T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KOMPLEKS İNTERPOLASYON POLİNOMLARININ SİMETRİK FONKSİYON UZAYLARINDA YAKINSAKLIĞI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hüseyin KOÇ

Balıkesir, Mart 2011

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KOMPLEKS İNTERPOLASYON POLİNOMLARININ SİMETRİK FONKSİYON UZAYLARINDA YAKINSAKLIĞI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hüseyin KOÇ

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Ramazan AKGÜN

Sınav Tarihi: 01.03.2011

Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Daniyal M. İSRAFİLOV (BAÜ)

Doç. Dr. Ramazan AKGÜN (BAÜ) (Danışman)

Yrd. Doç. Dr. Yunus Emre YILDIRIR (BAÜ)

Balıkesir, Mart 2011

ÖZET

KOMPLEKS İNTERPOLASYON POLİNOMLARININ SİMETRİK FONKSİYON UZAYLARINDA YAKINSAKLIĞI

Hüseyin KOÇ

Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,

Matematik Anabilim Dalı

(Yüksek Lisans Tezi / Tez Danışmanı: Doç. Dr. Ramazan AKGÜN)

Balıkesir, 2011

Bu çalışma 3 bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, bazı temel tanım ve teoremler ile bazı fonksiyon sınıflarının tanımları verilmiştir. Ayrıca Simetrik Banach Fonksiyon Uzayı ve Simetrik Smirnov Uzayı tanımlanmıştır.

İkinci bölümde, kompleks interpolasyon polinom türleri verilmiş ve kompleks interpolasyon polinomlarının kompleks disklerde noktasal ve düzgün yakınsaklık problemleri ele alınmıştır.

Üçüncü bölümde ise Simetrik Smirnov Uzaylarında kompleks interpolasyon polinomlarının normda yakınsaklığı incelenmiştir. Özellikle Simetrik Smirnov Uzaylarında kompleks interpolasyon polinomlarının normda yakınsama hızı ile en iyi yaklaşımı veren cebirsel polinomunun normda yakınsama hızının eşit olduğu ispatlanır.

ANAHTAR KELİMELER: Lagrange, Hermite, Birkhoff İnterpolasyon Polinomu / Yaklaşım Hızı / Simetrik Smirnov Uzayı / Faber Polinomu / Sınırlı Rotasyonlu Eğri

ABSTRACT

CONVERGENCE OF INTERPOLATING POLYNOMIALS IN SYMMETRIC FUNCTION SPACES

Hüseyin KOÇ

Balikesir University, Institute of Science

Department of Mathematics

(M. Sc. Thesis/Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ramazan AKGÜN)

Balıkesir, 2011

This thesis consists of three chapters.

In the first chapter, some basic definitions and basic theorems with some function classes' definitions are given. Moreover, Symmetric Banach Function Space and Symmetric Smirnov Space are defined.

In the second chapter, types of complex interpolating polynomials are given and complex interpolating polynomials' pointwise and uniform convergence in complex discs are investigated.

In the third chapter, approximation by complex interpolating polynomials in Symmetric Smirnov Space is studied. Also it is proved that convergence rate of complex interpolating polynomials and convergence rate of best approximating algebric polynomials are the same in the norm of Symmetric Smirnov Spaces.

Key Words: Lagrange, Hermite, Birkhoff Interpolating Polynomials / Rate of Approximation / Symmetric Smirnov Space / Faber Polynomials / Curve Of Bounded

İÇİNDEKİLER **Sayfa**

SEMBOL LİSTESİ

Simge	**Adı**
C	Kompleks Düzlem
R	Gerçel sayılar kümesi
Γ	Kompleks düzlemde eğri
G	Sınırlı basit bağlantılı bölge
$D_\rho :=\ z \in \mathrm{C} : \lvert z \rvert \le \rho$	ρ yarıçaplı kapalı disk
$\Gamma_R =\ z \in \mathrm{C} :\ \lvert z \rvert = R$	R yarıçaplı çember
T_n	Trigonometrik polinom
F_n	n’nci Faber polinomu
$L^p(\Gamma)$	Γ üzerinde Lebesgue Uzayı
$E^p(G)$	Smirnov Sınıfı
$X(\Gamma)$	Banach Fonksiyon Uzayı
$E_X(G)$	Simetrik Smirnov Uzayı
$L_{n-1}(f;z)$	Lagrange interpolasyon polinomu
$h_{rn-1}(f;z)$	Hermite interpolasyon polinomu
$A_{rn-1}(f;z)$	$h_{rn-1}(f;z)$’nin kısmi toplamlarının ortalaması
$Q_{n-1}(f;z)$	En küçük kareler interpolasyon polinomu
$H^{\alpha,\beta}_{pn,rn}(f;z)$	Karışık Hermite interpolasyon polinomu
$B_n(f;z)$	Birkhoff interpolasyon polinomu
h.h.	Hemen hemen her yerde

ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitimine başlarken biraz ürkek, kuşkulu ve tedirgindim. Bu karışık duyguların sebebi lisans eğitiminden itibaren geçen uzun sürenin verdiği rehavetten yüksek lisans eğitimine dayanak olacak bilgilerimin eksikliğinden çekinmemden ve M.E.B.'de yıllardır öğretmenlik yaptığım halde bilimsel çalışmaların, bilim üretme yönüyle değil, sadece öğreticilik yönüyle ilgilendiğimdendi. Geçen zaman içerisinde ''Çalışarak başarılamayacak hiçbir şey yoktur'' ilkesiyle beni cesaretlendirmeye, eğitmeye çalışan; her sorum ve sorunumla ilgilenip çözen; her yol ayrımında sağduyusu ve deneyimini kullanıp yönlendiren; bu çalışmamda da engin matematik bilgisini ve deneyimini hiçbir zaman esirgemeyen; bilim öğrenmede ve üretmede rehberim, danışman hocam Doç. Dr. Ramazan AKGÜN'e gönülden teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans eğitimim süresince kendimi geliştirmemde büyük katkıları olan değerli hocalarım; Prof. Dr. Daniyal M. İSRAFİLOV, Doç. Dr. Ali GÜVEN ve Yrd. Doç. Dr. Yunus Emre YILDIRIR'a teşekkür ederim.

Lisans eğitimim boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen ağabeyim Ahmet KOÇ, ablam Emine BERBEROĞLU ve anne-babama sevgi ve saygılarımı sunar teşekkür ederim.

Yüksek lisans eğitimi yapmamda her zaman destek olan ve ailemle geçirdiğim zamanımın bir kısmını yüksek lisans dersleri ve teze ayırmamı sabırla karşılayıp hoşgörü gösteren meslektaşım, kızım Aybüke ile bu ay içinde doğacak oğlumun annesi, çok değerli eşim Şefika KOÇ'a teşekkürlerimi sunarım. Var olun…

Balıkesir, 2011 Hüseyin KOÇ

1. ÖN BİLGİLER

1.1 Temel Tanım ve Teoremler

1.1.1 Tanım: Bir f kompleks değerli fonksiyonu bir z_0 noktasının belli bir $D(z_0,\delta)$, $\delta>0$ komşuluğundaki bütün noktalarda diferansiyellenebiliyorsa f, z_0 ’da **analitiktir** denir. [1, s.89]

1.1.2 Tanım: $f_n : A \to \mathbb{C}$ olarak tanımlanmış (f_n) fonksiyon dizisi verilsin. Eğer her bir $z \in A$ için $f_n(z)$ kompleks değerli dizisi yakınsıyorsa, (f_n) fonksiyon dizisi **noktasal yakınsıyor** denir.

Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde bütün $z \in A$ noktaları ve her $n \geq n_0$ için $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ olacak biçimde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ doğal sayısı bulunabilirse (f_n) fonksiyon dizisi A üzerinde f fonksiyonuna **düzgün yakınsıyor** denir. [1, s.163-164]

1.1.3 Tanım: Bir f fonksiyonu bir S kümesi üzerinde tanımlı ve $z_0 \in S$ $(z_0 \in \mathbb{C}$ ya da $z_0 = \infty)$ noktası S ’nin bir yığılma noktası olsun. Eğer $f(z_0) \neq \infty$ ve $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ ise f, z_0 da **süreklidir** denir. [1, s.71]

1.1.4 Tanım : $[a,b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere sürekli bir

$$\Gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$$

fonksiyonuna kompleks düzlemde bir eğri denir. Burada $\Gamma(a)$ ve $\Gamma(b)$ noktalarına sırasıyla eğrinin **başlangıç** ve **bitim noktaları** denir. Bir Γ eğrisi verildiğinde $\Gamma(a) = \Gamma(b)$ ise Γ ya **kapalı eğri**; bir Γ eğrisi sadece $t_1 = t_2$ için $\Gamma(t_1) = \Gamma(t_2)$ oluyorsa Γ ya **Jordan eğrisi**; Γ' türevi var ve sürekli ise Γ ya **diferansiyellenebilir eğri**; diferansiyellenebilir bir Γ eğrisi için eğer $\Gamma' \neq 0$ oluyorsa Γ ya **düzgün eğri** denir. [1, s.112]

1.1.5 Tanım: $[a,b]\subset \mathrm{R}$ olmak üzere

$$\Gamma : z = z(t) = x(t) + iy(t)$$

sürekli eğrisi verilmiş olsun. Eğer n doğal sayısı için

$$t_1 = a < t_2 < t_3 < \ldots < t_{n+1} = b$$

koşulunu sağlayan $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_{n+1}$ değerlerinin keyfi bir dizisi için

$$\sum_{k=1}^{n} \left| z(t_{n+1}) - z(t_k) \right|$$

toplamı sınırlı ise Γ eğrisine **sonlu uzunluklu eğri** denir. Başka bir deyişle Γ eğrisini gösteren z fonksiyonu sınırlı değişimli ise Γ ya sonlu uzunluklu eğri denir. [2, s. 417]

1.1.6 Tanım: $z \in \Gamma$ ve $\varepsilon > 0$ için $\Gamma(z,\varepsilon) := \; t \in \Gamma : \left| t - z \right| < \varepsilon$ olsun. $\left| \Gamma(z,\varepsilon) \right|$, $\Gamma(z,\varepsilon)$ 'nun ölçüsünü göstersin. Sonlu uzunluklu Γ Jordan eğrisi için eğer

$$\sup_{\varepsilon>0} \sup_{z\in\Gamma} \frac{1}{\varepsilon} \left| \Gamma(z,\varepsilon) \right| < \infty$$

sağlanıyor ise Γ 'ya **Carleson eğrisi** denir. [3, s.2]

1.1.7 Tanım: Sonlu uzunluklu yönlendirilmiş bir γ eğrisi alalım. $S_{-}(z,\delta)$ z 'den başlayıp γ üzerinde saat yönünde ilerlerken oluşan yay uzunluğuna göre uzunluğu δ olan eğri parçasını gösterir. $S_{+}(z,\delta)$ ise z 'den başlayıp γ üzerinde saat yönünün tersinde ilerlerken oluşan yay uzunluğuna göre uzunluğu δ olan eğri parçasını gösterir.

Eğer γ düzgün bir eğri ve

$$\lim_{\delta\to 0}\left\{\int_{s_-(z,\delta)}\left|d_\varsigma \arg(\varsigma - z)\right| + \int_{s_+(z,\delta)}\left|d_\varsigma \arg(\varsigma - z)\right|\right\} = 0$$

yakınsaması $z\in\gamma$ ’ya göre düzgün ise γ ya VR **eğri** denir.[4]

L.Zhu ve L.Zhong ispatlamıştır ki VR olmayan düzgün bir eğri vardır.

Diğer taraftan, eğer γ ’ya teğet olan eğrinin $\theta(s)$ açısı, s yay uzunluğunun bir fonksiyonu olarak, γ boyunca

$$\int_0^\delta \frac{\omega(t)}{t}\,dt < \infty \ , \ \ \delta > 0$$

koşulunu sağlıyorsa γ VR eğridir [4]. Burada $\omega(t)$; $\theta(s)$ ’in süreklilik modülüdür.

1.1.8 Tanım: γ boyu L olan sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi olsun ve $z = z(t)$, $t\in \; 0, L$ γ ’nın yay uzunluğuna göre parametrik gösterimi olsun.

Eğer $\beta(t) := \arg z'(t)$, $0, L$ üzerinde sınırlı değişimli bir fonksiyon ise γ ’ya **sınırlı rotasyonlu** $\gamma\in BR$ **eğri** denir. $\int_\Gamma |d\beta(t)|$ değeri γ ’nın toplam rotasyonu olur.

Eğer $\gamma\in BR$ ise, γ ’nın her bir noktasında sağ ve sol teğetler vardır. Sınırlı rotasyonlu eğriler sınıfı yeterince geniştir. Örneğin, bir eğri parçalı konveks (köşe ya da sivri içerebilir) ise sınırlı rotasyonludur. [5, s.45]

Kolaylıkla görülebilir ki, her VR eğri (hatta parçalı VR eğri) BR eğrisidir.[4]

BR eğri, sivri veya köşe içerebileceğinden VR eğri olmayan (örneğin, uzayda bir dikdörtgen) bir BR eğri mevcuttur.

1.1.9 Tanım: Bir E kümesi için

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \ \text{ise} \\ 0, & x \notin E \ \text{ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan χ_E fonksiyonuna E kümesinin **karakteristik fonksiyonu** denir.

1.1.10 Tanım: $z_0, a_n \in \mathrm{C}$ sabitler olmak üzere

$$\sum_{0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

biçimindeki serilere **kuvvet serisi** denir. [1, s.175]

1.1.11 Tanım: $a_k, b_k \in \mathrm{R}$ ve $|a_n| + |b_n| > 0$ olmak üzere

$$t_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{1.1}$$

fonksiyonuna n dereceli bir **Trigonometrik polinom** denir.

$n = 0,1,2,...$ için derecesi n 'yi aşmayan bütün trigonometrik polinomların kümesini T_n ile göstereceğiz.

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \ \ c_k := \frac{1}{2}(a_k - ib_k), \ \ k = 1,2,... \qquad c_k := \frac{1}{2}(a_{-k} + ib_{-k}), \ \ k = -1,-2,...$$

alınırsa (1.1) serisi $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ biçiminde yazılabilir. Buna (1.1) serisinin kompleks biçimi denir.

1.1.13 Tanım: Kompleks düzlemde Γ ile sınırlı, basit bağlantılı bir G bölgesi verilsin. D, $z=\infty$ noktasını içeren $\bar{G}=G\cup\Gamma$ kapalı bölgesinin tümleyeni olan basit bağlantılı bölge olsun. Riemann Konform Dönüşüm Teoremine göre D bölgesini $|w|>1$ bölgesine konform ve ünivalent olarak dönüştüren $w=\phi(z)$ konform dönüşümü vardır ve

$$\phi(\infty)=\infty, \qquad \phi'(\infty)=\lim_{z\to\infty}\frac{\phi(z)}{z}=\gamma>0$$

koşulları altında ϕ konform dönüşümü tektir.

Bu koşul gösterir ki D bölgesinde $z=\infty$ noktası dışında analitik olan $w=\phi(z)$ fonksiyonu $z=\infty$ noktasında basit kutba sahiptir. Bu yüzden ϕ fonksiyonunun $z=\infty$ noktasının komşuluğunda Laurent açılımı vardır ve bu açılım

$$\phi(z)=\gamma.z+\gamma_0+\frac{\gamma_1}{z}+\frac{\gamma_2}{z^2}+...+\frac{\gamma_k}{z^k}+...$$

biçimindedir.

$\phi(z)$'nin açılımında pozitif kuvvetli bir tek z olmalıdır. Aksi halde $z\to\infty$ iken

$$\lim_{z\to\infty}\frac{\phi(z)}{z}=\infty$$

olur.

Negatif olmayan bir n tamsayısı için

$$\phi^n(z)=\left(\gamma.z+\gamma_0+\frac{\gamma_1}{z}+\frac{\gamma_2}{z^2}+...+\frac{\gamma_k}{z^k}+...\right)^n$$

$$=\gamma^n z^n+a_{n-1}{}^{(n)}.z^{n-1}+a_{n-2}{}^{(n)}.z^{n-2}+...+a_1{}^{(n)}.z+a_0{}^{(n)}$$

$$+\frac{b_1{}^{(n)}}{z}+\frac{b_2{}^{(n)}}{z^2}+...+\frac{b_k{}^{(n)}}{z^k}+...$$

olduğu görülmektedir.

