T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SONLU BLASCHKE ÇARPIMLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Sümeyra UÇAR

Balıkesir, Haziran-2011

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SONLU BLASCHKE ÇARPIMLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Sümeyra UÇAR

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Nihal YILMAZ ÖZGÜR

Sınav Tarihi: 02/06/2011
Jüri Üyeleri:

Prof. Dr. Nihal YILMAZ ÖZGÜR (BAÜ-Danışman)

Doç. Dr. Özden KORUOĞLU (BAÜ)

Yrd. Doç. Dr. Ahu AÇIKGÖZ (BAÜ)

Enstitü Yönetim Kurulunun …………….. tarih ……….. sayılı oturumunun ….. nolu kararı ile ………………………… Mezun olmuştur.

Balıkesir, Haziran-2011

ÖZET

SONLU BLASCHKE ÇARPIMLARI

Sümeyra UÇAR
Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,
Matematik Anabilim Dalı

(Yüksek Lisans tezi / Tez Danışmanı : Prof. Dr. Nihal YILMAZ ÖZGÜR)

Balıkesir, 2011

Doğrusal dönüşümler olarak da bilinen Möbius dönüşümleri ilk kez 1831 yılında ortaya çıkmıştır. Özel tipteki Möbius dönüşümlerinin sonlu veya sonsuz sayıda çarpımları olarak tanımlanan Blaschke çarpımları ve temel özellikleri bu tezin ana konusudur.

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm olan giriş bölümünde Blaschke çarpımlarının tarihi gelişiminden bahsedilecektir.

İkinci bölümde Möbius dönüşümlerinin tanımı ve temel özellikleri ile ilgili temel bilgiler ele alındıktan sonra birim diski birim diske, üst yarı düzlemi birim diske resmeden Möbius dönüşümleri incelenecektir.

Üçüncü bölümde sonlu Blaschke çarpımlarının hangi şartlar altında özdeş oldukları incelenecektir.

Dördüncü bölümde üst yarı düzlem için sonlu Blaschke çarpımları tanımlanarak, üst yarı düzlem ve birim disk için tanımlı sonlu Blaschke çarpımlarının her ikisinin de sıfırdan farklı bir kalıntıya sahip olduğu gösterilecektir.

Son bölümde ise sonlu Blaschke çarpımlarının sıfır yerlerinin geometrik özellikleri ele alınacaktır.

ANAHTAR SÖZCÜKLER : Möbius Dönüşümleri / Çemberler / Sonlu Blaschke Çarpımları / Kalıntı /Elipsler

ABSTRACT

FINITE BLASCHKE PRODUCTS

Sümeyra UÇAR
(Balıkesir University, Institute of Science, Department of Mathematics)

(M. Sc. Thesis / Supervisor : Prof. Dr. Nihal YILMAZ ÖZGÜR)

Balıkesir – Turkey, 2011

Möbius transformations, known as also linear transformations, firstly occured in 1831. Blaschke products, defined as finite or infinite products of special type Möbius transformations, and their basic properties are the main topics of this thesis.

This thesis consists of six chapters.

It is mentioned about historical development of Blaschke products in the introductory chapter, which is the first chapter of this thesis.

In the second chapter, after it is given the definition and basic properties of Möbius transformations, it will be investigated the Möbius transformations mapping the unit disc to itself and the upper half plane to the unit disc.

In the third chapter, it is investigated that the conditions under which finite Blaschke products to be identical.

In the fourth chapter, defining finite Blaschke products for the upper half plane, it will be showed that two types of Blaschke products have a nonzero residue.

Finally, in the last chapter it is mentioned about the geometric properties of the zeros of finite Blaschke products.

KEY WORDS : Möbius Transformations / Circles / Finite Blaschke Products / Residue / Ellipses

İÇİNDEKİLER

SEMBOL LİSTESİ

<u>**Simge**</u>	<u>**Tanım**</u>
$\mathbb{C} \cup \{\infty\}$	Genişletilmiş kompleks sayılar kümesi
$\subseteq$	Alt küme
D	Birim disk
∂D	Birim çember
$\overline{D}$	Birim diskin kapanışı
$PSL(2, \mathbb{C})$	Projektif özel doğrusal grup
$\overleftrightarrow{(z_1, z_2)}$	z_1 ile z_2 noktalarını birleştiren doğru
$\overline{(z_1, z_2)}$	z_1 ile z_2 noktalarını birleştiren doğru parçası
$\Delta(z_1, z_2, z_3)$	Köşeleri z_1, z_2, z_3 olan üçgen

ŞEKİL LİSTESİ

ÖNSÖZ

Bu çalışmada sonlu Blaschke çarpımlarının temel özellikleri ele alınmıştır.

Tez çalışmalarımın her aşamasında öneri ve yardımlarını benden esirgemeyen, bana her zaman yol gösteren değerli danışman hocam Prof. Dr. Nihal YILMAZ ÖZGÜR'e en içten dileklerimle teşekkür ederim. Tez çalışmam boyunca öneri ve görüşlerinden faydalandığım arkadaşım Öznur ÖZTUNÇ'a teşekkürü bir borç bilirim.

Bu süreçte bana sabır ve anlayış gösteren sevgili aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Balıkesir, 2011 **Sümeyra UÇAR**

1. GİRİŞ

Birim çemberi birim çembere, birim çemberin içini içine resmeden Möbius dönüşümlerinin sonlu yada sonsuz sayıda çarpımı biçiminde tanımlanan Blaschke çarpımları ilk kez 1915 'de W. Blaschke tarafından yayınlanan bir makalede ortaya çıkmıştır. Bu bölümde [9] numaralı kaynaktan faydalanılarak sonlu Blaschke çarpımlarının tarihi gelişiminden bahsedilecektir. Birim çemberi birim çembere, birim çemberin içini içine resmeden Möbius dönüşümleri

$$T(z)=\beta\frac{z-a}{1-\overline{a}z}, \qquad a\in D=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\} \qquad |\beta|=1$$

biçiminde olduğuna göre, bu dönüşümlerin sonlu sayıda çarpımları olan sonlu bir Blaschke çarpımı

$$B(z)=\beta\prod_{j=1}^{n}\frac{z-a_j}{1-\overline{a_j}z} \qquad |\beta|=1, \qquad a_j\in D$$

biçiminde tanımlanır.

$|z|=1$ iken $z=\dfrac{1}{\overline{z}}$ yazılabileceğinden

$$|B(z)| = \left| \prod_{j=1}^{n} \frac{z-a_j}{1-\overline{a_j}z} \right| = \prod_{j=1}^{n} \frac{|z-a_j|}{|1-\overline{a_j}z|} = \prod_{j=1}^{n} \frac{|z-a_j|}{|\overline{z}-\overline{a_j}|} = 1$$

olur. Buradan Blaschke çarpımlarının birim çemberi birim çembere resmettiği ortaya çıkar. Maksimum Modül teoremininin bir sonucu olarak $|B(z)| = 1$ olması için gerek ve yeter şartın $|z| = 1$ olduğu görülür. Böylece sonlu bir Blaschke çarpımının D'de analitik yani,

i) Kapalı birim disk $\overline{D}$ 'de sürekli,

ii) Birim diskte sonlu sayıda sıfıra sahip,

iii) Birim çember ∂D üzerinde modülünün 1 olduğu görülür.

Blaschke çarpımları birim diskte sınırlı analitik fonksiyonların temel yapıtaşlarından biridir. Örneğin B, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sıfırlarına sahip bir Blaschke çarpımı olmak üzere f, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sıfırlarına sahip B'den daha yüksek dereceden bir rasyonel fonksiyon ise B Blaschke çarpımı f fonksiyonunu böler.

Blaschke çarpımları sınırlı analitik fonksiyonlar ile interpolasyon çalışılmasında da yani aşağıdaki sorunun cevabının araştırılmasında önemli bir rol oynar; $\{z_n\}$ birim diskte bir dizi olmak üzere acaba hangi koşullar altında her sınırlı $\{w_n\}$ kompleks sayı dizisi için

$$f(z_n) = w_n$$

biçiminde birim diskte tanımlı, sınırlı, analitik bir f fonksiyonu bulunabilir?

n. dereceden bir B Blaschke çarpımı ve birim çember üzerinde bir λ noktası verilsin. B tarafından λ'ya resmedilen birim çemberin n tane farklı noktasının olduğunu beşinci bölümde Yardımcı teorem 5.2.3 'de gösterilecektir. Birim çemberde verilen $z_1, z_2, ..., z_n$ noktaları için $B(z_j) = \lambda$ olacak biçimde bir B Blaschke çarpımı bulunması interpolasyon olur. Burada önemli iki soru vardır. Birincisi: Böyle bir B Blaschke çarpımı varsa nedir? İkincisi : Varsa bu B Blaschke çarpımı nasıl bulunacaktır?

İstenen Blaschke çarpımının varlığı interpolasyon teoremi ile garanti edilir. Burada interpolasyonun altındaki fikir birim diskteki n farklı noktanın düzlemde n farklı noktaya resmedilmesidir.

İki reel sayıyı başka iki reel sayıya resmeden bir doğrusal fonksiyon bulmak veya kompleks düzlemde verilen üç noktayı yine kompleks düzlemde verilen üç noktaya resmeden bir doğrusal dönüşümünün (Möbiüs dönüşümü) olması temel interpolasyon sonuçlarındandır. Acaba verilen n noktayı n noktaya resmeden dönüşüm hangi şartlar altında vardır? Eğer bir f fonksiyonu; "f birim disk üzerinde analitik ve $f(0) = 0$ ise birim diskteki her z için $|f(z)| \leq |z|$ olur." biçimindeki Schwart yardımcı teoreminin koşullarını sağlarsa interpolasyon yapılabilir. Örneğin Schwart yardımcı teoreminin koşulları sağlanmadığı için 0'ı 0'a, $\frac{1}{2}$'yi $\frac{3}{4}$'ye resmeden bir B Blaschke çarpımı yoktur.

1963 yılında Cantor ve Phelps çember üzerindeki n farklı noktayı çember üzerinde diğer n farklı noktaya sonlu bir B Blaschke çarpımı ile resmetmenin mümkün olduğunu ispatladılar. Fakat burada fonksiyonu açıkça gösteremediler.

1987 ’de Jones ve Ruscheweyh en fazla (n-1). dereceden Blaschke çarpımı ile interpolasyon yapılabileceğini gösterdi. $z_1, z_2, ..., z_n$ ve λ birim çember üzerinde noktalar olmak üzere, j=1, 2, …, n için

$$C(z_j) = \lambda \overline{z_j}$$

olacak biçimde (n-1)-inci dereceden bir C Blaschke çarpımı bulabiliriz. Böylece $B(z) = z.C(z)$ biçiminde tanımlanırsa B bir Blaschke çarpımıdır ve $B(z_j) = \lambda,\ B(0) = 0$ olur.

Böylece bu B Blaschke çarpımı ile birim çemberde verilen n tane nokta yine birim çemberde verilen bir noktaya resmedilir.

Çalışmanın üçüncü bölümünde, bir Blaschke çarpımının derecesi o Blaschke çarpımının sıfırlarının sayısı olmak üzere, n. dereceden iki tane sonlu Blaschke çarpımı birim diskin n tane noktasında çakışırlarsa, bu Blaschke çarpımlarının hangi şartlar altında özdeş oldukları problemi ele alınmıştır [7].

