T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KOMPLEKS DÜZLEMDE YAKLAŞIM TEORİSİNİN BAZI PROBLEMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

AHMET TESTİCİ

BALIKESİR, KASIM - 2013

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KOMPLEKS DÜZLEMDE YAKLAŞIM TEORİSİNİN BAZI PROBLEMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

AHMET TESTİCİ

BALIKESİR, KASIM - 2013

KABUL VE ONAY SAYFASI

Ahmet TESTİCİ tarafından hazırlanan "**KOMPLEKS DÜZLEMDE YAKLAŞIM TEORİSİNİN BAZI PROBLEMLERİ**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 22/11/2013 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Prof. Dr. Daniyal İSRAFİLZADE	....
Üye Prof. Dr. Ali GÜVEN	....
Üye Doç. Dr. Yunus Emre YILDIRIR	....

Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez BAÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Prof. Dr. Hilmi NAMLI ....

ÖZET

KOMPLEKS DÜZLEMDE YAKLAŞIM TEORİSİNİN BAZI PROBLEMLERİ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
AHMET TESTİCİ
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. DANİYAL İSRAFİLZADE)

BALIKESİR, KASIM - 2013

Beş bölümden oluşan bu tezde yaklaşım teorisinin düz ve ters teoremleri araştırılmıştır.

Birinci bölüm yaklaşım teorisi ve onun gelişimi hakkında bazı bilgileri içerir.

İkinci bölüm dört kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda diğer bölümlerde kullanılan temel kavramların tanımları, ikinci kısımda fonksiyon uzayları, üçüncü kısımda p-Faber polinomları, dördüncü kısımda ise düzgünlük modülü tanımı ve onun özellikleri yer almaktadır.

Üçüncü bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda yardımcı sonuçlara değinilmiştir. İkinci kısımda ise ağırlıklı Smirnov sınıflarında düz ve ters teoremler ispatlanmıştır.

Dördüncü bölümde iki kısımdan meydana gelmektedir. Birinci kısımda yardımcı sonuçlara değinilmiştir. İkinci kısımda ise Daniyal M. İsrafilov ve Yunus Emre Yıldırır tarafından ispatlanan ağırlıklı Lebesgue uzaylarında kesirli durumda iyileştirilmiş ters teoremler kullanılarak ağırlıklı Smirnov sınıflarında kesirli durumda ters teoremler iyileştirilmiştir.

Son bölüm bu tezde elde edilen tüm sonuçların özetini içerir.

ANAHTAR KELİMELER: ağırlıklı Smirnov sınıfı/ düz teoremler/ ters teoremler/ Carleson eğrisi/ Muckenhoupt ağırlığı/ Cauchy singüler integrali

ABSTRACT

SOME PROBLEMS OF APPROXIMATION THEORY IN THE COMPLEX PLANE
MSC THESIS
AHMET TESTICI
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS
(SUPERVISOR: PROF. DR. DANIYAL ISRAFILZADE)

BALIKESİR, NOVEMBER 2013

In this thesis which consists of five chapters, the direct and inverse theorems of approximation theory are investigated.

The first chapter includes some information about the approximation theory and its progress.

The Second chapter consists of four sections. In first section definitions of basic notations which are used in other cahpters are given, in the second section functions spaces, in the third section p-Faber polynomials and in the fourth section definition of the modulus of smoothness and its properties are studied.

The third chapter consists of two sections. In the first section auxiliary results are mentioned. In the second section inverse theorems in weighted Smirnov classes are proved.

The fourth chapter consists of two sections. In first section auxiliary results are mentioned. In the second section, inverse theorems in weighted Smirnov classes, in fractional case are improved by using the improved inverse theorem which was proved by Daniyal M. İsrafilov and Yunus Emre Yıldırır.

Last chapter includes the summary of all results obtained in this thesis.

KEYWORDS: weighted Smirnov classes/ direct theorems/ converse theorems/ Carleson curve/ Muckenhoupt weighted/ Cauchy singular integral

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbb{C}$	: Kompleks düzlem
$\mathbb{R}$	: Reel eksen
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}^+$	: Pozitif tam sayılar kümesi
$\mathbb{T}$	: Birim çember
$\mathbb{U}$	: Birim disk
$\boldsymbol{G}$	: Basit bağlantılı sınırlı bölge
$\overline{\boldsymbol{G}}$	: G'nin kapanışı
$\boldsymbol{CG}$	: $\mathbb{C} - G$ G tümleyeni
$\boldsymbol{G}^-$	: $\mathbb{C}\overline{G}$
$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{z_0}, \boldsymbol{r})$	: $\{z \in \mathbb{C}: \|z - z_0\| < r\}$ kümesi
$\overline{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{z_0}, \boldsymbol{\varepsilon})$	: $\{z \in \mathbb{C}: \|z - z_0\| \leq r\}$ kümesi
$\|\boldsymbol{\Gamma}\|$	: Γ eğrisinin Lebesgue uzunluğu
$\boldsymbol{L^p}(\boldsymbol{\Gamma})$	: Γ üzerindeki L^p uzayı
$\boldsymbol{L^p}(\boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{\omega})$	: Γ üzerindeki ω ağırlıklı L^p uzayı
$\boldsymbol{E^p}(\boldsymbol{G})$	: G bölgesi üzerindeki Smirnov sınıfı
$\boldsymbol{E^p}(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{\omega})$	: G bölgesi üzerindeki ω ağırlıklı Smirnov sınıfı
$\boldsymbol{H^p}$	: Hardy sınıfı
$\boldsymbol{S_\Gamma}$	: Γ üzerindeki Cauchy singüler operatörü
$\boldsymbol{F_{k,p}}(\boldsymbol{z})$	: p-Faber polinomu
$\widetilde{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{k,p}}(\boldsymbol{1/z})$	: p-Faber esas kısmı
$\boldsymbol{E_n}(\boldsymbol{f})_{\boldsymbol{p,\omega}}$	: $L^p(T, \omega)$ uzayında en iyi yaklaşım hatası
$\boldsymbol{E_n}(\boldsymbol{f})_{\boldsymbol{G,p,\omega}}$	: $E^p(G, \omega)$ uzayında en iyi yaklaşım hatası
$\boldsymbol{E_n}(\boldsymbol{f})_{\boldsymbol{G^-,p,\omega}}$	: $E^p(G^-, \omega)$ uzayında en iyi yaklaşım hatası

$\boldsymbol{\Omega_r(f,\delta)_{p,\omega}}$	: $L^p(T,\omega)$ uzayında *r*. düzgünlük modülü
$\boldsymbol{\Omega_r(f,\delta)_{G,p,\omega}}$	: $E^p(G,\omega)$ sınıfında *r*. düzgünlük modülü
$\boldsymbol{\Omega_r(f,\delta)_{G^-,p,\omega}}$	: $E^p(G^-,\omega)$ uzayında *r*. düzgünlük modülü
$\boldsymbol{\mathcal{P}}$	: Kompleks polinomların sınıfı
$\boldsymbol{\mathcal{P}}(\mathbb{U})$	: Kompleks polinomlar sınıfının $\mathbb{U}$'daki izi
$\boldsymbol{P}$	: Cebirsel polinom
$\boldsymbol{f^M}$	: Hardy-Littlewood maximal fonksiyonu

ÖNSÖZ

Lisansüstü eğitimimin her aşamasında engin bilgi ve tecrübesiyle beni en iyi şekilde yönlendirip, çalışmalarıma desteğini hiçbir zaman eksik etmeyerek beni araştırmaya sevk eden değerli danışmanım Prof. Dr. Daniyal M. İsrafilzade'ye çok teşekkür ederim.

Ders aşaması ve sonrasında kıymetli yardımlarını esirgemeyen sayın Prof. Dr. Ali Güven'e teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım esnasında bana her türlü kolaylığı sağlamaya özen gösteren sevgili annem ve babama, ayrıca her zaman yanımda olan değerli arkadaşım Seyhan Kurt'a çok teşekkür ederim.

1. GİRİŞ

Yaklaşım teorisinde, bir takım özelliklere sahip fonksiyonlara daha iyi özelliklere sahip, basit fonksiyonlarla yaklaşım problemleri araştırılmaktadır. Çoğunlukla bu basit fonksiyonlar kümesi olarak araştırılan fonksiyonlar uzayının bir alt uzayı alınır. Basit ve iyi özelliklere sahip oldukları için polinomlar ve rasyonel fonksiyonlar kümesi bu tip alt uzaylar olarak düşünülebilir.

Yaklaşım teorisinin temel problemlerinden biri, verilen fonksiyona alt uzaydan en iyi yaklaşan elemanın var olup olmamasıdır. Özel halde alt uzay olarak sonlu boyutlu bir alt uzay alındığında Normlu uzaylarda en iyi yaklaşım elemanının varlığı bilinmektedir. En iyi yaklaşım elemanının varlığı diğer bir problemin: yaklaşım sayısı olarak bilinen bir parametrenin sıfıra yaklaşım probleminin araştırılması için zemin hazırlamış olur. Böylece yaklaşım teorisinin temel problemlerinden bir diğeri, yaklaşım hızının değerlendirilmesi problemi karşımıza çıkar.

Bununla birlikte fonksiyonların yaklaşım hızı verildiğinde, bu fonksiyonların özelliklerinin araştırılması da dikkate değer bir diğer konudur. Temel uzaydaki fonksiyonların özelliklerine göre yaklaşım hızının üstten değerlendirilmesi problemlerine yaklaşım teorisinin düz problemleri, bunun tersi olan yani fonksiyonun yaklaşım hızına göre bu fonksiyonun yapısal özelliklerinin araştırıldığı problemlere ise yaklaşım teorisinin ters problemleri denir.

İlk olarak 1912 yılında $[0,2\pi]$ aralığında sürekli ve 2π periyotlu fonksiyonlar uzayında düz teoremler Jackson tarafından elde edilmiştir. 1913 yılında ise Bernstein aynı uzayda ters teoremleri vermiştir.

$L^p([0,2\pi])$ Lebesgue uzaylarında trigonometrik polinomlarla yaklaşım birçok matematikçi tarafından araştırılmıştır. Bu uzayda norm

$$\|f(x))\|_{L^p([0,2\pi])} := \begin{cases} \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} & , 1 \leq p < \infty \\ \operatorname*{ess\,sup}_{x \in [0,2\pi]} |f(x)| & , \quad p = \infty \end{cases}$$

biçiminde tanımlıdır. Ayrıca $\mathcal{T}$ derecesi n'yi aşmayan trigonometrik polinomların ailesi olduğunda $f \in L^p([0,2\pi])$ fonksiyonu için en iyi yaklaşım hatası

$$E_n(f)_p = \inf_{T_n(x) \in \mathcal{T}} \|f(x) - T_n(x)\|_{L^p([0,2\pi])}$$

ve $\Omega_r(f,\delta)_p$ alışılmış düzgünlük modülü

$$\Omega_r(f,\delta)_p := \sup_{|h| \leq \delta} \left\| \sum_{\nu=0}^{r} (-1)^{r-\nu} \binom{r}{\nu} f(x + \nu h) \right\|_{L^p([0,2\pi])}$$

olarak tanımlanır.

$L^p([0,2\pi])$ Lebesgue uzaylarında düz teorem aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$f \in L^p([0,2\pi])$ olsun. Bu durumda

$$E_n(f)_p \leq c\, \Omega_r\left(f, \frac{1}{n+1}\right)_p , \quad n \in \mathbb{N}$$

değerlendirmesi n'den bağımsız bir $c > 0$ sabiti ile sağlanır.

Yukarıda ifade edilen düz teorem $r = 1$ ve $p = \infty$ için Jackson [41], $r = 2$ ve $1 \leq p < \infty$ için Akhiezer [42], $r \geq 1$ ve $p = \infty$ için ise 1951 yılında Stechkin tarafından ispatlanmıştır [18]. Stechkin'in kullandığı bu yöntemle benzer şekilde $r \geq 1$ ve $1 \leq p < \infty$ için düz teorem ispatlanabilir. M. F. Timan 1966 yılındaki çalışmasında bu düz teoremin iyileştirmesini vermiştir [19] :

$f \in L^p([0,2\pi])$,$1 < p < \infty$ olsun. Bu durumda $r \geq 1$ için

$$\frac{c}{(n+1)^r}\left\{\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{\gamma r-1} E_\nu^\gamma(f)_p\right\}^{1/\gamma} \leq \Omega_r\left(f,\frac{1}{n+1}\right)_p , \qquad n \in \mathbb{N}$$

değerlendirmesi $\gamma = max\{p,2\}$ olduğunda n'den bağımsız bir $c > 0$ sabiti ile sağlanır.

$L^p([0,2\pi])$ Lebesgue uzaylarında yaklaşım teorisinin ters teoremi $r \geq 1$ ve $1 \leq p < \infty$ için 1950 yılında A. F. Timan ve M. F. Timan [20] tarafından; $r \geq 1$ ve $p = \infty$ için 1951 yılında Stechkin [18] tarafından aşağıdaki şekilde ifade edilmiştir:

$f \in L^p([0,2\pi])$ olsun. Bu durumda

$$\Omega_r\left(f,\frac{1}{n}\right)_p \leq \frac{c}{n^r}\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{r-1} E_{\nu-1}(f)_p$$

değerlendirmesi $c > 0$ sabiti ile sağlanır.

Bu ters teoremin iyileştirilmesi 1958 yılında M. F. Timan tarafından aşağıdaki gibi ifade edilmiştir [21] :

$f \in L^p([0,2\pi])$,$1 < p < \infty$ olsun. Bu durumda $r \geq 1$ için

$$\Omega_r\left(f,\frac{1}{n}\right)_p \leq \frac{c}{n^r}\left\{\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{\beta r-1} E_{\nu-1}^\beta(f)_p\right\}^{1/\beta} , \qquad n \in \mathbb{N}$$

değerlendirmesi $\beta = min\{p,2\}$ olduğunda n'den bağımsız bir $c > 0$ sabiti ile sağlanır.

$L^p([0,2\pi],\omega)$ ağırlıklı Lebesgue uzaylarında trigonometrik polinomlarla yaklaşım Butzer-Wehrens tipindeki düzgünlük modülü kullanılarak E. A. Haciyeva tarafından çalışılmıştır [32]. 1997 yılında N. X. Ky, daha genel bir modül kullanarak Muckenhoupt şartını sağlayan ağırlıklı Lebesgue uzaylarında düz ve ters teoremleri ispatlamıştır [11]. Bu çalışmadaki ters teorem R. Akgün tarafından kesirli duruma genelleştirilmiştir [33]. Danyal M. İsrafilov ve Yunus Emre Yıldırır kesirli durumda ters teoremin iyileştirmesini ispatlamışlardır [34].

Yaklaşım teorisindeki düz ve ters teoremlerin elde edilmesinde yaklaşan polinomların oluşturulması önemli bir yer tutar. Bu yaklaşan polinomları meydana getiren serilere çeşitli toplanabilme yöntemleri uygulanarak yaklaşımın derecesi araştırılmaktadır. Şimdiye kadar bahsedilen çalışmalarda reel eksen üzerindeki $[0,2\pi]$ arağında Lebesgue integrallenebilen periyodik fonksiyonlara o fonksiyonun Fourier serisinin kısmi toplamıyla yaklaşılmıştır.

Kompleks düzlemde belirli koşullar altında düzgün normda yaklaşımın mümkünlüğü J. Walsh, M. A. Lavrentiev, M. V. Keldysh ve S. N. Mergelyan tarafından yapılan çalışmalarla ispatlanmıştır. Kompleks düzlemde diskten farklı basit bağlantılı bölgeler üzerinde tanımlı olan analitik fonksiyonlara yaklaşımın derecesi incelenirken Faber, p-Faber ve p-Faber-Laurent serilerine göre tanımlanan Faber, p-Faber, p-Faber-Laurent kısmi toplamları kullanılır. Faber serileri dairesel bölgeler için geçerli olan Taylor serilerinin basit bağlantılı bölgelere genellemesidir.

Kompleks düzlemde düzgün normda yaklaşım problemlerine benzer şekilde integrallenebilir fonksiyonların oluşturduğu fonksiyonlar uzayında da yaklaşım problemleri incelenir. Geleneksel olarak bu problemler kompleks düzlemin belirli kümelerinde tanımlı Smirnov ve ağırlıklı Smirnov; Lebesgue ve ağırlıklı Lebesgue fonksiyonlar uzayında araştırılır.