Burada

$$F_n=\gamma^n z^n+a_{n-1}{}^{(n)}.z^{n-1}+a_{n-2}{}^{(n)}.z^{n-2}+...+a_1{}^{(n)}.z+a_0{}^{(n)}$$

polinomuna G bölgesi için $n.$ dereceden **Faber polinomu** denir.[6, s. 33-34]

1.1.14 Tanım: f fonksiyonu z_0 noktasında analitik ise bu noktanın bir komşuluğundaki z 'ler için geçerli olmak üzere

$$f(z)=\sum_0^\infty a_n(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^\infty\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

açılımı vardır. Bu kuvvet serisi $D(z_0,R)$ diski üzerinde mutlak yakınsar ve diskin kompakt alt kümeleri üzerinde yakınsama düzgündür. Taylor serisinin $n.$ kısmi toplamına **Taylor polinomu** denilir. [1,s.180]

1.1.15 Tanım: $[0,2\pi]$ 'de sürekli h fonksiyonunun **süreklilik modülü**

$$\omega(t,h):=\sup\ \left|h(t_1)-h(t_2)\right|:\ t_1,t_2\in[0,2\pi],\ \left|t_1-t_2\right|\le t\ ,\quad t\ge 0$$

olarak tanımlanır.

1.1.17 Tanım:

$$Hf \quad (z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z}d\varsigma, \qquad z \in G$$

şeklinde tanımlanan Cauchy integrali için $f \in L^1(\Gamma)$ 'nın Singuler Cauchy İntegrali

$$S_\Gamma f(z) := \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma\setminus\Gamma(z,\varepsilon)}\frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z}d\varsigma, \quad z \in \Gamma$$

ile tanımlanır.

$S_\Gamma : f \to S_\Gamma f$ lineer operatörü **Cauchy Singuler Operatörü** olarak adlandırılır.

1.1.18 Teorem (Cauchy İntegral Formülü) : G bir bölge ve Γ bu bölge içinde bir Jordan eğrisi olsun. Eğer a, Γ içinde bir nokta ve $f(z)$, G de analitik ise

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-a}dz$$

olur. [1,s.139]

1.1.19 Teorem (Cebirin Temel Teoremi) : Sabit olmayan

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0, \; a_n \neq 0$$

polinomunu sıfır yapan bir z_0 sayısı vardır. [1, s. 142]

1.2 Bazı Fonksiyon Sınıfları ve Fonksiyon Uzayları

1.2.1 Tanım: M : Γ da tanımlı Lebesgue ölçülebilir fonksiyonlar kümesi,

M^{+}: M nin $[0,\infty]$ aralığında değer alanlarının ailesi,

M_{0}: M deki fonksiyonlardan h.h. sonlu olanların ailesi,

M_{0}^{+}: M^{+} da olup h.h. sonlu olanların ailesi olarak tanımlanır.

1.2.2 Tanım: $f \in M_{0}(\Gamma)$, $g \in M_{0}(\Gamma)$ verilsin.

Bir f fonksiyonunun **dağılım fonksiyonu**

$$\mu_{f}(\lambda)=\mu\left\{x\in\Gamma : |f(x)|>\lambda\right\}, \qquad (\lambda\geq 0)$$

ile verilir. Eğer $\forall\lambda\geq 0$ için $\mu_{f}(\lambda)=\mu_{g}(\lambda)$ ise f ve g **eş ölçümlü fonksiyonlardır** denir. [7,s.36-37]

1.2.3 Tanım: Γ kompleks düzlemde bir Jordan eğrisi, M^{+} Lebesgue ölçülebilir $\rho:\Gamma\to[0,\infty]$ fonksiyonlar ailesi ve χ_{E} $E\subset\Gamma$'nın karakteristik fonksiyonu olsun.

Bir $\rho : M^{+}\to[0,\infty]$ dönüşümü, M^{+}daki tüm f, g, f_{n} $(n=1,2,...)$ fonksiyonları $\forall a\geq 0$ sabitleri ve Lebesgue ölçülebilir $E\subset\Gamma$ için aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa ρ'ya **Banach Fonksiyon Normu** denir.[7, s.2]

1) $\rho(f)=0 \Leftrightarrow f=0$ h.h., $\rho(af)=a\rho(f)$, $\rho(f+g)\leq\rho(f)+\rho(g)$,

2) $0\leq g\leq f$ h.h. ise $\rho(g)\leq\rho(f)$,

3) $0\leq f_{n}\uparrow f$ h.h. ise $\rho(f_{n})\uparrow\rho(f)$,

4) $\mu(E)<\infty$ ise $\rho(\chi_{E})<\infty$,

5) $\mu(E)<\infty$ ise $\exists\, c_{E}\in(0,\infty)$: $\int_{E}|f||dz|\leq c_{E}.\rho(f)$.

1.2.4 Tanım: ρ bir Banach Fonksiyon Normu olsun.

$$X(\Gamma) := \ f \in M : \ \rho(|f|) < \infty$$

fonksiyon sınıfına **Banach Fonksiyon Uzayı** denir.[7, s. 4] $X(\Gamma)$'ya ρ ile üretilen Banach Fonksiyon Uzayı diyeceğiz.

$X(\Gamma)$ üzerinde norm

$$\| f \|_{X(\Gamma)} := \rho(|f|), \quad f \in X(\Gamma)$$

ile verilir. Bu norma göre $X(\Gamma)$ bir Banach Uzayıdır.

1.2.5 Tanım: ρ bir Banach Fonksiyon Normu olsun**.**

$$\rho'(g) = \sup\left\{ \int_{\Gamma} |fg||dz| : f \in M^{+}, \ g(f) \le 1 \right\}, g \in M^{+}$$

fonksiyoneline ρ **'nun** **eşlenik normu** denir.[7, s.8]

1.2.6 Tanım: ρ' ρ nun eşlenik normu olsun. ρ' ile üretilen X' Banach Fonksiyon Uzayına **Eşlenik Banach Fonksiyon Uzayı** denir. Eşlenik Banach Fonksiyon Uzayında norm

$$\| f \|_{X(\Gamma)} = \sup\left\{ \int_{\Gamma} |fg||dz| : g \in X^{'}(\Gamma), \quad \|g\|_{X'(\Gamma)} \le 1 \right\},$$

$$\|g\|_{X'(\Gamma)} = \sup\left\{ \int_{\Gamma} |fg||dz| : f \in X(\Gamma), \quad \|g\|_{X(\Gamma)} \le 1 \right\}.$$

ile tanımlanır. [7, s. 9]

1.2.7 Tanım: Γ**,** C ’de bir Jordan eğrisi, $1\leq p<\infty$, olmak üzere Γ üzerinde tanımlı, kompleks değerli, mutlak değerinin p ’inci kuvveti Lebesgue anlamında integrallenebilen yani;

$$\int_{\Gamma}|u(z)|^{p}\,|dz|<\infty$$

eşitsizliğini sağlayan, ölçülebilir $u(z)$ fonksiyonların uzayı $L^{p}(\Gamma)$ ile gösterilir.

$1\leq p<\infty$ olmak üzere $L^{p}(\Gamma)$ üzerinde norm

$$\|u\|_{p}=\left(\int_{\Gamma}|u(z)|^{p}\,|dz|\right)^{1/p}$$

ile tanımlıdır. Bu norm ile $L^{p}(\Gamma)$ uzayı bir Banach uzayıdır.

1.2.8 Tanım: $\mathbf{D}:=\{z\in\mathbf{C}:|z|<1\}$ ve $G\in\mathrm{C}$ basit bağlantılı sınırlı bir bölge olsun. $\phi_{0}:\mathrm{D}\rightarrow G$ fonksiyonu

$$\phi_{0}(0)=0\ ,\quad \phi_{0}^{'}(0)>0$$

koşullarını sağlayan konform dönüşüm olsun. ϕ_{0} ’ın görüntüsü altında $|w|=r,\ 0<r<1$ çemberinin görüntüsü γ_{r} olsun.

G ’de analitik bir f fonksiyonunun eğer her $r\in(0,1)$ için

$$\int_{\gamma_{r}}|f(z)|^{p}\,|dz|\leq c<\infty$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f ’ye **Smirnov Uzayına** ait bir fonksiyondur denir. [6, s.77]

$E^p(G)$ 'deki $(1 < p < \infty)$ bütün fonksiyonlar Γ da teğetsel olmayan sınır değerlerine hemen hemen her yerde sahiptir ve sınır fonksiyonu $L^p(\Gamma)$ 'ya aittir.

$p > 1$ için $E^p(G)$

$$\| f \|_{E^p(G)} := \| f \|_{L^p(\Gamma)} := \left(\int_{\Gamma} | f(z) |^p \, |dz| \right)^{\frac{1}{p}} .$$

normuna göre Banach uzayıdır.

1.2.9 Tanım: Kompleks uzayda kapalı, Lebesgue uzunluk ölçüsü $|dz|$ ile tanımlı bir sonlu uzunluklu Γ Jordan eğrisi alalım. Eğer $M_0(\Gamma)$ uzayında alınan eş ölçümlü $\forall f, g$ fonksiyon çifti için $\rho(f) = \rho(g)$ oluyorsa ρ 'ya **Simetrik Banach Fonksiyon Normu** denir.

Simetrik Banach Fonksiyon Normu ile üretilen $X(\Gamma)$ Banach Fonksiyon Uzayına **Simetrik Banach Fonksiyon Uzayı** denir. [7, s.59]

1.2.10 Tanım: Kompleks uzayda kapalı, Lebesgue uzunluk ölçüsü $|dz|$ ile tanımlı bir sonlu uzunluklu Γ Jordan eğrisi alalım. Γ eğrisi uzayı 2 bölgeye ayırır. Bunlar $G := \operatorname{int}\Gamma$ ve $G^- := ext\Gamma$ olsun. Ayrıca, $\mathbf{T} := \partial\mathbf{D}$ ve $\mathbf{D}^- := ext\mathbf{T}$ olarak gösterelim.

$f : G \to \mathbf{C}$ analitik fonksiyonunun, (varsa) ∂G 'deki sınır değerlerinin oluşturduğu fonksiyonu f_x ile gösterelim.

$$E_X(G) := \ f : G \to \mathrm{C},\ f\ \ G'de\ analitik,\ f \in E^1(G), f_x \in X(\Gamma)$$

fonksiyon sınıfına **Simetrik Smirnov Uzayı** denir.[8]

1.2.11 Tanım: $f \in M_0$ olsun.

$$f^*(t) := \inf \ \ \lambda : \mu_f(\lambda) \le t \ \ , \quad t \ge 0$$

fonksiyonuna f 'nin **azalan rearrengement fonksiyonu** denir.[7, s.59]

Luxemburg gösterim teoremine göre [7, s.62-64] $(\mathbb{R}^+, dx)$ üzerinde öyle bir $\bar{\rho}$ Simetrik Banach Fonksiyon Normu vardır ki

$$\rho(f) = \bar{\rho}(f^*), \qquad f \in M_0^+$$

sağlanır.

$(\mathbb{R}^+, dx)$ üzerinde $\bar{\rho}$ ile üretilen Simetrik Banach Fonksiyon Uzayı $\bar{X}$ olsun.

$M_0(\mathbb{R}^+, dx)$ üzerinde

$$(E_x f)(t) := \begin{cases} f(xt), & xt \in [0, \mu(\mathbb{R})] \\ 0, & xt \notin [0, \mu(\mathbb{R})] \end{cases}, \qquad t > 0$$

operatörünü tanımlayalım. $\mathcal{B}(\bar{X})$, $\bar{X}$ üzerindeki sınırlı lineer operatörlerin Banach cebiri olmak üzere $\forall x > 0$ için $E_{1/x} \in \mathcal{B}(\bar{X})$ olur.[7, s.165]

$h_X(x)$ ile $E_{1/x}$ operatörünün operatör normunu gösterelim.

$$\alpha_X = \sup_{0<x<1} \frac{\log h_X(x)}{\log x}, \qquad \beta_X = \inf_{1<x<\infty} \frac{\log h_X(x)}{\log x}$$

sayılarına sırasıyla X 'in **alt ve üst Boyd indisleri** denir.[7, s.149]

Bu indisler için

$$0 \le \alpha_X \le \beta_X \le 1$$

sağlanır.

Eğer $0 < \alpha_X$ *ve* $\beta_X < 1$ oluyorsa Boyd indislerine **non-trivial** denir.

2. KOMPLEKS İNTERPOLASYON POLİNOMLARININ KOMPLEKS DİSKLERDE YAKINSAKLIĞI

Bu bölüm 4 kısımda ele alınacaktır. İlk kısımda interpolasyon polinomu tanımı [5,s.59] verilecek, diğer 3 kısımda ise kompleks interpolasyon polinom türleri ve kompleks interpolasyon polinomlarının kompleks disklerde yakınsaklık durumları incelenecektir. [9,s1-53]

2.1 İnterpolasyon Polinomu: z_k **'**lar farklı kompleks sayılar olmak üzere, eğer $n+1$ tane (z_k, ω_k) $(k = 0,1,...,n)$ kompleks sayı ikilisi verilmiş ise

$$p(z_k) = \omega_k \quad , \quad (k = 0,1,...,n) \tag{1.1}$$

koşulunu sağlayan derecesi en fazla n olan bir tek p polinomu vardır.

Bu polinomu elde etmenin bir yolu Lagrange interpolasyon formülüdür.

$$\omega(z) = \prod_{k=0}^{n} (z - z_k)$$

ve

$$l_k(z) = \frac{\omega(z)}{\omega'(z_k)(z - z_k)} \qquad (k = 0,1,...,n)$$

olsun.

Burada her bir $l_k(z)$ polinomunun derecesi n'dir ve

$$l_k(z) = \begin{cases} 1, & eğer\ j = k, \\ 0, & eğer\ j \neq k, \end{cases}$$

özelliği sağlanır.

Böylece n. dereceden

$$L_n(z)=\sum_{k=0}^{n}\omega_k l_k(z) \tag{1.2}$$

polinomu, (1.1) interpolasyon koşulunu sağlar.

f bir G bölgesinde analitik bir fonksiyon ve $z_k \in G$ $(k=0,1,...,n)$ interpolasyon noktaları olsun. Bu durumda interpolasyon polinomunun bir kompleks integral gösterimi vardır.

Farz edelim ki G 'nin ∂G sınırı sonlu tane pozitif yönlendirilmiş, sonlu uzunluklu Jordan eğrisinden oluşsun ve $\overline{G}$ 'da sürekli olsun.

Bu durumda interpolasyon problemi $p(z_k)=f(z_k)$ $(k=0,1,...,n)$ olur.

Bu problemdeki p polinomu,

$$L_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G}\frac{\omega(t)-\omega(z)}{t-z}.\frac{f(t)}{\omega(t)}dt \qquad (z\in G) \tag{1.3}$$

ile çözülür.

Böylece

$$f(z)-L_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G}\frac{\omega(z)}{\omega(t)}.\frac{f(t)}{t-z}dt \qquad (z\in G) \tag{1.4}$$

olur.

Kolayca görülür ki, (1.3) n dereceli bir polinomu gösterir.

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G}\frac{f(t)}{t-z}dt$$

olduğundan (1.4) ifadesi (1.3)'ten çıkar. (1.4)'ten

$$f(z)-L_n(z)=\omega(z).h(z)$$

eşitliliği elde edilir. Burada h G 'de analitik bir fonksiyondur.

Buradan

$$f(z_k)=L_n(z_k) \quad k=0,1,...,n$$

olur.

(1.3) bağıntısı interpolasyon polinomunun Hermite gösterimidir ve (1.4) ise interpolasyon hatasının bir integral gösterimidir.

Eğer z_k 'lardan bazıları (örneğin m tanesi) çakışıyorsa, o zaman ''m-katlı interpolasyon'' elde edilir. Bunun anlamı $f-L_n$ 'in ilgili noktada m. dereceden sıfır yerinin olmasıdır. (1.3) ve (1.4) formülleri bu durumda da geçerlidir.

Sonuç: G_j $j=1,2,...,n$ bölgeleri yukarıda açıklanan bölgeler gibi olmak üzere, eğer $G=G_1\cup G_2\cup ...\cup G_N$ ise (1.3) ve (1.4) formülleri geçerliliğini korur.