Dördüncü bölümde ise birim çemberde tanımlı sonlu Blaschke çarpımlarına göre daha az ele alınan üst yarı düzlem için sonlu Blaschke çarpımlarını tanımlanacak ve her iki Blaschke çarpımının da sıfırdan farlı bir kalıntıya sahip olduğu gösterilecektir [8].

Son olarak da beşinci bölümde “Blaschke çarpımlarının sıfır yerlerinin geometrik özellikleri var mıdır? Varsa bu geometrik özellikler acaba Blaschke çarpımının derecesine göre değişiklik gösterir mi?” biçimindeki sorular cevaplanmaya çalışılacaktır [9-11].

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezin diğer bölümlerinde kullanılacak olan bazı temel kavramlar ele alınacaktır.

2.1 Möbius Dönüşümleri

Bu bölümde Möbius dönüşümleri ve bu dönüşümlerin temel özelliklerinden bazıları ele alınacaktır. Bunlar için [1, 2, 3, 4] numaralı kaynaklardan faydalanılacaktır.

Tanım 2.1.1 : $a, b, c, d \in \mathbb{C},\ ad - bc \neq 0$ ve $T : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ olmak üzere

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \qquad (2.1.1)$$

biçimindeki bir dönüşüme Möbius dönüşümü ya da Kesirli Doğrusal dönüşüm denir. $\Delta = ad - bc$ ifadesine de T Möbius dönüşümünün determinantı denir. Burada $ad - bc = 0$ olursa bire-birlik bozulur. Böylece $ad - bc \neq 0$ alınarak Möbius dönüşümlerinin bire-birliği sağlanmış olur. Bir T Möbius dönüşümü a, b, c, d katsayılarından bağımsızdır. Bir $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ için $\lambda a, \lambda b, \lambda c, \lambda d$ katsayılarına karşılık

$$T(z) = \frac{\lambda az + \lambda b}{\lambda cz + \lambda d} = \frac{\lambda(az + b)}{\lambda(cz + d)} = \frac{az + b}{cz + d}$$

olur. Buradan yine aynı T Möbius dönüşümü elde edilir. Böylece $T(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$ ile tanımlanan Möbius dönüşümünün pay ve paydası $\lambda = \dfrac{1}{\mp\sqrt{ad - bc}}$ ile çarpılarsa $ad - bc = 1$ bulunur. Artık Möbius dönüşümlerinin tanımındaki $ad - bc \neq 0$ yerine $ad - bc = 1$ alınabilir.

Tanım 2.1.2 : $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$ olmak üzere $T(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$ şeklinde bir Möbius dönüşümü olsun. Bu durumda $c \neq 0$ ise $T(\infty) = \dfrac{a}{c}$ ve $T(-\dfrac{d}{c}) = \infty$ olur. $c = 0$ ise $T(\infty) = \infty$ olur. Böylece her bir Möbiüs dönüşümünün $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$'dan $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$'a bire-bir ve örten bir dönüşüm olduğu görülür.

$a = d \neq 0$ ve $b = c = 0$ olsun. Bu durumda

$$T(z) = \frac{az + 0}{0z + d} = z$$

biçiminde birim dönüşüm bulunur. Bu dönüşüm için

$$ad - bc = ad - 0.0 = ad \neq 0$$

olduğundan $T(z) = z$ biçimindeki birim dönüşüm de bir Möbius dönüşümü olur.

Bir T Möbius dönüşümünün tersi;

$$T^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}$$

biçimindedir ve bu dönüşüm de bir Möbius dönüşümüdür.

Teorem 2.1.3 :

$$M = \{T : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\} \big| T(z) = \frac{az + b}{cz + d};\, a, b, c, d \in \mathbb{C},\, ad - bc \neq 0\}$$

kümesi fonksiyonların bileşkesi işlemine göre bir gruptur.

Tanım 2.1.4 : $a, b, c, d \in \mathbb{C},\, ad - bc = 1$ olmak üzere $T(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$ biçimindeki tüm Möbius dönüşümlerinin kümesi $PSL(2, \mathbb{C})$ ile gösterilir.

Şimdi bazı basit doğrusal dönüşümler ele alınarak (2.1.1) ifadesindeki $T(z)$ Möbius dönüşümünün bu basit dönüşümler cinsinden yazılabileceği gösterilecektir.

1) $T_1(z) = z + b$ biçimindeki öteleme dönüşümü

2) $T_2(z) = e^{i\theta} z$ biçimindeki dönme dönüşümü

3) $T_3(z) = Az,\ A > 0$ biçimindeki esneme dönüşümü

4) $T_4(z) = -\dfrac{1}{z}$ biçimindeki inversiyon dönüşümü

$a, b, c, d \in \mathbb{C},\ ad - bc = 1$ ve $c \neq 0$ olmak üzere $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ dönüşümü $-\dfrac{a}{c}$ ile toplanıp gerekli işlemleri yapılarak

$$T(z) = \frac{a}{c} - \frac{1}{c^2(z + \frac{d}{c})}$$

biçiminde yazılabilir. Buradan aşağıdaki dönüşümlerin ard arda uygulanması sonucunda $T(z)$ dönüşümü elde edilir :

$$z_1 = z + \frac{d}{c}, \quad z_2 = c^2 z_1, \quad z_3 = -\frac{1}{z_2}, \quad ve \quad T(z) = z_3 + \frac{a}{c}.$$

$a, b, c, d \in \mathbb{C},\ ad - bc = 1$ ve $c = 0$ ise $T(z)$ dönüşümü $T(z) = \alpha z + \beta$ biçiminde yazılabilir. Yine aşağıdaki dönüşümleri ard arda uygulayarak $T(z)$ dönüşümü elde edilir :

$$z_1 = e^{i\theta} z, \quad z_2 = A z_1, \quad ve \quad T(z) = z_2 + \beta.$$

Tanım 2.1.5 : $z=\dfrac{az+b}{cz+d}$ denkleminin köklerine Möbius dönüşümünün sabit noktaları denir.

Bu denklem çözülürse kökleri

$$z_1, z_2 = \frac{a-d \pm \sqrt{(a+d)^2-4}}{2c}$$

biçimindedir. $T(\infty)=\dfrac{a}{c}$ olduğundan yani ∞'un görüntüsü kendisi olmadığından bir Möbius dönüşümünün en fazla iki tane sabit noktası vardır.

Tanım 2.1.6 : $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 'da denklemi

$$az\bar{z}+bz+\overline{b}\bar{z}+c=0 \qquad a,c\in\mathbb{R}, \quad b\in\mathbb{C}$$

olan bir C çemberi ele alınsın. Eğer $a\neq 0$ ise C çemberi, $\mathbb{C}$'de bir Öklid çemberi olur.

C çemberinin merkezi p ve yarıçapı r olsun. Her $z\in\mathbb{C}\setminus\{p\}$ noktası için, p ve z noktalarından geçen doğru üzerinde

$$|z-p|.|w-p|=r^2$$

denklemini sağlayan bir tek w noktası vardır.

Buradaki w noktasına C çemberine göre z noktasının yansıması veya eşlenik noktası denir.

Teorem 2.1.7 : Bir doğrusal dönüşüm, bir çembere göre eşlenik iki noktayı görüntü çemberine göre eşlenik iki noktaya taşır [1].

2.2 Birim Diski Birim Diske Resmeden Möbius Dönüşümleri

Bu bölümde birim diski birim diske resmeden Möbius dönüşümleri ele alınacaktır. Bunun için [1] numaralı kaynaktan faydalanılmıştır.

Teorem 2.2.1 : Birim çemberi birim çembere ve içini içine resmeden dönüşüm

$$T(z) = \frac{az + \overline{c}}{cz + \overline{a}} \qquad a\overline{a} - c\overline{c} = 1$$

biçimindedir.

İspat 2.2.1 : Birim çemberin denklemi $z\overline{z} - 1 = 0$ biçimindedir. Bu çemberin $ad - bc = 1$ olmak üzere $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ dönüşümü altındaki görüntüsünü bulalım :

$T(z)=w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ denkleminden

$$z=\frac{dw-b}{-cw+a} \qquad \text{ve} \qquad \overline{z}=\frac{\overline{d}\,\overline{w}-\overline{b}}{-\overline{c}\,\overline{w}+\overline{a}}$$

bulunur. $z\overline{z}-1=0$ denkleminde bu ifadeler yerine yazılırsa

$$\left(\frac{dw-b}{-cw+a}\right).\left(\frac{\overline{d}\,\overline{w}-\overline{b}}{-\overline{c}\,\overline{w}+\overline{a}}\right)-1=0$$

$$(dw-b)\left(\overline{d}\,\overline{w}-\overline{b}\right)-(-cw+a)\left(-\overline{c}\,\overline{w}+\overline{a}\right)=0$$

$$\left(d\overline{d}-c\overline{c}\right)w\overline{w}+\left(-\overline{b}d+\overline{a}c\right)w+\left(-b\overline{d}+a\overline{c}\right)\overline{w}+b\overline{b}-a\overline{a}=0 \qquad (2.2.1)$$

bulunur. (2.2.1) numaralı denklemin birim çember olması için

$$-\overline{b}d+\overline{a}c=0 \qquad (2.2.2)$$

$$-b\overline{d}+a\overline{c}=0 \qquad (2.2.3)$$

ve

$$d\bar{d} - c\bar{c} = a\bar{a} - b\bar{b} \neq 0 \qquad (2.2.4)$$

olmalıdır. (2.2.3) denkleminden

$$a\bar{c} = b\bar{d}$$

olur. Buradan da

$$\frac{b}{\bar{c}} = \frac{a}{\bar{d}} = \lambda$$

olsun. Böylece

$$b = \lambda\bar{c} \qquad \text{ve} \qquad a = \lambda\bar{d} \qquad (2.2.5)$$

bulunur. Bunları (2.2.4) denkleminde yerine yazılırsa

$$d\bar{d} - c\bar{c} = \lambda\bar{d}\,\overline{\lambda d} - \lambda\bar{c}\,\overline{\lambda c} = \lambda\bar{\lambda}(d\bar{d} - c\bar{c}) \neq 0$$

olur. $ad - bc = 1$ olduğundan

$$(\lambda\bar{d})d - (\lambda\bar{c})c = \lambda(d\bar{d} - c\bar{c}) = 1$$

elde edilir. Bu nedenle λ reeldir. Böylece $\lambda = \mp 1$ olmalıdır. λ 'nın işareti $d\overline{d} - c\overline{c}$ ifadesine bağlıdır.

Birim çemberin içi içine resmedildiğinden ve $-\dfrac{d}{c}$ noktasının görüntüsü ∞ olduğundan, $-\dfrac{d}{c}$ noktası çemberin dışında olmalıdır. Yani $\left|-\dfrac{d}{c}\right| > 1$ 'dir. Buradan da $|d| > |c|, d\overline{d} - c\overline{c} > 0$ ve $\lambda = 1$ bulunur. Bunlar (2.2.5) denkleminde yerine yazılırsa

$$b = \overline{c},\ a = \overline{d}$$

bulunur. Tekrar $ad - bc = 1$ denkleminde yerine yazılırsa

$$ad - bc = \lambda(d\overline{d} - c\overline{c}) = d\overline{d} - c\overline{c} = a\overline{a} - c\overline{c} = 1$$

bulunur. Böylece birim çemberi kendi üzerine ve içini içine resmeden en genel dönüşümün

$$T(z) = \frac{az + \overline{c}}{cz + \overline{a}} \qquad a\overline{a} - c\overline{c} = 1 \tag{2.2.6}$$

biçiminde olduğu görülür. □

Önerme 2.2.2 : Birim çemberi kendi üzerine, içini içine bire-bir ve konform olarak resmeden, orjini sabit bırakan en genel Möbius dönüşümü orjin etrafında dönmedir.