Kompleks düzlemde sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi ile sınırlı olan sonlu G bölgesi için $E^p(G)$ Smirnov sınıfını tanımlayalım:

G kompleks düzlemde sınırı kapalı, sonlu uzunluklu Γ Jordan eğrisi olan sınırlı bir bölge olsun. $\zeta = \chi(z)$ ile G bölgesini konform olarak $\mathbb{U} \coloneqq \{\zeta \in \mathbb{C} | \, |\zeta| = 1\}$ birim diskine dönüştüren bir fonksiyonu gösterelim. $z = \omega(\zeta)$ onun ters fonksiyonu olsun. Γ_r ile $z = \omega(\zeta)$ ters dönüşümü altında $|\zeta| = r$ çemberine karşılık gelen G içindeki eğrileri gösterelim.

Bu durumda $p > 0$ ve $M > 0$ olmak üzere G içinde analitik olan ve her $0 < r < 1$ için

$$\int_{\Gamma_r} |f(z)|^p |dz| \leq M$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonlarının sınıfına $E^p(G)$ Smirnov sınıfı denir.

G bölgesinin sınırının sonlu uzunluklu bir Jordan olması bu uzaydaki fonksiyonlara polinomlarla yaklaşabilmek için yeterli değildir. Bunun için bölgenin sınırının bir ek koşulu daha sağlaması gerekir.

$$P(r, \theta - \varphi) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - \varphi) + r^2}, \quad 0 \leq r < 1$$

Poisson çekirdek fonksiyonu için,

$$\log|\omega'(\zeta)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log\left|\omega'(e^{i\theta})\right| P(r, \theta - \varphi) d\theta$$

koşulu sağlandığı takdirde G bölgesine Smirnov bölgesi ve bu bölgenin sınırına Smirnov eğrisi denir.

Yukarıda yazılmış Smirnov şartı daha basit şekilde

$$\log|\omega'(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log\left|\omega'(e^{i\theta})\right| d\theta$$

olarak da ifade edilebilir [1, s. 444].

Eğer, her $f \in E^p(G)$, $1 \leq p < \infty$ ve $\varepsilon > 0$ için,

$$\int_{\Gamma} |f(z) - P(z)|^p \, |dz| < \varepsilon$$

şartını sağlayan $P(z)$ polinomu varsa $E^p(G)$ sınıfında polinomlar ailesi tamdır denir.

Bu tanımda görüldüğü gibi bir uzayda polinomlar ailesi tam ise bu uzayın her fonksiyonuna bu uzay normunda polinomlarla istenildiği kadar yaklaşılabilecektir. Şimdi sınırı sonlu uzunluklu Jordan eğrisi olan bir bölgede polinomların tamlığını karakterize eden aşağıdaki teoremi ifade edelim:

G kompleks düzlemde sınırı sonlu uzunluklu Γ Jordan eğrisi olan bir bölge olsun. z kompleks değişkenli polinomlar ailesinin $E^p(G), 1 \leq p < \infty$ sınıfında tam olması için gerek ve yeter koşul Γ eğrisinin Smirnov eğrisi olmasıdır.

Smirnov sınıflarında yaklaşım problemleri incelenirken başlangıç koşullarından biri bölgenin Smirnov bölgesi olmasıdır. Bu tarz bölgelere örnek olarak yıldızsı bölgeler, Carleson bölgeleri ve Dini-düzgün bölgeler verilebilir.

Yaklaşım teorisinde ağırlıksız veya ağırlıklı Lebesgue ve Smirnov uzaylarında yaklaşım problemlerinin çözümü aşamasında esaslı şekilde başvurulan Cauchy singüler operatörünün sınırlılığı koşullarına dikkat edilmelidir. Bu operatörün sınırlılığı problemi ağırlıksız ve ağırlıklı Lebesgue uzaylarında detaylı bir şekilde araştırılmıştır (bak. örneğin: [28]). Ayrıca aynı problem Orlicz, Rearrangement invariant ve ağırlıklı Rearrangement invariant uzaylarnda sırasıyla 1996, 1998, 2002 yıllarında A. Yu. Karlovich tarafından incelenmiştir [52], [53], [54].

$[0,2\pi]$ aralığında tanımlı Lebesgue ve ağırlıklı Lebesgue uzaylarında çözülen problemler ve yardımcı unsurlar benzer problemlerin ağırlıksız veya ağırlıklı Smirnov sınıflarında araştırılmasına da imkan sağlamıştır. Öyle ki $E^p(G)$, $p \geq 1$ Smirnov uzaylarında polinomlarla yaklaşımın hızı pek çok matematikçi tarafından araştırılmıştır. Sınırı analitik eğri olan, basit bağlantılı ve sınırlı G bölgesi durumunda, $E^p(G)$ uzayındaki düz teorem Walsh ve Russel tarafından 1959 yılında ispatlanmıştır [22]. $E^1(G)$ uzayında yaklaşım teorisinin bazı problemleri de M. I. Andrasko [49] ve D. M. Galan [50] tarafından incelenmiştir.

Γ, s yay uzunluğuna göre parametrelendirilmiş düzgün bir Jordan eğrisi ve $\theta(s)$, Γ eğrisinde s yay uzunluğuna karşılık gelen noktadaki teğet ile pozitif reel eksen arasındaki açı olsun.

Sınırı düzgün bir Jordan eğrisi olan G bölgesi için $\Omega(\theta, s)$ süreklilik modülü

$$\int_0^\delta \frac{\Omega(\theta, s)}{s} ds < \infty, \delta > 0 \qquad (1.1)$$

olarak bilinen Dini düzgünlük şartını sağladığında $p > 1$ için düz ve ters teoremler S. Y. Alper tarafından 1960 yılında elde edilmiştir [35]. Daha sonra bu sonuçlar V. M. Kokilashvili'nin $p > 1$ için düz teoremi verdiği [36] ve J. E. Andersson'ın $p \geq 1$ olduğu durumda düz ve ters teoremi verdiği [37] çalışmalarla regüler sınırlı bölgelere genelleştirilmiştir. 1968 yılında V. M. Kokilashvili tarafından Smirnov uzaylarının bir genellemesi olan $E_M(G)$ Smirnov-Orlicz uzayı tanımlanmış ve G bölgesinin sınırı (1.1) şartını sağladığında yani yeterince düzgün bir Jordan eğrisi olduğunda bazı ters teoremler ispatlanmıştır [51]. Benzer problemler ağırlıklı Smirnov uzaylarının bazı alt uzaylarında Ibragimov ve Mamedhanov [38] ve Mamedhanov [39] tarafından çalışılmıştır. Yine ağırlıklı Smirnov uzaylarının bazı alt uzaylarında konstrüktif karakterizasyon problemleri G bölgesinin sınırının Radon eğrisi olduğu durumda Dynkin tarafından elde edilmiştir [29].

Bölge sınırının Carleson eğrisi olması durumunda 1987 yılında İsrafilov, Faber polinomlarının yaklaşım özelliklerini kullanarak, $E^p(G)$, $1 < p < \infty$ uzaylarında bir düz teorem ispatlamıştır [12]. 1995 yılında ise İsrafilov ve Çavuş $L^p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$ Lebesgue uzaylarında yaklaşan polinomlar olarak p-Faber polinomlarını kullanarak düz teorem elde etmişlerdir [13]. Daha sonra bu sonuçları İsrafilov ve Güven ağırlıklı Lesbesgue ve ağırlıklı Smirnov uzaylarına taşımışlardır [14], [15], [16] , [17].

Benzer problemler ağırlıklı Smirnov-Orlicz ve ağırlıklı Rearrangement Invariant uzaylarında da çalışılmıştır [43], [44], [45], [46], [47], [48].

Bu tezde ağırlıklı Smirnov sınıflarında yaklaşım teorisinin düz ve ters teoremleri araştırılmıştır. Tez beş bölümden oluşur. Birinci bölüm yaklaşım teorisi ve onun gelişimi hakkında bazı bilgileri içerir. İkinci bölümde diğer bölümlerde kullanılan temel kavramların tanımları, fonksiyon uzayları, p-Faber polinomları, düzgünlük modülü tanımları yer almaktadır. Tezin üçüncü ve dördüncü bölümleri bilimsel çalışma niteliği taşımaktadır. Üçüncü bölümde $E^p(G,\omega)$, $1 < p < \infty$ ağırlıklı Smirnov sınıflarında ters teoremler ispatlanmıştır. Dördüncü bölümde ise Danyal M. İsrafilov ve Yunus Emre Yıldırır'ın ispatladığı kesirli durumda iyileştirilmiş ters teorem kullanılarak üçüncü bölümde verilen $E^p(G,\omega)$, $1 < p < \infty$ ağırlıklı Smirnov sınıflarındaki ters teoremler kesirli durumda iyileştirilmiştir. Son bölüm ise bu tezde elde edilen tüm sonuçların özetini içerir.

2. ÖN BİLGİLER

2.1 Temel Tanımlar ve Teoremler

2.1.1 Tanım $[a,b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere sürekli bir

$$\Gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$$

fonksiyonuna $\mathbb{C}$ de bir eğri denir. Burada eğer $\Gamma(a)$ ve $\Gamma(b)$ noktalarına sırasıyla eğrinin başlangıç ve bitim noktaları; bir Γ eğrisi verildiğinde $\Gamma(a) = \Gamma(b)$ oluyorsa Γ'ya kapalı eğri; Γ' türevi var ve sürekli ise Γ'ya diferansiyellenebilir eğri; diferansiyellenebilir bir Γ eğrisi için eğer; $\forall\, t \in [a,b]$ için $\Gamma'(t) = 0$ oluyorsa Γ'ya düzgün eğri; bir Γ eğrisi sadece $t_1 = t_2$ için $\Gamma(t_1) = \Gamma(t_2)$ oluyorsa Γ'ya Jordan eğrisi denir [4, s. 104].

2.1.2 Tanım $[a,b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\Gamma: z = z(t) = x(t) + i.y(t)$$

sürekli eğrisi verilmiş olsun. Eğer n doğal sayı olduğunda

$$t_1 = a < t_2 < t_3 \ldots < t_{\mathrm{n}+1} = b$$

koşulunu sağlayan $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_{n+1}$ değerlerinin keyfi bir dizisi için

$$\sum_{k=1}^{n} |z(t_{k+1}) - z(t_k)|$$

toplamı sınırlı kalıyorsa Γ eğrisine sonlu uzunlukla eğri denir. Başka bir deyişle Γ eğrisini gösteren z fonksiyonu sınırlı değişimli ise Γ ya sonlu uzunluklu eğri denir [1, s. 417].

2.1.3 Tanım Γ sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi; $z \in \Gamma$ ve $\varepsilon > 0$ için,

$\Gamma(z,\varepsilon) := \{t \in \Gamma : |t - z| < \varepsilon\}$ ve $|\Gamma(z,\varepsilon)|$ ifadesi $\Gamma(z,\varepsilon)$'nun Lebesgue uzunluğu olsun. Eğer,

$$\sup_{\varepsilon > 0} \sup_{z \in \Gamma} \frac{1}{\varepsilon} |\Gamma(z,\varepsilon)| < \infty$$

oluyor ise Γ'ya Carleson eğrisi denir. $\mathbb{C}$ kompleks düzleminde tüm Carleson eğrilerinin kümesini S ile göstereceğiz [16].

2.1.4 Tanım Bir f karmaşık fonksiyonu bir z_0 noktasının belli bir $D(z_0, \delta)$, $\delta > 0$ komşuluğundaki bütün noktalarda diferansiyellenebiliyorsa f, z_0'da analitiktir denir [4, s. 100].

2.1.5. Tanım Kompleks düzlemde bağlantılı ve açık bir kümeye bölge denir [25, s. 1].

2.1.6 Tanım $S \subseteq \mathbb{C}$ bölgesi üzerinde $w = f(z)$ dönüşümünü tanımlayalım ve $z_0 \in S$ olsun. Eğer, $f(z)$, z_0'ın bir komşuluğunda bire bir ve z_0 da keyfi iki düzgün γ_1 ve γ_2 eğrileri arasındaki açı, $f(z_0)$ da $\gamma_1{}'$ ve $\gamma_2{}'$ görüntü eğrilerinin arasında açıya yön ve büyüklük olarak eşit ise bu dönüşüme z_0 da konformdur denir. Eğer , S bölgesinden S' bölgesine $f(z)$ dönüşümü S deki her noktada konform ise $f(z)$ dönüşümüne S den S''ye konform dönüşüm denir. S''ye de S'nin konform görüntüsü denir [30, s. 259].

2.1.7 Teorem(Riemann Dönüşüm Teoremi) $G \subset \mathbb{C}$ sınırı en az iki noktadan oluşan basit bağlantılı bir bölge ve $z_0 \in G$ olsun. Bu durumda, G bölgesini $\mathbb{U}$'ya $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ koşulları altında resmeden bir tek konform dönüşüm vardır [2, s. 12].

2.1.8 Teorem $E \subset \mathbb{C}$, en az iki noktadan oluşan bağlantılı tümleyene sahip, sınırlı bir kontiniyum olsun. Bu durumda $\boldsymbol{C}E$ bölgesini $\boldsymbol{C}\overline{\mathbb{U}}$ 'ya

$$\varphi(\infty) = \infty,\ \varphi'(\infty) = \lim_{z \to \infty} \frac{\varphi(z)}{z} > 0$$

koşulları altında resmeden bir tek φ konform dönüşümü tektir [2, s. 104]

2.1.9 Teorem Eğer G bölgesinin sınırı bir Jordan eğrisi ise, G' nin $\mathbb{U}$ ya her konform dönüşümü $\overline{G}$'ye bire-bir ve sürekli olarak genişletilebilir. Aynı şekilde, G'nin sınırı bir Jordan eğrisi ise, $\boldsymbol{C}\overline{G}$'nin $\boldsymbol{C}\overline{\mathbb{U}}$ ya her konform dönüşüm $\boldsymbol{C}G$'ye bire-bir ve sürekli olarak genişletilebilir [10, s. 24].

2.1.10 Teorem G sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisiyle sınırlanmış sınırlı bir bölge ve Γ bunun pozitif yönlendirilmiş sınırı olsun. f, $\boldsymbol{C}G$ bölgesinde analitik bir fonksiyon ise,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \begin{cases} f(\infty) - f(z) & : z \in \boldsymbol{C} - \bar{G} \\ f(\infty) & : z \in G \end{cases}$$

olur [3, s. 486].

2.1.11 Tanım $V,\ W$ aynı skaler $\mathbb{F}$ cismi üzerinde iki vektör uzay olsunlar. Eğer, $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ ve $x, y \in V$ için $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$ ise $T : V \to W$ fonksiyonuna lineer dönüşüm denir [6].

2.1.12 Tanım X , Y normlu lineer uzay ve $T : X \to Y$ bir lineer dönüşüm olsun. Eğer, her $x \in X$ için

$$\|T(x)\| \leq k\|x\|$$

olacak şekilde bir k pozitif reel sayısı varsa T dönüşümü sınırlıdır denir [6, s. 91].

2.1.13 Teorem X normlu bir uzay; W, X uzayının yoğun bir alt uzayı, Y bir Banach uzayı ve S: $W \to Y$ sınırlı lineer dönüşüm olsun. Bu durumda her $x \in W$ için $T(x) = S(x)$ ve $\|T\| = \|S\|$ olacak şekilde bir tek $T: X \to Y$ sınırlı lineer dönüşümü vardır [6, s. 99].

Biz $\mathbb{R}$ üzerinde Lebesgue uzunluğu 2π olan aralıkları temsilen $T \coloneqq [0,2\pi]$ gösterimini kullanacağız. T üzerinde 2π periyotlu fonksiyonlar dikkate alınırsa $t \to e^{it}$ dönüşümüyle T ile $\mathbb{T} \coloneqq \{z: |z| = 1\}$ birim çemberi özdeşlenebilir.

2.1.14 Tanım

$$P(t) \sim \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{int}$$

fonksiyonuna N. dereceden bir trigonometrik polinom denir [5, s. 2].

2.1.15 Tanım

$$S(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$$

serisine bir trigonometrik seri denir [5, s. 3].

2.1.16 Tanım $f \in L^1(T)$ olsun.

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_T P(t) e^{-int} dt$$

bağıntısından hareketle f 'in *n*. Fourier katsayısı

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_T f(t) e^{-int} dt, \quad n \in \mathbb{Z}$$

biçiminde tanımlanır [5, s. 3].

2.1.17 Tanım $f \in L^1(T)$ olsun.

$$S[f] \sim \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\, e^{int}$$

trigonometrik serisine f fonksiyonunun Fourier serisi denir [5, s. 3].

2.1.18 Tanım

$$f^M(x) = \sup_{\xi < x < \xi'} \left\{ \frac{1}{\xi' - \xi} \int_{\xi}^{\xi'} |f(t)|\, dt \right\},$$

f ölçülebilir fonksiyon olmak üzere, $f \to f^M(x)$ fonksiyonuna Hardy-Littlewood maximal fonksiyonu denir [8, s. 172].