2.2 Lagrange İnterpolasyonu ve Walsh Eşyakınsaması

Açık bir D bölgesinde analitik ve bu bölgenin sınırında sürekli olan bir $f(z)$ fonksiyonu alalım. Ayrıca n pozitif bir tamsayı ve $z_1, z_{2,\ldots,} z_n$ D'de ikişerli farklı noktalar olsun.

$L_{n-1}(f;z)$ ile $f(z)$'nin n sıfırına göre oluşturulan derecesi $n-1$'i geçmeyen tek olarak belirli Lagrange interpolasyon polinomunu gösterelim.

$$\omega_n(z) := \prod_{k=1}^{n}(z-z_k)$$

gösterimi ile bu polinom

$$L_{n-1}(f;z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\omega_n(t)-\omega_n(z)}{\omega_n(t)}.\frac{f(t)}{t-z}dt$$

biçiminde yazılabilir.

Burada Γ D'de $z_1, z_{2,\ldots,} z_n$ noktalarını içeren sonlu uzunluklu Jordan eğrisidir ve z Γ ile sınırlanmış sonlu bölgenin içindedir. Bu polinom $n-1$ derecelidir ve Cauchy teoreminden

$$L_{n-1}(f;z_k) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(t)}{t-z_k}dt = f(z_k)\ , \quad (k=1,2,\ldots,n)$$

sağlanır.

Bu interpolasyon polinomunun tekliği cebirin temel teoreminden çıkar. Eğer birbirinden farklı iki polinom bulunsaydı; bunların farkları derecesi $n-1$'i aşmayan, sıfıra özdeş olmayan bir polinom olarak n noktada sıfır olacaktır ki bu mümkün değildir.

Biz bu çalışmada çoğunlukla $\omega_n(z) = z^n - 1$ durumunu yani interpolasyon noktalarının birimin $n.$ kökü olması durumunu ele alacağız.

1884'te Meray, öyle bir fonksiyon örneği vermiştir ki birimin $n.$ köklerine göre oluşturulan Lagrange interpolasyon polinomu 1 noktası hariç hiçbir yerde o fonksiyona yakınsamaz.

Böylece, eğer

$$f(z) = 1/z$$

olursa

$$L_{n-1}(f;z) = z^{n-1}$$

$n-1$ dereceli polinomu $z^n - 1$'in sıfırlarında $f(z)$ ile çakışır.

$|z| > 1$ için $\lim\limits_{n\to\infty} z^{n-1}$ mevcut değildir.

$|z| < 1$ için $\lim\limits_{n\to\infty} z^{n-1} = 0$.

$|z| = 1,\ \ z \neq 1$ olduğunda ise $z^n - 1$ ıraksaktır ve böylece $L_{n-1}(f;z)$ polinomu $f(z) = z^{-1}$'e sadece 1 noktasında yakınsar.

$f(z) = z^{-k},\ \ k > 0$ için de aynı şeyler geçerlidir.

$|z| \leq 1$ kapalı birim diskinde analitik f fonksiyonu verildiğinde $z_k,\ |z_k| = 1,\ k = 1,...,n$ noktaları ile oluşturulan Lagrange interpolasyon polinomunun $|z| \leq 1$ de f 'ye düzgün yakınsayanlar için z_k noktalarının

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left|z-z_k\right|^{\frac{1}{n}}=\left|z\right| \quad , \quad \left|z\right|>1 \qquad (1.0)$$

koşulunu sağlaması gerekir. (Birimin $n.$ kökleri için bu koşul açıkça sağlanır.)

Analitik olmayan fonksiyonlar için aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 2.2.1: $f(z)$ $\Gamma := z:\left|z\right|=1$ birim çemberinde tanımlanmış ve sürekli (ya da Riemann integrallenebilir) olsun. $L_{n-1}(f;z)$ z^n-1 in köklerine göre oluşturulan f 'nin Lagrange interpolasyon polinomu ise

$$\lim_{n\to\infty}L_{n-1}(f;z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(t)}{t-z}dt \quad , \quad \left|z\right|<1 \qquad (1.1)$$

yakınsaması $\left|z\right|\le\delta<1$ için düzgündür.

İspat: $\omega_n=\exp 2\pi i/n$ olsun. Lagrange interpolasyon polinomu

$$L_{n-1}(f;z)=\sum_{k=1}^{n}f(\omega_n^k).\frac{\omega_n^k(z^n-1)}{(z-\omega_n^k)n} \qquad (1.2)$$

gösterimine sahiptir.

Yani, her bir ω_n^k , z^n-1 polinomunun kökü olduğundan bu gerçekten derecesi en fazla $n-1$ olan bir polinomdur.

Dahası,

$$\lim_{z\to\omega_n^k}\frac{z^n-1}{z-\omega_n^k}=\begin{cases}0 & eğer\ \ j\neq k\\ \dfrac{n}{\omega_n^k} & eğer\ \ j=k\end{cases}$$

ve

$$L_{n-1}(f;\omega_n^k) = f(\omega_n^k),\ \ j=1,...,n$$

olur .

Riemann integralinin tanımından

$$F(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(t)}{t-z}dt = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n}\frac{f(\omega_n^k)(\omega_n^{k+1}-\omega_n^k)}{\omega_n^k - z},\qquad |z|<1 \qquad (1.3)$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} F(z) - L_n(f;z) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2\pi i} + \frac{z^n - 1}{n(\omega_n - 1)}\right]\sum_{k=1}^{n}\frac{\omega_n^k(\omega_n - 1)f(\omega_n^k)}{\omega_n^k - z}$$

çıkar.

$\lim\limits_{n\to\infty} n(\omega_n - 1) = 2\pi i$ olduğundan $|z|<1$ için (1.1) elde edilir. $|z| \le \delta < 1$ için yakınsamanın düzgünlüğü yine son formülden görülür.

Eğer $f(z)$; $|z|<1$ de analitik ve $|z|=1$ de sürekliyse $f(z)=F(z)$ olur.

Bu sonucu diğer operatörlere genişletebilmek için şu sonucu verelim.

Önerme 2.1: $f(z)$, Γ üzerinde Riemann integrallenebilir ve $L_{n-1}(f;z)$, $z^n - 1$’in sıfırlarına göre f in Lagrange interpolasyon polinomu olsun. Negatif olmayan herhangi bir p tamsayısı için,

$$\lim_{n\to\infty} L_{n-1}^{(p)}(f;z) = \frac{p!}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(t)}{(t-z)^{p+1}}dt, \quad |z|<1 \tag{1.4}$$

yakınsaması $|z| \le \delta < 1$ de düzgündür.

İspat:

$$L_{n-1}(f;z) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\omega_n^k).\sum_{j=0}^{n-1}\omega_n^{-kj}z^j$$

eşitliğinin p defa z 'ye göre türevini alırsak;

$$L_{n-1}^{(p)}(f;z) = \frac{p!}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(\omega_n^k)\omega_n^k}{(\omega_n^k - z)^{p+1}} - \frac{z^n}{n}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}(n)_k z^{-k}(p-k)!\sum_{k=0}^{n-2}\frac{f(\omega_n^\ell)\omega^\ell}{(\omega_n^\ell - z)^{p-k+1}} \tag{1.5}$$

elde edilir. Burada $(n)_k = n(n-1)...(n-k+1)$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(\omega_n^k)(\omega_n^k)}{(\omega_n^k - z)^{p-k+1}} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(t)}{(t-z)^{p-k+1}}dt$$

olur ve her $k>0$ için $n\to\infty$ iken $|z|^n n^k \to 0$ yakınsaması $|z|\le\delta<1$ de düzgün olur. Böylece (1.4) (1.5) ten çıkar.

Teorem 2.2.2: Γ üzerinde $f^{(r-1)}(z)$ var olsun ve Riemann integrallenebilir olsun.

Eğer $h_{rn-1}(f;z)$

$$h_{rn-1}^{(j)}(f;\omega_n^k) = f^{(j)}(\omega_n^k), \quad k=0,...,n-1\ ;\ j=0,...,r-1 \tag{1.6}$$

koşullarını sağlayan f nin Hermite interpolasyon polinomu ise

$$\lim_{n\to\infty} h_{rn-1}(f;z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(t)}{t-z}dt, \quad |z|<1 \tag{1.7}$$

yakınsaması $|z| \le \delta < 1$ için düzgündür.

İspat: $r=1$ için teorem, Teorem 2.2.1 ile aynı olduğundan $r>1$ durumunu göz önüne almak yeterlidir. Her bir $P_{n,j}(f;z)$, derecesi en fazla $n-1$ olan bir polinom olmak üzere

$$h_{rn-1}(f;z) = L_{n-1}(f;z) + \sum_{j=1}^{r-1}(1-z^n)^j P_{n,j}(f;z) \tag{1.8}$$

alalım.

Böylece $|z|<1$ için

$$\lim_{n\to\infty} P_{n,j}(f;z) = 0, \quad j=1,...,r-1$$

olduğunu ispatlamak yeterlidir.

Ancak biz daha güçlü $|z|<1$ durumu için

$$\lim_{n\to\infty} P_{n,j}^{(\ell)}(f;z) = 0, \quad j=1,...,r-1, \quad \ell = 0,1,... \tag{1.9}$$

sonucunu ispatlayacağız.

Bunun için j üzerinde tümevarım uygulayalım. $j=1$ olsun. (1.8)'in $z=\omega_n^k$ noktasında türevini alarak

$$\omega_n h'_{rn-1}(f;\omega_n^k) = \omega_n f'(\omega_n^k) = \omega_n L'_{n-1}(f;\omega_n^k) - nP_{n,1}(f;\omega_n^k), \quad (k=0,1,...,n-1)$$

bulunur. Böylece

$$P_{n,1}(f;z)=\frac{1}{n}\left[zL_{n-1}^{'}(f;z)-L_{n-1}(zf^{'};z)\right] \tag{1.10}$$

elde edilir. Son eşitliğin ℓ kez türevini alırsak

$$P_{n,1}^{(\ell)}(f;z)=\frac{1}{n}\left[zL_{n-1}^{(\ell+1)}(f;z)+\ell L_{n-1}^{(\ell)}(f;z)-L_{n-1}^{(\ell)}(zf^{'};z)\right] \tag{1.11}$$

elde ederiz. Önerme 2.1 ile $j=1$ için (1.9)'un geçerli olduğunu görürüz.

Şimdi (1.9)'un j, $1\le j\le r-2$ için sağlandığını varsayalım.

(1.8)'den

$$\begin{aligned}\omega_n^{(j+1)k}h_{rn-1}^{(j+1)}(f;\omega_n^k)&=\omega_n^{(j+1)k}L_{n-1}^{(j+1)}(f;\omega_n^k)+(-1)^{j+1}(j+1)!\mathrm{n}^{j+1}\times P_{n,j+1}(f;\omega_n^k)\\&\quad+\omega_n^{(j+1)k}\sum_{\ell=1}^{j}\sum_{s=\ell}^{j+1}\binom{j+1}{s}\left(\frac{d^s}{dz^s}(1-z^n)^\ell\right)_{z=\omega_n^k}P_{n,\ell}^{(j+1-s)}(f;\omega_n^k)\\&\qquad(k=0,1,...,n-1)\end{aligned}$$

için (1.6) kullanılırsa

$$\begin{aligned}(-1)^{j+1}(j+1)!P_{n,j+1}(f;z)&=\frac{1}{n^{j+1}}L_{n-1}(z^{j+1}f^{(j+1)};z)-(\frac{z}{n})^{j+1}L_{n-1}^{(j+1)}(f;z)\\&\quad-\sum_{\ell=1}^{j}\sum_{s=j}^{r-1}\binom{j+1}{s}\frac{z^{j+1-s}}{n^{j+1}}P_{n,\ell}^{(j+1-s)}(f;z)\sum_{t=1}^{\ell}\binom{\ell}{t}(-1)^t(nt)_s.\end{aligned}$$

Son eşitliğin ℓ kez türevini alıp, tümevarım hipotezi uygulayarak ve Önerme 2.1 kullanılırsa (1.9)'un $j+1$ için geçerli olduğunu görürüz. Bu da ispatı bitirir.

Eğer biz

$$h_{rn-1}(f;z)=\sum_{k=0}^{rn-1}\gamma_k z^k$$

alırsak, buradan $h_{rn-1}(f;z)$'nin kısmi toplamlarının ortalamasını tanımlayabiliriz:

$$A_{rn-1}(f;z)=\frac{1}{rn}\sum_{j=0}^{rn-1}\sum_{k=0}^{j}\gamma_k z^k .$$

Teorem 2.2.3: Γ üzerinde $f^{(r-1)}$ var ve Riemann integrallenebilir olsun. $A_{rn-1}(f;z)$, (1.6)'yı sağlayan $f(z)$'nin Hermite interpolasyon polinomunun kısmi toplamlarının ortalaması olsun.

Bu durumda $|z|<1$ için

$$\lim_{n\to\infty} A_{rn-1}(f;z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(t)}{t-z}dt$$

olur ve $|z|\le\delta<1$ de bu yakınsama düzgün olur.

İspat: Toplamın sırası değiştirilerek

$$A_{rn-1}(f;z)=zL_{n-1}^{'}(f;z)+z\sum_{k=0}^{r-1}(rn-k)\gamma_k z^k=h_{rn-1}(f;z)-\frac{1}{nr}zh_{rn-1}^{'}(f;z)$$

yazarız. Şimdi (1.8)'den;

$$zh_{rn-1}^{'}(f;z)=zL_{n-1}^{'}(f;z)+z\sum_{k=0}^{r-1}(1-z^n)^j P_{n,j}^{'}(f;z)-nz^n\sum_{j=1}^{r-1}j(1-z^n)^{j-1}\times P_{n,j}(f;z).$$

olur.

Önerme 2.1 ve (1.8), (1.9) dan çıkar.

$$\lim_{n\to\infty} h_{rn-1}(f;z) - L_{n-1}(f;z) = 0, \quad |z|<1$$

eşitliği kullanılırsa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z}{n} h'_{rn-1}(f;z) = 0.$$

Teorem 2.2.1 göz önüne alınırsa Teorem 2.2.3'ün ispatı tamamlanır.

a. En Küçük Kareler İnterpolasyonu: $m \geq n$ için derecesi $\leq n-1$ olan $Q_{n-1}(f;z)$ polinomu

$$\min_{p(z)\in\pi_{n-1}} \left(\sum_{k=0}^{m-1} \left| f(\omega_m^k) - p(\omega_m^k) \right|^2 \right), \quad \omega_m^m = 1 \tag{2.1}$$

minimum problemini çözen tek olarak belirli polinom olsun.

Eğer $m = n$ ise $Q_{n-1}(f;z)$ birimin n. köklerine göre oluşturulan f 'nin Lagrange interpolasyon polinomudur.

Eğer $m > n$ ise $Q_{n-1}(f;z)$ ile $L_{m-1}(f;z)$ arasında bir bağlantı kurulabilir.

Daha kesin bir ifade ile eğer ;

$$L_{m-1}(f;z) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k z^k, \quad m > n$$

ise

$$Q_{n-1}(f;z) = \sum_{v=0}^{n-1} c_v z^v$$

olur.

Burada

$$c_v = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} f(\omega_n^k)\omega_m^{-vk}, \qquad v = 0,1,\dots,n-1. \tag{2.2}$$

$$L_{m-1}(f;z) = \frac{1}{m}\sum_{n=0}^{m-1}\frac{f(\omega_m^k)(z^m-1)\omega^k}{(z-\omega_m^k)}$$

sağlandığından $L_{m-1}(f;z)$'nin içindeki z^v nin katsayıları (2.2)'deki gibidir.

Eğer (2.1)'i minimize etmek istiyorsak;

$$p(z) = \sum_{v=0}^{n-1} p_v z^v$$

alırsak

$$\sum_{k=0}^{m-1}\left| f(\omega_m^k) - \sum_{v=0}^{n-1} p_v \omega_m^{kv}\right|^2$$

ifadesini minimize etmek için

$$\sum_{k=0}^{m-1}\left(f(\omega_m^k) - \sum_{v=0}^{n-1} p_v \omega_m^{vk}\right)\omega_m^{-\mu k} = 0 \qquad \mu = 0,1,\dots,n-1$$

diklik koşullarına ihtiyaç duyarız.

