulacağımız c katsayısı için ana teoremi verelim.

4.10 Teorem: $W(T,S) = S^2(TS)^{n_k}(TS^2)^{m_k}...(TS)^{n_2}(TS^2)^{m_2}(TS)^{n_1}(TS^2)^{m_1}T$ kelimesinin c katsayısı

$$c = \sum_{r=1}^{k}\left\{\left[(r!)C(n_i,r)\right]\left[(r-1)!C(m_i,(r-1))\right]\right\}$$

formülüyle bulunur.

İspat: 4.4 Teoremin ispatına benzer şekilde yapılır.□

Şimdi de i = 1 ve j = 1 durumu için genel gösterimi

$$W(T,S) = S(TS)^{n_k}(TS^2)^{m_k}...(TS)^{n_2}(TS^2)^{m_2}(TS)^{n_1}(TS^2)^{m_1}T \qquad (4.6)$$

olan kelimenin c katsayısı için önce yardımcı teoremi verelim.

4.11 Yardımcı Teorem: (4.6) da genel gösterimi verilen kelimenin rezidüsünü hesaplamak için bulacağımız c katsayısı için en sondaki TS^2 nin bir önemi yoktur.

İspat: $S(TS^2)^{m_1}T = -\dfrac{z-m_1}{z-m_1-1}$ olduğundan açıktır. □

4.11 Teorem: $W(T,S) = S(TS)^{n_k}(TS^2)^{m_k}...(TS)^{n_2}(TS^2)^{m_2}(TS)^{n_1}(TS^2)^{m_1}T$ kelimesinin rezidüsünü hesaplamak için bulacağımız c katsayısı

$$c = 1+\sum_{r=1}^{k}\left\{\left[(r!)C(n_i,r)\right]\left[(r-1)!C(m_i,(r-1))\right]+\left[(r!)^2C(n_i,r)C(m_i,r)\right]\right\}$$

formülüyle hesaplanır.

İspat: Tümevarımla yapacağız.

k = 1 için $S(TS)^{n_1}(TS^2)^{m_1}T = \dfrac{-z+m_1}{(1+n_1)z-m_1n_1-m_1}$ den c = $1+n_1$ dir.

k = n için $W(T,S) = S(TS)^{n_k}(TS^2)^{m_k}...(TS)^{n_2}(TS^2)^{m_2}(TS)^{n_1}(TS^2)^{m_1}T$ kelimesi

için $$c = 1+\sum_{r=1}^{n}\left\{\left[(r!)C(n_i,r)\right]\left[(r-1)!C(m_i,(r-1))\right]+\left[(r!)^2C(n_i,r)C(m_i,r)\right]\right\}$$

olduğunu kabul edelim.

k = n+1 için $W(T,S) = S(TS)^{n_{k+1}}(TS^2)^{m_{k+1}}(TS)^{n_k}(TS^2)^{m_k}...(TS)^{n_1}(TS^2)^{m_1}T$ kelimesinin c katsayısı

$$c = 1+\sum_{r=1}^{n}\left\{\left[(r!)C(n_i,r)\right]\left[(r-1)!C(m_i,(r-1))\right]+\left[(r!)^2C(n_i,r)C(m_i,r)\right]\right\}+$$

$$\left\{\left[((n+1)!)C(n_i,n+1)\right]\left[(n)!C(m_i,n)\right]+\left[((n+1)!)^2C(n_i,n+1)C(m_i,n+1)\right]\right\}$$

ve buradan da

$$c = 1+\sum_{r=1}^{n+1}\left\{\left[(r!)C(n_i,r)\right]\left[(r-1)!C(m_i,(r-1))\right]+\left[(r!)^2C(n_i,r)C(m_i,r)\right]\right\}$$

elde edilir. □

Şimdi de i = 1 ve j = 0 durumunu inceleyelim. Genel gösterimi

$$W(T,S) = S(TS)^{n_k}(TS^2)^{m_k}...(TS)^{n_1}(TS^2)^{m_1} \qquad (4.7)$$

şeklinde olan kelime için önce yardımcı teoremi verelim.

