T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

HECKE GRUPLARINDA BAZI ÖZEL SAYI DİZİLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ZEHRA SARIGEDİK

Balıkesir, Temmuz 2010

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BiLiMLERi ENSTiTüSü
MATEMATİK ANABİLİM DALI

HECKE GRUPLARINDA BAZI ÖZEL SAYI DİZİLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ZEHRA SARIGEDİK

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Sebahattin İKİKARDEŞ

Sınav Tarihi: 15.07.2010

Jüri Üyeleri: Doç. Dr. Özden KORUOĞLU (BAÜ)

Yrd. Doç. Dr. Fırat ATEŞ (BAÜ)

Yrd. Doç. Dr. Sebahattin İKİKARDEŞ (Danışman-BAÜ)

Enstitü Yönetim Kurulunun .... tarih .... sayılı oturumunun ..... nolu kararı ile .... Mezun olmuştur.

Balıkesir, Temmuz-2010

ÖZET

HECKE GRUPLARINDA BAZI ÖZEL SAYI DİZİLERİ

Zehra SARIGEDİK
Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
(Yüksek Lisans Tezi / Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Sebahattin İKİKARDEŞ)
Balıkesir, 2010

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde Fibonacci ile ilgili genel bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde, genelleştirilmiş Fibonacci ve genelleştirilmiş Lucas sayıları ve bu sayıların bazı özellikleri ele alınmıştır.

Üçüncü bölümde, daha sonraki bölümde gerekli olan Hecke grupları ve genişletilmiş Hecke grupları ile ilgili bazı tanımlar, teoremler verilmiştir.

Dördüncü bölümde, genişletilmiş Hecke gruplarından faydalanarak genelleştirilmiş Fibonacci ve genelleştirilmiş Lucas dizilerinin tanımları yapılmıştır. Daha sonra bu diziler ile ilgili bir takım özellikler verilmiştir ve bu dizilerden yeni dizilerin de elde edilebildiği gösterilmiştir. Ayrıca genelleştirilmiş Fibonacci ve genelleştirilmiş Lucas dizilerinin polinom şeklinde yazılabildiği gösterilmiştir ve bu diziler için elde edilen bazı üst sınır özellikleri de verilmiştir.

Son bölümde, elde edilen sonuçların bir özeti verilmiştir.

ANAHTAR SÖZCÜKLER : Genelleştirilmiş Fibonacci Dizileri, Genelleştirilmiş Lucas Dizileri, Genişletilmiş Hecke Grupları.

ABSTRACT

SOME SPECIAL NUMBER SEQUENCES
IN THE HECKE GROUPS

Zehra SARIGEDİK
Balikesir University, Institute of Science
Department of Mathematics
(M. Sc. Thesis / Supervisor : Asst. Prof. Dr. Sebahattin İKİKARDEŞ)
Balikesir, 2010

This thesis consists of five chapters. In the first chapters, are given general information about Fibonacci.

In the second chapter, generalized Fibonacci and generalized Lucas numbers and some properties of these numbers have been given.

In the third chapter, some definitions, theorems are necessary for Hecke groups and extended Hecke groups in later sections are given.

In the fourth chapter, generalized Fibonacci and generalized Lucas sequences are defined by extended Hecke groups. Then, these sequences are related to some properties and these sequences can be obtained from the new sequences are shown. Also, generalized Fibonacci and generalized Lucas sequences can be written in polynomial form is shown and obtained for these sequences have been given some upper bound properties.

In the last chapter, a brief summary of the results obtained is given.

KEY WORDS : Generalized Fibonacci Sequences, Generalized Lucas Sequences, Extended Hecke Groups.

İÇİNDEKİLER **sayfa**

ÖZET, ANAHTAR SÖZCÜKLER	ii
ABSTRACT, KEY WORDS	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SEMBOL LİSTESİ	v
ÖNSÖZ	vi
1. GİRİŞ	1
2. FİBONACCİ VE LUCAS SAYILARI	3
3. HECKE GRUPLARI VE GENİŞLETİLMİŞ HECKE GRUPLARI	19
3.1 Cisim Genişlemeleri ve Sonlu Cisimler	19
3.2 Projektif Gruplar	20
3.3 Hecke Grupları	21
3.4 Genişletilmiş Hecke Grupları	23
4. GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ VE GENELLEŞTİRİLMİŞ LUCAS DİZİLERİ	25
4.1 Genelleştirilmiş Fibonacci ve Genelleştirilmiş Lucas Dizilerinin Temel Özellikleri	31
4.2 Genelleştirilmiş Fibonacci ve Genelleştirilmiş Lucas Dizilerinin Polinom Gösterimleri	51
5. SONUÇLAR	61
KAYNAKLAR	62

SEMBOL LİSTESİ

Simge	**Adı**
$\mathbb{C}$	Karmaşık sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
PSL(2, $\mathbb{R}$)	$\{T \mid T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1\}$
C_n	n mertebeli devirli grup
$\mathbb{C}_\infty$	Genişletilmiş karmaşık sayılar kümesi
$H(\lambda)$	Hecke grubu
$\overline{H}(\lambda_q)$	Genişletilmiş Hecke grubu
$P =< X \mid R >$	Grup sunuşu
$GF(p^n)$	p^n mertebeli Galois cismi
$GL(2, K)$	Genel lineer grup
$Z(GL(2, K))$	Genel lineer grubun merkezi
$PGL(2, K)$	Projektif genel lineer grup
$SL(2, K)$	Özel lineer grup
$Z(SL(2, K))$	Özel lineer grubun merkezi
$PSL(2, K)$	Projektif özel lineer grup
F_n	n. Fibonacci sayısı
L_n	n. Lucas sayısı
U_n	Genelleştirilmiş n. Fibonacci sayısı
V_n	Genelleştirilmiş n. Lucas sayısı
a_k	Genelleştirilmiş özel Fibonacci dizisi
b_k	Genelleştirilmiş özel Lucas dizisi
$\lfloor a \rfloor$	a için üst sınır

ÖNSÖZ

Bu çalışmada akademik bilgi ve birikimiyle bana destek olan ve yardımlarıyla her zaman yanımda hissettiğim danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Sebahattin İkikardeş'e ve çalışma sırasında yardımını hiç esirgemeyen hocam Doç. Dr. Recep Şahin'e içtenlikle teşekkür ederim.

Beni yetiştiren, her konuda destekleyen ve bugünlere gelmemde büyük emekleri olan sevgili anneme ve babama teşekkürlerimi sunuyorum.

Balıkesir, 2010 Zehra SARIGEDİK

1. GİRİŞ

Fibonacci ile ilgili pek çok bilgi [1, 2, 3, 4, 5] nolu kaynaklarda bulunmaktadır. Bu bilgiler incelendiğinde Fibonacci ile ilgili kısaca aşağıdaki bilgiler verilebilir.

Leonardo Fibonacci tahmini 1170 yılında İtalya'nın Pisa şehrinde doğdu. Kesin doğum tarihi bilinmemektedir. Babasının işi nedeniyle Kuzey Afrika'ya ve Cezayir'e gitttiği ve burada Arap hocalardan matematik dersleri aldığı bilinmektedir. Hint-Arap sayılarını (1, 2, 3, ...) öğrenerek, bunları Avrupa'ya tanıtmıştır. Fibonacci modern çağda en fazla Hint-Arap sayılarını Avrupa'ya getirmesiyle ve 13. yüzyıl başlarında yayınlanan Liber Abaci isimli hesaplama yöntemleri kitabıyla tanınır. Bu kitap gündelik hayatta ticari defter tutma, ölçü birimlerini çevirme, faiz hesaplama, para bozma ve değiştirme ve benzeri işlemlerde önemini göstermiştir. Kitap Avrupa'da tahsilli insanlar arasında hızlı bir şekilde yayılmış ve Avrupa'nın bilimde ilerlemesine önemli etkileri olmuştur. Liber Abaci'de karşılaşılan bir problemin çözümünde Fibonacci dizisi anlatılmaktadır.
Bu problem aşağıdaki gibidir:

Tavşan Problemi

"Dört yanı duvarlarla çevrili bir yere bir çift tavşan konmuştur. Her çift tavşanın bir ay içinde yeni bir çift tavşan yavruladığı, her yeni çiftin de erginleşmesi için bir ay gerektiği ve tavşanların ölmediği varsayılırsa, 100 ay sonunda dört duvarın arasında kaç çift tavşan olur?" Bu problem düşünüldüğü takdirde tavşan çiftleri aylara göre şu sıralamayı ortaya koymaktadır:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144...

Böylece

$n:$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	…
$F_n:$	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	…

şeklinde artar.

Görüldüğü gibi her sayı kendisinden önce gelen iki sayının toplamına eşittir. Bu problemin çözümünde tavşan çiftlerinin sayısının artışını gösteren sayı dizisi Fibonacci sayıları, diziye de Fibonacci dizisi denir. Bu sayı dizisi 6. yüzyıldan beri Hintli matematikçiler tarafından bilinmekteydi ancak Avrupa'ya ilk olarak Fibonacci tarafından tanıtılmıştır.

Fibonacci sayılarının tanıtılmasının ardından matematikçiler bu sayı dizilerine benzer başka diziler olup olmadığını araştırmışlardır. Literatürde [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7] nolu kaynaklarda Fibonacci sayılarının değişik biçimde genellemeleri olmuştur. Bu tezde, [6] nolu kaynakta düşünülmüş olan genelleştirilmiş Fibonacci dizilerinin genel olarak hangi özellikleri sağladığı incelenmiştir.

Bu tezde, genelleştirilmiş Fibonacci ve genelleştirilmiş Lucas dizilerinden yeni diziler elde edilerek bu dizilerin özellikleri incelenmiştir.

İkinci bölümde, genelleştirilmiş Fibonacci ve genelleştirilmiş Lucas sayıları ve bu sayıların bazı özellikleri ele alınmıştır.

Üçüncü bölümde, daha sonraki bölümde gerekli olan Hecke grupları ve genişletilmiş Hecke grupları ile ilgili bazı tanımlar, teoremler verilmiştir.

Dördüncü bölümde, genişletilmiş Hecke gruplarından faydalanarak genelleştirilmiş Fibonacci ve genelleştirilmiş Lucas dizilerinin tanımları yapılmıştır. Daha sonra bu diziler ile ilgili bir takım özellikler verilmiştir ve bu dizilerden yeni dizilerin de elde edilebildiği gösterilmiştir. Ayrıca genelleştirilmiş Fibonacci ve genelleştirilmiş Lucas dizilerinin polinom şeklinde yazılabildiği gösterilmiştir ve bu diziler için elde edilen bazı üst sınır özellikleri de verilmiştir.

2. FİBONACCİ VE LUCAS SAYILARI

Bu bölümde öncelikle Fibonacci ve Lucas sayılarını, genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayılarını tanımlayacağız. Daha sonra bu sayılar arasındaki bazı bağıntıları vereceğiz. Bu özellikler [1, 8] nolu kaynaklarda bulunabilir.

2.1 Tanım: Fibonacci sayıları, her $n \geq 2$ tamsayısı için ve başlangıç koşulları

$F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$

olmak üzere

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \tag{2.1}$$

bağıntısı ile tanımlanır. Burada F_n ye n. ci Fibonacci sayısı denir.

2.2 Tanım: Lucas sayıları, her $n \geq 2$ tamsayısı için ve başlangıç koşulları

$L_0 = 2$ ve $L_1 = 1$

olmak üzere

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \tag{2.2}$$

bağıntısı ile tanımlanır. Burada L_n ye n. ci Lucas sayısı denir.

Genelleştirilmiş Fibonacci ve genelleştirilmiş Lucas dizilerinin [1, 2, 3, 4, 5] kaynaklarında farklı şekillerde tanımlamaları yapılmıştır. Ancak biz bu tezde aşağıda tanımlamaları verilen genelleştirilmiş Fibonacci ve genelleştirilmiş Lucas dizilerini kullanacağız. Böylece daha sonraki bölümde bu tanımlardan elde edilen bazı sonuçları da vereceğiz.

2.3 Tanım: Her $n \geq 2$ tamsayısı için k sıfırdan farklı pozitif bir tamsayı olmak üzere ve başlangıç koşulları

$U_0 = 0$ ve $U_1 = 1$

için

$$U_n = kU_{n-1} + U_{n-2} \tag{2.3}$$

bağıntısı ile tanımlanan diziye genelleştirilmiş Fibonacci dizisi denir ve $\{U_n\}$ ile gösterilir [1, 2].

2.4 Tanım: Her $n \geq 2$ tamsayısı için k sıfırdan farklı pozitif bir tamsayı olmak üzere ve başlangıç koşulları

$V_0 = 2$ ve $V_1 = k$

için

$$V_n = kV_{n-1} + V_{n-2} \qquad (2.4)$$

bağıntısı ile tanımlanan diziye genelleştirilmiş Lucas dizisi denir ve $\{V_n\}$ ile gösterilir [1, 2].

Dikkat edilirse $k = 1$ için $\{U_n\}$ dizisi Fibonacci dizisi ve $\{V_n\}$ dizisi Lucas dizisidir.

2.1 Teorem: $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere n. ci Fibonacci sayısı

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

dir [1].

İspat: İspatı tümevarım ile yapalım. $n = 0$ için $F_0 = 0$ olduğu açıktır. $n = 1$ için,

$$F_1 = \frac{\alpha - \beta}{\alpha - \beta}$$

olur ve dolayısıyla $n = 1$ için eşitlik sağlanır. $n = t$ için eşitliğin doğru olduğunu varsayalım. $n = t + 1$ için eşitliğin doğru olduğunu gösterelim. Tanım gereği

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

olduğundan

$$F_{t+1} = F_t + F_{t-1}$$

olur ve hipotezden

$$F_{t+1} = \frac{\alpha^t - \beta^t}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^{t-1} - \beta^{t-1}}{\alpha - \beta}$$

$$= \frac{\alpha^{t-1}(1+\alpha) - \beta^{t-1}(1+\beta)}{\alpha - \beta}$$

olur.

$\alpha^2 = \alpha + 1$

ve

$\beta^2 = \beta + 1$

olduğundan

$$F_{t+1} = \frac{\alpha^{t+1} - \beta^{t+1}}{\alpha - \beta}$$

olur ve istenen elde edilir.■

Şimdi Fransız matematikçi Binet tarafından bulunan Fibonacci ve Lucas sayıları için Binet formülünü verelim.

2.5 Tanım: α ile β, $x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin kökleri olan sayılar olsun.

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \tag{2.5}$$

sayısına n. Fibonacci sayısı için Binet formülü ve $x^2 - x - 1$ denklemine de F_n dizisinin karakteristik denklemi denir [1, 3, 5, 9, 10, 11].

2.2 Teorem: F_n dizisinin genel terimi

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

dir [1, 2].

İspat: F_n dizisinin karakteristik denklemi,

$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$

olmak üzere karakteristik denklemin kökleri

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

ve

$$\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

dir.

Şimdi F_n dizisinin genel terimini bulalım.

$$F_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

şeklindedir.

$n=1$ için,

$$F_1 = A(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) + B(\frac{1-\sqrt{5}}{2})$$

$n=2$ için,

$$F_2 = A(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 + B(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2$$

olur. $F_1 = 1$ olduğundan

$$2 = A(1+\sqrt{5}) + B(1-\sqrt{5})$$

ve $F_2 = 1$ olduğundan

$$4 = A(1+\sqrt{5})^2 + B(1-\sqrt{5})^2$$

olur.

Denklem sisteminin ortak çözümüyle

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

ve

$$B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

bulunur.

Böylece Fibonacci dizisinin genel terimi

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$$

olur.

2.3 Teorem: $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere n. ci Lucas sayısı

$$L_n = \alpha^n + \beta^n$$

dir [1].

İspat: İspatı tümevarım ile yapalım. $n=0$ için $L_0 = 2$ olduğu açıktır. $n=1$ için

$$L_1 = \alpha + \beta = 1$$

olur. $n=k$ için eşitliğin doğru olduğunu varsayalım. $n=k+1$ için eşitliğin doğru olduğunu gösterelim. Tanım gereği

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$$

olduğundan

$$L_{k+1} = L_k + L_{k-1}$$

olur ve hipotezden

$$L_k = \alpha^k + \beta^k$$

olduğundan

$$L_{k+1} = \alpha^k + \beta^k + \alpha^{k-1} + \beta^{k-1}$$

$$= \alpha^{k-1}(\alpha + 1) + \beta^{k-1}(\beta + 1)$$

olur.

$$\alpha^2 = \alpha + 1$$

ve

$$\beta^2 = \beta + 1$$

olduğundan

$$L_{k+1} = \alpha^{k+1} + \beta^{k+1}$$

olur ve böylece istenen elde edilir. ■

2.6 Tanım: α ile β, $x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin kökleri olan sayılar olsun.

$$L_n = \alpha^n + \beta^n$$

(2.6)

sayısına n. Lucas sayısı için Binet formülü denir [1, 3, 5, 9, 10, 11].

Fibonacci sayılarının binet formülü yardımıyla negatif indisli Fibonacci sayılarının ilk terimleri

$$F_{-1} = F_1 - F_0,\ F_{-2} = F_0 - F_{-1}, \cdots$$

şeklinde devam eder. Bu şekilde devam edilirse

n	0	1	2	3	4	5 ⋯
F_{-n}	0	1	-1	2	-3	5 ⋯

olur ve bu genelleştirilirse aşağıdaki teorem elde edilir.

2.4 Teorem: $\{F_n\}$ Fibonacci dizisi olmak üzere her n tamsayısı için

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$$

şeklinde tanımlıdır [1].

İspat: Teorem (2.1) den Fibonacci sayıları için Binet formülünün

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

olduğunu biliyoruz. Böylece

$$F_{-n} = \frac{\alpha^{-n} - \beta^{-n}}{\alpha - \beta}$$

$$= \frac{\frac{1}{\alpha^n} - \frac{1}{\beta^n}}{\alpha - \beta}$$

$$= \frac{\frac{\beta^n - \alpha^n}{(\alpha\beta)^n}}{\alpha - \beta}$$

olur. $\alpha\beta = -1$ olduğundan

$$F_{-n} = \frac{\frac{\beta^n - \alpha^n}{(-1)^n}}{\alpha - \beta}$$

$$= \frac{\frac{-(\alpha^n - \beta^n)}{(-1)^n}}{\alpha - \beta}$$

$$= (-1)^{n+1} \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right)$$

$$= (-1)^{n+1} F_n$$

elde edilir. ■

Benzer şekilde Lucas sayılarının binet formülü yardımıyla negatif indisli Lucas sayılarının ilk terimleri

$L_{-1} = L_1 - L_0,\ L_{-2} = L_0 - L_1, \cdots$

şeklinde devam eder. Bu şekilde devam edilirse

n	0	1	2	3	4	5 $\cdots$
L_{-n}	2	-1	3	-4	7	-11 $\cdots$

olur ve bu genelleştirilirse aşağıdaki teorem elde edilir.