Böylece

$$\sum_{k=0}^{m-1} f(\omega_m^k)\omega_m^{-\mu k} = \sum_{\nu=0}^{m-1} p_\nu \sum_{k=0}^{m-1} \omega_m^{\nu k-\mu k} = mp_\mu$$

çıkar ve buradan da (2.2)’de $p_\mu = c_\mu$ elde edilir ve aranan çıkmış olur.

(2.2)’den $n \to \infty$ için

$$Q_{n-1}(f;z) = \frac{1}{m(\omega_m - 1)} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f(\omega_m^k)(\omega_m^{k+1} - \omega_m^k)}{\omega_m^k - z}$$

$$+ \frac{z^n}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f(\omega_m^k)\omega_m^{-(n-1)k}}{\omega_m^k - z} = S_1 + S_2.$$

$n \to \infty$ için $|S_2| = O\ |z|^n\ = o(1)$ yakınsaması $|z| \le \delta < 1$ de düzgündür.

$m > n$ ve $\lim_{n\to\infty} m(\omega_m - 1) = 2\pi i$ olduğundan

Teorem 2.2.4: Eğer $f(z)$, Γ üzerinde Riemann integrallenebilir ve $Q_{n-1}(f;z)$ (2.1)’i minimize eden tek olarak belirli polinom ise

$$\lim_{n\to\infty} Q_{n-1}(f;z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(t)}{t-z} dt, \qquad |z| < 1 \tag{2.3}$$

yakınsaması $|z| \le \delta < 1$ de düzgündür.

Yukarıdaki teoremlerin Laurent açılımı için benzerleri vardır.

Teorem 2.2.5: $f(z)$, Γ birim diski üzerinde Riemann integrallenebilir bir fonksiyon ve $Q_{n,m}(z)$’de z ve $\frac{1}{z}$’ye göre her biri için derecesi n olan $z^{2n+1} - 1$’in köklerine göre $f(z)$’nin interpolasyon polinomu olsun.

Eğer

$$q_n(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n, \qquad \tau_n(z^{-1}) = a_{-1}z^{-1} + a_{-2}z^{-2} + ... + a_{-n}z^{-n}$$

olmak üzere

$$Q_{n,n}(z) = q_n(z) + \tau_n(z^{-1})$$

ise

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} q_n(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\Gamma} \dfrac{f(t)}{t-z}dt, & |z|<1 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \tau_n(z^{-1}) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\Gamma} \dfrac{f(t)}{t-z}dt, & |z|>1 \end{cases} \tag{2.4}$$

olur ve yakınsama $\frac{1}{\delta} \le |z| \le \delta < 1$ de düzgündür.

Eğer $f(z)$, $\rho^{-1} < |z| < \rho, \ \ \rho > 1$ halkası içinde analitik ise (2.4) eşitliği sırasıyla $|z| < \rho$ ve $|z| > \frac{1}{\rho}$ için geçerli olur.

(2.4) eşitliğinde, sırasıyla $|z| < R < \rho$ ve $|z| \ge \frac{1}{R} > \frac{1}{\rho}$ için yakınsama düzgün olur. Dahası, $\frac{1}{\rho} < |z| < \rho$ için $q_n(z) + \tau_n(z^{-1}) \to f(z)$ ve $\frac{1}{R} \le |z| \le R < \rho$ de yakınsama düzgündür.

b. $\Gamma_\rho = \{z : |z| = \rho\}$ **İçindeki Analitik Fonksiyonlar:** Biz şimdi $\rho(\rho > 1)$ yarıçaplı disk içinde analitik ama Γ_ρ da analitik olmayan fonksiyonları göz önüne alacağız. Bu sınıftaki fonksiyonları A_ρ ile ifade edelim.

Eğer $f(z) \in A_\rho$ ve eğer $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ $f(z)$'nin kuvvet serisine açılımı ise sağ taraf $|z| < \rho$'de yakınsaktır ve

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|^{1/n} = \frac{1}{\rho}$$

olur.

Eğer $f(z) \in A_\rho$ ve $p_{n-1}(f;z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$ $f\,'in$ Taylor açılımı alınırsa o zaman $p_{n-1}(f;z)$ ifadesi $f(z)$'ye $|z| < \rho$ da yakınsar.

Benzer şekilde f nin $z^n - 1$'in sıfırlarına göre açılan $L_{n-1}(f;z)$ Lagrange interpolasyon polinomu sadece $|z| < \rho$'de $f(z)$'ye yakınsar.

$|z| < \rho^2$ den ise $L_{n-1}(f;z) - p_{n-1}(f;z)$ farkı 0'a yakınsar.

Teorem 2.2.6: $f(z) \in A_\rho$ $(\rho > 1)$ ve $L_{n-1}(f;z)$, f nin $z^n - 1$'in sıfırlarına göre Lagrange interpolasyon polinomu olsun.

$L_{n-1}(f;z)$ dizisi $|z| < \rho$ nun herhangi bir kapalı alt bölgesinde $f(z)$'ye yakınsar. Ayrıca, eğer $p_{n-1}(f;z)$, $f(z)$'nin Taylor serisinin $n-1$ dereceli kısmi toplamı ise

$$\lim_{n\to\infty} \left[L_{n-1}(f;z) - p_{n-1}(f;z) \right] = 0 \qquad (3.1)$$

$|z| < \rho^2$ nin her bir kapalı alt bölgesinde yakınsaması geçerli olur.

İspat: $R < \rho$ olmak üzere

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{f(t)}{t - z} dt$$

olduğundan

$$L_{n-1}(f;z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{f(t)(t^n - z^n)}{(t^n - 1)(t - z)} dt$$

sağlanır ve $|z| < R$ için

$$f(z) - L_{n-1}(f;z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{(z^n - 1) f(t)}{(t^n - 1)(t - z)} dt$$

olur.

Böylece

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| f(z) - L_{n-1}(f;z) \right|^{1/n} \leq \frac{|z|}{R}$$

elde edilir. Bu bize ($R < \rho$ keyfi alındığından) $|z| < \rho$ nun her kapalı alt bölgesinde yakınsamayı verir.

Benzer şekilde

$$L_{n-1}(f;z)-p_{n-1}(f;z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{(t^n-z^n)f(t)}{t^n(t^n-1)(t-z)}dt. \tag{3.2}$$

Böylece, $R<\rho$ için

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|L_{n-1}(f;z)-p_{n-1}(f;z)\right|^{1/n}\le\frac{\max\ R,|z|}{R^2}.$$

Sonuç buradan hemen elde edilir.

Burada ρ^2 en iyi sayıdır. Yani, $|z|=\rho^2$ üzerindeki herhangi bir z noktası için öyle bir $f(z)\in A_\rho$ fonksiyonu vardır ki (3.1) geçerli olmaz.

$f(z)=\dfrac{1}{z-\rho}$ fonksiyonu bu durum için klasik bir örnektir. Çünkü $|z|=\rho^2$ için

$$L_{n-1}(f;z)-p_{n-1}(f;z)=\frac{\rho^n-z^n}{\rho^n(\rho^n-1)(z-\rho)},\quad 1/(\rho-\rho^2).$$

Teorem 2.2.6'nın bazı genellemeleri de vardır.

$f(z)\in A_\rho$ fonksiyonunun Taylor seri açılımı $\sum_0^n a_k z^k$ olsun ve

$$p_{n-1,j}(f;z):=\sum_{k=0}^{n-1}a_{k+jn}z^k,\quad j=0,1,2,... \tag{3.3}$$

olsun.

Teorem 2.2.7: Eğer $f(z) \in A_\rho$ ve $\ell \geq 1$ herhangi bir tamsayı olsun. Bu durumda $\mu < \rho^{\ell+1}$ için

$$\lim_{n\to\infty} \max_{|z|\leq\mu} \left| L_{n-1}(f;z) - \sum_{j=0}^{\ell-1} p_{n-1,j}(f;z) \right|^{1/n} \leq \frac{\mu}{\rho^{\ell+1}} \tag{3.4}$$

olur. Yani $|z| \leq \mu < \rho^{\ell+1}$ için yakınsama düzgündür.

Ayrıca $|z| < \rho^{\ell+1}$ bölgesi bu durum için en iyi bölgedir. Yani, $|z_0| = \rho^{\ell+1}$ koşulunu sağlayan her z_0 için öyle bir $f_0(z) \in A_0$ vardır ki (3.4) $z = z_0$ için sağlanmaz.

Böylece, eğer $z_0 = \rho$ ve $f_0(z) = (\rho - z)^{-1}$ alınırsa

$$p_{n-1,j}(f_0, z) = \frac{\rho^n - z^n}{(\rho - z)\rho^{(j+1)n}}$$

ve

$$\sum_{j=0}^{\ell-1} p_{n-1,j}(f_0, z) = \frac{(\rho^n - z^n)(\rho^{\ell n} - 1)}{(\rho - z)\rho^{\ell n}(\rho^n - 1)}.$$

Kolayca görülebilir ki

$$\lim_{n\to\infty} \min_{|z|=\rho^{\ell+1}} \left| L_{n-1}(f_0;z) - \sum_{j=0}^{\ell-1} p_{n-1,j}(f_0;z) \right|^{1/n} \geq \frac{1}{\rho^{\ell+1} + \rho} > 0.$$

İspat: Teorem 2.2.6'nın ispatında olduğu gibi, (3.4)'ün sol tarafındaki farkı

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{f(t)(t^n - z^n)}{t^{\ell n}(t^n - 1)(t - z)} dt \tag{3.5}$$

eğrisel integrali ile belirtebiliriz.

$|t| = R$ ve $|z| \le \mu < R < \rho^{\ell+1} (\mu \ge \rho)$ için

$$\left| \frac{t^n - z^n}{t - z} \right| \le \frac{\mu^n + R^n}{R - \mu}.$$

Bundan dolayı yukarıdaki integralin modülü

$$\frac{MR(\mu^n + R^n)}{(R - \mu)(R^n - 1) R^{\ell n}}$$

ile üstten sınırlıdır. Burada $M := \max_{z \in \Gamma_R} |f(z)|$.

n. dereceden kök alınırsa istenen

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \left\{ \max_{|z| \le \mu} \left| L_{n-1}(f; z) - \sum_{j=0}^{\ell-1} p_{n-1,j}(f; z) \right| \right\}^{1/n} \le \frac{\mu}{R^{\ell+1}}$$

düzgün yakınsaması elde edilir. $\square$

(3.4)'te $\ell \to \infty$ alınırsa

$$L_{n-1,j}(f; z) = \sum_{j=0}^{\infty} p_{n-1,j}(f; z)$$

çıkar.

Böylece eğer

$$L_{n-1,j}(f;z)=\sum_{v=0}^{n-1}c_v z^v$$

ise

$$c_v=\sum_{\lambda=0}^{\infty}a_{v+\lambda n}$$

olduğu görülebilir.

Teorem 2.2.6 ve Teorem 2.2.7'de, sadece $|z|<\rho$ için $f(z)$'ye yakınsayan farkları ise daha geniş bölgelerde sıfıra yaklaşan iki interpolasyon metodunu karşılaştırdık. Bundan dolayı, yukarıdaki olgu genellikle ''maksimal yakınsama'' ya da ''eşyakınsama '' olarak adlandırılır.

$p_{n-1,j}(f;z)$ Taylor polinomunun $|z|\leq 1$'de $f(z)$'ye en iyi düzgün yaklaşımını veren $\overline{p}_{n-1,j}(f;z)$ polinomunun yerine konulup konulamayacağı sorusu akla gelebilir.

Eğer $f_0(z)=(\rho-z)^{-1}$ olursa bütün $n\geq 2$'ler için

$$\overline{p}_{n-1,j}(f_0;z)=\frac{\rho^{n-1}-z^{n-1}}{(\rho-z)\rho^{n-1}}+\frac{z^{n-1}}{(\rho^2-1)\rho^{n-2}}$$

olur. Buradan

$$L_{n-1}(f_0;z)-\overline{p}_{n-1,j}(f_0;z)=\frac{\rho^{n-1}-z^{n-1}}{(\rho-z)(\rho^n-1)\rho^{n-1}}-\frac{z^{n-1}(\rho^{n-2}-1)}{(\rho^n-1)(\rho^2-1)\rho^{n-2}}$$

ve

$$\bar{p}_{n-1,j}(f_0;z)-p_{n-1,j}(f_0;z)=\frac{1}{\rho(\rho^2-1)}\left(\frac{z}{\rho}\right)^{n-1}$$

farkı sadece $|z|<\rho$ için 0'a yakınsar.

''Eğer $f(z)\in A_\rho$ ve $D_\rho := \{z:|z|\le\rho\}$ içinde sürekliyse fonksiyon üzerine koyduğumuz bu ek koşul eşyakınsama bölgesini genişletir mi?'' sorusuna cevap olarak şu teorem verilebilir.

Teorem 2.2.8: $f(z)\in A_\rho \cap C(D_\rho)$ alalım. Bu durumda her bir ℓ pozitif tamsayısı ve $|z|\le\rho^{\ell+1}$ için

$$\lim_{n\to\infty}\left\{L_{n-1}(f;z)-\sum_{j=0}^{\ell-1}p_{n-1,j}(f;z)\right\}=0$$

yakınsaması $|z|\le\rho^{\ell+1}$ de düzgündür.

İspat: Her bir $f(z)\in A_\rho \cap C(D_\rho)$ için, $D_\rho := \{z:|z|\le\rho\}$ çember üzerinde f 'e π_{n-1} 'den en iyi yaklaşan polinom $s_{n-1}(f;z)$ olsun.

Buradan,

$$E_{n-1}(f):=\inf_{q\in\pi_{n-1}}\|f-q\|_{D_n}=\|f-s_{n-1}\|_{D_\rho}$$

olur.

Ayrıca $\lim_{n\to\infty}E_{n-1}(f)=0$ bilinmektedir.

Lagrange ve Taylor polinomlarının lineerliğinden

$$L_{n-1}(f;z)-\sum_{j=0}^{\ell-1} p_{n-1,j}(f;z)=L_{n-1}(f-s_{n-1};z)-\sum_{j=0}^{\ell-1} p_{n-1,j}(f-s_{n-1};z)$$

ve (3.4)'e göre $R<\rho$ için

$$L_{n-1}(f;z)-\sum_{j=0}^{\ell-1} p_{n-1,j}(f;z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{(f(t)-s_{n-1}(f;t)).(t^n-z^n)}{(t-z)(t^n-1)t^{\ell n}}dt$$

olur. Böylelikle

$$\max_{|z|\le\rho^{\ell+1}}\left|L_{n-1}(f;z)-\sum_{j=0}^{\ell-1} p_{n-1,j}(f;z)\right|\le\frac{E_{n-1}(f)(\rho^{n(\ell+1)}+R^n)R}{(\rho^{\ell+1}-R)(R^n-1)R^{\ell n}}$$

olur.

Sol taraf R 'den bağımsız olduğundan $R\to\rho$ için

$$\max_{|z|\le\rho^{\ell+1}}\left|L_{n-1}(f;z)-\sum_{j=0}^{\ell-1} p_{n-1,j}(f;z)\right|\le\frac{E_{n-1}(f)(1+\rho^{-n\ell})}{\rho^{\ell}(1-\rho^{-\ell})(1-\rho^{-n})}$$

elde edilir. Sağ taraf $n\to\infty$ iken 0'a yakınsadığından, bu bize sonucu verir. □

c. Walsh Teoreminin Bir Genişlemesi: (3.3)'teki

$$\sum_{j=0}^{\ell-1} p_{n-1,j}(f;z)$$

toplamının

$$p_{\ell n-1}(f;z)=\sum_{k=0}^{\ell n-1} a_k z^k$$

polinomunun birimin köklerine göre oluşturulan Lagrange interpolasyon polinomu olduğunu görelim.

$$p_{\ell n-1}(f;z)=\sum_{\lambda=0}^{\ell-1}\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+\lambda n} z^{k+\lambda n} = \sum_{\lambda=0}^{\ell-1}\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+\lambda n}(z^{\lambda n}-1)z^k = \sum_{\lambda=0}^{\ell-1}\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+\lambda n} z^k$$

olduğunda kolayca görülebilir.

Öyleyse

$$L_{n-1}(p_{\ell n-1};z)=\sum_{\lambda=0}^{\ell-1}\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+\lambda n} z^k = \sum_{\lambda=0}^{\ell-1} p_{n-1,\lambda}(f;z).$$

Bu basit gösterim ile (3.3)'teki formül $|z|<\rho^{\ell+1}$ için

$$\lim_{n\to\infty} L_{n-1}(f;z)-L_{n-1}(p_{\ell n-1}(f;z);z) = 0 \tag{4.1}$$

formu ile eş olur.

