T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK EĞİTİMİ ANABİLİM DALI

GENİŞLETİLMİŞ HECKE GRUPLARI

DOKTORA TEZİ

112340

Recep ŞAHİN

Balıkesir, Eylül-2001

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK EĞİTİMİ ANABİLİM DALI

GENİŞLETİLMİŞ HECKE GRUPLARI

DOKTORA TEZİ

Recep ŞAHİN

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Osman BİZİM

Sınav Tarihi : 21.09.2001

Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Seyit Ahmet KILIÇ (BAÜ)
Prof. Dr. Musa ERDEM (BAÜ)
Doç. Dr. İ. Naci CANGÜL (UÜ)
Yrd. Doç. Dr. Osman BİZİM (Danışman-UÜ)
Yrd. Doç. Dr. Hülya GÜR (BAÜ)

Balıkesir, Eylül-2001

ÖZET

GENİŞLETİLMİŞ HECKE GRUPLARI

Recep ŞAHİN
Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,
Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Anabilim Dalı

(Doktora Tezi / Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Osman BİZİM)

Balıkesir, 2001

Bu çalışmanın amacı, genişletilmiş Hecke grupları ve bu grupların bazı alt gruplarının grup yapılarını vermektir.

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümü olan birinci bölümde, çalışma tanıtılmıştır.

İkinci bölümde, çalışma süresince gerekli olan temel tanımlar, kavramlar ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Hecke grupları tanıtılmış ve genel özellikleri verilmiştir. Hecke grupları ve temel bölgesi tanımlanmıştır. Ayrıca Hecke gruplarının çift, kamütatör, kuvvet, denklik ve temel denklik alt grupları tanıtılmış ve bunların grup yapıları hakkında bilgi verilmiştir.

Dördüncü bölüm tezin ana kısmıdır. Önce Hecke gruplarının $R(z) = 1/\bar{z}$ yansıması ile genişletilmesi elde edilmiştir. Sonra genişletilmiş Hecke grupları tanımlanmış, genişletilmiş Hecke gruplarının temel bölgesi ve bazı özellikleri verilmiştir. Ayrıca genişletilmiş Hecke gruplarının çift, kamütatör, kuvvet, denklik ve temel denklik alt grupları tanıtılarak, bunların grup yapıları hakkında bilgi verilmiştir.

Beşinci bölümde, tezde elde edilen sonuçlar verilmiştir.

ANAHTAR SÖZCÜKLER : Hecke grupları, çift alt gruplar, kamütatör alt grupları, kuvvet alt grupları, denklik alt grupları, genişletilmiş Hecke grupları.

ABSTRACT

THE EXTENDED HECKE GROUPS

Recep ŞAHİN
University of Balıkesir, Institute of Science,
Department of Mathematics Education

(Ph. D. Thesis / Supervisor : Asst. Prof. Dr. Osman BİZİM)

Balıkesir, 2001

The aim of this work is to give the extended Hecke groups and group structure of the some of its subgroups.

This work consists of five chapters. In the first chapter an introduction to the topic is made.

In the second chapter, basic definitions, notations and theorems needed later during the work are given.

In the third chapter, Hecke groups are introduced and general properties of them are given. Hecke groups and their fundamental regions are defined. Also, even subgroups, commutator subgroups, power subgroups, congruence subgroups and principal congruence subgroups are introduced and information about the group structure of these are given.

The fourth chapter is the main part of the work. Firstly, the extension of the Hecke groups by the reflection $R(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ are obtained. Later, the extended Hecke groups are defined and their fundamental region and some of their properties are given. Also even subgroups, commutator subgroups, power subgroups, congruence subgroups and principal congruence subgroups are introduced and information about the group structure of these are given.

In the fifth chapter is given obtained results.

KEY WORDS : Hecke groups, even subgroups, commutator subgroups, power subgroups, congruence subgroups, extended Hecke groups,

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET, ANAHTAR SÖZCÜKLER ii

ABSTRACT, KEY WORDS iii

İÇİNDEKİLER iv

SEMBOL LİSTESİ v

ŞEKİL LİSTESİ vii

ÖNSÖZ viii

1.GİRİŞ 1

2. ÖN BİLGİLER 5
2.1 Topolojik Dönüşüm grupları 5
2.2 Cisim Genişlemeleri ve Sonlu Cisimler 7
2.3 Projektif Gruplar 8
2.4 Doğrusal Dönüşümler 10
2.5 Süreksiz ve Ayrık Gruplar 14
2.6 Fuchsian Gruplar 16
2.7 Reidemeister-Schreier Metodu 20
2.8 Komütatör Alt Gruplar, Serbest Gruplar ve Serbest Çarpımlar 21

3. HECKE GRUPLARI 25
3.1 Hecke Grupları 25
3.2 $H(\lambda_q)$ Hecke Grubu İçin Bir Temel Bölge 27
3.3 $H(\lambda_q)$ Hecke Gruplarının Çift Alt Grupları 29
3.4 $H(\lambda_q)$ Hecke Gruplarının Kamütatör Alt Grupları 30
3.5 $H(\lambda_q)$ Hecke Gruplarının $H^m(\lambda_q)$ Kuvvet Alt Grupları 31
3.6 $H(\lambda_q)$ Hecke Gruplarının Temel Denklik Alt Grupları 37

4. GENİŞLETİLMİŞ HECKE GRUPLARI 41
4.1 Genişletilmiş Hecke Grupları 41
4.2 $\overline{H}(\lambda_q)$ Genişletilmiş Hecke Grubu İçin Bir Temel Bölge 42
4.3 $\overline{H}(\lambda_q)$ Genişletilmiş Hecke Gruplarının Çift Alt Grupları 44
4.4 $\overline{H}(\lambda_q)$ Genişletilmiş Hecke Gruplarının Kamütatör Alt Grupları 46
4.5 $\overline{H}(\lambda_q)$ Genişletilmiş Hecke Gruplarının $\overline{H}^m(\lambda_q)$ Kuvvet Alt Grupları 56
4.6 $\overline{H}(\lambda_q)$ Genişletilmiş Hecke Gruplarının Temel Denklik Alt Grupları 68

5. SONUÇLAR 73

KAYNAKÇA 75

SEMBOL LİSTESİ

Simge	Adı
C	Karmaşık sayılar kümesi
R	Gerçel sayılar kümesi
S^1	Birim çember
[G, X]	Topolojik dönüşüm grubu
X/G	Bölüm uzayı
S(x)	x noktasının kalımlaştırıcısı
U	Üst yarı düzlem yani $\{z\in \mathbf{C} : \mathrm{Im}\, z > 0\}$
R[x]	Gerçel katsayılı polinom halkası
$GF(p^n)$	p^n mertebeli Galois cismi
GL(2,K)	Genel lineer grup
Z(GL(2,K))	Genel lineer grubun merkezi
PGL(2,K)	Projektif genel lineer grup
SL(2,K)	Özel lineer grup
Z(SL(2,K))	Özel lineer grubun merkezi
PSL(2,K)	Projektif özel lineer grup
$\mathbf{C}_\infty$	Genişletilmiş karmaşık düzlem
$\mathrm{Aut}(\mathbf{C}_\infty)$	$\mathbf{C}_\infty$ un otomorfizmlerinin grubu
$\overline{\mathrm{Aut}}(\mathbf{C}_\infty)$	$\mathbf{C}_\infty$ un tüm otomorfizm ve anti-otomorfizmlerinin grubu
$l(\gamma)$	γ eğrisinin hiperbolik uzunluğu
$\mu(E)$	E kümesinin hiperbolik alanı
PSL(2,**R**)	$\{T \mid T(z) = \frac{az+b}{cz+d},\ a, b, c, d\in \mathbf{R}$ ve $ad-bc=1\}$
G_0	$\{U \mid U(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d},\ a, b, c, d\in \mathbf{R}$ ve $ad-bc=-1\}$
$\mathbf{R}^*$	Genişletilmiş gerçel eksen
Γ	Fuchsian grup
$L(\Gamma)$	Γ Fuchsian grubunun limit kümesi
(l,m,n)	$\langle x, y \mid x^l = y^m = (xy)^n = I\rangle$ üçgen grubunun simgesi
C_n	n mertebeli devirli grup
D_n	Dihedral grup
S_n	Simetrik grup
A_n	Alterne grup
Σ	Schreier transversali
G'	G grubunun kamütatörü
[g, h]	g ile h nin kamütatörü
F_n	n ranklı serbest grup
$A\star B$	A ile B gruplarının serbest çarpımı
$H(\lambda)$	Hecke grubu
$H(\lambda_q)$	Hecke grubu

F	$H(\lambda_3)$ modüler grubunun temel bölgesi
F_λ	$H(\lambda)$ grubunun temel bölgesi
F_{λ_q}	$H(\lambda_q)$ grubunun temel bölgesi
$H_ç(\lambda_q)$	$H(\lambda_q)$ grubunun çift alt grubu
$H_t(\lambda_q)$	$H(\lambda_q)$ grubunun tek elemanlarının kümesi
$H'(\lambda_q)$	$H(\lambda_q)$ grubunun kamütatör alt grubu
$H^m(\lambda_q)$	$H(\lambda_q)$ grubunun m.kuvvet alt grubu
$H_p(\lambda_q)$	$H(\lambda_q)$ grubunun p seviyeli temel denklik alt grubu
$\overline{H}(\lambda_q)$	Genişletilmiş Hecke grubu
$\overline{F}$	$\overline{H}(\lambda_3)$ genişletilmiş modüler grubunun temel bölgesi
$\overline{F}_{\lambda_q}$	$\overline{H}(\lambda_q)$ grubunun temel bölgesi
$\overline{H}_ç(\lambda_q)$	$\overline{H}(\lambda_q)$ grubunun çift alt grubu
$\overline{H}_t(\lambda_q)$	$\overline{H}(\lambda_q)$ grubunun tek elemanlarının kümesi
$\overline{H}'(\lambda_q)$	$\overline{H}(\lambda_q)$ grubunun kamütatör alt grubu
$\overline{H}^m(\lambda_q)$	$\overline{H}(\lambda_q)$ grubunun m. kuvvet alt grubu
$\overline{H}_p(\lambda_q)$	$\overline{H}(\lambda_q)$ grubunun p seviyeli temel denklik alt grubu

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil Numarası	Adı	Sayfa
Şekil 2.1	π/l, π/m ve π/n açılı hiperbolik üçgenin kenarlarındaki σ_1, σ_2 ve σ_3 yansımaları	18
Şekil 2.2	$(2,q,\infty)$ Hecke gruplarının hiperbolik üçgen gösterimleri	18
Şekil 3.1	$H(\lambda_q)$ Hecke grubu için bir temel bölge	28
Şekil 4.1	$\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grubu için bir temel bölge	43

ÖNSÖZ

Bu çalışmada her türlü yardımlarını gördüğüm ve her zaman yanımda hissettiğim danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Osman BİZİM'e, bilgileri ile her zaman yol gösterici olan hocam Doç. Dr. İsmail Naci CANGÜL'e ve beni daima kendilerinden biri gibi hisseden ve hissettiren UÜ. Fen Fakültesi Matematik Bölümü'ndeki hocalarıma en içten teşekkürlerimi sunarım.

Bu alanda çalışmamda katkısını hiçbir zaman unutamayacağım hocam Prof. Dr. Turgut BAŞKAN'a da teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca beni yetiştiren, gerekli çalışma ortamını hazırlayan BAÜ Necatibey Eğitim Fakültesi ve Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'ndeki hocalarıma ve arkadaşlarıma da teşekkür ederim.

Dört yıl boyunca Bursa'ya beraber gittiğim ve her türlü yardımını gördüğüm arkadaşım Araş.Gör. Dilek Namlı. Sana, ayrıca teşekkürler.

Bugünlerimi görmesini çok istediğim babamı rahmet ve saygıyla anıyorum. Benim cefamı her zaman çeken sevgili anneme ve aileme de şükranlarımı sunarım.

Balıkesir, 2001 Recep ŞAHİN

1. GİRİŞ

Bu çalışmanın amacı, ayrık ve süreksiz gruplar teorisinde önemli bir yer tutan genişletilmiş Hecke grupları ile bunların bazı alt gruplarının grup yapıları hakkında bilgi vermektir.

Erich Hecke, 1936 yılında "Über die Bestimmung Dirichletcher Reichen durch ihre Funktionalgleichungen" adlı çalışmasında, λ sabit bir pozitif sayı olmak üzere,

$$T(z) = -\frac{1}{z} \quad \text{ve} \quad U(z) = z + \lambda$$

kesirli doğrusal dönüşümleri ile üretilen ve $H(\lambda)$ ile gösterilen grupları tanıtmıştır, [1]. Burada S=T.U alınırsa

$$S(z) = -\frac{1}{z+\lambda}$$

elde edilir.

Bu gruplar, $H(\lambda)$ bir Fuchsian grup olduğunda Dirichlet serilerinin çalışılmasında kullanılır. E. Hecke, $\lambda \geq 2$ ve gerçel sayı ise veya $q \geq 3$ bir tamsayı olmak üzere

$$\lambda = \lambda_q = 2\cos\frac{\pi}{q}, \; 1 \leq \lambda < 2$$

ise $H(\lambda)$ grubunun bir temel bölgesinin

$$F_\lambda = \left\{ z \in U : |\mathrm{Re}\, z| < \frac{\lambda}{2}, \; |z| > 1 \right\}$$

kümesi olduğunu göstermiştir. Ayrıca diğer $\lambda > 0$ değerleri için F_λ kümesinin bir temel bölge olmadığını göstermiştir. Böylece $H(\lambda)$ grubunun bir Fuchsian grup olması için gerek ve yeter koşulun $\lambda = \lambda_q$ veya $\lambda \geq 2$ reel sayı olması gerektiği görülür. Her iki durumda da $H(\lambda)$ grubuna *Hecke grubu* denir. Bu çalışmada özellikle $\lambda<2$ durumuna karşılık gelen $H(\lambda_q)$ Hecke grupları ile ilgileneceğiz.

$H(\lambda_q)$ Hecke grubu, PSL(2, **R**) grubunun 2 mertebeli $T(z) = -\frac{1}{z}$ ve q mertebeli $S(z) = -\frac{1}{z+\lambda_q}$ ile üretilen ayrık alt grubudur.

$\lambda = \lambda_q = 2\cos\frac{\pi}{q}$, $1 \le \lambda < 2$ durumuna karşılık gelen $H(\lambda_q)$ Hecke grupları ve bunların normal alt grupları özellikle [2] de çalışılmıştır.

q = 3 için $\lambda = \lambda_3 = 2\cos\frac{\pi}{3} = 1$ değerine karşılık gelen $H(\lambda_3)$ Hecke grubu modüler grup olarak bilinir ve bu grup literatürde en çok çalışılan gruptur. $H(\lambda_3)$ grubunun elemanlarının tüm katsayıları rasyonel tamsayılardır.

Diğer önemli iki Hecke grubu ise q = 4 ve q = 6 değerlerine karşılık gelen gruplardır ki, bu halde $\lambda_4 = \sqrt{2}$ ve $\lambda_6 = \sqrt{3}$ olur, yani $H(\lambda_4)$ ve $H(\lambda_6)$ dir. Bu iki halde katsayılar cismi olara rasyonel sayılar cisminin $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ ve $\mathbf{Q}(\sqrt{3})$ cebirsel genişlemeleri kullanılır.

Ayrıca $H(\lambda_5)$ grubu da çok çalışılan bir Hecke grubudur ve bu durumda da yine rasyonel sayılar cisminin ikinci dereceden bir genişlemesini elde ederiz. Bu dört Hecke grubu için λ_q derecesi üçten küçük veya üçe eşit olan bir polinomun köküdür.

$H(\lambda_4)$ ve $H(\lambda_6)$, aralarındaki benzerlikten dolayı ve ayrıca modüler gruptan sonra elemanları tamamen bilinen en önemli Hecke grupları olduklarından ayrı olarak çalışılmıştır. Eğer burada q=4 ve q=6 yazılırsa $H(\sqrt{2})$ ve $H(\sqrt{3})$ kümesi aşağıdaki iki tip öğeden oluşur:

(i) $\begin{pmatrix} a & b\sqrt{m} \\ c\sqrt{m} & d \end{pmatrix}$ m=2, 3, a,b,c,d$\in\mathbf{Z}$, ad-mbc=1,

(ii) $\begin{pmatrix} a\sqrt{m} & b \\ c & d\sqrt{m} \end{pmatrix}$ m=2, 3, a,b,c,d$\in\mathbf{Z}$, mad-bc=1.

(i) tipli elemanlara çift, (ii) tipli elemanlara da tek elemanlar denir. Eğer bu elemanların çarpımını göz önüne alırsak aşağıdaki sonuçları buluruz.

tek.tek=çift.çift=çift,

çift.tek=tek.çift=tek.

Şimdi q çift bir sayı olsun. $H(\lambda_q)$ Hecke grubunun önemli bir normal alt grubunu tanımlayalım:

q çift sayı olduğundan $H(\lambda_q)$ Hecke grubunu 2 mertebeli bir devirli gruba götüren bir homomorfizm vardır. Bu homomorfizm T ve S eliptik elemanlarını grubun üretecine ve T.S parabolik elemanını da birim elemana götürür.

$H(\lambda_4)$ veya $H(\lambda_6)$ için bu alt grup özel bir forma sahiptir. Aslında bu alt grup $H(\lambda_q)\,(q=4,6)$ grubundaki bütün çift elemanlardan oluşur. Bu alt gruba çift alt grup denir ve $H_ç(\lambda_q)$ $(q=4,6)$ ile gösterilir, yani

$$H_ç(\lambda_q)=\{M=\begin{pmatrix} a & b\lambda_q \\ c\lambda_q & d \end{pmatrix} : M\in H(\lambda_q)\,(q=4,6)\}.$$

Genelde ise herhangi bir q çift sayısı için elde edilen çift alt grup $H_ç(\lambda_q)$ ile gösterilir. $H_ç(\lambda_q)$ grubu TS ve TS^2T ile üretilir. $H(\lambda_q)$ grubunun çift elemanlarının kümesi

$$H_ç(\lambda_q)=\{M=\begin{pmatrix} a & b\lambda_q \\ c\lambda_q & d \end{pmatrix} : M\in H(\lambda_q)\}$$

ve tek elemanlarının kümesi de

$$H_t(\lambda_q)=\{N=\begin{pmatrix} a\lambda_q & b \\ c & d\lambda_q \end{pmatrix} : N\in H(\lambda_q)\}$$

biçimindedir. Buradan $T\notin H_ç(\lambda_q)$ olduğundan

$$H(\lambda_q)=H_ç(\lambda_q)\cup T.H_ç(\lambda_q)$$

bulunur.

q tek sayı olduğunda çift alt gruplara sahip olmak mümkün değildir. Aslında S eliptik üreteci $H(\lambda_q)$ grubunda q mertebeye sahiptir ve 2 mertebeli bir elemana eşlenemez.

$H_ç(\lambda_q)$ alt grubu sonsuz çoklukta normal alt grup içerdiğinden $H(\lambda_q)$ grubunun normal alt grupları arasında oldukça önemli bir yere sahiptir.

Çalışmanın ilk bölümü tezin amacını veren, tezin bölümlerinin tanıtıldığı giriş bölümüdür.

İkinci bölüm olan ön bilgiler bölümünde ilerleyen bölümlerde çok sık kullandığımız bazı tanım, kavram ve teoremlere yer verilmiştir. Bu bölümde, ana hatlarıyla topolojik dönüşüm grubu, cisim genişlemeleri, projektif gruplar, doğrusal dönüşümler, Fuchsian gruplarla ilgili temel kavramlar, Riemann-Hurwitz formülü, Reidemeister-Schreier metodu, serbest gruplar ve serbest çarpımlardan bahsedilmiştir.

Üçüncü bölümde Hecke gruplarının tanımı ve genel özellikleri verilmiş, Hecke gruplarının temel bölgesi tanımlanmıştır. Ayrıca Hecke gruplarının çift, kamütatör, kuvvet, denklik ve temel denklik alt grupları tanıtılmış ve bunların grup yapıları hakkında bilgi verilmiştir.

Dördüncü bölümde, $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke gruplarının tanımı ve grup gösterimleri verilmiştir. Genişletilmiş modüler grup için verilmiş olan temel bölge tanımı $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grupları için verilmiş ve genişletilmiş Hecke gruplarının izomorf olduğu grup yapısını veren bir teorem ispatlanmıştır. Genişletilmiş Hecke gruplarının çift alt gruplarının tanımı verilmiş ve bu grupların üreteç kümeleri elde edilmiştir. Genişletilmiş Hecke gruplarının kamütatör alt grupları tanıtılmış, q sayısının tek veya çift olmasına göre iki teorem ifade ve ispat edilmiştir. Genişletilmiş Hecke gruplarının m. kuvvet alt grubu tanımı verilmiştir. Herhangi bir q tek sayısı ve pozitif bir m sayısı için (q,m) nin bütün durumlarını inceleyen teoremler ifade ve ispat edilmiştir. Ayrıca özel olarak $q=5$ için teoremler ifade edilmiştir. $q=4$ ve $q=6$ çift sayıları için m pozitif sayısının alabileceği bütün durumlarla ilgili teoremler ifade ve ispat edilmiştir. Ayrıca genişletilmiş Hecke gruplarının temel denklik alt grupları tanımlanmış ve $q = 4, 5, 6$ ve 7 için temel denklik alt grupları ve bunların bölüm grupları elde edilmiştir.

Beşinci bölümde tezde elde edilen sonuçlar verilmiş ve önerilerde bulunulmuştur.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde çalışmamızda kullanacağımız bazı temel kavramları tanımlayacağız ve bazı temel teoremler vereceğiz. Çalıştığımız gruplar birer topolojik grup oldukları için önce topolojik dönüşüm gruplarını ele alacağız.

2.1 Topolojik Dönüşüm Grupları

2.1.1 Tanım: G hem bir grup hem de bir topolojik uzay olsun. Eğer her g, $h \in G$ için

$m : G \times G \to G$; $m(g, h)=gh$,

$i \ : G \to G$; $i(g)=g^{-1}$

işlemleri sürekli iseler G ye bir *topolojik grup* denir [3].

Örnek olarak, (**C**, +), (**R**, +) grupları üzerlerindeki alışılmış topolojik yapılarla birlikte birer topolojik grupturlar. Ayrıca $S^1 = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$ birim çemberi, kompleks sayıların çarpma işlemi ile bir topolojik gruptur. Topolojik gruplarda, herhangi bir $g \in G$ noktasının komşuluğu ile G nin birim elemanı olan e nin bir komşuluğu topolojik eş yapılı (homeomorf) olur. Yani G topolojik grubunun birim elemanının komşulukları ailesi bilindiğinde G nin topolojik yapısı da bilinmiş olur.

2.1.2 Tanım: G bir topolojik grup ve X herhangi bir topolojik uzay olsun.

$\Lambda : G \times X \to X$; $\Lambda(g, x)=g\Lambda x$

sürekli dönüşümü, eğer her g, $h \in G$ ve her $x \in X$ için

(i) $g\Lambda(h\Lambda x)=gh\Lambda x$

(ii) $e\Lambda x=x$

koşullarını gerçekliyorsa [G, X] ikilisine bir *topolojik dönüşüm grubu* denir.

Örnek olarak G, $\mathbf{R}^n$ üzerindeki tüm homojen doğrusal dönüşümlerin kümesi olmak üzere $[G,\mathbf{R}^n]$ bir topolojik dönüşüm grubudur [4].

Şimdi de ayrık grup tanımını verelim. Ayrık gruplar teorisi ile ilgili kitaplar incelendiği zaman farklı görünen bir çok ayrık grup tanımı ile karşılaşılır. Burada bu tanımlar verilip, bu tanımların denk oldukları belirtilecektir.

2.1.3 Tanım: G bir topolojik grup olsun.

(i) G nin elemanlarının hiçbirisi G nin bir yığılma noktası değil ise G ye *ayrık grup* denir.

(ii) G nin her g elemanı için $\{g\}$ kümesi g nin bir komşuluğu ise G ye *ayrık grup* denir.

(iii) G nin her g elemanı G nin bir ayrık noktası ise G ye *ayrık grup* denir.

(iv) G nin birim elemanı olan e, G nin bir ayrık noktası ise G ye *ayrık grup* denir.