2.5 Teorem: $\{L_n\}$ Fibonacci dizisi olmak üzere her n tamsayısı için

$L_{-n} = (-1)^n L_n$

şeklinde tanımlıdır [1].

İspat: Teorem (2.3) den Lucas sayıları için Binet formülünün

$L_n = \alpha^n + \beta^n$

olduğunu biliyoruz. Böylece

$L_{-n} = \alpha^{-n} + \beta^{-n}$

$$= \frac{1}{\alpha^n} + \frac{1}{\beta^n}$$
$$= \frac{\beta^n + \alpha^n}{(\alpha\beta)^n}$$
olur. $\alpha\beta = -1$ olduğundan
$$L_{-n} = \frac{\beta^n + \alpha^n}{(-1)^n}$$
$$= (-1)^n(\alpha^n + \beta^n)$$
$$= (-1)^n L_n$$
elde edilir. ■

Fibonacci ve Lucas sayılarının birçok özelliği vardır. Şimdi [1,8] nolu kaynaklardan faydalanarak bu dizilerin bazı özelliklerini inceleyelim.

2.6 Teorem: Her $n \geq 1$ için ardışık Fibonacci sayıları aralarında asaldır [1,8].

İspat: Varsayalım ki $(F_{n+1}, F_n) = d$ ve $d > 1$ olsun. Böylece en büyük ortak bölen tanımından $d|F_n$ ve $d|F_{n+1}$ yazabiliriz. Ayrıca bunların farkı olan,

$$F_{n+1} - F_n = F_{n-1}$$

sayısı d tarafından bölünür. Yani $d|F_{n-1}$ olur. Benzer şekilde $d|F_n$ ve $d|F_{n-1}$ olduğundan bunların farkı olan,

$$F_n - F_{n-1} = F_{n-2}$$

sayısı da d tarafından bölünür. Yani $d|F_{n-2}$ olur. Bu şekilde işlemler tekrarlanırsa $d|F_1$ olur. Ancak $F_1 = 1$ olduğundan $d > 1$ olmasıyla çelişkidir. Böylece $(F_{n+1}, F_n) = 1$ olur ve ispat biter. ■

2.1 Önerme: $F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1}$ [1,8]

İspat: m sabit olsun ve ispatı n üzerinden tümevarım ile yapalım.

$n = 1$ ise

$$F_{m+1} = F_{m-1}F_1 + F_mF_2 = F_{m-1} + F_m$$

olur ve önerme sağlanır.

Şimdi $n = 1, 2, \ldots, k$ için önermenin sağlandığını varsayalım ve $n = k + 1$ için önermenin doğru olduğunu gösterelim. Varsayımdan

$$F_{m+k} = F_{m-1}F_k + F_mF_{k+1}$$

ve

$$F_{m+k-1} = F_{m-1}F_{k-1} + F_mF_k$$

olur. Dolayısıyla

$$F_{m+k} + F_{m+k-1} = F_{m-1}(F_k + F_{k-1}) + F_m(F_{k+1} + F_k)$$

olur ve böylece

$F_{m+k+1} = F_{m-1}F_{k+1} + F_mF_{k+2}$

olduğu çıkar.

Böylece

$F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1}$

olduğu elde edilir. ■

2.2 Önerme: $F_{m-n} = (-1)^n(F_mF_{n+1} - F_{m+1}F_n)$ [1,8]

İspat: m sabit olsun ve ispatı n üzerinden tümevarım ile yapalım.

$n = 1$ ise

$$\begin{aligned} F_{m-1} &= (-1)(F_mF_2 - F_{m+1}F_1) \\ &= (-1)(F_m - F_{m+1}) \\ &= F_{m+1} - F_m \end{aligned}$$

olur ve önerme sağlanır.

Şimdi $n = 1, 2, \ldots, k$ için önermenin sağlandığını varsayalım ve $n = k + 1$ için önermenin doğru olduğunu gösterelim. Varsayımdan

$F_{m-k} = (-1)^k(F_mF_{k+1} - F_{m+1}F_k)$

ve

$F_{m-(k-1)} = (-1)^{k-1}(F_mF_k - F_{m+1}F_{k-1})$

olur.

$$\begin{aligned} F_{m-(k-1)} - F_{m-k} &= (-1)^{k-1}(F_mF_k - F_{m+1}F_{k-1}) - (-1)^k(F_mF_{k+1} - F_{m+1}F_k) \\ &= (-1)^kF_m(-F_k - F_{k+1}) + (-1)^kF_{m+1}(F_{k-1} + F_k) \\ &= -(-1)^kF_mF_{k+2} + (-1)^kF_{m+1}F_{k+1} \\ &= (-1)^{k+1}(F_mF_{k+2} - F_{m+1}F_{k+1}) = (-1)^{k+1} \end{aligned}$$

olur ve böylece

$$F_{m-(k+1)} = (-1)^{k+1}(F_mF_{k+2} - F_{m+1}F_{k+1})$$

olduğu çıkar.

Böylece

$F_{m-n} = (-1)^n(F_mF_{n+1} - F_{m+1}F_n)$

olduğu elde edilir. ■

2.7 Teorem: Her m ve n tamsayısı için $F_m|F_{mn}$ dir [1,8].

İspat: m sabit olsun ve ispatı n üzerinden tümevarım ile yapalım.

$m = 0$ veya $n = 0$ ise bu durumda teorem doğrudur.

$n = 1$ ise $F_m|F_m$ olduğu açıktır.

$n = 1, 2, \dots, k$ için doğru olduğunu varsayalım. Yani,

$F_m|F_{mk}$

olsun. Böylece F_m denklemin sağ tarafını tam böler. 2.1 Önermeden,

$F_{m(k+1)} = F_{mk-1}F_m + F_{mk}F_{m+1}$

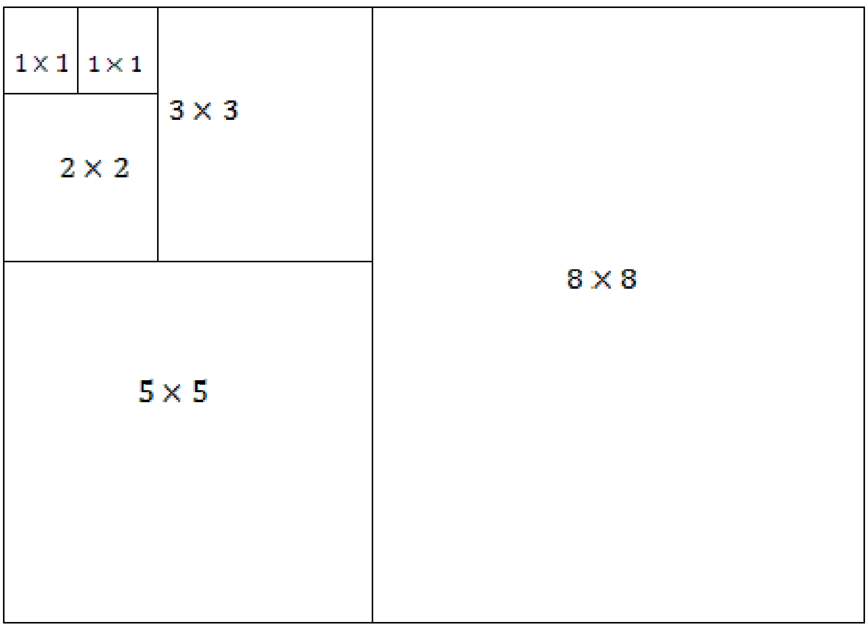
olur ve varsayımdan $F_m|F_{mk}$ olduğundan böylece F_m denklemin sağ tarafını tam böler. Böylece F_m böler $F_{m(k+1)}$. Bu durumda $n \geq 1$ için teorem sağlanır. Benzer şekilde $n \leq -1$ için de F_m böler F_{mn} olur. Sonuç olarak her m, n tamsayısı için

$F_m|F_{mn}$

elde edilir. ■

2.3 Önerme: $F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_nF_{n+1}$ [1,8]

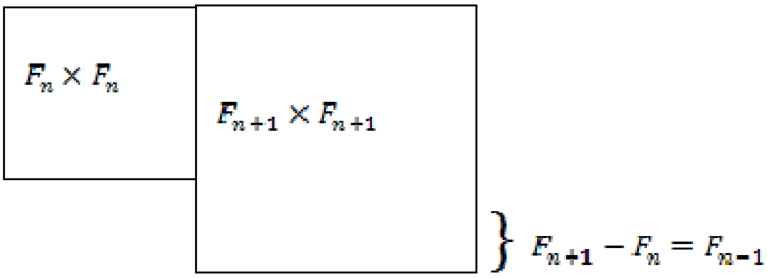
İspat: Fibonacci sayılarının karelerini bölgeler olarak düşünelim. Bu durumda aşağıdaki gibi olur.



Yukarıdaki şekle göre $F_1^2+F_2^2+F_3^2+F_4^2+F_5^2+F_6^2$ kareler toplamını bulabiliriz veya $F_6(F_5+F_6)=F_6F_7$ olduğu düşünülerek de kareler toplamı hesaplanabilir. Bu ifadeyi genelleştirirsek Fibonacci sayılarının n ye kadar olan kareler toplamı kolayca bulunabilir. ■

2.4 Önerme: $F_n^2+F_{n+1}^2=F_{2n+1}$ [1,8]

İspat:



Yukarıdaki bölge $F_{n-1}F_{n+1}+F_nF_{n+2}$ olarak gösterilebilir. 2.1 Önermeden,

$F_{n+(n+1)}=F_{2n+1}$

olduğu çıkar. ■

2.5 Önerme: $F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2=(-1)^n$ [1,8]

İspat: $F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2=(F_{n-1}+F_n)F_{n-1}-F_n^2$

$$=F_{n-1}^2+F_n(F_{n-1}-F_n)$$
$$=F_{n-1}^2-F_nF_{n-2}$$
$$=-(F_nF_{n-2}-F_{n-1}^2)$$

Şimdi yukarıdaki işlemi tekrar edersek,

$$-(F_nF_{n-2}-F_{n-1}^2)=(-1)^2(F_{n-1}F_{n-3}-F_{n-2}^2)$$
$$=(-1)^3(F_{n-2}F_{n-4}-F_{n-3}^2)$$
$$=(-1)^n(F_1F_{-1}-F_0^2)$$
$$=(-1)^n$$

olduğu elde edilir. ■

2.6 Önerme: $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$ [1,8]

İspat: İspatı tümevarım ile yapalım. $n = 1$ için $L_1 = 1 = 0 + 1 = F_0 + F_2$ ve $n = 2$ için $L_2 = 3 = 2 + 1 = F_1 + F_3$ olduğundan $n = 1$ ve $n = 2$ için eşitlik sağlanır. Şimdi $n = 1, 2, \dots, k$ için eşitliğin sağlandığını varsayalım. Yani,

$L_k = F_{k-1} + F_{k+1}$

ve

$L_{k-1} = F_{k-2} + F_k$

olsun. $n = k + 1$ için de eşitliğin sağlandığını gösterelim.

$$\begin{aligned} F_k + F_{k+2} &= F_{k-1} + F_{k-2} + F_{k+1} + F_k \\ &= L_k + L_{k-1} \\ &= L_{k+1} \end{aligned}$$

olduğundan

$L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$

eşitliği elde edilir. ■

2.7 Önerme: $F_{2n} = F_n L_n$ [1,8]

İspat:
$$\begin{aligned} F_{2n} &= F_{n+n} \\ &= F_{n-1}F_n + F_nF_{n+1} \\ &= F_n(F_{n-1} + F_{n+1}) \\ &= F_nL_n \end{aligned}$$

olduğundan

$$F_{2n} = F_nL_n$$

eşitliği elde edilir. ■

2.8 Önerme: $5F_n = L_{n+1} + L_{n-1}$ [1,8]

İspat: İspatı tümevarım ile yapalım. $n = 1$ için $L_2 + L_0 = 3 + 2 = 5 = 5F_1$ ve $n = 2$ için $L_3 + L_1 = 4 + 1 = 5 = 5F_2$ olduğundan $n = 1$ ve $n = 2$ için önerme sağlanır. Şimdi $n = 1, 2, \dots, k$ için eşitliğin sağlandığını varsayalım. Yani,

$5F_k = L_{k+1} + L_{k-1}$

ve

$5F_{k-1} = L_k + L_{k-2}$

olsun. $n = k + 1$ için önermenin doğru olduğunu gösterelim.

$$L_{k+2} + L_k = L_{k+1} + L_k + L_{k-1} + L_{k-2}\mathrm{L}_{k+2}$$
$$= 5F_k + 5F_{k-1}$$
$$= 5(F_k + F_{k-1})$$
$$= 5F_{k+1}$$

olduğundan

$$5F_n = L_{n+1} + L_{n-1}$$

eşitliği elde edilir. ■

2.9 Önerme: $L_n = F_{n+2} - F_{n-2}$ [1,8]

İspat: İspatı tümevarım ile yapalım. $n = 1$ için $F_3 - F_{-1} = 2 - 1 = 1 = L_1$ ve $n = 2$ için $F_4 - F_0 = 3 - 0 = 3 = L_2$ olduğundan $n = 1$ ve $n = 2$ için önerme sağlanır. Şimdi $n = 1, 2, \dots, k$ için eşitliğin sağlandığını varsayalım. Yani,

$$L_k = F_{k+2} - F_{k-2}$$

ve

$$L_{k-1} = F_{k+1} - F_{k-3}$$

olsun. $n = k + 1$ için önermenin doğru olduğunu gösterelim.

$$F_{k+3} - F_{k-1} = F_{k+2} + F_{k+1} - F_{k-2} - F_{k-3}$$
$$= (F_{k+2} - F_{k-2}) + (F_{k+1} - F_{k-3})$$
$$= L_k + L_{k-1}$$
$$= L_{k+1}$$

olduğundan

$$L_n = F_{n+2} - F_{n-2}$$

eşitliği elde edilir. ■

2.10 Önerme: $2F_{n+1} = F_n + L_n$ [1,8]

İspat: İspatı tümevarım ile yapalım. $n = 1$ için $F_1 + L_1 = 1 + 1 = 2 = 2F_2$ ve $n = 2$ için $F_2 + L_2 = 1 + 3 = 4 = 2F_3$ olduğundan $n = 1$ ve $n = 2$ için önerme sağlanır. Şimdi $n = 1, 2, \dots, k$ için eşitliğin sağlandığını varsayalım. Yani,

$$2F_{k+1} = F_k + L_k$$

ve

$$2F_k = F_{k-1} + L_{k-1}$$

olsun. $n = k + 1$ için önermenin doğru olduğunu gösterelim.

$$F_{k+1}+L_{k+1}=F_k+F_{k-1}+L_k+L_{k-1}$$
$$=2F_{k+1}+2F_k$$
$$=2(F_{k+1}+F_k)$$
$$=2F_{k+2}$$

olduğundan

$$2F_{n+1}=F_n+L_n$$

eşitliği elde edilir. ■

2.11 Önerme: $L_{n+2}=F_{n+4}-F_n$ [1,8]

İspat: İspatı tümevarım ile yapalım. $n=1$ için $F_5-F_1=5-1=4=L_3$ ve $n=2$ için $F_6-F_2=8-1=7=L_4$ olduğundan $n=1$ ve $n=2$ için önerme sağlanır. Şimdi $n=1,2,\dots,k$ için eşitliğin sağlandığını varsayalım. Yani,

$$L_{k+2}=F_{k+4}-F_k$$

ve

$$L_{k+1}=F_{k+3}-F_{k-1}$$

olsun. $n=k+1$ için önermenin doğru olduğunu gösterelim.

$$F_{k+5}-F_{k+1}=F_{k+4}+F_{k+3}-F_k-F_{k-1}$$
$$=(F_{k+4}-F_k)+(F_{k+3}-F_{k-1})$$
$$=L_{k+2}+L_{k+1}$$
$$=L_{k+3}$$

olduğundan

$$L_{n+2}=F_{n+4}-F_n$$

eşitliği elde edilir. ■

2.12 Önerme: $3F_{n+2}=F_{n+4}+F_n$ [1,8]

İspat: İspatı tümevarım ile yapalım. $n=1$ için $F_5+F_1=5+1=6=3F_3$ ve $n=2$ için $F_6+F_2=8+1=9=3F_4$ olduğundan $n=1$ ve $n=2$ için önerme sağlanır. Şimdi $n=1,2,\dots,k$ için eşitliğin sağlandığını varsayalım. Yani,

$$3F_{k+2}=F_{k+4}+F_k$$

ve

$$3F_{k+1}=F_{k+3}+F_{k-1}$$

olsun. $n=k+1$ için önermenin doğru olduğunu gösterelim.

$$F_{k+5} + F_{k+1} = F_{k+4} + F_{k+3} + F_k + F_{k-1}$$
$$= 3F_{k+2} + 3F_{k+1}$$
$$= 3(F_{k+2} + F_{k+1})$$
$$= 3F_{k+3}$$

olduğundan

$$3F_{n+2} = F_{n+4} + F_n$$

eşitliği elde edilir. ■

2.13 Önerme: $\frac{1}{2}(3F_n + L_n) = F_{n+2}$ [1,8]

İspat: İspatı tümevarım ile yapalım.

$n = 1$ ise $\frac{1}{2}(3F_1 + L_1) = \frac{1}{2}(3 + 1) = 2 = F_3$

ve

$n = 2$ ise $\frac{1}{2}(3F_2 + L_2) = \frac{1}{2}(3 + 3) = 3 = F_4$

olduğundan eşitlik sağlanır.