2.2 Bazı Fonksiyon Sınıfları

2.2.1 Tanım E bir ölçüm uzayı olsun. Bu durumda

$$\int_E |f(x)|^p dx < \infty$$

koşulunu sağlayan bütün ölçülebilir f fonksiyonlarının kümesine Lebesgue uzayı denir ve $L^p(E)$ ile gösterilir [1, s. 388].

2.2.2 Teorem (Hölder Eşitsizliği) $p > 1$, $q > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için,

$f(x) \in L^p(E)$ ve $g(x) \in L^q(E)$ ise $f(x)\, g(x) \in L^1(E)$ ve

$$\left| \int_E f(x)\, g(x) dx \right| \leq \left(\int_E |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

olur [1, s. 388].

2.2.3 Teorem(Minkowski Eşitsizliği) $p > 1$ için, $f(x), g(x) \in L^p(E)$ ise

$$\left(\int_E |f(x) + g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_E |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

olur [1, s. 389].

2.2.4 Tanım Γ sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi olsun. Γ üzerinde tanımlı ve $1 < p < \infty$ için,

$$\|f\|_{L^p(\Gamma)} = \left(\int_\Gamma |f(z)|^p |dz|\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

koşulunu sağlayan bütün ölçülebilir kompleks değerli fonksiyonların sınıfı $L^p(\Gamma)$ ile gösterilir [13]. $L^p(\Gamma)$, $\|\cdot\|_{L^p(\Gamma)}$ normuna göre bir Banach uzayıdır.

2.2.5 Tanım G, sınırı bir Γ Jordan eğrisi olan sınırlı bir bölge, $z_0 \in \Gamma$ ve Γ'nın z_0 da bir tek teğeti var olsun ve de z_0'ın bir komşuluğunda Γ eğrisi normalin her iki tarafı üzerinde bulunsun. Bu durumda, eğer G içinde bulunan ve z_0 noktasında son bulan sürekli bir ℓ eğrisinin, z_0'ın bir komşuluğundaki kısmı, köşesi z_0 da bulunan, büyüklüğü π'den daha küçük olan ve açıortayı Γ'ya içten normal ile çakışan bir açı içinde kalıyorsa bu ℓ eğrisine açısal yol denir. f , G'de analitik olsun. $z \in G$ olup z, $z_0 \in \Gamma$ noktasına istenilen açısal yol boyunca yaklaştığında $f(z) \to a$ oluyorsa, f fonksiyonu z_0 noktasında a açısal değerini alır denir [1, s. 428].

2.2.6 Tanım $p > 0$ olsun. $\mathbb{U}$ içinde analitik olan ve $M > 0$, r'den bağımsız bir sabit olmak üzere her $0 < r < 1$ için

$$\int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^p d\theta \leq M$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonlarının uzayı H_p ile gösterilir [1, s. 402].

Açık olarak $\mathbb{U}$ içinde analitik ve sınırlı olan tüm fonksiyonlar keyfi $p > 0$ için H_p sınıfındandır. Bir $f \in H_p$ fonksiyonu $p > 0$ için birim çember üzerinde hemen her yerde açısal yollar boyunca belirli bir limit değerine sahiptir ve bunlar bir $f(e^{i\theta})$ limit fonksiyonu formundadır. Burada,

$$\int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^p d\theta$$

integraline $r \to 1$ için Fatou Lemmasını uygularsak $(0, 2\pi)$ aralığında $f(e^{i\theta}) \in L^p$ sonucuna varırız.

Şimdi daha genel bir fonksiyon sınıfı tanımlayalım. G kompleks düzlemde sınırı kapalı sonlu uzunluklu Γ Jordan eğrisi olan sınırlı bir bölge olsun. $\zeta = \chi(z)$ ile G bölgesini konform olarak $\mathbb{U}$'ya dönüştüren bir fonksiyonu gösterelim. $z = \omega(\zeta)$ onun ters fonksiyonu olsun. Γ_r ile $z = \omega(\zeta)$ dönüşümü altında $|\zeta| = r$ çemberine karşılık gelen G içindeki eğrileri gösterelim.

2.2.7 Tanım $p > 0$ olsun. $M > 0$, r'den bağımsız bir sabit olmak üzere G içinde analitik olan ve her $0 < r < 1$ için

$$\int_{\Gamma_r} |f(z)|^p |dz| \leq M$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonlarının sınıfına Smirnov sınıfı denir ve $E^p(G)$ ile gösterilir [1,s. 438].

Açık olarak özel halde G bölgesi $\mathbb{U}$, birim diski ise $E^p(G)$ uzayları, bilinen H_p uzayları olur. Bu tanımda geçen integralde $z = \omega(\zeta)$ değişken dönüşümü yapılarak,

$$f(z) \in E^p(G) \Leftrightarrow f\big(\omega(\zeta)\big)\sqrt[p]{\omega'(\zeta)} \in H_p$$

olduğu kolayca görülür.

Dolayısıyla eğer, $f(z)$ fonksiyonu $E^p(G)$ sınıfına aitse, bu fonksiyon Γ üzerinde hemen her yerde bütün açısal yollar boyunca belirli $f(z')$ limit değerine sahiptir; $|f(z')|^p$, Γ üzerinde integrallenebilirdir ve

$$\lim_{r\to 1} \int_{\Gamma_r} |f(z)|^p |dz| = \int_{\Gamma} |f(z')|^p \, |dz'|$$

olur [1]. $E^p(G)$ sınıfının konform dönüşümden bağımsız bir tanımı da verilebilir.

G kompleks düzlemde sınırı kapalı sonlu uzunluklu Γ Jordan eğrisi olan bir bölge ve (Γ_n) $(n = 1,2,\ldots)$ G içinde sonlu uzunluklu kapalı Jordan eğrilerinin bir dizisi olsun. Sınırı Γ_n eğrisi olan bölgeyi G_n ile gösterelim. Bu durumda

$$G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_n \subset \ldots \subset G$$

olur. Eğer, her $K \subset G$ kompakt alt kümesi ve $\exists\, N : n \geq N$ için $K \subset G_n$ oluyorsa $n \to \infty$ iken (Γ_n) dizisi Γ'ya yakınsar denir ve bu durum $\Gamma_n \to \Gamma$ ile gösterilir.

2.2.8 Tanım f, G içinde analitik ve $p > 0$ olsun. $M > 0$, n'den bağımsız bir sabit olmak üzere G içindeki $\Gamma_n \to \Gamma$ özelliğine sahip sonlu uzunluklu kapalı Jordan eğrilerinin bir (Γ_n) dizisi için

$$\int_{\Gamma_n} |f(z)|^p \, |dz| \leq M$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonlarının sınıfına Smirnov sınıfı denir [1, s. 438].

2.2.9 Tanım $f(z)$, G içinde analitik bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyonun Γ üzerinde hemen her yerde açısal yollar boyunca belirli limit değerlerine sahip olması ve G içinde her yerde

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z')}{z' - z} \, dz'$$

Cauchy formülünün sağlanması için gerekli ve yeterli koşul $f(z)$ fonksiyonunun $E^1(G)$ sınıfından olmasıdır.

Ayrıca $f(z) \in E^1(G)$ ise Cauchy integral teoremi

$$\int_{\Gamma} f(z')\ dz' = 0$$

şeklinde sağlanır [1, s. 439].

2.2.10 Tanım Γ kompleks düzlemde sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi ve $f \in L^1(\Gamma)$ olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(z')}{z' - \mathrm{z}}\ dz'$$

Cauchy integralini göz önüne alalım. $z \notin \Gamma$ olduğunda bu integral bir analitik fonksiyon tanımlar.

Şimdi Γ üzerinde bulunan bir z_0 noktasını göz önüne alalım. Keyfi bir $\varepsilon > 0$ için $\Gamma_\varepsilon := \Gamma - \overline{D}(z_0, \varepsilon)$ olsun. Eğer

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{f(z')}{z' - \mathrm{z}_0}\ dz'$$

limiti varsa, bu limite f fonksiyonunun Cauchy singüler integrali denir ve

$$S_\Gamma(f)(z_0) := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{f(z')}{z' - z_0}\ dz'$$

veya

$$S_\Gamma(f)(z_0) := \frac{1}{2\pi i}(P.V)\int_{\Gamma} \frac{f(z')}{z' - z_0}\ dz'$$

şeklinde gösterilir. Aşağıdaki teorem Cauchy integralinin Γ üzerindeki limit değerleriyle, Cauchy singüler integralinin varlığı arasında bir ilişki kurar [1].

2.2.11 Teorem Eğer Cauchy integrali Γ üzerinde hemen her yerde Γ nin bir tarafı üzerinde bulunan bütün açısal yollar boyunca belirli limit değerlerine sahipse, Cauchy singüler integrali Γ üzerinde hemen her yerde mevcuttur ve Cauchy integrali Γ'nın diğer tarafı üzerinden Γ üzerinde hemen her yerde açısal limit değerine sahiptir. Tersine, Cauchy singüler integrali Γ üzerinde hemen her yerde mevcutsa Cauchy integrali Γ'nın her iki tarafı üzerinden de Γ üzerinde hemen her yerde açısal limit değerine sahiptir.

Burada

$$\lim_{z\to z_0} \int_{\Gamma} \frac{f(z')}{z'-z}\, dz' = \int_{\Gamma} \frac{f(z')}{z'-z_0}\, dz' \pm \pi i f(z_0)$$

formülü Γ üzerinde hemen her yerde sağlanır. Bu formülde sol taraftaki limit açısal yollar boyunca alınır. Sağ taraftaki işaret, açısal yol $z_0 \in \Gamma$ noktasındaki teğetin solunda kalırsa pozitif, açısal yol teğetin sağında kalırsa negatiftir [1, s. 453].

Şimdi G, Γ sınırına sahip sınırlı bir bölge olsun. Genelliği bozmadan 0 orjininin G içinde olduğunu kabul edelim. Eğer $f \in L^p(\Gamma)$ ise

$$f^+(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad z \in G \qquad (1)$$

$$f^-(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad z \in G^- \qquad (2)$$

şeklinde tanımlanan $f^+: G \to \mathbb{C}$ ve $f^-: G^- \to \mathbb{C}$ fonksiyonları sırasıyla G ve G^- içinde analitiktirler ve $f^-(\infty) = 0$ dır.

Yukarıdaki teorem gereğince eğer f^+ ve f^- Cauchy integrallerinden biri Γ üzerinde hemen her yerde açısal limit değerine sahipse, Cauchy singüler integrali Γ üzerinde hemen her yerde vardır ve f^+ ve f^- Cauchy integrallerinden diğeri de Γ üzerinde hemen her yerde açısal limit değerlerine sahiptir. Tersine, Cauchy singüler integrali Γ üzerinde hemen her yerde varsa, f^+ ve f^- integralleri Γ üzerinde hemen her yerde açısal limit değerlerine sahiptir.

Böylece Γ'nın her iki tarafı üzerinde bulunan açısal yollar boyunca limit alarak, Γ üzerinde hemen her yerde geçerli olan

$$f^{+}(z) = S_{\Gamma}(f)(z) + \frac{1}{2}f(z) \qquad (3)$$

$$f^{-}(z) = S_{\Gamma}(f)(z) - \frac{1}{2}f(z) \qquad (4)$$

$$f(z) = f^{+}(z) - f^{-}(z) \qquad (5)$$

formüllerini elde ederiz (örneğin bak.; [15]).

2.2.12 Tanım $S_{\Gamma}: f \to S_{\Gamma}(f)$ lineer operatörüne Cauchy singüler operatörü denir.

2.2.13 Tanım ω, Γ üzerinde bir ağırlık fonksiyonu yani Γ üzerinde negatif olmayan, ölçülebilir bir fonksiyon, ayrıca $1 < p < \infty$ ve $1/p + 1/q = 1$ olsun. Eğer,

$$\sup_{z \in \Gamma} \sup_{r > 0} \left(\frac{1}{r} \int_{\Gamma \cap D(z,r)} \omega(\zeta)|d\zeta| \right) \left(\frac{1}{r} \int_{\Gamma \cap D(z,r)} [\omega(\zeta)]^{-q}|d\zeta| \right)^{1/q} < \infty$$

oluyorsa, Γ üzerinde A_p-Muckenhoupt şartını sağlar denir [16].

Γ üzerinde A_p-Muckenhoupt şartını sağlayan tüm ağırlık fonksiyonlarının kümesini $A_p(\Gamma)$ ile gösteririz [16].

2.2.14 Tanım ω, Γ üzerinde verilen bir ağırlık fonksiyonu olsun. Γ üzerinde

$$\int_{\Gamma} |f(z)\omega(z)|^{p}|dz| < \infty$$

şartını sağlayan tüm ölçülebilir fonksiyonların kümesine ω ağırlıklı L^p-uzayı denir ve $L^p(\Gamma, \omega)$ ile gösterilir.

Bu uzayda norm

$$\|f\|_{L^p(\Gamma,\omega)} := \|f\omega\|_{L^p(\Gamma)} := \left\{ \int_{\Gamma} |f(z)\omega(z)|^p |dz| \right\}^{1/p} < \infty$$

biçiminde tanımlıdır.

Biz, 2π periyotlu

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{T},\omega)} := \|f\omega\|_{L^p(\mathbb{T})} := \left\{ \int_{\mathbb{T}} |f(w)\omega(w)|^p |dw| \right\}^{1/p} < \infty$$

koşulunu sağlayan Lebesgue integrallenebilir fonksiyonların sınıfını $L^p(\mathbb{T},\omega)$ ile ifade edelim.

2.2.15 Tanım ω , Γ üzerinde verilen bir ağırlık fonksiyonu olsun.

$$E^p(G,\omega) := \{f \in E^1(G) : f \in L^p(\Gamma,\omega)\}$$

kümesine G deki analitik fonksiyonların p .mertebeden ω ağırlıklı Smirnov sınıfı denir [15].

2.2.16 Teorem Γ bir Carleson eğrisi , $1 < p < \infty$, ve ω, Γ üzerinde bir ağırlık olsun. Bu durumda her $f \in L^p(\Gamma,\omega)$ için

$$\|S_\Gamma(f)\|_{L^p(\Gamma,\omega)} \le c\|f\|_{L^p(\Gamma,\omega)}$$

eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul $\omega \in A_p(\Gamma)$ olmasıdır (örneğin bak.; [16]).

2.2.17 Önerme Eğer $f \in L^p(\Gamma,\omega)$ ve $\omega \in A_p(\Gamma)$ ise $f \in L^r(\Gamma)$ olacak şekilde bir $r > 1$ sayısı vardır.

İspat $\omega \in A_p(\Gamma)$ olduğundan Muckenhoupt şartı gereği $\omega \in A_q(\Gamma)$ olacak biçimde bir $q \in (1,p)$ sayısı vardır [28]. Burada $r := \frac{p}{q}$ olsun. $f \in L^p(\Gamma,\omega)$ olduğundan $|f|^r\omega^r \in L^q(\Gamma)$ olur. Diğer yandan, $\omega^{-r} \in L^p(\Gamma)$ olduğundan Hölder eşitsizliği kullanılarak $f \in L^r(\Gamma)$ olduğu görülür. ■

2.2.18 Önerme Γ , bir Carleson eğrisi ve $\omega \in A_p(\Gamma)$ ise her $f \in L^p(\Gamma, \omega)$ için $f^+ \in E^p(G, \omega)$ ve $f^- \in E^p(G^-, \omega)$ olur.

İspat $f \in L^p(\Gamma, \omega)$ olsun. 2.2.16 teoremi gereğince $S_\Gamma(f) \in L^p(\Gamma, \omega)$ olduğu görülür. Öte yandan 2.2.17 önermesi gereğince $f \in L^r(\Gamma)$ olacak biçimde bir $r > 1$ sayısı vardır. $1 < r < \infty$ ve Γ, bir Carleson eğrisi olduğundan $S_\Gamma : L^r(\Gamma) \to L^r(\Gamma)$ sınırlı bir lineer operatördür [31]. Dolayısıyla f^+ ve f^- fonksiyonları sırasıyla $E^r(G)$ ve $E^r(G^-)$ sınıflarındandır. Bununla beraber, Γ üzerinde hemen her yerde

$$f^+(z) = S_\Gamma(f)(z) + \tfrac{1}{2}f(z) \text{ ve } \quad f^-(z) = S_\Gamma(f)(z) - \tfrac{1}{2}f(z)$$

eşitlikleri sağlandığından f^+ ve f^- fonksiyonlarının $L^p(\Gamma, \omega)$ ya ait oldukları ortaya çıkar. Smirnov sınıfı tanımından $E^r(G) \subset E^1(G)$ ve $E^r(G^-) \subset E^1(G^-)$ kapsamalarını dikkate alırsak ispat tamamlanmış olur. ∎

2.2.19 Tanım $G \subset \mathbb{C}$, Γ ile sınırlı bir bölge, $\omega \in A_p(\Gamma)$, $f \in E^p(G, \omega)$ ve $1 \le p \le \infty$ olsun. $\mathcal{P}_n$ $(n = 1,2, \ldots)$ derecesi n 'yi aşmayan polinomlar ailesi olduğunda, f fonksiyonuna $E^p(G, \omega)$ sınıfındaki en iyi yaklaşım hatası

$$E_n(f)_{G,p,\omega} \coloneqq inf_{P_n \in \mathcal{P}_n} \|f - P_n\|_{L^p(\Gamma,\omega)}$$

ile tanımlanır.