İspat 2.2.2 : $z' = f(z),$ birim çemberi kendi üzerine, içini içine taşıyan bire-bir ve konform olarak resmeden, orjini sabit bırakan bir dönüşüm olsun.

Konformluk hipotezi gereğince $f(z)$ birim çemberde analitiktir. f dönüşümü altında iç nokta iç noktaya resmedildiğinden $|z|<1$ iken $|f(z)|<1$ olmalıdır. $z=0$ iken $f(0)=0$ olacağından f fonksiyonunun orjinde sıfırı vardır ve $\dfrac{f(z)}{z}$ birim çemberde analitiktir. D' orjin merkezli $r<1$ yarıçaplı çember olsun. Bölgenin içinde ve sınırında analitik olan fonksiyon maksimum değerini sınırda aldığından ve D' çemberinde $|z|=r$ olduğundan, D' çemberinin içinde

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right| < \frac{1}{r}$$

olur. r, 1'e istenildiği kadar yaklaşabileceğinden birim çemberin içinde

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leq 1 \tag{2.2.7}$$

olur. $z = f^{-1}(z')$ ters fonksiyonu için benzer şekilde D' çemberinin içinde

$$\left|\frac{z}{f(z)}\right| \leq 1 \tag{2.2.8}$$

bulunur.

(2.2.7) ve (2.2.8) eşitsizliklerinden birim çemberin içinde

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right| = 1$$

ve bunun sonucunda da

$$\frac{f(z)}{z} = e^{i\alpha}$$

bulunur. Buradan da

$$f(z) = e^{i\alpha} z$$

biçiminde orjin etrafında dönme olur. □

Orjin sabit kalmasın. $f(z)$ fonksiyonu birim çemberin içini içine bire-bir ve konform olarak resmetsin ve $f(0) = z_0$ olsun. S, $S(0) = z_0$ olacak biçimde (2.2.6) numaralı eşitlikteki gibi bir dönüşüm olsun. f dönüşümü uygulandıktan sonra S^{-1}

uygulanırsa birim çemberin içi içine taşınır ve orjin sabit kalır. O halde $U = S^{-1} f$ dönüşümü bir dönme olur. Buradan da $f = SU$ biçiminde f doğrusal dönüşümü elde edilir. f fonksiyonu birim çemberi birim çembere, içini içine taşıdığından (2.2.6) biçimindedir. Böylece birim çemberi birim çembere, içini içine taşıyan en genel doğrusal dönüşüm

$$T(z) = \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}} \qquad a\bar{a} - c\bar{c} = 1$$

biçimindedir.

Aşağıda çemberlerle ilgili daha genel bir teorem verilecektir.

Teorem 2.2.3 : Bir çemberin içini başka bir çemberin içine bire-bir ve konform olarak resmeden en genel dönüşüm Möbius dönüşümüdür.

İspat 2.2.3 : $f(z)$ dönüşümü Q_1 çemberinin içini başka bir Q_2 çemberinin içine bire-bir ve konform olarak resmetsin. S_1 ve S_2 dönüşümleri sıra ile Q_1 ve Q_2 çemberlerinin içini birim çemberin içine resmetsin. Böylece $S_2 f S_1^{-1}$ dönüşümü birim çemberin içini içine taşır. O halde $S_2 f S_1^{-1}$ dönüşümü (2.2.6) eşitliğindeki gibi bir doğrusal dönüşüm olmalıdır. Yani

$$S_2 f S_1^{-1} = T$$

veya

$$f = S_2^{-1} T S_1$$

olur. Böylece f bir doğrusal dönüşümdür. □

2.3 Üst Yarı Düzlemi Birim Diske Resmeden Möbius Dönüşümleri

Bu bölümde üst yarı düzlemi birim diske resmeden Möbius dönüşümleri ele alınacaktır. Bunlar için [5] numaralı kaynaktan faydalanılacaktır.

Teorem 2.3.1 : $\{z \in \mathbb{C} \mid imz > 0\}$ biçimindeki üst yarı düzlemi birim diske resmeden en genel doğrusal dönüşüm

$$T(z) = e^{i\theta} \frac{z-\alpha}{z-\overline{\alpha}}, \qquad \alpha \text{ üst yarı düzlemde bir nokta}$$

biçimindedir.

İspat 2.3.1 : $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} \qquad ad - bc \neq 0 \qquad a, b, c, d \in \mathbb{C}$

biçiminde bir Möbius dönüşümü olsun. Bu dönüşüm ile sınır sınıra resmedileceğinden reel eksen birim çembere, reel eksene göre eşlenik noktalar ise birim çembere göre eşlenik noktalara taşınır. $z = -\dfrac{b}{a}$ noktası 0 'a $z = -\dfrac{d}{c}$ noktası ise ∞'a taşınır. 0 ve ∞, $|w|=1$ çemberine göre eşlenik noktalar olduğundan $-\frac{b}{a}$ ile $-\frac{d}{c}$ birbirine göre eşlenik noktalar olmalıdır. Yani $\alpha=-\frac{b}{a}$ ise $\overline{\alpha}=-\frac{d}{c}$ olur.

$$w=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{a(z+\frac{b}{a})}{c(z+\frac{d}{c})}=\frac{a}{c}.\frac{z-\alpha}{z-\overline{\alpha}}$$

biçiminde yazılabilir. $z=0$ noktası $|w|=1$ çemberi üzerinde olmalıdır. Yani

$$|w|=\left|\frac{a}{c}\right|.\left|\frac{0-\alpha}{0-\overline{\alpha}}\right|=\left|\frac{a}{c}\right|.\left|\frac{\alpha}{-\overline{\alpha}}\right|=1$$

buradan da $\left|\frac{a}{c}\right|=1$ olur. Böylece $\left|\frac{a}{c}\right|=e^{i\theta}$, θ reel sayı biçiminde yazılabilir. Bunlar dönüşümde yerine yazıldığında

$$w=e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{z-\overline{\alpha}}$$

dönüşümünü elde edilir. $z=\alpha$ noktasının görüntüsü olan $w=0$ birim diskin içinde olduğundan α noktası üst yarı düzlemde, yani $im(\alpha)>0$ olmalıdır. Reel eksen üzerindeki $z=x$ noktası için

$$|w| = |e^{i\theta}|.\left|\frac{x-\alpha}{x-\overline{\alpha}}\right| = 1$$

olur, böylece reel eksen $|w| = 1$ çemberine taşınır. Üst yarı düzlemde $y > 0$ olmak üzere $z = x + iy$ noktası alınsın ve $n > 0$ için $\alpha = m + in$ biçiminde olsun. Buradan

$$|z-\alpha|^2 - |z-\overline{\alpha}|^2 = (x-m)^2 + (y-n)^2 - (x-m)^2 - (y+n)^2 = -4ny < 0$$

bunun sonucunda da

$$|z-\alpha| < |z-\overline{\alpha}|$$

bulunur. Buradan da

$$|w| = |e^{i\theta}|.\left|\frac{z-\alpha}{z-\overline{\alpha}}\right| < 1$$

olduğundan üst yarı düzlemdeki bir nokta birim diskin içine taşınmış oldu. Böylece

$$w = e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{z-\overline{\alpha}}, \qquad \alpha \text{ üst yarı düzlemde bir nokta}$$

üst yarı düzlemi birim diske resmeden en genel Möbius dönüşümüdür. □

3. MONİK BLASCHKE ÇARPIMLARININ TEKLİK TEOREMİ

Tezin bundan sonraki bölümlerinde “Blaschke çarpımı” deyimi ile “Sonlu Blaschke çarpımı” kastedilecektir.

Bu bölümde [6, 7] numaralı kaynaklardan faydalanılarak aşağıdaki soruların cevapları araştırılacaktır :

1) n. dereceden iki tane Blaschke çarpımı birim disk D ’nin n noktasında çakışırlarsa bu iki Blaschke çarpımı hangi özelliklere sahiptir?

2) Blaschke çarpımlarının tanımındaki $|\beta| = 1$ özelliğindeki β sabitinin bu konuda etkisi var mıdır?

Tanım 3.1 : $j = 1, 2, ..., n$ için $|a_j| < 1$ olmak üzere $A(z) = \prod_{j=1}^{n} \frac{z - a_j}{1 - \overline{a_j} z}$ biçimindeki bir Blaschke çarpımına n. dereceden monik Blaschke çarpımı denir.

Bu bölümde aşağıdaki teorem ispatlanacaktır.

Teorem 3.2 : $j = 1, 2, ..., n$ için $a_j, b_j \in D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ olmak üzere

$$A(z)=\prod_{j=1}^{n}\frac{z-a_j}{1-\overline{a_j}z} \qquad ve \qquad B(z)=\prod_{j=1}^{n}\frac{z-b_j}{1-\overline{b_j}z}$$

iki monik Blaschke çarpımı olsun. Bu durumda D içinde birbirinden farklı $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ noktaları için $A(\lambda_j)=B(\lambda_j)$ ise $A \equiv B$ ’ dir.

Yukarıdaki teoremin ispatına geçilmeden önce bu teoremin ispatında faydalanılacak olan birkaç uyarı ve yardımcı teorem verilsin.

Uyarı 3.3 : Yukarıdaki teoremde dikkat edilirse A ve B monik Blaschke çarpımlarıdır. A ve B monik Blaschke çarpımları olmazsa teoremin sağlanmayacağı aşağıdaki gibi bir örnekle görülebilir :

$c \neq 1$ ve $|c|=1$ biçiminde bir karmaşık sayı olsun.

$$A(z)=c.\prod_{j=1}^{n}\frac{z-a_j}{1-\overline{a_j}z} \qquad \text{ve} \qquad B(z)=\frac{z-ca_1}{1-\overline{ca_1}z}\prod_{j=2}^{n}\frac{z-a_j}{1-\overline{a_j}z}$$

ve her j için $a_j \neq 0$ olsun. Her $j=2,3,...,n$ için $A(a_j)=B(a_j)$ olduğu görülür. Ancak herhangi bir k sabiti için $A \neq kB$ olur. Buradan da $A \neq B$ ’dir.

Yardımcı Teorem 3.4 : $j=1,2,...,n$ için $a_j, b_j \in D$ olmak üzere

$$A(z)=\prod_{j=1}^{n}\frac{z-a_j}{1-\overline{a_j}z} \qquad ve \qquad B(z)=\prod_{j=1}^{n}\frac{z-b_j}{1-\overline{b_j}z}$$

iki monik Blaschke çarpımı olsun. Bu durumda $|\lambda|=1$ biçimindeki bir λ için $A(\lambda)=B(\lambda)$ olur.