Şimdi $n = 1, 2, \dots, k$ için eşitliğin sağlandığını varsayalım ve $n = k + 1$ için eşitliğin sağlandığını gösterelim. Varsayımdan,

$$\frac{1}{2}(3F_k + L_k) = F_{k+2}$$

ve

$$\frac{1}{2}(3F_{k-1} + L_{k-1}) = F_{k+1}$$

olur.

$$\frac{1}{2}\Big(3F_{k+1} + L_{k+1} = \frac{1}{2}[(F_k + F_{k-1}) + (L_k + L_{k-1})]\Big)$$
$$= \frac{1}{2}(3F_k + L_k) + \frac{1}{2}(3F_{k-1} + L_{k-1})$$
$$= F_{k+2} + F_{k+1}$$
$$= F_{k+3}$$

olduğundan ispat biter. ■

2.14 Önerme: $\frac{1}{2}(5F_n + 3L_n) = L_{n+2}$ [1,8]

İspat: İspatı tümevarım ile yapalım.

$n = 1$ ise $\frac{1}{2}(5F_1 + 3L_1) = \frac{1}{2}(5+3) = 4 = L_3$

ve

$n = 2$ ise $\frac{1}{2}(5F_2 + 3L_2) = \frac{1}{2}(5+9) = 7 = L_4$

olduğundan eşitlik sağlanır.

Şimdi $n = 1, 2, \dots, k$ için eşitliğin sağlandığını varsayalım ve $n = k+1$ için eşitliğin sağlandığını gösterelim. Varsayımdan,

$$\frac{1}{2}(5F_k + 3L_k) = L_{k+2}$$

ve

$$\frac{1}{2}(5F_{k-1} + 3L_{k-1}) = L_{k+1}$$

olur.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Big(5F_{k+1} + 3L_{k+1} &= \frac{1}{2}[5(F_k + F_{k-1}) + 3(L_k + L_{k-1})]\Big) \\ &= \frac{1}{2}(5F_k + 3L_k) + \frac{1}{2}(5F_{k-1} + 3L_{k-1}) \\ &= L_{k+2} + L_{k+1} \\ &= L_{k+3}\end{aligned}$$

olduğundan ispat biter. ■

2.15 Önerme: [1,8]

$$\sum_{i=1}^{2n} F_i F_{i-1} = F_{2n}^2$$

İspat: İspatı tümevarım ile yapalım. $n = 1$ ise

$$\sum_{i=1}^{2} F_i F_{i-1} = F_1 F_0 + F_2 F_1 = 1 = F_2^2$$

ve $n = 2$ ise

$$\sum_{i=1}^{4} F_i F_{i-1} = F_1 F_0 + F_2 F_1 + F_3 F_2 + F_4 F_3 = 1 + 2 + 6 = 9 = F_3^2$$

olduğundan $n = 1$ ve $n = 2$ için önerme sağlanır.

Şimdi $n = k$ için eşitliğin sağlandığını varsayalım ve $n = k+1$ için eşitliğin doğru olduğunu gösterelim. Varsayım gereği,

$$\sum_{i=1}^{2k} F_iF_{i-1} = F_1F_0 + F_2F_1 + \cdots + F_{2k}F_{2k-1} = F_{2k}^2$$

olur.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2k+2} F_iF_{i-1} &= F_1F_0 + F_2F_1 + \cdots + F_{2k}F_{2k-1} + F_{2k+1}F_{2k} + F_{2k+2}F_{2k+1} \\
&= F_{2k}^2 + F_{2k+1}F_{2k} + F_{2k+2}F_{2k+1} \\
&= F_{2k}(F_{2k} + F_{2k+1}) + F_{2k+2}F_{2k+1} \\
&= F_{2k}F_{2k+2} + F_{2k+2}F_{2k+1} \\
&= F_{2k+2}(F_{2k} + F_{2k+1}) \\
&= F_{2k+2}^2
\end{aligned}$$

olur ve böylece ispat biter. ■

2.16 Önerme: [1,8]

$$\sum_{i=1}^{2n+1} F_iF_{i-1} = F_{2n+1}^2 - 1$$

İspat: İspatı tümevarım ile yapalım. $n = 1$ ise

$$\sum_{i=1}^{3} F_iF_{i-1} = F_1F_0 + F_2F_1 + F_3F_2 = 1 + 2 = 3 = F_3^2 - 1 = F_1$$

olduğundan $n = 1$ için önerme sağlanır. Şimdi $n = k$ için eşitliğin sağlandığını varsayalım ve $n = k + 1$ için eşitliğin doğru olduğunu gösterelim. Varsayım gereği,

$$\sum_{i=1}^{2k+1} F_iF_{i-1} = F_1F_0 + F_2F_1 + \cdots + F_{2k}F_{2k-1} + F_{2k+1}F_{2k} = F_{2k}^2 - 1$$

olur.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2k+3} F_iF_{i-1} &= F_1F_0 + F_2F_1 + \cdots + F_{2k}F_{2k-1} + F_{2k+1}F_{2k} + F_{2k+2}F_{2k+1} + F_{2k+3}F_{2k+2} \\
&= F_{2k}^2 - 1 + F_{2k+1}F_{2k} + F_{2k+2}F_{2k+1} + F_{2k+3}F_{2k+2} \\
&= F_{2k+1}(F_{2k+1} + F_{2k+2}) + F_{2k+3}F_{2k+2} - 1 \\
&= F_{2k+1}F_{2k+3} + F_{2k+3}F_{2k+2} - 1 \\
&= F_{2k+3}(F_{2k+1} + F_{2k+2}) - 1 = F_{2k+3}^2 - 1 \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

3. HECKE GRUPLARI VE GENİŞLETİLMİŞ HECKE GRUPLARI

Bu bölümde $H(\lambda_q)$ Hecke grupları ve genişletilmiş Hecke grupları ile bunların normal alt grupları hakkında bilgi vereceğiz. Bunun için öncelikle cisim genişlemeleri, Galois cisimleri ve projektif gruplar hakkında bazı tanımları ve teoremleri verelim. Burada verilen tanım ve teoremler [12, 13, 14] nolu kaynaklarda bulunabilir.

3.1 Cisim Genişlemeleri ve Sonlu Cisimler

Cisim genişlemelerine önce $\mathbb{R}$ reel sayılar cisminden $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismini elde etmekle başlayalım. i kompleks sayısı $\mathbb{R}[x]$ de

$$f(x) = x^2 + 1 \in \mathbb{R}[x]$$

ikinci dereceden indirgenemez polinomun sıfırıdır ve $\mathbb{C}$ nin elemanları $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ formunda tek şekilde yazılabilir. Bu $\mathbb{R}$ cismine tek bir i elemanı eklenmesiyle elde edilen basit bir genişlemedir. Burada i, $\mathbb{R}$ de olmayan ancak $\mathbb{R}[x]$ polinom halkasındaki monik indirgenemez polinomun bir köküdür.

Benzer şekilde herhangi bir cisim için genişleme tanımı aşağıdaki gibi verilebilir.

3.1.1 Tanım: F bir cisim olsun ve f, $F[x]$ de n. dereceden monik indirgenemez bir polinom olsun. u, f polinomunun bir kökü olmak üzere F ye u nun eklenmesiyle elde edilen $K = F[u]$ cismine F nin basit bir genişlemesi denir. Burada u ya F üzerinde cebirseldir denir.

Örneğin 7, $\sqrt{2}$ ve i sayıları $\mathbb{Q}$ üzerinde cebirseldir. Çünkü bu sayılar $x - 7$, $x^2 - 2$ ve $x^2 + 1$ polinomunun kökleridir. Burada K nın her v elemanının

$$v = a_0 + a_1 u + \cdots + a_{n-1} u^{n-1}, a_i \in F, i = 0, 1, \ldots, n-1$$

şeklinde bir gösterime sahip olduğu bilinen bir sonuçtur. Örnek olarak $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ nin bir genişlemesidir.

Bir cismin basit bir genişlemesinin varlığı ile ilgili olarak aşağıdaki teoremler verilir.

3.1.1 Teorem: F bir cisim ve f, $F[x]$ de n. dereceden indirgenemez bir polinom olsun. Bu durumda u nun f polinomunun kökü olarak F üzerinde cebirsel olduğu F nin basit bir $K = F[u]$ genişlemesi vardır [15].

Şimdi de sonlu cisimlerin yapısından bahsedelim. p asal sayı ve n pozitif tamsayı olmak üzere her bir sonlu cismin mertebesi p^n biçiminde bir asal kuvvettir. Tersine olarak p asal sayı ve n pozitif tamsayı olmak üzere mertebesi p^n olan sonlu bir cisim vardır.

3.1.2 Teorem: F sonlu bir cisim ise uygun bir p asal sayısı ve n pozitif tamsayısı için F nin mertebesi p^n dir [16].

3.1.2 Tanım: p^n elemanlı sonlu bir cisme p^n mertebeli Galois cismi denir ve $GF(p^n)$ ile gösterilir.

Verilen bir p asalı ve n pozitif tamsayısı için bir $GF(p^n)$ Galois cisminin var olduğu gösterilebilir. Üstelik mertebesi p^n olan bütün cisimler izomorftur. $n = 1$ ise $\mathbb{Z}_p$ mertebesi p olan bir Galois cismidir [16].

3.2 Projektif Gruplar

Her $q = p^n$ asal kuvveti için, izomorfizm farkıyla, $GF(q)$ ile gösterilen q elemanlı bir tek cisim olduğunu biliyoruz. Bu q elemanlı Galois cismidir. Bütün sonlu cisimler bu formdadır.

Şimdi K, $q = p^n$ mertebeli sonlu bir cisim, yani $K = GF(q)$ olsun. $GL(2, K)$ ile gösterilen genel lineer grup,

$$GL(2,K) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a,b,c,d \in \mathrm{K}, ad - bc \neq 0 \right\} \qquad (3.2.1)$$

biçiminde tanımlanır. Bu grubun merkezi $Z(GL(2,K))$ ile gösterilir ve tüm 2×2 skaler matrislerden oluşur. Ayrıca bu grup $GL(2,K)$ nın bir normal alt grubudur. Buradan $PGL(2,K)$ ile gösterilen projektif genel lineer grup

$$PGL(2,K) = {GL(2,K)}\Big/{Z(GL(2,K))} \tag{3.2.2}$$

olarak tanımlanır.

$GL(2,K)$ da 1 determinantlı matrisler bir alt grup oluştururlar ve $SL(2,K)$ ile gösterilen bu alt gruba özel lineer grup denir. Yani

$$PSL(2,K) = {SL(2,K)}\Big/{Z(SL(2,K))} \tag{3.2.3}$$

biçiminde tanımlanır. Burada $p>2$ ise $Z(SL(2,K) = \{\pm I\}$ ve $p=2$ ise

$$Z\big(SL(2,K)\big) = \{I\}$$

dır.

Tanıma dikkat edilirse $PSL(2,K)$ nın mertebesi $p>2$ ise $q(q-1)(q+1)$ ve $p=2$ ise $q(q-1)(q+1)$ olur.

$SL(2,K)$ dan $PSL(2,K)$ ya bir doğal homomorfizm vardır. Bu homomorfizm $SL(2,K)$ daki bir $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ elemanını $PSL(2,K)$ daki $\pm\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ kosetine götürür. Bu nedenle $PSL(2,K)$ nın bir elemanını, $SL(2,K)$ da bu elemanı indirgeyen iki matrisle temsil edebiliriz.

Şimdiye kadar sadece sonlu cisimler üzerindeki projektif gruplardan bahsettik. Fakat genelde yukarıda tanımladığımız dört grup, K nın sonsuz bir cisim olması halinde de tanımlabilir. Bu durumda matrislerin ya da indirgenen kesirli lineer dönüşümlerin tüm katsayıları bu sonsuz cisimden alınır. En çok karşılaşılan örnekler $PSL(2,\mathbb{R})$ ve $PSL(2,\mathbb{C})$ dir. Ayrıca projektif grupları birimli halkalar üzerinde tanımlamak da mümkündür. $PSL(2,\mathbb{Z})$ örnek olarak verilebilir [14].

3.3 Hecke Grupları

Erich Hecke, 1936 yılında "Über die Bestimmung Dirichleter Reichen durch ihre Funktionalgleichungen" adlı çalışmasında Hecke gruplarını aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

3.3.1 Tanım: λ sabit bir pozitif sayı olmak üzere,

$$T(z) = -\frac{1}{z} \text{ ve } U(z) = z + \lambda \tag{3.3.1}$$

kesirli doğrusal dönüşümleri ile üretilen gruplara Hecke grupları denir ve $H(\lambda)$ ile gösterilir [17].

Tanımlanan $T(z)$ ve $U(z)$ dönüşümleri yardımıyla $S = TU$ alınırsa

$$S(z) = -\frac{1}{z+\lambda} \tag{3.3.2}$$

elde edilir.

Bu gruplar, $H(\lambda)$ bir Fuchsian grup olduğunda Dirichlet serilerinin çalışmasında kullanılır.

3.3.1 Teorem: $\lambda \geq 2$ veya $q \geq 3$ bir tamsayı olmak üzere,

$$\lambda = \lambda_q = 2\cos\frac{\pi}{q}, 1 \leq \lambda < 2 \tag{3.3.3}$$

ise $H(\lambda)$ grubunun bir temel bölgesi,

$$F_\lambda = \left\{ z \in U \middle| |Re\, z| < \frac{\pi}{q}, |z| > 1 \right\} \tag{3.3.4}$$

kümesidir [17].

Ayrıca E. Hecke diğer $\lambda > 0$ değerleri için F_λ kümesinin bir temel bölge olmadığını da göstermiştir. $\lambda = \lambda_q$ veya $\lambda \geq 2$ olması durumunda $H(\lambda)$ grubunun sonlu üreteçli bir grup olduğu görülür. Ayrıca $H(\lambda)$ grubu, $PSL(2, \mathbb{R})$ nin ayrık bir alt grubu olduğundan $H(\lambda)$ grubu Fuchsian bir grup olur.

3.3.2 Teorem: $H(\lambda)$ Hecke gruplarının Fuchsian olması için gerekli ve yeterli koşul $\lambda \geq 2$ veya $\lambda = \lambda_q = 2\cos\frac{\pi}{q}$, ($q \geq 3$ bir tamsayı) olmasıdır [17].

$\lambda = \lambda_q = 2\cos\frac{\pi}{q}$, $1 \leq \lambda < 2$, durumuna karşılık gelen Hecke grupları $H(\lambda_q)$ ile gösterilir. Bazı $H(\lambda_q)$ Hecke grupları ve bunların normal alt grupları [14] de çalışılmıştır. $\lambda \geq 2$ değerleriyle elde edilen Hecke grupları için $H(\lambda)$ gösterimi kullanılır. Bu grupların sunuşları ile ilgili iki teorem aşağıdadır.

3.3.3 Teorem: $H(\lambda_q)$ Hecke grubunun sunuşu,

$$H(\lambda_q) = \langle T, S | T^2 = S^q = I \rangle \cong C_2 * C_q \quad (3.3.5)$$

biçiminde, 2 mertebeli devirli grup ile q mertebeli devirli grubun serbest çarpımıdır [14].

3.3.4 Teorem: Eğer $\lambda \geq 2$ ise bu grubun sunuşu,

$$H(\lambda) = \langle T, S | T^2 = S^\infty = I \rangle \cong C_2 * C_\infty \quad (3.3.6)$$

biçiminde, 2 mertebeli devirli grup ve sonsuz mertebeli devirli grubun serbest çarpımıdır [18].

3.4 Genişletilmiş Hecke Grupları

Burada 3.3 Bölümde verilen Hecke gruplarından, $R_1(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ yansıma dönüşümü yardımıyla elde ettiğimiz genişletilmiş Hecke gruplarından kısaca bahsedeceğiz. Genişletilmiş modüler ve genişletilmiş Hecke grupları ile ilgili temel bilgilere [12, 13, 14, 19, 20] kaynaklarından ulaşılabilir.

Faydalanacağımız $R_1(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ dönüşümü birim çembere göre yansımadır. $\lambda \geq 2$ veya $q \geq 3$ bir tamsayı olmak üzere $\lambda = \lambda_q = 2\cos\frac{\pi}{q}$, $1 \leq \lambda < 2$ değerleri için $H(\lambda)$ ile gösterilen Hecke gruplarından yararlanarak şu tanımı verelim.

3.4.1 Tanım: Hecke gruplarına, $R_1(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ anti-otomorfizmini ekleyerek elde edilen gruplara genişletilmiş Hecke grupları denir. Genişletilmiş Hecke grupları $\overline{H}(\lambda_q)$ ile gösterilir ve otomorfizmler ile anti-otomorfizmleri bulundurur.

Şimdi de genişletilmiş Hecke gruplarının aşağıda vereceğimiz yansımalar yardımıyla grup sunuşunu bulalım.

$\lambda = \lambda_q = 2\cos\frac{\pi}{q}$, $1 \leq \lambda < 2$ olmak üzere,

$$R_1(z) = \frac{1}{\bar{z}},\ R_2(z) = -\bar{z},\ R_3(z) = \frac{-\bar{z}}{\lambda\bar{z}+1} \tag{3.4.1}$$

yansımaları yardımıyla, genişletilmiş Hecke gruplarının sunuşu

$$\bar{H}(\lambda_q) = \langle R_1, R_2, R_3 | R_1^2 = R_2^2 = R_3^2 = (R_1R_2)^2 = (R_3R_1)^q = I\rangle \tag{3.4.2}$$

yazılabilir [12, 13, 20]. Burada $R = R_1$, $T = R_1R_2 = R_2R_1$, $S = R_3R_1$ olarak alınırsa $\bar{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke gruplarının sunuşu,

$$\bar{H}(\lambda_q) = \langle T, S, R | T^2 = S^2 = R^2 = (TR)^2 = (RS)^q = I\rangle \tag{3.4.3}$$

olarak bulunur.

$\lambda \geq 2$ değerleri için, yansımalar yardımıyla,

$$\bar{H}(\lambda) = \langle R_1, R_2, R_3 | R_1^2 = R_2^2 = R_3^2 = (R_1R_2)^2 = I\rangle \tag{3.4.4}$$

ve $R = R_1$, $T = R_1R_2 = R_2R_1$, $S = R_3R_1$ eşitliklerinden $\bar{H}(\lambda)$ genişletilmiş Hecke gruplarının sunuşu,

$$\bar{H}(\lambda) = \langle T, S, R | T^2 = R^2 = S^\infty = (TR)^2 = (RS)^2 = I\rangle \tag{3.4.5}$$

yazılabilir.

3.4.1 Teorem: $\bar{H}(\lambda)$ genişletilmiş Hecke grupları için temel bölge,

$$F_\lambda = \left\{ z \in U \mid -\frac{\lambda}{2} < |Re\, z| < 0, |z| > 1 \right\} \tag{3.4.6}$$

kümesidir [12, 13].