2.2.20 Tanım $G \subset \mathbb{C}$, Γ ile sınırlı bir bölge, $\omega \in A_p(\Gamma)$, $f \in E^p(G^-, \omega)$ ve $1 \le p \le \infty$ olsun. $\mathcal{P}_n{}^*$ $(n = 1,2, \ldots)$ derecesi n'yi aşmayan $1/z$ 'ye göre polinomlar ailesi olduğunda, f fonksiyonuna $E^p(G^-, \omega)$ sınıfındaki en iyi yaklaşım hatası

$$E_n(f)_{G^-,p,\omega} \coloneqq inf_{P_n{}^* \in \mathcal{P}_n{}^*} \|f - P_n{}^*\|_{L^p(\Gamma,\omega)}$$

ile tanımlanır.

2.2.21 Tanım($\mathcal{O}$ Gösterimi) f ve g bir $A \subset \mathbb{C}$ kümesi üzerinde tanımlı iki fonksiyon olsunlar. Eğer her $z \in A$ için, $|f(z)| \le M|g(z)|$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa $f = \mathcal{O}(g)$ yazacağız.

2.3 p-Faber polinomu ve p-Faber Esas Kısmı

Bu kısımda yaklaşan polinomların inşa edilmesinde kullanılan Faber ve p-Faber polinomları ile ilgili gereken bilgiler verilecektir.

G, sınırı sonlu uzunluklu kapalı Γ Jordan eğrisi olan sınırlı bir bölge olsun. φ ve φ_1 sırasıyla G^- ve G bölgelerini $\mathbb{U}^-$ bölgesine,

$$\varphi(\infty) = \infty,\ \lim_{z\to\infty}\frac{\varphi(z)}{z} > 0,\ \varphi_1(0) = \infty, \lim_{z\to\infty} z\,\varphi_1(z) > 0$$

koşulları altında resmeden konform dönüşümler olsun. ψ ve ψ_1 sırasıyla φ ve φ_1 dönüşümlerinin ters dönüşümleri olsun. φ ve φ_1 fonksiyonları Γ'ya; ψ ve ψ_1 fonksiyonları da $\mathbb{T}$'ye sürekli olarak genişletilebilir. $\varphi'(z)$, G^- içinde; $\varphi'_1(z)$, G içinde; $\psi'(w)$ ve $\psi'_1(w)$ fonksiyonları da $\mathbb{U}^-$ içinde sıfırdan farklıdır.

k, negatif olmayan bir sayı olsun. $\varphi(z)$, G^- de analitik ve

$$\varphi'(\infty) = \lim_{z\to\infty}\frac{\varphi(z)}{z} > 0$$

olduğundan $[\varphi(z)]^k\sqrt[p]{\varphi'(z)}$ fonksiyonu ∞ noktasında k. dereceden bir kutba sahiptir. Dolayısıyla bu fonksiyonun ∞ daki Laurent açılımını düşünürsek $\forall\ z \in G$ için,

$$[\varphi(z)]^k\sqrt[p]{\varphi'(z)} = F_{k,p}(z) + E_{k,p}(z) \quad (6)$$

olacak şekilde k. dereceden bir $F_{k,p}(z)$ polinomu ve $E_{k,p}(\infty) = 0$ koşulunu sağlayan G^- de analitik bir $E_{k,p}(z)$ fonksiyonu vardır.

Bu son eşitlikten $R > 1$ ve $\forall\, z \in G$ için,

$$\Gamma_R \coloneqq \{\zeta \in G^-: |\varphi(\zeta)| = R\}$$

olmak üzere,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{[\varphi(\zeta)]^k\sqrt[p]{\varphi'(\zeta)}}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{F_{k,p}(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{E_{k,p}(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

elde ederiz. Burada sınırsız bölgeler için Cauchy integral formülü gereğince,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{E_{k,p}(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = E_{k,p}(\infty) = 0$$

ve Cauchy integral formülü gereğince,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{F_{k,p}(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = F_{k,p}(z)$$

olur. Dolasıyla, $R > 1$ ve $\forall\, z \in G$ için,

$$F_{k,p}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{[\varphi(\zeta)]^k\sqrt[p]{\varphi'(\zeta)}}{\zeta - z}d\zeta$$

integral gösterimini elde ederiz. Aynı zamanda $\varphi(\zeta) = w$ dönüşümü yapılarak,

$$F_{k,p}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=R}\frac{[w]^k[\psi'(w)]^{1-1/p}}{\psi(w) - z}dw$$

elde edilir.

2.3.1 Tanım $F_{k,p}(z)$ polinomuna G bölgesi için k. dereceden p-Faber polinomu denir.

2.3.2 Önerme $\forall\, z \in G$ ve $\forall\, w \in \mathbb{U}^-$ için

$$\frac{[\psi'(w)]^{1-1/p}}{\psi(w) - z} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{F_{k,p}(z)}{w^{k+1}}$$

olur.

İspat $z \in G$ olsun. $[\psi'(w)]^{1-1/p}/[\psi(w) - z]$ fonksiyonu $\mathbb{U}^-$ içinde analitik, $\psi(\infty) = \infty$ ve $\lim_{w\to\infty}\frac{\psi(w)}{w} > 0$ olduğundan, bu fonksiyon $\mathbb{U}^-$' nin kompakt alt kümeleri üzerinde düzgün olarak yakınsayan

$$\frac{[\psi'(w)]^{1-1/p}}{\psi(w) - z} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A_{k,p}(z)}{w^{k+1}}$$

şeklinde bir tek Laurent seri açılımına sahiptir. Bu eşitlik kullanılarak, $R > 1$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=R}\frac{w^n[\psi'(w)]^{1-1/p}}{\psi(w)-z}dw=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=R}w^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A_{k,p}(z)}{w^{k+1}}dw$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=R}\frac{w^n}{w^{k+1}}dw\right)A_{k,p}(z)$$

bulunur. Buradan $F_{n,p}(z)=A_{n,p}(z)$ olduğu kolayca görülür. Böylece ispat biter.■

Şimdi $[\varphi_1(z)]^{k-2/p}\sqrt[p]{\varphi_1{}'(z)}$ fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyon $G\setminus\{0\}$ da analitiktir ve 0 noktasında k. dereceden bir kutuba sahiptir. Eğer bu fonksiyonun 0 daki Laurent açılımının esas kısmını $\tilde{F}_{k,p}(1/z)$ ile gösterirsek, $\forall\, z\in G\setminus\{0\}$ için

$$[\varphi_1(z)]^{k-2/p}\sqrt[p]{\varphi_1{}'(z)}=\tilde{F}_{k,p}(1/z)+\tilde{E}_{k,p}(z)\quad(7)$$

olacak biçimde G içinde analitik olan bir $\tilde{E}_{k,p}(z)$ fonksiyonu vardır. Bu son eşitlikten $R>1$ ve $\forall\, z\in G^-$ için,

$$\tilde{\Gamma}_R\coloneqq\{\zeta\in G:|\varphi_1(\zeta)|=R\}$$

olmak üzere,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\tilde{\Gamma}_R}\frac{[\varphi_1(\zeta)]^{k-2/p}\sqrt[p]{\varphi_1{}'(\zeta)}}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\tilde{\Gamma}_R}\frac{\tilde{F}_{k,p}(1/z)}{\zeta-z}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\tilde{\Gamma}_R}\frac{\tilde{E}_{k,p}(z)}{\zeta-z}d\zeta$$

elde edilir. Burada Cauchy integral teoreminden,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\tilde{\Gamma}_R}\frac{\tilde{E}_{k,p}(z)}{\zeta-z}d\zeta=0$$

ve sınırsız bölgeler için Cauchy integral formülünden,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\tilde{\Gamma}_R}\frac{\tilde{F}_{k,p}(1/z)}{\zeta-z}d\zeta=\tilde{F}_{k,p}(\infty)-\tilde{F}_{k,p}(1/z)=-\tilde{F}_{k,p}(1/z)$$

elde edilir. Dolasıyla $R>1$ ve $\forall\, z\in G^-$ için,

$$\tilde{F}_{k,p}(1/z)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\tilde{\Gamma}_R}\frac{[\varphi_1(\zeta)]^{k-2/p}\sqrt[p]{\varphi_1{}'(\zeta)}}{\zeta-z}d\zeta$$

integral gösterimini elde ederiz.

Bu integralde yapacağımız $\varphi_1(\zeta) = w$ dönüşümüyle,

$$\tilde{F}_{k,p}(1/z) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=R} \frac{w^{k-2/p}[\psi_1{}'(w)]^{1-1/p}}{\psi_1(w) - z} dw$$

eşitliği yazılır. ■

2.3.3 Tanım $\tilde{F}_{k,p}(1/z)$ rasyonel fonksiyonuna G^- bölgesi için k. dereceden p-Faber esas kısmı denir.

2.3.4 Önerme $\forall\, z \in G^-$ ve $\forall\, w \in \mathbb{U}^-$ için

$$\frac{w^{-2/p}[\psi_1{}'(w)]^{1-1/p}}{\psi_1(w) - z} = \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{\tilde{F}_{k,p}(1/z)}{w^{k+1}}$$

olur.

İspat $z \in G^-$ olsun. $w^{-2/p}[\psi_1{}'(w)]^{1-1/p}/[\psi_1(w) - z]$ fonksiyonu $\mathbb{U}^-$ içinde analitik ve ∞ da ikinci mertebeden bir sıfıra sahip olduğundan onun $\mathbb{U}^-$ içindeki Laurent seri açılımı

$$\frac{w^{-2/p}[\psi_1{}'(w)]^{1-1/p}}{\psi_1(w) - z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tilde{A}_{k,p}(z)}{w^{k+2}}$$

formundadır. Eşitliğin sağ tarafındaki seri $\mathbb{U}^-$' nin kompakt alt kümleri üzerinde düzgün yakınsaktır. Dolayısıyla $R > 1$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$\begin{aligned} -\tilde{F}_{n,p}(1/z) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=R} \frac{w^{n-2/p}\,[\psi_1{}'(w)]^{1-1/p}}{\psi_1(w) - z} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=R} w^n \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tilde{A}_{k,p}(z)}{w^{k+2}} \right) dw \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=R} \frac{w^n}{w^{k+2}} dw \right) A_{k,p}(z) \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$-\tilde{F}_{n,p}(1/z) = \tilde{A}_{n-1,p}(z)$$

olduğu görülür.

Ayrıca $\tilde{F}_{0,p}(1/z) = 0$ olduğundan

$$\frac{w^{-2/p}[\psi_1{}'(w)]^{1-1/p}}{\psi_1(w) - z} = \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{\tilde{F}_{k,p}(1/z)}{w^{k+1}}$$

elde edilir. ■

Γ üzerinde verilen bir ω ağırlığı ve keyfi bir $f \in L^p(\Gamma, \omega)$ fonksiyonu için,

$$f_0(w) := f[\psi(w)]\big(\psi'(w)\big)^{\frac{1}{p}} \quad , \quad \omega_0(w) := \omega[\psi(w)]$$

$$f_1(w) := f[\psi_1(w)]\left(\psi_1{}'(w)\right)^{\frac{1}{p}} w^{2/p} \quad , \quad \omega_1(w) := \omega[\psi_1(w)]$$

ifadelerini oluşturalım. $f \in L^p(\Gamma, \omega)$ ve $\omega \in A_p(\Gamma)$ olsun. Bu durumda, $f \in L^1(\Gamma)$ olacağından

$$f^+ : G \to \mathbb{C}, \qquad f^+(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \mathrm{z}}\, d\zeta$$

$$f^- : G^- \to \mathbb{C}, \qquad f^-(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \mathrm{z}}\, d\zeta$$

fonksiyonlarını tanımlayabiliriz ve Γ üzerinde hemen her yerde

$$f(z) = f^+(z) - f^-(z)$$

dir. Burada $f^+ \in E^p(G, \omega)$ ve $f^- \in E^p(G^-, \omega)$ olduğu 2.2.18 önermesinden açıktır.

Bu fonksiyonların her birisi yukarıda tanımlanan f_0 ve f_1 fonksiyonları cinsinden aşağıdaki integral gösterime sahiptir :

$$f^+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} f_0(w)\frac{[\psi'(w)]^{1-1/p}}{\psi(w) - \mathrm{z}}\, dw, \qquad z \in G$$

$$f^-(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} f_1(w)\frac{w^{-2/p}\,[\psi_1{}'(w)]^{1-1/p}}{\psi_1(w) - \mathrm{z}}\, dw,, \qquad z \in G^- \quad .$$

Dolayısıyla 2.3.2 ve 2.3.4 önermeleri gereğince $f \in L^p(\Gamma,\omega)$ fonksiyonuna,

$$f(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, F_{k,p}(z) + \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}_k\, \tilde{F}_{k,p}(1/z)$$

şeklinde genelleştirilmiş p-Faber Laurent serisi karşılık gelir. Burada a_k ve $\tilde{a}_k$ katsayıları,

$$a_k(f) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{f_0(w)}{w^{k+1}}\, dw, \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

$$\tilde{a}_k(f) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{f_1(w)}{w^{k+1}}\, dw, \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

ile tanımlanır. Bu a_k ve $\tilde{a}_k$ katsayılarına $f \in L^p(\Gamma,\omega)$ 'nin p-Faber Laurent katsayıları denir.

$f_0 \in L^p(\mathbb{T},\omega_0)$ olduğundan, ${f_0}^+(w) \in E^p(\mathbb{U},\omega_0)$, ${f_0}^-(w) \in E^p(\mathbb{U}^-,\omega_0)$ ve $f_1 \in L^p(\mathbb{T},\omega_1)$ olduğundan ${f_1}^+(w) \in E^p(\mathbb{U},\omega_1)$, ${f_1}^-(w) \in E^p(\mathbb{U}^-,\omega_1)$ olur. $\mathbb{T}$ üzerinde hemen her yerde $f_0 = {f_0}^+ - {f_0}^-$ ve $f_1 = {f_1}^+ - {f_1}^-$ sağlanır.

Bunları kullanarak,

$$a_k(f) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{{f_0}^+(w)}{w^{k+1}}\, dw$$

$$\tilde{a}_k(f) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{{f_1}^+(w)}{w^{k+1}}\, dw$$

elde ederiz ki $a_k(f)$ ve $\tilde{a}_k(f)$ p-Faber Laurent katsayıları sırasıyla ${f_0}^+(w) \in E^p(\mathbb{U},\omega_0)$ ve ${f_1}^+(w) \in E^p(\mathbb{U},\omega_1)$ fonksiyonlarının Taylor katsayılarıdır.

2.4 Ağırlıklı Smirnov Sınıflarında Düzgünlük Modülleri

$f \in L^p(\mathbb{T},\omega)$, $1 < p < \infty$ olsun. Verilen $r \in \mathbb{N}$ ve $t > 0$, $w \in \mathbb{T}$ için,

$$\Delta_t^r f(w) = \sum_{s=0}^{r} (-1)^{r+s+1} \binom{r}{s} f\left(we^{ist}\right)$$

olsun. Buradan hareketle

$$\sigma_\delta^r f(w) := \frac{1}{\delta}\int_0^\delta |\Delta_t^r f(w)| dt$$

şeklinde bir operatör tanımlayalım.

$0 < h < \infty$ olsun $\omega \in A_p(\mathbb{T})$, $1 < p < \infty$ için, $L^p(\mathbb{T},\omega)$ uzayında Hardy-Littlewood Maximal fonksiyonunun sınırlılığını kullanarak

$$\sup_{|\delta|\le h} \|\sigma_\delta^r f(w)\|_{L^p(\mathbb{T},\omega)} \le c(p,r)\|f\|_{L^p(\mathbb{T},\omega)} < \infty$$

eşitsizliği elde edilir.

2.4.1. Tanım $f \in L^p(\mathbb{T},\omega)$, $1 < p < \infty$ ve $\omega \in A_p(\mathbb{T})$, $r \in \mathbb{N}$ ve $w \in \mathbb{T}$ olsun.

$$\Omega_r(f,h)_{p,\omega} := \sup_{|\delta|\le h} \|\sigma_\delta^r f(w)\|_{L^p(\mathbb{T},\omega)}$$

ile tanımlanan $\Omega_r(f,.)_{p,\omega}: [0,\infty) \to [0,\infty)$ fonksiyonuna $f \in L^p(\mathbb{T},\omega)$ fonksiyonunun r. düzgünlük modülü denir.