2.1.4 Önerme: 2.1.3.Tanımdaki her bir ayrık grup tanımı denktir, [5].□

2.1.5 Tanım: [G, X] bir topolojik dönüşüm grubu ve x, y∈X olmak üzere g(x)=y olacak biçimde en az bir g∈G öğesi varsa x ve y noktalarına G altında *denktirler* denir. Herhangi bir x noktasına denk olan tüm noktaların kümesine *x noktasının yörüngesi* denir ve bu küme G_x ile gösterilir. Eğer $G_x=X$ olacak biçimde bir x∈X öğesi varsa [G, X] topolojik dönüşüm grubuna *geçişlidir* denir.

Bu denklik bağıntısı X uzayını denklik sınıflarına ayırır. Tüm G-yörüngelerinin kümesi X/G simgesiyle gösterilir ve X/G ye *yörünge uzayı* ya da *bölüm uzayı* denir. Bir

$$p : X \to X/G,\ p(x)=G_x$$

dönüşümü tanımlayalım. τ, X üzerindeki topoloji olmak üzere X/G üzerindeki topoloji

$$\tau_G=\{\, T_g \subset X/G \mid p^{-1}(T_g) \in \tau_X \,\}$$

şeklindedir ve bu topoloji ile birlikte X/G bir topolojik uzaydır, [4].

2.1.6 Tanım: [G, X] bir topolojik dönüşüm grubu olsun.

(i) Her bir $x \in X$ için $g(x)=x$ eşitliğini sağlayan $g \in G$ elemanlarının oluşturduğu kümeye x noktasının *kalımlaştırıcısı* (stabilizer) denir ve bu küme S(x) simgesi ile gösterilir. Yani

$$S(x)=\{g \in G : g(x)=x\}$$

dir. Benzer olarak $A \subset X$ ise

$$S(A)=\{g \in G : g(A)=A\}$$

olarak tanımlanır.

(ii) Eğer $g \in G$ ise g nin *sabit noktaları kümesi*

$$F_g=\{x \in X : g(x)=x\}$$

olarak tanımlanır.

2.2 Cisim Genişlemeleri ve Sonlu Cisimler

Şimdi bu çalışmada çok sık ihtiyaç duyacağımız cisimlerin sonlu genişlemelerinden bahsedelim.

Cisim genişlemelerine önce **R** gerçel sayılar cisminden **C** kompleks sayılar cismini elde etmekle başlayalım. i kompleks sayısı **R**[x] de

$$f(x) = x^2 + 1 \in \mathbf{R}[x]$$

ikinci dereceden indirgenemez polinomun sıfırıdır ve **C** nin elemanları $z=a+ib$ ($a,b \in \mathbf{R}$) formunda tek bir biçimde yazılabilir. Bu **R** cismine tek bir i elemanı eklenmesiyle elde edilen basit bir genişlemedir. Burada i, **R** de olmayan fakat **R**[x] polinom halkasındaki indirgenemez bir polinomun köküdür.

Benzer olarak herhangi bir cisim için genişleme tanımı aşağıdaki gibi verilebilir.

2.2.1 Tanım: F bir cisim ve f, F[x] de n dereceli bir indirgenemez polinom olsun. u, f nin bir kökü olmak üzere F ye u nun eklenmesiyle elde edilen K=F[u] cismine F nin *basit genişlemesi* denir. Burada u ya F üzerinde *cebirseldir* denir.

Örneğin 7, $\sqrt{2}$ ve i sayıları **Q** üzerinde cebirseldir. Çünkü bu sayılar x-7, x^2-2 ve x^2+1 polinomunun kökleridir. Burada K nin her v elemanının

$$v = a_0 + a_1 u + \ldots + a_{n-1} u^{n-1}; \quad a_i \in F$$

biçiminde bir gösterime sahip olduğu bilinen bir sonuçtur. Örnek olarak **C**, **R** nin bir genişlemesidir.

Bir cismin basit bir genişlemesinin varlığı aşağıdaki teoremle verilir.

2.2.2 Teorem: F bir cisim ve f, F[x] de n dereceli indirgenemez bir polinom olsun. O zaman u nun f polinomunun kökü olarak F üzerinde cebirsel olduğu F nin basit bir K=F[u] genişlemesi vardır, [6].□

Biraz da sonlu cisimlerin yapısından bahsedelim. p asal sayı ve n pozitif tamsayı olmak üzere her bir sonlu cismin mertebesi p^n biçiminde bir asal kuvvettir. Tersine olarak p asal sayı ve n pozitif tamsayı olmak üzere mertebesi p^n olan sonlu bir cisim vardır.

2.2.3 Teorem: F sonlu bir cisim ise uygun bir p asal sayısı ve n pozitif tam sayısı için F nin mertebesi p^n dir, [7].□

2.2.4 Tanım: p^n elemanlı sonlu bir cisme p^n mertebeli *Galois cismi* denir ve GF(p^n) ile gösterilir.

Verilen bir p asalı ve n pozitif tam sayısı için bir GF(p^n) Galois cisminin var olduğu gösterilebilir. Üstelik mertebesi p^n olan bütün cisimler izomorftur. n=1 ise $\mathbf{Z}_p$, mertebesi p olan bir Galois cismidir, [7].

2.3 Projektif Gruplar

Her q=p^n asal kuvveti için, izomorfizm farkıyla, GF(q) ile gösterilen q elemanlı bir tek cisim olduğunu biliyoruz. Bu q elemanlı Galois cismidir. Bütün sonlu cisimler bu formdadır.

Şimdi K, $q=p^n$ mertebeli sonlu bir cisim, yani K=GF(q) olsun. GL(2,K) ile gösterilen *genel lineer grup*,

$$GL(2,K)=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid \ a,b,c,d\in K, \ \ ad-bc\neq 0\right\}$$

biçiminde tanımlanır. Bu grubun merkezi Z(GL(2,K)) ile gösterilir ve tüm 2×2 skaler matrislerden oluşur. Ayrıca bu grup GL(2,K) nın bir normal alt grubudur. Buradan PGL(2,K) ile gösterilen *projektif genel lineer grup*

PGL(2,K)=GL(2,K)/Z(GL(2,K))

olarak tanımlanır.

GL(2,K) da 1 determinantlı matrisler bir alt grup oluştururlar ve SL(2,K) ile gösterilen bu alt gruba *özel lineer grup* denir, yani

$$SL(2,K)=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid \ a,b,c,d\in K, \ \ ad-bc=1\right\}$$

olur. Dolayısıyla PSL(2,K) ile gösterilen *projektif özel lineer grup*,

PSL(2,K)=SL(2,K)/Z(SL(2,K))

biçiminde tanımlanır. Burada p>2 ise Z(SL(2,K))={±I} ve p=2 ise Z(SL(2,K))={I} dır. Tanımına dikkat edilirse PSL(2,K) nın mertebesi p>2 ise q(q-1)(q+1) ve p=2 ise q(q-1)(q+1) olur.

SL(2,K) dan PSL(2,K) ya bir doğal homomorfizm vardır. Bu homomorfizm SL(2,K) daki bir $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ elemanını PSL(2,K) daki $\pm\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ kosetine götürür. Bu nedenle PSL(2,K) nın bir elemanını, SL(2,K) da bu elemanı indirgeyen iki matrisle temsil edebiliriz.

Şimdiye kadar sadece sonlu cisimler üzerindeki projektif gruplardan bahsettik. Fakat genelde yukarıda tanımladığımız dört grup, K nın sonsuz bir cisim olması halinde de tanımlanabilir. Bu durumda matrislerin ya da indirgenen kesirli lineer dönüşümlerin tüm katsayıları bu sonsuz cisimden alınır. En çok karşılaşılan örnekler PSL(2,**R**) ve PSL(2,**C**) dir. PSL(2,**C**) yi çalışmalarımızda kullandığımız için 2.5. Kısımda ayrıntılı olarak ele alacağız.

Ayrıca projektif grupları birimli halkalar üzerinde tanımlamakta mümkündür. PSL(2,**Z**) örnek olarak verilebilir, [2].

2.4 Doğrusal Dönüşümler

$\mathbf{C}_\infty$ ile göstereceğimiz genişletilmiş karmaşık düzlemin otomorfizmleri a, b, c, $d\in\mathbf{C}$ ve $ad-bc\neq 0$ olmak üzere

$$T(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$

biçimindeki dönüşümlerdir. Bu özellikteki w=T(z) dönüşümlerine *doğrusal dönüşüm* ya da *Mobiüs dönüşümü* denir. Bu tip dönüşümler fonksiyonların bileşkesi işlemine göre bir grup oluştururlar ve bu grup $Aut(C_\infty)=PGL(2,C)$ ile gösterilir. a, b, c, $d\in C$ ve $ad-bc\neq 0$ olmak üzere

$$U(z)=\frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$$

dönüşümleri de $\mathbf{C}_\infty$ un anti-otomorfizmleridir. Her bir U anti-otomorfizmi, $\mathbf{C}_\infty$ un bir otomorfizmi ile karmaşık eşleniğin bileşimi olarak yazılabilir. Bu dönüşümlerin ikisi de $\mathbf{C}_\infty$ un kendisi üzerine topolojik eş yapı dönüşümleri olduğundan U dönüşümü $\mathbf{C}_\infty$ un bir topolojik eş yapı dönüşümüdür. İki anti-otomorfizmin birleşimi bir otomorfizm ve bir anti-otomorfizm ile bir otomorfizmin birleşimi bir anti-otomorfizmdir. Dolayısıyla $\mathbf{C}_\infty$ un tüm otomorfizm ve anti-otomorfizmleri bir grup oluşturur ve bu grup $\overline{Aut}(C_\infty)=\overline{PGL}(2,C)$ biçiminde gösterilir. U bir anti-otomorfizm olmak üzere PGL(2,C) ve UPGL(2,C), $\overline{PGL}(2,C)$ deki kosetlerdir, yani $[\overline{PGL}(2,C):PGL(2,C)]=2$ dir ve buradan PGL(2,C), bu grubun bir normal alt grubudur.

U ile üst yarı düzlemi gösterelim yani, $U=\{z\in C : \operatorname{Im} z>0\}$ olsun. Hiperbolik geometri için üst yarı düzlem gösterimini kullanacağız. Düzlem hiperbolik geometri, Öklid geometrideki paralellik aksiyomunun değiştirilmesiyle elde edilmiştir. *U*, aşağıdaki şekilde bir hiperbolik model haline getirilebilir:

Parçalı diferansiyellenebilir bir γ eğrisinin hiperbolik uzunluğu

$$l(\gamma)=\int_\gamma \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{y}$$

ve ölçülebilir bir E kümesinin hiperbolik alanı da

$$\mu(E)=\iint_E \frac{dxdy}{y^2}$$

biçiminde tanımlanır. *U* daki iki hiperbolik nokta arasındaki hiperbolik uzaklık bu iki noktayı birleştiren hiperbolik doğru parçasının uzunluğudur. Hiperbolik düzlem, hiperbolik uzaklık ile bir metrik uzaydır.

Bu çalışmada kullanacağımız gruplar hiperbolik geometrinin eşmetrilerinin grupları olduğundan ve hiperbolik geometri için üst yarı düzlem gösterimini seçtiğimizden bu dönüşümlerin gerçel katsayılı olanları ile ilgileneceğiz. Bu nedenle PGL(2,**C**) nin bazı dönüşümlerinden oluşan

$$PSL(2,\mathbf{R})=\{T \mid T(z)=\frac{az+b}{cz+d},\ a, b, c, d\in\mathbf{R} \text{ ve } ad-bc=1\}$$

ve

$$G_0=\{U \mid U(z)=\frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d},\ a, b, c, d\in\mathbf{R} \text{ ve } ad-bc=-1\}$$

biçimindeki iki alt kümesini alalım. ve G= $PSL(2,\mathbf{R})\cup G_0$ kümesini oluşturalım. G kümesinin fonksiyonların bileşke işlemine göre bir grup olduğu kolayca görülebilir. PSL(2,**R**), G nin bir alt grubudur fakat G_0, G nin bir alt grubu değildir. Aşağıdaki teorem G grubunun *U* nun otomorfizmlerinin grubu olduğunu gösterir. G grubunun her bir elemanı hiperbolik doğruları hiperbolik doğrulara resmeder ve hiperbolik uzunlukları korur.

2.4.1 Teorem: Herhangi bir T doğrusal dönüşümü *U* üst yarı düzlemini kendi üzerine resmeder ancak ve ancak T∈G dir. Üstelik G grubu $\mathbf{R}^*$ (genişletilmiş gerçel eksen) kümesini de kendi üzerine resmeder, [8].□

G grubu topolojik dönüşüm grubudur. G grubu üzerindeki topolojik yapı şöyle oluşturulur: A=$\{(a,b,c,d) \mid ad-bc=\pm1\}\subset\mathbf{R}^4$ üzerinde $\mathbf{R}^4$ üzerindeki alışılmış topolojiden indirgenen alt uzay topolojisi vardır. A üzerinde (a,b,c,d)≡(-a,-b,-c,-d) özdeşlemesini yapalım, bu bir denklik bağıntısıdır ve bu bağıntıyı R_A ile gösterelim. Dolayısıyla A ile A/R_A bölüm uzayı arasında birebir ve üzerine bir dönüşüm vardır. A üzerindeki topolojiden faydalanarak A/R_A üzerindeki topolojik yapı oluşturulur.

$$p: A/R_A\to G\ ;\ p((a,b,c,d))=T,\ T(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$

birebir, üzerine dönüşümü yardımıyla da G üzerindeki topolojik yapı oluşturulur. G topolojik grubu $\boldsymbol{U}$ üzerinde hareket etmektedir ve her $T \in G$ ve her $z \in \boldsymbol{U}$ için T(z) sürekli bir dönüşümdür. Dolayısıyla $[G,\boldsymbol{U}]$ bir topolojik dönüşüm grubudur.

T(z) dönüşümündeki $ad-bc=\Delta$ ifadesine T dönüşümünün determinantı denir. Determinantı sıfırdan farklı gerçel katsayılı 2×2 lik matrislerin grubu $GL(2,\mathbf{R})$ simgesiyle gösterilir. $A \in GL(2,\mathbf{R})$ ise $\Delta = \det(A) \neq 0$ olduğundan A matrisinin her bir katsayısı $\sqrt{|\Delta|}$ değeri ile bölünürse elde edilen yeni matrisin determinantı 1 ya da −1 olur.

Gerçel katsayılı, 2×2 lik determinantı ±1 olan matrislerin oluşturduğu $\overline{SL}(2,\mathbf{R})$ matris grubu ile G grubu arasında bir karşılık gelme söz konusudur. Bu karşılık gelme aşağıdaki gibidir.

$$\theta : \overline{SL}(2,\mathbf{R}) \to G = PSL(2,\mathbf{R}) \cup G_0$$

$$\theta\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{cases} T : ad-bc=1 \\ U : ad-bc=-1 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan θ dönüşümünün bir grup homomorfizmi olduğu kolayca görülebilir. Ancak θ üzerine olmasına rağmen birebir değildir. Çünkü bir matris ile onun negatifine aynı V dönüşümü karşılık gelir. Dolayısıyla

$$Ker(\theta) = \{\pm I \mid I \text{ birim matris}\}$$

olmak üzere

$$\overline{SL}(2,\mathbf{R})/\{\pm I\} \cong G$$

dir.

Şimdi de G topolojik dönüşüm grubunun elemanlarının sabit noktalarına göre sınıflandırmasını yapalım.

2.4.2 Tanım: T dönüşümünün *sabit noktaları* T(z)=z özelliğindeki z noktalarıdır.

Önce $PSL(2,\mathbf{R})$ nin elemanlarının sabit noktalarını belirleyelim. $a,b,c,d \in \mathbf{R}$ ve $ad-bc=1$ olmak üzere

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} = z$$

eşitliğinden $cz^2 + (d-a)z - b = 0$ elde edilir. Bu denklemin kökleri en fazla iki tanedir ve T dönüşümünün sabit noktalarını verir. Bunların $\mathbf{C}_\infty$ deki yerlerini bulabilmek için denklemin determinantını göz önüne alalım. $\Delta = (d-a)^2 + 4bc = (a+d)^2 - 4$ olduğundan aşağıdaki üç hal söz konusudur.

1.hal: $|a+d| > 2$ ise $\Delta>0$ olacağından T nin iki sabit noktası vardır ve bunlar gerçel eksen üzerindedir. Bu özellikteki T dönüşümüne *hiperbolik dönüşüm* denir.

2.hal: $|a+d| = 2$ ise $\Delta=0$ olur ve dolayısıyla T nin gerçel eksen üzerinde bir tane sabit noktası vardır. Bu özellikteki T dönüşümüne ise *parabolik dönüşüm* denir.

3.hal: $|a+d| < 2$ ise $\Delta<0$ olacağından T nin birbirinin eşleniği olan iki karmaşık sabit noktası vardır. Bu özellikteki T dönüşümüne *eliptik dönüşüm* denir.

Şimdi de $a,b,c,d\in\mathbf{R}$ ve ad-bc= -1 olmak üzere

$$U(z)=\frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}=z$$

den $cz\bar{z} + dz - a\bar{z} - b = 0$ elde edilir. z=x+iy olarak alınırsa

$$c\,(x^2+y^2) + (d-a)x - b = 0 \qquad (2.1)$$

$$(d+a)y=0 \qquad (2.2)$$

eşitlikleri bulunur. İki hal söz konusudur.

1.hal: $d+a\neq 0$ ise y=0 dır ki bu durumda (2.1) den

$$c\,x^2 + (d-a)x - b = 0 \qquad (2.3)$$

eşitliği elde edilir. Bu denklemin determinantı $\Delta = (d-a)^2 + 4bc = (a+d)^2 - 4 > 0$ olduğundan U dönüşümünün iki farklı sabit noktası olduğu görülür. Bunlar gerçel eksen üzerindedir ve bu özellikteki U dönüşümüne *kayan-yansıma* denir.

2.hal: d+a=0 ise (2.2) eşitliği özdeş olarak gerçeklenir ve (2.1) eşitliği bize U dönüşümünün sabit noktalarının kümesinin bir çember olduğunu gösterir. a+d=0 ve ad-bc=-1 olduğu da kullanılarak bu çemberin merkezinin (a/c, 0) ve yarıçapının da $1/|c|$ olduğu kolayca görülebilir. Bu özellikteki U dönüşümüne *yansıma* denir. Buradan aşağıdaki sonuç elde edilir.

2.4.3 Sonuç: G grubunun hiperbolik, eliptik, parabolik, kayan-yansıma ve yansıma diye adlandırılan beş tip elemanı vardır. $T \in G$ olmak üzere "T nin U da sabit noktası vardır $\Leftrightarrow$ T eliptik ya da yansıma dönüşümüdür".

G nin bu beş tip elemanının bir kanonik biçimi vardır. Bunlar, aşağıdaki tabloda verilmiştir.

elemanın tipi	**kanonik biçimi**
hiperbolik	$z \to \lambda z \quad (\lambda > 1)$
eliptik	$z \to w, \ \dfrac{w-i}{w+i} = e^{i\theta}\dfrac{z-i}{z+i}, \ \theta \neq 2n\pi$
parabolik	$z \to z \pm 1$
kayan-yansıma	$z \to \lambda \bar{z} \quad (\lambda < -1)$
yansıma	$z \to -\bar{z}$

G nin hiperbolik, parabolik ve kayan-yansıma elemanları sonsuz mertebeli, yansımaların mertebeleri iki ve eliptik elemanların mertebeleri ise sonsuz ya da sonlu mertebelidir. Eğer $T \in G$ bir hiperbolik eleman ise $\lambda > 1$ olmak üzere T, $w(z)=\lambda z$ dönüşümüne konjugedir ve λ ya *dönüşümün çarpanı* denir. λ konjugelik sınıfının bir değişmezidir. Bir hiperbolik dönüşümün çarpanı bir tek şekilde belirlenebilir. Burada anlatılanlar bir U kayan-yansıması içinde geçerlidir, [5].

2.5 Süreksiz ve Ayrık Gruplar

Süreksizlik bir X topolojik uzayının kendi üzerine birebir dönüşümlerinin oluşturduğu bir grup için tanımlanmıştır. Burada özel olarak U topolojik uzayı ve G grubunun U üzerindeki süreksizliği incelenecektir. Önce süreksizlik tanımından başlayalım.

2.5.1 Tanım: H, G grubunun bir alt grubu olsun. Eğer $T_n(z) \to \alpha$ olacak biçimde H grubunun farklı elemanlarından oluşan sonsuz elemanlı bir $\{T_n\}$ dizisi ve bir $z \in U$ varsa α noktasına H grubunun bir *limit noktasıdır* denir. Eğer α bir limit noktası değilse α noktasına H grubunun bir *adi noktası* ve H grubuna da α

noktasında *süreksizdir* denir. Eğer bir α noktası birbirinden farklı sonsuz çoklukta $T \in H$ elemanlarının sabit noktası ise α, H grubunun bir limit noktasıdır.

Denk olarak $T_n(z) \to \alpha$ olacak biçimde z noktası ve farklı elemanlardan oluşan bir $\{T_n\}$ dizisi yoksa H grubuna α noktasında *süreksizdir* denir. PSL(2, **C**) nin G alt grupları için bu tanım şöyle ifade edilebilir: S, **C** nin açık bir alt kümesi olsun. Her $z \in S$ için $\{Tz : T \in G\}$ kümesinin S de yığılma noktası yoksa G, S üzerinde süreksizdir. G nin limit noktaları,

$$\{Tz : T \in G, z \in \mathbf{C}\} = G_z$$

kümelerinin yığılma noktalarıdır.

2.5.2 Teorem: H, bir T elemanı ile üretilmiş devirli grup olsun.

(i) T eliptik değilse H, T dönüşümünün sabit noktası (ya da noktaları) hariç her yerde süreksizdir.

(ii) T sonlu mertebeli bir eliptik eleman ise H her yerde süreksizdir.

(iii) T sonsuz mertebeli eliptik eleman ise H grubunun süreksiz olduğu hiçbir yer yoktur, [8].□

Bu teoremden, süreksiz bir grupta sonsuz mertebeli eliptik elemanın bulunmadığı kolayca görülebilir.

Şimdi ayrık grup kavramına tekrar dönelim. Süreksizlik ile ayrıklık kavramları arasında oldukça yakın bir ilişki söz konusudur. Bu ilişkiyi inceleyelim.

2.5.3 Teorem: Süreksiz bir grup ayrıktır, [8].□

Ancak bu teoremin tersi her zaman doğru değildir. Örnek olarak Picard grubu ayrıktır ancak üst yarı düzlemde süreksiz değildir, [9]. Poincaré 2.5.3 Teoremde bazı kısıtlamalar yapıldığında teoremin tersinin de doğru olduğunu göstermiştir:

2.5.4 Teorem: Γ, bir B diskinin ya da $\boldsymbol{U}$ üst yarı düzleminin konform topolojik eş yapı dönüşümlerinin ayrık grubu ise Γ, B de ya da $\boldsymbol{U}$ da süreksizdir [8].□

Çalışmamızda kullanacağımız Hecke grupları ve genişletilmiş Hecke grupları *U* nun konform topolojik eş yapı dönüşümlerinin grupları olduğundan bizim için ayrıklık ile süreksizlik kavramları denk kavramlardır.

2.5.5 Tanım: (i) [G,*U*] topolojik dönüşüm grubunun ayrık alt gruplarına *Öklidyen olmayan kristallografik* (non-Euclidean Crystallographic) *grup* denir ve kısaca N.E.C. grup diye yazılır.

(ii) PSL(2,**R**) nin alt grubu olan N.E.C. gruplara *Fuchsian gruplar* denir. Şimdi ayrı olarak Fuchsian grupları inceleyelim.

2.6 Fuchsian Gruplar

2.6.1 Tanım: PSL(2,**R**) nin (*U* nun konform topolojik eş yapı dönüşümlerinin grubu) sonlu üreteçli ayrık bir Γ alt grubuna bir *Fuchsian grup* denir.

Her Γ Fuchsian grubunun aşağıdaki şekilde bir temsili vardır:

Üreteçler : $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$ (hiperbolik)

$x_1, \ldots, x_r$ (eliptik)

$p_1, \ldots, p_t$ (parabolik)

$h_1, \ldots, h_u$ (hiperbolik sınır elemanı)

Bağıntılar : $x_j^{m_j} = \prod_{i=1}^{g}[a_i, b_i] \prod_{j=1}^{r} x_j \prod_{k=1}^{t} p_k \prod_{l=1}^{u} h_l = 1$.

Γ Fuchsian grubuna

$$(g; m_1, \ldots, m_r; t; u) \qquad (2.4)$$

simgesine sahiptir denir. Burada $m_1, \ldots, m_r \geq 2$ sayıları tamsayılarıdır ve bunlara Γ nın *periyotları* denir. g, Γ nın üzerinde ayrık olarak hareket ettiği *U*/Γ Riemann yüzeyinin cinsidir.