İspat 3.4 : $A(z)=B(z)$ ancak ve ancak $\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{z-a_j}{z-b_j}\Big/\frac{1-\overline{a_j}z}{1-\overline{b_j}z}\right)=1$ olduğu açıktır. $|z|=1$ ise $z=\frac{1}{\overline{z}}$ yazarak

$$\frac{A(z)}{B(z)}=\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{z-a_j}{z-b_j}\right)\Big/\overline{\left(\frac{z-a_j}{z-b_j}\right)}$$

bulunur. $\frac{w}{\overline{w}}=e^{2i\arg w}$ olduğundan, $|z|=1$ biçimindeki bir z ve bir m tamsayısı için

$$\arg\prod_{j=1}^{n}\frac{z-a_j}{z-b_j}=\pi m$$

olduğu gösterilecektir.

$$F(z)=\prod_{j=1}^{n}\frac{z-a_j}{z-b_j}$$

olsun. Bu durumda $F(z)$ analitiktir. $a = \max\{|a_j| : j = 1, 2, ..., n\}$ için $\delta = 1 - a$ seçilsin. Böylece $F(z)$'nin $|z| > 1 - \delta$ için sıfır yeri yoktur. ∞ noktasını içeren $|z| > 1 - \delta$ için $H(z) = \log F(z)$'nin analitik bir dalı vardır. Ayrıca $F(\infty) = 1$ olduğu için $H(\infty) = \log F(\infty) = \log 1 = 0$ seçilsin. Harmonik fonksiyonların Gauss ortalama değer özelliğinden $|\lambda| = 1$ biçiminde bir λ için $imH(\lambda) = 0$ olur. Harmonik fonksiyon $imH(z)$, $\arg F(z)$'nin bir dalıdır. $\arg F(z)$'nin sürekli herhangi iki dalı 2π'nin bir tam sayı katı ile farklı olacağından teorem ispatlanır.

Uyarı 3.5 : $\arg \prod_{j=1}^{n} \dfrac{z - a_j}{z - b_j} = \pi m, \qquad m \in \mathbb{Z}$

oluşu geometrik yorumda önemlidir. $j = 1, 2, ..., n$ için birim disk D'de $L_j = \overline{(a_j, b_j)}$ biçiminde yönlendirilmiş sonlu sayıda doğru parçası yer alır. Bu doğru parçalarının yerlerinde, uzunluklarında, sayılarında sınırlama yoktur. $\phi = \phi(\theta)$ doğru parçalarının birleşimi ile birim çember üzerindeki $e^{i\theta}$'nın uçlarını birbirine bağlayan açı olsun. Yani

$$\phi(\theta) = \sum_{j=1}^{n} [\arg(e^{i\theta} - b_j) - \arg(e^{i\theta} - a_j)]$$

biçimindedir. Burada θ, 0 ile 2π arasında değişir. Bu durumda $\phi(\theta)$'nın π'nin tam katı olduğu bir θ açısı vardır.

İspatı 3.2 : $R(z)=\dfrac{A(z)}{B(z)}$ olsun. Her $|z|=1$ için $|R(z)|=1$ olacağından $\{|z|=1\}$ üzerinde ve buradan da analitik devam yardımı ile Rieman küresindeki tüm z 'ler için

$$R(z).\overline{R}(1/\overline{z})=1$$

olur. Teoremin hipotezinden dolayı $R(\lambda_j)=1$ olduğundan $R(1/\lambda_j)=1$ olur. Yardımcı teorem 3.4 'den $|\lambda|=1$ biçimindeki bir λ için $R(\lambda)=1$'dir. Buradan $2n$. dereceden $R(z)$ rasyonel fonksiyonu Rieman küresi üzerindeki birbirinden farklı $2n+1$ tane $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, 1/\lambda_1, ..., 1/\lambda_n$ noktalarında 1 olur. Sonuç olarak $R(z)\equiv 1$ buradan da $A(z)\equiv B(z)$ bulunur.

Uyarı 3.6 : $0<a<b<1$ olacak biçiminde a ve b seçilsin. $A(z)=\dfrac{z-a}{1-az}$ ve $B(z)=\dfrac{z-b}{1-bz}$ olsun. Bu durumda $A(1)=B(1)$ ve $A(-1)=B(-1)$ olur. Fakat $A\neq B$ 'dir. Çünkü A ve B Blaschke çarpımlarının çakıştıkları noktalar birim diskin içinde olmalıdır. Fakat 1 ve -1 birim diskin üzerindeki noktalardır.

4. SONLU BLASCHKE ÇARPIMLARININ GENİŞLEMESİ

Bu bölümde üst yarı düzlemde tanımlı sonlu Blaschke çarpımları ile birim çemberde tanımlı sonlu Blaschke çarpımlarının sıfırdan farklı kalıntıya sahip olduğu [8] numaralı kaynaktan yararlanılarak gösterilecektir.

$\{z_k\}_{1\leq k\leq n} \subseteq D$ biçiminde sonlu bir dizi olsun.

$$B(z) = e^{i\beta} z^n \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{z - z_k}{1 - \overline{z_k}\, z} \right)^{m_k}$$

0'da n. dereceden, $z = z_k$'larda ise m_k. dereceden sıfıra sahip ve her $\xi \in \partial D$ için $|B(\xi)| = 1$ şeklinde birim diskte sonlu Blaschke çarpımı olduğu biliniyor.

Tanım 4.1 : $\{z_k\}_{1\leq k\leq n}$ üst yarı düzlemde sonlu bir dizi olsun.

$$B(z) = e^{i\beta} \prod_{k=1}^{N} \left(\frac{z - z_k}{z - \overline{z_k}} \right)^{m_k}$$

çarpımı ise üst yarı düzlemde sonlu Blaschke çarpımı olarak tanımlanır.

Birim disk ile üst yarı düzlem arasında konform dönüşüm olduğundan bir Möbius dönüşümü ile Blaschke çarpımın bir sınıfı için geçerli olan her sonuç onun bir diğer sınıfına taşınabilir. Fakat aşağıda verilecek olan teoremde bir istisna vardır. Teoremin ispatı üst yarı düzlemdeki Blaschke çarpımı için temel olarak farklıdır. Birim disk ile üst yarı düzlem arasındaki konform dönüşüm ispatı bir durumdan diğerine taşımaz.

Teorem 4.2 : B en az bir tane sonlu kutba sahip olan sonlu bir Blaschke çarpımı olsun. Bu durumda B 'nin sıfırdan farklı bir kalıntısı vardır.

Şimdi yukarıdaki teoremin ispatında kullanılması için bazı ön bilgiler verilecektir.

Teoremdeki sonlu en az bir kutba sahip olma varsayımı sadece birim diskte tanımlı sonlu bir B Blaschke çarpımı için gereklidir. Çünkü $B(z) = z^n, n \geq 1$ birim disk için sonlu Blaschke çarpımı olmasına rağmen sonlu bir kutbu yoktur. Böylece sonlu en az bir kutba sahip olma varsayımı üst yarı düzlemde tanımlı sonlu Blaschke çarpımları için gereksizdir.

B fonksiyonunun kutupları hariç her yerde $B = \mathbb{B}'$ olacak biçimde bir ilkeli $\mathbb{B}$ fonksiyonu olsun. Eğer $R = \dfrac{P}{Q}$ biçiminde bir rasyonel fonksiyon ve

$$Q(z) = \prod_{k=1}^{N} (a_k z + b_k)^{m_k} \qquad n = \deg P - \deg Q$$

ise Kısmi Kesirli Açılım teoreminden $\alpha_k, \beta_{k,l}$ reel sayı olmak üzere

$$R(z)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k z^k+\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{m_k}\frac{\beta_{k,l}}{(a_k z+b_k)^l}$$

biçiminde yazılabilir.

$R=\mathbb{R}'$ olacak biçimde bir $\mathbb{R}$ ilkeli vardır ancak ve ancak her k için $\beta_{k,1}=0$'dır. Bu yüzden $\beta_{k,1}$'nin en az birinin sıfırdan farklı olduğunu göstermek R'nin $\mathbb{R}$ biçiminde bir ilkelinin olmadığını göstermek için yeterlidir.

Şimdi üst yarı düzlemdeki sonlu Blaschke çarpımları için Teorem 4.2 'nin ispatı verilsin.

İspat 4.2 :

$$B(z)=\prod_{k=1}^{N}\left(\frac{z-z_k}{z-\overline{z_k}}\right)^{m_k}$$

biçiminde üst yarı düzlemde sonlu Blaschke çarpımı olsun. Kısmi Kesirli Açılım teoreminden

$$B(z)=1+\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{m_k}\frac{\beta_{k,l}}{(z-\overline{z_k})^l}$$

biçiminde yazılabilir. $r=\max\{|z_1|,|z_2|,...,|z_N|\}$ olsun. Her $|z|>r$ için

$$\frac{1}{z-\overline{z_k}}=\frac{1}{z}.\frac{1}{1-\frac{\overline{z_k}}{z}}=\frac{1}{z}.\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\overline{z_k}}{z}\right)^j=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\overline{z_k})^j}{z^{j+1}}=\frac{1}{z}+\frac{\overline{z_k}}{z^2}+\frac{\overline{z_k}^2}{z^3}+...$$

Her iki tarafın türevi alınarak $\frac{1}{(1-\overline{z_k})^l}$'nin $\frac{(-1)^{(l-1)}.(l-1)!}{z^l}$ ile başladığı görülür. Her $|z|>r$ için

$$B(z)=1+\frac{\sum_{k=1}^{N}\beta_{k,1}}{z}+.... \tag{4.2.1}$$

buradan da

$$B(z)=\prod_{k=1}^{N}\left(\frac{z-z_k}{z-\overline{z_k}}\right)^{m_k}=\prod_{k=1}^{N}\left(\frac{1-z_k/z}{1-\overline{z_k}/z}\right)^{m_k}=\frac{\prod_{k=1}^{N}\left(1-\frac{z_k}{z}\right)^{m_k}}{\prod_{k=1}^{N}\left(1-\frac{\overline{z_k}}{z}\right)^{m_k}}$$

$$=\prod_{k=1}^{N}\left(1-\frac{z_k}{z}\right)^{m_k}.\prod_{k=1}^{N}\left(1+\frac{m_k\overline{z_k}}{z}+...\right)$$

$$=1+\frac{\sum_{k=1}^{N}m_k\overline{z_k}-\sum_{k=1}^{N}m_kz_k}{z}+... \tag{4.2.2}$$

(4.2.1) ve (4.2.2) eşitliklerinden

$$\sum_{k=1}^{N} \beta_{k,1} = -2i \sum_{k=1}^{N} m_k .imz_k$$

olur. Her $k, m_k imz_k > 0$ olduğundan en az bir tane $\beta_{k,1} \neq 0$'dır. Bu durumda B'nin sıfırdan farklı en az bir kalıntısı vardır.

Önerme 4.3 : $R(z) = \dfrac{(z-z_1)^{k_1}...(z-z_m)^{k_m}}{(z-p_1)^{l_1}...(z-p_n)^{l_n}}$

biçiminde rasyonel fonksiyon olsun. Eğer

$$\sum_{i=1}^{m} k_i = \sum_{i=1}^{n} l_i \quad ve \quad \sum_{i=1}^{m} k_i z_i \neq \sum_{i=1}^{n} l_i p_i$$

ise R'nin sıfırdan farklı bir kalıntısı vardır.

İspat 4.3 : $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Re}\, s(R, p_i) = \sum_{i=1}^{n} l_i p_i - \sum_{i=1}^{m} k_i z_i$ olduğundan $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Re}\, s(R, p_i) \neq 0$ bulunur.

Sonuç 4.4 : $R(z)=\dfrac{z^n+a_{n-1}z^{n-1}+...+a_0}{z^n+b_{n-1}z^{n-1}+...+b_0}$ *ve* $a_{n-1}\neq b_{n-1}$ ise R 'nin sıfırdan farklı bir kalıntısı vardır.