Yukarıda verdiğimiz tanım N. X. Ky tarafından $f \in L^p([0,2\pi],\omega)$ ve $\omega \in A_p([0,2\pi])$ olması durumunda verilmiştir [11].

$\Omega_r(f,h)_{p,\omega}$ modülü aşağıdaki özellikleri sağlar

i) $\Omega_r(f,h)_{p,\omega}$, $h > 0$ 'ın azalmayan ve negatif olmayan fonksiyonudur.

ii) $\Omega_r(f_1 + f_2,.)_{p,\omega} \le \Omega_r(f_1,.)_{p,\omega} + \Omega_r(f_2,.)_{p,\omega}$

iii) $\lim_{h\to 0} \Omega_r(f,h)_{p,\omega} = 0$.

2.4.2 Tanım $f \in E^p(G,\omega)$, $1 < p < \infty$ ve $\omega \in A_p(\Gamma), r \in \mathbb{N}$ olsun.

$$\Omega_r(f,\delta)_{G,p,\omega} \coloneqq \Omega_r\left({f_0}^+,\delta\right)_{p,\omega_0} \ , \ \ \delta > 0$$

ifadesine $f \in E^p(G,\omega)$ fonksiyonunun *r*. düzgünlük modülü denir

2.4.3 Tanım $f \in E^p(G^-,\omega)$, $1 < p < \infty$ ve $\omega \in A_p(\Gamma), r \in \mathbb{N}$ olsun.

$$\Omega_r(f,\delta)_{G^-,p,\omega} \coloneqq \Omega_r\left({f_1}^+,\delta\right)_{p,\omega_1} \ , \ \ \delta > 0$$

ifadesine $f \in E^p(G^-,\omega)$ fonksiyonunun r. düzgünlük modülü denir.

3. AĞIRLIKLI SMİRNOV SINIFLARINDA DÜZ VE TERS TEOREMLER

3.1 Yardımcı Sonuçlar

$\mathcal{P}$, derece kısıtlaması olmadan tüm cebirsel polinomların kümesi olsun. $\mathcal{P}(\mathbb{U})$ ile $\mathbb{U}$ üzerinde $\mathcal{P}$ kümesinin elemanlarının izini işaretleyelim. Bu durumda $T_p \ : \ \mathcal{P}(\mathbb{U}) \to E^p(G,\omega)$ ve $\widetilde{T_p} \ : \ \mathcal{P}(\mathbb{U}) \to E^p(G^-,\omega)$ operatörlerini

$$T_p(P)(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{P(w)[\psi'(w)]^{1-1/p}}{\psi(w)-z}\,dw\,, \qquad z \in G \qquad (8)$$

ve

$$\widetilde{T_p}(P)(z) := -\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{P(w)\,w^{-2/p}[\psi_1{}'(w)]^{1-1/p}}{\psi_1(w)-z}\,dw\,, \qquad z \in G^- \qquad (9)$$

olarak tanımlarsak, o zaman 2.3.2 önermesini dikkate alarak

$$T_p\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k w^k\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k w^k \frac{\left[\psi'^{(w)}\right]^{1-1/p}}{\psi(w)-z}\,dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k w^k \frac{F_{k,p}(z)}{w^{k+1}}\,dw$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \alpha_k F_{k,p}(z) \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{dw}{w}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k F_{k,p}(z)$$

eşitliğine ulaşırız. Benzer şekilde 2.3.4 önermesini uygulayarak

$$\widetilde{T_p}\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k w^k\right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \tilde{F}_{k,p}(1/z)$$

olur.

(8) ifadesinde $z' \in G$ için (1) eşitliğini dikkate alırsak,

$$T_p(P)(z') = \left[(P \text{ o } \varphi)(\varphi')^{1/p}\right]^+(z')$$

olur. (8) ifadesinde Γ içerisinde tüm açısal yollar üzerinden $z' \to z \in \Gamma$ limitini alarak ve (3) ifadesini kullanarak

$$T_p(P)(z) = \frac{1}{2}\left[(P \text{ o } \varphi)(\varphi')^{1/p}\right](z) + S_\Gamma\left[(P \text{ o } \varphi)(\varphi')^{1/p}\right](z) \quad (10)$$

elde ederiz. Benzer şekilde (9) ifadesinde $z'' \in G^-$ için (2) eşitliğini dikkate alırsak,

$$\widetilde{T_p}(P)(z'') = \left[(P \text{ o } \varphi_1)\, {\varphi_1}^{-2/p}({\varphi_1}')^{1/p}\right]^-(z'')$$

olur. (9) ifadesinde Γ nın dışında tüm açısal yollar üzerinden $z'' \to z \in \Gamma$ limitini alarak ve (4) ifadesini kullanarak

$$\widetilde{T_p}(P)(z) = S_\Gamma\left[(P \text{ o } \varphi_1)\, {\varphi_1}^{-2/p}({\varphi_1}')^{1/p}\right](z)$$
$$-\frac{1}{2}\left[\left[(P \text{ o } \varphi_1)\, {\varphi_1}^{-2/p}({\varphi_1}')^{1/p}\right](z)\right] \quad (11)$$

elde ederiz.

3.1.1. Teorem $\Gamma \in S$, $1 < p < \infty$ ve ω , Γ üzerinde verilen bir ağırlık olsun. O zaman aşağıdaki iddalar sağlanır : Eğer $\omega \in A_p(\Gamma)$, ω_0 , $\omega_1 \in A_p(\mathbb{T})$ ise

$$T_p : \mathcal{P}(\mathbb{U}) \subset E^p(\mathbb{U}, \omega_0) \to E^p(G, \omega)$$

$$\widetilde{T_p} : \mathcal{P}(\mathbb{U}) \subset E^p(\mathbb{U}, \omega_1) \to E^p(G^-, \omega)$$

operatörleri lineer ve sınırlıdır.

İspat T_p ve $\widetilde{T_p}$ operatörlerinin lineerliği açıktır. İlk önce T_p operatörünün sınırlılığını ispatlayalım. (10) ilişkisi ve 2.2.16 teoremi yardımıyla

$$\left\|T_p(P)(z)\right\|_{L^p(\Gamma,\omega)} = \left\|\frac{1}{2}\left[(P \text{ o } \varphi)(\varphi')^{1/p}\right](z)\right\|_{L^p(\Gamma,\omega)}$$

$$+\left\|S_\Gamma\left[(P \text{ o } \varphi)(\varphi')^{1/p}\right](z)\right\|_{L^p(\Gamma,\omega)}$$

$$\leq \left(c + \frac{1}{2}\right)\left\|\left[(P \text{ o } \varphi)(\varphi')^{1/p}\right](z)\right\|_{L^p(\Gamma,\omega)}$$

$$= \left(c + \frac{1}{2}\right)\left\{\int_\Gamma \left|P\big(\varphi(z)\big)\right|^p |\varphi'(z)|\, [\omega(z)]^p |dz|\right\}^{1/p}$$

$$= \left(c + \frac{1}{2}\right)\left\{\int_{\mathbb{T}} \left|P(w)\left[\omega\left(\psi(w)\right)\right]\right|^p |dw|\right\}^{1/p}$$

$$= \left(c + \frac{1}{2}\right)\left\{\int_{\mathbb{T}} |P(w)\omega_0(w)|^p |dw|\right\}^{1/p}$$

$$= c\|P\|_{L^p(\mathbb{T},\omega_0)}$$

elde edilir. Benzer şekilde (11) ilişkisinden ve 2.2.16 teoremi yardımıyla

$$\left\|\widetilde{T_p}(P)(z)\right\|_{L^p(\Gamma,\omega)} \leq \left\|S_\Gamma\left[(P \text{ o } \varphi_1)\ {\varphi_1}^{-2/p}({\varphi_1}')^{1/p}\right](z)\right\|_{L^p(\Gamma,\omega)}$$

$$+ \left\|-\frac{1}{2}\left[\left[(P \text{ o } \varphi_1)\ {\varphi_1}^{-2/p}({\varphi_1}')^{1/p}\right](z)\right]\right\|_{L^p(\Gamma,\omega)}$$

$$\leq \left(c + \frac{1}{2}\right)\left\|\left[(P \text{ o } \varphi_1)\ {\varphi_1}^{-2/p}({\varphi_1}')^{1/p}\right](z)\right\|_{L^p(\Gamma,\omega)}$$

$$= \left(c + \frac{1}{2}\right)\left\{\int_{\Gamma} \left|P\left(\varphi_1(z)\right)\right|^p |\varphi_1(z)|^{-2}|{\varphi_1}'(z)|[\omega(z)]^p |dz|\right\}^{1/p}$$

$$= \left(c + \frac{1}{2}\right)\left\{\int_{\mathbb{T}} |P(w)|^p|w|^{-2}\left[\omega\left(\psi_1(w)\right)\right]^p |dw|\right\}^{1/p}$$

$$= \left(c + \frac{1}{2}\right)\left\{\int_{\mathbb{T}} |P(w)\omega_1(w)|^p |dw|\right\}^{1/p}$$

$$= c\|P\|_{L^p(\mathbb{T},\omega_1)}$$

olduğu görülür.■

Böylece yukarıda ispatlanan teorem ve 2.1.13 teoremine dayanarak T_p ve $\widetilde{T_p}$ operatörlerinin, sınırlı lineer operator olarak sırasıyla $E^p(\mathbb{U},\omega_0)$ ve $E^p(\mathbb{U},\omega_1)$'e genişletilebilcekleri söylenebilir. Bu durumda T_p ve $\widetilde{T_p}$ için aşağıdaki gösterimler vardır.

$$T_p(f)(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{f(w)[\psi'(w)]^{1-1/p}}{\psi(w)-z}dw, \qquad f \in E^p(\mathbb{U},\omega_0)$$

$$\widetilde{T_p}(f)(z) := -\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{f(w)\, w^{-2/p}[\psi_1{}'(w)]^{1-1/p}}{\psi_1(w)-z}dw, \qquad f \in E^p(\mathbb{U},\boldsymbol{\omega_1})$$

3.1.2 Teorem $\Gamma \in S$, $1 < p < \infty$ ve $\omega \in A_p(\Gamma), \omega_0, \omega_1 \in A_p(\mathbb{T})$ olsun. Bu durumda $T_p: E^p(\mathbb{U},\omega_0) \to E^p(G,\omega)$ ve $\widetilde{T_p}: E^p(\mathbb{U},\omega_1) \to E^p(G^-,\omega)$ operatörleri bire bir ve üzerinedir. Ayrıca $f \in E^p(G,\omega)$ için $T_p(f_0{}^+) = f$ ve $f \in E^p(G^-,\omega)$ için $\widetilde{T_p}(f_1{}^+) = f$ eşitlikleri geçerlidir.

İspat. Bu teorem $T_p$operatörü için Daniyal M. İsrafilov ve Ali Güven tarafından [16] da ispatlanmıştır. Biz teoremi $\widetilde{T_p}$ için ispatlayalım. $g \in E^p(\mathbb{U},\boldsymbol{\omega_1})$, $w \in \mathbb{U}$ ve

$$g(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k w^k$$

g'nin Taylor serisi olsun.Bu durumda $g \in E^p(\mathbb{U},\omega_1)$ olduğundan $g \in E^1(\mathbb{U})$ sağlanır. $g_r(w) := g(rw)$ ve $0 < r < 1$ için,

$$\|g_r - g\|_{L^p(\mathbb{T},\omega_0)} \to 0, \qquad r \to 1^-$$

elde ederiz. 3.1.1 teoremini kullanarak

$$\left\| \widetilde{T_p}(g_r) - \widetilde{T_p}(g)\right\|_{L^p(\Gamma,\omega)} \to 0, \quad r \to 1^- \qquad (12)$$

yazabiliriz.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k r^k w^k$$

serisi $\mathbb{T}$ üzerinde düzgün yakınsar. Böylece $z \in G^-$ için, 2.3.4 önermesini dikkate alırsak,

$$\widetilde{T_p}(g_r)(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{g_r(w)\, w^{-2/p}[\psi_1{}'(w)]^{1-1/p}}{\psi_1(w)-z}dw$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(g) r^k \left\{-\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{w^k\, w^{-2/p}[\psi_1{}'(w)]^{1-1/p}}{\psi_1(w)-z}dw\right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(g) r^k\, \tilde{F}_{k,p}(1/z)$$

eşitliği vardır. Şimdi $\widetilde{T_p}(g_r)$ ifadesinin $\tilde{a}_k(f)$ p-Faber katsayılarını hesaplayalım. $\psi_1(w) \in G$ olup,

$$\tilde{a}_k\left(\widetilde{T_p}(g_r)\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{\left[\widetilde{T_p}(g_r)\big(\psi_1(w)\big)\right] w^{2/p}[\psi_1{}'(w)]^{1/p}}{w^{k+1}}dw$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m(g) r^m\, \tilde{F}_{m,p}\big(1/\psi_1(w)\big)\, w^{2/p}[\psi_1{}'(w)]^{1/p}}{w^{k+1}}dw$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m(g) r^m \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{\tilde{F}_{m,p}(1/\psi_1(w))\, w^{2/p}[\psi_1{}'(w)]^{1/p}}{w^{k+1}}dw\right)$$

olur ayrıca (7) ifadesinden

$$(w)^{m-2/p}\, [\psi'_1(w)]^{-1/p} = \tilde{F}_{m,p}(1/\psi_1(w)) + \tilde{E}_{m,p}\big(\psi_1(w)\big)$$

ve

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{\tilde{F}_{m,p}(1/\psi_1(w))\, w^{2/p}[\psi_1{}'(w)]^{1/p}}{w^{k+1}}dw =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{\left\{(w)^{m-2/p}\, [\psi'_1(w)]^{-1/p} - \tilde{E}_{m,p}\big(\psi_1(w)\big)\right\} w^{2/p}[\psi_1{}'(w)]^{1/p}}{w^{k+1}}dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{w^m}{w^{k+1}}dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{\tilde{E}_{m,p}\big(\psi_1(w)\big)\, w^{2/p}[\psi_1{}'(w)]^{1/p}}{w^{k+1}}dw$$

$$= \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases}$$

olacaktır ki

$$\tilde{a}_k\left(\widetilde{T_p}(g_r)\right) = \alpha_k(g)r^k$$

elde edilir. Böylece

$$\tilde{a}_k\left(\widetilde{T_p}(g_r)\right) \to \alpha_k(g), \quad r \to 1^- \tag{13}$$

olup diğer yandan $1/p + 1/q = 1$ için, Hölder eşitsizliğini kullanarak,

$$\left|\tilde{a}_k\left(\widetilde{T_p}(g_r)\right) - \tilde{a}_k\left(\widetilde{T_p}(g)\right)\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{\left[\widetilde{T_p}(g_r) - \widetilde{T_p}(g)\right]\left(\psi_1(w)\right) w^{2/p}[\psi_1{}'(w)]^{1/p}}{w^{k+1}} dw\right|$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \left|\left[\widetilde{T_p}(g_r) - \widetilde{T_p}(g)\right]\left(\psi_1(w)\right)\right| \left|[\psi_1{}'(w)]^{1/p}\right| |dw|$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} \left|\left[\widetilde{T_p}(g_r) - \widetilde{T_p}(g)\right](z)\right| [\omega(z)][\omega(z)]^{-1} \left|\left(\varphi'_1(z)\right)^{1/q}\right| |dz|$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\left(\int_{\Gamma} \left|\left[\widetilde{T_p}(g_r) - \widetilde{T_p}(g)\right](z)\right|^p [\omega(z)]^p |dz|\right)^{1/p} \left(\int_{\Gamma} [\omega(z)]^{-q} |\varphi'_1(z)||dz|\right)^{1/q}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{\Gamma} \left|\left[\widetilde{T_p}(g_r) - \widetilde{T_p}(g)\right](z)\omega(z)\right|^p |dz|\right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{T}} [\omega_1(w)]^{-q} |dw|\right)^{1/q}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\|\widetilde{T_p}(g_r) - \widetilde{T_p}(g)\right\|_{L^p(\Gamma,\omega)} \left(\int_{\mathbb{T}} [\omega_1(w)]^{-q} |dw|\right)^{1/q}$$

bulunur ve (12) ifadesinden

$$\tilde{a}_k\left(\widetilde{T_p}(g_r)\right) \to \tilde{a}_k\left(\widetilde{T_p}(g)\right), \qquad r \to 1^- \tag{14}$$

olduğu görülür. Böylece (13) ve (14) ilişkilerinden

$$\tilde{a}_k\left(\widetilde{T_p}(g)\right) = \alpha_k(g)\,, \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

eşitliğine varılır.