4.12 Yardımcı Teorem: (4.7) de verilen kelimenin rezidüsünü hesaplamak için bulacağımız c katsayısı için en sondaki TS nin bir önemi yoktur.

İspat: $S(TS)^{n_1} = -\dfrac{1}{z+n_1+1}$ olduğu açıktır. □

Şimdi de (4.7) deki kelimenin c katsayısını hesaplamak için ana teoremi verelim.

4.13 Teorem: $W(T,S) = S(TS)^{n_k}(TS^2)^{m_k}...(TS)^{n_1}(TS^2)^{m_1}$ kelimesinin rezidüsünü hesaplamak için bulacağımız c katsayısı

$$c = 1 + \sum_{r=1}^{k}\left\{\left[(r!)C(m_i,r)\right]\left[(r-1)!C(n_i,(r-1))\right] + \left[(r!)^2 C(m_i,r)C(n_i,r)\right]\right\}$$

formülüyle hesaplanır.

İspat: 4.11 Teoremin ispatına benzer şekilde yapılır. □

Şimdi yukarıda verilen teoremlerle ilgili örnekler vererek rezidünün hesaplanmasını ayrıntılı bir şekilde inceleyelim.

4.14 Örnek: $f(z) \in \Gamma$ olmak üzere

$f(z) = STS^2TST$ fonksiyonunun rezidüsünü hesaplayınız.

Çözüm:

$f(z) = S(TS^2)(TS)T = -\dfrac{2z-1}{3z-2}$ olduğundan c = 3 olduğu açıktır. Şimdi de 4.11 Teoremde verdiğimiz formülle hesaplayalım.

$$c = 1 + \sum_{r=1}^{k}\left\{\left[(r!)C(n_i,r)\right]\left[(r-1)!C(m_i,(r-1))\right] + \left[(r!)^2 C(n_i,r)C(m_i,r)\right]\right\}$$

Burada $m_1 = 1$ ve $n_1 = 1$ dir. Formülde yerine yazarsak

c = 1+[1!C(1,1).0!C(1,0)+1!C(1,1)C(1,1)=1+1+1=3 ve rezidü -1/9 bulunur.

Ayrıca $f(z)$ fonksiyonunun rezidüsü ile $f^{-1}(z)$ fonksiyonunun rezidüsü aynı olduğundan $f^{-1}(z) = (TS^2)(TS)(TS^2)$ dönüşümünü 4.4 Teoremde verdiğimiz formülden yararlanarakta bulabiliriz.

$$c = \sum_{r=1}^{k}\left\{\left[(r!)C(m_i,r)\right]\left[(r-1)!C(n_i,(r-1))\right]\right\}$$

olduğundan c = 1+1+1.1 = 3 bulunur. □

4.15 Örnek: $(TS)^9(TS^2)^7(TS)^5(TS^2)^3(TS)^2(TS^2)^1$ kelimesinin rezidüsünü hesaplayınız.

Çözüm :

$(TS)^n = z+n$ ve $(TS^2)^n = \dfrac{z}{nz+1}$ dönüşümlerini kullanarak modüler grubun bileşke işlemine göre önce verilen kelimeyi hesaplayalım. Sonrada ilgili teoremde verilen formülle hesaplayıp c sayılarını karşılaştıralım. Bundan sonraki tüm örneklerde de aynı yol takip edilecektir.

$$(TS^2)^1 = \frac{z}{z+1}$$

$$(TS)^2(TS^2)^1 = \frac{z}{z+1}+2 = \frac{3z+2}{z+1}$$

$$(TS^2)^3(TS)^2(TS^2)^1 = \frac{\dfrac{3z+2}{z+1}}{3(\dfrac{3z+2}{z+1})+1} = \frac{3z+2}{10z+7}$$

$$(TS)^5(TS^2)^3(TS)^2(TS^2)^1 = \frac{3z+2}{10z+7}+5 = \frac{53z+37}{10z+7}$$

$$(TS^2)^7(TS)^5(TS^2)^3(TS)^2(TS^2)^1 = \frac{\dfrac{53z+37}{10z+7}}{7(\dfrac{53z+37}{10z+7})+1} = \frac{53z+37}{381z+266}$$

$$(TS)^9(TS^2)^7(TS)^5(TS^2)^3(TS)^2(TS^2)^1 = \frac{53z+37}{381z+266}+9 = \frac{3482z+2431}{381z+266}$$