Eğer $L_{n-1}(f;\alpha,z)$ ile $\alpha\neq 0$ iken $z^n-\alpha^n$ in sıfırlarındaki Lagrange interpolasyon polinomunu ifade edersek ve $\alpha=0$ olduğunda, Hermite interpolasyonunda 0'da n konulursa (4.1) özellikle $|z|<\rho^{\ell+1}$ için

$$\lim_{n\to\infty} L_{n-1}(f;1,z)-L_{n-1}(L_{\ell n-1}(f;0,z);1,z) = 0$$

ifadesine eş olur.

Bu çalışmalar aşağıdakileri fazlasıyla haklı çıkarır.

Teorem 2.2.9: Eğer $m = rn + q$, $s \le \frac{q}{n} < 1$ ve $\frac{q}{n} = s + O\left(\frac{1}{n}\right)$ ise her bir

$f(z) \subset A_\rho$ ve her bir $\alpha, \beta \in D_\rho (\alpha \ne \beta)$ için $|z| < \sigma$ da

$$\lim_{n\to\infty} \Delta_{n,m}^{\alpha,\beta}(f;z) := \lim_{n\to\infty} L_{n-1}(f,\alpha,z) - L_{n-1}(L_{m-1}(f,\beta,z),\alpha,z) = 0. \qquad (4.2)$$

Burada

$$\sigma := \rho \Big/ \max\left(\left(\frac{|\alpha|}{\rho}\right)^r, \left(\frac{|\beta|}{\rho}\right)^{r+s}\right) \qquad (4.3)$$

Daha kesin ifadeyle, her $\mu \in (\rho, \infty)$ için

$$\lim_{n\to\infty} \max_{z\in D_\rho} \left|\Delta_{n,m}^{\alpha,\beta}(f;z)\right|^{1/n} \le \frac{\mu}{\sigma}.$$

Dahası $m = rn$ iken α, β ve m ne $\alpha = \beta = 0$ ne de $\alpha^r = \beta^r$ yi sağlamıyorsa (4.3) en iyi durumdur. Yani, $z_0 = \sigma$ yı sağlayan her z_0 için öyle bir $f_0 \in A_\rho$ vardır ki (4.2) z_0 'da sağlanmaz.

İspat: $\alpha, \beta \in D_\rho$ olduğunda

$$L_{m-1}(f,\alpha,\beta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{f(t)(t^m - z^m)}{(t^m - \beta^m)(t-z)} dt$$

yazabiliriz.

$L_{n-1}(L_{m-1}(f,\beta,z),\alpha,z)$ için benzer bir gösterim bulmak için

$$L_{n-1}\left(\frac{t^m - z^m}{t-z}, \alpha, z\right)$$

ifadesini değerlendirmek yeterlidir.

$m = rn + q$ olduğundan

$$\frac{t^m - z^m}{t-z} = \frac{t^{rn+q} - z^{rn+q}}{t-z}$$

$$= \frac{t^{nr} - z^{rn}}{t-z} t^q + z^{rn} \frac{t^q - z^q}{t-z}$$

$$= t^q . \frac{t^{rn} - z^{rn}}{t^n - z^n} . \frac{t^n - z^n}{t-z} + z^{rn} . \frac{t^q - z^q}{t-z} .$$

Buradan $(t^m - z^m)/(t-z)$ in $z^n - \alpha^n$ in köklerine göre oluşturulan Lagrange interpolasyon polinomu

$$L_{n-1}\left(\frac{t^m - z^m}{t-z}, \alpha, z\right) = t^q \left(\frac{t^{rn} - \alpha^{rn}}{t^n - \alpha^n}\right) \frac{t^n - z^n}{t-z} + \alpha^{rn} . \left(\frac{t^q - z^q}{t-z}\right), \quad q < n$$

olur.

Böylece

$$L_{n-1}(f, \alpha, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{f(t)(t^n - z^n)}{(t^n - \alpha^n)(t-z)} dt,$$

$$L_{n-1}(L_{m-1}(f, \beta, z), \alpha, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{f(t)}{t^m - \beta^m} L_{n-1}\left(\frac{(t^n - z^n)}{(t-z)}, \alpha, z\right) dt.$$

$$K(t,z):=\frac{1}{t^{rn+q}-\beta^{rn+q}}\left[t^{q}.\frac{t^{rn}-\alpha^{rn}}{t^{n}-\alpha^{n}}.\frac{t^{n}-z^{n}}{t-z}+\alpha^{rn}\frac{t^{q}-z^{q}}{t-z}\right]-\frac{t^{n}-z^{n}}{t^{n}-\alpha^{n}}.\frac{1}{t-z}$$

$$=\frac{\beta^{rn+q}-\alpha^{rn}.t^{q}}{(t^{rn+q}-\beta^{rn+q})(t^{n}-\alpha^{n})}.\frac{t^{n}-z^{n}}{t-z}+\frac{\alpha^{rn}}{t^{rn+q}-\beta^{rn+q}}.\frac{t^{q}-z^{q}}{t-z}$$

olmak üzere

$$\Delta_{n,m}^{\alpha,\beta}(f;z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} f(t)K(t,z)dt \tag{4.4}$$

bulunur.

$$\left|K(t,z)\right|\leq\frac{R^{n}-|z|^{n}}{R-|z|}.\frac{\max\left(|\beta|^{rn+q},|\alpha|^{rn}R^{q}\right)}{R^{rn+q}R^{n}}+c\frac{|\alpha|^{rn}}{R^{rn+q}}.\frac{R^{q}-|z|^{q}}{R-|z|},\qquad |z|<R$$

olduğunda eğer $q=sn+O(1)$ için

$$|z|^{n}\frac{\max\left(|\beta|^{rn+q},|\alpha|^{rn}R^{q}\right)}{R^{rn+q+n}}<1\quad \text{ve}\quad \frac{|z|^{q}|\alpha|^{rn}}{R^{rn+q}}<1$$

ise (4.2) ispatlanmış olur.

Başka bir ifadeyle yukarıda her iki tarafın n. dereceden kökünü alıp $n\to\infty$ alırsak, eğer

$$|z|<\rho\Big/\max\left(\left(\frac{|\beta|}{\rho}\right)^{r+s},\left(\frac{|\alpha|}{\rho}\right)^{r}\right)=:\sigma_1\quad \text{ve}\quad |z|<\rho\Big/\left(\frac{|\alpha|}{\rho}\right)^{r/s}=:\sigma$$

ise (4.2) ispatlanmış olur.

$\frac{|\alpha|}{\rho} < 1$ ve $s < 1$ olduğundan

$$\left(\frac{|\alpha|}{\rho}\right)^{r/s} > \left(\frac{|\alpha|}{\rho}\right)^{r}$$

olur ve böylece $\sigma_1 < \sigma$ olur ki bu da ispatı tamamlar. □

Sonuç: $m = rn + q$, $s \leq \frac{q}{n} < 1$ ve $\frac{q}{n} = s + O\left(\frac{1}{n}\right)$ alalım. Eğer $P_{n,m(n)}(f;z)$, $p(z) \in \pi_{n-1}$ polinomlarından $n-1$ dereceli

$$\sum_{k=0}^{m-1} \left| f(\beta\omega_m^k) - p(\beta\omega_m^k) \right|^2, \qquad \beta \in \mathrm{D}_\rho$$

toplamını en küçük yapan polinomu ise, buradan $|z| < \rho \Big/ \left(\frac{|\beta|}{\rho}\right)^{r+s}$ için

$$P_{n,m(n)}(f;z) - S_{n-1}(f;z) \to 0$$

ve $|z|$ nin yukarıdaki üst sınırı Teorem 2.2.9'daki anlamda en iyi sonuçtur.

Bu sonuç Teorem 2.2.8'de $\alpha = 0$, β=1 konularak ta bulunabilir.

d. Notlar

(a) (1.0)'ı sağlayan noktalara asimptotik olarak düzgün dağıtılmış noktalar denir.

(b) Maksimal yakınsama göz önüne alındığında, birimin kökleri haricinde başka noktalara göre oluşturulan Lagrange interpolasyonu ilk kez Brück tarafından ele alındı.

$$\omega_n^{\alpha}(z) := \frac{(z+\alpha)^{n+1} - (\alpha z + 1)^{n+1}}{1-\alpha^{n+1}} := \prod_{k=0}^{n} z - z_{kn}^{\alpha} \;, \qquad 0 < \alpha < 1 \tag{1}$$

$n+1$ dereceli monik polinom olsun.

Burada

$$z_{kn}^{\alpha} = \frac{\omega_{kn} - \alpha}{1 - \alpha\omega_{kn}}, \qquad \omega_{kn} := \exp\frac{2\pi i k}{n+1}, \qquad k = 0, \ldots, n. \tag{2}$$

Buradan $|z| > 1$ için

$$\lim_{n\to\infty} \omega_n^{\alpha}(z)^{\frac{1}{n+1}} = z + \alpha \tag{3}$$

çıkar. Böylece z_{kn}^{α} interpolasyon noktalarının asimptotik olarak düzgün dağıtılmış olmadığı ortaya çıkar.

Eğer $f(z)$ $K(R,\alpha) :=$ $z \in C : |z+\alpha| < R + \alpha$ de analitik, $L_n^{\alpha}(f;z)$ f 'nin $\omega_n^{\alpha}(z)$ noktalarına göre oluşturulan Lagrange interpolasyon polinomu ve

$S_n^{\alpha}(f;z) := \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ de f 'nin $-\alpha$ civarında Taylor açılımı ise

$$\lim_{n\to\infty}\left[L_n^{\alpha}(f;z) - S_n^{\alpha}(f;z)\right] = 0, \qquad z \in E_1(R,\alpha). \tag{4}$$

olur. Buradan

$$E_{\ell}(R,\alpha) := \left\{ z \in C : |z+\alpha| < (R+\alpha)\left(\frac{R+\alpha}{1+R\alpha}\right)^{\ell} \right\}, \quad \ell = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

dahası $\ell \geq 1$ tamsayısı için

$$\lim_{n\to\infty}\left[L_n^{\alpha}(f;z)-S_{\ell,n}(f;z)\right]=0, \quad z\in E_{\ell}(R,\alpha) \tag{6}$$

burada

$$S_{\ell n}^{\alpha}(f;z):=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{\ell-1}\sum_{m=0}^{j(n+1)}\binom{j(n+1)}{m}\alpha^{j(n+1)-m}(1-\alpha^2)^m a_{k+m}(z+\alpha)^k$$

$$-\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{\ell-1}\sum_{m=0}^{n-k+j(n+1)}\binom{n-k+j(n+1)}{m} \tag{7}$$

$$\times\alpha^{n-k+j(n+1)-m}(1-\alpha^2)^m a_{k+m}(1+\alpha z)^k.$$

2.3 Hermite İnterpolasyonu: Lagrange interpolasyonunun bir genellemesi olarak Hermite interpolasyon kavramını tanıtalım.

Bir D bölgesinde bir $f(z)$ analitik fonksiyonunu ele alalım. n ve r pozitif tamsayılar ve $z_0,...,z_{n-1}$ D'de ikişerli ayrık noktalar olsunlar.

$z_0,...,z_{n-1}$ noktalarına göre oluşturulan tek olarak belirli $h_{r,rn-1}(f;z)$ Hermite interpolasyon polinomu r mertebeli $rn-1$ dereceli bir polinomdur ve

$$h_{r,rn-1}^{(j)}(f;z_k)=f^{(j)}(z_k), \quad k=0,...,n-1\ ;\ j=0,...,r-1$$

özelliklerini sağlar.

$\omega_n(z):=\prod_{k=0}^{n-1}(z-z_k)$ alırsak Hermite interpolasyon polinomu

$$h_{r,rn-1}(f;z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\omega_n(t)^r-\omega_n(z)^r}{\omega_n(t)^r}\cdot\frac{f(t)}{t-z}dt \tag{1.0}$$

dır.

Burada Γ; z ile $z_1,...,z_n$ noktalarını içeren ve $\operatorname{int}\Gamma \subset D$ olan herhangi bir sonlu uzunluklu Jordan eğrisidir.

Gerçektende, (1.0) derecesi $rn-1$'i aşmayan polinomdur. Cauchy türev formülünden

$$h_{r,rn-1}^{(j)}(f;z_k)=\frac{(-1)^j j!}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(t)}{(t-z_k)^{j+1}}dt, \quad k=0,...,n-1\ ,\ j=0,...,r-1.$$

Bu polinomun tek olması, cebirin temel teoreminin bir sonucudur. Eğer biz yukarıdaki özellikleri sağlayan iki farklı polinomun varlığını düşünürsek, farkları sıfırdan farklı olan derecesi en fazla $rn-1$ olan bir polinom olurdu ve $z_0,...,z_{n-1}$ noktalarında $0.,1.,...,r-1$ nci türevleri sıfır olurdu. Böylelikle derecesi en fazla $rn-1$ olan bu farkın rn kökü var olurdu. Bu da imkânsızdır.

Şimdi $f\in A_\rho(\rho>1)$ ve $h_{r,rn-1}(f;z)$ f 'nin $(z^n-1)^r$ ye göre oluşturulan Hermite interpolasyon polinomu olsun.

Buradan $h_{r,rn-1}(f;z)\in\pi_{rn-1}$ olur ve ω birimin n. kökü olmak üzere

$$h_{rn-1}^{(j)}(f;\omega^k)=f^{(j)}(\omega^k), \quad j=0,...,r-1\ ;\ k=0,...,n-1 \tag{1.1}$$

sağlanır.

$\Gamma_R = t:|t|=R$, $R<\rho$ olmak üzere

$$h_{r,rn-1}(f;z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{(t^n-1)^r-(z^n-1)^r}{(t^n-1)^r}.\frac{f(t)}{t-z}dt \tag{1.2}$$

bilinmektedir.

Eğer $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ ise kısım 2.2'deki (3.3)'e göre

$$p_{rn-1,0}(f;z):=\sum_{k=0}^{rn-1} a_k z^k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{f(t)}{t-z}.\frac{t^{rn}-z^{rn}}{t^{rn}}dt \tag{1.3}$$

ifadesi orijin civarında f 'in $rn-1$ dereceli Taylor serisidir.

(1.2) ve (1.3)'ten

$$\Delta_{rn-1,1}(f;z):=h_{r,rn-1}(f;z)-p_{rn-1,0}(f;z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{f(t)K_n(t,z)}{t-z}dt \tag{1.4}$$

Burada

$$K_n(t,z):=\frac{z^{rn}}{t^{rn}}-\frac{(z^n-1)^r}{(t^n-1)^r} \tag{1.5}$$

dir.

$n\to\infty$ için $K_n(t,z)$ 'nin özelliklerini inceleyelim.

Önerme 2.2: $|t|>1$'i sağlayan bütün t 'ler için

$$\frac{z^r}{t^r}-\frac{(z-1)^r}{(t-1)^r}=\frac{t-z}{t^r}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\beta_{s,r}(z)}{t^s} \tag{1.6}$$

sağlanır. Burada $B_{s,r}(z)$ z 'ye göre $r-1$ dereceli bir polinomdur ve

$$B_{s,r}(z) := \sum_{k=0}^{r-1} \binom{r+s-1}{k} (z-1)^k \quad , \qquad s = 1,2,... \tag{1.7}$$

dır.

İspat: (1.7)'den

$$\begin{cases} \beta_{s+1,r}(z) - z\beta_{s,r}(z) & = -\binom{r+s-1}{s}(z-1)^r \\ \beta_{1,r}(z) & = z^r - (z-1)^r \end{cases} \tag{1.8}$$

kolaylıkla bulunur.