Bu gösterim aşağıdaki özelliklere sahiptir. Γ nın her eliptik elemanı x_j ($1 \leq j \leq r$) lerden birinin bir kuvvetine eşleniktir, Γ nın her parabolik elemanı p_k ($1 \leq k \leq t$) lerden birinin bir kuvvetine eşleniktir ve Γ nın her hiperbolik sınır elemanı h_l ($1 \leq l$

$\leq$ u) lerden birinin bir kuvvetine eşleniktir. Ayrıca üreteçlerden birinin bir diğer üretecin bir kuvvetine eşlenik olan, aşikar olmayan bir kuvveti yoktur [8].

Şimdi herhangi bir Γ Fuchsian grubu için $L(\Gamma)$, Γ nın limit noktalarının kümesi olsun. $L(\Gamma)$ gerçel eksenin, aşağıdaki üç koşuldan birini sağlayan bir alt kümesidir:

(i) $L(\Gamma)$ en fazla iki noktadan oluşur.

(ii) $L(\Gamma)=\mathbf{R}$ dir.

(iii) $L(\Gamma)$, **R** nin hiçbir yerde yoğun olmayan mükemmel bir alt kümesidir.

(ii) tipindeki gruplara *birinci türden Fuchsian gruplar* ve (iii) tipinden olan gruplara *ikinci türden Fuchsian gruplar* denir. Biz asıl (ii) tipli gruplarla ilgileneceğiz.

Şimdi Riemann-Hurwitz formülünü tanımlayalım. Γ, simgesi (2.4) deki gibi olan bir grup olsun.

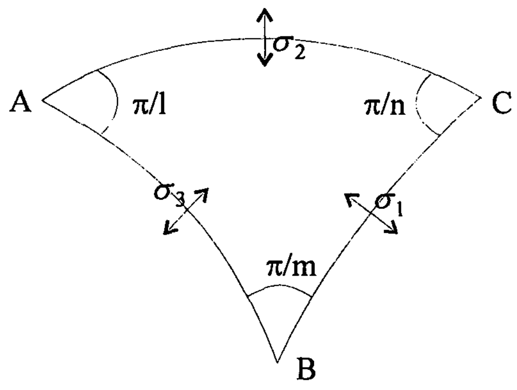
$$\mu(\Gamma)=2g-2+\sum_{i=1}^{r}(1-\frac{1}{m_i})+t+u$$

tanımlayalım. Eğer $\mu(\Gamma)>0$ ise simgesi (2.4) deki gibi olan bir Fuchsian grup vardır ve eğer Γ, birinci türden Fuchsian grupsa $\mu(\Gamma)>0$ dır. Şimdi Γ_1, Γ nın sonlu indeksli bir alt grubu olsun. O zaman

$$[\Gamma:\Gamma_1]=\frac{\mu(\Gamma_1)}{\mu(\Gamma)}$$

olur, burada $\mu(\Gamma_1)$ ve $\mu(\Gamma)$ sırasıyla Γ_1 ve Γ nın temel bölgesinin hiperbolik alanını göstermektedir. Bu formüle *Riemann-Hurwitz formülü* denir. Eğer u=0 ise yani hiperbolik sınır elemanları yok ise Γ nın bir temel bölgesinin hiperbolik ölçümü $2\pi\mu(\Gamma)$ dır ve Riemann-Hurwitz formülü bunun sonucu olarak elde edilir. Eğer u>0 ise bu durumda $\mu(\Gamma)=\infty$ olup Riemann-Hurwitz formülü Maclachlan tarafından ispatlanmıştır, [10].

Şimdi biraz da üçgen gruplarından bahsedelim. $l, m, n \geq 2$ tamsayılar olsun. Açıları π/l, π/m ve π/n olan hiperbolik üçgeni göz önüne alalım. Şekil 2.1. de görüldüğü gibi σ_1, σ_2 ve σ_3 bu üçgenin kenarlarındaki yansımalar olsun.



Şekil 2.1

Bu üç yansıma tarafından üretilen Γ^* grubunun gösterimi

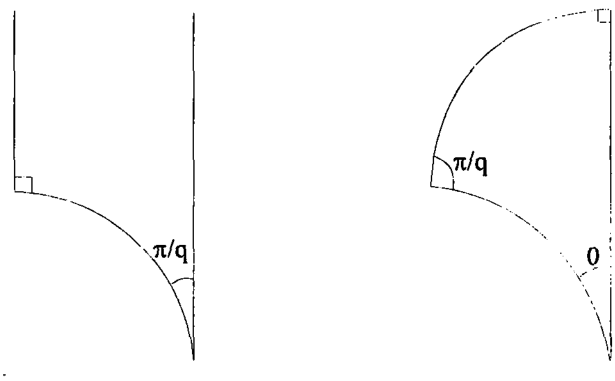
$$\Gamma^*=\langle \sigma_1,\sigma_2,\sigma_3 \mid \sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma_3^2=(\sigma_2\sigma_3)^l=(\sigma_3\sigma_1)^m=(\sigma_1\sigma_2)^n=I\rangle$$

biçimindedir. Burada σ_1,σ_2 ve σ_3 yön korumayan, $\sigma_2\sigma_3$, $\sigma_3\sigma_1$ ve $\sigma_1\sigma_2$ ise yön koruyan elemanlardır. $x=\sigma_2\sigma_3$ ve $y=\sigma_3\sigma_1$ olarak alalım. Bu taktirde x, A köşesi etrafında $2\pi/l$ açılık bir dönme ve y, B köşesi etrafında $2\pi/m$ açılık bir dönme olur. Bu durumda xy ise C etrafında $2\pi/n$ açılık bir dönmedir. Bunların hepsi yön koruyan eşmetrilerdir. Bu sebepten dolayı Γ^* ın, sadece yön koruyan eşmetrilerden oluşan bir Γ alt grubunu elde ederiz ve bu grup

$$\Gamma=\langle x,y \mid x^l=y^m=(xy)^n=I\rangle$$

gösterimine sahiptir. Bu alt grubun bir Fuchsian grup olarak simgesi (0;l,m,n) dir ve kısaca (l,m,n) biçiminde gösterilir. Bu gruba bir *üçgen grubu* denir. Bu alt grubun indeksi 2 dir ve bu nedenle bir normal alt gruptur.

Burada l, m ve n nin biri veya hepsi ∞ olabilir. Örneğin $(2,q,\infty)$ Hecke grupları Şekil 2.2 deki üçgenler üzerinde hareket ederler.



Şekil 2.2

l, m ve n sayılarından birinin 2 olduğu durumlarla çok sık karşılaşacağımız için (2,m,n) türü grupları göz önüne alalım. Burada m ve n sayılarına bakarak grubun hangi yüzey üzerinde hareket ettiğini bulabiliriz. Eğer $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}>\frac{1}{2}$ ise küre, $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2}$ ise tor ve $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}<\frac{1}{2}$ ise üst yarı düzlem üzerinde hareket eder.

Küre üzerindeki (2,m,n) üçgen gruplarının tümü sonlu üçgen gruplarıdır. Çalışmamızda sık sık karşılaşacağımız için kısaca bunlardan bahsedelim:

(i) C_n Devirli Grupları : C_n gruplarının gösterimleri

$$C_n \cong \langle \alpha : \alpha^n = I \rangle$$

biçimindedir. Bunların üçgen grubu olarak gösterimleri de her $n \in \mathbf{N}$ için C_n, (1,n,n) biçimindedir. Ayrıca m tek sayı olmak üzere $C_{2m} \cong \langle \alpha,\beta : \alpha^2 = \beta^m = I,\ \alpha\beta = \beta\alpha \rangle$ olduğundan C_{2m} in üçgen grubu olarak gösterimi (2,m,2m) biçiminde olacaktır. Fakat bu tipteki devirli gruplar cinsi g>0 olan yüzeyler üzerinde hareket ederler.

(ii) D_n Dihedral Grupları : D_n gruplarının gösterimleri

$$D_n \cong \langle \alpha,\beta : \alpha^2 = \beta^2 = (\alpha\beta)^n = I \rangle$$

veya

$$D_n \cong \langle \alpha,\beta : \alpha^2 = \beta^n = (\alpha\beta)^2 = I \rangle$$

veya

$$D_n \cong \langle \alpha,\beta : \alpha^n = \beta^2 = (\alpha\beta)^2 = I \rangle$$

biçimindedir ve bu gruplar iki üreteçli gruplardır. $|D_n| = 2n$ dir. D_n nin üçgen grubu olarak gösterimi (2,2,n) veya (2,n,2) veya (n,2,2) biçimindedir.

(iii) Simetrik ve Alterne Gruplar : n elemanlı bir kümenin bütün permütasyonlarının kümesi fonksiyonların bileşke işlemine göre bir grup oluşturur. Bu gruba *simetrik grup* denir ve S_n ile gösterilir. Çift permütasyonların kümesi de bu grubun bir alt grubunu oluşturur. Bu gruba *alterne grup* denir ve A_n ile gösterilir. $|S_n| = n!$ ve $|A_n| = \frac{n!}{2}$ dir. Çok karşılaşılan simetrik ve alterne gruplar $D_3 \cong S_3 \cong (2,2,3)$, $A_4 \cong (2,3,3)$, $S_4 \cong (2,3,4)$ ve $A_5 \cong (2,3,5)$ gruplarıdır, [11].

2.7 Reidemeister-Schreier Metodu

Şimdi $\overline{H}(\lambda_q)$ grubunun sonlu indeksli alt gruplarının üreteçlerini bulmakta kullanılacak bir teknik olan Reidemeister-Schreier metodundan bahsedelim.

G, $\{g_i\}$ üreteçleri ile üretilen bir grup ve H, G nin bir alt grubu olsun. Metod önce H için bir Schreier transversali seçmekle ve sonra da bu transversalin, üreteçlerin ve koset gösterimlerinin elemanlarının sıralı çarpımlarının alınmasıyla, aşağıdaki gibi uygulanır.

Bir Σ Schreier transversali aşağıdaki koşulları sağlayan koset gösterimlerinin bir kümesinden oluşur:

(i) $I \in \Sigma$

(ii) Σ sağ sadeleştirme altında kapalıdır. Yani eğer $g_{i_1}.g_{i_2}...g_{i_r} \in \Sigma$ ise $g_{i_1}.g_{i_2}...g_{i_{r-1}}$ de Σ kümesinde olmalı.

Σ, H için bir Schreier transversali olsun. H nin bir Schreier üreteci aşağıdaki formda olacaktır, [2].

$$(\Sigma \text{ nın bir elemanı})\times(\text{G nin bir üreteci})\times(\text{önceki çarpımın koset gösterimi})^{-1} \quad (2.5)$$

2.7.1 Örnek: A_4 grubunun A_4' kamütatör alt grubunun üreteçlerini bulmaya çalışalım. A_4 grubunun gösterimi

$$A_4 = \langle a, b : a^2 = b^3 = (ab)^3 = I \rangle$$

biçimindedir. A_4', A_4 grubunun normal alt grubudur ve bölüm grubu

$$A_4 / A_4' = \langle a, b : a^2 = b^3 = (ab)^3 = I, \ \ ab = ba \rangle$$

gösterimine sahiptir. A_4' alt grubunun A_4 grubundaki indeksinin 3 olduğu olayca görülür.

$$\theta : A_4 \to A_4 / A_4' \cong C_3$$

homomorfizmi vardır. A_4' grubu için bir Schreier transversali olarak

$$I, b, b^2$$

kümesini seçelim. Şimdi (2.5) de formüle edilen mümkün olan bütün çarpımları oluşturabiliriz:

$I.a.I^{-1}=a$	$I.b.b^{-1}=I$
$b.a.(b)^{-1}=bab^2$	$b.b.(b^2)^{-1}=I$
$b^2.a.(b^2)^{-1}=b^2ab$	$b^2.b.(I)^{-1}=I$

Burada

$$A'_4 \cong < a, bab^2, b^2ab >$$

buluruz. Yani A'_4 grubu üç ranklı bir serbest gruba izomorftur.

2.8 Kamütatör Alt Grupları, Serbest Gruplar ve Serbest Çarpımlar

2.8.1 Tanım: G bir grup olsun. g, h∈G ve $[g, h]=ghg^{-1}h^{-1}$ olmak üzere

$$\langle [g,h] : g,h \in G \rangle$$

ile tanımlanan gruba G grubunun *kamütatör alt grubu* denir ve G' ile gösterilir.

2.8.2 Yardımcı Teorem : G/G', G grubunun en geniş değişmeli bölüm grubudur. Yani G/N, G nin başka bir değişmeli bölüm grubu ise

$$G' \triangleleft N \triangleleft G$$

ve bir

$$\Theta : G/G' \to G/N$$

homomorfizmi vardır, [12].□

Şimdi $H(\lambda_q)$ bir serbest çarpım olarak bazı serbest alt gruplara sahip olduğundan, bu alt grupların yapısını anlayabilmek için bazı klasik sonuçları hatırlayalım.

2.8.3 Tanım: Bir grubun üreteçleri arasında bağıntılar yoksa bu gruba *serbest grup* denir.

X bir F grubunun bir alt kümesi olsun. F, aşağıdaki koşulları sağlayan X tabanı ile bir serbest gruptur: Eğer ϕ, X kümesinden bir H grubu içine herhangi bir fonksiyon ise ϕ homomorfizminin F den H ye bir ϕ^* homomorfizmine tek bir genişlemesi vardır. Burada X'e F nin *serbest tabanı* denir.

X serbest tabanının mertebesine F nin *rankı* denir. Eğer $|X| = n$ ve X=$\{ x_1, x_2,..., x_n \}$ ise F, $\{ x_1, x_2,..., x_n \}$ üzerinde *serbesttir* diyeceğiz ve bunu F_n ile göstereceğiz.

İki serbest grubun izomorf olması için gerek ve yeter koşul ranklarının aynı olmasıdır, [13].

0 ranklı bir serbest grup aşikardır ve 1 ranklı bir serbest grup sonsuz devirlidir.

2.8.4 Teorem: F grubunun bir serbest grup olması için gerek ve yeter koşul F nin F=<X;> biçiminde bir gösterimi olmasıdır, [14].□

2.8.5 Teorem: Her G grubu bir serbest grubun bir homomorfik görüntüsüdür.□

2.8.6 Teorem: Bir serbest grup bükümsüzdür (torsion-free), yani bir serbest grupta birim eleman dışında sonlu mertebeli eleman yoktur, [14].□

2.8.7 Teorem (Nielsen-Screier) : Bir serbest grubun her alt grubu da serbesttir, [14].□

Biçim ve özellik bakımından serbest gruplara en yakın kavram, grupların serbest çarpımlarıdır. Burada çalışmamızda kullanacağımız kadarıyla serbest çarpımların genel özelliklerini [14] den yararlanarak vereceğiz.

2.8.8 Tanım: A=$\langle a_1,...;R_1,...\rangle$ ve B=$\langle b_1,...;S_1,...\rangle$ iki grup olsun. A ve B gruplarının $A \star B$ ile gösterilen serbest çarpımı,

$$\langle a_1,..., b_1,...; R_1,..., S_1,...\rangle$$

gösterimli gruptur. Yani G nin üreteçleri, A ve B nin üreteçlerinin tümünden ve bağıntıları da A nın R_i ve B nin S_j bağıntılarının tümünden oluşur. A ve B ye *G nin çarpanları* denir.

Serbest çarpım kavramı keyfi sayıdaki gruplara da genişletilebilir.

2.8.9 Tanım: Eğer $A_\alpha = \langle \text{ür } A_\alpha : \text{bağ } A_\alpha \rangle$,$\alpha \in I$ grupların bir koleksiyonu ise bu grupların $G = \star A_\alpha$ serbest çarpımı, üreteçleri A_α ların üreteçlerinin ayrık birleşimlerinden ve bağıntıları da A_α ların bağıntılarının ayrık birleşimlerinden oluşan gruptur.

Serbest çarpımlar vardır ve aşikar değildir. Buradan aşağıdaki teoremi verebiliriz.

2.8.10 Teorem: $G = A \star B$ olsun. O zaman $A \to G$ ve $B \to G$ eşlemeleri bire-bir eşlemelerdir. A nın üreteçleri ile üretilen G nin alt grubu ⟨A nın üreteçleri, A nın bağıntıları⟩ biçiminde gösterime sahiptir. Yani A ya izomorftur. Benzer olarak B içinde geçerlidir. Bu yüzden A ve B, G nin alt grupları olarak düşünülebilir, [14].□

Bir g grubunun bir serbest çarpım olarak ayrışıp ayrıştırılamayacağını belirlemek önemlidir. G için verilen bir gösterimde G nin üreteçlerini, bağıntılar da ayrışacak biçimde iki kümeye bölmeye çalışmak basit bir yöntemdir. Yani G=⟨R∪S; {sadece R deki üreteçleri içeren bağıntılar}∪{sadece S deki üreteçleri içeren bağıntılar}⟩ biçiminde yazmaya çalışmaktır. Artık G,

G_1=⟨R ; R deki üreteçleri içeren bağıntılar⟩

ve

G_2=⟨S ; S deki üreteçleri içeren bağıntılar⟩

gruplarının serbest çarpımıdır.

Serbest çarpımlar, serbest gruplarla bir çok özelliği paylaşır. Örneğin Kurosh'un teoremi ile, serbest gruplar için verilmiş olan Nielsen-Schreier teoremi serbest çarpımlara genişletilmiştir.

2.8.11 Teorem (Kurosh): G, A_α alt gruplarının serbest çarpımı yani,

$$G=\prod_{\alpha} {}_{\star} A_\alpha$$

olsun. Eğer H, G nin bir alt grubu ise

$$H=F\star\prod_{\beta} {}_{\star} B_\beta$$

olur. Burada F bir serbest grup ve her bir β için B_β, bir A_α alt grubuna eşleniktir [2].□

2.8.12 Teorem: Eğer G=A⋆B ve H⊂A, K⊂B ise H ve K ile üretilen alt grup bunların serbest çarpımıdır. Yani $\langle H,K\rangle = H\star K$ dır.□

2.8.13 Tanım: $A=\langle a_1,...;R_1,...\rangle$ ve $B=\langle b_1,...;S_1,...\rangle$ iki grup, H⊂A, K⊂B has alt gruplar ve Φ:H→K bir izomorfizm olsun. A ve B nin, H yi K ya birleştirerek elde edilen serbest çarpımı, gösterimi

$$G=\langle a_1,...,b_1,...;R_1,...,S_1,...,H=\Phi(H)\rangle$$

olan G grubudur. G grubunun üreteçleri A ve B nin üreteçlerinin ayrık birleşimidir ve bağıntıları da A ve B nin bağıntıları ile birlikte alt grup izomorfizmini veren bağıntıların ek bir kümesinden oluşur.

H izomorfik resmi ile özdeşlendiği için G, A ve B gruplarının H ile *birleştirilmiş serbest çarpımıdır* denir. Bu çarpım $G=A\star_H B$ ile gösterilir. A ile B gruplarına G nin çarpanları denir.

Bir G grubu eğer aşikar olmayan bir H has alt grubu ve her ikisi de aşikar olmayan G_1 ve G_2 grupları için $G=G_1\star_H G_2$ ise G birleştirilmiş bir serbest çarpımdır.

H={1} alınırsa bir serbest çarpım elde edilir. Bu nedenle serbest çarpımlar, birleştirilmiş serbest çarpımların özel halleridir.

3. HECKE GRUPLARI

Bu bölüm, bundan sonraki bölümde inceleyeceğimiz genişletilmiş Hecke gruplarına geçmeden önce, Hecke gruplarının tanıtılması ve genel özelliklerine ayrılmıştır. Hecke grupları ve temel bölgesi tanımlanacak, ayrıca Hecke gruplarının çift, komütatör, kuvvet, denklik ve temel denklik alt grupları tanıtılacak ve bunların grup yapıları hakkında bilgi verilecektir. Bu bölümde [2,19,20] temel referans olarak alınmıştır.

3.1 Hecke Grupları

Erich Hecke, 1936 yılında "Über die Bestimmung Dirichletcher Reichen durch ihre Funktionalgleichungen" adlı çalışmasında, λ sabit bir pozitif sayı olmak üzere,

$$T(z) = -\frac{1}{z} \quad \text{ve} \quad U(z) = z + \lambda \tag{3.1}$$

kesirli doğrusal dönüşümleri ile üretilen ve H(λ) ile gösterilen grupları tanıtmıştır, [1]. Burada S = T .U alınırsa

$$S(z) = -\frac{1}{z+\lambda} \tag{3.2}$$

elde edilir.

Bu gruplar, H(λ) bir Fuchsian grup olduğunda Dirichlet serilerinin çalışılmasında kullanılır. E. Hecke, $\lambda \geq 2$ ve gerçel sayı ise veya $q \geq 3$ bir tamsayı olmak üzere

$$\lambda = \lambda_q = 2\cos\frac{\pi}{q},\ 1 \leq \lambda < 2 \tag{3.3}$$

ise H(λ) grubunun bir temel bölgesinin

$$F_\lambda = \left\{ z \in U : |\mathrm{Re}\, z| < \frac{\lambda}{2},\ |z| > 1 \right\} \tag{3.4}$$

kümesi olduğunu göstermiştir. Ayrıca diğer $\lambda > 0$ değerleri için F_λ kümesinin bir temel bölge olmadığını göstermiştir. Böylece $H(\lambda)$ grubunun bir Fuchsian grup olması için gerek ve yeter koşulun $\lambda = \lambda_q$ veya $\lambda \geq 2$ reel sayı olması gerektiği görülür.

3.1.1 Tanım: Yukarıdaki her iki durumda $H(\lambda)$ grubuna bir *Hecke grubu* denir.

Bu çalışmada özellikle $\lambda<2$ durumuna karşılık gelen $H(\lambda_q)$ Hecke grupları ile ilgileneceğiz. $H(\lambda_q)$ Hecke grubu, PSL(2, **R**) grubunun 2 mertebeli $T(z) = -\frac{1}{z}$ ve q mertebeli $S(z) = -\frac{1}{z+\lambda_q}$ ile üretilen ayrık alt grubudur.

$\lambda = \lambda_q = 2\cos\frac{\pi}{q}$, $1 \leq \lambda < 2$ durumuna karşılık gelen $H(\lambda_q)$ Hecke grupları ve bunların normal alt grupları özellikle [2] de çalışılmıştır.

q = 3 için $\lambda = \lambda_3 = 2\cos\frac{\pi}{3} = 1$ değerine karşılık gelen $H(\lambda_3)$ Hecke grubu modüler grup olarak bilinir ve bu grup literatürde en çok çalışılan gruptur. $H(\lambda_3)$ grubunun elemanlarının tüm katsayıları rasyonel tamsayılardır.

Diğer önemli iki Hecke grubu ise q = 4 ve q = 6 değerlerine karşılık gelen gruplardır ki, bu halde $\lambda_4 = \sqrt{2}$ ve $\lambda_6 = \sqrt{3}$ olur, yani $H(\lambda_4)$ ve $H(\lambda_6)$ dir. Bu iki halde rasyonel sayılar cisminin $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ ve $\mathbf{Q}(\sqrt{3})$ cebirsel genişlemeleri kullanılır.

Ayrıca $H(\lambda_5)$ grubu da çok çalışılan bir Hecke grubudur ve bu durumda da yine rasyonel sayılar cisminin bir genişlemesini elde ederiz. Bu dört Hecke grubu için λ_q derecesi üçten küçük veya üçe eşit olan bir polinomun köküdür.

Öncelikle Hecke gruplarının grup gösterimlerinde de yararlanacağımız grubun temel bölgesini verelim.

3.2 $H(\lambda_q)$ Hecke Grubu İçin Bir Temel Bölge

Bu kısma bir G grubunun temel bölgesini tanımlayarak başlayalım:

3.2.1 Tanım: F, $\boldsymbol{U}$ da açık bir küme olsun. Eğer F açık kümesi,

(i) her bir $z \in \boldsymbol{U}$ için G(z) yörüngesi ile $\overline{F}$ en az bir noktada kesişir.

(ii) her bir $z \in \boldsymbol{U}$ için G(z) yörüngesi ile F en çok bir noktada kesişir.

koşullarını gerçekliyor ise F ye G grubu için bir *temel bölgedir* denir. (i) ve (ii) den

$$\boldsymbol{U} = \bigcup_{g \in G} g(\overline{F})$$

ve eğer $I \neq g \in G$ ise

$$g(F) \cap F = \varnothing$$

olduğu görülür.