Buradan c = 381 bulunur. Rezidü $-\dfrac{1}{c^2}$ olduğundan $-\dfrac{1}{145161}$ bulunur.

Kelime $(TS)^{n_k}(TS^2)^{m_k}...(TS)^{n_2}(TS^2)^{m_2}(TS)^{n_1}(TS^2)^{m_1}$ şeklinde olduğundan

$$\sum_{r=1}^{k}\left\{\left[(r!)C\left(m_i,r\right)\right]\left[(r-1)!C\left(n_i,(r-1)\right)\right]\right\}$$

formülü kullanılarak

$c = 1+3+7+1.3.2+1.7.2+1.7.5+3.7.5+1.3.7.2.5 = 381$ bulunur. □

4.16 Örnek: $(TS)^6(TS^2)^3(TS)^5(TS^2)^4(TS)^1$ kelimesinin rezidüsünü hesaplayınız.

Çözüm:

$$(TS)^1 = z+1$$

$$(TS^2)^4(TS)^1 = \frac{z+1}{4(z+1)+1} = \frac{z+1}{4z+5}$$

$$(TS)^5(TS^2)^4(TS)^1 = \frac{z+1}{4z+5}+5 = \frac{21z+26}{4z+5}$$

$$(TS^2)^3(TS)^5(TS^2)^4(TS)^1 = \frac{\frac{21z+26}{4z+5}}{3(\frac{21z+26}{4z+5})+1} = \frac{21z+26}{67z+83}$$

$$(TS)^6(TS^2)^3(TS)^5(TS^2)^4(TS)^1 = \frac{21z+26}{67z+83}+6 = \frac{411z+524}{67z+83}$$

c = 67 bulunur. Şimdi ise $(TS)^6(TS^2)^3(TS)^5(TS^2)^4(TS)^1$ kelimesine $\sum_{r=1}^{k}\{[(r!)C(m_i,r)][(r-1)!C(n_i,(r-1))]\}$ formülünü uygulayalım.

$c = 4+3+4.3.5 = 67$ ve rezidü ise -1/4489 bulunur. □

4.17 Örnek: $(TS)^5(TS^2)^4(TS)^3(TS^2)^2(TS)^1$ kelimesinin rezidüsünü hesaplayınız.

Çözüm:

$$(TS)^1 = z+1$$

$$(TS^2)^2(TS)^1 = \frac{z+1}{2(z+1)+1} = \frac{z+1}{2z+3}$$

$$(TS)^3(TS^2)^2(TS)^1 = \frac{z+1}{2z+3}+3 = \frac{7z+10}{2z+3}$$

$$(TS^2)^4(TS)^3(TS^2)^2(TS)^1 = \frac{\frac{7z+10}{2z+3}}{4(\frac{7z+10}{2z+3})+1} = \frac{7z+10}{30z+43}$$

$$(TS)^5(TS^2)^4(TS)^3(TS^2)^2(TS)^1 = \frac{7z+10}{30z+43}+5 = \frac{157z+225}{30z+43}$$

c = 30 bulunur. Şimdi de $(TS)^5(TS^2)^4(TS)^3(TS^2)^2(TS)^1$ kelimesine

$\sum_{r=1}^{k}\{[(r!)C(m_i,r)][(r-1)!C(n_i,(r-1))]\}$ formülünü uygulayalım.

$c = 2+4+2.4.3 = 30$ ve rezidü ise -1/900 bulunur. □

4.18 Örnek: $(TS^2)^1(TS)^3(TS^2)^2(TS)^1(TS^2)^3$ kelimesinin rezidüsünü hesaplayınız.