(1.6) ve (1.8) ile

$$\frac{z^r}{t^r} - \frac{(z-1)^r}{(t-1)^r} = \frac{z^r}{t^r} - (z-1)^r \left[\frac{1}{t^r} + \frac{1}{t^r} \sum_{k=1}^{\infty} \binom{r+k-1}{k} \frac{1}{t^k} \right]$$

$$= \frac{z^r - (z-1)^r}{t^r} - \frac{1}{t^r} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\binom{r+k-1}{k}(z-1)^r}{t^k}$$

$$= \frac{\beta_{1,r}(z)}{t^r} + \frac{1}{t^r} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_{k+1,r}(z) - z\beta_{k,r}(z)}{t^k}$$

$$= \frac{t-z}{t^{r+1}} \beta_{1,r}(z) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\beta_{k,r}(z)}{t^{r+k}} - z \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\beta_{k,r}(z)}{t^{r+k}}$$

$$= \frac{t-z}{t^r} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_{k,r}(z)}{t^k}. \qquad \square$$

Aşağıdaki iki Önerme $B_{j,r}(z)$ polinomları hakkında bazı değerlendirmeler içerir.

(1.7)'den

$$B_{j,r}(z) = \binom{r+j-1}{r} r \int_0^1 t^{j-1}(z-t)^{r-1}\,dt, \qquad j = 1,2,... \tag{1.9}$$

olur. Bu Beta fonksiyonu için Euler formülü yardımıyla kolayca elde edilebilir.

Önerme 2.3: Sadece r 'ye bağlı öyle bir sabit c_0 vardır ki

$$\left|B_{j,r}(z)\right| \le c_0 j^{r-1} \max\ 1,|z|^{r-1}\ , \qquad j = 1,2,... \tag{1.10}$$

değerlendirmesi doğru olur.

İspat: Eğer $|z| > 1$ ise, bir $t \in\ 0,1$ için

$$|z-t|^{r-1} \le (|z|+1)^{r-1} \le 2^{r-1}|z|^{r-1}.$$

Eğer $|z| < 1$ ise $0 \le t \le 1$ için

$$|z-t|^{r-1} \le 2^{r-1}.$$

Bu iki eşitsizlik sonucu verir.

Önerme 2.4: **(a)** Eğer $|z| > 1$ ise öyle $c_1 = c_1(r) > 0$ ve $N_1 = N_1(r,z)$ sabitleri vardır ki

$$c_1 j^{r-1}|z|^{n(r-1)} \le \left|\beta_{j,r}(z^n)\right|, \quad n \ge N_1 \tag{1.11}$$

olur.

(b) Eğer $|z|<1$ ise öyle $c_2 = c_2(r) > 0$ ve $N_2 = N_2(r, j, z)$ sabitleri vardır ki

$$c_2 j^{r-1} \leq \left|\beta_{j,r}(z^n)\right| \quad , \quad n \geq N_2 \tag{1.12}$$

olur.

(c) Eğer $\beta_{j,r}(z)$ 'nin birim diskte hiç kökü yoksa öyle bir $c_3 = c_3(r) > 0$ sabiti vardır ki $|z|=1$ için

$$c_3 \leq \left|\beta_{j,r}(z)\right| \tag{1.13}$$

sağlanır.

İspat: (a) (1.9) ve $|z|>1$ için

$$n \to \infty \quad \text{iken} \quad \int_0^1 t^{j-1}(1-tz^{-n})^{r-1}dt \to \frac{1}{j}$$

olduğu göz önüne alınırsa (1.11) elde edilir.

(b) (1.9)'dan $|z|<1$, $z^n \to 0$ ve $n \to \infty$ için

$$\beta_{j,r}(0) = (-1)^{r-1}\binom{r+j-2}{r-1} \neq 0$$

bulunur. Bu ise (1.12)'yi verir.

(c) Eğer $\beta_{j,r}(z)$ 'nin birim diskte hiç sıfırı yoksa , (1.13)'teki c_3 sabiti

$\inf\limits_{|\omega|=1} \left|\beta_{j,r}(\omega)\right| > 0$ olarak alınabilir.

$\beta_{j,r}(z)$ nin $|z|=1$'de sıfırları olacak şekilde j ve r değerleri vardır. Böylece $j=1$ olduğunda, r 6'nın bir katı olduğunda $\beta_{j,r}(z) = z^r - (z-1)^r$ nin $|z|=1$'de bir sıfırı olur.

Herhangi bir $\ell \geq 1$ pozitif tamsayısı için;

$$\Delta_{rn-1,\ell}(f;z) := h_{r,rn-1}(f;z) - h_{r,rn-1,0}(f;z) - \sum_{j=1}^{\ell-1} h_{r,rn-1,j}(f;z) \tag{1.14}$$

Burada

$$h_{r,rn-1,0}(f;z) := p_{rn-1,0}(f;z) = \sum_{k=0}^{rn-1} a_k z^k$$

dır.

$\Gamma_R = \{z : |z| = R\}$ olmak üzere

$$h_{r,rn-1,j}(f;z) := \beta_{jr}(z^n) \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+n(r+j-1)} z^k$$

$$= \beta_{j,r}(z^n) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{f(t)}{t-z} \cdot \frac{t^n - z^n}{t^{n(r+j)}} dt \qquad j = 1, 2, \ldots,$$

ve böylece

$$\Delta_{rn-1,\ell}(f;z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{f(t) K(t,z)}{t-z} dt \tag{1.15}$$

elde edilir. Burada

$$K(t,z):=\frac{z^{rn}}{t^{rn}}-\frac{(z^n-1)^r}{(t^n-1)^r}-\frac{t^n-z^n}{t^{rn}}\sum_{j=1}^{\ell-1}\frac{\beta_{j,r}(z^n)}{t^{jn}} \tag{1.16}$$

dır.

Teorem 2.3.1: Eğer $f\in A_\rho(\rho>1)$ ise herhangi sabit bir $t\geq 1$ için

$$\lim_{n\to\infty}\Delta_{rn-1,\ell}(f;z)=0\ , \qquad |z|<\rho^{1+\frac{\ell}{r}} \tag{1.17}$$

yakınsaması $|z|\leq R<\rho^{1+\frac{\ell}{r}}$ de düzgündür. (1.17)'de $|z|\leq\rho^{1+\frac{\ell}{r}}$ en iyi sonuçtur.

İspat: (1.16)'daki $K(t,z)$ çekirdeğini

$$K(t,z)=\frac{t^n-z^n}{t^{rn}}\sum_{j=\ell}^{\infty}\frac{\beta_{j,r}(z^n)}{t^{jn}} \tag{1.18}$$

olarak yazabiliriz.

(1.15) ve (1.18)'den

$$\left|\Delta_{rn-1,\ell}(f;z)\right|\leq\frac{1}{2\pi}M\,2\pi R\,\frac{|z|^n-R^n}{R^{rn}\ \ |z|-R}\sum_{j=\ell}^{\infty}\frac{\left|\beta_{j,r}(z^n)\right|}{R^{jn}}$$

$$\leq\frac{MR\ \ |z|^n-R^n}{R^{rn}\ \ |z|-R}\sum_{j=\ell}^{\infty}\frac{c_1 j^{r-1}|z|^{n(r-1)}}{R^{jn}} \qquad (|z|<R)$$

Burada son eşitsizlikte Önerme 2.3 kullanıldı.

$R>1$ için

$$\sum_{j=\ell}^{\infty} j^{r-1}R^{-jn} < \infty$$

sağlandığından ve (1.17) ile

$$\left|\Delta_{rn-1,\ell}(f;z)\right| \le c\frac{|z|^{rn}}{R^{rn+\ell n}}$$

bulunur.

Uyarı: $p_j(f;z)$, f 'in j. dereceden Taylor açılımı olmak üzere eğer $\ell \ge 1$ ise $\Delta_{rn-1,\ell}(f;z)$ operatörü $f(z)-p_{(\ell+r-1)n-1}(f;z)$ farkının $(z^n-1)^r$ 'in köklerine göre oluşturulan Hermite interpolasyon polinomu alınabilir.

Eğer $(z^n-1)^r$ 'in sıfırlarına göre oluşturulan interpolasyonunu vurgulamak istediğimizde, $h_{r,rn-1}(f;1,z) := h_{r,rn-1}(f;z)$ yazarız ve

$$\Delta_{rn-1,\ell}(f;z) = h_{r,rn-1}(f;1,z) - h_{r,rn-1}(p_{(\ell+r-1)n-1}(f);1,z)$$

$$p_{(\ell+r-1)n-1}(f;z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{f(t)}{t-z}.\frac{t^{(\ell+r-1)n}-z^{(\ell+r-1)n}}{t^{(\ell+r-1)n}}dt\,,$$

olduğundan (1.15)'deki $\dfrac{K(t;z)}{t-z}$

$$\frac{(t^n-1)^r-(z^n-1)^r}{(t-z)(t^n-1)^r} - \frac{t^{(\ell+r-1)n}-z^{(\ell+r-1)n}}{(t-z)t^{(\ell+r-1)n}} = \left[\frac{z^{(\ell+r-1)n}}{t^{(\ell+r-1)n}} - \frac{(z^n-1)^r}{(t^n-1)^r}\right]\Big/(t-z)$$

farkının Hermite interpolasyon polinomu olur.

$$z^{n(\ell+r-1)} = (z^n - 1 + 1)^{(\ell+r-1)} = \sum_{j=0}^{r-1} \binom{\ell+r-1}{j} (z^n - 1)^j + (z^n - 1)^r q(z)$$

$$= \beta_{\ell,r}(z^n) + (z^n - 1)^r q(z)$$

sağlandığından

$$K(t,z) = \frac{(t^n - 1)^r \beta_{\ell,r}(z^n) - (z^n - 1)^r \beta_{\ell,r}(t^n)}{t^{(\ell+r-1)n}(t^n - 1)^r}.$$

Burada $q(z)$ z^n 'e göre $\ell - 1$ dereceli bir polinomdur.

$K(t,z)$, (1.18) ile karşılaştırıldığında aşağıdaki özdeşlik sağlanır.

$$\frac{t^n - z^n}{t^{rn}} \sum_{j=\ell}^{\infty} \frac{\beta_{\ell,r}(z^n)}{t^{jn}} = \frac{(t^n - 1)^r \beta_{\ell,r}(z^n) - (z^n - 1)^r \beta_{\ell,r}(t^n)}{t^{(\ell+r-1)n}(t^n - 1)^r} + \frac{(z^n - 1)^r (q(z) - q(t))}{t^{(\ell+r-1)n}} \qquad (1.19)$$

Bu özdeşlik $\ell = 1$ için kolayca elde edilebilir. Önerme 2.2'deki (1.6)'dan dolayı, (1.19)'daki sol taraf

$$\frac{z^{rn}}{t^{rn}} - \frac{(z^n - 1)^r}{(t^n - 1)^r} \qquad (1.20)$$

olur.

$\ell = 1$ için sağ taraf, (1.8)'i kullanarak

$$\frac{(t^n - 1)^r (z^{nr} - (z^n - 1)^r) - (z^n - 1)^r (t^{nr} - (t^n - 1)^r)}{t^{rn}(t^n - 1)^r}$$

olur.

$q(z)=q(t)=sabit$ olduğundan $\ell=1$ için (1.20)'yi verir.

Teorem 2.3.1'in Genellemesi: Öncelikle $(z^n-1)^r$ 'nin köklerine göre $g(z)=z^{j+(r+s)n},\ 0\le j\le n-1$ monomialinin Hermite interpolasyon polinomunu bulalım.

$q(z)$ bir polinom olmak üzere

$$g(z)=z^j(z^n-1+1)^{r+s}=z^j\sum_{k=0}^{r-1}\binom{r+s}{k}(z^n-1)^k+(z^n-1)^r q(z)$$

yazılabileceğinden

$$h_{r,rn-1}(g,1,z)=z^j\sum_{k=0}^{r-1}\binom{r+s}{k}(z^n-1)^k=z^j\beta_{s+1,r}(z^n).$$

Benzer şekilde, eğer $\alpha\in D_\rho$ olmak üzere $(z^n-\alpha^n)^r$ nin köklerine göre oluşturulan $g(z)$'nin Hermite interpolasyonun polinomunu bulabiliriz:

$$h_{r,rn-1}(g,\alpha,z)=z^j\alpha^{n(r+s)}\beta_{s+1,r}(z^n/\alpha^n). \tag{2.1}$$

Eğer $\alpha,\beta\in D_\rho$ ve α,β 'nın her ikisi de sıfıra eşit ise her $f\in A_\rho(\rho>1)$ ve $m,p,n,m\ge pn$ pozitif tamsayıları için

$$\Delta_{pn,rn}^{\alpha,\beta}(f;z):=h_{p,pn-1}(f;\alpha,z)-h_{p,pn-1}(L_{rn-1}(f;\beta,z);\alpha,z). \tag{2.2}$$

Teorem 2.3.2: Eğer $f \in A_{\rho}(\rho > 1)$ ve $\alpha, \beta \in D_{\rho}(\rho > 1)$ $|\alpha| + |\beta| \neq 0$ ise $|z| < \sigma$ için

$$\lim_{n \to \infty} \Delta_{pn,rn}^{\alpha,\beta}(f;z) = 0. \tag{2.3}$$

Burada

$$\sigma = p \Big/ \max\left\{ \left(\frac{|\alpha|}{\rho}\right)^{\frac{r+1-\rho}{\rho}}, \left(\frac{|\beta|}{\rho}\right)^{r/\rho} \right\} \tag{2.4}$$

olur ve $|z| \leq \tau < \sigma$ da yakınsama düzgündür. Ayrıca $|z| < \sigma$ en iyi sonucu verir.

İspat:

$$L_{rn-1}(f;\beta,z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{f(t)}{t-z} \cdot \frac{t^{rn} - z^{rn}}{t^{rn} - \beta^{rn}} dt$$

olduğundan $(z^n - \alpha^n)^p$ 'nin köklerine göre oluşturulan sıfırlarında $\Lambda(z)$ 'nin Hermite interpolasyon polinomu $K(t,z)$ olmak üzere, yani $K(t,z) = h_{p,pn-1}(\Lambda(\cdot);\alpha,z)$ ise

$$\Delta_{rn,pn}^{\alpha,\beta}(f;z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} f(t) K(t,z) dt. \tag{2.5}$$

Burada

$$\Lambda_{1,n}(z) = \frac{z^{rn}(t^n - \alpha^n)^p - (z^n - \alpha^n)^p t^{rn}}{(t-z)(t^n - \alpha^n)^p (t^{rn} - \beta^{rn})}$$

ve

$$\Lambda_{2,n}(z) = \frac{\beta^{rn}\left[(t^n-\alpha^n)^p-(z^n-\alpha^n)^p\right]}{(t-z)(t^n-\alpha^n)^p(t^{rn}-\beta^{rn})}$$

olmak üzere $\Lambda(z)$

$$\Lambda(z) = \frac{(t^n-\alpha^n)^p-(z^n-\alpha^n)^p}{(t-z)(t^n-\alpha^n)^p} - \frac{t^{rn}-z^{rn}}{t^{rn}-\beta^{rn}}.\frac{1}{t-z}$$

$$= \left[\frac{z^{rn}-\beta^{rn}}{t^{rn}-\beta^{rn}} - \frac{(z^n-\alpha^n)^p}{(t^n-\alpha^n)^p}\right] \Big/ (t-z) = \Lambda_{1,n}(z)-\Lambda_{2,n}(z)$$

dir.

$\Lambda_{2,n}(z)\in\pi_{np-1}$ olduğundan

$$h_{p,pn-1}(\Lambda_{2,n};\alpha,z) = \Lambda_{2,n}(z) \tag{2.6}$$

elde edilir.

(2.1)'den z^{rn} in Hermite interpolasyon polinomunu bulmak için z^{rn} yerine z^{rn} in $(z^n-\alpha^n)^p$ deki köklerine göre oluşturulan interpolasyon polinomu, yani $\alpha^{nr}\beta_{r-p+1,p}(z^n/\alpha^n)$ konulabilir.

Böylece

$$h_{p,pn-1}(\Lambda_{1,n};\alpha,z) = \frac{\alpha^{rn}\beta_{r-p+1,p}(\frac{z^n}{\alpha^n})(t^n-\alpha^n)^p - \alpha^{rn}\beta_{r-p+1,p}(\frac{t^n}{\alpha^n})(z^n-\alpha^n)^p}{(t-z)(t^{rn}-\beta^{rn})(t^n-\alpha^n)^p}. \tag{2.7}$$

(2.6) ve (2.7)'den

$$K(t,z) = h_{p,pn-1}(\Lambda_{1,n};\alpha,z) - \Lambda_{2,n}(z). \tag{2.8}$$

Büyük n 'ler için $\Lambda_{2,n}(z) = \dfrac{|z|^{np}\,|\beta|^{rn}}{|t|^{rn+np}} + O(1)$ olduğundan, eğer

$$|z| \le \rho \Big/ \left(\frac{|\beta|}{\rho}\right)^{r/p} \tag{2.9}$$

ise $n \to \infty$ için $\Lambda_{2,n}(z) \to 0$ olur.