Şimdi Teorem 4.2 'nin birim diskteki sonlu Blaschke çarpımlarındaki ispatı için ön hazırlık yapılacaktır.

$$B(z)=e^{i\beta}z^n\prod_{k=1}^{N}\left(\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}\right)^{m_k}$$

olsun. B, $\overline{D}$'da analitik olduğu için B'nin $\overline{D}$'nı içeren açık diskte $B=\mathbb{B}'$ biçiminde bir $\mathbb{B}$ ilkeli vardır. $\mathbb{B}$ keyfi sabit içerdiğinden $\mathbb{B}(0)=0$ seçilsin. İntegralin Temel teoreminden her $z\in\overline{D}$ için

$$\mathbb{B}(z)=\int_0^z\mathbb{B}'(\xi)d\xi=\int_0^z B(\xi)d\xi$$

Böylece ∂D birim çemberinde $\mathbb{B}$ bulunabilir. Her $e^{i\theta}\in\partial D$ için

$$\mathbb{B}(e^{i\theta})=\int_0^{e^{i\theta}}B(z)dz=\int_0^1 e^{i\beta}r^n e^{i\theta n}\prod_{k=1}^{N}\left(\frac{re^{i\theta}-z_k}{1-\overline{z_k}re^{i\theta}}\right)^{m_k}.e^{i\theta}dr$$

olur. $\prod_{k=1}^{N}(\frac{re^{i\theta}-z_k}{1-\overline{z_k}re^{i\theta}})^{m_k}$ çarpımı da sonlu Blaschke çarpımıdır. Bu yüzden D birim diski içinde 1 ile sınırlıdır. Her $e^{i\theta}\in\partial D$ için

$$\left|\mathbb{B}(e^{i\theta})\right|=\left|\int_0^1 e^{i\beta}r^n e^{in\theta}\prod_{k=1}^{N}(\frac{re^{i\theta}-z_k}{1-\overline{z_k}re^{i\theta}})^{m_k}.e^{i\theta}.dr\right|\le\int_0^1 r^n dr=\frac{1}{n+1} \tag{4.2.3}$$

Son olarak da temel teoremi ispatlamak için aşağıda verilecek olan Maximum Modül teoreminden faydalanılacaktır.

Maksimum Modül Teoremi 4.5 : f, $\mathbb{C}\setminus D$'de analitik fonksiyon ve her $\xi\in\partial D$ için $|f(\xi)|\le 1$ olsun. Eğer $\lim_{z\to\infty} f(z)=1$ ise f sabit fonksiyon olur.

Şimdi de birim diskteki Blaschke çarpımları için Teorem 4.2 'nin ispatı ele alınacaktır.

İspat 4.2 : $B(z)=e^{i\beta}z^n\prod_{k=1}^{N}(\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z})^{m_k}$

olsun. Kısmi Kesirli Açılım teoreminden

$$B(z)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k z^k+\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{m_k}\frac{\beta_{k,l}}{(1-\overline{z_k}z)^l} \tag{4.2.4}$$

biçiminde yazılabilir. B bir ilkele sahip olsun. Böylece her k için $\beta_{k,1}=0$'dır. B'nin her bir ilkeli, α sabit olmak üzere

$$\mathbb{B}(z)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha_k}{k+1}.z^{k+1}+\alpha+\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=2}^{m_k}\frac{\beta_{k,l}/(\overline{z_k}(l-1))}{(1-\overline{z_k}z)^{(l-1)}} \tag{4.2.5}$$

biçiminde olur. $\mathbb{B}(0)=0$ olsun. Böylece $\mathbb{B}$,

$$\mathbb{B}(z)=\int_0^z \mathbb{B}'(\xi)d\xi=\int_0^z B(\xi)d\xi$$

denklemi ile tanımlanan tek bir ilkel olur. $\mathbb{B}(0)=0, \mathbb{B}'=B$ ve B'nin orjinde *n.* dereceden sıfırı olduğundan ve $\mathbb{B}$'nin orjinde (n+1). dereceden sıfırı vardır. Eşitlik (4.2.5) 'i ortak paydaya alarak $P(z)$, $\sum_{k=1}^{N}(m_k-1)$. dereceden polinom olmak üzere

$$\mathbb{B}(z)=\frac{z^{n+1}P(z)}{\prod_{k=1}^{N}(1-\overline{z_k}z)^{(m_k-1)}} \tag{4.2.6}$$

biçiminde yazılabilir. Eşitlik (4.2.4) ve (4.2.5) 'den

$$\lim_{z\to\infty}\frac{(n+1)\mathbb{B}(z)}{zB(z)}=1 \tag{4.2.7}$$

olur.

$f(z)=\dfrac{(n+1)\mathbb{B}(z)}{zB(z)}$ fonksiyonu tanımlansın. $f(z)$ fonksiyonunda $\mathbb{B}(z)=\dfrac{z^{n+1}P(z)}{\prod_{k=1}^{N}(1-\overline{z_k}z)^{m_k-1}}$ ve $B(z)=e^{i\beta}z^n\prod_{k=1}^{N}(\dfrac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z})^{m_k}$ yerine yazılarak

$$f(z)=\frac{(n+1)P(z)\prod_{k=1}^{N}(1-\overline{z_k}z)}{\prod_{k=1}^{N}(z-z_k)^{m_k}} \tag{4.2.8}$$

bulunur. Buradan da f, $\mathbb{C}\setminus D$'de analitik olur. B'nin orjin dışında sıfırlarının olduğu kabul edilmişti. Böylece f'nin $\mathbb{C}\setminus\overline{D}$'da en az bir sıfırı vardır. Eşitlik (4.2.7)'den $\lim_{z\to\infty}f(z)=1$ olur. Eşitlik (4.3) 'den her $e^{i\theta}\in\partial D$ için

$$\left|f(e^{i\theta})\right|=\left|\frac{(n+1)\mathbb{B}(e^{i\theta})}{e^{i\theta}B(e^{i\theta})}\right|=\left|(n+1)\mathbb{B}(e^{i\theta})\right|\le 1$$

Böylece Maximum Modül teoreminden f, $\mathbb{C}\setminus D$'de sabittir. Burada f'nin sıfırı olduğundan $f\equiv 0$ olur ki bu $\lim_{z\to\infty}f(z)=1$ ile çelişir. Bu durumda B'nin ilkeli yoktur. Buradan en az bir $\beta_{k,1}\neq 0$'dır. Bunun sonucunda da B'nin sıfırdan farklı en az bir kalıntısı vardır.

5. ELİPSLER VE SONLU BLASCHKE ÇARPIMLARI

Kompleks düzlemde birim diski kendi üzerine resmeden bire-bir ve örten Möbius dönüşümünün

$$z \to \beta.\frac{(z-a)}{1-\overline{a}z}; \quad \beta, a \in \mathbb{C}, \ |\beta| = 1, \ |a| < 1$$

biçiminde olduğu ve

$$B(z) = \beta.\prod_{j=1}^{n} \frac{z-a_j}{1-\overline{a_j}z}$$

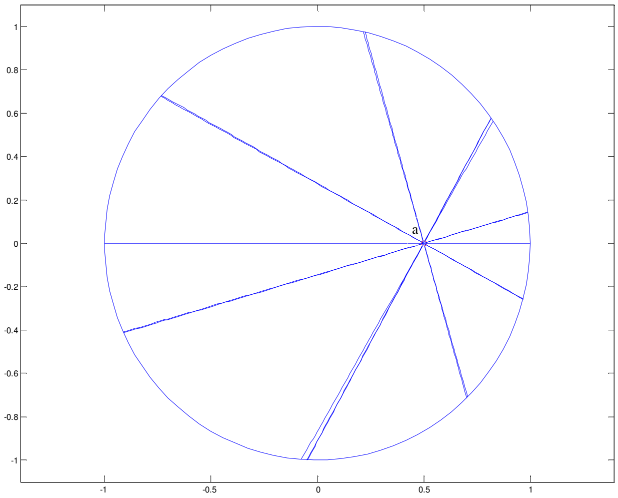
çarpımının n.dereceden sonlu bir Blaschke çarpımı olduğu biliniyor.

Tezin giriş bölümünde de bahsedildiği gibi birim çemberde verilen n noktayı yine birim çemberde bir noktaya resmeden bir Blaschke çarpımı bulunabildiğine göre acaba bu Blaschke çarpımının sıfırları hakkında ne söylenebilir? Burada polinomlar için bilinen en iyi sonuç Gauss-Lucas teoremidir [9]. Bu teorem Blaschke çarpımlarına uygulanırsa; “Herhangi sonlu bir B Blaschke çarpımı için $B(0) = 0$ ve birim diskte bulunan a noktası için $B(a) = 0$’ dır ancak ve ancak birim çemberde bulunan her λ için a noktası $B^{-1}(\{\lambda\})$ kümesinin konveks bölgesinde bulunur. " sonucuna ulaşılır.

Bu bölümde [9-11] numaralı kaynaktan faydalanılarak yukarıdaki soru cevaplanmaya çalışılacaktır. Önce 2. ve 3. deredecen Blaschke çarpımları ele alınacaktır.

5.1 İkinci Dereceden Blaschke Çarpımları

Burada $B(z) = z.\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}$ $a \neq 0$ biçiminde Blaschke çarpımları ele alınıp, z_1 ile z_2'yi birleştiren doğru parçasının B'nin sıfırdan farklı sıfırı olan a'dan geçtiği gösterilecektir.



Şekil 5.1 : $a = 0.5$ olan 2. dereceden Blaschke çarpımı

Teorem 5.1.2 : $B(z)=z.\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}, \qquad a\neq 0$

biçiminde bir Blaschke çarpımı olsun. Bir $\lambda\in\partial D$ için z_1 ve z_2; $B(z_1)=B(z_2)=\lambda$ biçiminde iki nokta olsun. Bu durumda z_1 ile z_2'yi birleştiren doğru parçası a'dan geçer. Tersine, a'dan geçen herhangi bir L doğrusunun ∂D'yi kestiği z_1 ve z_2 noktaları için $B(z_1)=B(z_2)$ olur.

İspat 5.1.2 : Bir $\lambda\in\partial D$ için z_1 ve z_2; $B(z_1)=B(z_2)=\lambda$ biçiminde iki nokta ve $\lambda=e^{i\alpha}$ olsun. $|z|=1$ için $z.\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}=e^{i\alpha}$ denklemini düşünelim. $\overline{z}=\dfrac{1}{z}$ yazılabileceğinden $\dfrac{(z-a)}{(\overline{z}-\overline{a})}=e^{i\alpha}$ bulunur. $z_j=r_je^{i\theta_j}+a$ olacak biçimde r_j ve θ_j pozitif sayı olsun. Bunlar $\dfrac{(z-a)}{(\overline{z}-\overline{a})}=e^{i\alpha}$ denkleminde yerine yazılırsa

$$z_1=a+r_1e^{i\alpha/2} \qquad z_2=a-r_2e^{i\alpha/2}$$

olur. $m=\dfrac{r_2}{r_1+r_2}$ olsun. Buradan r_1 ve r_2 sayıları m ifadesinde yerine yazılarak

$$a=mz_1+(1-m)z_2$$

bulunur. Buradan da a; B ile tanımlanan iki noktayı birleştiren doğru parçası üzerindedir.

a'dan geçen herhangi bir L doğrusunun ∂D birim çemberini kestiği noktalar z_1 ve z_2 olsun. $0 < s < 1$ için

$$a = sz_1 + (1-s)z_2$$

olur. $|z| = 1$ için

$$B(z) = z.\frac{(z-a)}{1-\overline{a}z} = \frac{z-a}{\overline{z}-\overline{a}}$$

ve

$$s(z_1 - a) = (1-s)(a - z_2)$$

olduğundan

$$B(z_1) = \frac{z_1 - z_2}{\overline{z_1} - \overline{z_2}} = B(z_2)$$

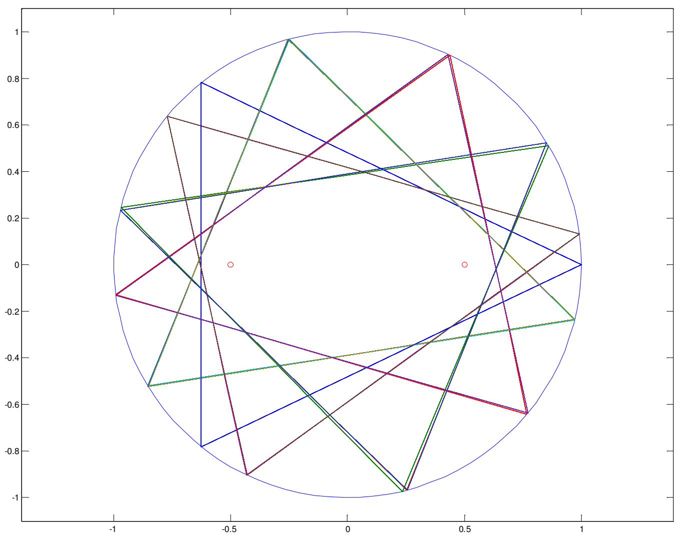
bulunur.