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ VE GENELLEŞTİRİLMİŞ LUCAS DİZİLERİ

Bu bölümde genelleştirilmiş Fibonacci ve genelleştirilmiş Lucas dizileri ile genişletilmiş Hecke grubu arasındaki bağlantı gösterilecektir ve buna bağlı olarak bazı özellikler de verilecektir. Bu bağlantı ilk kez [6] nolu kaynakta tanımlanmıştır. Biz [6] nolu kaynakta tanımlanan dizi üzerinden hareketle elde edilen yeni genelleştirilmiş Fibonacci ve genelleştirilmiş Lucas sayılarının özelliklerini vereceğiz ve bu dizilerden de yeni dizilerin elde edilebileceğini göstereceğiz. Ayrıca bu dizilerin polinom olarak yazılabileceği de gösterilecektir. Bununla birlikte bu bölümde verilen 4.1.1 Önerme, 4.1.2 Önerme, 4.1.3 Önerme, 4.1.4 Önerme, 4.1.5 Önerme, 4.1.6 Önerme, 4.1.7 Önerme, 4.1.8 Önerme, 4.1.9 Önerme, 4.1.10 Önerme, 4.1.11 Önerme, 4.1.12 Önerme, 4.1.13 Önerme, 4.1.14 Önerme, 4.1.15 Önerme, 4.1.16 Önerme, 4.1.17 Önerme, 4.1.18 Önerme, 4.1.19 Önerme, 4.1.20 Önerme, 4.1.21 Önerme, 4.1.22 Önerme, 4.1.23 Önerme, 4.2.1 Teorem, 4.2.2 Teorem, 4.2.1 Önerme, 4.2.2 Önerme, 4.2.3 Önerme, 4.2.4 Önerme, 4.2.5 Önerme tamamen özgün olup [21] nolu kaynakta yayıma sunulmuştur.

Şimdi [6] nolu kaynaktan hareketle bu yeni dizinin tanımını verelim. Bunun için öncelikle kısa bir hatırlatma yapalım. $H(\lambda)$ Hecke grubunu, λ sabit bir pozitif sayı olmak üzere,

$$T(z) = -\frac{1}{z}$$

ve

$$U(z) = z + \lambda$$

kesirli doğrusal dönüşümleri ile üretilen grup olarak tanımlamıştık. Burada $\lambda \geq 2$ veya $q \geq 3$ bir tamsayı olmak üzere,

$\lambda = \lambda_q = 2\cos\frac{\pi}{q} \Leftrightarrow H(\lambda)$ ayrıktır.

Eğer $\lambda = \lambda_q$ veya $\lambda \geq 2$ ise $H(\lambda_q)$ bir Fuchsian gruptur. Biz bu çalışmada $\lambda = \lambda_q$ ve $q \geq 3$ olma durumunu göz önüne alacağız.

Hecke grubu $H(\lambda_q)$ mertebesi 2 ve q olan iki sonlu devirli grubun serbest çarpımıdır. Yani $H(\lambda_q)$ Hecke grubunun sunuşu,

$$H(\lambda_q) = \langle T, S | T^2 = S^q = I \rangle \cong C_2 * C_q$$

şeklindedir.

$q = 3$ ise $H(\lambda_3) = PSL(2, \mathbb{Z})$ olup literatürde modüler grup olarak bilinir.

$q = 4$ ise $H(\lambda_4) = H(\sqrt{2})$

$q = 5$ ise $H(\lambda_5) = H\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

$q = 6$ ise $H(\lambda_6) = H(\sqrt{3})$

olur.

$q \geq 4$ için $H(\lambda_q) \subset PSL(2, \mathbb{Z}[\lambda_q])$ olduğu açıktır [12, 13].

$\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grubu, $H(\lambda_q)$ Hecke grubunun üreteçlerine $R(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ yansıma dönüşümün eklenmesiyle tanımlanır. Yani $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grubunun sunuşu,

$$\overline{H}(\lambda) = \langle T, S, R | T^2 = S^q = R^2 = I, RT = TR, RS = S^{q-1}R \rangle$$

şeklindedir.

$PGL(2, \mathbb{Z}[\lambda_q])$ dan alınan her A matrisi ile $-A$ matrisinin $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grubunda temsili aynı olduğundan her A matrisi ile $-A$ matrisini eşleyeceğiz. Böylece $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grubu, üreteçleri

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \lambda_q \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

olmak üzere gösterilir. $\overline{\mathrm{H}}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grubundan alınan

$$h = TSR = \begin{pmatrix} \lambda_q & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } f = RTS = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \lambda_q \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

elemanlarının k. kuvvetleri,

$$h^k = \begin{pmatrix} a_k & a_{k-1} \\ a_{k-1} & a_{k-2} \end{pmatrix} \text{ ve } f^k = \begin{pmatrix} a_{k-1} & a_k \\ a_k & a_{k+1} \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

ve $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ ve $k \geq 2$ için,

$$a_k = \lambda_q a_{k-1} + a_{k-2} \tag{4.4}$$

şeklinde olur.

4.1 Önerme: Her $k \geq 2$ için

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{{\lambda_q}^2 + 4}}\left[\left(\frac{\lambda_q + \sqrt{\lambda_q^2 + 4}}{2}\right)^k - \left(\frac{\lambda_q - \sqrt{\lambda_q^2 + 4}}{2}\right)^k\right]$$

dir [6].

İspat: a_k dizisinin karakteristik polinomuna r^k diyelim. O halde

$$r^k = \lambda_q r^{k-1} + r^{k-2}$$

olur ve böylece

$$r^2 - \lambda_q r - 1 = 0$$

olur. Bu denklemin kökleri

$$r_1 = \frac{\lambda_q + \sqrt{{\lambda_q}^2 + 4}}{2}$$

ve

$$r_2 = \frac{\lambda_q - \sqrt{{\lambda_q}^2 + 4}}{2}$$

dir.

Şimdi r_1 ve r_2 den yararlanarak a_k dizisini yazarsak,

$$a_k = A\left(\frac{\lambda_q + \sqrt{\lambda_q^2 + 4}}{2}\right)^k + B\left(\frac{\lambda_q - \sqrt{\lambda_q^2 + 4}}{2}\right)^k$$

olur.

$a_0 = 0$ ve $a_1 = 1$ olduğundan A ve B yi hesaplayabiliriz.

$$a_0 = 0 = A + B$$

$$a_1 = 1 = A\left(\frac{\lambda_q + \sqrt{{\lambda_q}^2 + 4}}{2}\right) + B\left(\frac{\lambda_q - \sqrt{{\lambda_q}^2 + 4}}{2}\right)$$

olur ve böylece

$$2 = A\left(\lambda_q + \sqrt{{\lambda_q}^2 + 4}\right) - A\left(\lambda_q - \sqrt{{\lambda_q}^2 + 4}\right)$$

olur. Buradan denklemin çözümünün

$$A = \frac{1}{\sqrt{{\lambda_q}^2+4}} \text{ ve } B = -\frac{1}{\sqrt{{\lambda_q}^2+4}}$$

olduğu çıkar. Böylece her $k \geq 2$ için,

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{{\lambda_q}^2 + 4}}\left[\left(\frac{\lambda_q + \sqrt{\lambda_q^2 + 4}}{2}\right)^k - \left(\frac{\lambda_q - \sqrt{\lambda_q^2 + 4}}{2}\right)^k\right]$$

olur. ■

Burada dikkat edilirse reel sayı dizisi a_k, Fibonacci dizisinin genelleştirilmiş bir halidir. Eğer $\lambda_q = 1$ ise a_k dizisi Fibonacci dizisi olur.

Buradan da Lucas dizisinin genelleştirilmiş bir b_k dizisini tanımlayalım. Daha sonra bu diziler arasındaki bazı özellikleri verelim.

$k \geq 2$ için ve başlangıç koşulları $b_0 = 2$ ve $b_1 = \lambda_q$ olmak üzere b_k dizisini

$$b_k = \lambda_q b_{k-1} + b_{k-2} \tag{4.5}$$

şeklinde tanımlayalım.

Şimdi a_k ve b_k dizilerinin [1, 8] nolu kaynaklardan yararlanarak binet formüllerini bulalım. Ayrıca aşağıda verilen metod, başka herhangi bir dizinin binet formülünün nasıl hesaplanacağını gösterir.

a_k dizisinin karakteristik polinomuna r^k diyelim. O halde

$$r^k = \lambda_q r^{k-1} + r^{k-2}$$

olur ve böylece

$$r^2 - \lambda_q r - 1 = 0$$

olur. Bu denklemin kökleri

$$\alpha = \frac{\lambda_q + \sqrt{{\lambda_q}^2+4}}{2} \text{ ve } \beta = \frac{\lambda_q - \sqrt{{\lambda_q}^2+4}}{2} \tag{4.6}$$

olur.

Dikkat edilirse,

$$\alpha + \beta = \lambda_q, \alpha - \beta = \sqrt{\lambda_q^2 + 4}, \alpha.\beta = -1 \tag{4.7}$$

dir.

$$\alpha^{k+2} = \lambda_q \alpha^{k+1} + \alpha^k$$

ve

$$\beta^{k+2} = \lambda_q \beta^{k+1} + \beta^k$$

olduğundan,

$1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots$ ve $1, \beta, \beta^2, \beta^3, \ldots$

dizileri genelleştirilmiş Fibonacci dizileridir. Gerçekten,

α^k ve β^k nin her lineer kombinasyonu k. dereceden bir Fibonacci dizisi oluşturur. Yani,

$$a_k = u\lambda_q \alpha^k + v\beta^k \tag{4.8}$$

şeklindedir. Böylece,

$$\begin{aligned}\lambda_q\left(u\lambda_q \alpha^{k+1} + v\beta^{k+1}\right) + \left(u\lambda_q \alpha^k + v\beta^k\right) \\ &= \lambda_q u\left(\lambda_q \alpha^{k+1} + \alpha^k\right) + v\left(\lambda_q \beta^{k+1} + \beta^k\right) \\ &= \lambda_q u \alpha^{k+2} + v\beta^{k+2}\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Her Fibonacci dizisi u ve v değerleriyle yazılabilir. Şimdi a_0, a_1, α ve β yı kullanarak bunu gösterelim.

İlk olarak,

$$a_0 = u\lambda_q + v$$

ve

$$a_1 = u\lambda_q \alpha + v\beta$$

olur. O halde $v = a_0 - u\lambda_q$ olduğundan,

$$\begin{aligned}a_1 &= u\lambda_q \alpha + (a_0 - u\lambda_q)\beta \\ &= u\lambda_q(\alpha - \beta) + a_0\beta \\ &= u\lambda_q\sqrt{\lambda_q^2 + 4} + a_0\beta\end{aligned}$$

yazabiliriz. Böylece

$$u = \frac{a_1 - a_0\beta}{\lambda_q\sqrt{\lambda_q^2+4}} \tag{4.9}$$

elde edilir.

Benzer şekilde, $u = \frac{a_0 - v}{\lambda_q}$ olduğundan,

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \lambda_q \left(\frac{a_0 - v}{\lambda_q}\right)\alpha + v\beta \\
&= (a_0 - v)\alpha + v\beta \\
&= a_0\alpha + v(\beta - \alpha) \\
&= a_0\alpha + v(-\sqrt{\lambda_q^2 + 4})
\end{aligned}
$$

yazabiliriz. Böylece

$$v = \frac{a_0\alpha - a_1}{\sqrt{\lambda_q^2 + 4}} \tag{4.10}$$

olur.

Şimdi 4.9 ve 4.10 eşitliklerindeki u ve v yi kullanarak a_0 ve a_1 i bulabiliriz. Böylece 4.8 den a_k eşitliğini elde edebiliriz.

Örneğin, a_k genelleştirilmiş Fibonacci dizisinde

$a_0 = 0$ ve $a_1 = 1$

olduğundan,

$$u = \frac{1}{\lambda_q\sqrt{\lambda_q^2 + 4}}$$

ve

$$v = \frac{-1}{\sqrt{\lambda_q^2 + 4}}$$

olur. Böylece

$$a_k = \frac{\alpha^k - \beta^k}{\sqrt{\lambda_q^2 + 4}}$$

elde edilir. Benzer şekilde b_k genelleştirilmiş Lucas dizisinde

$b_0 = 2$ ve $b_1 = \lambda_q$

olduğundan,

$$u = \frac{\lambda_q - 2\beta}{\lambda_q\sqrt{\lambda_q^2 + 4}} = \frac{(\alpha + \beta) - 2\beta}{\lambda_q\sqrt{\lambda_q^2 + 4}} = \frac{\alpha - \beta}{\lambda_q\sqrt{\lambda_q^2 + 4}} = \frac{\sqrt{\lambda_q^2 + 4}}{\lambda_q\sqrt{\lambda_q^2 + 4}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_q^2 + 4}}$$

ve

$$v = \frac{2\alpha - \lambda_q}{\sqrt{\lambda_q^2 + 4}} = \frac{2\alpha - (\alpha + \beta)}{\sqrt{\lambda_q^2 + 4}} = \frac{\alpha - \beta}{\sqrt{\lambda_q^2 + 4}} = \frac{\sqrt{\lambda_q^2 + 4}}{\sqrt{\lambda_q^2 + 4}} = 1$$

bulunur. Böylece

$$b_k = \lambda_q \frac{1}{\lambda_q} \alpha^k + \beta^k = \alpha^k + \beta^k$$

elde edilir.

4.1 Genelleştirilmiş Fibonacci ve Genelleştirilmiş Lucas Dizilerinin Temel Özellikleri

4.1.1 Önerme: Her $k \geq 2$ için

$$b_k = \left(\frac{\lambda_q + \sqrt{\lambda_q^2 + 4}}{2}\right)^k + \left(\frac{\lambda_q - \sqrt{\lambda_q^2 + 4}}{2}\right)^k$$

dir.

İspat: b_k dizisinin karakteristik polinomuna r^k diyelim. O halde

$$r^k = \lambda_q r^{k-1} + r^{k-2}$$

olur ve böylece

$$r^2 - \lambda_q r - 1 = 0$$

olur. Bu denklemin kökleri

$$r_1 = \frac{\lambda_q + \sqrt{{\lambda_q}^2 + 4}}{2}$$

ve

$$r_2 = \frac{\lambda_q - \sqrt{{\lambda_q}^2 + 4}}{2}$$

dir.

Şimdi r_1 ve r_2 den yararlanarak b_k dizisini yazarsak,

$$b_k = A\left(\frac{\lambda_q + \sqrt{\lambda_q^2 + 4}}{2}\right)^k + B\left(\frac{\lambda_q - \sqrt{\lambda_q^2 + 4}}{2}\right)^k$$

olur.

$b_0 = 2$ ve $b_1 = \lambda_q$ olduğundan A ve B yi hesaplayabiliriz.

$$b_0 = 2 = A + B$$

$$b_1 = \lambda_q = A\left(\frac{\lambda_q + \sqrt{{\lambda_q}^2 + 4}}{2}\right) + B\left(\frac{\lambda_q - \sqrt{{\lambda_q}^2 + 4}}{2}\right)$$

olur ve böylece

$$2\lambda_q = A\left(\lambda_q + \sqrt{\lambda_q{}^2 + 4}\right) + B\left(\lambda_q - \sqrt{\lambda_q{}^2 + 4}\right)$$

olur. Buradan denklemin çözümünün

$A = 1$ ve $B = 1$

olduğu çıkar. Dolayısıyla

$$b_k = \left(\frac{\lambda_q + \sqrt{\lambda_q^2 + 4}}{2}\right)^k + \left(\frac{\lambda_q - \sqrt{\lambda_q^2 + 4}}{2}\right)^k$$

dır. ■

Burada dikkat edilirse b_k genelleştirilmiş Lucas dizisidir. Eğer $\lambda_q = 1$ seçilirse dizi Lucas dizisi olur. Böylece a_k ve b_k sırasıyla genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizileri olur.

a_k ve b_k dizilerini negatif indekslilere genişletmek mümkündür. Örneğin, $a_{-1} = -1$, $a_{-2} = -\lambda_q$, $a_{-3} = \lambda_q^2 + 1$ şeklinde devam eder. Böylece

$$a_{-k} = (-1)^{k+1} a_k \tag{4.1.1}$$

ve

$$b_{-k} = (-1)^k b_k \tag{4.1.2}$$

olduğunu söyleyebiliriz.

a_k genelleştirilmiş Fibonacci dizisi ile b_k genelleştirilmiş Lucas dizisi Fibonacci ve Lucas sayılarının benzer özelliklerine sahiptir. Şimdi bu a_k ve b_k dizilerinin bazı özelliklerini inceleyelim.

4.1.2 Önerme: $a_k + a_{k+4} = (\lambda_q^2 + 2)a_{k+2}$ ve $b_k + b_{k+4} = (\lambda_q^2 + 2)b_{k+2}$

İspat: İspatı k üzerinden tümevarım ile yapalım.

$k = 0$ için $a_0 + a_4 = 0 + \lambda_q^3 + 2\lambda_q = \lambda_q(\lambda_q^2 + 2) = a_2(\lambda_q^2 + 2)$

$k = 1$ için $a_1 + a_5 = 1 + \lambda_q^4 + 3\lambda_q^2 + 1 = (\lambda_q^2 + 2)(\lambda_q^2 + 1) = a_3(\lambda_q^2 + 2)$

olduğundan $k = 0$ ve $k = 1$ için eşitlik sağlanır.

Şimdi $k = 2, \dots, n$ için eşitliğin doğru olduğunu varsayalım ve $k = n + 1$ için eşitliğin doğruluğunu gösterelim. Varsayımdan,

$$a_n + a_{n+4} = (\lambda_q^2 + 2)a_{n+2}$$

ve

$$a_{n-1} + a_{n+3} = (\lambda_q^2 + 2)a_{n+1}$$

olur. Tanım gereği $a_k = \lambda_q a_{k-1} + a_{k-2}$ olduğundan

$$\begin{aligned} a_{n+1} + a_{n+5} &= (\lambda_q a_n + a_{n-1}) + (\lambda_q a_{n+4} + a_{n+3}) \\ &= \lambda_q (a_n + a_{n+4}) + a_{n-1} + a_{n+3} \\ &= \lambda_q (\lambda_q^2 + 2) a_{n+2} + (\lambda_q^2 + 2) a_{n+1} \\ &= (\lambda_q^2 + 2)(\lambda_q a_{n+2} + a_{n+1}) \\ &= (\lambda_q^2 + 2) a_{n+3} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$a_k + a_{k+4} = (\lambda_q^2 + 2)a_{k+2}$$

elde edilir.