En çok çalışılan $H(\lambda_3)$ modüler grubu için bir temel bölge

$$F = \left\{ z \in \boldsymbol{U} : |z| > 1,\ \ |\mathrm{Re}\, z| < \frac{1}{2} \right\}$$

kümesidir [15,16]. Diğer Hecke gruplarının temel bölgeleri E. Hecke tarafından grupların ayrıklıkları araştırılırken aşağıdaki gibi bulunmuştur. R. Evans ise aşağıdaki teoremin oldukça elemanter bir ispatını vermiştir.

3.2.2 Teorem: $\lambda \geq 2$ ve reel sayı ise veya $q \geq 3$ bir tamsayı olmak üzere

$$\lambda = \lambda_q = 2\cos\frac{\pi}{q},\ 1 \leq \lambda < 2$$

ise,

$$F_\lambda = \left\{ z \in \boldsymbol{U} : |\mathrm{Re}\, z| < \frac{\lambda}{2},\ |z| > 1 \right\}$$

kümesi $H(\lambda)$ grubunun bir temel bölgesidir ve diğer $\lambda > 0$ için bir temel bölge bulunamaz [17].□

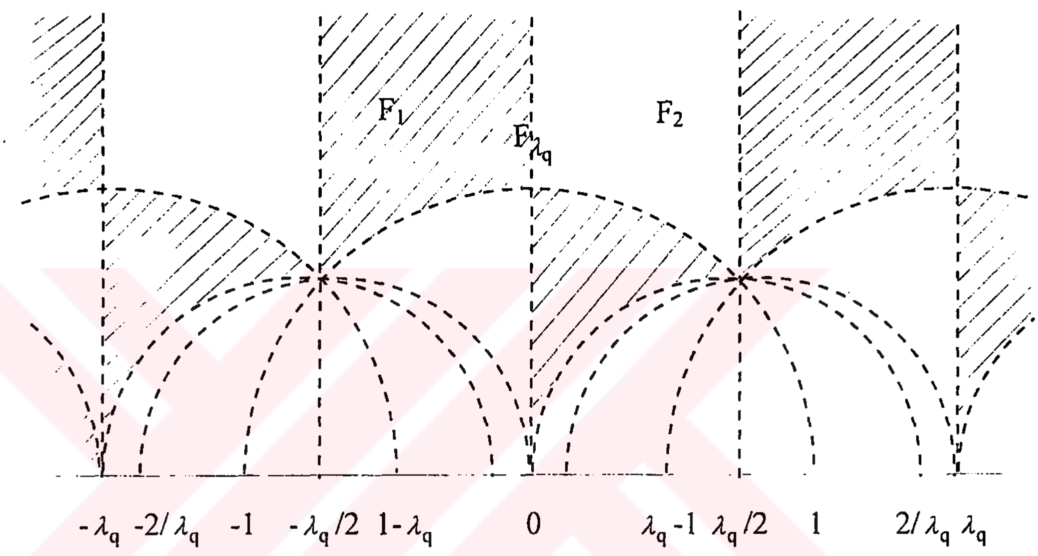
Dolayısıyla $H(\lambda_q)$ Hecke grubu için bir temel bölge olarak

$$F_{\lambda_q} = \left\{ z \in \boldsymbol{U} : |\mathrm{Re}\, z| < \frac{\lambda_q}{2},\ |z| > 1 \right\}$$

kümesi alınabilir. Bir grubun temel bölgesinin bir tek olmadığı bilinir. Şekil 3.1 de gösterilen $F_{\lambda_q} = F_1 \cup F_2$ kümesi, $H(\lambda_q)$ grubu için bir temel bölgedir. Bazen uygunluk sağlansın diye temel bölgeyi

$$F'_{\lambda_q} = \left\{ z \in U : -\frac{\lambda_q}{2} < \operatorname{Re} z < 0, \left| z + \frac{1}{\lambda_q} \right| > \frac{1}{\lambda_q} \right\} = F_1 \cup T.F_2$$

olarak alacağız.



Şekil 3.1

3.2.3 Tanım: [G,X] bir topolojik dönüşüm grubu ve $P \subseteq X$ olsun. Eğer $g_1, g_2 \in G$, $g_1 \neq g_2$ için $g_1 P \cap g_2 P = \varnothing$ ise o zaman P ye bir *G-paketleme* denir.

Denk olarak, eğer $I \neq g \in G$ için $gP \cap P = \varnothing$ ise o zaman P bir G-paketlemedir. Eğer P bir G-paketleme ise her bir yörüngeden en fazla bir eleman bulundurur [4].

3.2.4 Yardımcı Teorem: H ve K, bir [G, X] topolojik dönüşüm grubunun iki alt grubu olsun. Eğer P bir H-paketleme, Q bir K-paketleme, A = <H, K> (H ve K gruplarının üreteçleri ile üretilen grup), $P \cup Q = X$, $P \cap Q \neq \varnothing$ ise o zaman

$$A = H \star K$$

olur. Ayrıca $P \cap Q$ bir A-paketlemedir [18].□

3.2.5 Teorem: $H(\lambda_q)$ grubu 2 ve q mertebeli sonlu devirli iki grubun serbest çarpımına izomorftur, yani

$$H(\lambda_q) \cong C_2 \star C_q$$

dir [19].□

$H(\lambda_q)$ grubunun grup gösterimi

$$H(\lambda_q) = < T, S \mid T^2 = S^q = I > \cong C_2 \star C_q$$

biçimindedir. Bundan başka, eğer $A \in H(\lambda_q)$ ise det A = 1 olduğu kolayca görülebilir.

Şimdi $H(\lambda_q)$ grubunun normal alt grupları içinde önemli bir yeri olan çift alt gruplarını tanıtalım.

3.3 $H(\lambda_q)$ Hecke Gruplarının Çift Alt Grupları

$H(\lambda_q)$ Hecke grubunun elemanlarını aşağıdaki gibi iki sınıfa ayırabiliriz;

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} a & b\lambda_q \\ c\lambda_q & d \end{pmatrix} \quad ad - bc\lambda_q^2 = 1$$

$$\text{(b)} \begin{pmatrix} a\lambda_q & b \\ c & d\lambda_q \end{pmatrix} \quad ad\lambda_q^2 - bc = 1$$

Burada λ_q^2 ye bağlı polinomun a,b,c ve d katsayılarının tümü rasyonel tamsayılardır.

3.3.1 Tanım: (a) tipinde olan elemanlara *çift elemanlar* ve (b) tipindeki elemanlara da *tek elemanlar* denir.

Tanımlarına dikkat edilirse,

tek . tek = çift . çift = çift

çift . tek = tek . çift = tek

olduğu kolayca görülür.

q sayısının çift olması halinde çift elemanların kümesi, $H(\lambda_q)$ grubunun 2 indeksli bir alt grubunu oluşturur. Bu alt gruba *çift alt grup* denir ve $H_ç(\lambda_q)$ ile gösterilir, yani

$$H_ç(\lambda_q) = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b\lambda_q \\ c\lambda_q & d \end{pmatrix} : M \in H(\lambda_q) \right\}$$

dir. $H_ç(\lambda_q)$ çift alt grubu TS ve TS^2T ile üretilir, yani

$$H_ç(\lambda_q) \cong \langle TS \rangle \star \langle TS^2T \rangle$$

dir. $H_ç(\lambda_q)$ çift alt grubu $H(\lambda_q)$ grubunda 2 indeksli olduğundan normal alt gruptur. $H(\lambda_q)$ grubunda $H_ç(\lambda_q)$ çift alt grubunun diğer koseti tek elemanlardan oluşan

$$H_t(\lambda_q) = \left\{ N = \begin{pmatrix} a\lambda_q & b \\ c & d\lambda_q \end{pmatrix} : N \in H(\lambda_q) \right\}$$

kümesidir. Diğer yandan $T \notin H_ç(\lambda_q)$ olduğundan

$$H(\lambda_q) = H_ç(\lambda_q) \cup T.H_ç(\lambda_q)$$

olarak yazılabilir [20].

q sayısının tek sayı olması halinde $H(\lambda_q)$ bir çift alt gruba sahip değildir.

$H_ç(\lambda_q)$, $H(\lambda_q)$ grubunun sonsuz tane normal alt grubunu içerdiği için önemli bir yere sahiptir. Ayrıca çift alt grupları Hecke gruplarının temel denklik alt gruplarının grup yapılarının belirlenmesinde ve sınıflandırılmasında da kullanılır.

3.4 $H(\lambda_q)$ Hecke Gruplarının Kamütatör Alt Grupları

$H(\lambda_q)$ grubunun kamütatör alt grubu $H'(\lambda_q)$ ile gösterilir ve $H(\lambda_q)/H'(\lambda_q)$ bölüm grubu

$$T^2 = S^q = I \quad \text{ve} \quad TS = ST$$

bağıntılarına sahiptir. Dolayısıyla

$$H(\lambda_q)/H'(\lambda_q) \cong C_2 \times C_q$$

biçiminde ifade edilebilir. Böylece

$$|H(\lambda_q)/H'(\lambda_q)| = 2q$$

olacağından, Reidemeister-Schreier metodu ile $H'(\lambda_q)$ grubunun üreteçleri olarak

$$a_1 = TSTS^{q-1},\ a_2 = TS^2TS^{q-2}, \ldots,\ a_{q-1} = TS^{q-1}TS$$

seçilebilir. Bu ise $H'(\lambda_q)$ kamütatör alt grubunun $q-1$ ranklı bir serbest grup olduğunu gösterir.

Aşağıdaki teorem çift altgruplar ile kamütatör alt grupları arasındaki ilişkiyi ortaya koyar.

3.4.1 Teorem: q çift sayı olsun. $H(\lambda_q)$ grubunun $H'(\lambda_q)$ kamütatör alt grubu, $H_ç(\lambda_q)$ çift alt grubunun, q indeksli, bir normal alt grubudur [20].□

3.4.2 Sonuç: $H'(\lambda_q)$ kamütatör alt grubu sadece çift elemanlardan oluşur.

3. 5 $H(\lambda_q)$ Hecke Gruplarının $H^m(\lambda_q)$ Kuvvet Alt Grupları

3.5.1 Tanım. $H(\lambda_q)$ grubunun tüm elemanlarının m. kuvvetleri alınarak üretilen alt gruba $H(\lambda_q)$ grubunun *m. kuvvet alt grubu* denir ve bu alt grup $H^m(\lambda_q)$ ile gösterilir.

$H(\lambda_3)$ Modüler grubunun kuvvet alt grupları [21] de ayrıntılı olarak çalışılmıştır.

$q \geq 3$ bir tamsayı ve $m \in \mathbf{N}$ olsun. $H^m(\lambda_q)$ kuvvet alt grupları tamamen değişmez olduklarından, $H(\lambda_q)$ içinde normaldirler. Tanımdan

$$H^m(\lambda_q) > H^{mn}(\lambda_q) \tag{3.5}$$

$$(H^m(\lambda_q))^n > H^{mn}(\lambda_q) \tag{3.6}$$

ve buradan

$$H^m(\lambda_q).H^n(\lambda_q) = H^{(m,n)}(\lambda_q) \tag{3.7}$$

oldukları kolayca görülür. Bu eşitliği göstermeden önce bu çarpımın iyi tanımlı olduğunu söyleyelim. (3.5)' den

$$H^{(m,n)}(\lambda_q) \geq H^m(\lambda_q) \tag{3.8}$$

$$H^{(m,n)}(\lambda_q) \geq H^n(\lambda_q) \tag{3.9}$$

ve buradan

$$H^{(m,n)}(\lambda_q) \geq H^m(\lambda_q).H^n(\lambda_q) \tag{3.10}$$

bulunur.

Şimdi de kapsamanın diğer tarafını gösterelim. z, $H(\lambda_q)$ grubunun herhangi bir elemanı olsun. m_1 ve n_1 tam sayılarını $m_1 m + n_1 n = (m,n)$ olacak biçimde seçelim. Buradan

$$z^{m_1 m} \in H^m(\lambda_q), \ z^{n_1 n} \in H^n(\lambda_q) \tag{3.11}$$

ve dolayısıyla

$$z^{m_1 m + n_1 n} \in H^m(\lambda_q).H^n(\lambda_q) \tag{3.12}$$

elde edilir. Böylece

$$z^{(m,n)} \in H^m(\lambda_q).H^n(\lambda_q) \tag{3.13}$$

bulunur. Buradan

$$H^{(m,n)}(\lambda_q) \leq H^m(\lambda_q).H^n(\lambda_q) \tag{3.14}$$

ve (3.10) ile (3.14)' den

$$H^{(m,n)}(\lambda_q) = H^m(\lambda_q).H^n(\lambda_q) \tag{3.15}$$

eşitliği bulunur.

Burada q tek sayı olması halinde

$$H(\lambda_q) = H^2(\lambda_q).H^q(\lambda_q) \tag{3.16}$$

olduğu görülür.

Şimdi q sayısının tek ya da çift sayı olmasına göre kuvvet alt gruplarını inceleyelim.

I. Hal: q tek sayı olsun.

3.5.1 Teorem: $H^2(\lambda_q)$ normal alt grubu q mertebeli iki devirli grubun serbest çarpımıdır. Ayrıca

$$|H(\lambda_q)/H^2(\lambda_q)| = 2$$

$$H(\lambda_q) = H^2(\lambda_q) \cup T.H^2(\lambda_q)$$

ve

$$H^2(\lambda_q) = <S> \star <TST>$$

olur. $H^2(\lambda_q)$ grubunun elemanları T elemanının üsleri toplamının çift olması ile belirlenebilir [2].□

3.5.2 Teorem: $H^q(\lambda_q)$ normal alt grubu iki mertebeli q tane devirli grubun serbest çarpımıdır. Ayrıca

$$|H(\lambda_q)/H^q(\lambda_q)| = q$$

$$H(\lambda_q) = H^q(\lambda_q) \cup S.H^q(\lambda_q) \cup \ldots \cup S^{q-1}.H^q(\lambda_q)$$

ve

$$H^q(\lambda_q) = <T> \star <STS^{q-1}> \star <S^2TS^{q-2}> \star \ldots \star <S^{q-1}TS>$$

olur. $H^q(\lambda_q)$ grubunun elemanları S nin üsleri toplamının q ile bölünebilmesi ile belirlenebilir [2].□

3.5.3 Teorem: p tek bir sayı olsun. $H^m(\lambda_p)$ alt grubu aşağıdaki biridir;

$$H^m(\lambda_p) = \begin{cases} H(\lambda_p), & (m,2p) = 1 \\ H^2(\lambda_p), & (m,p) = 1 \text{ ve } m \text{ çift} \\ H^p(\lambda_p), & m, p \text{ nin tek bir katı} \end{cases}$$

İspat: [2]' ye bakınız.□

Burada m bir doğal sayı olmak üzere $H^{2pm}(\lambda_p)$ alt grupları kalır. Bu durum için komütatör alt gruplarını kullanılır.

$H(\lambda_q)$ grubunun $H'(\lambda_q)$ komütatör alt grubunun $q-1$ ranklı serbest bir gruba izomorf olduğu ve indeksinin de 2q olduğu 3.2 Kısımda belirtilmişti.

3.5.1 Teorem: $H^2(\lambda_q)$ normal alt grubu q mertebeli iki devirli grubun serbest çarpımıdır. Ayrıca

$$|H(\lambda_q)/H^2(\lambda_q)| = 2$$

$$H(\lambda_q) = H^2(\lambda_q) \cup T.H^2(\lambda_q)$$

ve

$$H^2(\lambda_q) = \langle S \rangle \star \langle TST \rangle$$

olur. $H^2(\lambda_q)$ grubunun elemanları T elemanının üsleri toplamının çift olması ile belirlenebilir [2].□

3.5.2 Teorem: $H^q(\lambda_q)$ normal alt grubu iki mertebeli q tane devirli grubun serbest çarpımıdır. Ayrıca

$$|H(\lambda_q)/H^q(\lambda_q)| = q$$

$$H(\lambda_q) = H^q(\lambda_q) \cup S.H^q(\lambda_q) \cup \ldots \cup S^{q-1}.H^q(\lambda_q)$$

ve

$$H^q(\lambda_q) = \langle T \rangle \star \langle STS^{q-1} \rangle \star \langle S^2TS^{q-2} \rangle \star \ldots \star \langle S^{q-1}TS \rangle$$

olur. $H^q(\lambda_q)$ grubunun elemanları S nin üsleri toplamının q ile bölünebilmesi ile belirlenebilir [2].□

3.5.3 Teorem: p tek bir sayı olsun. $H^m(\lambda_p)$ alt grubu aşağıdaki biridir;

$$H^m(\lambda_p) = \begin{cases} H(\lambda_p), & (m,2p) = 1 \\ H^2(\lambda_p), & (m,p) = 1 \text{ ve } m \text{ çift} \\ H^p(\lambda_p), & m, p \text{ nin tek bir katı} \end{cases}$$

İspat: [2]' ye bakınız.□

Burada m bir doğal sayı olmak üzere $H^{2pm}(\lambda_p)$ alt grupları kalır. Bu durum için komütatör alt gruplarını kullanılır.

$H(\lambda_q)$ grubunun $H'(\lambda_q)$ kamütatör alt grubunun $q-1$ ranklı serbest bir gruba izomorf olduğu ve indeksinin de 2q olduğu 3.2 Kısımda belirtilmişti.

Burada q tek sayı olduğu için $H(\lambda_q)/H^2(\lambda_q)$ ve $H(\lambda_q)/H^q(\lambda_q)$ bölüm grupları devirlidirler, dolayısıyla da değişmelidirler. O halde

$$H^2(\lambda_q) > H'(\lambda_q), \quad H^q(\lambda_q) > H'(\lambda_q)$$

ve böylece de

$$H^2(\lambda_q) \cap H^q(\lambda_q) > H'(\lambda_q)$$

olarak bulunur. $H^2(\lambda_q)$ ve $H^q(\lambda_q)$, $H(\lambda_q)$ grubunun normal alt grubu oldukları için birinci izomorfizm teoreminden

$$H^2(\lambda_q).H^q(\lambda_q)/H^q(\lambda_q) \cong H^2(\lambda_q)/(H^2(\lambda_q) \cap H^q(\lambda_q))$$

yazılır. Ancak $H^2(\lambda_q).H^q(\lambda_q) \cong H(\lambda_q)$ olduğundan

$$|H^2(\lambda_q) : H^2(\lambda_q) \cap H^q(\lambda_q)| = q$$

ve buradan

$$|H^2(\lambda_q) : H^2(\lambda_q) \cap H^q(\lambda_q)| = 2q$$

elde edilir.

Diğer yandan

$$H(\lambda_q) > H^2(\lambda_q) \cap H^q(\lambda_q) > H'(\lambda_q)$$

ve

$$|H(\lambda_q) : H'(\lambda_q)| = |H(\lambda_q) : H^2(\lambda_q) \cap H^q(\lambda_q)| = 2q$$

olarak bulunur. Buradan aşağıdaki sonuç elde edilir.

3.5.4 Sonuç: $H(\lambda_q)$ grubunun $H'(\lambda_q)$ kamütatör alt grubu

$$H'(\lambda_q) = H^2(\lambda_q) \cap H^q(\lambda_q)$$

eşitliğini sağlar.□

Şimdi $H^{2qm}(\lambda_q)$ alt gruplarını ele alalım.

$$H^2(\lambda_q) > H^{2q}(\lambda_q) \text{ ve } H^q(\lambda_q) > H^{2q}(\lambda_q)$$

olduğundan ve yukarıdaki sonuç gereğince

$$H'(\lambda_q) > H^{2q}(\lambda_q)$$

bulunur. $H'(\lambda_q)$ serbest grup olduğundan $H^{2q}(\lambda_q)$ grubu da serbest bir gruptur. Buradan da m bir doğal sayı olmak üzere

$$H^{2q}(\lambda_q) > H^{2qm}(\lambda_q)$$

bulunur. Böylece şu sonuç elde edilir.

3.5.5 Sonuç : $H^{2qm}(\lambda_q)$ alt grupları serbesttir.□

II. Hal: q çift sayı olsun. İlk olarak q = 4 durumunu ele alalım.

3.5.6 Teorem : $H^2(\lambda_4)$ normal alt grubu sonsuz devirli **Z** grubu ile iki mertebeli sonlu devirli iki grubun serbest çarpımına izomorftur. Ayrıca

$$H(\lambda_4)/H^2(\lambda_4) \cong C_2 \times C_2$$

$$H(\lambda_4) = H^2(\lambda_4) \cup T.H^2(\lambda_4) \cup S.H^2(\lambda_4) \cup TS.H^2(\lambda_4)$$

ve

$$H^2(\lambda_4) = <S^2> \star <TS^2T> \star <TSTS^3>$$

olur. $H^2(\lambda_4)$ grubunun elemanları T ve S nin üsleri toplamının çift olması ile belirlenebilir [2].□

3.5.7 Teorem: m pozitif bir tek sayı olsun. O zaman

$$H^m(\lambda_4) = H(\lambda_4).$$

İspat aşikardır. □

3.5.8 Teorem: m ≡ 2 (mod 4) olacak biçimde pozitif bir tamsayı olsun. $H^m(\lambda_4)$ grubu sonsuz devirli **Z** grubu ile iki mertebeli m tane devirli grubun serbest çarpımına izomorftur [2]. □

Şimdi m, dördün bir katı olsun. $H(\lambda_4)/H^2(\lambda_4)$ bölüm grubunda $t^2 = s^4 = I$ bağıntıları vardır. Burada t ile s, $H(\lambda_4)$ grubunun $H(\lambda_4)/H^2(\lambda_4)$ bölüm grubuna homomorfizmi altında T ile S elemanlarının görüntüleridir. Bu bağıntılardan $H^m(\lambda_4)$ serbest bir gruptur.

Şimdi de q = 6 durumunu inceleyelim.

3.5.9 Teorem : $H^2(\lambda_6)$ normal alt grubu sonsuz devirli **Z** grubu ile iki mertebeli sonlu devirli iki grubun serbest çarpımına izomorftur. Ayrıca

$$H(\lambda_6)\ /\ H^2(\lambda_6) \cong C_2 \times C_2$$

$$H(\lambda_6) = H^2(\lambda_6) \cup T.H^2(\lambda_6) \cup S.H^2(\lambda_6) \cup TS.H^2(\lambda_6)$$

ve

$$H^2(\lambda_6) = <S^2> \star <TS^2T> \star <TSTS^3>$$

olur. $H^2(\lambda_6)$ grubunun elemanları T ve S nin üsleri toplamının çift olması ile belirlenebilir [2].□

3.5.10 Teorem : $H^3(\lambda_6)$ normal alt grubu iki mertebeli dört devirli grubun serbest çarpımıdır. Ayrıca

$$H(\lambda_6) / H^3(\lambda_6) \cong C_3$$

$$H(\lambda_6) = H^3(\lambda_6) \cup S.H^3(\lambda_6) \cup S^2.H^3(\lambda_6)$$

ve

$$H^3(\lambda_6) = <T> \star <S^3> \star <STS^5> \star <S^2TS^4>.$$

İspat: [2]' ye bakınız.□

Buradan aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

3.5.11 Teorem: $m \equiv \pm 1 \bmod 6$. O zaman $H^m(\lambda_6) = H(\lambda_6)$.□

3.5.12 Teorem: $m \equiv \pm 2 \bmod 6$. O zaman $H^m(\lambda_6) = W_m(\lambda_6)$, burada $W_m(\lambda_6)$ ile n tane iki mertebeli devirli grup ile sonsuz mertebeli **Z** grubunun serbest çarpımına izomorf olan grubu gösteriyoruz.□

3.5.13 Teorem: $m \equiv 3 \bmod 6$. O zaman $H^m(\lambda_6)=H^3(\lambda_6)$.□

Şimdi sadece m sayısının 6 ile bölünebildiği durum kalır. Bu durumda da $H^m(\lambda_6)$ serbest bir grup olduğu görülür.

3.6 $H(\lambda_q)$ Hecke Gruplarının Temel Denklik Alt Grupları

3.6.1 Tanım: $H(\lambda_3)$ grubunun *n seviyeli temel denklik alt grubu*

$$H_n(\lambda_3)=\left\{T(z)=\frac{az+b}{cz+d}\in H(\lambda_3): a\equiv d\equiv \pm 1,\ \ b\equiv c\equiv 0(\operatorname{mod} n)\right\}$$

biçiminde tanımlanır [22, 23]. $H(\lambda_3)$ grubunun bir $H_n(\lambda_3)$ temel denklik alt grubunu içeren bir alt grubuna *n seviyeli bir denklik alt grubu* denir.