Çözüm :

$$(TS^2)^3 = \frac{z}{3z+1}$$

$$(TS)^1(TS^2)^3 = \frac{z}{3z+1}+1 = \frac{4z+1}{3z+1}$$

$$(TS^2)^2(TS)^1(TS^2)^3 = \frac{\frac{4z+1}{3z+1}}{2(\frac{4z+1}{3z+1})+1} = \frac{4z+1}{11z+3}$$

$$(TS)^3(TS^2)^2(TS)^1(TS^2)^3 = \frac{4z+1}{11z+3}+3 = \frac{37z+10}{11z+3}$$

$$(TS^2)^1(TS)^3(TS^2)^2(TS)^1(TS^2)^3 = \frac{\frac{37z+10}{11z+3}}{\frac{37z+10}{11z+3}+1} = \frac{37z+10}{48z+13}$$

c = 48 bulunur. Şimdi de $(TS^2)^1(TS)^3(TS^2)^2(TS)^1(TS^2)^3$ kelimesine

$\sum_{r=1}^{k}\{[(r!)C(m_i,r)][(r-1)!C(n_i,(r-1))]\}$ formülünü uygulayalım.

$c = 3+2+1+3.2.1+3.1.1+3.1.3+2.1.3+3.2.1.1.3 = 48$ ve rezidü ise -1/2304 bulunur. □

4.19 Örnek: $(TS^2)^6(TS)^5(TS^2)^4(TS)^3(TS^2)^2(TS)^1$ kelimesinin rezidüsünü hesaplayınız.

Çözüm :

$$(TS)^1 = z+1$$

$$(TS^2)^2(TS)^1 = \frac{z+1}{2(z+1)+1} = \frac{z+1}{2z+3}$$

$$(TS)^3(TS^2)^2(TS)^1 = \frac{z+1}{2z+3}+3 = \frac{7z+10}{2z+3}$$

$$(TS^2)^4(TS)^3(TS^2)^2(TS)^1 = \frac{\frac{7z+10}{2z+3}}{4(\frac{7z+10}{2z+3})+1} = \frac{7z+10}{30z+43}$$

$$(TS)^5(TS^2)^4(TS)^3(TS^2)^2(TS)^1 = \frac{7z+10}{30z+43}+5 = \frac{157z+225}{30z+43}$$

$$(TS^2)^6(TS)^5(TS^2)^4(TS)^3(TS^2)^2(TS)^1 = \frac{\frac{157z+225}{30z+43}}{6(\frac{157z+225}{30z+43})+1} = \frac{157z+225}{972z+1393}$$

c = 972 bulunur. Şimdi de $(TS^2)^6(TS)^5(TS^2)^4(TS)^3(TS^2)^2(TS)^1$ kelimesine

$$\sum_{r=1}^{k}\{[(r!)C(m_i,r)][(r-1)!C(n_i,(r-1))]\}$$

formülünü uygulayalım.

$c = 2+4+6+2.4.3+2.6.3+2.6.5+4.6.5+2.4.6.3.5 = 972$ ve rezidü ise -1/944784 bulunur. □

4.20 Örnek: $(TS)^6(TS^2)^5(TS)^4(TS^2)^3(TS)^2(TS^2)^1$ kelimesinin rezidüsünü hesaplayınız.

Çözüm :

$$(TS^2)^1 = \frac{z}{z+1}$$

$$(TS)^2(TS^2)^1 = \frac{z}{z+1}+2 = \frac{3z+2}{z+1}$$

$$(TS^2)^3(TS)^2(TS^2)^1 = \frac{\frac{3z+2}{z+1}}{3(\frac{3z+2}{z+1})+1} = \frac{3z+2}{10z+7}$$

$$(TS)^4(TS^2)^3(TS)^2(TS^2)^1 = \frac{3z+2}{10z+7}+4 = \frac{43z+30}{10z+7}$$

$$(TS^2)^5(TS)^4(TS^2)^3(TS)^2(TS^2)^1 = \frac{\dfrac{43z+30}{10z+7}}{5(\dfrac{43z+30}{10z+7})+1} = \frac{43z+30}{225z+157}$$