Önerme 2.3'den, eğer

$$|z| < \frac{\rho}{\left(\dfrac{|\alpha|}{\rho}\right)^{\frac{r-p+1}{p}}} \tag{2.10}$$

ise $\beta_{r-p+1,p}(t^n/\alpha^n) \le C(\dfrac{|t|^n}{|\alpha|^n})^{p-1}$ sağlanır ve

$$\left|\frac{\alpha^{rn}\beta_{r-p+1,p}(t^n/\alpha^n)(z^n-\alpha^n)^p}{(t^{rn}-\beta^{rn})(t^n-\alpha^n)^p}\right| \le |\alpha|^{rn}\cdot\frac{|t|^{n(p-1)}}{|\alpha|^{n(p-1)}}\cdot\frac{|z|^{np}}{|t|^{rn+np}} \tag{2.11}$$

eşitsizliğinin sağ tarafı $n \to \infty$ için sıfıra gider.

Benzer şekilde eğer $|z| < \dfrac{\rho}{\left(\dfrac{|\alpha|}{\rho}\right)^{\frac{r-p+1}{p-1}}}$ ise $n \to \infty$ iken

$$\left|\frac{\alpha^{rn}\beta_{r-p+1,p}(z^n/\alpha^n)(t^n-\alpha^n)^p}{(t^{rn}-\beta^{rn})(t^n-\alpha^n)^p}\right| \le c|\alpha|^{rn}\frac{|z|^{n(p-1)}}{|\alpha|^{n(p-1)}|t|^{rn}} \tag{2.12}$$

eşitsizliğin sağ tarafı sıfıra gider.

(2.7), (2.10) ve (2.11) göz önüne alınırsa, eğer $n \to \infty$ iken

$$|z| \le \min\left(\frac{\rho}{\left(\frac{|\alpha|}{\rho}\right)^{\frac{r-p+1}{p-1}}}, \frac{\rho}{\left(\frac{|\alpha|}{\rho}\right)^{\frac{r-p+1}{p}}}\right) = \frac{\rho}{\left(\frac{|\alpha|}{\rho}\right)^{\frac{r-p+1}{p}}}. \tag{2.14}$$

$h_{p,pn-1}(\Lambda_{1,n};\alpha,z)$ $n \to \infty$ iken sıfıra gider.

(2.9) ve (2.14)'ü birleştirerek, (2.4)'ü elde ederiz ve ispat tamamlanır.

a. Karışık Hermite İnterpolasyonu: $1 \le p < r$ tamsayılar iken

$$H_{pn,rn}^{\alpha,\beta}(f;z) := h_{p,pn-1}(f;\alpha,z) - h_{p,pn-1}(h_{rn-1}(f;\beta,z);\alpha,z) \tag{3.1}$$

operatörünü göz önüne alalım.

Önceki bölümde olduğu gibi, $(z^n-\alpha^n)^p$ 'nin sıfırlarına göre oluşturulan $K_1(t,z)$ 'nin Hermite interpolasyon polinomu $K(t,z)$ olmak üzere

$$H_{pn,rn}^{\alpha,\beta}(f;z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} f(t)K(t,z)dt. \tag{3.2}$$

Burada

$$K_1(t,z)=\frac{(t^n-\alpha^n)^p-(z^n-\alpha^n)^p}{(t-z)(t^n-\alpha^n)^p}-\frac{(t^n-\beta^n)^r-(z^n-\beta^n)^r}{(t-z)(t^n-\beta^n)^r}$$

$$=\left[\frac{(z^n-\beta^n)^r}{(t^n-\beta^n)^r}-\frac{(z^n-\alpha^n)^p}{(t^n-\alpha^n)^p}\right]\frac{1}{t-z}.$$

$(z^n-\beta^n)^r=\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}(z^n-\alpha^n)^j(\alpha^n-\beta^n)^{r-j}$ olduğundan $(t^n-\beta^n)^r$ için benzer açılımı kullanırsak

$$K_1(t,z)=\left((t^n-\alpha^n)^p\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}(z^n-\alpha^n)^j(\alpha^n-\beta^n)^{r-j}\right.$$

$$\left.-(z^n-\alpha^n)^p\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}(t^n-\alpha^n)^j(\alpha^n-\beta^n)^{r-j}\right)$$

$$\Big/(t-z)(t^n-\beta^n)^r(t^n-\alpha^n)^p\ .$$

Buradan açıkça görülür ki;

$$K(t,z)=\sum_{j=0}^{p-1}\binom{r}{j}\frac{(\alpha^n-\beta^n)^{r-j}}{(t^n-\beta^n)^r}\frac{(t^n-\alpha^n)^{p-j}-(z^n-\alpha^n)^{p-j}}{(t-z)(t^n-\alpha^n)^{p-j}}(z^n-\alpha^n)^j. \qquad (3.3)$$

(3.3)'ün sağ tarafı derecesi $pn-1$ olan bir polinomdur ve $K(t,z)$ ile $K_1(t,z)$ 'nin $(z^n-\alpha^n)^p$ 'nin sıfırlarındaki değerleri eştir.

(3.3)'ten $|t|=R<\rho$ için

$$|K(t,z)|\le C.\max\left[\max_{1\le j\le p-1}\left\{\frac{\max(|\alpha|^n,|\beta|^n)^{r-j}|z|^{nj}}{R^{nr}}\right\},\right.$$

$$\max_{1\le j\le p-1}\left\{\frac{|z|^{np}\max(|\alpha|^{n},|\beta|^{n})^{r-j}}{R^{nr+n(p-j)}}\right\}\Bigg].$$

Bu eşitsizliğin sağ tarafı $|z|<\dfrac{R^{r/j}}{\max(|\alpha|,|\beta|)^{(r-j)/j}}$, $j=1,\dots,p-1$ ve

$|z|\le \dfrac{R^{\frac{r+p-j}{p}}}{\max(|\alpha|,|\beta|)^{\frac{r-p-j}{p}}}$ iken sıfıra gider.

Bu yüzden, eğer

$$|z|<\min\left\{\frac{RR^{(r-p+1)/p}}{\max(|\alpha|,|\beta|)^{\frac{r-p+1}{p}}},\ \min_{1\le j\le p-1}\frac{R^{r/j}}{\max(|\alpha|,|\beta|)^{\frac{r-j}{j}}}\right\}$$

$$=\min\left\{\frac{R}{\max\left(\frac{|\alpha|}{R},\frac{|\beta|}{R}\right)^{\frac{r-p+1}{p}}},\ \min_{1\le j\le p-1}\frac{R}{\max\left(\frac{|\alpha|}{R},\frac{|\beta|}{R}\right)^{\frac{r-j}{j}}}\right\}$$

ise (3.2) sıfıra yaklaşır.

$R\to\rho$ alınarak $z<\dfrac{\rho}{\left[\max\left(\frac{|\alpha|}{\rho},\frac{|\beta|}{\rho}\right)\right]^{\frac{r-p+1}{p}}}$ için $\lim\limits_{n\to\infty}H_{pn,rn}^{\alpha,\beta}(f;z)=0$ bulunur.

Böylelikle ispat tamamlanmış olur. $\square$

Teorem 2.3.3: Eğer $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta \in D_\rho$ ve eğer $f \in A_\rho (\rho > 1)$ ise $H^{\alpha,\beta}_{pn,rn}(f;z)$, $1 \leq p < r$ polinomu

$$|z| < \rho \Big/ \max \left\{ \frac{|\alpha|}{\rho}, \frac{|\beta|}{\rho} \right\}^{\frac{r-p+1}{p}}$$

iken $n \to \infty$ için sıfıra gider.

Benzer bir sonuç ise; eğer r, ℓ pozitif tamsayılar, $m = nq + c$, $q \geq r$ pozitif tamsayısı verilsin. Bu durumda

$$\Delta^{\alpha,\beta}_{rn-1,\ell,m}(f;z) := h_{r,rn-1}(f;\alpha,z) - h_{r,rn-1}(h_{\ell,\ell m-1}(f;\beta,z);\alpha,z) \tag{3.5}$$

tanımlayalım.

Teorem 2.3.4: r, ℓ, m pozitif tamsayıları $m = nq + c$, $q \geq r$ ve c sabit olsun. $z \in D_\sigma$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \Delta^{\alpha,\beta}_{rn-1,\ell,m}(f;z) = 0. \tag{3.6}$$

Burada

$$\sigma := \rho \Big/ \max \left\{ \left(\frac{|\beta|}{\rho} \right)^{\frac{\ell q}{r}}, \left(\frac{|\beta|}{\rho} \right)^{\frac{(\ell-1)q}{r}} \left(\frac{|\alpha|}{\rho} \right)^{\frac{q+1-r}{r}}, \left(\frac{|\alpha|}{\rho} \right)^{\frac{\ell q+1-r}{r}} \right\}. \tag{3.7}$$

Daha kesin ifade ile herhangi bir $\rho \leq \mu < \sigma$ için

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \max_{|z|=\rho} \left| \Delta^{\alpha,\beta}_{rn-1,\ell,m}(f;z) \right|^{1/rn} \leq \frac{\mu}{\sigma}.$$

$\alpha = 1,\ |\beta| < 1$ alınırsa kolayca görülebilir ki $\sigma = \rho^{\frac{\ell q+1}{r}}$ olur.

Eğer $\alpha = 1,\ \beta = 0,\ \ell = 1,\ m = nq$ ve $q = \ell^{'} + r - 1$ ise, Kısım 2.2'deki (3.3) ile verilen $p_{n-1,j}(f;z)$ ile

$$\lim_{n\to\infty}\left[h_{r,rn-1}(f;1,z) - \sum_{j=1}^{\ell'-1}\beta_{j,r}(z^n)p_{n-1,r+j-1}(f;z)\right] = 0,\quad |z| < \rho^{1+\frac{\ell'}{r}} \tag{3.8}$$

Teorem 2.3.4'ün ispatı aşağıdaki önermeler yardımıyla verilecektir.

Önerme 2.5: Herhangi bir $\alpha, \beta \in \mathrm{C}$ için; $Q_{\ell m - rn}(z) \in \pi_{\ell m - rn}$ olmak üzere

$$(z^m - \beta^m)^{\ell} = (z^n - \alpha^n)^r Q_{\ell m - rn}(z) + R_{\ell, rn-1}(z)$$

sağlanır. Burada $\beta_{s,r}(z)$ (1.7)'de tanımlıdır ve

$$R_{\ell,rn-1}(z) = (-\beta^m)^{\ell} + \sum_{n=1}^{\ell}\binom{\ell}{k}(-\beta^m)^{\ell-k} z^{kc}\alpha^{nqk}\beta_{qk-r+1,r}(z^n/\alpha^n) \tag{3.9}$$

olarak verilir.

İspat: Binom teoreminden

$$(z^m - \beta^m)^{\ell} = (-\beta^m)^{\ell} + \sum_{k=1}^{\ell}\binom{\ell}{k}(-\beta^m)^{\ell-k} z^{mk}.$$

$z^{mk} = z^{k(nq+c)} = z^{kc}(z^n)^{qk}$ ve $q > r$ olduğundan $q_k(z) \in \pi_{(k-r)n}$ olmak üzere

$$z^{nqk} = (z^n - \alpha^n + \alpha^n)^{qk} = \sum_{j=0}^{r-1} \binom{qk}{j} (z^n - \alpha^n)^j (\alpha^n)^{qk-j} + (z^n - \alpha^n)^r q_k(z)$$

$$= \alpha^{nqk} \beta_{qk-r+1,r}(z^n / \alpha^n) + (z^n - \alpha^n)^r q_k(z).$$

Buradan (3.9) hemen çıkar.

Önerme 2.6: (3.5)'teki $\Delta^{\alpha,\beta}_{rn-1,\ell,m}(f;z)$ operatörü aşağıdaki integral gösterimine sahiptir:

$$\Delta^{\alpha,\beta}_{rn-1,\ell,m}(f;z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} f(t) K(t,z) dt \,, \quad (1 < R < p)$$

Burada

$$K(t,z) = \frac{R_{\ell,rn-1}(z)(t^n - \alpha^n)^r - R_{\ell,rn-1}(t)(z^n - \alpha^n)^r}{(t-z)(t^m - \beta^m)^\ell (t^n - \alpha^n)^r}. \tag{3.10}$$

İspat: $h_{r,rn-1}$ lineer ve derecesi $\leq rn-1$ olan polinomlar ürettiğinden

$$\Delta^{\alpha,\beta}_{rn-1,\ell,m}(f;z) = h_{r,rn-1}(g;\alpha,z)$$

çıkar. Burada

$$g(z) = h_{r,rn-1}(f;\alpha,z) - h_{\ell,\ell m-1}(f;\beta,z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} f(t) K_1(t,z) dt$$

ve

$$K_1(t,z) = \left[\frac{(t^n - \alpha^n)^r - (z^n - \alpha^n)^r}{(t^n - \alpha^n)^r (t-z)} - \frac{(t^m - \beta^m)^\ell - (z^m - \beta^m)^\ell}{(t-z)(t^m - \beta^m)^\ell} \right]. \tag{3.11}$$

Böylece $K(t,z)$'yi bulmak için $(z^n-\alpha^n)^r$'in sıfırlarına göre (3.11)'deki $K_1(t,z)$ çekirdeğinin Hermite interpolasyon polinomunu bulmak gerekir.

Sadeleştirirsek

$$K_1(t,z)=\left[\frac{(z^m-\beta^m)^\ell}{(t^m-\beta^m)^\ell}-\frac{(z^n-\alpha^n)^r}{(t^n-\alpha^n)^r}\right]\Big/(t-z)$$

$$=\frac{(t^n-\alpha^n)^r(z^m-\beta^m)^\ell-(t^m-\beta^m)^\ell(z^n-\alpha^n)^r}{(t^n-\alpha^n)^r(t-z)(t^m-\beta^m)^\ell}$$

bulunur. Önerme 2.4'ten

$$(z^m-\beta^m)^\ell=(z^n-\alpha^n)^r Q_{\ell m-rn}(z)+R_{\ell,rn-1}(z)$$

ve

$$(t^m-\beta^m)^\ell=(t^n-\alpha^n)^r Q_{\ell m-rn}(z)+R_{\ell,rn-1}(t)$$

(3.10)'daki $K(t,z)$, z'ye göre derecesi $\leq rn-1$ olan polinom olduğundan ve $(z^n-\alpha^n)^r$'in sıfırlarında $K_1(t,z)$ ile çakıştığından (3.10)'daki $K(t,z)$'nin aranılan çekirdek olduğunu görürüz.

Teorem 2.3.4'ün İspatı: $R_{\ell,rn-1}(z)$ için (3.9)'u kullanılırsa $K_1(t,z)=K_2(t,z)+K_3(t,z)$ biçiminde yazılabilir:

$$K_2(t,z)=\frac{1}{(t-z)(t^m-\beta^m)^\ell}$$

$$\times\left\{(-\beta^m)^\ell+\sum_{k=1}^{\ell}\binom{\ell}{k}(-\beta^m)^{\ell-k}z^{kc}\alpha^{nqk}\beta_{qk-r+1,r}(z^n/\alpha^n)\right\}$$

$$K_3(t,z)=-\frac{(z^n-\alpha^n)^r}{(t-z)(t^n-\alpha^n)^r(t^m-\beta^m)^\ell} \tag{3.12}$$

$$\times\left\{(-\beta^m)^\ell+\sum_{k=1}^{\ell}\binom{\ell}{k}(-\beta^m)^{\ell-k}t^{kc}\alpha^{nqk}\beta_{qk-r+1,r}(z^n/\alpha^n)\right\}.$$

Eğer $n\to\infty$ için

(A) $$\frac{|z|^{nr}|\beta|^{m\ell}}{R^{m\ell+nr}} \text{ ve } \frac{|z|^{nr}|\beta|^{m(\ell-k)}|\alpha|^{nqk}\left(\frac{|R|^n}{|\alpha|^n}\right)^{r-1}}{R^{m\ell+nr}},\quad 1\le k\le\ell$$

sıfıra yakınsıyor ise $n\to\infty$ için $K_3(t,z)$ sıfıra gider.