$H_n(\lambda_3)$, $H(\lambda_3)$ grubunun bir normal alt grubudur. Fakat genelde, tüm temel denklik alt grupları normal değildirler.

q = 4, 6 ve p asal sayı olmak üzere, $H(\sqrt{m})$ (m = 2, 3) grubunun *p seviyeli temel denklik alt grubu*

$$H_p(\sqrt{m})=\{\, M\in H(\sqrt{m}): M\equiv \pm I(\operatorname{mod} p)\,\}$$

olarak tanımlanır, yani

$$H_p(\sqrt{m})=\left\{T(z)=\frac{az+b\sqrt{m}}{c\sqrt{m}z+d}: a\equiv d\equiv \pm 1,\ \ b\equiv c\equiv 0(\operatorname{mod} p), ad-mbc=1\right\}$$

dir [24,25].

Genelde ise $q \geq 3$ bir doğal sayı ve p bir asal sayı olmak üzere, $H(\lambda_q)$ *grubunun p seviyeli temel denklik alt grubu*

$$H_p(\lambda_q)=\{\, T\in H(\lambda_q): T\equiv \pm I(\operatorname{mod} p)\,\}$$

$$H_p(\lambda_q)=\left\{\begin{pmatrix} a & b\lambda_q \\ c\lambda_q & d\end{pmatrix}: a\equiv d\equiv \pm 1,\ \ b\equiv c\equiv 0(\operatorname{mod} p), ad-\lambda_q bc=1\right\}$$

biçiminde tanımlanır. Tanımdan dolayı

$$H_p(\lambda_q)\lhd H_ç(\lambda_q)$$

olduğu görülür.

$H_p(\lambda_q)$ grubunu elde etmenin bir diğer yöntemi, p asal olmak üzere p modülüne göre "indirgeme homomorfizmi" ni göz önüne almaktır.

$\wp$, $Z(\lambda_q)$ nun bir ideali olsun. O zaman

$$\Theta_{\wp} : Z(\lambda_q) \rightarrow Z(\lambda_q)/\wp$$

doğal dönüşümü bir

$$H(\lambda_q) \rightarrow PSL\,(2, Z(\lambda_q)/\wp)$$

dönüşümü indirger ki bu dönüşümün çekirdeği seviyesi $\wp$ olan temel denklik alt grubu olarak adlandırılacaktır. Şimdi s, $P_q^*(\lambda_q)$ polinomunun $GF(p^s)$ de çözümü olacak şekilde bir tamsayı olsun. Böyle bir s sayısının olduğunu ve

$$1 \leq s \leq d \;=\; \operatorname{der} P_q^*(\lambda_q)$$

olduğunu biliyoruz. u, $P_q^*(\lambda_q)$ nin $GF(p^s)$ de bir çözümü olsun. $Z[\lambda_q]$ da u ile üretilen ideali $\wp$ olarak alalım. Yukarıdaki gibi, $\lambda_q \rightarrow$ u ile indirgenmiş homomorfizm olarak

$$\Theta_{p,u,q} : H(\lambda_q) \rightarrow PSL(2\,, p^s)$$

tanımlayabiliriz.

$$K_{p,u}(\lambda_q) = \text{Çek}\,(\Theta_{p,u,q})$$

olsun. $K_{p,u}(\lambda_q)$, $H(\lambda_q)$ nun bir homomorfizminin çekirdeği olduğundan $H(\lambda_q)$ da normaldir. Eğer u ve v, $GF(p^s)$ üzerinde $P_q^*(\lambda_q)$ nun aynı indirgenemeyen f çarpanına karşılık geliyorlarsa o zaman

$$K_{p,u}(\lambda_q) = K_{p,v}(\lambda_q)$$

olur. $K_{p,u}(\lambda_q)$, $H(\lambda_q)$ grubunun p seviyeli bir normal denklik alt grubudur, yani

$$H_p(\lambda_q) \trianglelefteq K_{p,u}(\lambda_q)$$

dir. Buradan

$$H_p(\lambda_q) \leq \bigcap_{\text{tüm } u\,lar} K_{p,u}(\lambda_q)$$

bulunur. $H_p(\lambda_q)$ grubunun $K_{p,u}(\lambda_q)$ içindeki indeksinin, birkaç durum hariç 1 ya da 2 olduğu görülebilir.

Şimdi $H(\lambda_q)$ gruplarının $H_p(\lambda_q)$ ve $K_{p,u}(\lambda_q)$ grupları ile bölüm gruplarını ve bunların grup yapılarını bulalım. Öncelikle $H(\lambda_q)$ nun $K_{p,u}(\lambda_q)$ ile bölümünü bulacağız. Bu durumda $H(\lambda_q)/H_p(\lambda_q)$' yu belirlemek daha kolay olacaktır. q = 4, 5, 6 ve 7 durumlarına bakalım [2].

q = 4 için $H(\sqrt{2})$ grubunun $K_{p,u}(\sqrt{2})$ denklik alt grupları ve $H_p(\sqrt{2})$ temel denklik alt grupları ile bölüm grupları aşağıdadır.

$$H(\sqrt{2})/K_{p,u}(\sqrt{2}) \cong \begin{cases} PSL(2,p) & ;\ p \equiv \pm 1 \pmod 8 \\ PGL(2,p) & ;\ p \equiv \pm 3 \pmod 8 \\ C_2 & ;\ p = 2 \end{cases}$$

ve

$$H(\sqrt{2})/H_p(\sqrt{2}) \cong \begin{cases} C_2 \times PSL(2,p) & ;\ p \equiv \pm 1 \pmod 8 \\ PGL(2,p) & ;\ p \equiv \pm 3 \pmod 8 \\ D_4 & ;\ p = 2 \end{cases}$$

q = 5 için $H(\lambda_5)$ grubunun $K_{p,u}(\lambda_5)$ temel denklik alt gruplarına bölüm grupları aşağıdadır.

$$H(\lambda_5)/K_{p,u}(\lambda_5) \cong \begin{cases} PSL(2,p) & ;\ p \equiv \pm 1 \pmod{10} \\ PSL(2,p^2) & ;\ p \equiv \pm 3 \pmod{10} \text{ ve } p \neq 3 \\ D_5 & ;\ p = 2 \\ A_5 & ;\ p = 3,5 \end{cases}$$

q = 6 için $H(\sqrt{3})$ grubunun $K_{p,u}(\sqrt{3})$ denklik alt grupları ve $H_p(\sqrt{3})$ temel denklik alt grupları ile bölüm grupları aşağıdadır.

$$H(\sqrt{3})/K_{p,u}(\sqrt{3}) \cong \begin{cases} PSL(2,p) & ;\ p \equiv \pm 1 \pmod{12} \\ PGL(2,p) & ;\ p \not\equiv \pm 1 \pmod{12} \text{ ve } p \neq 2 \\ C_2 & ;\ p = 3 \\ D_3 & ;\ p = 2 \end{cases}$$

ve

$$H(\sqrt{3})/H_p(\sqrt{3}) \cong \begin{cases} C_2 \times PSL(2,p) & ;\ p \equiv \pm 1 \pmod{12} \\ PGL(2,p) & ;\ p \not\equiv \pm 1 \pmod{12} \text{ ve } p \neq 2 \\ (C_3 \times C_3) \wr C_2 & ;\ p = 3 \\ D_6 & ;\ p = 2 \end{cases}$$

$q = 7$ için $H(\lambda_7)$ grubunun $K_{p,u}(\lambda_7)$ temel denklik alt gruplarına bölüm grupları aşağıdadır.

$$H(\lambda_7)/K_{p,u}(\lambda_7) \cong \begin{cases} PSL(2,p) & ; \ p \equiv \pm 1 \ (\text{mod } 7) \\ PSL(2,p^3) & ; \ p \not\equiv \pm 1 \ (\text{mod } 7) \text{ ve } p \neq 2 \\ PSL(2,7) & ; \ p = 7 \\ D_7 & ; \ p = 2 \end{cases}$$

4. GENİŞLETİLMİŞ HECKE GRUPLARI

Bu bölüm çalışmada elde edilen tanım, teorem ve sonuçlardan oluşturmaktadır. Genişletilmiş Hecke grupları tanımlanacak, genişletilmiş Hecke gruplarının temel bölgesi ve bazı özellikleri verilecektir. Ayrıca genişletilmiş Hecke gruplarının çift, kamütatör, kuvvet, denklik ve temel denklik alt grupları tanıtılacak ve bunların grup yapıları hakkında bilgi verilecektir.

4.1 Genişletilmiş Hecke Grupları

Hecke gruplarını bir yansıma ile genişletelim. Bu yansımayı

$$R_1(z) = 1/\bar{z}$$

olarak alalım, [26,27]. Bu yansıma birim çembere göre yansımadır ve *U* nun bir anti-otomorfizmidir. Hecke gruplarının her bir elemanını R_1 ile çarpalım ve elde edilen kümeyi $\overline{H}(\lambda_q)$ ile gösterelim. Bu küme

$$\overline{H}(\lambda_q) = H(\lambda_q) \cup R_1\, H(\lambda_q)$$

biçimindedir. $\overline{H}(\lambda_q)$ kümesinin fonksiyonların bileşkesi işlemine göre bir grup olduğu kolayca görülebilir.

4.1.1 Tanım: Hecke gruplarına $R_1(z) = 1/\bar{z}$ yansıması katılarak elde edilen $\overline{H}(\lambda_q)$ grubuna *genişletilmiş Hecke grubu* denir.

Hecke gruplarının, genişletilmiş Hecke grupları içindeki indeksinin 2 olduğu kolayca görülür. Dolayısıyla, Hecke grupları, genişletilmiş Hecke gruplarının normal altgruplarıdır.

S ve T, Hecke grubunun üreteçleri olmak üzere

$$R_2 = R_1 S \quad \text{ve} \quad R_3 = R_1 T$$

dönüşümlerini alalım.

$$S(z) = -\frac{1}{z+\lambda_q} \text{ ve } T(z) = -\frac{1}{z}$$

olduğundan R_2 ve R_3 dönüşümleri

$$R_2(z) = \frac{-1}{\bar{z}+\lambda_q} \quad \text{ve} \quad R_3(z) = -\bar{z}$$

olur. Bu dönüşümlerin matris gösterimlerinin ise

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \lambda_q \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad R_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

oldukları görülür (burada her bir $A \in \mathbf{Z}[\lambda_q]$ matrisi ile $-A$ matrisi $PGL(2, \mathbf{Z}[\lambda_q])$ nin aynı elemanına eşlenir). R_1, R_2 ve R_3 yansımaları genişletilmiş Hecke gruplarının üreteçleridir. Dolayısıyla genişletilmiş Hecke gruplarının grup gösterimleri

$$\overline{H}(\lambda_q) =< R_1, R_2, R_3 \mid R_1^2 = R_2^2 = R_3^2 = (R_1R_2)^3 = (R_3R_1)^2 = I >$$

biçimindedir. Burada

$$R_1R_3 = R_3R_1 = T, \; R_1R_2 = S \text{ ve. } R = R_1$$

olduğu dikkate alınırsa, genişletilmiş Hecke grubunun gösterimini

$$\overline{H}(\lambda_q) =< T, S, R \mid T^2 = S^q = R^2 = I, \; TR = RT, \; RS = S^{-1}R > \tag{4.1}$$

biçiminde ifade edebiliriz. $TR = RT$ ve $RS = S^{-1}R$ bağıntıları dikkate alınırsa $(TR)^2 = I$ ve $(RS)^2 = I$ bağıntıları elde edilir. Dolayısıyla genişletilmiş Hecke gruplarının gösterimi

$$\overline{H}(\lambda_q) =< T, S, R \mid T^2 = S^q = R^2 = (TR)^2 = (RS)^2 = I > \tag{4.2}$$

biçiminde ifade edilebilir.

4.2 $\overline{H}(\lambda_q)$ Genişletilmiş Hecke Grubu İçin Bir Temel Bölge

Üçüncü bölümde $H(\lambda_3)$ modüler grubu için bir temel bölgenin nasıl elde edildiğinden söz etmiştik. Bu kısımda ise genişletilmiş modüler grubun temel bölgesini ve buradan da genişletilmiş Hecke gruplarının temel bölgesini elde edeceğiz.

4.2.1 Teorem: $\overline{F} = \{z \in U \mid -1/2 < \mathrm{Re}(z) < 0, |z| > 1$ kümesi genişletilmiş modüler grup için bir temel bölgedir, [28].□

Bu teoreme benzer olarak genişletilmiş Hecke grupları için aşağıdaki teoremi verebiliriz.

4.2.2 Teorem: $\overline{F}_{\lambda_q} = \{z \in \mathbf{U} : -\lambda_q / 2 < \mathrm{Re}(z) < 0,\ |z| > 1\}$

kümesi de $\overline{H}(\lambda_q)$ gruplarının bir temel bölgesi olur.

İspat : Hecke grupları için

$$F_{\lambda_q} = \left\{ z \in \mathbf{U} : |\mathrm{Re}\, z| < \frac{\lambda_q}{2},\ |z| > 1 \right\}$$

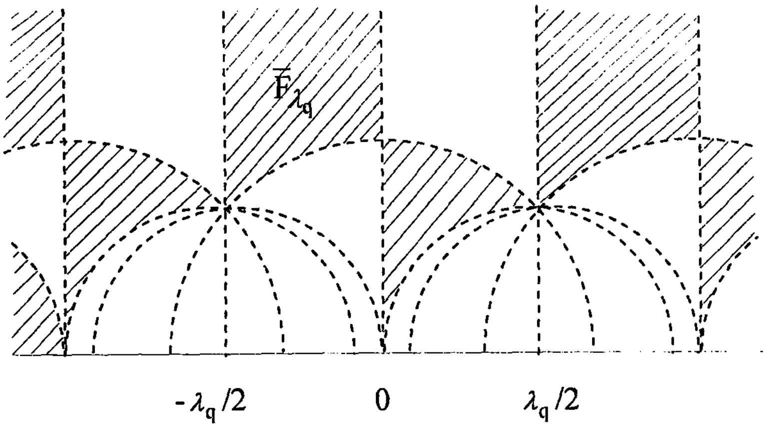
kümesinin bir temel bölge olduğunu 3.2. Kısımdan biliyoruz. Ayrıca Hecke gruplarının, genişletilmiş Hecke gruplarının 2 indeksli bir alt grubu olduğunu da bu bölümün başında belirtmiştik. Dolayısıyla Riemann-Hurwitz formülü gereği, alt grubun temel bölgesinin hiperbolik alanının grubun temel bölgesinin hiperbolik alanına oranı indeksi vereceğinden,

$$\left[H(\lambda_q) : \overline{H}(\lambda_q) \right] = \frac{\mu(\overline{H}(\lambda_q))}{\mu(H(\lambda_q))} = 2$$

olacaktır. Buna göre Hecke gruplarının temel bölgesinin yarısını alarak genişletilmiş Hecke gruplarının temel bölgesini bulabiliriz. Yani Şekil 4.1 de gösterilen

$$\overline{F}_{\lambda_q} = \{z \in \mathbf{U} : -\lambda_q / 2 < \mathrm{Re}(z) < 0,\ |z| > 1\}$$

kümesi de $\overline{H}(\lambda_q)$ grupları için bir temel bölge olur. □



Şekil 4.1

4.2.3 Teorem: Genişletilmiş Hecke gruplarının grup yapısı

$$\overline{H}(\lambda_q) \cong D_2 \star_{Z_2} D_q$$

biçimindedir.

İspat: 4.1 Kısımda genişletilmiş Hecke gruplarının grup gösterimlerinin

$$\overline{H}(\lambda_q) = < T, S, R \mid T^2 = S^q = R^2 = (TR)^2 = (RS)^2 = I >$$

biçiminde olduğu belirtilmişti. Burada R ≡ R özdeşlemesi ile

$$\overline{H}(\lambda_q) = < T, R \mid T^2 = R^2 = (TR)^2 = I > \star < S, R \mid S^q = R^2 = (SR)^2 = I >$$

ve buradan da

$$\overline{H}(\lambda_q) \cong D_2 \star_{Z_2} D_q$$

elde edilir.□

4.3 $\overline{H}(\lambda_q)$ Genişletilmiş Hecke Gruplarının Çift Alt Grupları

3.3 Kısımda verdiğimiz $H(\lambda_q)$ Hecke grubunun çift alt grupları tanımı ile benzer bir tanım ile başlayalım. $\overline{H}(\lambda_q)$ grubunun elemanları iki sınıfa ayrılırlar :

(a) $\begin{pmatrix} a & b\lambda_q \\ c\lambda_q & d \end{pmatrix}$ $\quad ad - bc\lambda_q^2 = \pm 1$

(b) $\begin{pmatrix} a\lambda_q & b \\ c & d\lambda_q \end{pmatrix}$ $\quad ad\lambda_q^2 - bc = \pm 1$

Burada λ_q^2 ye bağlı polinomun a, b, c ve d katsayılarının tümü rasyonel tamsayılardır. (a) tipinde olan elemanlara *çift elemanlar* ve (b) tipindeki elemanlara da *tek elemanlar* diyeceğiz.

Burada $\overline{H}(\lambda_q)$ grubunun tüm elemanlarının tek ya da çift olduğunu gösterelim. $\overline{H}(\lambda_q)$ grubunun üreteçlerinin

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \lambda_q \end{pmatrix} \; \text{ve} \; R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

hepsi de tek elemanlardır. Tek elemanların kümesi kapalı değildir. Gerçekten

$$T.R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gibi iki tek elemanın çarpımı çift elemandır. Daha öncekine benzer olarak

tek . tek = çift . çift = çift

çift . tek = tek . çift = tek

olduğu kolayca görülür. Böylece $\overline{H}(\lambda_q)$ grubunun elemanlarının bir parçalanışını elde etmiş olduk. Diğer yandan $\overline{H}(\lambda_q)$ grubunun her bir M elemanı üreteçlerin bir çarpımı biçiminde yazılabileceğinden M elemanının tek ya da çift olduğunu anlayabiliriz.

q sayısı çift iken çift elemanların kümesi, $\overline{H}(\lambda_q)$ grubunun 2 indeksli bir normal alt grubunu oluşturur. Bu gruba *çift alt grup* denir ve $\overline{H}_ç(\lambda_q)$ ile gösterilir, yani

$$\overline{H}_ç(\lambda_q) = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b\lambda_q \\ c\lambda_q & d \end{pmatrix} : M \in \overline{H}(\lambda_q) \right\}.$$

olur. Şimdi $\overline{H}_ç(\lambda_q)$ grubunun grup yapısını inceleyelim.

4.3.1 Teorem : $\overline{H}(\lambda_q)$ grubunun

$$\overline{H}_ç(\lambda_q) = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b\lambda_q \\ c\lambda_q & d \end{pmatrix} : M \in \overline{H}(\lambda_q) \right\}$$

biçiminde tanımlanan $\overline{H}_ç(\lambda_q)$ çift alt grubu, $\overline{H}(\lambda_q)$ grubunun 2 indeksli bir normal alt grubudur. Ayrıca

$$\overline{H}(\lambda_q) = \overline{H}_ç(\lambda_q) \cup T.\overline{H}_ç(\lambda_q),$$

$$\overline{H}_ç(\lambda_q) \cong \langle ST\rangle \star \langle TS\rangle \star \langle TR\rangle$$

dir.

İspat : $\overline{H}_ç(\lambda_q)$ grubunun $\overline{H}(\lambda_q)$ grubu içindeki indeksi 2 olduğundan $\overline{H}_ç(\lambda_q)$ çift alt grubu, $\overline{H}(\lambda_q)$ grubunun bir normal alt grubudur. $\overline{H}_ç(\lambda_q)$ için bir Schreier sistemi olarak {I, T} kümesini alalım. O zaman Reidemeister-Schreier yöntemini uygularsak aşağıdaki çarpımları elde ederiz.

$$I.T.(T)^{-1} = I \qquad T.T.(I)^{-1} = I$$
$$I.S.(T)^{-1} = ST \qquad T.S.(I)^{-1} = TS$$
$$I.R.(T)^{-1} = RT \qquad T.R.(I)^{-1} = TR$$

Burada TR = RT olduğuna dikkat edilirse, üreteçler ST, TS ve TR olarak elde edilir.□

$\overline{H}(\lambda_q)$ grubunda $\overline{H}_ç(\lambda_q)$ çift alt grubunun dışındaki koset tek elemanlardan oluşur. Tek elemanlar

$$\overline{H}_t(\lambda_q) = \left\{ N = \begin{pmatrix} a\lambda_q & b \\ c & d\lambda_q \end{pmatrix} : N \in \overline{H}(\lambda_q) \right\}$$

biçimindedir ve $T \notin \overline{H}_ç(\lambda_q)$ olduğundan

$$\overline{H}(\lambda_q) = \overline{H}_ç(\lambda_q) \cup T.\overline{H}_ç(\lambda_q)$$

elde edilir.

q tek sayı iken $\overline{H}(\lambda_q)$ grupları da bir çift alt gruba sahip değildir.

4.4 $\overline{H}(\lambda_q)$ Genişletilmiş Hecke Gruplarının Kamütatör Alt Grupları

$\overline{H}(\lambda_q)$ grubunun

$$T^2 = S^q = R^2 = I \ , \ TR = RT, RS = S^{-1}R$$

bağıntılarına sahip olduğunu biliyoruz. $\overline{H}(\lambda_q)$ grubunun kamütatör alt grubu $\overline{H}'(\lambda_q)$ ile gösterilir. $\overline{H}(\lambda_q)$ grubunun mevcut gösterimine üreteçlerin değişmeliliği bağıntısı konulursa $\overline{H}(\lambda_q)/\overline{H}'(\lambda_q)$ bölüm grubunun gösterimi elde edilir. Yani $\overline{H}(\lambda_q)/\overline{H}'(\lambda_q)$ bölüm grubunun gösterimi

$$T^2 = S^q = R^2 = I, \ TR = RT, \ RS = S^{-1}R, \ TS = ST, RS = SR$$

bağıntılarına sahip olur.

Şimdi q sayısının durumlarına göre kamütatör alt grubunu bulalım. Önce q tek sayı olsun.

i) q = 3 durumu ile başlayalım.

$\overline{H}(\lambda_3)$ grubunun

$$\overline{H}(\lambda_3) = \langle T, S, R \mid T^2 = S^3 = R^2 = I,\ TR = RT,\ RS = S^2R \rangle$$

biçiminde bir gösterime sahip olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $\overline{H}(\lambda_3) / \overline{H}'(\lambda_3)$ bölüm grubunun gösterimi

$$\overline{H}(\lambda_3) / \overline{H}'(\lambda_3) = \langle T, S, R \mid T^2 = S^3 = R^2 = I,\ TR = RT,\ RS = S^2R, RS = SR, TS = ST \rangle$$

olarak bulunur. Gösterimdeki

$$RS = S^2R \ \text{ ve } RS = SR$$

eşitliklerinden $S = I$ olduğu görülür. Böylece bölüm grubu

$$\overline{H}(\lambda_3) / \overline{H}'(\lambda_3) = \langle T, R \mid T^2 = R^2 = (TR)^2 = I \rangle$$

gösterimine sahip olur. Bu gösterimden

$$\overline{H}(\lambda_3) / \overline{H}'(\lambda_3) \cong V_4 \cong C_2 \times C_2$$

olduğu elde edilir. Böylece

$$\left|\overline{H}(\lambda_3) / \overline{H}'(\lambda_3)\right| = 4$$

elde edilir.

Şimdi de $\overline{H}'(\lambda_3)$ kamütatör grubunun üreteç kümesini bulalım. $\overline{H}'(\lambda_3)$ için bir Schreier sistemi olarak {I, T, R, TR} kümesini alalım. Reidemeister-Schreier metoduna göre mümkün olan bütün çarpımlar aşağıdadır:

$I.T.(T)^{-1} = I$	$I.S.(I)^{-1} = S$	$I.R.(R)^{-1} = I$
$T.T.(I)^{-1} = I$	$T.S.(T)^{-1} = TST$	$T.R.(TR)^{-1} = I$
$R.T.(TR)^{-1} = RTRT$	$R.S.(R)^{-1} = RSR$	$R.R.(I)^{-1} = I$
$TR.T.(R)^{-1} = TRTR$	$TR.S.(TR)^{-1} = TRSRT$	$TR.R.(T)^{-1} = I$

Burada $RTRT = TRTR = I$, $RSR = S^2$, $TRSRT = TS^{-1}T = (TST)^{-1}$ olduğu R, S, T dönüşümlerinin tanımları hatırlanarak ve gerekli hesaplamalar yapılarak görülebilir. Böylece $\overline{H}'(\lambda_3)$ grubunun üreteç kümesi { S, TST } olarak bulunur. Reidemeister yeniden yazma yöntemi kullanılarak $\overline{H}'(\lambda_3)$ grubunun üreteçleri arasında aşikar olmayan bağıntıların olmadığı görülebilir. Böylece $\overline{H}'(\lambda_3)$ grubunun

$$\overline{H}'(\lambda_3) = < S, TST \mid S^3 = (TST)^3 = I > \cong C_3 \star C_3$$

biçiminde bir gösterimi elde edilir.

ii) İkinci olarak q = 5 durumunu inceleyelim.