5.2 Üçüncü Dereceden Blaschke Çarpımları

Bu bölümde üç farklı sıfıra sahip olan 3. dereceden Blaschke çarpımları incelenecektir. Bir Möbius dönüşümü ile bileşkesi alınarak, sıfırlardan birinin orjinde olduğu varsayılabilir ve B(z) Blaschke çarpımı

$$B(z) = z.\frac{z-a_1}{1-\overline{a_1}z}.\frac{z-a_2}{1-\overline{a_2}z}$$

biçiminde alınabilir. ∂D'deki her λ noktası için $B(z_j)=\lambda$ biçiminde ∂D'de üç tane z_1, z_2, z_3 noktaları vardır. $\overline{(z_1 z_2)}, \overline{(z_2 z_3)}, \overline{(z_1 z_3)}$ doğru parçalarını birleştirerek elde edilen çizgileri izleyelim. Bu işlem, λ'nın çeşitli değerleri için yapılırsa aşağıdaki şekil elde edilir.



Şekil 5.2 : $a_1 = 0.5$ ve $a_2 = -0.5$ olan 3.dereceden Blaschke çarpımı

Teorem 5.2.1 : B, birbirinden farklı $0, a_1, a_2$ noktalarında sıfıra sahip üçüncü dereceden bir Blaschke çarpımı ve birim çember üzerindeki bir λ için $B(z_j) = \lambda$ olsun. Bu durumda $j \neq k$ için z_j ile z_k'yı birleştiren doğrular

$$|w - a_1| + |w - a_2| = |1 - \overline{a_1} a_2|$$

denklemi ile verilen E elipsine teğettir. Tersine E'deki her nokta, birim çemberin $B(z_1) = B(z_2)$ özelliğindeki farklı z_1 ve z_2 noktalarını birleştiren doğru parçasının teğet değme noktasıdır.

Bu bölümde temel amaç yukarıda verilen Teorem 5.2.1'i ispatlamaktır. Bunun için aşağıda yardımcı olacak lemma ve teoremler verilecektir. Bunlardan ilki konuyla ilgili olan Marden 'in teoremidir.

Teorem 5.2.2 : m_1, m_2, m_3; $m_1 + m_2 + m_3 = 1$ biçiminde pozitif reel sayılar ve a ile b aşağıdaki fonksiyonun sıfırları olsun. z_1, z_2, z_3 aynı doğru üzerinde olmayan kompleks sayılar olmak üzere

$$F(z) = \sum_{j=1}^{3} m_j (z - z_j)^{-1} = \frac{(z-a)(z-b)}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)}$$

olsun. Bu durumda a ve b; z_1, z_2, z_3 noktaları ile belirlenen doğru parçalarına teğet olan elipsin odak noktalarıdır. Teğetlerin değme noktaları ise

$$\varsigma_1 = \frac{m_2 z_3 + m_3 z_2}{m_2 + m_3} \quad \varsigma_2 = \frac{m_1 z_3 + m_3 z_1}{m_1 + m_3} \quad \varsigma_3 = \frac{m_1 z_2 + m_2 z_1}{m_1 + m_2}$$

biçimindedir.

Yardımcı Teorem 5.2.3 : B birbirinden farklı sıfıra sahip n. dereceden bir Blaschke çarpımı olsun. Bu durumda

a) ∂D'nin her noktası ∂D'de n farklı kez öngörüntüye sahiptir.

b) Eğer $B(z) = z.\prod_{j=1}^{n-1} \frac{z - a_j}{1 - \overline{a_j} z}$, ∂D'deki bir λ noktası için $j = 1, 2, ..., n$ olduğunda $B(z_j) = \lambda$ ve

$$F(z) = \frac{B(z)/z}{B(z) - \lambda} = \sum_{j=1}^{n} \frac{m_j}{z - z_j}$$

ise m_j aşağıdaki ifadeleri sağlar.

i) $\sum_{j=1}^{n} m_j = 1$

ii) $m_j = \dfrac{\lambda}{z_j B'(z_j)}$

iii) $\dfrac{1}{m_j} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{1 - |a_k|^2}{|z_j - a_k|^2}$

iv) $j = 1, 2, ..., n$ için $0 < m_j < 1$

İspat 5.2.3 : a) λ, birim çember üzerinde sabit bir nokta olsun. B, n. dereceden rasyonel fonksiyon olduğundan λ'nın en fazla n farklı öngörüntüsü vardır ve katlılıkları da sayılarak $B(z) = \lambda$ denkleminin n tane çözümü vardır. Ayrıca $|B(z)| = 1$ ancak ve ancak $|z| = 1$ olduğundan, λ'nın tüm öngörüntüleri birim çemberde bulunur. B 'nin türevi alınıp, bu türev B 'ye bölünerek

$$\frac{B'(z)}{B(z)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1-|a_j|^2}{(1-\overline{a_j}z)(z-a_j)}$$

biçimindedir ve $a_n = 0$ yazarak $|z| = 1$ için

$$\left|\frac{B'(z)}{B(z)}\right| = \left|\frac{B'(z)}{\overline{z}B(z)}\right| = \sum_{j=1}^{n} \frac{1-|a_j|^2}{|z-a_j|^2}$$

olur. Böylece B', ∂D'de hiçbir zaman sıfır olmaz. Buradan da B'nin modülü 1 olan her bir değerinin katlılığı birdir. Bu da λ'nın ∂D'de n tane öngörüntüye sahip olduğunu verir.

b) i) $F(z) = \dfrac{B(z)/z}{B(z)-\lambda} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{m_j}{z-z_j}$ ifadesini z ile çarpıp $z \to \infty$ için limit alınırsa $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_j = 1$ bulunur.

ii) $m_j = \lim\limits_{z \to z_j} (z - z_j) F(z) = \lim\limits_{z \to z_j} \dfrac{z - z_j}{(B(z) - \lambda)} . (B(z) \big/ z) = \dfrac{1}{B'(z_j)} . \dfrac{\lambda}{z_j}$

iii) $a_n = 0$ için B 'nin türevi tekrar yazılırsa

$$\frac{B'(z)}{B(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1 - |a_k|^2}{(1 - \overline{a_k} z)(z - a_k)}$$

$z_j = \dfrac{1}{\overline{z_j}}$ ve ii) 'den

$$\frac{1}{m_j} = \frac{z_j B'(z_j)}{\lambda} = \frac{z_j B'(z_j)}{B(z_j)} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1 - |a_k|^2}{|z_j - a_k|^2}$$

bulunur.

iv) $m_j = \dfrac{1}{1 + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{1 - |a_k|^2}{|z_j - a_k|^2}}$ olacağından ve $k = 1, 2, ..., n-1$ için a_k birim diskin içinde noktalar olduğundan $j = 1, 2, ..., n$ için $0 < m_j < 1$ bulunur. □

Aşağıda verilecek teorem; Teorem 5.2.1 'in daha kapsamlı biçimidir. Bu teoremin ispatı, "Elipsin üzerinde verilen herhangi bir noktadan odağa çizilen doğrular söz konusu noktada elipse teğet doğrusu ile aynı açıyı yapar. " biçimindeki elipslerin özelliklerine dayanmaktadır.

Teorem 5.2.4 : Üçüncü dereceden birbirinden farklı noktalarda sıfırları olan bir B Blaschke çarpımı aşağıdaki gibi olsun.

$$B(z) = z.(\frac{z-a_1}{1-\overline{a_1}z})(\frac{z-a_2}{1-\overline{a_2}z})$$

Birim çemberdeki bir λ noktası için; z_1, z_2, z_3 B ile λ'ya gitsin ve

$$F(z) = \frac{B(z)/z}{B(z)-\lambda} = \frac{m_1}{z-z_1} + \frac{m_2}{z-z_2} + \frac{m_3}{z-z_3}$$

olsun. Bu durumda z_1 ile z_2'yi birleştiren doğru $\varsigma_3 = \dfrac{m_1 z_2 + m_2 z_1}{m_1 + m_2}$ noktasında

$$E : |w-a_1| + |w-a_2| = |1-\overline{a_1}a_2|$$

denklemi ile verilen elipse teğettir. Tersine E elipsinin her bir noktası, $B(z_1) = B(z_2)$ biçiminde birim çember üzerinde birbirinden farklı z_1 ile z_2 noktalarından geçen doğrunun E elipsine teğet değme noktasıdır.

İspat 5.2.4 : $j = 1, 2$ için $F(a_j) = \dfrac{B(a_j)/a_j}{B(a_j)-\lambda} = 0$ olduğundan

$$0 = F(a_j) = \frac{m_3}{a_j - z_3} + \frac{(m_1 + m_2)a_j - (m_1 z_2 + m_2 z_1)}{(a_j - z_1)(a_j - z_2)}$$

$$= \frac{m_3}{a_j - z_3} + \frac{(a_j - \varsigma_3)}{(a_j - z_1)(a_j - z_2)}(m_1 + m_2)$$

olur. Yardımcı teoremden 5.2.3 ’den

$$0 < m_j < 1 \qquad \text{ve} \qquad m_1 + m_2 + m_3 = 1$$

olur. Böylece

$$m_3 \left| \frac{1}{a_j - z_3} \right| = (1 - m_3) \left| \frac{(a_j - \varsigma_3)}{(a_j - z_1)(a_j - z_2)} \right|$$

bulunur. Yukarıdakiler birleştirilerek

$$\frac{1}{\left|1 - \overline{a_1} a_2\right|} \left|\varsigma_3 - a_1\right| + \frac{1}{\left|1 - \overline{a_1} a_2\right|} \left|\varsigma_3 - a_2\right|$$

$$= \frac{m_3}{1 - m_3} \left(\left| \frac{(a_1 - z_1)(a_1 - z_2)}{(1 - \overline{a_1} a_2)(a_1 - z_3)} \right| + \left| \frac{(a_2 - z_1)(a_2 - z_2)}{(1 - \overline{a_1} a_2)(a_2 - z_3)} \right| \right) \qquad (5.2.1)$$

sonucuna ulaşılır. $B(z)$'nin tanımından ve z_1, z_2, z_3 noktaları B ile λ'ya resmedildiğinden

$$B(z) - \lambda = \frac{(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)}{(1 - \overline{a_1} z)(1 - \overline{a_2} z)}$$

bulunur. $B(a_j) = 0$ olduğundan

$$1 = |\lambda| = \left| \frac{(a_j - z_1)(a_j - z_2)(a_j - z_3)}{(1 - |a_j|^2)(1 - \overline{a_2} a_1)} \right|$$

olur. (5.2.1) ile bu eşitliği birleştirerek

$$\frac{1}{|1 - \overline{a_1} a_2|} |\varsigma_3 - a_1| + \frac{1}{|1 - \overline{a_1} a_2|} |\varsigma_3 - a_2| = \frac{m_3}{1 - m_3} \left(\frac{1 - |a_1|^2}{|a_1 - z_3|^2} + \frac{1 - |a_2|^2}{|a_2 - z_3|^2} \right)$$

çıkar. Yardımcı teorem 5.2.3 'ün iii) şıkkından

$$\frac{1}{|1 - \overline{a_1} a_2|} |\varsigma_3 - a_1| + \frac{1}{|1 - \overline{a_1} a_2|} |\varsigma_3 - a_2|$$

$$= \frac{m_3}{1 - m_3} \left([1 + \frac{(1 - |a_1|^2)}{|a_1 - z_3|^2} + \frac{(1 - |a_2|^2)}{|a_2 - z_3|^2}] - 1 \right)$$

$$= \left(\frac{m_3}{1-m_3}\right)\left(\frac{1}{m_3}-1\right) = 1$$

olur. Buradan $\left|\varsigma_3 - a_1\right| + \left|\varsigma_3 - a_2\right| = \left|1 - \overline{a_1} a_2\right|$ olur, böylece ς_3, E elipsinin üzerinde bulunur.