Benzer şekilde,

$$b_k + b_{k+4} = (\lambda_q^2 + 2)b_{k+2}$$

olduğu kolayca gösterilebilir. ■

4.1.3 Önerme: $b_k = a_{k+1} + a_{k-1}$

İspat: $k = 0$ için $a_1 + a_{-1} = a_1 + (-1)^2 a_1 = 2a_1 = 2 = b_0$ ve $k = 1$ için $a_2 + a_0 = \lambda_q = b_1$ olur. Böylece $k = 0$ ve $k = 1$ için eşitlik sağlanır.

$k = 2, \dots, n$ için eşitliğin doğru olduğunu varsayalım ve $k = n + 1$ için eşitliğin doğruluğunu gösterelim. Varsayım gereği,

$$b_n = a_{n+1} + a_{n-1}$$

ve

$$b_{n-1} = a_n + a_{n-2}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} a_{n+2} + a_n &= (\lambda_q a_{n+1} + a_n) + (\lambda_q a_{n-1} + a_{n-2}) \\ &= (\lambda_q a_{n+1} + a_{n-1}) + (a_n + a_{n-2}) \\ &= \lambda_q b_n + b_{n-1} \\ &= b_{n+1} \end{aligned}$$

olur. Bu durumda

$$b_k = a_{k+1} + a_{k-1}$$

olduğu elde edilir. ■

4.1.4 Önerme: $b_k + b_{k+2} = (\lambda_q^2 + 4)a_{k+1}$

İspat: $k = 0$ için $b_0 + b_2 = 2 + \lambda_q^2 + 2 = (\lambda_q^2 + 4) = (\lambda_q^2 + 4)a_1$ ve $k = 1$ için $b_1 + b_3 = \lambda_q + \lambda_q^3 + 3\lambda_q = \lambda_q^3 + 4\lambda_q = \lambda_q(\lambda_q^2 + 4) = (\lambda_q^2 + 4)a_2$ olur ve eşitlik sağlanır.

Şimdi $k = 2, \dots, n$ için eşitliğin doğru olduğunu varsayalım ve $k = n + 1$ için eşitliğin doğruluğunu gösterelim. Varsayım gereği,

$$b_n + b_{n+2} = (\lambda_q^2 + 4)a_{n+1}$$

ve

$$b_{n-1} + b_{n+1} = (\lambda_q^2 + 4)a_n$$

olur.

$$\begin{aligned} b_{n+1} + b_{n+3} &= (\lambda_q b_n + b_{n-1}) + (\lambda_q b_{n+2} + b_{n+1}) \\ &= \lambda_q(b_n + b_{n+2}) + (b_{n-1} + b_{n+1}) \\ &= \lambda_q(\lambda_q^2 + 4)a_{n+1} + (\lambda_q^2 + 4)a_n \\ &= (\lambda_q^2 + 4)(\lambda_q a_{n+1} + a_n) \\ &= (\lambda_q^2 + 4)a_{n+2} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda

$$b_k + b_{k+2} = (\lambda_q^2 + 4)a_{k+1}$$

olduğu elde edilir. ■

4.1.5 Önerme: $a_{k-3} + a_{k+3} = (\lambda_q^2 + 1)b_k$

İspat: $k = 0$ için $a_{-3} + a_3 = 2a_3 = 2(\lambda_q^2 + 1)b_0$ ve $k = 1$ için

$a_{-2} + a_4 = -a_2 + a_4 = -\lambda_q + \lambda_q^3 + 2\lambda_q = \lambda_q^3 + \lambda_q = \lambda_q(\lambda_q^2 + 1) = (\lambda_q^2 + 1)b_1$

olur ve böylece $k = 0$ ve $k = 1$ için eşitlik sağlanır.

Şimdi $k = 2, \dots, n$ için eşitliğin doğru olduğunu varsayalım ve $k = n + 1$ için eşitliğin doğruluğunu gösterelim. Varsayım gereği,

$$a_{n-3} + a_{n+3} = (\lambda_q^2 + 1)b_n$$

ve

$$a_{n-4} + a_{n+2} = (\lambda_q^2 + 1)b_{n-1}$$

olur. Böylece

$$a_{n-2} + a_{n+4} = (\lambda_q a_{n-3} + a_{n-4}) + (\lambda_q a_{n+3} + a_{n+2})$$

$$= \lambda_q(a_{n-3} + a_{n+3}) + (a_{n-4} + a_{n+2})$$
$$= \lambda_q(\lambda_q^2 + 1)b_n + (\lambda_q^2 + 1)b_{n-1}$$
$$= (\lambda_q^2 + 1)(\lambda_q b_n + b_{n-1})$$
$$= (\lambda_q^2 + 1)b_{n+1}$$

olur. Böylece

$$a_{k-3} + a_{k+3} = (\lambda_q^2 + 1)b_k$$

elde edilir. ■

4.1.6 Önerme: $a_{2k} = a_k b_k$

İspat: İspatı k üzerinden tümevarım ile yapalım. $k = 0$ ise $a_0 b_0 = 0 = a_0$ ve $k = 1$ ise $a_1 b_1 = \lambda_q = a_2$ olur ve eşitlik sağlanır. Varsayalım ki $k = 2, \dots, n-1$ için eşitlik sağlansın. Yani $a_{2(n-1)} = a_{n-1} b_{n-1}$ olsun.

Şimdi $k = n$ için eşitliğin doğru olduğunu gösterelim. 4.1.2 Önerme, 4.1.3 Önerme ve tanımdan,

$$a_n b_n = a_n(a_{n+1} + a_{n-1})$$
$$= a_n\left((\lambda_q^2 + 2)a_{n-1} - a_{n-3}\right) + a_{n-1}((\lambda_q^2 + 2)a_{n-2} - a_{n-4})$$
$$= (\lambda_q^2 + 2)a_n a_{n-1} + (\lambda_q^2 + 2)a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3} - a_{n-1}a_{n-4}$$
$$= (\lambda_q^2 + 2)a_{n-1}(a_n + a_{n+2}) - a_n a_{n-3} - a_{n-1}a_{n-4}$$
$$= (\lambda_q^2 + 2)a_{n-1}b_{n-1} - a_n a_{n-3} - a_{n-1}a_{n-4}$$
$$= (\lambda_q^2 + 2)a_{n-1}b_{n-1} - a_{n-3}(\lambda_q a_{n-1} + a_{n-2}) - a_{n-1}(a_{n-2} - \lambda_q a_{n-3})$$
$$= (\lambda_q^2 + 2)a_{n-1}b_{n-1} - a_{n-3}a_{n-2} - a_{n-1}a_{n-2}$$
$$= (\lambda_q^2 + 2)a_{n-1}b_{n-1} - a_{n-2}(a_{n-3} + a_{n-1})$$
$$= (\lambda_q^2 + 2)a_{n-1}b_{n-1} - a_{n-2}b_{n-2}$$
$$= (\lambda_q^2 + 2)a_{2n-2} - a_{2n-4}$$
$$= a_{2n}$$

olur. Böylece

$$a_{2k} = a_k b_k$$

eşitliği elde edilir. ■

4.1.7 Önerme: $a_{k+1}=\left(\lambda_q^2+2\right)a_{k-1}-a_{k-3}$ ve $a_k=\left(\lambda_q^2+2\right)a_{k-2}-a_{k-4}$

İspat: Tanımdan $a_k=\lambda_q a_{k-1}+a_{k-2}$ olduğundan $a_{k-3}=\lambda_q a_{k-4}+a_{k-5}$ olur ve böylece

$$a_{k-3}-a_{k-5}=\lambda_q a_{k-4}$$

olur. O halde

$$\begin{aligned}
a_k &= \lambda_q a_{k-1}+a_{k-2}\\
&= \lambda_q\left(\lambda_q a_{k-2}+a_{k-3}\right)+a_{k-2}\\
&= (\lambda_q^2+1)a_{k-2}+\lambda_q a_{k-3}\\
&= (\lambda_q^2+1)a_{k-2}+\lambda_q(\lambda_q a_{k-4}+a_{k-5})\\
&= (\lambda_q^2+2)a_{k-2}-a_{k-2}+\lambda_q^2 a_{k-4}+\lambda_q a_{k-5}\\
&= (\lambda_q^2+2)a_{k-2}-\left(\lambda_q a_{k-3}+a_{k-4}\right)+\lambda_q^2 a_{k-4}+\lambda_q a_{k-5}\\
&= (\lambda_q^2+2)a_{k-2}-\lambda_q(a_{k-3}-a_{k-5})+(\lambda_q^2-1)a_{k-4}\\
&= (\lambda_q^2+2)a_{k-2}-\lambda_q^2 a_{k-4}+(\lambda_q^2-1)a_{k-4}\\
&= (\lambda_q^2+2)a_{k-2}-a_{k-4}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$a_k=\left(\lambda_q^2+2\right)a_{k-2}-a_{k-4}$$

elde edilir.

Benzer şekilde,

$$a_{k+1}=\left(\lambda_q^2+2\right)a_{k-1}-a_{k-3}$$

olduğu kolayca gösterilebilir. ■

4.1.8 Önerme: $b_k^2-\left(\lambda_q^2+4\right)a_k^2=4(-1)^k$

İspat: a_k ve b_k tanımlarından ve Önerme 4.1.3 kullanılarak,

$$\begin{aligned}
b_k^2-\left(\lambda_q^2+4\right)a_k^2 &= (a_{k-1}+a_{k+1})^2-\left(\lambda_q^2+4\right)a_k^2\\
&= a_{k-1}^2+2a_{k-1}a_{k+1}+a_{k+1}^2-\lambda_q^2a_k^2-4a_k^2\\
&= a_{k-1}^2+2a_{k-1}\left(\lambda_q a_k+a_{k-1}\right)+(\lambda_q a_k+a_{k-1})^2-\lambda_q^2a_k^2-4a_k^2\\
&= a_{k-1}^2+2\lambda_q a_{k-1}a_k+2a_{k-1}^2+\lambda_q^2a_k^2+2\lambda_q a_{k-1}a_k+a_{k-1}^2-\\
&\quad \lambda_q^2a_k^2-4a_k^2\\
&= 4a_{k-1}^2+4\lambda_q a_{k-1}a_k-4a_k^2\\
&= 4a_{k-1}\left(\lambda_q a_k+a_{k-1}\right)-4a_k^2
\end{aligned}$$

$$= 4a_{k-1}a_{k+1} - 4a_k^2$$
$$= 4(a_{k-1}a_{k+1} - a_k^2)$$

olur. Burada [22] nolu kaynakta bulunan genelleştirilmiş Cassini eşitliğinde $a = \lambda_q$ ve $b = \lambda_q$ olarak alırsak,

$$a_{k-1}a_{k+1} - a_k^2 = (-1)^k$$

ve böylece

$$b_k^2 - (\lambda_q^2 + 4)a_k^2 = 4(-1)^k$$

olur. ■

4.1.9 Önerme: $a_k a_{k+3} - a_{k+1}a_{k+2} = (-1)^{k+1}\lambda_q$

İspat: $k = 0$ için $a_0 a_3 - a_1 a_2 = -\lambda_q = (-1)\lambda_q$

$k = 1$ için $a_1 a_4 - a_2 a_3 = \lambda_q^3 + 2\lambda_q - \lambda_q(\lambda_q^2 + 1) = (-1)^2\lambda_q$

olduğundan $k = 0$ ve $k = 1$ için eşitlik sağlanır. Şimdi $k = 2, \dots, n$ için eşitliğin doğru olduğunu varsayalım ve $k = n + 1$ için eşitliğin doğruluğunu gösterelim. Varsayım gereği,

$$a_n a_{n+3} - a_{n+1}a_{n+2} = (-1)^{n+1}\lambda_q$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} a_{n+1}a_{n+4} - a_{n+2}a_{n+3} &= a_{n+1}(\lambda_q a_{n+3} + a_{n+2}) - a_{n+3}(\lambda_q a_{n+1} + a_n) \\ &= \lambda_q a_{n+1}a_{n+3} + a_{n+1}a_{n+2} - \lambda_q a_{n+1}a_{n+3} - a_n a_{n+3} \\ &= a_{n+1}a_{n+2} - a_n a_{n+3} \\ &= -(-1)^{n+1}\lambda_q \\ &= (-1)^{n+2}\lambda_q \end{aligned}$$

olur ve böylece

$$a_k a_{k+3} - a_{k+1}a_{k+2} = (-1)^{k+1}\lambda_q$$

elde edilir. ■

4.1.10 Önerme: $\lambda_q a_{2m+k} = a_{2m+2}a_k - a_{2m}a_{k-2}$

İspat: $k = 0$ için $a_0 = 0$ ve $a_{-2} = -a_2 = -\lambda_q$ olduğundan,

$$a_{2m+2}a_0 - a_{2m}a_{-2} = \lambda_q a_{2m}$$

olur.

$k = 1$ için $a_1 = 1$ ve $a_{-1} = 1$ olduğundan,

$$a_{2m+2}a_1 - a_{2m}a_{-1} = \lambda_q a_{2m+1} + a_{2m} - a_{2m}$$
$$= \lambda_q a_{2m+1}$$

olur. Şimdi $k = 2, \ldots, n$ için eşitliğin sağlandığını varsayalım. $k = n + 1$ için eşitliğin doğru olduğunu gösterelim. Varsayımdan,

$$\lambda_q a_{2m+n} = a_{2m+2}a_n - a_{2m}a_{n-2}$$

ve

$$\lambda_q a_{2m+n-1} = a_{2m+2}a_{n-1} - a_{2m}a_{n-3}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} a_{2m+2}a_{n+1} - a_{2m}a_{n-1} &= a_{2m+2}(\lambda_q a_n + a_{n-1}) - a_{2m}(\lambda_q a_{n-2} + a_{n-3}) \\ &= \lambda_q(a_{2m+2}a_n - a_{2m}a_{n-2}) + (a_{2m+2}a_{n-1} - a_{2m}a_{n-3}) \\ &= \lambda_q\lambda_q a_{2m+n} + \lambda_q a_{2m+n-1} \\ &= \lambda_q(\lambda_q a_{2m+n} + a_{2m+n-1}) \\ &= \lambda_q a_{2m+n+1} \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\lambda_q a_{2m+k} = a_{2m+2}a_k - a_{2m}a_{k-2}$$

elde edilir. ■

Şimdi a_k ve b_k dizileri için bir formül verelim.

4.1.11 Önerme: $k \geq 1$ olsun. Eğer k çift ise

$$a_k = \frac{1}{2^{k-1}} \sum_{i=0}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k}{2i+1} \lambda_q^{k-(2i+1)} \left(\lambda_q^2 + 4\right)^i$$

$$b_k = \frac{1}{2^{k-1}} \sum_{i=0}^{\frac{k}{2}} \binom{k}{2i} \lambda_q^{k-2i} \left(\lambda_q^2 + 4\right)^{2i}$$

ve k tek ise

$$a_k = \frac{1}{2^{k-1}} \sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i+1} \lambda_q^{k-(2i+1)} \left(\lambda_q^2 + 4\right)^i$$

$$b_k = \frac{1}{2^{k-1}} \sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i-1} \lambda_q^{k-(2i-1)} \left(\lambda_q^2 + 4\right)^{2i}$$

şeklinde tanımlıdır.

İspat: $k \geq 1$ ve k çift olsun. Binet formülünden,

$$a_k = \frac{\left(\frac{\lambda_q + \sqrt{\lambda_q^2 + 4}}{2}\right)^k + \left(\frac{\lambda_q - \sqrt{\lambda_q^2 + 4}}{2}\right)^k}{\sqrt{{\lambda_q}^2 + 4}}$$

yazabiliriz. Böylece

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{{\lambda_q}^2 + 4}}\left[\left(\frac{\lambda_q + \sqrt{{\lambda_q}^2 + 4}}{2}\right)^k + \left(\frac{\lambda_q - \sqrt{{\lambda_q}^2 + 4}}{2}\right)^k\right]$$

$$= \frac{1}{2^{k-1}\sqrt{{\lambda_q}^2 + 4}}\left[\binom{k}{1}\lambda_q^{k-1}\sqrt{\lambda_q^2 + 4} + \binom{k}{3}\lambda_q^{k-3}\left(\sqrt{\lambda_q^2 + 4}\right)^3 + \cdots\right.$$

$$\left. + \binom{k}{k-1}\lambda_q(\sqrt{\lambda_q^2 + 4})^{k-1}\right]$$

$$= \frac{1}{2^{k-1}}\left[\binom{k}{1}\lambda_q^{k-1} + \binom{k}{3}\lambda_q^{k-3}({\lambda_q}^2 + 4) + \cdots\right.$$

$$\left. + \binom{k}{k-1}\lambda_q(\sqrt{\lambda_q^2 + 4})^{\frac{k-2}{2}}\right]$$

olur ve böylece k çift olduğunda

$$a_k = \frac{1}{2^{k-1}}\sum_{i=0}^{\frac{k-2}{2}}\binom{k}{2i+1}{\lambda_q}^{k-(2i+1)}\left({\lambda_q}^2 + 4\right)^i$$

elde edilir. Benzer şekilde k nın çift olması durumunda

$$b_k = \frac{1}{2^{k-1}}\sum_{i=0}^{\frac{k}{2}}\binom{k}{2i}{\lambda_q}^{k-2i}\left({\lambda_q}^2 + 4\right)^{2i}$$

ve k tek olduğunda

$$a_k = \frac{1}{2^{k-1}}\sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}}\binom{k}{2i+1}{\lambda_q}^{k-(2i+1)}\left({\lambda_q}^2 + 4\right)^i$$

ve

$$b_k = \frac{1}{2^{k-1}} \sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i-1} {\lambda_q}^{k-(2i-1)} \left({\lambda_q}^2 + 4\right)^{2i}$$

eşitliklerinin sağlandığı kolayca gösterilebilir. ■

4.1.12 Önerme:

$$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = \frac{a_{k+2} + a_{k+1} - 1}{\lambda_q}$$

$$\sum_{i=1}^{k+1} b_i = \frac{b_{k+2} + b_{k+1} - (\lambda_q + 2)}{\lambda_q}$$

İspat: Tanım gereği $a_k = \lambda_q a_{k-1} + a_{k-2}$ olduğundan,

$$a_{k+2} - a_{k+1} = \lambda_q a_{k+1} + a_k - a_{k+1} = (\lambda_q - 1)a_{k+1} + a_k$$

olur. Böylece

$k = 0$ ise $a_2 - a_1 = (\lambda_q - 1)a_1 + a_0$

$k = 1$ ise $a_3 - a_2 = (\lambda_q - 1)a_2 + a_1$

$\vdots$

$k = k - 1$ ise $a_{k+1} - a_k = (\lambda_q - 1)a_k + a_{k-1}$

$k = k$ ise $a_{k+2} - a_{k+1} = (\lambda_q - 1)a_{k+1} + a_k$

olur. Eşitlikleri taraf tarafa toplarsak,

$$\begin{aligned} a_{k+2} - a_1 &= (\lambda_q - 1)(a_1 + a_2 + \cdots + a_{k+1}) + (a_0 + a_1 + \cdots + a_k) \\ &= \lambda_q(a_1 + a_2 + \cdots + a_{k+1}) + a_0 - a_{k+1} \end{aligned}$$

elde edilir. $a_0 = 0$ ve $a_1 = 1$ olduğundan,

$$a_{k+2} - 1 = \lambda_q(a_1 + a_2 + \cdots + a_{k+1}) - a_{k+1}$$

$$\Longrightarrow a_{k+2} + a_{k+1} - 1 = \lambda_q(a_1 + a_2 + \cdots + a_{k+1})$$

olur ve böylece

$$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = \frac{a_{k+2} + a_{k+1} - 1}{\lambda_q}$$

elde edilir.