$\overline{H}(\lambda_5)$ grubunun

$$\overline{H}(\lambda_5) = < T, S, R \mid T^2 = S^5 = R^2 = I,\ TR = RT,\ RS = S^4R >$$

biçiminde bir gösterimi vardır. Buradan $\overline{H}(\lambda_5)/\overline{H}'(\lambda_5)$ bölüm grubunun da

$$\overline{H}(\lambda_5)/\overline{H}'(\lambda_5) = < T, S, R \mid T^2 = S^5 = R^2 = I,\ TR = RT,\ RS = S^4R, RS = SR, TS = ST >$$

biçiminde bir gösterimi olduğu bulunur. Bu gösterimdeki

$$RS = S^4R \text{ ve } RS = SR$$

bağıntıları yardımıyla, $S^3 = S^5 = S^2 = I$ olduğundan $S = I$ olarak bulunur. Böylece bölüm grubu

$$\overline{H}(\lambda_5)/\overline{H}'(\lambda_5) = < T, R \mid T^2 = R^2 = (TR)^2 = I >$$

gösterimine sahip olur. Buradan

$$\overline{H}(\lambda_5)/\overline{H}'(\lambda_5) \cong V_4 \cong C_2 \times C_2$$

bulunur. Böylece

$$\left|\overline{H}(\lambda_5)/\overline{H}'(\lambda_5)\right| = 4$$

elde edilir.

$\overline{H}'(\lambda_5)$ grubunun üreteç kümesini bulalım. $\overline{H}'(\lambda_5)$ için bir Schreier sistemi olarak {I, T, R, TR} kümesini alalım. Reidemeister-Schreier metoduna göre mümkün olan bütün çarpımlar aşağıdadır:

$I.T.(T)^{-1} = I$	$I.S.(I)^{-1} = S$	$I.R.(R)^{-1} = I$
$T.T.(I)^{-1} = I$	$T.S.(T)^{-1} = TST$	$T.R.(TR)^{-1} = I$
$R.T.(TR)^{-1} = RTRT$	$R.S.(R)^{-1} = RSR$	$R.R.(I)^{-1} = I$
$TR.T.(R)^{-1} = TRTR$	$TR.S.(TR)^{-1} = TRSRT$	$TR.R.(T)^{-1} = I$

Burada RTRT = TRTR = I, RSR = S^4, TRSRT = $TS^4T = (TST)^{-1}$ olduğu R, S ve T dönüşümlerinin değerleri yerine yazılarak gerekli hesaplamaların yapılması ile görülür. Böylece $\overline{H}'(\lambda_5)$ grubunun üreteç kümesi {S, TST} olarak bulunur. Reidemeister yeniden yazma yöntemi kullanılarak $\overline{H}'(\lambda_5)$ grubunun üreteçleri arasında aşikar olmayan bağıntıların olmadığı görülebilir. Böylece $\overline{H}'(\lambda_5)$ grubunun

$$\overline{H}'(\lambda_5) = < S, TST \mid S^5 = (TST)^5 = I > \cong C_5 \star C_5$$

biçiminde bir gösterimi elde edilir.

q tek sayısı için aşağıdaki gibi bir genelleme yapabiliriz.

4.4.1 Teorem : q bir tek sayı olsun.

i) $\overline{H}(\lambda_q) / \overline{H}'(\lambda_q) \cong V_4 \cong C_2 \times C_2$

ii) $\overline{H}'(\lambda_q) = < S, TST \mid S^q = (TST)^q = I > \cong C_q \star C_q$.

İspat: i) $\overline{H}(\lambda_q)$ grubunun gösterimi

$$\overline{H}(\lambda_q) = < T, S, R \mid T^2 = S^q = R^2 = I,\ TR = RT,\ RS = S^{-1}R >$$

biçimindedir. Dolayısıyla $\overline{H}(\lambda_q) / \overline{H}'(\lambda_q)$ bölüm grubunun gösterimi

$$\overline{H}(\lambda_q) / \overline{H}'(\lambda_q) = < T, S, R \mid T^2 = S^q = R^2 = I,\ TR = RT,\ RS = S^{-1}R, RS = SR, TS = ST >$$

olarak bulunur. Böylece

$$RS = S^{-1}R \text{ ve } RS = SR$$

eşitliklerinden $S^{q-2} = S^q = S^2 = I$ olduğu ve q tek sayı olduğundan S = I olarak bulunur. Böylece bölüm grubu

$$\overline{H}(\lambda_q) / \overline{H}'(\lambda_q) = < T, R \mid T^2 = R^2 = (TR)^2 = I >$$

gösterimine sahip olur. O halde

$$\overline{H}(\lambda_5) / \overline{H}'(\lambda_5) \cong V_4 \cong C_2 \times C_2$$

olduğu görülür.

ii) $\overline{H}(\lambda_q) / \overline{H}'(\lambda_q)$ bölüm grubunun indeksi (i) den dolayı

$$\left|\overline{H}(\lambda_q)/\overline{H}'(\lambda_q)\right| = 4$$

olarak bulunur.

Şimdi $\overline{H}'(\lambda_q)$ grubunun üreteç kümesini bulalım. $\overline{H}'(\lambda_q)$ için bir Schreier sistemi olarak {I, T, R, TR} kümesini alalım. Reidemeister-Schreier metoduna göre mümkün olan bütün çarpımlar aşağıdadır:

$I.T.(T)^{-1} = I$	$I.S.(I)^{-1} = S$	$I.R.(R)^{-1} = I$
$T.T.(I)^{-1} = I$	$T.S.(T)^{-1} = TST$	$T.R.(TR)^{-1} = I$
$R.T.(TR)^{-1} = RTRT$	$R.S.(R)^{-1} = RSR$	$R.R.(I)^{-1} = I$
$TR.T.(R)^{-1} = TRTR$	$TR.S.(TR)^{-1} = TRSRT$	$TR.R.(T)^{-1} = I$

Burada $RTRT = TRTR = I$, $RSR = S^{-1}$, $TRSRT = TS^{-1}T = (TST)^{-1}$ olduğu R, S ve T nin değerleri yerine yazılıp, hesaplamalar yapılırsa görülür. Böylece $\overline{H}'(\lambda_q)$ grubunun üreteç kümesi de {S, TST} olarak bulunur. Reidemeister yeniden yazma yöntemi kullanılarak $\overline{H}'(\lambda_q)$ grubunun üreteçleri arasında aşikar olmayan bağıntıların olmadığı görülebilir. Dolayısıyla $\overline{H}'(\lambda_q)$ grubunun

$$\overline{H}'(\lambda_q) = < S, TST \mid S^q = (TST)^q = I > \cong C_q \star C_q$$

biçiminde bir gösterimi elde edilir.□

Şimdi de q çift sayı olması halinde kamütatör alt grubunun ne olduğunu araştıralım.

i) İlk olarak q = 4 durumu ile başlayalım.

$\overline{H}(\lambda_4)$ grubunun

$$\overline{H}(\lambda_4) = < T,S,R \mid T^2 = S^4 = R^2 = I,\ TR = RT,\ RS = S^3R >$$

biçiminde bir gösterime sahip olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $\overline{H}(\lambda_4)/\overline{H}'(\lambda_4)$ bölüm grubunun gösterimi

$$\overline{H}(\lambda_4)/\overline{H}'(\lambda_4) = < T,S,R \mid T^2 = S^4 = R^2 = I,\ TR = RT,\ RS = S^3R, RS = SR, TS = ST >$$

olarak bulunur. Bu gösterimdeki

$$RS = S^3R \text{ ve } RS = SR$$

eşitliklerinden $S^2 = S^4 = I$ olduğu görülür. Böylece bölüm grubu

$$\overline{H}(\lambda_4)/\overline{H}'(\lambda_4) = < T,S,R \mid T^2 = S^2 = R^2 = (TR)^2 = (TS)^2 = (SR)^2 = I >$$

gösterimine sahip olur. Buradan da

$$\overline{H}(\lambda_4)/\overline{H}'(\lambda_4) \cong C_2 \times C_2 \times C_2$$

ve

$$\left|\overline{H}(\lambda_4)/\overline{H}'(\lambda_4)\right| = 8$$

olduğu görülür.

Şimdi de $\overline{H}'(\lambda_4)$ kamütatör grubunun bir üreteç kümesini belirleyelim. $\overline{H}'(\lambda_4)$ için bir Schreier sistemi olarak {I, T, R, S, RT, RS, TS, RTS} kümesini alalım. Reidemeister-Schreier metoduna göre mümkün olan bütün çarpımlar aşağıdadır:

$I.T.(T)^{-1} = I$	$RT.T.(R)^{-1} = I$
$T.T.(I)^{-1} = I$	$RS.T.(RTS)^{-1} = RSTS^3TR$
$R.T.(RT)^{-1} = I$	$TS.T.(S)^{-1} = TSTS^3$
$S.T.(TS)^{-1} = STS^3T$	$RTS.T.(RS)^{-1} = RTSTS^3R$
$I.S.(S)^{-1} = I$	$RT.S.(RTS)^{-1} = I$
$T.S.(TS)^{-1} = I$	$RS.S.(R)^{-1} = RS^2R$
$R.S.(RS)^{-1} = I$	$TS.S.(T)^{-1} = TS^2T$
$S.S.(I)^{-1} = S^2$	$RTS.S.(RT)^{-1} = RTS^2TR$
$I.R.(R)^{-1} = I$	$RT.R.(T)^{-1} = RTRT$
$T.R.(RT)^{-1} = TRTR$	$RS.R.(S)^{-1} = RSRS^3$
$R.R.(I)^{-1} = I$	$TS.R.(RTS)^{-1} = TSRS^3TR$
$S.R.(RS)^{-1} = SRS^3R$	$RTS.R.(TS)^{-1} = RTSRS^3T.$

Burada

$$(STS^3T)^{-1} = TSTS^3,\ (TRTR)^{-1} = RTRT = I,\ (SRS^3R)^{-1} = RSRS^3 = (S^2)^{-1}$$
$$(RSTS^3TR)^{-1} = RTSTS^3R = S^3TST,\ RS^2R = (S^2)^{-1},\ RTS^2TR = (TS^2T)^{-1}$$
$$(TSRS^3TR)^{-1} = RTSRS^3T = TS^2T$$

olduğu R, S ve T nın değerleri yerine yazılıp, gerekli hesaplamalar yapılırsa görülür. Böylece $\overline{H}'(\lambda_4)$ grubunun üreteçleri S^2, TS^2T, $TSTS^3$ ve TS^3TS olarak bulunur. . Reidemeister yeniden yazma yöntemi kullanılarak $\overline{H}'(\lambda_4)$ grubunun üreteçleri arasında aşikar olmayan bağıntıların olmadığı görülebilir. Buradan $\overline{H}'(\lambda_4)$ grubunun

$\overline{H}'(\lambda_4) =< S^2, TS^2T, TSTS^3, TS^3TS \mid (S^2)^2 = (TS^2T)^2 = (TSTS^3)^\infty = (TS^3TS)^\infty = I >$

biçiminde bir gösterimi elde edilir.

ii) İkinci olarak q = 6 durumunu inceleyelim.

$\overline{H}(\lambda_6)$ grubunun

$$\overline{H}(\lambda_6) =< T, S, R \mid T^2 = S^6 = R^2 = I,\ TR = RT,\ RS = S^5R >$$

biçiminde bir gösterime sahip olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $\overline{H}(\lambda_6) / \overline{H}'(\lambda_6)$ bölüm grubunun gösterimi

$$\overline{H}(\lambda_6) / \overline{H}'(\lambda_6) =< T, S, R \mid T^2 = S^6 = R^2 = I,\ TR = RT,\ RS = S^5R, RS = SR, TS = ST >$$

olarak bulunur. Bu gösterimdeki

$$RS = S^5R \text{ ve } RS = SR$$

eşitliklerinden $S^4 = S^6 = I$, yani $S^2 = I$ olarak bulunur. Böylece bölüm grubu

$$\overline{H}(\lambda_6) / \overline{H}'(\lambda_6) =< T, S, R \mid T^2 = S^2 = R^2 = (TR)^2 = (TS)^2 = (SR)^2 = I >$$

gösterimine sahip olur. Buradan

$$\overline{H}(\lambda_6) / \overline{H}'(\lambda_6) \cong C_2 \times C_2 \times C_2$$

ve

$$\left| \overline{H}(\lambda_6) / \overline{H}'(\lambda_6) \right| = 8$$

elde edilir.

Şimdi de $\overline{H}'(\lambda_6)$ kamütatör grubunun üreteç kümesini bulalım. $\overline{H}'(\lambda_6)$ için bir Schreier sistemi olarak {I, T, R, S, RT, RS, TS, RTS} kümesini alalım. Reidemeister-Schreier metoduna göre mümkün olan bütün çarpımlar aşağıdadır:

$I.T.(T)^{-1} = I$	$RT.T.(R)^{-1} = I$
$T.T.(I)^{-1} = I$	$RS.T.(RTS)^{-1} = RSTS^5TR$
$R.T.(RT)^{-1} = I$	$TS.T.(S)^{-1} = TSTS^5$
$S.T.(TS)^{-1} = STS^5T$	$RTS.T.(RS)^{-1} = RTSTS^5R$
$I.S.(S)^{-1} = I$	$RT.S.(RTS)^{-1} = I$
$T.S.(TS)^{-1} = I$	$RS.S.(R)^{-1} = RS^2R$

$R.S.(RS)^{-1} = I$ $\quad$ $TS.S.(T)^{-1} = TS^2T$

$S.S.(I)^{-1} = S^2$ $\quad$ $RTS.S.(RT)^{-1} = RTS^2TR$

$I.R.(R)^{-1} = I$ $\quad$ $RT.R.(T)^{-1} = RTRT$

$T.R.(RT)^{-1} = TRTR$ $\quad$ $RS.R.(S)^{-1} = RSRS^5$

$R.R.(I)^{-1} = I$ $\quad$ $TS.R.(RTS)^{-1} = TSRS^5TR$

$S.R.(RS)^{-1} = SRS^5R$ $\quad$ $RTS.R.(TS)^{-1} = RTSRS^5T.$

Burada

$(STS^5T)^{-1} = TSTS^5$, $(TRTR)^{-1} = RTRT = I$, $(SRS^5R)^{-1} = RSRS^5 = (S^2)^{-1}$

$(RSTS^5TR)^{-1} = RTSTS^5R = S^5TST$, $RS^2R = (S^2)^{-1}$, $RTS^2TR = (TS^2T)^{-1}$

$(TSRS^5TR)^{-1} = RTSRS^5T = TS^2T$

olduğu R, S ve T nin değerleri yerine yazılıp, gerekli hesaplamalar yapılırsa görülür. Böylece $\overline{H}'(\lambda_6)$ grubunun üreteçleri S^2, TS^2T, $TSTS^5$ ve TS^5TS olarak bulunur. Reidemeister yeniden yazma yöntemi kullanılarak $\overline{H}'(\lambda_6)$ grubunun üreteçleri arasında aşikar olmayan bağıntıların olmadığı görülebilir. Buradan $\overline{H}'(\lambda_6)$ grubunun

$$\overline{H}'(\lambda_6) =< S^2, TS^2T, TSTS^5, TS^5TS \mid (S^2)^3 = (TS^2T)^3 = (TSTS^5)^\infty = (TS^5TS)^\infty = I >$$

biçiminde bir gösterimi elde edilir.

Şimdi q çift sayısı içinde bir teorem verebiliriz.

4.4.2 Teorem : q çift sayı olsun.

i) $\overline{H}(\lambda_q)/\overline{H}'(\lambda_q) \cong C_2 \times C_2 \times C_2$

ii) $\overline{H}'(\lambda_q) =< S^2, TS^2T, TSTS^{q-1}, TS^{q-1}TS \mid (S^2)^{q/2} = (TS^2T)^{q/2}$

$$= (TSTS^{q-1})^\infty = (TS^{q-1}TS)^\infty = I >$$

İspat : i) $\overline{H}(\lambda_q)$ grubunun grup gösteriminin

$$\overline{H}(\lambda_q) =< T, S, R \mid T^2 = S^q = R^2 = I,\ TR = RT,\ RS = S^{-1}R >$$

biçiminde olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $\overline{H}(\lambda_q)/\overline{H}'(\lambda_q)$ bölüm grubu da

$$\overline{H}(\lambda_q)/\overline{H}'(\lambda_q) =< T, S, R \mid T^2 = S^q = R^2 = I,\ TR = RT,\ RS = S^{-1}R, RS = SR, TS = ST >$$

biçiminde bir gösterime sahiptir. Buradan

$$RS = S^{-1}R \text{ ve } RS = SR$$

eşitliklerinden $S^{q-2} = S^q = I$, yani $S^2 = I$ olarak bulunur. Böylece bölüm grubu

$$\overline{H}(\lambda_q)/\overline{H}'(\lambda_q) = \langle T, S, R \mid T^2 = S^2 = R^2 = (TR)^2 = (TS)^2 = (SR)^2 = I \rangle$$

gösterimine sahip olur. Buradan

$$\overline{H}(\lambda_q)/\overline{H}'(\lambda_q) \cong C_2 \times C_2 \times C_2$$

elde edilir.

ii) $\overline{H}(\lambda_q)/\overline{H}'(\lambda_q)$ bölüm grubunun indeksi (i) den

$$\left|\overline{H}(\lambda_q)/\overline{H}'(\lambda_q)\right| = 8$$

olarak bulunur.

Şimdi de $\overline{H}'(\lambda_q)$ kamütatör grubunun üreteç kümesini bulalım. $\overline{H}'(\lambda_q)$ için bir Schreier sistemi olarak {I, T, R, S, RT, RS, TS, RTS} kümesini alalım. Reidemeister-Schreier metoduna göre mümkün olan bütün çarpımlar aşağıdadır:

$I.T.(T)^{-1} = I$	$RT.T.(R)^{-1} = I$
$T.T.(I)^{-1} = I$	$RS.T.(RTS)^{-1} = RSTS^{-1}TR$
$R.T.(RT)^{-1} = I$	$TS.T.(S)^{-1} = TSTS^{-1}$
$S.T.(TS)^{-1} = STS^{-1}T$	$RTS.T.(RS)^{-1} = RTSTS^{-1}R$
$I.S.(S)^{-1} = I$	$RT.S.(RTS)^{-1} = I$
$T.S.(TS)^{-1} = I$	$RS.S.(R)^{-1} = RS^2R$
$R.S.(RS)^{-1} = I$	$TS.S.(T)^{-1} = TS^2T$
$S.S.(I)^{-1} = S^2$	$RTS.S.(RT)^{-1} = RTS^2TR$
$I.R.(R)^{-1} = I$	$RT.R.(T)^{-1} = RTRT$
$T.R.(RT)^{-1} = TRTR$	$RS.R.(S)^{-1} = RSRS^{-1}$
$R.R.(I)^{-1} = I$	$TS.R.(RTS)^{-1} = TSRS^{-1}TR$
$S.R.(RS)^{-1} = SRS^{-1}R$	$RTS.R.(TS)^{-1} = RTSRS^{-1}T$.

Burada

$$(STS^{-1}T)^{-1} = TSTS^{-1},\ (TRTR)^{-1} = RTRT = I,\ (SRS^{-1}R)^{-1} = RSRS^{-1} = (S^2)^{-1}$$
$$(RSTS^{-1}TR)^{-1} = RTSTS^{-1}R = S^{-1}TST,\ RS^2R = (S^2)^{-1},\ RTS^2TR = (TS^2T)^{-1}$$
$$(TSRS^{-1}TR)^{-1} = RTSRS^{-1}T = TS^2T$$

olduğu R, S ve T nin değerleri yerine yazılıp, gerekli hesaplamalar yapılırsa görülür. Böylece $\overline{H}'(\lambda_q)$ grubunun üreteçleri S^2, TS^2T, $TSTS^{q-1}$ ve $TS^{q-1}TS$ olarak elde edilir. Reidemeister yeniden yazma yöntemi kullanılarak $\overline{H}'(\lambda_q)$ grubunun üreteçleri arasında aşikar olmayan bağıntıların olmadığı görülebilir. Buradan $\overline{H}'(\lambda_q)$ grubunun

$$\overline{H}'(\lambda_q) =< S^2, TS^2T, TSTS^{q-1}, TS^{q-1}TS \,|\, (S^2)^{q/2} = (TS^2T)^{q/2} = (TSTS^{q-1})^{\infty} = (TS^{q-1}TS)^{\infty} = I >$$

biçiminde bir gösterimi bulunur.

4.4.3 Sonuç: $\overline{H}(\lambda_q)$ grubunun $\overline{H}'(\lambda_q)$ kamütatör alt grubu q tek sayı iken 2 ranklı ve 4 indeksli, q çift sayı iken 4 ranklı ve 8 indeksli bir alt gruptur.□

4.4.4 Teorem: q çift sayı olsun. $\overline{H}(\lambda_q)$ grubunun $\overline{H}'(\lambda_q)$ kamütatör alt grubu, $\overline{H}_ç(\lambda_q)$ çift alt grubunun, 4 indeksli, bir normal alt grubudur.

İspat: $\overline{H}'(\lambda_q)$ alt grubunun $\overline{H}(\lambda_q)$ grubunda 8 indeksli bir normal alt grup olduğunu biliyoruz. Ayrıca $\overline{H}_ç(\lambda_q)$ çift alt grubu da $\overline{H}(\lambda_q)$ grubunda 2 indeksli bir normal alt gruptur. Dolayısıyla indeksin 4 olduğu görülür.

$\overline{H}(\lambda_q)$ grubunun A ve B gibi iki elemanını alalım. A ve B ne olursa olsun, komütatörleri $[A,B] = ABA^{-1}B^{-1}$ daima çifttir. Böylece elemanların her $[A,B]$ çifti için

$$[A,B] \in \overline{H}_ç(\lambda_q)$$

olduğu görülür. Yani

$$\overline{H}'(\lambda_q) \triangleleft \overline{H}_ç(\lambda_q)$$

bulunur.□

4.5 $\overline{H}(\lambda_q)$ Genişletilmiş Hecke Gruplarının $\overline{H}^m(\lambda_q)$ Kuvvet Alt Grupları

4.5.1 Tanım. $\overline{H}(\lambda_q)$ grubunun tüm elemanlarının m. kuvvetleri alınarak üretilen alt gruba $\overline{H}(\lambda_q)$ grubunun *m. kuvvet alt grubu* denir ve bu alt grup $\overline{H}^m(\lambda_q)$ ile gösterilir.

$q \geq 3$ bir tamsayı ve $m \in \mathbf{N}$ olsun. $\overline{H}^m(\lambda_q)$ kuvvet alt grupları tamamen değişmez olduklarından, $\overline{H}(\lambda_q)$ nin normal altgruplarıdır. Tanımdan

$$\overline{H}^m(\lambda_q) > \overline{H}^{mn}(\lambda_q) \tag{4.5}$$

$$(\overline{H}^m(\lambda_q))^n > \overline{H}^{mn}(\lambda_q) \tag{4.6}$$

ve buradan

$$\overline{H}^m(\lambda_q).\overline{H}^n(\lambda_q) = \overline{H}^{(m,n)}(\lambda_q) \tag{4.7}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin ispatını göstermeden önce bu çarpımın iyi tanımlı olduğunu söyleyelim. (4.5) 'den

$$\overline{H}^{(m,n)}(\lambda_q) \geq \overline{H}^m(\lambda_q) \tag{4.8}$$

$$\overline{H}^{(m,n)}(\lambda_q) \geq \overline{H}^n(\lambda_q) \tag{4.9}$$

ve dolayısıyla

$$\overline{H}^{(m,n)}(\lambda_q) \geq \overline{H}^m(\lambda_q).\overline{H}^n(\lambda_q) \tag{4.10}$$

bulunur.