$$(TS)^6(TS^2)^5(TS)^4(TS^2)^3(TS)^2(TS^2)^1 = \frac{43z+30}{225z+157}+6 = \frac{1393z+972}{225z+157}$$

c = 225 bulunur. Şimdi de $(TS)^6(TS^2)^5(TS)^4(TS^2)^3(TS)^2(TS^2)^1$ kelimesine

$$\sum_{r=1}^{k}\left\{\left[(r!)C(m_i,r)\right]\left[(r-1)!C(n_i,(r-1))\right]\right\}$$

formülünü uygulayalım.

$c = 1+3+5+1.3.2+1.5.2+1.5.4+3.5.4+1.3.5.2.4 = 225$ ve rezidü ise -1/50625 bulunur. □

4.21 Örnek: $(TS^2)^7(TS)^5(TS^2)^3T$ kelimesinin rezidüsünü hesaplayınız.

Çözüm :

$$T = -\frac{1}{z}$$

$$(TS^2)^3T = \frac{-\dfrac{1}{z}}{3(-\dfrac{1}{z})+1} = \frac{-1}{z-3}$$

$$(TS)^5(TS^2)^3T = \frac{-1}{z-3}+5 = \frac{5z-16}{z-3}$$

$$(TS^2)^7(TS)^5(TS^2)^3T = \frac{\dfrac{5z-16}{z-3}}{7(\dfrac{5z-16}{z-3})+1} = \frac{5z-16}{36z-105}$$

c = 36 bulunur. Şimdi de $(TS^2)^7(TS)^5(TS^2)^3T$ kelimesine

$$\sum_{r=0}^{k}\left[(r!)^2C(n_i,r)C(m_i,r)\right]$$

formülünü uygulayalım. $c = 1+5.7 = 36$ ve rezidü ise -1/1296 bulunur. □

4.22 Örnek: $(TS)^7(TS^2)^5(TS)^3T$ kelimesinin rezidüsünü hesaplayınız.

Çözüm :

$$T = -\frac{1}{z}$$

$$(TS)^3T = -\frac{1}{z}+3=\frac{3z-1}{z}$$

$$(TS^2)^5(TS)^3T = \frac{\frac{3z-1}{z}}{5(\frac{3z-1}{z})+1}=\frac{3z-1}{16z-5}$$

$$(TS)^7(TS^2)^5(TS)^3T = \frac{3z-1}{16z-5}+7=\frac{105z-36}{16z-5}$$

c = 16 bulunur. Şimdi de $(TS)^7(TS^2)^5(TS)^3T$ kelimesine

$$\sum_{r=0}^{k}\left[(r!)^2C(n_i,r)C(m_i,r)\right]$$

formülünü uygulayalım. $c=1+3.5=16$ ve rezidü ise -1/256 bulunur. □

4.23 Örnek: $S^2\left(TS^2\right)^7\left(TS\right)^5\left(TS^2\right)^3$ kelimesinin rezidüsünü hesaplayınız.

Çözüm :

$$\left(TS^2\right)^3= \frac{z}{3z+1}$$

$$\left(TS\right)^5\left(TS^2\right)^3 = \frac{z}{3z+1}+5=\frac{16z+5}{3z+1}$$

$$\left(TS^2\right)^7\left(TS\right)^5\left(TS^2\right)^3 = \frac{\frac{16z+5}{3z+1}}{7(\frac{16z+5}{3z+1})+1}=\frac{16z+5}{115z+36}$$

$$S^2\left(TS^2\right)^7\left(TS\right)^5\left(TS^2\right)^3 = -\frac{\frac{16z+5}{115z+36}+1}{\frac{16z+5}{115z+36}}=-\frac{131z+41}{16z+5}$$

c= 16 bulunur. Şimdi de $S^2\left(TS^2\right)^7\left(TS\right)^5\left(TS^2\right)^3$ kelimesine

$$\sum_{r=0}^{k}\left[(r!)^2 C(m_i,r)C(n_i,r)\right]$$

formülünü uygulayalım. $c=1+3.5=16$ ve rezidü ise -1/ 256 bulunur. □

4.24 Örnek: $S^2\left(TS^2\right)^9\left(TS\right)^7\left(TS^2\right)^5\left(TS\right)^3\left(TS^2\right)^1$ kelimesinin rezidüsünü hesaplayınız.