Benzer şekilde $b_k = \lambda_q b_{k-1} + b_{k-2}$ olduğundan

$$b_{k+2} - b_{k+1} = \lambda_q b_{k+1} + b_k - b_{k+1} = (\lambda_q - 1)b_{k+1} + b_k$$

olur. Böylece

$k = 0$ ise $b_2 - b_1 = (\lambda_q - 1)b_1 + b_0$

$k = 1$ ise $b_3 - b_2 = (\lambda_q - 1)b_2 + b_1$

$\vdots$

$k = k - 1$ ise $b_{k+1} - b_k = (\lambda_q - 1)b_k + b_{k-1}$

$k = k$ ise $b_{k+2} - b_{k+1} = (\lambda_q - 1)b_{k+1} + b_k$

olur. Eşitlikleri taraf tarafa toplarsak,

$$\begin{aligned} b_{k+2} - b_1 &= (\lambda_q - 1)(b_1 + b_2 + \cdots + b_{k+1}) + (b_0 + b_1 + \cdots + b_k) \\ &= \lambda_q(b_1 + b_2 + \cdots + b_{k+1}) + b_0 - b_{k+1} \end{aligned}$$

elde edilir. $b_0 = 2$ ve $b_1 = \lambda_q$ olduğundan,

$$b_{k+2} - \lambda_q = \lambda_q(b_1 + b_2 + \cdots + b_{k+1}) + 2 - b_{k+1}$$

$$\Longrightarrow b_{k+2} + b_{k+1} - (\lambda_q + 2) = \lambda_q(b_1 + b_2 + \cdots + b_{k+1})$$

olur ve böylece

$$\sum_{i=1}^{k+1} b_i = \frac{b_{k+2} + b_{k+1} - (\lambda_q + 2)}{\lambda_q}$$

elde edilir. ■

4.1.13 Önerme: Her m ve k tamsayısı için $a_{2m} | a_{2mk}$ dır.

İspat: m sabit olsun ve ispatı k üzerinden tümevarım ile yapalım.
$m = 0$ veya $k = 0$ ise bu durumda önerme doğrudur.
$k = 1$ ise $a_{2m} | a_{2m}$ olduğu açıktır.
$k = 2, \ldots, n$ için doğru olduğunu varsayalım. Yani $a_{2m} | a_{2mn}$ olsun. Böylece a_{2m} denklemin sağ tarafını tam böler. 4.1.10 Önerme kullanılarak,

$$\lambda_q a_{2m(n+1)} = \lambda_q a_{2mn+2} = a_{2mn+2} a_{2m} - a_{2mn} a_{2m-2}$$

olur ve böylece a_{2m} böler $a_{2m(n+1)}$. Bu durumda $k \geq 1$ için önerme sağlanır. Benzer şekilde $k \leq -1$ için de a_{2m} böler a_{2mk} olur. Sonuç olarak her m, k tamsayısı için,

$$a_{2m} | a_{2mk}$$

olduğu elde edilir. ■

4.1.14 Önerme: $\lambda_q b_k = a_{k+2} - a_{k-2}$

İspat: İspatı tümevarım ile yapalım.

$k = 0$ için $a_2 - a_{-2} = 2a_2 = 2\lambda_q = \lambda_q b_0$

$k = 1$ için $a_3 - a_{-1} = \lambda_q^2 + 1 - 1 = \lambda_q^2 = \lambda_q b_1$

olduğundan $k = 0$ ve $k = 1$ için eşitlik sağlanır. Şimdi $k = 2, \dots, n$ için eşitliğin doğru olduğunu varsayalım ve $k = n + 1$ için önermenin doğru olduğunu gösterelim. Varsayım gereği,

$$\lambda_q b_n = a_{n+2} - a_{n-2}$$

ve

$$\lambda_q b_{n-1} = a_{n+1} - a_{n-3}$$

olur.

$$\begin{aligned} a_{n+3} - a_{n-1} &= \lambda_q a_{n+2} + a_{n+1} - \lambda_q a_{n-2} - a_{n-3} \\ &= \lambda_q (a_{n+2} - a_{n-2}) + a_{n+1} - a_{n-3} \\ &= \lambda_q \lambda_q b_n + \lambda_q b_{n-1} \\ &= \lambda_q (\lambda_q b_n + b_{n-1}) \\ &= \lambda_q b_{n+1} \end{aligned}$$

olduğundan ispat biter. ■

4.1.15 Önerme: $\lambda_q a_k + b_k = 2a_{k+1}$

İspat: İspatı tümevarım ile yapalım. $k = 0$ için $\lambda_q a_0 + b_0 = 2 = 2a_1$ ve $k = 1$ için $\lambda_q a_1 + b_1 = 2\lambda_q = 2a_2$ olduğundan eşitlik sağlanır. Şimdi $k = 2, \dots, n$ için eşitliğin sağlandığını varsayalım ve $k = n + 1$ için önermenin doğru olduğunu gösterelim. Varsayım gereği,

$$\lambda_q a_n + b_n = 2a_{n+1}$$

ve

$$\lambda_q a_{n-1} + b_{n-1} = 2a_n$$

olur.

$$\begin{aligned} \lambda_q a_{n+1} + b_{n+1} &= \lambda_q \left(\lambda_q a_n + a_{n-1}\right) + \lambda_q b_n + b_{n-1} \\ &= \lambda_q \left(\lambda_q a_n + b_n\right) + \lambda_q a_{n-1} + b_{n-1} \\ &= \lambda_q 2a_{n+1} + 2a_n \\ &= 2(\lambda_q a_{n+1} + a_n) \end{aligned}$$

$$= 2a_{n+2}$$

olduğundan ispat biter. ■

4.1.16 Önerme: $a_{k+1}^2 + a_k^2 = a_{2k+1}$

İspat: İspatı tümevarım ile yapalım. $k = 0$ için $a_1^2 + a_0^2 = 1 = a_1$ ve $k = 1$ için $a_2^2 + a_1^2 = \lambda_q^2 + 1 = a_3$ olduğundan $k = 0$ ve $k = 1$ için eşitlik sağlanır. Şimdi $k = 2, \dots, n$ için eşitliğin sağlandığını varsayalım ve $k = n + 1$ için önermenin doğru olduğunu gösterelim. Varsayım gereği,

$$a_{n+1}^2 + a_n^2 = a_{2n+1}$$

ve

$$a_n^2 + a_{n-1}^2 = a_{2n-1}$$

olur. 4.1.3 Önerme, 4.1.6 Önerme ve tanımdan yararlanarak,

$$\begin{aligned} a_{n+2}^2 + a_{n+1}^2 &= (\lambda_q a_{n+1} + a_n)^2 + (\lambda_q a_n + a_{n-1})^2 \\ &= \lambda_q^2 a_{n+1}^2 + 2\lambda_q a_{n+1} a_n + a_n^2 + \lambda_q^2 a_n^2 + 2\lambda_q a_n a_{n-1} + a_{n-1}^2 \\ &= \lambda_q^2 (a_{n+1}^2 + a_n^2) + 2\lambda_q a_n (a_{n+1} + a_{n-1}) + (a_n^2 + a_{n-1}^2) \\ &= \lambda_q^2 a_{2n+1} + 2\lambda_q a_n b_n + a_{2n-1} \\ &= \lambda_q^2 a_{2n+1} + 2\lambda_q a_{2n} + a_{2n-1} \\ &= \lambda_q^2 a_{2n+1} + \lambda_q a_{2n} + \lambda_q a_{2n} + a_{2n-1} \\ &= \lambda_q (\lambda_q a_{2n+1} + a_{2n}) + \lambda_q a_{2n} + a_{2n-1} \\ &= \lambda_q a_{2n+2} + a_{2n+1} \\ &= a_{2n+3} \end{aligned}$$

elde edilir ve böylece ispat biter. ■

4.1.17 Önerme: $a_{k+1} b_{k+1} - a_k b_k = \lambda_q a_{2k+1}$

İspat: Tümevarım ile ispatı yapalım.

$k = 0$ için $a_1 b_1 - a_0 b_0 = \lambda_q = \lambda_q a_1$

$k = 1$ için $a_2 b_2 - a_1 b_1 = \lambda_q^3 + 2\lambda_q - \lambda_q = \lambda_q^3 + \lambda_q = \lambda_q (\lambda_q^2 + 1) = \lambda_q a_3$

olduğundan $k = 0$ ve $k = 1$ için eşitlik sağlanır.

Şimdi $k = 2, \dots, n$ için eşitliğin sağlandığını varsayalım. O halde,

$$a_{n+1} b_{n+1} - a_n b_n = \lambda_q a_{2n+1}$$

ve

$$a_n b_n - a_{n-1} b_{n-1} = \lambda_q a_{2n-1}$$

olsun ve $k = n + 1$ için eşitliğin sağlandığını gösterelim. Tanım ve 4.1.6 Önermeden yararlanarak,

$$\begin{aligned}
&a_{n+2} b_{n+2} - a_{n+1} b_{n+1} \\
&= (\lambda_q a_{n+1} + a_n)(\lambda_q b_{n+1} + b_n) - (\lambda_q a_n + a_{n-1})(\lambda_q b_n + b_{n-1}) \\
&= \lambda_q^2 a_{n+1} b_{n+1} + \lambda_q a_{n+1} b_n + \lambda_q a_n b_{n+1} + a_n b_n - (\lambda_q^2 a_n b_n \\
&+ \lambda_q a_n b_{n-1} + \lambda_q a_{n-1} b_n + a_{n-1} b_{n-1}) \\
&= \lambda_q^2 (a_{n+1} b_{n+1} - a_n b_n) + (a_n b_n - a_{n-1} b_{n-1}) + \lambda_q a_n (\lambda_q b_n + b_{n-1}) \\
&+ \lambda_q b_n (\lambda_q a_n + a_{n-1}) - \lambda_q a_n b_{n-1} - \lambda_q a_{n-1} b_n \\
&= \lambda_q^2 \lambda_q a_{2n+1} + \lambda_q a_{2n-1} + \lambda_q^2 a_n b_n + \lambda_q a_{n-1} b_n + \lambda_q^2 a_n b_n \\
&+ \lambda_q a_n b_{n-1} - \lambda_q a_n b_{n-1} - \lambda_q a_{n-1} b_n \\
&= \lambda_q^2 \lambda_q a_{2n+1} + \lambda_q a_{2n-1} + 2\lambda_q^2 a_n b_n \\
&= \lambda_q^2 \lambda_q a_{2n+1} + \lambda_q a_{2n-1} + 2\lambda_q^2 a_{2n} \\
&= \lambda_q^2 \lambda_q a_{2n+1} + \lambda_q^2 a_{2n} + \lambda_q a_{2n-1} + \lambda_q^2 a_{2n} \\
&= \lambda_q^2 (\lambda_q a_{2n+1} + a_{2n}) + \lambda_q (a_{2n-1} + \lambda_q a_{2n}) \\
&= \lambda_q^2 a_{2n+2} + \lambda_q a_{2n+1} \\
&= \lambda_q (\lambda_q a_{2n+2} + a_{2n+1}) \\
&= \lambda_q a_{2n+3}
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

4.1.18 Önerme: $a_{k+m} + (-1)^m a_{k-m} = b_m a_k$

İspat: k sabit olsun ve ispatı m üzerinden tümevarım ile yapalım.

$m = k$ ise eşitliğin sağlandığı açıktır.

$m = 1$ ise $a_{k+1} - a_{k-1} = \lambda_q a_k + a_{k-1} - a_{k-1} = \lambda_q a_k = b_1 a_k$

$m = 2$ ise
$$\begin{aligned}
a_{k+2} + a_{k-2} &= \lambda_q a_{k+1} + a_k + a_{k-2} \\
&= \lambda_q (\lambda_q a_k + a_{k-1}) + a_k + a_{k-2} \\
&= (\lambda_q^2 + 1) a_k + \lambda_q a_{k-1} + a_{k-2} \\
&= (\lambda_q^2 + 1) a_k + a_k \\
&= (\lambda_q^2 + 2) a_k \\
&= b_2 a_k
\end{aligned}$$

olur ve böylece $m = 1$ ve $m = 1$ için eşitlik sağlanır.

Şimdi varsayalım ki $m = 2, \dots, n$ için eşitlik sağlansın.

m tek olsun. Bu durumda,

$$a_{k+n} - a_{k-n} = b_n a_k$$

ve

$$a_{k+n-1} + a_{k-n+1} = b_{n-1} a_k$$

olsun ve $m = n + 1$ için eşitliğin sağlandığını gösterelim.

$$\begin{aligned} a_{k+n+1} + a_{k-n-1} &= \lambda_q a_{k+n} + a_{k+n-1} + a_{k-n-1} \\ &= \lambda_q(b_n a_k + a_{k-n}) + (b_{n-1}a_k - a_{k-n+1}) + a_{k-n-1} \\ &= a_k\left(\lambda_q b_n + b_{n-1}\right) + (\lambda_q a_{k-n} + a_{k-n-1}) - a_{k-n+1} \\ &= a_k b_{n+1} + a_{k-n+1} - a_{k-n+1} \\ &= a_k b_{n+1} \end{aligned}$$

olur.

Benzer şekilde m çift olsun. Bu durumda,

$$a_{k+n} + a_{k-n} = b_n a_k$$

ve

$$a_{k+n-1} - a_{k-n+1} = b_{n-1} a_k$$

olsun ve $m = n + 1$ için eşitliğin sağlandığını gösterelim.

$$\begin{aligned} a_{k+n+1} + a_{k-n-1} &= \lambda_q a_{k+n} + a_{k+n-1} + a_{k-n-1} \\ &= \lambda_q(b_n a_k - a_{k-n}) + (b_{n-1}a_k + a_{k-n+1}) + a_{k-n-1} \\ &= a_k\left(\lambda_q b_n + b_{n-1}\right) - \left(\lambda_q a_{k-n} + a_{k-n-1}\right) + a_{k-n+1} \\ &= a_k b_{n+1} - a_{k-n+1} + a_{k-n+1} \\ &= a_k b_{n+1} \end{aligned}$$

olur.

Böylece $m = n + 1$ için eşitlik sağlandığından ispat biter. ■

4.1.19 Önerme: $a_{k+m} - (-1)^m a_{k-m} = a_m b_k$

İspat: k sabit olsun ve ispatı m üzerinden tümevarım ile yapalım.

$m = k$ ise $a_{2k} = a_k b_k$

$m = 1$ ise 4.1.3 Önermeden $a_{k+1} + a_{k-1} = b_k = a_1 b_k$

$m = 2$ ise 4.1.14 Önermeden $a_{k+2} - a_{k-2} = \lambda_q b_k = a_2 b_k$

olur ve böylece $m = 1$ ve $m = 2$ için eşitlik sağlanır.

Şimdi varsayalım ki $m = 2, \dots, n$ için eşitlik sağlansın.

m tek olsun. Bu durumda,

$$a_{k+n} + a_{k-n} = a_n b_k$$

ve

$$a_{k+n-1} - a_{k-n+1} = a_{n-1} b_k$$

olsun ve $m = n + 1$ için eşitliğin sağlandığını gösterelim.

$$\begin{aligned} a_{k+n+1} - a_{k-n-1} &= \lambda_q a_{k+n} + a_{k+n-1} - a_{k-n-1} \\ &= \lambda_q (a_n b_k - a_{k-n}) + (a_{n-1} b_k + a_{k-n+1}) - a_{k-n-1} \\ &= b_k (\lambda_q a_n + a_{n-1}) - (\lambda_q a_{k-n} + a_{k-n-1}) + a_{k-n+1} \\ &= b_k a_{n+1} - a_{k-n+1} + a_{k-n+1} \\ &= b_k a_{n+1} \end{aligned}$$

olur.

Benzer şekilde m çift olsun. Bu durumda,

$$a_{k+n} - a_{k-n} = a_n b_k$$

ve

$$a_{k+n-1} + a_{k-n+1} = a_{n-1} b_k$$

olsun ve $m = n + 1$ için eşitliğin sağlandığını gösterelim.

$$\begin{aligned} a_{k+n+1} + a_{k-n-1} &= \lambda_q a_{k+n} + a_{k+n-1} + a_{k-n-1} \\ &= \lambda_q (a_n b_k + a_{k-n}) + (a_{n-1} b_k - a_{k-n+1}) + a_{k-n-1} \\ &= b_k (\lambda_q a_n + a_{n-1}) + (\lambda_q a_{k-n} + a_{k-n-1}) - a_{k-n+1} \\ &= b_k a_{n+1} + a_{k-n+1} - a_{k-n+1} \\ &= b_k a_{n+1} \end{aligned}$$

olur.

Böylece $m = n + 1$ için eşitlik sağlandığından ispat biter. ■

4.1.20 Önerme: $b_m a_k + b_k a_m = 2a_{k+m}$

İspat: m sabit olsun ve ispatı k üzerinden tümevarım ile yapalım.