ς_3'ün hem E elipsinde hem de z_1 ve z_2'den geçen L doğrusu üzerinde olduğu biliniyor. ς_3'ün L doğrusu ile E elipsinin teğet noktası olduğunu ispatlamak içinse

$$L(a_1 \varsigma_3 z_1) = -L(a_2 \varsigma_3 z_2)$$

eşitliği gösterilmelidir. Bu z_1 ile z_2'yi birleştiren doğru parçasının, köşeleri a_1, ς_3, a_2 olan üçgenin dışında olduğunu ve a_1 ile ς_3'ü, a_2 ile ς_3'ü birleştiren doğru parçaları ile eşit açı yaptığını verir.

Bu açıları hesaplamadan önce ς_3

$$\frac{m_1}{z-z_1} + \frac{m_2}{z-z_2}$$

fonksiyonunun sıfırıdır. Bu sebeple

$$\frac{m_3}{\varsigma_3 - z_3} = F(\varsigma_3) = \frac{B(\varsigma_3)/\varsigma_3}{B(\varsigma_3) - \lambda} = \frac{(\varsigma_3 - a_1)(\varsigma_3 - a_2)}{(\varsigma_3 - z_1)(\varsigma_3 - z_2)(\varsigma_3 - z_3)} \tag{5.2.2}$$

olur. $j = 1,2$ için a_j ile ς_3'ü birleştiren doğru parçası ile ς_3 ile z_j'yi birleştiren doğru parçasının yaptığı açı kıyaslanabilir. Kompleks sayıların özelliklerinden ve (5.2.2) numaralı eşitlikten

$$\arg[\frac{a_1 - \varsigma_3}{z_1 - \varsigma_3}] + \arg[\frac{a_2 - \varsigma_3}{z_2 - \varsigma_3}] = \arg[\frac{(a_1 - \varsigma_3)(a_2 - \varsigma_3)}{(z_1 - \varsigma_3)(z_2 - \varsigma_3)}]$$

$$= \arg[(\varsigma_3 - z_3)F(\varsigma_3)] = \arg[(\varsigma_3 - z_3)\frac{m_3}{\varsigma_3 - z_3}] = \arg m_3 = 0$$

bulunur. ς_3'den geçen hiçbir doğru odakdan geçen doğrular ile eşit açı yapmadığından (köşeleri a_1, ς_3, a_2 olan üçgenin dışında olmayan normal doğrusu haricinde), bu L doğrusunun teğet doğrusu olduğunu ispatlar.

E'nin tüm ς noktalarının B ile tanımlanan iki noktadan geçen bir doğrunun E ile teğet değme noktası olduğunu görmek için ς'da E elipsine teğet olan L doğrusu çizilir. Bu doğru çemberi birbirinden farklı z_1, z_2 noktalarında keser. Yardımcı teorem 5.2.3 'ün a) şıkkından

$$B(z_1) = B(w_1) = B(w_2)$$

olacak biçimde birim çember üzerinde w_1, w_2 noktaları vardır. Fakat z_1'den elipse iki tane teğet doğrusu çizilebileceğinden ve L elipse teğet olduğundan, L bu iki doğrudan biri olmalıdır. z_1 ile w_1'den geçen doğru, z_1 ile w_2'den geçen doğruda olduğu gibi elipse teğet olacağından, L bu doğrulardan biri olmalıdır. Böylece iddia edildiği gibi $z_2 = w_1$ veya $z_2 = w_2$'dir. □

Şimdi de 3. dereceden Blaschke çarpımları ile birim çemberde 3-inscribed elipsler arasındaki bağlantı verilecektir.

$B(z) = z.(\frac{z-a_1}{1-\overline{a_1}.z})(\frac{z-a_2}{1-\overline{a_2}.z})$ biçimindeki 3. dereceden Blaschke çarpımı için tanımlanan

$$E : |z-a_1| + |z-a_2| = |1-\overline{a_1}a_2|$$

elipsi 3. dereceden B Blaschke çarpımının Blaschke elipsi olarak tanımlansın. Teorem 5.2.4 'den E elipsinin, z_1 birim çember üzerinde keyfi bir nokta olmak üzere; $B(z_1) = B(z_2) = B(z_3)$ biçimindeki ∂D birim çemberinin z_1, z_2, z_3 noktaları ile oluşturulan her $\Delta(z_1, z_2, z_3)$ üçgeni tarafından içerildiği anlaşılır. Böyle bir elipse birim diskde içinde 3-inscribed denilir.

Acaba birim çemberde Blaschke elipsleri dışında başka 3-inscribed elipsler var mıdır? Aşağıdaki teorem ispatlanarak bu soru cevaplanacaktır [10].

Teorem 5.2.5 : Birim diskin içindeki 3-inscribed elipsler Blaschke elipsleridir.

İlk olarak bu teoremin ispatında kullanılacak olan Chapple's formülü açıklanacaktır.

3-inscribed çemberleri sınıflandıran Chapple's formülüne göre; w merkezli R yarıçaplı bir çember içine bir N üçgeni, bu N üçgeninin içine de a merkezli, r yarıçaplı başka bir çember çizilirse; l, w ile a arasındaki uzaklık olmak üzere;

$$2rR = R^2 - l^2 \qquad (5.2.3)$$

bağıntısı sağlanır.

İspat 5.2.5 : İlk olarak E Blaschke elipsinin odak noktalarının $a_1 = a_2 = a$ biçiminde aynı olduğunu yani, E elipsinin a merkezli çember olduğu durum ele alınsın. (5.2.3) ifadesindeki Chapple's formülüne göre dıştaki çemberi yani, N'nin çevrel çemberi birim çember alınırsa, $w = 0, R = 1$ ve $l^2 = |a|^2 = a.\bar{a}$ olur. N'nin iç teğet çemberindeki herhangi bir z noktası için $|z - a| = r$ olacağından bunlar Chapple's formülünde yerine yazılırsa

$$|z - a| + |z - a| = |1 - a.\bar{a}|$$

bulunur. Buradan 3-inscribed çemberlerin Teorem 5.2.4 'deki E elipsinin özel olarak çember olduğu duruma karşılık geldiği anlaşılır.

Teorem 5.2.4 ’den E Blaschke elipsinin birim diskde 3-inscribed olduğu biliniyor. Böylece teoremin ispatı için Blaschke elipsi olmayan elipslerin birim diskde 3-inscribed olmadığı gösterilmelidir.

F, a_1 ve a_2 odaklarına sahip birim disk içinde bir elips olsun. F Blaschke elipsi olmasın. Teorem 5.2.4’den a_1 ve a_2 odaklarına sahip, asal eksen uzunluğu $\left|1-\overline{a_1}a_2\right|$ olan birim diskde 3-inscribed bir E Blaschke elipsi vardır. Bu parametreler bir elips belirteceğinden, F ’nin asal ekseni E’nin asal ekseninden uzun veya kısa olmalıdır.

F ’nin asal eksen uzunluğu daha uzun olsun. E elipsinin F elipsinin içinde olacağı açıktır. E elipsi ile birim disk arasına $\overleftrightarrow{(z_2,z_3)}$ doğrusu dikey olacak biçimde $\Delta(z_1,z_2,z_3)$ üçgeni çizilsin. F ’ye teğet olan $\overline{(z_1,\varsigma_2)},\overline{(z_1,\varsigma_3)}$ kirişleri çizilsin. Bu kirişlerin $\overleftrightarrow{(z_2,z_3)}$ doğrusunun sağında olduğu açıktır. Böylece $\overline{(\varsigma_2,\varsigma_3)}$ doğru parçası F ’ye teğet olamaz.

F ’nin asal eksen uzunluğu daha kısa olsun. F elipsinin E elipsinin içinde olacağı açıktır. E elipsi ile birim disk arasına $\overleftrightarrow{(z_2,z_3)}$ doğrusu dikey olacak biçimde $\Delta(z_1,z_2,z_3)$ üçgeni çizilsin. F ’ye teğet olan $\overline{(z_1,\varsigma_2)},\overline{(z_1,\varsigma_3)}$ kirişleri çizilsin. Bu kirişlerin $\overleftrightarrow{(z_2,z_3)}$ doğrusunun solunda olduğu açıktır. Böylece $\overline{(\varsigma_2,\varsigma_3)}$ doğru parçası F ’ye teğet olamaz.

Yukarıda incelenen her iki durumda da F elipsi birim diskde 3-inscribed değildir.

Böylece birim diskdeki 3-inscribed elipslerin Blaschke elipsleri olduğu görüldü. Şimdi de $\frac{1}{2} \le r < 1$ biçimindeki bir r için r yarıçaplı bir diskin yukarıda verilen Blaschke elipsleri ile oluşturulabileceğini gösterilsin.

Teorem 5.2.6 : $\frac{1}{2} \le r < 1$ biçimindeki her r için, r yarıçaplı orjin merkezli kapalı disk Blaschke elipsleri ile sınırlı bölgelerin birleşimidir.

Aşağıda bu teoremin ispatında kullanılacak iki tane yardımcı teorem verilecektir.

Yardımcı Teorem 5.2.7 : p, birim çemberde birbirinden farklı $z_1, z_2, ..., z_n$ noktalarında sıfıra sahip n. dereceden bir polinom olsun. $|\gamma| = 1$ biçimindeki bir γ sabiti için $B(0) = 0$ ve

$$\frac{B(z)/z}{B(z) - \gamma} = \frac{p'(z)}{np(z)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1/n}{z - z_j}$$

şartını sağlayan bir B Blaschke çarpımı vardır.

Tanım 5.2.8 : Yukarıda verilen yardımcı teoremdeki bu B Blaschke çarpımına p ile bağlantılıdır denir.