Eğer $\widetilde{T_p}(g) = 0$ ise o zaman $k = 0,1,2,...$ için $\alpha_k = \tilde{a}_k\left(\widetilde{T_p}(g)\right) = 0$ ve bu sayede $g = 0$ dır. Bu $\widetilde{T_p}: E^p(\mathbb{U}, \omega_{\mathbf{1}}) \to E^p(G^-, \omega)$ operatörünün bire bir olduğunu gösterir.

Şimdi operatörün üzerine olduğunu gösterelim. $f \in E^p(G^-, \omega)$ olsun. O zaman

$$f_1(w) := f[\psi_1(w)]\left(\psi_1{}'(w)\right)^{1/p} w^{2/p} \in L^p(\mathbb{T}, \omega_1)$$

olur. Üstelik 2.2.18 önermesinden $f_1{}^+ \in E^p(\mathbb{U}, \omega_{\mathbf{1}})$ ve $f_1{}^- \in E^p(\mathbb{U}^-, \omega_{\mathbf{1}})$ olur.

$$\tilde{a}_k(f) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{f_1(w)}{w^{k+1}}\, dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{f_1{}^+(w)}{w^{k+1}}\, dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{f_1{}^-(w)}{w^{k+1}}\, dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{f_1{}^+(w)}{w^{k+1}}\, dw$$

$$= \alpha_k(f_1{}^+)$$

olduğundan $f_1{}^+$'nın orjindeki Taylor katsayıları f'in p-Faber katsayılarıdır. Yani

$$f_1{}^+(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}_k(f) w^k, \quad w \in \mathbb{U}.$$

İspatin ilk kısmından

$$\widetilde{T_p}(f_1{}^+)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(f_1{}^+)\, \tilde{F}_{k,p}(1/z) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}_k(f)\, \tilde{F}_{k,p}(1/z) = f, \quad z \in G^-$$

$\widetilde{T_p}$ operatörünün üzerine olduğunu ispatlar çünkü $E^p(G^-, \omega)$ sınıfında aynı p-Faber serisine sahip fonksiyon yoktur.

3.1.3 Teorem [11] $\omega \in A_p(T)$, $1 < p < \infty$ olsun. Her $f \in L^p(T, \omega)$ ve $r \in \mathbb{N}$ için,

$$E_n(f)_{p,\omega} \le c\, \Omega_r(f, \delta)_{p,\omega}\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

değerlendirmesi *n*' den bağımsız bir $c > 0$ sabiti ile sağlanır.

3.1.4 Teorem [11] $\omega \in A_p(T)$, $1 < p < \infty$ olsun. Her $f \in L^p(T,\omega)$ ve $r \in \mathbb{N}$ için,

$$\Omega_r\left(f,\frac{1}{n}\right)_{p,\omega} \leq \frac{c}{n^r}\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{r-1}E_\nu(f)_{p,\omega}\,, \qquad n \in \mathbb{N}$$

değerlendirmesi *n*' den bağımsız bir $c > 0$ sabiti ile sağlanır.

3.1.5 Önerme $g \in E^p(\mathbb{U},\omega)$, $\omega \in A_p(\mathbb{T})$ ve $1 < p < \infty$ olsun. Eğer

$$\sum_{k=0}^{n}\alpha(g)w^k$$

g'nin orjindeki Taylor serisinin *n*. kısmi toplamı ise her $r \in \mathbb{N}$ için

$$\left\|g(w) - \sum_{k=0}^{n}\alpha_k(g)w^k\right\|_{L^p(\mathbb{T},\omega)} \leq c\,\Omega_r\left(g,\frac{1}{n}\right)_{p,\omega}, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

eşitsizliği $c > 0$ sabiti ile sağlanır.

İspat

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{i\theta}$$

g sınır fonksiyonunun Fourier serisi ve

$$S_n(g,\theta) := \sum_{k=-n}^{n} b_k e^{i\theta}$$

onun *n*. kısmi toplamı olsun. $g \in E^1(\mathbb{U})$ olduğundan $k < 0$ için $b_k = 0$ ve $k \geq 0$ için $b_k = \alpha_k(g)$ olur. Böylece

$$\left\|g(w) - \sum_{k=0}^{n}\alpha_k(g)w^k\right\|_{L^p(\mathbb{T},\omega)} = \left\|g\left(e^{i\theta}\right) - S_n(g,\theta)\right\|_{L^p([0,2\pi],\omega)} \qquad (15)$$

yazılır. Eğer, $L^p([0,2\pi],\omega)$ sınıfında $g\left(e^{i\theta}\right)$ için en iyi yaklaşan trigonometrik polinom $T^*{}_n(g,\theta)$ ise (15) ifadesinden

$$\left\|g(w) - \sum_{k=0}^{n}\alpha_k(g)w^k\right\|_{L^p(\mathbb{T},\omega)} \leq$$

$$\leq \left\|g\left(e^{i\theta}\right) - T^*{}_n(g,\theta)\right\|_{L^p([0,2\pi],\omega)} + \left\|S_n(g - T^*{}_n,\theta)\right\|_{L^p([0,2\pi],\omega)} \qquad (16)$$

olur. [40] çalışmasında ispatlanan

$$\left\|\sup_{n\geq 0}|S_n(g,\theta)|\right\|_{L^p([0,2\pi],\omega)} \leq c\ \|g\|_{L^p([0,2\pi],\omega)}$$

eşitsizliğini (16) ifadesinde uygulayarak

$$\left\|g(w)-\sum_{k=0}^{n}\alpha_k(g)w^k\right\|_{L^p(\mathbb{T},\omega)} \leq c\ E_n(g)_{p,\omega}$$

elde edilir. Şimdi 3.1.3 teoremini kulanarak $c>0$ sabiti ile

$$\left\|g(w)-\sum_{k=0}^{n}\alpha_k(g)w^k\right\|_{L^p(\mathbb{T},\omega)} \leq c\ \Omega_r\left(g,\frac{1}{n}\right)_{p,\omega}, \qquad \forall\, n\epsilon\mathbb{N}$$

eşitsizliği elde edilir.■

3.1.6 Önerme Eğer $f\in E^p(\mathbb{U},\omega)$, $1<p<\infty$ ve $\omega\in A_p(\mathbb{T})$ ve $r\in\mathbb{N}$ ise o zaman

$$\Omega_r\left(f,\frac{1}{n}\right)_{p,\omega} \leq \frac{c}{n^r}\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{r-1}E_\nu(f)_{p,\omega}, \qquad n\in\mathbb{N}$$

değerlendirmesi n'den bağımsız bir $c>0$ sabiti ile sağlanır.

İspat $f\in E^p(\mathbb{U},\omega)$ olsun. Bu durumda $f\in E^1(\mathbb{U})$ olur. Böylece f, $f(e^{i\theta})$; $\theta\in[0,2\pi)$ biçiminde sınır değerlerine sahiptir. Buradan

$$\Omega_r\left(f,\frac{1}{n}\right)_{p,\omega} = \sup_{|\delta|\leq\frac{1}{n}}\|\sigma_\delta^r f(w)\|_{L^p(\mathbb{T},\omega)}$$

$$= \sup_{|\delta|\leq\frac{1}{n}}\left\|\sigma_\delta^r f\left(e^{i\theta}\right)\right\|_{L^p(T,\omega)}$$

$$= \Omega_r\left(f\left(e^{i\theta}\right),\frac{1}{n}\right)_{p,\omega}$$

elde eldilir. 3.1.4 teoremi uygulanarak istenen

$$\Omega_r\left(f,\frac{1}{n}\right)_{p,\omega} \leq \frac{c}{n^r}\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{r-1}E_\nu(f)_{p,\omega}, \qquad n\in\mathbb{N}$$

ifadesine ulaşılır.■

3.2 Ana Sonuçlar

3.2.1 Teorem $\Gamma \in S$ ve $\omega \in A_p(\Gamma)$, $\omega_0 \in A_p(\mathbb{T})$, $1 < p < \infty$ olsun.

$f \in E^p(G,\omega)$ ve $r \in \mathbb{N}$ için,

$$E_n(f)_{G,p,\omega} \leq c\,\Omega_r(f,\delta)_{G,p,\omega} \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

değerlendirmesi n'den bağımsız bir $c > 0$ sabiti ile sağlanır.

İspat $f \in E^p(G,\omega)$, $1 < p < \infty$ ve $f_0(w) := f[\psi(w)]\big(\psi'(w)\big)^{\frac{1}{p}}$, $w \in \mathbb{T}$ olsun. 3.1.2 teoreminden ${f_0}^+ \in E^p(\mathbb{U},\omega_0\,)$ için $T_p\big({f_0}^+\big) = f$ olduğu biliniyor. $P_n \in \mathcal{P}_n$ $(n = 0,1,2,\dots)$, $E^p(G,\omega)$ sınıfında f'e en iyi yaklaşan polinomlar olsun. Yani

$$E_n(f)_{G,p,\omega} = \|f - P_n\|_{L^p(\Gamma,\omega)}$$

olsun. Bu durumda $T_p(P_n) \in E^p(G,\omega)$ olduğu açıktır. 3.1.1 teoreminde belirtilen T_p operatörünün sınırlılığı kullanılarak,

$$E_n(f)_{G,p,\omega} \leq \big\|f - T_p(P_n)\big\|_{L^p(\Gamma,\omega)}$$

$$= \big\|T_p\big({f_0}^+\big) - T_p(P_n)\big\|_{L^p(\Gamma,\omega)}$$

$$\leq \big\|T_p\big\|\big\|{f_0}^+ - P_n\big\|_{L^p(\mathbb{T},\omega_0)}$$

$$= \big\|T_p\big\|E_n\big({f_0}^+\big)_{p,\omega_0}$$

elde edilir. Sırasıyla, bu son eşitsizlik, ${f_0}^+ \in E^p(\mathbb{U},\omega_0\,)$ için 3.1.5 önermesi ve 2.4.2 tanımı kullanılarak

$$E_n(f)_{G,p,\omega} \leq cE_n\big({f_0}^+\big)_{p,\omega_0} \leq c\,\Omega_r\left({f_0}^+,\frac{1}{n}\right)_{p,\omega_0} = c\,\Omega_r\left(f,\frac{1}{n}\right)_{G,p,\omega}$$

elde edilir ki istenendir.

3.2.2 Teorem $\Gamma \in S$ ve $\omega \in A_p(\Gamma)$, $\omega_0 \in A_p(\mathbb{T})$, $1 < p < \infty$ olsun.

$f \in E^p(G,\omega)$ ve $r \in \mathbb{N}$ için,

$$\Omega_r\left(f,\frac{1}{n}\right)_{G,p,\omega} \leq \frac{c}{n^r}\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{r-1}E_\nu(f)_{G,p,\omega}\,, \qquad n \in \mathbb{N}$$

değerlendirmesi n' den bağımsız bir $c > 0$ sabiti ile sağlanır.

İspat $f \in E^p(G,\omega)$, $1 < p < \infty$ ve $f_0(w) := f[\psi(w)](\psi'(w))^{\frac{1}{p}},\ w \in \mathbb{T}$ olsun. 3.1.2 teoreminden yararlanılarak $T_p^{-1}(f) = f_0^{+} \in E^p(\mathbb{U},\omega_0)$ yazılabilir. $P_n \in \mathcal{P}_n$ $(n = 0,1,2,\ldots)$, $E^p(G,\omega)$ sınıfında f'e en iyi yaklaşan polinomlar olsun. Yani

$$E_n(f)_{G,p,\omega} = \|f - P_n\|_{L^p(\Gamma,\omega)}$$

olsun. Bu durumda $T_p^{-1}(P_n) \in \mathcal{P}_n(\mathbb{U})$ olduğu açıktır. 3.1.1 teoreminden elde edilen T_p^{-1} operatörünün sınırlılığı kullanılarak,

$$E_n(f_0^{+})_{p,\omega_0} \le \left\|f_0^{+} - T_p^{-1}(P_n)\right\|_{L^p(\mathbb{T},\omega_0)}$$

$$= \left\|T_p^{-1}(f) - T_p^{-1}(P_n)\right\|_{L^p(\mathbb{T},\omega_0)}$$

$$\le \left\|T_p^{-1}\right\| \|f - P_n\|_{L^p(\Gamma,\omega)}$$

$$= \left\|T_p^{-1}\right\| E_n(f)_{G,p,\omega}$$

elde edilir. Sırasıyla 2.4.2 tanımı, $f_0^{+} \in E^p(\mathbb{U},\omega_0)$ için 3.1.6 önermesi ve bu son eşitsizlik kullanılarak,

$$\Omega_r\left(f,\frac{1}{n}\right)_{G,p,\omega} = \Omega_r\left(f_0^{+},\frac{1}{n}\right)_{p,\omega_0}$$

$$\le \frac{c}{n^r}\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{r-1}E_\nu(f_0^{+})_{p,\omega_0}$$

$$\le \frac{c}{n^r}\left\|T_p^{-1}\right\|\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{r-1}E_\nu(f)_{G,p,\omega}$$

$$= \frac{c}{n^r}\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{r-1}E_\nu(f)_{G,p,\omega}$$

elde edilir ki istenendir. ■

3.2.3 Teorem $\Gamma \in S$ ve $\omega \in A_p(\Gamma)$, $\omega_1 \in A_p(\mathbb{T})$, $1 < p < \infty$ olsun.

$f \in E^p(G^-,\omega)$ ve $r \in \mathbb{N}$ için,

$$E_n(f)_{G^-,p,\omega} \le c\,\Omega_r(f,\delta)_{G^-,p,\omega}\ , \qquad n \in \mathbb{N}$$

değerlendirmesi n'den bağımsız bir $c > 0$ sabiti ile sağlanır.

İspat $f \in E^p(G^-, \omega)$, $1 < p < \infty$ ve $f_1(w) := f[\psi_1(w)] \left(\psi_1'(w)\right)^{\frac{1}{p}} w^{2/p}$, $w \in \mathbb{T}$ olsun. 3.1.2 teoreminden $f_1^+ \in E^p(\mathbb{U}, \omega_1)$ için $\widetilde{T_p}(f_1^+) = f$ olduğu biliniyor. $P_n^* \in \mathcal{P}_n^*$ $(n = 0,1,2,\dots)$, $E^p(G^-, \omega)$ sınıfında f'e en iyi yaklaşan $1/z$'ye göre polinomlar olsun.Yani

$$E_n(f)_{G^-,p,\omega} = \|f - P_n^*\|_{L^p(\Gamma,\omega)}$$

olsun. Bu durumda $\widetilde{T_p}(P_n^*) \in E^p(G^-, \omega)$ olduğu açıktır. 3.1.1 teoreminde belirtilen T_p operatörünün sınırlılığı kullanılarak,

$$E_n(f)_{G^-,p,\omega} \leq \left\|f - \widetilde{T_p}(P_n^*)\right\|_{L^p(\Gamma,\omega)}$$

$$= \left\|\widetilde{T_p}(f_1^+) - \widetilde{T_p}(P_n^*)\right\|_{L^p(\Gamma,\omega)}$$

$$\leq \left\|\widetilde{T_p}\right\| \left\|f_1^+ - P_n^*\right\|_{L^p(\mathbb{T},\omega_1)}$$

$$= \left\|\widetilde{T_p}\right\| E_n(f_1^+)_{p,\omega_1}$$

elde edilir. Sırasıyla, bu son eşitsizlik, $f_1^+ \in E^p(\mathbb{U}, \omega_1)$ için 3.1.5 önermesi ve 2.4.3 tanımı kullanılarak

$$E_n(f)_{G^-,p,\omega} \leq c E_n(f_1^+)_{p,\omega_1} \leq c\, \Omega_r\left(f_1^+, \frac{1}{n}\right)_{p,\omega_1} = c\, \Omega_r\left(f, \frac{1}{n}\right)_{G^-,p,\omega}$$

elde edilir ki istenendir.■

3.2.4 Teorem $\Gamma \in S$ ve $\omega \in A_p(\Gamma)$, $\omega_1 \in A_p(\mathbb{T})$, $1 < p < \infty$ olsun.

$f \in E^p(G^-, \omega)$ ve $r \in \mathbb{N}$ için,

$$\Omega_r\left(f, \frac{1}{n}\right)_{G^-,p,\omega} \leq \frac{c}{n^r} \sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1)^{r-1} E_\nu(f)_{G^-,p,\omega}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

değerlendirmesi n'den bağımsız bir $c > 0$ sabiti ile sağlanır.