Şimdi kapsamanın diğer tarafını gösterelim. z, $\overline{H}(\lambda_q)$ grubunun herhangi bir elemanı olsun. m_1 ve n_1 tam sayılarını $m_1 m + n_1 n = (m,n)$ olacak biçimde seçelim. Buradan

$$z^{m_1 m} \in \overline{H}^m(\lambda_q), \; z^{n_1 n} \in \overline{H}^n(\lambda_q) \tag{4.11}$$

ve

$$z^{m_1 m + n_1 n} \in \overline{H}^m(\lambda_q).\overline{H}^n(\lambda_q) \tag{4.12}$$

elde edilir. Böylece

$$z^{(m,n)} \in \overline{H}^m(\lambda_q).\overline{H}^n(\lambda_q) \tag{4.13}$$

bulunur. Buradan

$$\overline{H}^{(m,n)}(\lambda_q) \leq \overline{H}^m(\lambda_q).\overline{H}^n(\lambda_q) \tag{4.14}$$

ve (4.10) ile (4.14)' den

$$\overline{H}^{(m,n)}(\lambda_q) = \overline{H}^m(\lambda_q).\overline{H}^n(\lambda_q) \tag{4.15}$$

eşitliği bulunur. Burada q tek sayı iken

$$\overline{H}(\lambda_q) = \overline{H}^2(\lambda_q).\overline{H}^q(\lambda_q) \tag{4.16}$$

olduğu görülür.

Şimdi q sayısının tek ya da çift sayı olmasına göre kuvvet alt gruplarını inceleyelim. Önce q tek sayı olsun.

4.5.2 Teorem: $\overline{H}^2(\lambda_q)$ normal alt grubu q mertebeli iki devirli grubun serbest çarpımıdır. Ayrıca

$$\left|\overline{H}(\lambda_q):\overline{H}^2(\lambda_q)\right| = 4$$

$$\overline{H}(\lambda_q)=\overline{H}^2(\lambda_q)\cup T.\overline{H}^2(\lambda_q)\cup R.\overline{H}^2(\lambda_q)\cup TR.\overline{H}^2(\lambda_q)$$

ve

$$\overline{H}^2(\lambda_q)=\langle S\rangle \star \langle TST\rangle$$

olur. $\overline{H}^2(\lambda_q)$ grubunun elemanları T nin üsleri toplamının çift olması ile belirlenebilir.

İspat: $\overline{H}(\lambda_q)$ grubunun grup gösteriminin

$$\overline{H}(\lambda_q) = \langle T,S,R \mid T^2 = S^q = R^2 = (TR)^2 = (RS)^2 = I\rangle$$

biçiminde olduğunu biliyoruz. $\overline{H}(\lambda_q)$ grubunun gösterimine her $K\in\overline{H}(\lambda_q)$ için $K^2 = I$ bağıntısı eklenirse $\overline{H}(\lambda_q)/\overline{H}^2(\lambda_q)$ bölüm grubunun gösterimi elde edilir. Buradan $\overline{H}(\lambda_q)/\overline{H}^2(\lambda_q)$ bölüm grubu

$$\overline{H}(\lambda_q)/\overline{H}^2(\lambda_q)=\langle T,S,R \mid T^2 = S^q = R^2 = S^2 = (TR)^2 = (RS)^2 = (TS)^2 = I\rangle$$

gösterimine sahip olur. Burada $S^q = S^2 = I$ ve q tek sayı olduğundan S = I olarak bulunur. Böylece bölüm grubunun gösterimi

$$\overline{H}(\lambda_q)/\overline{H}^2(\lambda_q)=\langle T,R \mid T^2 = R^2 = (TR)^2 = I\rangle$$

biçiminde olur. Dolayısıyla

$$\left|\overline{H}(\lambda_q):\overline{H}^2(\lambda_q)\right| = 4$$

elde edilir.

Şimdi $\overline{H}^2(\lambda_q)$ kuvvet grubunun üreteçlerini bulalım. Schreier sistemi olarak {I, T, R, TR} kümesini alalım. Reidemeister-Schreier metodunu kullanalım. Buna göre mümkün olan bütün çarpımlar aşağıdadır.

$I.T.(T)^{-1} = I$	$I.S.(I)^{-1} = S$	$I.R.(R)^{-1} = I$
$T.T.(I)^{-1} = I$	$T.S.(T)^{-1} = TST$	$T.R.(TR)^{-1} = I$
$R.T.(TR)^{-1} = RTRT$	$R.S.(R)^{-1} = RSR$	$R.R.(I)^{-1} = I$
$TR.T.(R)^{-1} = TRTR$	$TR.S.(TR)^{-1} = TRSRT$	$TR.R.(T)^{-1} = I$

Burada $RTRT = TRTR = I$, $RSR = S^{-1}$, $TRSRT = TS^{-1}T = (TST)^{-1}$ olduğu R, S ve T nin değerleri yerine yazılıp, hesaplamalar yapılırsa görülür. Buradan $\overline{H}^2(\lambda_q)$ grubunun üreteçleri S ve TST olarak bulunur. $\overline{H}^2(\lambda_q)$ grubunun elemanlarının teoremdeki koşulu sağladığı açıktır. Reidemeister yeniden yazma yöntemi kullanılarak $\overline{H}^2(\lambda_q)$ grubunun üreteçleri arasında aşikar olmayan bağıntıların olmadığı görülebilir. O halde $\overline{H}^2(\lambda_q)$ grubunun grup gösterimi

$$\overline{H}^2(\lambda_q) = \langle S, TST \mid S^q = (TST)^q = I \rangle \cong C_q \star C_q .$$

olarak elde edilir.□

4.5.3 Teorem: $\overline{H}^q(\lambda_q)$ normal alt grubu iki mertebeli 2q tane devirli grubun serbest çarpımıdır. Ayrıca

$$\left|\overline{H}(\lambda_q):\overline{H}^q(\lambda_q)\right| = q$$

$$\overline{H}(\lambda_q) = \overline{H}^q(\lambda_q) \cup S.\overline{H}^q(\lambda_q) \cup \ldots \cup S^{q-1}.\overline{H}^q(\lambda_q)$$

ve

$$\overline{H}^q(\lambda_q) = \langle T\rangle \star \langle R\rangle \star \langle STS^{q-1}\rangle \star \langle S^2TS^{q-2}\rangle \star \ldots \star \langle S^{q-1}TS\rangle$$
$$\star \langle SRS^{q-1}\rangle \star \langle S^2RS^{q-2}\rangle \star \ldots \star \langle S^{q-1}RS\rangle$$

olur. $\overline{H}^q(\lambda_q)$ grubunun elemanları S nin üsleri toplamının q ile bölünebilmesi ile belirlenebilir.

İspat : $\overline{H}(\lambda_q)$ grubunun grup gösteriminin

$$\overline{H}(\lambda_q) = \langle T,S,R \mid T^2 = S^q = R^2 = (TR)^2 = (RS)^2 = I \rangle$$

biçiminde olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $\overline{H}(\lambda_q)/\overline{H}^q(\lambda_q)$ bölüm grubu da

$$\overline{H}(\lambda_q)/\overline{H}^q(\lambda_q) = \langle T,S,R \mid T^2 = S^q = R^2 = T^q = R^q = \ldots = I \rangle$$

gösterimine sahip olur. Bu gösterimden $T^q = T^2 = R^q = R^2 = I$ ve q bir tek sayı olduğundan $T = R = I$ olarak bulunur. Böylece bölüm grubunun gösterimi

$$\overline{H}(\lambda_q)/\overline{H}^q(\lambda_q) = \langle S \mid S^q = I \rangle \cong C_q$$

biçiminde olur. Dolayısıyla

$$\left|\overline{H}(\lambda_q) : \overline{H}^q(\lambda_q)\right| = q$$

elde edilir.

Burada q tek sayısı için genellemeye gitmek için önce q sayısını 3 olarak alalım. Buna göre $\overline{H}^3(\lambda_3)$ grubunun üreteçlerini bulalım. Schreier sistemi olarak $\{I, S, S^2\}$ kümesini alalım. Reidemeister-Schreier metodunu kullanalım. Burada mümkün olan bütün çarpımlar aşağıdadır.

$$\begin{array}{lll}
I.T.(I)^{-1} = T & S.T.(S)^{-1} = STS^2 & S^2.T.(S^2)^{-1} = S^2TS \\
I.S.(S)^{-1} = I & S.S.(S^2)^{-1} = I & S^2.S.(I)^{-1} = I \\
I.R.(I)^{-1} = R & S.R.(S)^{-1} = SRS^2 & S^2.R.(S^2)^{-1} = S^2RS
\end{array}$$

Buradan $\overline{H}^3(\lambda_3)$ kuvvet grubunun üreteçleri T, R, STS^2, S^2TS, SRS^2 ve S^2RS olarak bulunur. $\overline{H}^3(\lambda_3)$ grubunun grup gösterimi de

$$\overline{H}^3(\lambda_3) = \langle T,R,STS^2,S^2TS,SRS^2,S^2RS \mid T^2 = R^2$$
$$= (STS^2)^2 = (S^2TS)^2 = (SRS^2)^2 = (S^2RS)^2 = I \rangle$$

olarak elde edilir.

Benzer olarak herhangi bir q tek sayısı için $\overline{H}^q(\lambda_q)$ grubunun üreteçlerini bulalım. Bunun için Schreier sistemi olarak {I, S, ..., S^{q-1}} kümesini alalım. Reidemeister-Schreier metodunu kullanılırsa $\overline{H}^q(\lambda_q)$ grubunun üreteçleri

$$T, R, STS^{q-1}, S^2TS^{q-2}, ..., S^{q-1}TS, SRS^{q-1}, S^2RS^{q-2}, ..., S^{q-1}RS$$

olarak bulunur. Dikkat edilirse $\overline{H}^q(\lambda_q)$ grubunun elemanlarının teoremdeki koşulu sağladığı açıktır. Reidemeister yeniden yazma yöntemi kullanılarak $\overline{H}^q(\lambda_q)$ grubunun üreteçleri arasında aşikar olmayan bağıntıların olmadığı görülebilir. O halde grup gösterimi de

$$\begin{aligned}\overline{H}^q(\lambda_q) =\ &< T,R,STS^{q-1},...,S^{q-1}TS,SRS^{q-1},...,S^{q-1}RS \mid T^2 = R^2 \\ &= (STS^{q-1})^2 = ... = (S^{q-1}TS)^2 = (SRS^{q-1})^2 = ... = (S^{q-1}RS)^2 = I >\end{aligned}$$

biçimindedir.□

4.5.4 Teorem: p bir tek asal sayı olsun. $\overline{H}^m(\lambda_p)$ alt grubu aşağıdaki durumlardan biridir:

$$\overline{H}^m(\lambda_p) = \begin{cases} \overline{H}(\lambda_p), & (m,2p) = 1 \\ \overline{H}^2(\lambda_p), & (m,p) = 1 \text{ ve } m \text{ çift} \\ \overline{H}^p(\lambda_p), & m, p \text{ nin tek bir katı} \end{cases}$$

İspat : (m, 2p) = 1 olduğunda $\overline{H}(\lambda_p)/\overline{H}^m(\lambda_p)$ aşikar gruptur ve dolayısıyla $\overline{H}^m(\lambda_p) = \overline{H}(\lambda_p)$ olarak bulunur.

İkinci olarak m çift sayı ve (m, p) = 1 olsun. O zaman $\overline{H}(\lambda_p)/\overline{H}^m(\lambda_p)$ bölüm grubu $t^2 = r^2 = (tr)^2 = s = I$ bağıntılarına sahiptir ve bu bölüm $C_2 \times C_2$ ye izomorftur. q tek olduğunda $\overline{H}(\lambda_p)$ grubunun iki indeksli tek bir normal alt grubu olduğundan $\overline{H}^m(\lambda_p) = \overline{H}^2(\lambda_p)$ olarak bulunur.

Üçüncü olarak p, m nin bir tek sayı katı olsun. Bu durumda bölüm grubu C_q ya izomorftur ve $\overline{H}(\lambda_p)$ grubunda q indeksli tek bir normal alt grup olduğundan $\overline{H}^m(\lambda_p) = \overline{H}^p(\lambda_p)$ elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.□

Şimdi q > 3 bileşik bir tek sayı olsun. 4.5.4 Teoremdeki bütün durumlar sağlanmaz. Örneğin m sayısı $1 < (m, q) = d < q$ olacak biçimde bir tek sayı ise $\overline{H}(\lambda_q)/\overline{H}^m(\lambda_q)$ bölüm grubunda $r = t = s^d = I$ bağıntılarına sahip oluruz, yani $\overline{H}(\lambda_q)/\overline{H}^m(\lambda_q) \cong C_d$ biçimindedir. Burada

$$\overline{H}^m(\lambda_q) =< T, R, STS^{d-1}, ..., S^{d-1}TS, SRS^{d-1}, ..., S^{d-1}RS \mid T^2 = R^2$$

$$= (STS^{d-1})^2 = ... = (S^{d-1}TS)^2 = (SRS^{d-1})^2 = ... = (S^{d-1}RS)^2 = I >$$

olur.

Son olarak m sayısı $1 < (m, q) = d < q$ olacak biçimde çift bir sayı ise $\overline{H}(\lambda_q)/\overline{H}^m(\lambda_q)$ bölüm grubu $t^2 = s^d = (ts)^m$ bağıntılarına sahip olur ve yukarıdaki tekniklerden $\overline{H}^m(\lambda_q)$ hakkında bir şey söyleyemeyiz.

Burada m bir doğal sayı olmak üzere $H^{2pm}(\lambda_p)$ alt grupları kalır. Bu durum için komütatör alt grupları kullanılır.

q tek sayısı için $\overline{H}'(\lambda_q)$ kamütatör alt grubunun

$$\overline{H}'(\lambda_q) =< S, TST \mid S^q = (TST)^q = I > \cong C_q \star C_q$$

ve $\overline{H}^2(\lambda_q)$ kuvvet alt grubunun

$$\overline{H}^2(\lambda_q) =< S, TST \mid S^q = (TST)^q = I > \cong C_q \star C_q$$

olduklarını gördük. Bu ikisinden aşağıdaki sonucu verebiliriz.

4.5.5 Sonuç: $\overline{H}(\lambda_q)$ grubunun $\overline{H}'(\lambda_q)$ kamütatör alt grubu

$$\overline{H}'(\lambda_q) = \overline{H}^2(\lambda_q)$$

eşitliğini sağlar.□

Şimdi $\overline{H}^{2qm}(\lambda_q)$ alt grupları incelenebilir. $\overline{H}^2(\lambda_q) > \overline{H}^{2q}(\lambda_q)$ olduğundan yukarıdaki sonuç gereğince

$$\overline{H}'(\lambda_q) > \overline{H}^{2q}(\lambda_q)$$

olarak bulunur. $\overline{H}'(\lambda_q)$ serbest grup olduğundan $\overline{H}^{2q}(\lambda_q)$ grubu da serbest bir gruptur. Buradan da m bir doğal sayı olmak üzere

$$\overline{H}^{2q}(\lambda_q) > \overline{H}^{2qm}(\lambda_q)$$

bulunur. Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

4.5.6 Sonuç : $\overline{H}^{2qm}(\lambda_q)$ alt grupları serbesttir.□

Burada q sayısı tek sayı iken bütün durumları inceledik. Buna rağmen, q = 5 sayısı önemli bir Hecke grubunu verdiği için bu durumu ayrı olarak inceleyelim. q tek sayı iken bulduğumuz bütün sonuçlar ayrıca q=5 içinde doğrudur.

4.5.7 Teorem : $\overline{H}^2(\lambda_5)$ normal alt grubu 5 mertebeli iki devirli grubun serbest çarpımıdır. Ayrıca

$$\left|\overline{H}(\lambda_5) : \overline{H}^2(\lambda_5)\right| = 4$$

$$\overline{H}(\lambda_5) = \overline{H}^2(\lambda_5) \cup T.\overline{H}^2(\lambda_5) \cup R.\overline{H}^2(\lambda_5) \cup TR.\overline{H}^2(\lambda_5)$$

ve

$$\overline{H}^2(\lambda_5) = \langle S \rangle \star \langle TST \rangle$$

olur. $\overline{H}^2(\lambda_5)$ grubunun elemanları T nin üsleri toplamının çift olması ile belirlenebilir.

İspat, 4.5.2 Teoremin özel bir halidir.□

4.5.8 Teorem : $\overline{H}^5(\lambda_5)$ normal alt grubu iki mertebeli 10 tane devirli grubun serbest çarpımıdır. Ayrıca

$$\left|\overline{H}(\lambda_5) : \overline{H}^5(\lambda_5)\right| = 5$$

$$\overline{H}(\lambda_5) = \overline{H}^5(\lambda_5) \cup S.\overline{H}^5(\lambda_5) \cup S^2.\overline{H}^5(\lambda_5) \cup S^3.\overline{H}^5(\lambda_5) \cup S^4.\overline{H}^5(\lambda_5)$$

ve

$$\overline{H}^5(\lambda_5) = \langle T \rangle \star \langle R \rangle \star \langle STS^4 \rangle \star \langle S^2TS^3 \rangle \star \langle S^3TS^2 \rangle \star \langle S^4TS \rangle$$
$$\star \langle SRS^4 \rangle \star \langle S^2RS^3 \rangle \star \langle S^3RS^2 \rangle \star \langle S^4RS \rangle$$

olur. $\overline{H}^5(\lambda_5)$ grubunun elemanları S nin üsleri toplamının 5 ile bölünebilmesi ile belirlenebilir.

İspat, 4.5.3 Teoremin özel bir halidir.□

Şimdi bu alt grupların bir sınıflandırmasını elde edebiliriz.

4.5.9 Teorem : $\overline{H}^m(\lambda_5)$ alt grupları aşağıdaki durumları sağlarlar.

$$\overline{H}^m(\lambda_5)=\begin{cases}\overline{H}(\lambda_5), & (m,10)=1\\ \overline{H}^2(\lambda_5), & (m,5)=1 \text{ ve } m \text{ çif}\\ \overline{H}^5(\lambda_5), & m, 5 \text{ in tek bir katı}\end{cases}.□$$

Burada geriye sadece $\overline{H}^{10k}(\lambda_5)$ alt grupları kalır. Bu alt grupları tartışmak içinde öncelikle $\overline{H}'(\lambda_5)$ kamütatör alt grubunu göz önüne alalım. 4.5.5 Sonucun özel bir durumu olarak $\overline{H}'(\lambda_5)=\overline{H}^2(\lambda_5)$ bulunur. Böylece

$$\overline{H}'(\lambda_5)>\overline{H}^{10}(\lambda_5)>\overline{H}^{10k}(\lambda_5)$$

elde edilir. Buradan aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

4.5.10 Teorem : $\overline{H}^{10k}(\lambda_5)$ alt grupları serbesttir.□

Şimdi de q çift sayı olsun. Önce q = 4 durumunu inceleyelim.

4.5.11 Teorem : $\overline{H}^2(\lambda_4)$ normal alt grubu sonsuz devirli 2 grup ile 2 mertebeli sonlu devirli iki grubun serbest çarpımına izomorftur. Ayrıca

$$\overline{H}(\lambda_4)/\overline{H}^2(\lambda_4)\cong C_2\times C_2\times C_2$$

$$\overline{H}(\lambda_4)=\overline{H}^2(\lambda_4)\cup T.\overline{H}^2(\lambda_4)\cup S.\overline{H}^2(\lambda_4)\cup R.\overline{H}^2(\lambda_4)\cup TR.\overline{H}^2(\lambda_4)$$
$$\cup TS.\overline{H}^2(\lambda_4)\cup SR.\overline{H}^2(\lambda_4)\cup TSR.\overline{H}^2(\lambda_4)$$

ve

$$\overline{H}^2(\lambda_4)=\langle S^2\rangle\star\langle TS^2T\rangle\star\langle TSTS^3\rangle\star\langle TS^3TS\rangle$$

olur. $\overline{H}^2(\lambda_4)$ grubunun elemanları T ve S nin üsleri toplamının çift olması ile belirlenebilir.

İspat : $\overline{H}(\lambda_4)$ grubunun grup gösteriminin

$$\overline{H}(\lambda_4) =< T,S,R \mid T^2 = S^4 = R^2 = (TR)^2 = (RS)^2 = I >$$

biçiminde olduğunu biliyoruz. $\overline{H}(\lambda_4)/\overline{H}^2(\lambda_4)$ bölüm grubu da

$$\overline{H}(\lambda_4)/\overline{H}^2(\lambda_4) =< T,S,R \mid T^2 = S^4 = R^2 = S^2 = (TR)^2 = (RS)^2 = (TS)^2 = I >$$

gösterimine sahip olur. Burada $S^4 = S^2 = I$ bulunur. Böylece gösterim

$$\overline{H}(\lambda_4)/\overline{H}^2(\lambda_4) =< T,S,R \mid T^2 = S^2 = R^2 = (TR)^2 = (RS)^2 = (TS)^2 = I >$$

biçiminde olur. Yani

$$\overline{H}(\lambda_4)/\overline{H}^2(\lambda_4) \cong C_2 \times C_2 \times C_2$$

biçimindedir. Buradan

$$\left|\overline{H}(\lambda_4) : \overline{H}^2(\lambda_4)\right| = 8$$

elde edilir. $\overline{H}^2(\lambda_4)$ grubunun üreteçlerini bulalım. Schreier sistemi olarak {I, T, R, S, RT, RS, TS, RTS} kümesini alalım. Reidemeister-Schreier metoduna göre mümkün olan bütün çarpımlar aşağıdadır:

$I.T.(T)^{-1} = I$	$RT.T.(R)^{-1} = I$
$T.T.(I)^{-1} = I$	$RS.T.(RTS)^{-1} = RSTS^3TR$
$R.T.(RT)^{-1} = I$	$TS.T.(S)^{-1} = TSTS^3$
$S.T.(TS)^{-1} = STS^3T$	$RTS.T.(RS)^{-1} = RTSTS^3R$
$I.S.(S)^{-1} = I$	$RT.S.(RTS)^{-1} = I$
$T.S.(TS)^{-1} = I$	$RS.S.(R)^{-1} = RS^2R$
$R.S.(RS)^{-1} = I$	$TS.S.(T)^{-1} = TS^2T$
$S.S.(I)^{-1} = S^2$	$RTS.S.(RT)^{-1} = RTS^2TR$
$I.R.(R)^{-1} = I$	$RT.R.(T)^{-1} = RTRT$
$T.R.(RT)^{-1} = TRTR$	$RS.R.(S)^{-1} = RSRS^3$
$R.R.(I)^{-1} = I$	$TS.R.(RTS)^{-1} = TSRS^3TR$
$S.R.(RS)^{-1} = SRS^3R$	$RTS.R.(TS)^{-1} = RTSRS^3T.$

Burada

$$(STS^3T)^{-1} = TSTS^3,\ (TRTR)^{-1} = RTRT = I,\ (SRS^3R)^{-1} = RSRS^3 = (S^2)^{-1}$$
$$(RSTS^3TR)^{-1} = RTSTS^3R = S^3TST,\ RS^2R = (S^2)^{-1},\ RTS^2TR = (TS^2T)^{-1}$$
$$(TSRS^3TR)^{-1} = RTSRS^3T = TS^2T$$

olduğu R, S ve T nin değerleri yerine yazılıp, hesaplamalar yapılırsa kolayca görülür. Böylece $\overline{H}^2(\lambda_4)$ grubunun üreteçleri S^2, TS^2T, $TSTS^3$ ve TS^3TS olarak bulunur. $\overline{H}^2(\lambda_4)$ grubundaki T ve S elemanlarının üsleri toplamının çift olduğu kolayca görülür. Reidemeister yeniden yazma yöntemi kullanılarak $\overline{H}^2(\lambda_4)$ grubunun üreteçleri arasında aşikar olmayan bağıntıların olmadığı görülebilir. O halde $\overline{H}^2(\lambda_4)$ grubunun

$$\overline{H}^2(\lambda_4) = < S^2, TS^2T, TSTS^3, TS^3TS \mid (S^2)^2 = (TS^2T)^2 = (TSTS^3)^\infty = (TS^3TS)^\infty = I >$$

biçiminde bir gösterimi elde edilir.□

4.5.11 Teorem: m pozitif bir tek sayı olsun. O zaman

$$H^m(\lambda_4) = H(\lambda_4).$$

İspat: $H(\lambda_4)$ grubunun $H^m(\lambda_4)$ normal alt grubuna bölüm grubunun

$$\overline{H}(\lambda_4)/\overline{H}^m(\lambda_4) = < T,S,R \mid T^2 = S^4 = R^2 = T^m = S^m = R^m = I >$$

biçiminde gösterimi vardır. Burada m pozitif tek sayı olduğundan T=S=R=I bulunur. Yani

$$\overline{H}(\lambda_4)/\overline{H}^m(\lambda_4) \cong I$$

olur. Buradan da

$$H^m(\lambda_4) = H(\lambda_4)$$

elde edilir.□

$m \equiv 2 \pmod 4$ olacak biçimde pozitif bir tamsayı olsun. $\overline{H}(\lambda_4)/\overline{H}^m(\lambda_4)$ bölüm grubu

$$\overline{H}(\lambda_4)/\overline{H}^m(\lambda_4) = < T,S,R \mid T^2 = S^2 = R^2 = (TR)^2 = (SR)^2 = (TS)^m = I >$$

gösterimine sahiptir. Buradan

$$\overline{H}(\lambda_4)/\overline{H}^m(\lambda_4) \cong C_2 \times D_m$$

olarak bulunur, yani $\overline{H}^{m}(\lambda_4)$ alt grubunun $\overline{H}(\lambda_4)$ grubundaki indeksi

$$\left|\overline{H}(\lambda_4)/\overline{H}^{m}(\lambda_4)\right| = 4m$$

olur. Burada m sayısının alacağı büyük değerlere karşılık indeks büyüyecek, dolayısıyla hesaplamalar çok karmaşık olacaktır. Bu yüzden sadece m = 2 durumu 4.5.10 teoremde incelenmiştir.