Çözüm :

$$\left(TS^2\right)^1=\frac{z}{z+1}$$

$$\left(TS\right)^3\left(TS^2\right)^1=\frac{z}{z+1}+3=\frac{4z+3}{z+1}$$

$$\left(TS^2\right)^5\left(TS\right)^3\left(TS^2\right)^1=\frac{\frac{4z+3}{z+1}}{5(\frac{4z+3}{z+1})+1}=\frac{4z+3}{21z+16}$$

$$\left(TS\right)^7\left(TS^2\right)^5\left(TS\right)^3\left(TS^2\right)^1=\frac{4z+3}{21z+16}+7=\frac{151z+115}{21z+16}$$

$$\left(TS^2\right)^9\left(TS\right)^7\left(TS^2\right)^5\left(TS\right)^3\left(TS^2\right)^1=\frac{\frac{151z+115}{21z+16}}{9(\frac{151z+115}{21z+16})+1}=\frac{151z+115}{1380z+1051}$$

$$S^2\left(TS^2\right)^9\left(TS\right)^7\left(TS^2\right)^5\left(TS\right)^3\left(TS^2\right)^1=-\frac{\frac{151z+115}{1380z+1051}+1}{\frac{151z+115}{1380z+1051}}=-\frac{1531z+1166}{151z+115}$$

c = 151 bulunur. Şimdi de $S^2\left(TS^2\right)^9\left(TS\right)^7\left(TS^2\right)^5\left(TS\right)^3\left(TS^2\right)^1$ kelimesine

$$\sum_{r=0}^{k}\left[(r!)^2 C(m_i,r)C(n_i,r)\right]$$

formülünü uygulayalım.

$c=1+1.3+1.7+5.7+1.3.5.7=151$ ve rezidüsü -1/22801 bulunur. □

4.25 Örnek: $S\left(TS^2\right)^7\left(TS\right)^5\left(TS^2\right)^3$ kelimesinin rezidüsünü hesaplayınız.

Çözüm :

$$\left(TS^2\right)^3 = \frac{z}{3z+1}$$

$$\left(TS\right)^5\left(TS^2\right)^3 = \frac{z}{3z+1}+5 = \frac{16z+5}{3z+1}$$

$$\left(TS^2\right)^7\left(TS\right)^5\left(TS^2\right)^3 = \frac{\dfrac{16z+5}{3z+1}}{7(\dfrac{16z+5}{3z+1})+1} = \frac{16z+5}{115z+36}$$

$$S\left(TS^2\right)^7\left(TS\right)^5\left(TS^2\right)^3 = -\frac{1}{\dfrac{16z+5}{115z+36}+1} = -\frac{115z+36}{131z+41}$$

c = 131 bulunur. Şimdi de $S\left(TS^2\right)^7\left(TS\right)^5\left(TS^2\right)^3$ kelimesine

$$\sum_{r=1}^{k}\left\{\left[(r!)C\left(m_i,r\right)\right]\left[(r-1)!C\left(n_i,(r-1)\right)\right]\right\}+\sum_{r=0}^{k}\left[(r!)^2C(m_i,r)C(n_i,r)\right]$$

formülünü uygulayalım.

$c = 1+3+7+3.7.5+3.5 = 131$ ve rezidü -1/17161 bulunur.