İspat $f \in E^p(G^-, \omega)$, $1 < p < \infty$ ve $f_1(w) := f[\psi_1(w)] \left(\psi_1'(w)\right)^{\frac{1}{p}} w^{2/p}$, $w \in \mathbb{T}$ olsun. 3.1.2 teoreminden yararlanılarak $\widetilde{T_p}^{-1}(f) = f_1^+ \in E^p(\mathbb{U}, \omega_1)$ yazılabilir. $P_n^* \in \mathcal{P}_n^*(n = 0,1,2,\dots)$, $E^p(G^-, \omega)$ sınıfında f'e en iyi yaklaşan $1/z$'ye göre polinomlar olsun.

Yani

$$E_n(f)_{G^-,p,\omega} = \|f - P_n{}^*\|_{L^p(\Gamma,\omega)}$$

olsun. Bu durumda $\widetilde{T_p}^{-1}(P_n{}^*) \in \mathcal{P}_n(\mathbb{U})$ olduğu açıktır. 3.1.1 teoreminden elde edilen $\widetilde{T_p}^{-1}$ operatörünün sınırlılığı kullanılarak,

$$E_n(f_1{}^+)_{p,\omega_1} \leq \left\| f_1{}^+ - \widetilde{T_p}^{-1}(P_n{}^*) \right\|_{L^p(\mathbb{T},\omega_1)}$$

$$= \left\| \widetilde{T_p}^{-1}(f) - \widetilde{T_p}^{-1}(P_n{}^*) \right\|_{L^p(\mathbb{T},\omega_1)}$$

$$\leq \left\| \widetilde{T_p}^{-1} \right\| \|f - P_n{}^*\|_{L^p(\Gamma,\omega)}$$

$$= \left\| \widetilde{T_p}^{-1} \right\| E_n(f)_{G^-,p,\omega}$$

elde edilir. Sırasıyla 2.4.3 tanımı, $f_1{}^+ \in E^p(\mathbb{U},\omega_1\,)$ için 3.1.6 önermesi ve bu son eşitsizlik kullanılarak,

$$\Omega_r\left(f,\frac{1}{n}\right)_{G^-,p,\omega} = \Omega_r\left(f_1{}^+,\frac{1}{n}\right)_{p,\omega_1}$$

$$\leq \frac{c}{n^r}\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{r-1}E_\nu(f_1{}^+)_{p,\omega_1}$$

$$\leq \frac{c}{n^r}\left\| \widetilde{T_p}^{-1} \right\| \sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{r-1}E_\nu(f)_{G^-,p,\omega}$$

$$= \frac{c}{n^r}\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{r-1}E_\nu(f)_{G^-,p,\omega}$$

elde edilir ki istenendir. ■

3.2.5 Sonuç $f \in E^p(G,\omega)$, $1 < p < \infty$ olsun. $\Gamma \in S$ ve $\omega \in A_p(\Gamma)$, $\omega_0 \in A_p(\mathbb{T})$ olsun. Eğer $E_n(f)_{G,p,\omega} = \mathcal{O}(n^{-\alpha}), \alpha > 0$ ise o zaman her $f \in E^p(G,\omega)$ için,

$$\Omega_r(f,\delta)_{G,p,\omega} = \begin{cases} \mathcal{O}(\delta^\alpha), & r > \alpha \\ \mathcal{O}\left(\delta^\alpha \log\frac{1}{\delta}\right), & r = \alpha \\ \mathcal{O}(\delta^r), & r < \alpha \end{cases}$$

olur.

3.2.6 Tanım $\alpha > 0$ ve $r := [\![\alpha]\!] + 1$ için

$$Lip_\alpha(G,p,\omega) := \left\{f \in E^p(G,\omega): \Omega_r(f,\delta)_{G,p,\omega} = \mathcal{O}(\delta^\alpha), \delta > 0\right\}$$

olarak tanımlanan kümeye genelleştirilmiş $Lip_\alpha(G,p,\omega)$ Lipschitz sınıfı denir.

3.2.7 Sonuç $f \in E^p(G,\omega)$, $1 < p < \infty$ olsun. $\Gamma \in S$ ve $\omega \in A_p(\Gamma)$, $\omega_0 \in A_p(\mathbb{T})$ olsun. Eğer bir $\alpha > 0$ için $E_n(f)_{G,p,\omega} = \mathcal{O}(n^{-\alpha})$ ise $f \in Lip_\alpha(G,p,\omega)$ olur.

3.2.8 Sonuç $\Gamma \in S$, $\omega \in A_p(\Gamma)$, $\omega_0 \in A_p(\mathbb{T})$ ve $1 < p < \infty$ olsun. Eğer $\alpha > 0$ için, $f \in Lip_\alpha(G,p,\omega)$ ise o zaman $E_n(f)_{G,p,\omega} = \mathcal{O}(n^{-\alpha})$ olur.

3.2.7 ve 3.2.8 sonuçlarını birleştirerek aşağıdaki teorem elde edilir.

3.2.9 Teorem $\Gamma \in S$ ve $\omega \in A_p(\Gamma)$, $\omega_0 \in A_p(\mathbb{T})$, $1 < p < \infty$ olsun. O zaman $\alpha > 0$ için, aşağıdaki ifadeler denktir:

i) $f \in Lip_\alpha(G,p,\omega)$

ii) $E_n(f)_{G,p,\omega} = \mathcal{O}(n^{-\alpha}),\ n \in \mathbb{N}$.

3.2.10 Sonuç $f \in E^p(G^-,\omega), 1 < p < \infty$ olsun. $\Gamma \in S$ ve $\omega \in A_p(\Gamma)$, $\omega_1 \in A_p(\mathbb{T})$ olsun. Eğer $E_n(f)_{G^-,p,\omega} = \mathcal{O}(n^{-\alpha}), \alpha > 0$ ise o zaman her $f \in E^p(G^-,\omega)$ için,

$$\Omega_r(f,\delta)_{G^-,p,\omega} = \begin{cases} \mathcal{O}(\delta^\alpha), & r > \alpha \\ \mathcal{O}\left(\delta^\alpha \log\frac{1}{\delta}\right), & r = \alpha \\ \mathcal{O}(\delta^r), & r < \alpha \end{cases}$$

olur.

3.2.11 Tanım $\alpha > 0$ ve $r := [\![\alpha]\!] + 1$ için

$$Lip_\alpha(G^-,p,\omega) := \left\{f \in E^p(G^-,\omega): \Omega_r(f,\delta)_{G^-,p,\omega} = \mathcal{O}(\delta^\alpha), \delta > 0\right\}$$

olarak tanımlanan kümeye genelleştirilmiş $Lip_\alpha(G^-,p,\omega)$ Lipschitz sınıfı denir.

3.2.12 Sonuç $f \in E^p(G^-,\omega), 1 < p < \infty$ olsun. $\Gamma \in S$ ve $\omega \in A_p(\Gamma)$, $\omega_1 \in A_p(\mathbb{T})$ olsun. Eğer bir $\alpha > 0$ için $E_n(f)_{G^-,p,\omega} = \mathcal{O}(n^{-\alpha})$ ise $f \in Lip_\alpha(G^-,p,\omega)$ olur.

3.2.13 Sonuç $\Gamma \in S$, $\omega \in A_p(\Gamma)$, $\omega_1 \in A_p(\mathbb{T})$ ve $1 < p < \infty$ olsun. Eğer $\alpha > 0$ için, $f \in Lip_\alpha(G^-,p,\omega)$ ise o zaman $E_n(f)_{G^-,p,\omega} = \mathcal{O}(n^{-\alpha})$ olur.

3.2.12 ve 3.2.13 sonuçlarını birleştirerek aşağıdaki teorem elde edilir.

3.2.14 Teorem $\Gamma \in S$ ve $\omega \in A_p(\Gamma)$, $\omega_1 \in A_p(\mathbb{T}), 1 < p < \infty$ olsun. O zaman $\alpha > 0$ için, aşağıdaki ifadeler denktir:

i) $f \in Lip_\alpha(G^-,p,\omega)$

ii) $E_n(f)_{G^-,p,\omega} = \mathcal{O}(n^{-\alpha}),\ n \in \mathbb{N}$.

Şimdi 2.4.1 tanımında $r \in \mathbb{N}$ için tanımladığımız ortalama düzgünlük modülünü $r \in \mathbb{R}^+$ kesirli durumuna genelleştirelim:

$w \in \mathbb{T}, t \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}^+ := (0, \infty)$ olsun ve $[C_k^r]$, ifadesi $k > 1$ için

$$[C_k^r] := \frac{r(r-1)\ldots(r-k+1)}{k!},$$

$k = 1$ için $[C_k^r] := r$ ve $k = 0$ için $[C_k^r] := 1$ olduğunda

$$\Delta_t^r f(w) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [C_k^r] f\left(we^{i(r-k)t}\right), \quad f \in L^1(\mathbb{T}) \tag{17}$$

olsun. [55] den

$$|[C_k^r]| := \left|\frac{r(r-1)\ldots(r-k+1)}{k!}\right| \leq \frac{c(r)}{k^{r+1}}, \quad k \in \mathbb{Z}^+$$

olduğundan

$$C(r) := \sum_{k=0}^{\infty} |[C_k^r]| < \infty$$

eşitsizliği geçerli olur. Böylece $\Delta_t^r f(w)$ ifadesi hemen hemen her yerde tanımlıdır.

Şimdi $f \in L^p(\mathbb{T}, \omega)$ ve $\omega \in A_p(\mathbb{T}), 1 < p < \infty$ ve $w \in \mathbb{T}$ için

$$\sigma_\delta^r f(w) := \frac{1}{\delta} \int_0^\delta |\Delta_t^r f(w)| dt$$

tanımlayalım. (17) ifadesindeki seri hemen her yerde mutlak yakınsak olduğundan hemen her yerde $\sigma_\delta^r f(w) < \infty$ olacaktır; $L^p(\mathbb{T}, \omega)$ uzayında $\omega \in A_p(\mathbb{T})$ olduğunu dikkate alıp Hardy-Littlewood Maximal fonksiyonunun sınırlılığından

$$\|\sigma_\delta^r f(w)\|_{L^p(\mathbb{T},\omega)} \leq c(p, r) \|f\|_{L^p(\mathbb{T},\omega)} < \infty$$

elde edilir.

Böylece eğer $r \in \mathbb{R}^+$ ve $\omega \in A_p(\mathbb{T}), 1 < p < \infty$ ise $f \in L^p(\mathbb{T}, \omega)$ fonksiyonu için *r.* ortalama düzgünlük modülünü

$$\Omega_r(f, h)_{p,\omega} := \sup_{|\delta| \leq h} \|\sigma_\delta^r f(w)\|_{L^p(\mathbb{T},\omega)}$$

olarak tanımlarız.

3.2.15 Tanım $f \in E^p(G,\omega)$, $1 < p < \infty$ ve $\omega \in A_p(\Gamma), r \in \mathbb{R}^+$ olsun.

$$\Omega_r(f,\delta)_{G,p,\omega} := \Omega_r\left(f_0{}^+,\delta\right)_{p,\omega_0} \ , \ \ \delta > 0$$

ifadesine $f \in E^p(G,\omega)$ fonksiyonunun r. düzgünlük modülü denir.

3.2.16 Tanım $f \in E^p(G^-,\omega)$, $1 < p < \infty$ ve $\omega \in A_p(\Gamma), r \in \mathbb{R}^+$ olsun.

$$\Omega_r(f,\delta)_{G^-,p,\omega} := \Omega_r\left(f_1{}^+,\delta\right)_{p,\omega_1} \ , \ \ \delta > 0$$

ifadesine $f \in E^p(G^-,\omega)$ fonksiyonunun r. düzgünlük modülü denir.

3.2.17 Teorem [33] $\omega \in A_p(T)$, $1 < p < \infty$ olsun. Her $f \in L^p(T,\omega)$ ve $r \in \mathbb{R}^+$ için,

$$\Omega_r\left(f,\frac{\pi}{n+1}\right)_{p,\omega} \leq \frac{c}{(n+1)^r}\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{r-1}E_\nu(f)_{p,\omega} \ , \qquad n \in \mathbb{N}$$

değerlendirmesi n' den bağımsız bir $c > 0$ sabiti ile sağlanır.

3.2.17 teoremi R. Akgün tarafından verilmiş olup $L^p(T,\omega)$ uzayında ters teoremin kesirli duruma bir genelleşmesidir. $E^p(G,\omega)$ sınıfında elde ettiğimiz ters teoremler, daha önce kullandığımız yöntemle bu teorem yardımıyla kesirli duruma genelleştirilebilirler.

3.2.18 Teorem $\Gamma \in S$ ve $\omega \in A_p(\Gamma)$, $\omega_0 \in A_p(\mathbb{T})$, $1 < p < \infty$ olsun. $f \in E^p(G,\omega)$ ve $r \in \mathbb{R}^+$ için,

$$\Omega_r\left(f,\frac{\pi}{n+1}\right)_{G,p,\omega} \leq \frac{c}{(n+1)^r}\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{r-1}E_\nu(f)_{G,p,\omega} \ , \qquad n \in \mathbb{N}$$

değerlendirmesi n' den bağımsız bir $c > 0$ sabiti ile sağlanır.

3.2.19 Teorem $\Gamma \in S$ ve $\omega \in A_p(\Gamma)$, $\omega_1 \in A_p(\mathbb{T})$, $1 < p < \infty$ olsun.

$f \in E^p(G^-, \omega)$ ve $r \in \mathbb{R}^+$ için,

$$\Omega_r\left(f, \frac{\pi}{n+1}\right)_{G^-,p,\omega} \leq \frac{c}{(n+1)^r} \sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1)^{r-1} E_\nu(f)_{G^-,p,\omega}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

değerlendirmesi n’ den bağımsız bir $c > 0$ sabiti ile sağlanır.

4. AĞIRLIKLI SMİRNOV SINIFLARINDA TERS TEOREMLERİN İYİLEŞTİRMELERİ

4.1 Yardımcı Sonuçlar

3.2.17 teoremi ile ifade edilen kesirli durumdaki ters teorem Daniyal M. İsrafilov ve Yunus Emre Yıldırır tarafından iyileştirilerek aşağıdaki teorem elde edilmiştir :

4.1.1 Teorem [34] $f \in L^p(T,\omega)$ **,** $1 < p < \infty$ ve $\omega \in A_p(T)$ olsun**.** Verilen bir $r \in \mathbb{R}^+$ için

$$\Omega_r\left(f, \frac{\pi}{n+1}\right)_{p,\omega} \leq \frac{c}{(n+1)^r}\left\{\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{\beta r-1}E_\nu^\beta(f)_{p,\omega}\right\}^{1/\beta}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

değerlendirmesi $\beta = min\{p, 2\}$ olduğunda n'den bağımsız bir $c > 0$ sabiti ile sağlanır.

4.1.2 Önerme Eğer $f \in E^p(\mathbb{U},\omega)$, $1 < p < \infty$ ve $\omega \in A_p(\mathbb{T})$ olsun.

$\forall\, r \in \mathbb{R}^+$ için

$$\Omega_r\left(f, \frac{\pi}{n+1}\right)_{p,\omega} \leq \frac{c}{(n+1)^r}\left\{\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{\beta r-1}E_\nu^\beta(f)_{p,\omega}\right\}^{1/\beta}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

değerlendirmesi $\beta = min\{p, 2\}$ olduğunda n' den bağımsız bir $c > 0$ sabiti ile sağlanır.

İspat $f \in E^p(\mathbb{U},\omega)$ olsun. Bu durumda $f \in E^1(\mathbb{U})$ olur. Böylece f , $f(e^{i\theta})$; $\theta \in [0,2\pi)$ biçiminde sınır değerlerine sahiptir. Buradan

$$\Omega_r\left(f, \frac{\pi}{n+1}\right)_{p,\omega} = \sup_{|\delta| \leq \frac{\pi}{n+1}} \|\sigma_\delta^r f(w)\|_{L^p(\mathbb{T},\omega)}$$

$$= \sup_{|\delta|\leq\frac{\pi}{n+1}} \left\|\sigma_\delta^r f\left(e^{i\theta}\right)\right\|_{L^p(T,\omega)}$$

$$= \Omega_r\left(f\left(e^{i\theta}\right), \frac{\pi}{n+1}\right)_{p,\omega}$$

elde eldilir.

Böylece 4.1.1. teoremi uygulanarak istenen

$$\Omega_r\left(f, \frac{\pi}{n+1}\right)_{p,\omega} \leq \frac{c}{(n+1)^r}\left\{\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{\beta r-1}E_\nu^\beta(f)_{p,\omega}\right\}^{1/\beta}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

ifadesine ulaşılır.■

4.2 Ana Sonuçlar

4.2.3 Teorem $\Gamma \in S$ ve $\omega \in A_p(\Gamma)$, $\omega_0 \in A_p(\mathbb{T}), 1 < p < \infty$ olsun.

$f \in E^p(G,\omega)$ ve $r \in \mathbb{R}^+$ için,

$$\Omega_r\left(f, \frac{\pi}{n+1}\right)_{G,p,\omega} \leq \frac{c}{(n+1)^r}\left\{\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{\beta r-1}E_\nu^\beta(f)_{G,p,\omega}\right\}^{1/\beta}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

değerlendirmesi $\beta = min\{p, 2\}$ olduğunda n'den bağımsız bir $c > 0$ sabiti ile sağlanır.