$m = k$ ise $b_k a_k + b_k a_k = 2 b_k a_k = 2a_{2k}$

$k = 1$ ise 4.1.3 Önermeyi kullanarak,

$$b_m a_1 + b_1 a_m = b_m + \lambda_q a_m = a_{m+1} + a_{m-1} + \lambda_q a_m = a_{m+1} + a_{m+1} = 2a_{m+1}$$

elde edilir. Şimdi $k = 2, \dots, n$ için önerme doğru olsun ve $k = n + 1$ için eşitliğin sağlandığını gösterelim. Varsayımdan,

$$b_m a_n + b_n a_m = 2a_{n+m}$$

ve

$$b_m a_{n-1} + b_{n-1} a_m = 2a_{n-1+m}$$

olsun.

$$\begin{aligned} b_m a_{n+1} + b_{n+1} a_m &= b_m\big(\lambda_q a_n + a_{n-1}\big) + (\lambda_q b_n + b_{n-1}) a_m \\ &= \lambda_q (b_m a_n + b_n a_m) + b_m a_{n-1} + b_{n-1} a_m \\ &= \lambda_q 2a_{n+m} + 2a_{n-1+m} \\ &= 2(\lambda_q a_{n+m} + a_{n-1+m}) \\ &= 2a_{n+m+1} \end{aligned}$$

olduğundan eşitlik sağlanır. ■

4.1.21 Önerme: $a_k b_m - b_k a_m = (-1)^m 2a_{k-m}$

İspat: k sabit olsun ve ispatı m üzerinden tümevarım ile yapalım.
$k = m$ ise eşitliğin sağlandığı açıktır.
$m = 1$ ise 4.1.3 Önermeden yararlanarak,

$$a_k b_1 - b_k a_1 = a_k \lambda_q - b_k = a_k \lambda_q - a_{k+1} - a_{k-1} = -a_{k-1} - a_{k-1} = -2a_{k-1}$$

olduğundan eşitlik sağlanır. Şimdi $m = 2, \dots, n$ için eşitliğin sağlandığını varsayalım ve $m = n + 1$ için eşitliğin sağlandığını gösterelim.
m tek olsun. Varsayımdan,

$$a_k b_n - b_k a_n = -2a_{k-n}$$

ve

$$a_k b_{n-1} - b_k a_{n-1} = 2a_{k-n+1}$$

olsun.

$$\begin{aligned} a_k b_{n+1} - b_k a_{n+1} &= a_k\big(\lambda_q b_n + b_{n-1}\big) - b_k(\lambda_q a_n + a_{n-1}) \\ &= \lambda_q (a_k b_n - b_k a_n) + a_k b_{n-1} - b_k a_{n-1} \\ &= \lambda_q(-2a_{k-n}) + 2a_{k-n+1} \\ &= -2(\lambda_q a_{k-n} - a_{k-n+1}) \\ &= -2a_{k-n-1} \end{aligned}$$

olduğundan eşitlik sağlanır.
Benzer şekilde m çift olsun. Varsayımdan,

$$a_k b_n - b_k a_n = 2a_{k-n}$$

ve

$$a_k b_{n-1} - b_k a_{n-1} = -2a_{k-n+1}$$

olsun.

$$
\begin{aligned}
a_k b_{n+1} - b_k a_{n+1} &= a_k\big(\lambda_q b_n + b_{n-1}\big) - b_k(\lambda_q a_n + a_{n-1}) \\
&= \lambda_q(a_k b_n - b_k a_n) + a_k b_{n-1} - b_k a_{n-1} \\
&= \lambda_q(2a_{k-n}) - 2a_{k-n+1} \\
&= 2(\lambda_q a_{k-n} - a_{k-n+1}) \\
&= 2a_{k-n-1}
\end{aligned}
$$

olur ve böylece istenen elde edilir. ■

4.1.22 Önerme: $b_{k+m} + (-1)^m b_{k-m} = b_m b_k$

İspat: n sabit olsun ve ispatı m üzerinden tümevarım ile yapalım. $m = 1$ ise $b_{k+1} - b_{k-1} = \lambda_q b_k + b_{k-1} - b_{k-1} = \lambda_q b_k = b_1 b_k$ olur ve eşitlik sağlanır. Şimdi $m = 2, \dots, n$ için eşitliğin sağlandığını varsayalım ve $m = n + 1$ için önermenin doğru olduğunu gösterelim.

m çift olsun. O halde varsayımdan,

$$b_{k+n} + b_{k-n} = b_n b_k$$

ve

$$b_{k+n-1} - b_{k-n+1} = b_{n-1} b_k$$

olur.

$$
\begin{aligned}
b_{k+n+1} - b_{k-n-1} &= \big(\lambda_q b_{k+n} + b_{k+n-1}\big) - (b_{k-n+1} - \lambda_q b_{k-n}) \\
&= \lambda_q(b_{k+n} + b_{k-n}) + b_{k+n-1} - b_{k-n+1} \\
&= \lambda_q b_n b_k + b_{n-1} b_k \\
&= b_k(\lambda_q b_n + b_{n-1}) \\
&= b_k b_{n+1}
\end{aligned}
$$

olduğundan eşitlik sağlanır.

Benzer şekilde m tek olsun. Varsayım gereği,

$$b_{k+n} - b_{k-n} = b_n b_k$$

ve

$$b_{k+n-1} + b_{k-n+1} = b_{n-1} b_k$$

olur.

$$
\begin{aligned}
b_{k+n+1} + b_{k-n-1} &= \big(\lambda_q b_{k+n} + b_{k+n-1}\big) + (b_{k-n+1} - \lambda_q b_{k-n}) \\
&= \lambda_q(b_{k+n} - b_{k-n}) + b_{k+n-1} + b_{k-n+1} \\
&= \lambda_q b_n b_k + b_{n-1} b_k
\end{aligned}
$$

$$= b_k(\lambda_q b_n + b_{n-1})$$
$$= b_k b_{n+1}$$

olduğundan ispat biter. ■

4.1.23 Önerme: $b_k^2 + b_{k+1}^2 = (\lambda_q^2 + 4)a_{2k+1}$

İspat: İspatı tümevarım ile yapalım.

$k = 0$ ise $b_0^2 + b_1^2 = 4 + \lambda_q^2 = (\lambda_q^2 + 4)a_1$ ve $k = 1$ ise

$$b_1^2 + b_2^2 = \lambda_q^2 + \left(\lambda_q^2 + 2\right)^2 = \lambda_q^4 + 5\lambda_q^2 + 4 = (\lambda_q^2 + 4)(\lambda_q^2 + 1) = (\lambda_q^2 + 4)a_3$$

olur ve eşitlik sağlanır. $k = 2, \dots, n$ için eşitliğin sağlandığını varsayalım ve $k = n + 1$ için eşitliğin sağlandığını gösterelim. O halde varsayımdan,

$$b_n^2 + b_{n+1}^2 = (\lambda_q^2 + 4)a_{2n+1}$$

ve

$$b_{n-1}^2 + b_n^2 = (\lambda_q^2 + 4)a_{2n-1}$$

olur. Tanım, 4.1.4 Önerme ve 4.1.6 Önermeden yararlanılırsa,

$$\begin{aligned}
b_{n+1}^2 + b_{n+2}^2 &= (\lambda_q b_n + b_{n-1})^2 + (\lambda_q b_{n+1} + b_n)^2 \\
&= \lambda_q^2(b_n^2 + b_{n+1}^2) + (b_{n-1}^2 + b_n^2) + 2\lambda_q b_n(b_{n-1} + b_{n+1}) \\
&= \lambda_q^2\left(\lambda_q^2 + 4\right)a_{2n+1} + (\lambda_q^2 + 4)a_{2n-1} + 2\lambda_q b_n(\lambda_q^2 + 4)a_n \\
&= \lambda_q^2\left(\lambda_q^2 + 4\right)a_{2n+1} + (\lambda_q^2 + 4)a_{2n-1} + 2\lambda_q(\lambda_q^2 + 4)a_{2n} \\
&= \lambda_q^2\left(\lambda_q^2 + 4\right)a_{2n+1} + \left(\lambda_q^2 + 4\right)a_{2n-1} + \lambda_q\left(\lambda_q^2 + 4\right)a_{2n} + \lambda_q\left(\lambda_q^2 + 4\right)a_{2n} \\
&= \lambda_q\left(\lambda_q^2 + 4\right)\left(\lambda_q a_{2n+1} + a_{2n}\right) + \left(\lambda_q^2 + 4\right)\left(a_{2n-1} + \lambda_q a_{2n}\right) \\
&= \lambda_q\left(\lambda_q^2 + 4\right)a_{2n+2} + \left(\lambda_q^2 + 4\right)a_{2n+1} \\
&= \left(\lambda_q^2 + 4\right)(\lambda_q a_{2n+2} + a_{2n+1}) \\
&= \left(\lambda_q^2 + 4\right)a_{2n+3}
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Şimdi a_k ve b_k dizilerinden yeni dizilerin elde edilebileceğini gösterelim. İlk olarak $q = 4$ olsun. Bu durumda

$$\frac{a_{2k}}{\sqrt{2}} = u_k$$

olmak üzere her $k \geq 2$ için

$$u_k = 4u_{k-1} - u_{k-2}$$

yeni bir dizi olur. Burada $u_0 = 0$ ve $u_1 = 1$ dir.

Benzer şekilde,

$$b_{2k} = v_k$$

olmak üzere her $k \geq 2$ için

$$v_k = 4v_{k-1} - v_{k-2}$$

yeni bir dizi olur. Burada $v_0 = 2$ ve $v_1 = 4$ olur.

Dikkat edilirse $q = 4$ için karakteristik denklem,

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

olur ve böylece bu denklemin kökleri

$$x_{1,2} = 2 \mp \sqrt{3}$$

dir.

$q = 5$ olsun. Bu durumda

$$\frac{a_{2k}}{\sqrt{3}} = t_k$$

olmak üzere her $k \geq 2$ için

$$t_k = 5t_{k-1} - t_{k-2}$$

yeni bir dizi olur. Burada $t_0 = 0$ ve $t_1 = 1$ dir.

Benzer şekilde,

$$b_{2k} = s_k$$

olmak üzere her $k \geq 2$ için

$$s_k = 5s_{k-1} - s_{k-2}$$

yeni bir dizi olur. Burada $s_0 = 2$ ve $s_1 = 5$ olur.

Dikkat edilirse $q = 5$ için karakteristik denklem,

$$x^2 - 5x + 1 = 0$$

olur ve böylece bu denklemin kökleri

$$x_{1,2} = \frac{5 \mp \sqrt{21}}{2}$$

dir.

4.2 Genelleştirilmiş Fibonacci ve Genelleştirilmiş Lucas Dizilerinin Polinom Gösterimleri

Bu bölümde a_k ve b_k dizilerinin polinom şeklinde yazılabileceği gösterilecektir. $\lambda_q = 1$ için Fibonacci ve Lucas sayılarının polinom gösterimi olur. Daha sonra bu diziler için elde edilen bazı üst sınır özellikleri de verilecektir.

İlk olarak a_k ve b_k dizilerinin ilk 10 terimini verelim.

a_k	b_k
$a_0 = 0$	$b_0 = 2$
$a_1 = 1$	$b_1 = \lambda_q$
$a_2 = \lambda_q$	$b_2 = \lambda_q^2 + 2$
$a_3 = \lambda_q^2 + 1$	$b_3 = \lambda_q^3 + 3\lambda_q$
$a_4 = \lambda_q^3 + 2\lambda_q$	$b_4 = \lambda_q^4 + 4\lambda_q^2 + 2$
$a_5 = \lambda_q^4 + 3\lambda_q^2 + 1$	$b_5 = \lambda_q^5 + 5\lambda_q^3 + 5\lambda_q$
$a_6 = \lambda_q^5 + 4\lambda_q^3 + 3\lambda_q$	$b_6 = \lambda_q^6 + 6\lambda_q^4 + 9\lambda_q^2 + 2$
$a_7 = \lambda_q^6 + 5\lambda_q^4 + 6\lambda_q^2 + 1$	$b_7 = \lambda_q^7 + 7\lambda_q^5 + 14\lambda_q^3 + 7\lambda_q$
$a_8 = \lambda_q^7 + 6\lambda_q^5 + 10\lambda_q^3 + 4\lambda_q$	$b_8 = \lambda_q^8 + 8\lambda_q^6 + 20\lambda_q^4 + 16\lambda_q^2 + 2$
$a_9 = \lambda_q^8 + 7\lambda_q^6 + 15\lambda_q^4 + 10\lambda_q^2 + 1$	$b_9 = \lambda_q^9 + 9\lambda_q^7 + 27\lambda_q^5 + 30\lambda_q^3 + 9\lambda_q$

a_k ve b_k dizilerinin polinom gösterimini bulmadan önce kullanacağımız bir özellik verelim [7].

$$\binom{k}{p} + 2\binom{k+1}{p-1} - \binom{k}{p-2} = \binom{k+2}{p} \tag{4.2.1}$$

ve

$$\binom{k}{p} + \binom{k-1}{p-1} = \binom{k-1}{p-1}\frac{p+k}{p} \tag{4.2.2}$$

4.2.1 Teorem: a_{2k} ve a_{2k+1} dizilerinin polinom gösterimi,

$$a_{2k}=\lambda_q^{2k-1}+\binom{2k-2}{1}\lambda_q^{2k-3}+\binom{2k-3}{2}\lambda_q^{2k-5}+\cdots+\binom{k+2}{k-3}\lambda_q^{3}+\binom{k+1}{k-2}\lambda_q$$

ve

$$a_{2k+1}=\lambda_q^{2k}+(2k-1)\lambda_q^{2k-2}+\binom{2k-2}{1}\frac{2k-3}{2}\lambda_q^{2k-4}+\binom{2k-3}{2}\frac{2k-5}{3}\lambda_q^{2k-6}$$
$$+\cdots+\binom{k+1}{k-2}\frac{3}{k-1}\lambda_q^{2}+1$$

şeklinde tanımlanır.

İspat: İspatı tümevarım ile yapalım ve ilk olarak a_{2k} dizisinin polinom gösterimini ispatlayalım.

$k=1$ için $a_2=\lambda_q$ ve $k=2$ için $a_4=\lambda_q^3+2\lambda_q$ olduğundan $k=1$ ve $k=2$ için eşitlik sağlanır. Şimdi $k=1,2,\dots,n$ için eşitliğin sağlandığını varsayalım ve $k=n+1$ için eşitliğin sağlandığını gösterelim. Varsayımdan,

$$a_{2n}=\lambda_q^{2n-1}+\binom{2n-2}{1}\lambda_q^{2n-3}+\binom{2n-3}{2}\lambda_q^{2n-5}+\cdots+\binom{n+2}{n-3}\lambda_q^{3}+\binom{n+1}{n-2}\lambda_q$$

ve

$$a_{2n-2}=\lambda_q^{2n-3}+\binom{2n-4}{1}\lambda_q^{2n-5}+\binom{2n-5}{2}\lambda_q^{2n-7}+\cdots+\binom{n+1}{n-4}\lambda_q^{3}$$
$$+\binom{n}{n-3}\lambda_q$$

olur. 4.1.7 Önermeden,

$$a_{2(k+1)}=\left(\lambda_q^2+2\right)a_{2k}-a_{2k-2}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}a_{2(n+1)}&=\left(\lambda_q^2+2\right)\left[\lambda_q^{2n-1}+\binom{2n-2}{1}\lambda_q^{2n-3}+\binom{2n-3}{2}\lambda_q^{2n-5}+\cdots+\binom{n+2}{n-3}\lambda_q^{3}\right.\\&\quad\left.+\binom{n+1}{n-2}\lambda_q\right]-[\lambda_q^{2n-3}+\binom{2n-4}{1}\lambda_q^{2n-5}+\binom{2n-5}{2}\lambda_q^{2n-7}+\cdots\\&\quad+\binom{n+1}{n-4}\lambda_q^{3}+\binom{n}{n-3}\lambda_q\\&=\lambda_q^{2n+1}+\left[\binom{2n-2}{1}+2\right]\lambda_q^{2n-1}+\left[\binom{2n-3}{2}+2\binom{2n-2}{1}\right]\lambda_q^{2n-3}+\\&\quad\ldots+\left[\binom{n+1}{n-2}+2\binom{n+2}{n-3}\right]\lambda_q^{3}+2\binom{n+1}{n-2}\lambda_q\end{aligned}$$

olur. Burada 4.2.1 özelliği kullanılarak,

$$a_{2(n+1)}=\lambda_q^{2n+1}+\binom{2n}{1}\lambda_q^{2n-1}+\binom{2n-1}{2}\lambda_q^{2n-3}+\cdots+\binom{n+3}{n-2}\lambda_q^{3}+\binom{n+2}{n-1}\lambda_q$$

elde edilir. Böylece $k=n+1$ için eşitlik sağlanmış olur. Dolayısıyla a_{2k} dizisi için ispat biter.

Şimdi a_{2k+1} dizisinin polinom gösterimini ispatlayalım.

Tanımdan,

$$a_{2k+2} = \lambda_q a_{2k+1} + a_{2k}$$

olduğundan,

$$a_{2k+1} = \frac{1}{\lambda_q}(a_{2k+2} - a_{2k})$$

olur. Böylece

$$a_{2k+1} = \frac{1}{\lambda_q}\left[\left(\lambda_q^{2k+1} + \binom{2k}{1}\lambda_q^{2k-1} + \binom{2k-1}{1}\lambda_q^{2k-3} + \cdots + \binom{k+3}{k-2}\lambda_q^3 + \binom{k+2}{k-1}\lambda_q\right) - \left(\lambda_q^{2k-1} + \binom{2k-2}{1}\lambda_q^{2k-3} + \binom{2k-3}{2}\lambda_q^{2k-5} + \cdots + \binom{k+2}{k-3}\lambda_q^3 + \binom{k+1}{k-2}\lambda_q\right)\right]$$

olur. Burada 4.2.2 eşitliği kullanılarak,

$$a_{2k+1} = \lambda_q^{2k} + (2k-1)\lambda_q^{2k-2} + \binom{2k-2}{1}\frac{2k-3}{2}\lambda_q^{2k-4} + \binom{2k-3}{2}\frac{2k-5}{3}\lambda_q^{2k-6} + \cdots + \binom{k+1}{k-2}\frac{3}{k-1}\lambda_q^2 + 1$$

elde edilir ve böylece ispat biter.■

4.2.2 Teorem: b_{2k} ve b_{2k+1} dizilerinin polinom gösterimi,

$$b_{2k} = \lambda_q^{2k} + (2k)\lambda_q^{2k-2} + \binom{2k-3}{1}\frac{2k}{2}\lambda_q^{2k-4} + \binom{2k-4}{2}\frac{2k}{3}\lambda_q^{2k-6} + \cdots + \binom{k}{k-2}\frac{2k}{k-1}\lambda_q^2 + 2$$

ve

$$b_{2k+1} = \lambda_q^{2k+1} + (2k+1)\lambda_q^{2k-1} + \binom{2k-2}{1}\frac{2k+1}{2}\lambda_q^{2k-3} + \binom{2k-3}{2}\frac{2k+1}{3}\lambda_q^{2k-5} + \cdots + \binom{k+1}{k-2}\frac{2k+1}{k-1}\lambda_q$$

şeklinde tanımlanır.