(Not: $S\left(TS^2\right)^7\left(TS\right)^5\left(TS^2\right)^3$ kelimesinin rezidüsü ile $S\left(TS\right)^7\left(TS^2\right)^5\left(TS\right)^3T$ kelimesinin rezidüsü aynıdır.) □

5. SONUÇLAR

$f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}\in\Gamma$ $(c\neq 0)$ şeklindeki modüler grup elemanları basit kutba sahiptirler. Bu elemanların kutup noktaları $z_0=-\dfrac{d}{c}$ dir ve rezidüsü de $\lim\limits_{z\to z_0}[(z-z_0)f(z)]=a_{-1}$ ile bulunur. Biz çalışmamızda modüler grup elemanlarını

$$\Gamma=\langle T,S:T^2=S^3=I\rangle=C_2*C_3$$

grup sunuşundan yararlanarak kutup noktalarını ve rezidülerini hesapladık. Kutup noktaları 3.2, 3.3, 3.4 ve 3.5 Teoremlerinde sürekli kesirler yardımıyla elde edilmiştir. Rezidüleri için 4.4, 4.6, 4.8, 4.10, 4.11 ve 4.12 Teoremlerinde modüler grup sunuşundan faydalanarak formüller çıkarılmıştır.

Yapılan bu çalışmalar genişletilmiş modüler gruba taşınabilir. Ayrıca determinantı 1 olan möbiüs dönüşümleri için de benzer çalışmalar yapılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Hecke E., ”Über die Bestimmung Dirichletscher Reichen durch ihre Funktionalgleichungen”, *Math. Ann.,*112, (1936), 664-699.

[2] Cangül İ. N., Normal Subgroups of Hecke Groups, Ph.D. Thesis, Southampton University, (1993).

[3] Newman M., “The Structure of Some Subgroups of The Modular Group”, *Illionis J. Math.*, 8, (1962), 480-487.

[4] Newman M., “Free Subgroups and Normal Subgroups of The Modular Group”, *Illionis J. Math.,* 8, (1964), 262-265.

[5] Koruoğlu Ö., Şahin R., “Generalized Fibonacci sequences related to the extended Hecke groups and an application to the extended modular group” *Turkish Journal Math.* , 34, (2010), 325–332.

[6] Koruoğlu Ö. “The determination of parabolic points in modular and extended modular groups by continued fractions”, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2)* 33 (2010), 439–445.

[7] Tekcan A., Bizim O., “The connection between quadratic forms and the extended modular group”, *Math. Bohem.* 128(3) (2003), 225–236.

[8] Özgür N. Y., “On the two-square theorem and the modular group”, *Ars Combin.* 94 (2010), 251–255.

[9] Mushtaq Q., Hayat U., “Horadam generalized Fibonacci numbers and the modular group”, *Indian J. Pure Appl. Math.* 38(5) (2007), 345–352.

[10] Mushtaq Q., Hayat U., “Pell numbers, Pell-Lucas numbers and modular group”, *Algebra Colloq.* 14(1) (2007), 97–102.

[11] Jones G. A., Singerman D., Complex Functions, Cambridge University Press, (1987), 17-19, 221-267.

[12] Başkan T., Kompleks Fonksiyonlar Teorisi, Vipaş, Bursa (2001), 318-324.

[13] Başkan T., Ayrık Gruplar, H.Ü. Fen Fakültesi Yayınları, Beytepe, Ankara, (1980), 1-29.

[14] Ford L. R., Automorphic Functions, Chelsea Publishing Company, New York, (1951), 66-82.

[15] Yılmaz N., Cangül İ. N., "On the Group Structure and Parabolic Points of the Hecke Group H(λ)", *Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math.*, 51 (2002), 35-46.

[16] Johnson D. L., Presentation of Groups, Cambridge University Press, (1990), 1-17, 41-45.

[17] Robinson D. J. S., A Course in the Theory of Groups, Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin, (2001), 28, 119-120, 167.

[18] Leveque W. J., Fundamentals of Number Theory, Dover, (1996).

[19] Cangül İ. N., Çelik B., Sayılar Teorisi Problemleri, Paradigma Basın Yayın Ltd. Şti., Bursa, (2002), 305-330.