Şimdi m sayısının dördün bir katı olduğunu varsayalım. $\overline{H}(\lambda_4)/\overline{H}^2(\lambda_4)$ bölüm grubunda $t^2 = s^4 = r^2 = I$ bağıntıları vardır. Burada t, s ve r, $\overline{H}(\lambda_4)$ grubunun $\overline{H}(\lambda_4)/\overline{H}^2(\lambda_4)$ bölüm grubuna homomorfizmi altında T, S ve R elemanlarının görüntüleridir. Bu bağıntılardan $\overline{H}^{m}(\lambda_4)$ serbest bir gruptur.

Şimdi de q = 6 durumunu ele alalım.

4.5.12 Teorem : $\overline{H}^2(\lambda_6)$ normal alt grubu sonsuz devirli **Z** grubu ile iki mertebeli sonlu devirli iki grubun serbest çarpımına izomorftur. Ayrıca

$$\overline{H}(\lambda_6)/\overline{H}^2(\lambda_6) \cong C_2 \times C_2 \times C_2$$

$$\overline{H}(\lambda_6) = \overline{H}^2(\lambda_6) \cup T.\overline{H}^2(\lambda_6) \cup S.\overline{H}^2(\lambda_6) \cup R.\overline{H}^2(\lambda_6) \cup TR.\overline{H}^2(\lambda_6)$$
$$\cup TS.\overline{H}^2(\lambda_6) \cup SR.\overline{H}^2(\lambda_6) \cup TSR.\overline{H}^2(\lambda_6)$$

ve

$$\overline{H}^2(\lambda_6) = \langle S^2 \rangle \star \langle TS^2T \rangle \star \langle TSTS^5 \rangle \star \langle TS^5TS \rangle$$

olur. $\overline{H}^2(\lambda_6)$ grubunun elemanları T ve S elemanlarının üsleri toplamının çift olması ile belirlenebilir.

İspat, 4.5.10 Teoremin ispatına benzer olarak yapılabilir.□

4.5.13 Teorem : $\overline{H}^3(\lambda_6)$ normal alt grubu iki mertebeli altı devirli grubun serbest çarpımıdır. Ayrıca

$$\overline{H}(\lambda_6)/\overline{H}^3(\lambda_6) \cong C_3$$

$$\overline{H}(\lambda_6) = \overline{H}^3(\lambda_6) \cup S.\overline{H}^3(\lambda_6) \cup S^2.\overline{H}^3(\lambda_6)$$

ve

$$\overline{H}^3(\lambda_6)=<T>\star<R>\star<STS^5>\star<S^2TS^4>\star<SRS^5>\star<S^2RS^4>$$

olur.

İspat, 4.5.2 Teoremin ispatına benzer olarak yapılabilir.□

Yukarıdaki teoremlerden aşağıdaki sonuçlar yazılabilir.

4.5.14 Teorem: $m \equiv \pm 1$ mod 6. O zaman $\overline{H}^m(\lambda_6) = \overline{H}(\lambda_6)$.□

4.5.15 Teorem: $m \equiv 3$ mod 6. O zaman $\overline{H}^m(\lambda_6) = \overline{H}^3(\lambda_6)$.□

$m \equiv \pm 2$ (mod 6) olacak biçimde bir sayı olduğunda bölüm grubunun indeksi $\left|\overline{H}(\lambda_6)/\overline{H}^m(\lambda_6)\right| = 4m$ olacak ve m sayısının alacağı değerlere göre de hesaplamalar oldukça karıştığından yine sadece m = 2 durumu 4.5.12 Teoremde incelenmiştir.

Geriye sadece m sayısının 6 ile bölünebildiği durum kalır. Bu durum için komütatör alt grupları kullanılır.

$\overline{H}'(\lambda_6)$ kamütatör alt grubunun

$$\overline{H}'(\lambda_6)=<S^2>\star<TS^2T>\star<TSTS^5>\star<TS^5TS>$$

ve $\overline{H}^2(\lambda_6)$ kuvvet alt grubunun

$$\overline{H}^2(\lambda_6)=<S^2>\star<TS^2T>\star<TSTS^5>\star<TS^5TS>$$

olduklarını gördük. Bu ikisinden aşağıdaki sonucu verebiliriz.

4.5.16 Sonuç: $\overline{H}(\lambda_6)$ grubunun $\overline{H}'(\lambda_6)$ kamütatör alt grubu

$$\overline{H}'(\lambda_6)=\overline{H}^2(\lambda_6)$$

eşitliğini sağlar.□

Şimdi m=6k ve $k\in\mathbf{N}$ olmak üzere $\overline{H}^m(\lambda_q)$ alt grupları incelenebilir. $\overline{H}^2(\lambda_q) > \overline{H}^{6k}(\lambda_q)$ olduğundan yukarıdaki sonuç gereğince

$$\overline{H}'(\lambda_q) > \overline{H}^{6k}(\lambda_q) = \overline{H}^m(\lambda_q)$$

olarak bulunur. $\overline{H}'(\lambda_q)$ serbest grup olduğundan $\overline{H}^m(\lambda_q)$ grubu da serbest bir gruptur. Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

4.5.17 Sonuç : $\overline{H}^{6k}(\lambda_q)$ alt grupları serbesttir.□

4.6 $\overline{H}(\lambda_q)$ Genişletilmiş Hecke Gruplarının Temel Denklik Alt Grupları

4.6.1 Tanım. $\overline{H}(\lambda_3)$ grubunun *n seviyeli temel denklik alt grubu*

$$\overline{H}_n(\lambda_3) = \left\{ T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in \overline{H}(\lambda_3) : a \equiv d \equiv \pm 1, \ \ b \equiv c \equiv 0 (\bmod n), \ \ ad - bc = \pm 1 \right\}$$

biçiminde tanımlanır. $\overline{H}(\lambda_3)$ grubunun bir $\overline{H}_n(\lambda_3)$ temel denklik alt grubunu içeren bir alt grubuna *n seviyeli denklik alt grubu* denir.

$\overline{H}_n(\lambda_3)$, $\overline{H}(\lambda_3)$ grubunun bir normal alt grubudur. Fakat genelde, tüm temel denklik alt grupları normal değildirler.

Genelde, $q \geq 3$ bir doğal sayı ve p bir asal sayı olmak üzere, $\overline{H}(\lambda_q)$ grubunun temel denklik alt grubu

$$\overline{H}_p(\lambda_q) = \{T \in \overline{H}(\lambda_q) : T \equiv \pm I (\bmod p)\} \ ,$$

$$\overline{H}_p(\lambda_q) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b\lambda_q \\ c\lambda_q & d \end{pmatrix} : a \equiv d \equiv \pm 1, \ \ b \equiv c \equiv 0 (\bmod p), ad - \lambda_q bc = \pm 1 \right\}$$

biçiminde tanımlanır. Tanımdan dolayı

$$\overline{H}_p(\lambda_q) \triangleleft \overline{H}_ç(\lambda_q)$$

olduğu görülür.

$\overline{H}_p(\lambda_q)$ temel denklik alt grubu ile $H(\lambda_q)$ grubunun kesişimi, $H_p(\lambda_q)$ temel denklik alt grubunu verir, yani

$$H_p(\lambda_q) \doteq \overline{H}_p(\lambda_q) \cap H(\lambda_q)$$

biçimindedir. Dolayısıyla

$$\overline{H}_p(\lambda_q) \geq H_p(\lambda_q)$$

olduğu eşitlikten kolayca görülür. Diğer yandan $\overline{H}_1(\lambda_q)=\overline{H}(\lambda_q)$ ve $H_1(\lambda_q)=H(\lambda_q)$ olduğu da açıktır.

Şimdi $\overline{H}_p(\lambda_q)$ grubunun herhangi bir A elemanını alalım. $A\in \overline{H}_p(\lambda_q)$ olduğundan $\pm 1 = \det A = ad - \lambda_q^2 bc \equiv 1 \pmod p$ yazılabilir. Dolayısıyla $-1 \equiv 1 \pmod p$ olması için gerek ve yeter koşul $p = 2$ olmasıdır. Eğer $p \neq 2$ ise $-1 \not\equiv 1 \pmod p$ olacağından $\det A = 1$ olur. Buradan da $p \neq 2$ için

$$\overline{H}_p(\lambda_q) = H_p(\lambda_q)$$

sonucu bulunur. Ayrıca

$$\overline{H}_2(\lambda_q) \geq H_2(\lambda_q) \geq H_4(\lambda_q) = \overline{H}_4(\lambda_q)$$

olduğu da görülür. O halde $\overline{H}(\lambda_q)$ grubunun, bir K alt grubunun bir $\overline{H}_p(\lambda_q)$ temel denklik alt grubu içermesi demek, K alt grubunun bir $H_p(\lambda_q)$ temel denklik alt grubu içermesi demektir. Böyle bir K alt grubuna bir denklik alt grubu denir ve K grubunun seviyesi $K \geq H_p(\lambda_q)$ olacak biçimdeki en küçük p sayısıdır. Burada genişletilmiş Hecke gruplarının sadece temel denklik alt grupları üzerinde duracağız.

Genişletilmiş Hecke gruplarının temel denklik alt grupları ile Hecke gruplarının temel denklik alt gruplarının $p \neq 2$ için eşit olduğu yukarıda gösterildi. Burada $p \neq 2$ için ve $p = 2$ için genişletilmiş Hecke gruplarının, temel denklik alt grupları ile bölüm grupları ayrı olarak hesaplanacaktır.

Önce $p \neq 2$ durumunu inceleyelim.

Hecke gruplarının üreteç kümesine bir R yansıması katarak genişletilmiş Hecke grubunu elde etmiştik. $H(\lambda_q)$ Hecke grubu, $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grubunun 2 indeksli bir normal alt grubudur. Ayrıca $H_p(\lambda_q)$ grubu, $H(\lambda_q)$ grubunun normal alt grubudur. Dolayısıyla

$$H(\lambda_q)/H_p(\lambda_q)$$

bölüm grubunun indeksi p ise $\overline{H}_p(\lambda_q)=H_p(\lambda_q)$ olduğundan

$$\overline{H}(\lambda_q)/\overline{H}_p(\lambda_q)$$

bölüm grubunun indeksi de 2p olarak bulunur. Burada $\overline{H}_p(\lambda_q)$ alt grubunun, $\overline{H}(\lambda_q)$ grubunun normal alt grubu olduğu kolayca görülür. Ayrıca $R \notin H(\lambda_q)$ olduğundan 2.6 Kısımda bulduğumuz $H(\lambda_q)/H_p(\lambda_q)$ bölüm gruplarının izomorf olduğu gruplar, C_2 grubu ile direkt çarpılır. Böylece $\overline{H}(\lambda_q)/\overline{H}_p(\lambda_q)$ bölüm gruplarının izomorf olduğu gruplar elde edilir.

Şimdi q = 4, 5, 6 ve 7 durumları için temel denklik alt gruplarını bulalım.

İlk olarak q = 4 halini inceleyelim. Bu halde $\overline{H}(\sqrt{2})$ grubunun $\overline{H}_p(\sqrt{2})$ temel denklik alt grupları ile bölüm grubu aşağıdadır.

$$\overline{H}(\sqrt{2})/\overline{H}_p(\sqrt{2}) \cong \begin{cases} C_2 \times C_2 \times PSL(2,p) & ; \; p \equiv \pm 1 \pmod 8 \\ C_2 \times PGL(2,p) & ; \; p \equiv \pm 3 \pmod 8 \end{cases}$$

q = 5 için $\overline{H}(\lambda_5)$ grubunun $\overline{H}_p(\lambda_5)$ temel denklik alt gruplarına bölüm grupları aşağıdadır.

$$\overline{H}(\lambda_5)/\overline{H}_p(\lambda_5) \cong \begin{cases} C_2 \times PSL(2,p) & ; \; p \equiv \pm 1 \pmod{10} \\ C_2 \times PSL(2,p^2) & ; \; p \equiv \pm 3 \pmod{10} \text{ ve } p \neq 3 \\ C_2 \times A_5 & ; \; p = 3,5 \end{cases}$$

q = 6 için $\overline{H}(\sqrt{3})$ grubunun $\overline{H}_p(\sqrt{3})$ temel denklik alt grupları ile bölüm grubu aşağıdadır.

$$\overline{H}(\sqrt{3})/\overline{H}_p(\sqrt{3}) \cong \begin{cases} C_2 \times C_2 \times PSL(2,p) & ; \; p \equiv \pm 1 \pmod{12} \\ C_2 \times PGL(2,p) & ; \; p \not\equiv \pm 1 \pmod{12} \text{ ve } p \neq 2 \\ C_2 \times (C_3 \times C_3) \wr C_2 & ; \; p = 3 \end{cases}$$

q = 7 için $\overline{H}(\lambda_7)$ grubunun $\overline{H}_p(\lambda_7)$ temel denklik alt gruplarına bölüm grupları aşağıdadır.

$$\overline{H}(\lambda_7)/\overline{H}_p(\lambda_7) \cong \begin{cases} C_2 \times PSL(2,p) & ; \; p \equiv \pm 1 \pmod 7 \\ C_2 \times PSL(2,p^3) & ; \; p \not\equiv \pm 1 \pmod 7 \text{ ve } p \neq 2 \\ C_2 \times PSL(2,7) & ; \; p = 7 \end{cases}$$

Şimdi de p = 2 durumunu inceleyelim. Öncelikle $\overline{H}_2(\lambda_q)$ alt grubunun $\overline{H}(\lambda_q)$ grubunun normal alt grubu olduğunu görelim. Bunun için herhangi bir $K \in \overline{H}(\lambda_q)$ elemanı üreteçler cinsinden yazılabileceğinden ve $H_2(\lambda_q) \triangleleft \overline{H}(\lambda_q)$ olduğundan sadece K = R için

$$R\overline{H}_2(\lambda_q)R^{-1} \in \overline{H}_2(\lambda_q)$$

olduğunu göstermek yeter. Buradan

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & \lambda_q b \\ \lambda_q c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d & \lambda_q c \\ \lambda_q b & a \end{pmatrix} \in \overline{H}_2(\lambda_q)$$

olduğundan $\overline{H}_2(\lambda_q) \triangleleft \overline{H}(\lambda_q)$ bulunur. Böylece q sayısının alacağı değerlere göre

$$\overline{H}(\lambda_q)/\overline{H}_2(\lambda_q)$$

bölüm grubunu oluşturup izomorf olduğu grubu yazabiliriz. Burada

$$\overline{H}_2(\lambda_q) \geq H_2(\lambda_q)$$

olduğu bu kısmın başında bulunmuştu.

Şimdi q = 4, 5, 6 ve 7 durumlarını inceleyelim.

Önce q = 4 durumunu dikkate alalım. Bu durumda

$$H(\lambda_4)/H_2(\lambda_4) \cong D_4$$

olduğunu biliyoruz. Burada $\overline{H}_2(\lambda_4) = H_2(\lambda_4)$ eşitliği sağlansaydı yukarıdaki $p \neq 2$ durumuna benzer olarak $\overline{H}(\lambda_q)/\overline{H}_2(\lambda_q)$ bölüm grubunun izomorf olduğu gruba

$$\overline{H}(\lambda_q)/\overline{H}_2(\lambda_q) \cong C_2 \times D_4$$

biçiminde bir C_2 çarpanı gelirdi. Fakat $\overline{H}_2(\lambda_4) \geq H_2(\lambda_4)$ ve buradan

$$\left|\overline{H}(\lambda_q)/\overline{H}_2(\lambda_q)\right| < \left|\overline{H}(\lambda_q)/H_2(\lambda_q)\right|$$

olduğundan bu çarpan gelmeyecek, böylece bölüm grubu

$$\overline{H}(\lambda_4)/\overline{H}_2(\lambda_4) \cong D_4$$

biçiminde olacaktır. Yani p = 2 durumunda Hecke gruplarının temel denklik alt gruplarının Hecke gruplarındaki indeksi ve bölüm grubunun izomorf olduğu grup genişletilmiş Hecke gruplarında da değişmeyecek, korunacaktır.

Yukarıdaki q = 4 durumuna benzer olarak, diğer q = 5, 6 ve 7 durumlarında da p = 2 olması halinde, genişletilmiş Hecke gruplarının, temel denklik alt gruplarına bölüm gruplarının indeksleri değişmeyecek, Hecke gruplarının temel denklik alt gruplarına bölüm gruplarında elde edilen indeks ve bölüm gruplarının izomorf olduğu gruplar korunacaktır. Buna göre aşağıda q = 5, 6 ve 7 durumları için genişletilmiş Hecke gruplarının temel denklik alt gruplarına bölüm grupları verilmiştir.

$$\overline{H}(\lambda_q)/\overline{H}_2(\lambda_q) \cong \begin{cases} D_5 & ; \quad q=5 \\ D_6 & ; \quad q=6 \\ D_7 & ; \quad q=7 \end{cases}$$

5. SONUÇLAR

Bu çalışmada, q≥3 olmak üzere $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grupları ile bunların çift, komütatör, kuvvet, temel denklik alt gruplarının grup yapıları hakkında bilgi vermek amaçlanmıştır.

Çalışmanın 4.1 kısmında $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke gruplarının tanımı ve grup gösterimleri verilmiştir.

4.2 Kısımda genişletilmiş modüler grup için verilmiş olan temel bölge tanımı $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grupları için verilmiş ve genişletilmiş Hecke gruplarının izomorf olduğu grup yapısını veren bir teorem ispatlanmıştır.

4.3 Kısımda genişletilmiş Hecke gruplarının çift alt gruplarının tanımı verilmiş ve bu grupların üreteç kümelerini veren bir teorem ifade ve ispat edilmiştir.

4.4 Kısımda $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke gruplarının kamütatör alt grupları tanıtılmış, q sayısının tek veya çift sayı olmasına göre iki teorem ifade ve ispat edilmiştir.

4.5 Kısımda $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke gruplarının m. kuvvet alt grubu tanımı verilmiştir. Herhangi bir q tek sayısı ve pozitif bir m sayısı için (q,m) nin bütün durumlarını inceleyen teoremler ifade ve ispat edilmiştir. Ayrıca özel olarak q=5 için teoremler ifade edilmiştir. q=4 ve q=6 çift sayıları için m pozitif sayısının alabileceği bütün durumlarla ilgili teoremler ifade ve ispat edilmiştir.

4.6 Kısımda $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke gruplarının temel denklik alt grupları tanımlanmış ve q = 4, 5, 6 ve 7 için temel denklik altgrupları ve bunların bölüm grupları elde edilmiştir.

Çalışmada q≥3 olmak üzere $H(\lambda_q)$ Hecke gruplarına $R_1(z) = 1/\bar{z}$ yansıması katılarak genişletilmiş Hecke grupları elde edilmiştir. Aynı yansıma λ≥2 olmak üzere $H(\lambda)$ Hecke gruplarına da katılabilir ve tezde incelenen konular $\overline{H}(\lambda)$ Hecke grupları içinde incelenebilir. Ayrıca özel olarak p≥5 olacak biçimde bir asal sayı alınarak yine $\overline{H}(\sqrt{p})$ Hecke grupları da çalışılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Hecke, E., Über die Bestimmung Dirichletscher Reichen durch ihre Funktionalgleichungen, *Math. Ann.*, 112, (1936), s.664-699.

[2] Cangül, İ. N., Normal Subgroups of Hecke Groups, Ph.D. Thesis, Southampton University, (1993).

[3] Jones, G. A., Singerman, D., Complex Functions, Cambridge University Press, (1987), s.60.

[4] Başkan, T., Ayrık Gruplar, H.Ü.Fen Fakültesi Yayınları, Beytepe, ANKARA, (1980) s.7,9.

[5] Bizim, O., Genişletilmiş Modüler Grup, Doktora Tezi, Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Bursa, (1995).

[6] Fraleigh, J. B., A First Course in Abstract Algebra, sixth ed., Addison-Wesley Pub. Comp., (1974).

[7] Bayraktar, M., Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi, Atatürk Üniversitesi Yayınları, Erzurum, (1988), s.256-266.

[8] Lehner, J., Discontinuous Groups and Automorphic Functions, Math. Surveys 8, *Amer.Math. Soc.*, Providence.R.I., (1964), s.425.

[9] Fine, B., Fuchsian Subgroups of The Picard Group, *Cand. J. Math.*, 28, (1976), s.481-485.

[10] Maclachlan, C., Maximal Normal Fuchsian Groups, *Illionis J. Math.*, 15, (1971), s.104-113.

[11] Yılmaz, N., Picard Grubu ve $H(\sqrt{n})$ Hecke Gruplarının Bazı Alt Grupları, Doktora Tezi, Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Bursa, (1999).

[12] Allenby, R. B. J. T., Rings, Fields and Groups, second ed., Edward Arnold-London-New York-Melbourne-Auckland, (1991), s.156-167.

[13] Lyndon, R. C., Schupp, P. E., Combinatorial Group Theory, Springer-Verlag-Berlin-Heidelberg-New York, (1977).

[14] Fine, B., Rosenberger, G., Algebraic Generalizations of Discrete Groups, Marcel Dekker, Inc, New-York, (1999), s.5-12.

[15] Rankin, R. A., Modular Forms and Functions, Cambridge Univ. Press, (1977).

[16] Ford, L. R., Automorphic Functions, second ed., Chelsea-New York, (1951).

[17] Evans, R., A Fundamental Region for Hecke's Modular Group, *J. of No .Thry.*, 5, (1973), s.108-115.

[18] Macbeath, A. M., Packings, Free Products and Residually Finite Groups, Proc. Camb. Phill. Soc., 59 (1963), s.555-558.

[19] Cangül, İ. N., H(λ_q) Hecke Gruplarının Grup Yapısı, *Turkish J. of Math.*, Volume 2, number 2, (1996), s.203-207.

[20] Cangül, İ. N., H'(λ_q) Gruplarının Elemanları ve Normal Alt Grupları, *Turkish J. of Math.*, Volume 23, number 2, (1999), s.251-255.

[21] Newman, M., The Structure of Some Subgroups of the Modular Group, *Amer. J. Math.*, 87 (1965), s.285-296.

[22] Newman, M., Normal Congruence Subgroups of the Modular Group, *Amer. J. Math.*, 85 (1963), s.419-427.

[23] Mcquillan, D. L., Classification of Normal Subgroups of the Modular Group, *Amer. J. Math.*, 87 (1965), s.285-296.

[24] Parson, L. A., Generalized Kloosterman Sums and the Fourier Coefficients of Cusp Forms, *Trans. A.M.S.*, 217 (1976), s.329-350.

[25] Parson, L. A., Normal Congrunce Subgroups of the Hecke Groups G($\sqrt{2}$) and G($\sqrt{3}$), *Illionis J. of Math.*, 19 (1975), s.79-86.

[26] Jones, G. A., Thornton, J.S., Automorphisms and Congrunce Subgroups of The Extended Modular Group, *J. London Math. Soc.*, (2), 34 (1986), s.26-40.

[27] Coxeter, H. S. M., Moser, W. O. J., Generators and Relations For Discrete Groups, second ed., Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg-New York, (1965), s.85-87.

[28] Schoeneberg, B., Elliptic Modular Functions, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, (1974), s.14-35.