İspat: 4.1.3 Önermeden,

$$b_{2k} = a_{2k-1} + a_{2k+1}$$

olduğundan,

$$b_{2k} = [\lambda_q^{2k-2} + (2k-3)\lambda_q^{2k-4} + \binom{2k-4}{1}\frac{2k-5}{2}\lambda_q^{2k-6} + \cdots + \binom{k}{k-3}\frac{3}{k-2}\lambda_q^2$$
$$+ 1] + [\lambda_q^{2k} + (2k-1)\lambda_q^{2k-2} + \binom{2k-2}{1}\frac{2k-3}{2}\lambda_q^{2k-4} + \cdots$$
$$+ \binom{k+1}{k-2}\frac{3}{k-1}\lambda_q^2 + 1]$$
$$= \lambda_q^{2k} + [1 + (2k-1)]\lambda_q^{2k-2} + \left[(2k-3) + \binom{2k-2}{1}\frac{2k-3}{2}\right]\lambda_q^{2k-4} + \cdots$$
$$+ \left[\binom{k}{k-3}\frac{3}{k-2}\right]\lambda_q^2 + 2$$

olur. Burada 4.2.2 özelliği kullanılırsa,

$$b_{2k} = \lambda_q^{2k} + (2k)\lambda_q^{2k-2} + \binom{2k-3}{1}\frac{2k}{2}\lambda_q^{2k-4} + \binom{2k-4}{2}\frac{2k}{3}\lambda_q^{2k-6} + \cdots$$
$$+ \binom{k}{k-2}\frac{2k}{k-1}\lambda_q^2 + 2$$

elde edilir.

Benzer şekilde,

$$b_{2k+1} = a_{2k} + a_{2k+2}$$

olduğundan

$$b_{2k+1} = \lambda_q^{2k+1} + (2k+1)\lambda_q^{2k-1} + \binom{2k-2}{1}\frac{2k+1}{2}\lambda_q^{2k-3}$$
$$+ \binom{2k-3}{2}\frac{2k+1}{3}\lambda_q^{2k-5} + \cdots + \binom{k+1}{k-2}\frac{2k+1}{k-1}\lambda_q$$

olduğu kolayca gösterilebilir.■

DeMoivre üreteç fonksiyonlarını kullanarak farklı bir yolla Fibonacci sayılarını elde etmiştir. Şimdi bu tekniğe benzer şekilde a_k ve b_k dizilerinin elde edilebileceğini gösterelim. Böylece a_k ve b_k dizilerinin hesaplanmasında yukarıdaki hesaplamalara da gerek kalmaz [8].

$$g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

diyelim. Bu durumda $g(x) - a_0x^0 - a_1x^1 = g(x) - x$ olur. Böylece

$$g(x) - x = \sum_{i=2}^{\infty} a_i x^i = \sum_{i=2}^{\infty} (\lambda_q a_{i-1} + a_{i-2}) x^i$$

$$= \sum_{i=2}^{\infty} \lambda_q a_{i-1} x^i + a_{i-2} x^i = x \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_q a_i x^i + x^2 \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

$$= x\lambda_q g(x) + x^2 g(x)$$

olduğundan,

$$g(x) - x = x\lambda_q g(x) + x^2 g(x)$$

olur. Buradan

$$g(x) = \frac{x}{1 - \lambda_q x - x^2} = \frac{x}{1 - (\alpha + \beta)x + (\alpha\beta)x^2} = \frac{x}{(1 - \alpha x)(1 - \beta x)}$$

$$= \frac{(\alpha - \beta)x}{(1 - \alpha x)(1 - \beta x)\sqrt{\lambda_q^2 + 4}}$$

$$= \frac{1 - \beta x}{(1 - \alpha x)(1 - \beta x)\sqrt{\lambda_q^2 + 4}} - \frac{1 - \alpha x}{(1 - \alpha x)(1 - \beta x)\sqrt{\lambda_q^2 + 4}}$$

$$= \frac{1}{(1 - \alpha x)\sqrt{\lambda_q^2 + 4}} - \frac{1}{(1 - \beta x)\sqrt{\lambda_q^2 + 4}}$$

elde edilir. Böylece a_k dizisi,

$$\frac{1}{1 - \alpha x}$$

ve

$$\frac{1}{1 - \beta x}$$

geometrik serinin toplamı olarak ifade edilebilir. Dolayısıyla

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_q^2 + 4}}(1 + \alpha x + \alpha^2 x^2 + \cdots) - \frac{1}{\sqrt{\lambda_q^2 + 4}}(1 + \beta x + \beta^2 x^2 + \cdots)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\lambda_q^2 + 4}}[(\alpha - \beta)x + (\alpha^2 - \beta^2)x^2 + \cdots]$$

şeklinde olur. Böylece x^k nin katsayısı

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_q^2 + 4}}(\alpha^k - \beta^k)$$

dir. Benzer şekilde,

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$$

diyelim. Bu durumda $f(x) - b_0 x^0 = f(x) - 2$ olur. Böylece

$$f(x) - 2 = \sum_{i=1}^{\infty} b_i x^i = \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_q b_{i-1} + b_{i-2}) x^i$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_q b_{i-1} x^i + b_{i-2} x^i = x \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_q b_i x^i + x^2 \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i - \lambda_q x$$

$$= x\lambda_q f(x) + x^2 f(x) - \lambda_q x$$

olduğundan,

$$f(x) - 2 = x\lambda_q f(x) + x^2 f(x) - \lambda_q x$$

olur. Buradan

$$f(x) = \frac{2 - \lambda_q x}{1 - \lambda_q x - x^2} = \frac{2 - \lambda_q x}{1 - (\alpha + \beta)x + (\alpha\beta)x^2} = \frac{2 - \lambda_q x}{(1 - \alpha x)(1 + \beta x)}$$

$$= \frac{A}{(1 - \alpha x)} + \frac{B}{(1 - \beta x)}$$

olur. O halde

$$A(1 - \beta x) + B(1 - \alpha x) = 2 - \lambda_q x$$

denklemi çözülürse,

$A = 1$ ve $B = 1$ bulunur. Böylece

$$f(x) = \frac{1}{(1 - \alpha x)} + \frac{1}{(1 - \beta x)}$$

elde edilir. Dolayısıyla b_k dizisi

$$\frac{1}{1 - \alpha x}$$

ve

$$\frac{1}{1 - \beta x}$$

geometrik serinin toplamı olarak ifade edilebilir.

Şimdi üreteç fonksiyonlarını kullanarak bazı sonuçları verelim.

$$g(x) = \frac{x}{1 - \lambda_q x - x^2} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

olduğundan

$$\frac{1}{1 - \lambda_q x - x^2} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{i-1}$$

olur. Eğer

$$x = \frac{1}{\lambda_q}$$

ise,

$$-\lambda_q^2 = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{1}{\lambda_q^{i-1}} \Rightarrow -\lambda_q = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{1}{\lambda_q^i}$$

elde edilir. Eğer

$$\frac{1}{1 - \lambda_q x - x^2} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{i-1}$$

eşitliğinde her iki tarafın türevi alınırsa başka bir toplamsal özellik elde edilir. Yani,

$$\frac{\lambda_q + 2x}{(1 - \lambda_q x - x^2)^2} = \sum_{i=0}^{\infty} (i-1) a_i x^{i-2}$$

olur. Eğer

$$x = \frac{1}{\lambda_q}$$

ise,

$$\left(\lambda_q^2 + 2\right)\lambda_q^3 = \sum_{i=0}^{\infty} (i-1) a_i \frac{1}{\lambda_q^{i-2}} \Rightarrow \left(\lambda_q^2 + 2\right)\lambda_q = \sum_{i=0}^{\infty} (i-1) a_i \frac{1}{\lambda_q^i}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} i a_i \frac{1}{\lambda_q^i} - \sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{1}{\lambda_q^i} = \sum_{i=0}^{\infty} i a_i \frac{1}{\lambda_q^i} + \lambda_q$$

$$\Rightarrow (\lambda_q^2 + 1)\lambda_q = \sum_{i=0}^{\infty} i a_i \frac{1}{\lambda_q^i}$$

olur. Benzer şekilde,

$$f(x) = \frac{2 - \lambda_q x}{1 - \lambda_q x - x^2} = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$$

olur. Eğer

$$x = \frac{1}{\lambda_q}$$

ise,

$$-\lambda_q^2 = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \frac{1}{\lambda_q^i}$$

olur. Eğer

$$f(x) = \frac{2 - \lambda_q x}{1 - \lambda_q x - x^2} = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$$

eşitliğinde her iki tarafın türevi alınırsa,

$$\frac{\lambda_q - 4x - \lambda_q x^2}{(1 - \lambda_q x - x^2)^2} = \sum_{i=0}^{\infty} i b_i x^{i-1}$$

olur. Eğer

$$x = \frac{1}{\lambda_q}$$

ise,

$$(\lambda_q^2 + 3){\lambda_q}^3 = \sum_{i=0}^{\infty} i b_i \frac{1}{\lambda_q^{i-1}} \Longrightarrow (\lambda_q^2 + 3){\lambda_q}^2 = \sum_{i=0}^{\infty} i b_i \frac{1}{\lambda_q^{i}}$$

olur.

Bir sonraki önerme daha karmaşık olan eşitliklerin Binet formülü ile kolayca ispatlanabileceğini gösterir. Ayrıca genelleştirilmiş Fibonacci dizilerinin indirgeme bağıntısı ile alt dizilerini anlamayı sağlar. Böylece bu önerme genelleştirilmiş Fibonacci dizisinin her k. terimi ile nasıl bağlantılı olduğunu gösterir.

4.2.1 Önerme: $a_{m+k} = b_k a_m + (-1)^{k+1} a_{m-k}$

İspat:

$$b_k a_m + (-1)^{k+1} a_{m-k}$$

$$= (\alpha^k + \beta^k) \frac{1}{\sqrt{\lambda_q^2 + 4}} (\alpha^m - \beta^m) + (-1)^{k+1} \frac{1}{\sqrt{\lambda_q^2 + 4}} (\alpha^{m-k} - \beta^{m-k})$$

$$= \frac{\alpha^{m+k} - \alpha^k \beta^m + \beta^k \alpha^m - \beta^{m+k}}{\sqrt{\lambda_q^2 + 4}} + \frac{(-1)^{k+1} \alpha^{m-k} - (-1)^{k+1} \beta^{m-k}}{\sqrt{\lambda_q^2 + 4}}$$

$$= \frac{\alpha^{m+k} - (-1)^k \beta^{m-k} + (-1)^k \alpha^{m-k} - \beta^{m+k} - (-1)^k \alpha^{m-k} + (-1)^k \beta^{m-k}}{\sqrt{\lambda_q^2 + 4}}$$

$$= \frac{\alpha^{m+k} - \beta^{m+k}}{\sqrt{\lambda_q^2 + 4}} = a_{m+k}$$

olur ve böylece ispat biter.■

Yukarıdaki önermede $k = 1$ ise $a_{m+1} = b_1 a_m + a_{m-1} = \lambda_q a_m + a_{m-1}$ ve $k = m$ ise $a_{2k} = a_k b_k$ olduğu açıktır.

Bu bölümde son olarak α ve β yı kullanarak bazı üst sınır özelliklerini verelim. Bu özellikler çok kullanılmamasına rağmen bu konuda çok araştırılmıştır.

4.2.2 Önerme: Her k için

$$a_k = \left\lfloor \frac{\alpha^k}{\sqrt{\lambda_q^2 + 4}} + \frac{\lambda_q}{2} \right\rfloor$$

dir.

İspat: Her k için

$$a_k = \frac{\alpha^k - \beta^k}{\alpha - \beta}$$

olduğundan,

$$\left| a_k - \frac{\alpha^k}{\sqrt{\lambda_q^2 + 4}} \right| = \left| \frac{\beta^k}{\sqrt{\lambda_q^2 + 4}} \right| < \frac{\lambda_q}{2}$$

elde edilir. ■

4.2.3 Önerme: Her $k \geq 2$ için

$$a_{k+1} = \left\lfloor \alpha a_k + \frac{\lambda_q}{2} \right\rfloor$$

dir.

İspat: Her $k \geq 2$ için,

$$|a_{k+1} - \alpha a_k| = \left| \frac{\alpha^{k+1} - \beta^{k+1}}{\sqrt{\lambda_q^2 + 4}} - \frac{\alpha^{k+1} - \alpha\beta^k}{\sqrt{\lambda_q^2 + 4}} \right| = \left| \frac{\beta^k(\alpha - \beta)}{\sqrt{\lambda_q^2 + 4}} \right| = |\beta^k| < \frac{\lambda_q}{2}$$

elde edilir. ■

4.2.4 Önerme: Her k için

$$b_k = \left\lfloor \alpha^k + \frac{\lambda_q}{2} \right\rfloor$$

dir.

İspat: Her k için $b_k = \alpha^k + \beta^k$ olduğundan,

$$|b_k - \alpha^k| = |\alpha^k + \beta^k - \alpha^k| = |\beta^k| < \frac{\lambda_q}{2}$$

elde edilir. ■

4.2.5 Önerme: Her $k \geq 2$ için

$$b_{k+1} = \left\lfloor \alpha b_k + \frac{\lambda_q \sqrt{\lambda_q^2 + 4}}{2} \right\rfloor$$

dir.

İspat: Her $k \geq 2$ için,

$$|b_{k+1} - \alpha b_k| = |\alpha^{k+1} + \beta^{k+1} - \alpha(\alpha^k + \beta^k)| = |\beta^k(\beta - \alpha)| = \left|\beta^k\left(-\sqrt{\lambda_q^2 + 4}\right)\right|$$

$$= \left|\sqrt{\lambda_q^2 + 4}\right| |\beta^k| < \frac{\lambda_q \sqrt{\lambda_q^2 + 4}}{2}$$

elde edilir. ■

5. SONUÇLAR

Bu çalışmada elde edilen sonuçlar 4. bölümde bulunmaktadır ve bunlar aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

Genişletilmiş Hecke gruplarından hareketle genelleştirilmiş Fibonacci ve genelleştirilmiş Lucas dizilerinin tanımları yapılmıştır. Daha sonra bu diziler ile ilgili bir takım özellikler verilmiştir ve bu dizilerden yeni dizilerin de elde edilebildiği gösterilmiştir. Ayrıca genelleştirilmiş Fibonacci ve genelleştirilmiş Lucas dizilerinin polinom şeklinde yazılabildiği gösterilmiştir ve bu diziler için bazı üst sınır özellikleri de verilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] Vajda, S., Fibonacci & Lucas Numbers, and the Golden Section, Halsted Press, New York, (1989).

[2] Horadam, A. F., A Generalized Fibonacci Sequence, Amer. Math. Monthly, (1961).

[3] Robbins, N., Beginning Number Theory, Wm. C. Brown Publishers, Oxford, (1993).

[4] Vorob 'yev, N.N., Fibonacci Numbers, Blaisdell, New York , (1961).

[5] Dunlap, R. A., The Golden Ratio and Fibonacci Numbers, World Scientific Pres, (1997).

[6] Şahin, R., Koruoğlu, Ö., "Generalized Sequences Related to the Extended Hecke Groups and an Application to the Extended Modular Group", Turk J. Math., 34, (2010), s. 325-332.

[7] Yılmaz, N., "On the Sequences Related to Fibonacci and Lucas Numbers", J. Korean Math. Soc., 42, (2005), No 1, s. 135-151.

[8] Renault, M., The Fibonacci Sequence Under Various Moduli, Master Thesis, Wake Forest University, (1996).

[9] Hogatt Jr., V. E., The Fibonacci and Lucas Numbers, Houghton Mifflin, Boston, (1969).

[10] Rosen, K., Elemantary Number Theory and Its Applications 3rd ed., Addison-Wesley, Reading Mass, (1992).

[11] Lucas, E., Theorie des Nombers , Blanchard, Paris, (1961).

[12] Şahin, R., Genişletilmiş Hecke Grupları, Doktora Tezi, Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Balıkesir, (2001).

[13] Koruoğlu, Ö., $\overline{H}(\lambda)$ ile $\overline{H}(\lambda_q)$ Genişletilmiş Hecke Gruplarının Bazı Normal Alt Grupları ve Sürekli Kesirler, Doktora Tezi, Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Balıkesir, (2005).

[14] Cangül, İ. N., Normal Subgroups of Hecke Groups, Ph. D. Thesis, Southampton University, (1993).

[15] Fraleigh, J. B., A First Course in Abstract Algebra, sixthed edition, Addison-Wesley Pub. Comp., (1974).

[16] Bayraktar, M., Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi, Atatürk Üniversitesi Yayınları, Erzurum, (1988).

[17] Hecke, E., “Über die Bestimmung Dirichletscher Reichen durch ihre Funktionalgleichungen”, Math. Ann., 112, (1936), s. 664-699.

[18] Yılmaz, N., Cangül, İ.N., “On the Group Structure and Parabolic Points of the Hecke Group $H(\lambda)$”, Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math., 51, (2002), s. 35-46.

[19] Jones, G. A., Thornton, J. S., “Automorphisms and Congrunce Subgroups of The Extended Modular Group”, J. London Math. Soc. (2), 34, (1986), s. 26-40.

[20] Coxeter, H. S. M., Moser, W. O. J., Generators and Relations For Discrete Groups, second ed., Springer-Verlad, Berlin-Göttingen-Heidelberg-New York, (1965).

[21] Şahin, R., İkikardeş, S., Sarıgedik, Z., “Some Properties of Generalized Fibonacci and Lucas Sequences Related to the Extended Hecke Groups”, yayıma gönderilmiştir.

[22] Edson, M., Yayenie, O., “A New Generalization of Fibonacci Sequence and Extended Binet’s Formula”, Integers 9, (2009), s. 639-654.