Yardımcı Teorem 5.2.9 : ∂D'de birbirinden farklı $w_1,...,w_n$ noktaları verilsin. Aşağıdaki özellikleri sağlayan n. dereceden bir B Blaschke çarpımı vardır.

a) B 'nin 0'da sıfırı vardır.

b) B, w_j'leri özdeşler.

c) $$\frac{B(z)/z}{B(z)-B(w_j)}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{z-w_j}$$

d) B, n.dereceden bir p polinomu ile bağlantılıdır.

e) Köşeleri birleştiren doğru parçasının orta noktasına teğet olan ve B nin sıfırdan farklı sıfırlarında odak noktasına sahip olan bir eğri vardır. $n=3$ olduğunda bu eğri B'nin sıfırdan farklı sıfırlarında odak noktasına sahip bir elips olur.

İspat 5.2.6 : $r, \frac{1}{2}\leq r<1$ biçiminde bir reel sayı ve $C_r=\{z\,\big|\,|z|=r\}$ olsun. C_r'ye teğet olan üst yatay teğet doğrusu ∂D'yi "w" ve "$-\overline{w}$" noktalarında, C_r'yi ise K orta noktasında kessin. Yardımcı teorem 6.2.9 'dan

$$p(z)=(z-w)(z+\overline{w})(z+i)$$

olmak üzere

$$\frac{B(z)/z}{B(z)-B(w)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{z-w}+\frac{1}{z+\overline{w}}+\frac{1}{z+i}\right)=\frac{p'(z)}{3p(z)} \qquad (5.2.4)$$

ve

$$B(w) = B(-\overline{w}) = B(-i)$$

şartlarını sağlayan

$$B(z) = z\frac{(z-a_1)(z-a_2)}{(1-\overline{a_1}z)(1-\overline{a_2}z)}$$

biçiminde bir B Blaschke çarpımı vardır.

Teorem 5.2.4 ve Yardımcı teorem 5.2.9 'dan bu Blaschke çarpımı K orta noktasında yatay teğet doğrusuna teğet olan, a_1 ve a_2 odaklarına sahip birim diskte 3-inscribed bir P elipsi belirtir. P'nin C_r çemberi içinde bulunduğu ve orjini içerdiği gösterilerek ispat tamamlanacaktır.

(5.2.4) denkleminden

$$\frac{(z-a_1)(z-a_2)}{(1-\overline{a_1}z)(1-\overline{a_2}z)(B(z)-B(w))} = \frac{p'(z)}{3p(z)}$$

olur. Buradan da

$$p'(a_1) = 0.3p(a_1) = 0$$

olduğu görülür. Böylece a_1, p' 'nün sıfırıdır. Benzer şekilde a_2 de p' 'nün sıfırıdır. Buradan

$$p'(z) = (z+\overline{w})(z+i)+(z-w)(z+i)+(z-w)(z+\overline{w})$$

$$= 3z^2 + 2(1-2im(w))iz + 2im(w) - |w|^2$$

bulunur. $|w|^2 = 1$ ve a_1 ile a_2 p''nün kökleri olduğundan

$$a_1.a_2 = -\frac{1}{3}(1-2im(w))$$

$$a_1 + a_2 = -\frac{2}{3}(1-2im(w))i$$

çıkar. Bu eşitliklerden a_1 ve a_2'nin sanal olduğu anlaşılır. Aslında

$$a_1 = \frac{1}{3}(2im(w)) - 1 + \sqrt{(2im(w)-1)(2im(w)+2)})i$$

ve

$$a_2 = \frac{1}{3}(2im(w) - 1 - \sqrt{(2im(w)-1)(2im(w)+2)})i$$

biçimindedir. $a_1 = a_2$ ise elips C_r çemberi olur. (5.2.3) ifadesindeki Chapple's formülünden $r = \frac{1}{2}$ olursa çember, birim diskte 3-inscribed çember olur.

$$r > \frac{1}{2} \text{ için } a_1 \neq a_2 \text{ olsun. } \frac{1}{2} \leq im(w) \leq 1 \text{ için}$$

$$im(a_2) < 0 < im(a_1)$$

bulunur. Ayrıca

$$im(\frac{a_1 + a_2}{2}) = \frac{1}{3}(2im(w) - 1) \geq 0$$

çıkar. Elipsin asal ekseninin C_r çemberinin çapının alt kümesi olduğu ve elipsin merkezinin K 'yı içeren doğru parçasında bulunduğu anlaşılır. Bu sebeple orjin merkezli, r yarıçaplı kapalı disk; elipsin merkezi ile aynı merkezli, elipsin asal ekseninin yarısı kadar yarıçap uzunluklu bir çember içerir. Böylece elips tarafından sınırlandırılmış bölge $\frac{1}{2} \leq r \leq 1$ için r yarıçaplı kapalı disk tarafından içerilir. Simetri kullanılarak bir diskin yarıçapı verildiğinde, yarıçapı içeren ve C_r çemberinde bulunan Blaschke elipsi bulunabilir. Böylece disk Blaschke elipslerinin birleşimidir. □

5.3 Daha Yüksek Derceden Blaschke Çarpımları

Burada daha yüksek dereceden Blaschke çarpımlarının sıfırlarının geometrik özellikleri verilecektir.

Teorem 5.3.1 : B birbirinden farklı n tane sıfıra sahip

$$B(z) = z.\prod_{j=1}^{n-1} \frac{z - a_j}{1 - \overline{a_j} z}$$

biçiminde Blaschke çarpımı, $\lambda \in \partial D$ ve $z_r, B(z_r) = \lambda$ biçiminde herhangi bir nokta olsun. Bu durumda $0 < m_r < 1$ biçiminde bir m_r ve

$$C(z) = \beta z \prod_{j=1}^{n-2} \left(\frac{z - w_j}{1 - \overline{w_j} z}\right)$$

biçiminde bir C Blaschke çarpımı vardır öyle ki bu C Blaschke çarpımı aşağıdaki özellikleri sağlar.

a) $$\frac{B(z)/z}{B(z) - \lambda} = \frac{m_r}{z - z_r} + (1 - m_r)\frac{C(z)/z}{C(z) - \lambda}$$

b) $$\sum_{l=1}^{n-1} \frac{1}{\prod_{j \neq l} \left|1 - \overline{a_l} a_j\right|} \left|(a_l - w_1)...(a_l - w_{n-2})\right| = 1$$

Bu teoremin b) şıkkı $n = 3$ için Teorem 5.2.4 'deki elips denklemine indirgenecektir. Bu teoremin ispatında ise "$\lambda \in \partial D$ için $w = \dfrac{\lambda z}{z-1}$ dönüşümünün $z = \dfrac{w}{w-\lambda}$ biçiminde tersi vardır ve $|w| = 1$'dir ancak ve ancak $Re z = \dfrac{1}{2}$'dir." önermesinden faydalanılacaktır.

İspat 5.3.1 : $z_1, z_2, \dots z_n$ noktaları $B(z) = \lambda$ denkleminin tüm kökleri olsun.

a) Kısmi Kesirli Açılım teoreminden

$$\frac{B(z)/z}{B(z)-\lambda} = \sum_{j=1}^{n} \frac{m_j}{z - z_j}$$

olur. Yardımcı teorem 5.2.3 'den $0 < m_j < 1$ ve $\sum_{j=1}^{n} m_j = 1$'dir. R,

$$R(z) = \frac{1}{1-m_r}\left(\frac{B(z)}{B(z)-\lambda} - \frac{m_r z}{z - z_r}\right) = \frac{1}{1-m_r}\left(\sum_{j \neq r} \frac{m_j z}{z - z_j}\right)$$

biçiminde bir rasyonel fonksiyon olsun. R fonksiyonunun $j \neq r$ için $(n-1)$ tane z_j noktasında basit kutbu vardır ve diğer noktalarda analitiktir. $|z| = 1$ iken $|B(z)| = 1$ olduğundan

$$\mathrm{Re}(\frac{B(z)}{B(z)-\lambda}) = \mathrm{Re}(\frac{z}{z-z_r}) = \frac{1}{2}$$

bulunur. Böylece ∂D'de $\mathrm{Re}\, R = \frac{1}{2}$'dir. Uygun olarak

$$C(z) = \frac{\lambda R(z)}{R(z)-1} \tag{5.3.1}$$

biçiminde tanımlı C fonksiyonunun modülü birim çemberde 1 'dir. $\forall j$ için D'de

$$\mathrm{Re}(\frac{z}{z-z_j}) \leq \frac{1}{2}$$

olur. Buradan da D'de $\mathrm{Re}\, R \leq \frac{1}{2}$'dir. Sonuç olarak C, D'de analitiktir. Ayrıca C süreklidir ve birim çemberde modülü 1 'dir. R, birim çemberde $(n-1)$ kutba sahip rasyonel fonksiyon olduğundan; C, $(n-1)$. dereceden Blaschke çarpımı olmalıdır. (5.3.1) eşitliğinde R'yi çözerek

$$R(z) = \frac{C(z)}{C(z)-\lambda}$$

bulunur. Buradan da

$$\frac{C(z)}{C(z)-\lambda} = R(z) = \frac{1}{1-m_r}\left(\frac{B(z)}{B(z)-\lambda} - \frac{m_r z}{z-z_r}\right)$$

ve

$$\frac{B(z)/z}{B(z)-\lambda} = \frac{m_r}{z-z_r} + (1-m_r)\frac{C(z)/z}{C(z)-\lambda}$$

olur.

b) C'nin sıfırdan farklı sıfırları $\sum_{j\neq r} \frac{m_j}{z-z_j}$ fonksiyonunun sıfırlarıdır. Bu sebeple

$$\frac{C(z)/z}{C(z)-\lambda} = \frac{\prod_{j=1}^{n-2}(z-w_j)}{\prod_{j=1,\, j\neq r}^{n}(z-z_j)}$$

biçiminde olur. Böylece ispatın kalan kısmı Teorem 5.2.4 'ün ispatı ile aynıdır. $\frac{(C(a_j)/a_j)}{(C(a_j)-\lambda)}, \frac{(a_j-\varsigma_3)}{(a_j-z_1)(a_j-z_2)}$ 'nin rolünü yapar. □

6. KAYNAKLAR

[1] Ford, L. R., Automorphic Functions, Chelsea Publishing Company, New York, (1951)

[2] Jones, G. A., Singerman, D., Complex Functions an Algebric and Geometric Viewpoint, Cambridge University Press, New York, (1987)

[3] De, U. C., Complex Analysis, U. N. Dhur & Sons Private Limited, (2009)

[4] Needham, T., Visual Complex Analysis, Oxford University Press, New York, (1997)

[5] Blair, D., Inversion Theory and Conformal Mapping, American Mathematical Society, United States of America, (2010)

[6] Duren, P., Harmonic Mappings in the Plane, Cambridge University Press, Cambridge, (2004)

[7] Horwitz, A. L., Lee, A. R., " A Uniqueness Theorem for Monic Blaschke Products ", *Proc. Amer. Math. Soc.,* Vol, (1986), 180-182

[8] Mashreghi, J., " Expanding a Finite Blaschke Products ", *Complex Var. Theory Appl.,* (2002), Vol, 255-258

[9] Daepp, U., Gorkin, P., Mortini, R., " Ellipses and Finite Blaschke Products ", Amer. Math. Monthly, Vol, (2002), 785-795

[10] Frantz, M. " How Conics Govern Möbius Transformation ", *Amer. Math. Monthly,*Vol, (2004), 779-790

[11] Daepp, U., Gorkin, P., Voss, K. " Poncelet's Theorem, Sendov's Conjecture, and Blaschke Products " *J. Math. Anal. Appl.* Vol, (2010), 93-102