İspat $f \in E^p(G,\omega)$, $1 < p < \infty$ ve $f_0(w) := f[\psi(w)]\left(\psi'(w)\right)^{\frac{1}{p}}$, $w \in \mathbb{T}$ olsun. 3.1.2 teoreminden yararlanılarak ${T_p}^{-1}(f) = {f_0}^+ \in E^p(\mathbb{U}, \omega_0)$ yazılabilir. $P_n \in \mathcal{P}_n$ $(n = 0,1,2,\dots)$, $E^p(G,\omega)$ sınıfında f'e en iyi yaklaşan polinomlar olsun. Yani

$$E_n(f)_{G,p,\omega} = \|f - P_n\|_{L^p(\Gamma,\omega)}$$

olsun. Bu durumda ${T_p}^{-1}(P_n) \in \mathcal{P}_n(\mathbb{U})$ olduğu açıktır. 3.1.1 teoreminde belirtilen ${T_p}^{-1}$ operatörünün sınırlılığı kullanılarak,

$$E_n\left({f_0}^+\right)_{p,\omega_0} \leq \left\|{f_0}^+ - {T_p}^{-1}(P_n)\right\|_{L^p(\mathbb{T},\omega_0)}$$

$$= \left\|{T_p}^{-1}(f) - {T_p}^{-1}(P_n)\right\|_{L^p(\mathbb{T},\omega_0)}$$

$$\leq \left\|{T_p}^{-1}\right\|\|f - P_n\|_{L^p(\Gamma,\omega)}$$

$$= \|T_p{}^{-1}\| E_n(f)_{G,p,\omega}$$

elde edilir.

Sırasıyla 3.2.15 tanımı, $f_0{}^+ \in E^p(\mathbb{U}, \omega_0)$ için 4.1.2 önermesi ve bu son eşitsizlik kullanılarak,

$$\Omega_r\left(f, \frac{\pi}{n+1}\right)_{G,p,\omega} = \Omega_r\left(f_0{}^+, \frac{\pi}{n+1}\right)_{p,\omega_0}$$

$$\leq \frac{c}{n^r}\left\{\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{\beta r-1}E_\nu^\beta\left(f_0{}^+\right)_{p,\omega_0}\right\}^{1/\beta}$$

$$\leq \frac{c}{n^r}\|T_p{}^{-1}\|\left\{\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{\beta r-1}E_\nu^\beta(f)_{G,p,\omega}\right\}^{1/\beta}$$

$$= \frac{c}{n^r}\left\{\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{\beta r-1}E_\nu^\beta(f)_{G,p,\omega}\right\}^{1/\beta}$$

elde edilir ki istenendir. ■

4.2.4 Teorem $\Gamma \in S$ ve $\omega \in A_p(\Gamma)$, $\omega_1 \in A_p(\mathbb{T}), 1 < p < \infty$ olsun.

$f \in E^p(G^-, \omega)$ ve $r \in \mathbb{R}^+$ için

$$\Omega_r\left(f, \frac{\pi}{n+1}\right)_{G^-,p,\omega} \leq \frac{c}{(n+1)^r}\left\{\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{\beta r-1}E_\nu^\beta(f)_{G^-,p,\omega}\right\}^{1/\beta}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

değerlendirmesi $\beta = min\{p, 2\}$ olduğunda n'den bağımsız bir $c > 0$ sabiti ile sağlanır.

İspat $f \in E^p(G^-, \omega)$, $1 < p < \infty$ ve $f_1(w) := f[\psi_1(w)]\left(\psi_1{}'(w)\right)^{\frac{1}{p}} w^{2/p}$, $w \in \mathbb{T}$ olsun. 3.1.2 teoreminden yararlanılarak $\widetilde{T_p}^{-1}(f) = f_1{}^+ \in E^p(\mathbb{U}, \omega_1)$ yazılabilir. $P_n{}^* \in \mathcal{P}_n{}^*$ $(n = 0,1,2,\dots)$, $E^p(G^-, \omega)$ sınıfında f'e en iyi yaklaşan $1/z$'ye göre polinomlar olsun. Yani

$$E_n(f)_{G^-,p,\omega} = \|f - P_n{}^*\|_{L^p(\Gamma,\omega)}$$

olsun. Bu durumda $\widetilde{T_p}^{-1}(P_n{}^*) \in \mathcal{P}_n(\mathbb{U})$ olduğu açıktır.

3.1.1 teoreminde belirtilen $\widetilde{T_p}^{-1}$ operatörünün sınırlılığı kullanılarak,

$$E_n\left({f_1}^+\right)_{p,\omega_1} \leq \left\| {f_1}^+ - \widetilde{T_p}^{-1}({P_n}^*)\right\|_{L^p(\mathbb{T},\omega_1)}$$

$$= \left\| \widetilde{T_p}^{-1}(f) - \widetilde{T_p}^{-1}({P_n}^*)\right\|_{L^p(\mathbb{T},\omega_1)}$$

$$\leq \left\| \widetilde{T_p}^{-1} \right\| \|f - {P_n}^*\|_{L^p(\Gamma,\omega)}$$

$$= \left\| \widetilde{T_p}^{-1} \right\| E_n(f)_{G^-,p,\omega}$$

elde edilir. Sırasıyla 3.2.16 tanımı, ${f_1}^+ \in E^p(\mathbb{U},\omega_1\ )$ için 4.1.2 önermesi ve bu son eşitsizlik kullanılarak,

$$\Omega_r\left(f,\frac{\pi}{n+1}\right)_{G^-,p,\omega} = \Omega_r\left({f_1}^+,\frac{\pi}{n+1}\right)_{p,\omega_1}$$

$$\leq \frac{c}{n^r}\left\{\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{\beta r-1}E_\nu^\beta\left({f_1}^+\right)_{p,\omega_1}\right\}^{1/\beta}$$

$$\leq \frac{c}{n^r}\left\|\widetilde{T_p}^{-1}\right\|\left\{\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{\beta r-1}E_\nu^\beta(f)_{G^-,p,\omega}\right\}^{1/\beta}$$

$$= \frac{c}{n^r}\left\{\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{\beta r-1}E_\nu^\beta(f)_{G^-,p,\omega}\right\}^{1/\beta}$$

elde edilir ki istenendir. ■

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında yaklaşım teorisinin düz ve ters teoremleri incelenmiştir. Elde edilen yeni bulgular üçüncü ve dördüncü bölümlerde yer almaktadır.

Üçüncü bölümde ağırlıklı Smirnov sınıflarında yaklaşım teorisinin düz ve ters teoremleri ispatlanmıştır. Daha sonra ters teoremlerin kesirli duruma genelleştirildiği sonuçlara yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise üçüncü bölümde ispatladığımız ağırlıklı Smirnov sınıflarında yaklaşım teorisinin ters teoremlerinin kesirli durumdaki iyileştirmeleri ispatlanmıştır

6. KAYNAKLAR

[1] Goluzin, G. M., *Geometric Theory of Functions of a Complex Variable,* Translation of Mathematical Monographs, 26, AMS, Providence, (1969).

[2] Markushevich, A. I., *Theory of Functions of a Complex Variable* III, New York : Chelsea Publishing Company, (1977).

[3] Gonzalez, M. O., *Classical Complex Analysis*, Marcel Dekker, Inc., (1992).

[4] Başkan, T., *Kompleks Fonksiyonlar Teorisi*, Bursa: Vipaş A.Ş., (2000).

[5] Katznelson, Y., *An Introduction to Harmonic Analysis*, Cambridge University Press, (2003).

[6] Rynne, P. B. And Youngson, M. A., *Linear Functional Analysis*, Second edition, Springer, (2008).

[7] Koosis, P., *Introduction to H^p Spaces*, Cambridge University Press, (1998).

[8] Duren, P. L., *Theory of H_p Spaces*, New York : Academic Press, (1970).

[9] Wade, W. R., *An Introduction to Analysis*, Third edition, New Jersey : Pearson Prentice Hall, (2004).

[10] Pommerenke, C., *Boundary Behaviour of Conformal Map*, Berlin : Springer-Verlag, (1992).

[11] Ky, N. X., ‘‘Moduli of Mean smoothness and Approximation with A_p - weights’’*, Annales Univ. Sci. Budapest*, 40, 37-48, (1997).

[12] Israfilov D. M., ‘‘Approximate properties of the generalized Faber series in an integral metric’’*, Izv. Akad. Nauk Az. SSR, Ser. Fiz. Tekh. Math.*, 2, 10-14, (1987).

[13] Çavuş, A. and Israfilov, D. M., ‘‘Approximation by Faber-Laurent rational functions in the mean of functions of the class $L^p(\Gamma)$ with $1 < p < \infty$. ’’, *Approximation theory App*., 11 (1), 105-118, (1987).

[14] Israfilov, D. M., ‘‘Approximation by p-Faber-Laurent rational functions in the weighted Lebesgue spaces’’, *Czechoslovak Math. J.*, 54, 751-765, (2004).

[15] Israfilov, D. M., ‘‘Approximation by p-Faber polynomials in the weighted Smirnov class $E^p(G,\omega)$ and the Bieberbach polynomials’’*, Cosntr. Approx.*, 17, 335-351, (2001).

[16] Israfilov, D. M. and Guven, A., ‘‘Approximation in Weighted Smirnov Classes’’, *East J. Approx.*, 11, 91-102, (2005).

[17] Guven, A. and Israfilov, D. M., ‘‘Improved Inverse theorems in Weighted Lebesgue and Smirnov Spaces’’, *Bull. Belg. Math. Soc.*, Simon Stevin 14, 681-692, (2007).

[18] Stechkin, S. B., ‘‘On the order of approximation of continious function’’, *Izv.*, 15, 219-242, (1951).

[19] Timan, M. F., ‘‘On Jackson’s Theorem in L_p Spaces’’, *Ukrainian Math*. J. 18, 134-137, (1966).

[20] Timan, A. F. and Timan, M. F., ‘‘The generalized modulus of continuity and best mean approximation’’, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR,* 71 (1), 17-20, (1950).

[21] Timan, M. F., ‘‘Converse Theorems of Constructive Theory of Function’’, *Mat. Sborn.*, 46, 125-132, (1958).

[22] Wlash, J. and Russel H. C., ‘‘Integrated continuity conditions and degree of approximation by polynomials or by bounded analytic functions’’, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 92, 355-370, (1959).

[23] Hunt, R., Muckenhoupt B., Wheeden R., ‘‘Weighted Norm Inequalities for the Conjugate function and Hilbert Transform’’, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 176, 227-251, (1973).

[24] Kurtz D. S., ‘‘Littlewood-Paley and Multiplier Theorems on Wighted L_p Spaces’’, *Trans Amer. Math. Soc*., 259, 235-254, (1980).

[25] Pommerenke, C., *Univalent Functions*, Vandenhoeck & Ruprecht, (1975).

[26] Muckenhoupt, B., ‘‘Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function’’, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 165, 207-226, (1972).

[27] Suetin, P. K., *Series of Faber Polynomials*, Gordon and Breach Science Publishers (1998).

[28] Dyn’kin, E. M. and Osilenker, B. P., ‘‘Weighted estimates for singular integrals and their applications’’, Mathematical Analysis, Moscow : Akad Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. İ Tekhn. Inform.’’, 1, 42-129, (1983).

[29] Dyn’kin, E. M., ‘‘The rate of approximation in the complex domain’’, In book : *Complex Analysis and spectral theory* (Leningrad, 1979/1980), Berlin : Springer-Verlag, 90-142, (1981).

[30] Agarwal, R. P., Kanishka, P., Sandra P., *An ıntroduction to complex analysis*, Springer, (2010).

[31] David, G., ‘‘Operateurs integraux singulers sur certaines courbes du plan complexe’’*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, 17 (4), 157-189, (1984).

[32] Haciyeva, E. A., ‘‘Investigation the properties of functions with quasimonotone Fourier coefficient in generalized Nikolsky-Besov spaces (Russian)’’, Authors Summary of Candidates Dissertation, Tblisi, (1986).

[33] Akgün, R., ‘‘Approximation of functions of weighted Lebesgue and Smirnov spaces’’, *Mathematica,* 54 (77), Special, 25-36, (2012).

[34] Israfilov, D. M and Yıldırır, Y. E., ‘‘Simultaneous and converse approximation theorems in weighted Lebesgue spaces’’ *Math. Ineq. App.*, 4, (2011).

[35] Alper, S. Y., ‘‘Approximation in the mean of analytic functions of class E^p (Russian)’’, *Investigations on the modern problems of the function theory of a complex variable,* Gos. Izdat. Fiz.-Mat. Lit. Moscow, 271-286, (1960).

[36] Kokilashvili V. M., ‘‘A direct theorem on mean approximation of analytic functions by polynomials’’, *Soviet Math. Dokl.,* 10, 411-414, (1969).

[37] Andersson, J. E., ‘‘On degree of polynomial approximation in $E^p(D)$’’, *J. Approx. Theory,* 19 (1), 61-68, (1977).

[38] Ibragimov, I. I. and Mamedhanov, D. I., ‘‘A constructive characterization of a certain class of functions’’ *Dk. Akad. Nauk SSSR,* 223, 35-37, (1975).

[39] Mamedhanov, D. I., ‘‘Direct and inverse theorems of approximation in the mean on the curves and arcs’’, *Abstract Book of Union Symposium on Theory of Approximation in Complex Plane,* UFA, 57-59, (1976).

[40] Hunt, R. A. and Young, W. S., ‘‘A weighted norm inequalities for Fourier series’’, *Bull. Amer. Math. Soc.,* 80, 274-277.

[41] Jackson, D., *The Theory of Approximation*, Newyork: Amer. Math. Soc., Coll. Publ., (1930).

[42] Akhiezer, N. I., *Theory of Approximation,* Newyork: Frederick Ungar Publishing, (1956).

[43] Israfilov, D. M. and Akgün, R., ‘‘Approximation in weighted Smirnov-Orlicz classes’’, *Journal of Math. of Kyoto Univ.*, 46 (4), 755-770, (2006).

[44] Israfilov, D. M. and Akgün, R., ‘‘Approximation by polynomials and rational functions in weighted rearrangement invariant spaces’’, *J. Math. Anal. Appl.,* 346 (2), 489-500, (2008).

[45] Israfilov, D. M., Oktay, B. and Akgün, R., ‘‘Approximation in Smirnov-Orlicz Classes’’, *Glasnik Matematicki,* 40 (60), 87-102, (2005).

[46] Israfilov, D. M. and Güven, A., ‘‘Approximation by trigonometric polynomials in Weighted Rearrangement Invariant Spaces’’, *Glasnik Matematicki,* 44 (64), (2009).

[47] Jafarov, S. Z., ‘‘The inverse theorem of approximation of the function ın Smirnov-Orlicz classes’’, *Math. Ineq. and Appl.,* 12 (4), 835-844, (2012).

[48] Jafarov, S. Z., ‘‘On approximation in weighted Smirnov-Orlicz Classes’’, *Complex Variables and Elliptic Equations*, 57 (5), 567-557, (2012).

[49] Andarsko, M. I., ‘‘On the approximation in the mean of analytic functions in regions with smooth boundaries’’, *Problems in Mathematical Physics and Function Theory, Izdat. Akad. Nauk. Ukrain. RSK,* 1, 3, Kiev, (1963).

[50] Galan, D. M., ‘‘Approximation in the mean of regular functions of class E^1 in regions with smooth boundaries’’, *Dopovidi Akad. Nauk. Ukrain. RSR. Ser A,* 673, (1967).

[51] Koklashvili V. M., ‘‘On analytic functions of Smirnov-Orlicz Classes’’, *Studia Math.,* 31, 43, (1968).

[52] Karlovich, A. Yu., ‘‘Algebras of Singular Integral Operators with Piecewise Continious Coefficient on Reflexive Orlicz Spaces’’, *Math. Nachr.,* 179, 187-222, (1996).

[53] Karlovich, A. Yu., ‘‘Singular Integral Operators with PC Coefficient in Reflexive Rearrangement Invarint Spaces’’, *Integ. Equation and Operator Theory,* 32, 436-481, (1998).

[54] Karlovich, A. Y., ‘‘Algebras of Singular Integral Operators with PC Coefficient in Rearrangement Invariant Spaces with Muckenhoupt Weights’’, *J. Operator Theory,* 47, 303-323, (2002).

[55] Samko, S. G., Kilbas, A. A., Marichev O. I., *Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Application.,* Gordon and Breach Science Publishers, (1993).