Benzer şekilde

(B) $$\left(\frac{|z|}{|\alpha|}\right)^{n(r-1)}\frac{(|\beta|)^{m(\ell-k)}|\alpha|^{nqk}}{R^{\ell m}},\quad 1\le k\le\ell$$

ifadesi $n\to\infty$ iken sıfıra gidiyorsa ise $K_2(t,z)$ de sıfıra gider

$m=nq+c$ (c bir sabit) olduğundan eğer,

$$|z|<\min_{1\le k\le\ell}\left\{\frac{R}{\left(\frac{|\beta|}{R}\right)^{\frac{\ell q}{r}}},\frac{R}{\left(\frac{|\beta|}{R}\right)^{\frac{q(\ell-k)}{r}}}\left(\frac{|\alpha|}{R}\right)^{\frac{qk+1-r}{r}}\right\},\quad 1\le k\le\ell$$

ise, (A)'daki terimler sıfıra yaklaşır.

Eğer

$$|z| < \min_{1\le k\le \ell}\left\{\frac{R}{\left(\frac{|\beta|}{R}\right)^{\frac{q(\ell-k)}{r-1}}\left(\frac{|\alpha|}{R}\right)^{\frac{qk+1-r}{r-1}}}\right\}$$

ise (B)'deki terimler sıfıra gider.

$R\to\rho$ alarak, $n\to\infty$ iken, $|z|<\min(\sigma_1,\sigma_2)$ için $K(t,z)\to 0$ olduğu görülür. Burada

$$\sigma_1=\rho\Big/\max\left[\left(\frac{|\beta|}{\rho}\right)^{\frac{\ell q}{r}},\left(\frac{|\beta|}{\rho}\right)^{\frac{(\ell-1)q}{r}}\left(\frac{|\alpha|}{\rho}\right)^{\frac{q+1-r}{r}},\left(\frac{|\alpha|}{\rho}\right)^{\frac{\ell q+1-r}{r}}\right]$$

$$\sigma_2=\rho\Big/\max\left\{\left(\frac{|\beta|}{\rho}\right)^{\frac{(\ell-1)q}{r-1}}\left(\frac{|\alpha|}{\rho}\right)^{\frac{q+1-r}{r-1}},\left(\frac{|\alpha|}{\rho}\right)^{\frac{\ell q+1-r}{r-1}}\right\}..$$

$\sigma<\min(\sigma_1,\sigma_2)$ olduğundan sonuç çıkar.

b. ℓ_2**-Yaklaşım:** $f\in A_\rho(\rho>1)$ ve $0\ne\alpha\in D_\rho$ alalım. $m>n$ belirli pozitif tamsayılar iken ω 'yı birimin m. dereceden kökü alalım. Aşağıdaki koşulları sağlayan $P_{rm+n}(f;\alpha,z)\in\pi_{rm+n}$ polinomunu bulmaya çalışalım. $\forall f\in A_\rho$ için P_{rm+n}

$$P_{rm+n}^{(v)}(f;\alpha,\alpha\omega^k)=f^{(v)}(\alpha\omega^k),\quad k=0,1,...,m-1,\ v=0,1,...,r-1 \tag{4.1}$$

Hermite interpolasyon koşulunu sağlasın ve π_{rm+n} arasında

$$\sum_{k=0}^{m-1}\left|P_{rm+n}^{(r)}(f;\alpha,\alpha\omega^k)-f^{(r)}(\alpha\omega^k)\right|^2,\quad r\ge 0 \tag{4.2}$$

toplamını en küçük yapsın.

Eğer $L_{rm+n}(f;\beta,z)$, f 'in $z^{rm+n}-\beta^{rm+n}$ in sıfırlarına göre oluşturulan Lagrange interpolasyon polinomu ise şu teoremi verelim.

Teorem 2.3.5: Her bir $f\in A_\rho(\rho>1)$ için ve negatif olmayan her bir r tamsayısı için $P_{rm+n}(f;\alpha,z)$ (4.1) ve (4.2)'yi sağlasın.

Eğer, $0\le q:=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{m}\le 1$, $\alpha,\beta\in D_\rho$ ise

$$|z|<\sigma:=\frac{\rho}{\max\left\{\dfrac{|\beta|}{\rho},\dfrac{|\alpha|}{\rho}\right\}^{\frac{1}{r+q}}} \tag{4.3}$$

$$\lim_{n\to\infty} P_{rm+n}(f;\alpha,z)-L_{rm+n}(f;\beta,z) =0 \tag{4.4}$$

olur. (4.1)'den açık olarak görülebilir ki $P_{rm+n}(f;\alpha,z)$

$$P_{rm+n}(f;\alpha,z)=h_{rm-1}(f;\alpha,z)-(z^m-\alpha^m)^r Q_n(z)$$

formundadır. Burada $Q_n(z)$ (4.2) koşulu ile oluşturulacaktır.

Herhangi bir k pozitif tamsayısı için $(x)_0=1$ ve $(x)_k=x(x-1)...(x-k+1)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\frac{d^r}{dz^r}(z^m-\alpha^m)^r\Big|_{z=\alpha\omega^k}&=\alpha^{mr-r}\,\omega^{-kr}\sum_{v=0}^{r}(-1)^{r-v}\binom{r}{v}(mv)_r\\&=\alpha^{mr-r}\omega^{-kr}.m^r.r!\end{aligned} \tag{4.5}$$

(4.2)'deki minimum problemini çözmek için

$$\sum_{k=0}^{m-1}\left|g(\alpha\omega^k)-Q_n(\alpha\omega^k)\right|^2=\min_{p\in\pi_n}\sum_{k=0}^{m-1}\left|g(\alpha\omega^k)-p(\alpha\omega^k)\right|^2 \tag{4.6}$$

Burada

$$g(z):=\frac{z^r.\ h_{rm-1}^{(r)}(f;\alpha,z)-f^{(r)}(z)}{\alpha^{mr}m^r.r!}. \tag{4.7}$$

Önerme 2.7: (4.6)'daki $Q_n(z)\in\pi_n$ polinomunun açık ifadesi $1<R<p$ ve $\Gamma_R=\ z:|z|=R$ olmak üzere

$$Q_n(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{f(t)(t^{n+1}-z^{n+1})t^{m-n-1}}{t-z\ \ (t^m-\alpha^m)^{r+1}}dt \tag{4.8}$$

dir.

İspat: (4.6)'nın sağını minimize eden $Q_n(z)$ polinomu $z^m-\alpha^m$ in sıfırlarına göre oluşturulan $g(z)$'nin Lagrange interpolasyon polinomu yardımıyla elde edilir.

$L_{m-1}(g;\alpha,z)$ 'i bulmak için $g(\alpha\omega^k)$ 'yı hesaplayalım. Bunu yapmak için

$$K(t,z)=\frac{(z^m-\alpha^m)^r}{t-z}$$

olmak üzere

$$h_{r,rn-1}(f;\alpha,z)-f(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{f(t)}{(t^m-\alpha^m)^r}K(t,z)dt$$

bulunur.

$$z^r \frac{d^r}{dz^r} K(t,z)\Big|_{z=\alpha\omega^k} = \frac{m^r.r!\alpha^{mr}}{(t-\alpha\omega^k)}, \quad k=0,1,...,m-1$$

olduğundan

$$g(\alpha\omega^k) = \left[z^r \; h_{rn-1}^{(r)}(f;\alpha,z) - f^{(r)}(z)\;\right]_{z=\alpha\omega^k} \Big/ \alpha^{mr} m^r.r!$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{f(t)}{(t^m-\alpha^m)^r}\left[z^r \frac{d^r}{dz^r} K(t,z)\right]_{z=\alpha\omega^k} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{f(t)}{(t^m-\alpha^m)^r} \frac{1}{t-\alpha\omega^k} dt.$$

Böylece (4.8)'de verilen $Q_n(z)$ için

$$L_{m-1}(g;\alpha,z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{f(t)(t^m-z^m)}{(t-z)(t^m-\alpha^m)^{r+1}} dt$$

olur.

Teorem 2.3.5'in ispatı : Önerme 2.6'dan

$$P_{rm+n}(f;\alpha,z) - L_{rm+n}(f;\beta,z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{f(t)}{(t-z)} K_1(t,z)dt.$$

Burada bazı sadeleştirmeler sonucu

$$K_1(t,z) = -\frac{z^{rm+n+1}-\beta^{rm+n+1}}{t^{rm+n+1}-\beta^{rm+n+1}} + \left(\frac{z^m-\alpha^m}{t^m-\alpha^m}\right)^r . \frac{\alpha^m - t^{m-n-1}z^{n+1}}{t^m-\alpha^m}.$$

$K_1(t,z) = K_2(t,z) + K_3(t,z) + K_4(t,z)$ yazalım. Burada

$$K_2(t,z)=\frac{z^{rm+n+1}-\beta^{rm+n+1}}{t^{rm+n+1}-\beta^{rm+n+1}}-\frac{z^{rm+n+1}}{t^{rm+n+1}}$$

$$=\frac{\beta^{rm+n+1}(z^{rm+n+1}-t^{rm+n+1})}{t^{rm+n+1}(t^{rm+n+1}-\beta^{rm+n+1})},$$

$$K_3(t,z)=\left\{\left(\frac{z}{t}\right)^{rm}-\left(\frac{z^m-\alpha^m}{t^m-\alpha^m}\right)^r\right\}\frac{z^{n+1}}{t^{n+1}},$$

$$K_4(t,z)=\left(\frac{z^m-\alpha^m}{t^m-\alpha^m}\right)^r.\left\{\frac{z^{n+1}}{t^{n+1}}+\frac{\alpha^m-t^{m-n-1}z^{n+1}}{t^m-\alpha^m}\right\}$$

$$=\left(\frac{z^m-\alpha^m}{t^m-\alpha^m}\right)^r.\frac{\alpha^m(t^{n+1}-z^{n+1})}{t^{n+1}(t^m-\alpha^m)}.$$

$K_\ell(t,z)$, $(\ell=2,3,4)$ ifadelerinden, eğer $|z|<R/(\frac{|\beta|}{R})$ ise $n\to\infty$ iken $|K_2(t,z)|\to 0$ olur.

(1.6)’dan kolayca görülebilir ki

$$\left(\frac{z^m}{t^m}\right)^r-\left(\frac{z^m-\alpha^m}{t^m-\alpha^m}\right)^r=\frac{t^m-z^m}{t^{(r+1)m}}.\alpha^{rm}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\beta_{s+1,r}(z^m/\alpha^m)\alpha^{sm}}{t^{sm}}.$$

Önerme 2.3’ten

$$\beta_{s+1,r}(z^m/\alpha^m)\le c.s^{r-1}\left(\frac{|z|}{|\alpha|}\right)^{(r-1)m}.$$

Böylece, eğer $\dfrac{|z|^{rm+n}|\alpha|^m}{R^{(r+1)m+n}} \to 0$ ise , $n \to \infty$ iken $K_3(t,z) \to 0$ olur.

Öyleyse bize $|z| < \dfrac{R}{\left(\dfrac{|\alpha|}{R}\right)^{\frac{1}{(r+q)}}}$ gereklidir.

Son olarak $K_4(t,z)$ ifadesinden eğer $\dfrac{|z|^{rm+n+1}|\alpha|^m}{R^{mr+m+n+1}} \to 0$ yani $|z| < \dfrac{R}{\left(\dfrac{|\alpha|}{R}\right)^{\frac{m}{rm+n+1}}}$ ise,

$n \to \infty$ iken $K_4(t,z) \to 0$ olur.

$\lim \dfrac{n}{m} = q$ olduğundan yukarıdaki 3 ifadeyi birleştirir ve $R \to \rho$ alırsak

$$|z| \le \min\left\{ \frac{\rho}{\left(\frac{|\beta|}{\rho}\right)}, \frac{\rho}{\left(\frac{|\alpha|}{\rho}\right)^{1/r}}, \frac{\rho}{\left(\frac{|\alpha|}{\rho}\right)^{\frac{1}{r+q}}} \right\}$$

için

$$P_{rm+n}(f;\alpha,z) - L_{rm+n}(f;\beta,z) \to 0.$$

Bundan (4.3) hemen çıkar.

c. Uygulamalar: Biz aşağıdaki problemi göz önüne alarak Teorem 2.3.5'teki sonucun Walsh eşyakınsamasına nasıl genişletilebileceğini ele alalım.

Problem: $A_\rho(\rho > 1)$'de $f_0(z),\ldots, f_{r-1}(z)$ fonksiyonlarına bakalım. $p_{\ell,j}\;{}_{j=0}^{n-1}$,

$(\ell = 0,1,\ldots,r-1)$ ler r tane reel sayıların alt kümeleri olsun. Her bir ℓ ve $p_{\ell,j}\,{}_{j=0}^{n-1}$ için bir L_ℓ lineer operatörü tanımlayalım. L_ℓ derecesi $\leq n-1$ olan polinomlar uzayında tanımlansın ve eğer

$$Q_n(z) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j z^j \quad \text{ile} \quad L_\ell(Q_n) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j p_\ell z^j \tag{5.1}$$

koşullarını sağlasın. Problem, aşağıdaki toplamı minimize eden bir $P_{m,n,r}(z) \in \pi_{n-1}$ polinomunu bulma olsun.

$\forall Q_n \in \pi_{n-1}$ polinomu için

$$\sum_{\ell=0}^{r-1} \sum_{k=0}^{m-1} \left| f_\ell(\omega^k) - L_\ell Q_n(\omega^k) \right|^2, \quad \omega^m = 1, \; m > n \tag{5.2}$$

toplamlarını göz önüne alalım

$$L_{m-1}(f_\ell; z) := \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_{\ell,j}^{(m)} z^j$$

olsun.

Önerme 2.8: (5.2)'yi minimum yapan $P_{m,n,r}(z)$ polinomu $\sum_{j=0}^{n-1} c_j z^j$ biçimindedir. Burada

$$c_j = \frac{1}{K_j} \sum_{\ell=0}^{r-1} p_{\ell,j} \alpha_{\ell,j}^{(m)}, \quad K_j = \sum_{\ell=0}^{r-1} (p_{\ell,j})^2, \quad j = 0,1,\ldots,n-1. \tag{5.3}$$

İspat :

$$d_{\ell,j} = \begin{cases} \alpha_{\ell,j}^{(m)} - p_{\ell,j} c_j, & j = 0,1,\ldots,n-1, \\ \alpha_{\ell,j}^{(m)}, & j = n,\ldots,m-1, \end{cases} \tag{5.4}$$

olmak üzere

$$\left| f_\ell(\omega^k) - L_\ell Q_n(\omega^k) \right|^2 = \left| L_{m-1}(f_\ell;\omega^k) - L_\ell Q_n(\omega^k) \right|^2 = \left| \sum_{j=0}^{m-1} d_{\ell,j} \omega^{kj} \right|^2$$

sağladığından birimin köklerinin özellikleri kullanılarak

$$\sum_{\ell=0}^{r-1} \sum_{k=0}^{m-1} \left| f_\ell(\omega^k) - L_\ell Q_n(\omega^k) \right|^2 = m \sum_{\ell=0}^{r-1} \sum_{k=0}^{m-1} \left| d_{\ell,j} \right|^2.$$

Eğer

$$\begin{cases} c_j := p_j e^{i\theta_j}, & j = 0,1,\ldots,n-1, \\ \alpha_{\ell,j}^{(m)} := \sigma_{\ell,j} e^{i\phi_{\ell,j}}, & j = 0,1,\ldots,m-1; \quad \ell = 0,1,\ldots,r-1 \end{cases} \tag{5.5}$$

alırsak (5.4) ve (5.5)'ten

$$\left| d_{\ell,j} \right|^2 = \begin{cases} \left| \sigma_{\ell,j} e^{i\phi_{\ell,j}} - p_{\ell,j} \rho_j e^{i\theta_j} \right|^2, & j = 0,1,\ldots,n-1 \\ \left| \sigma_{\ell,j} \right|^2, & j = n,\ldots,m-1 \end{cases}$$

ve (5.2) minimum bulma problemi, aşağıdaki ifadeyi minimum yapan ρ_j ve θ_j yi bulmaya denktir. ρ_j reel sayı ve $0 \le \theta_j < 2\pi$ için

$$\sum_{\ell=0}^{r-1}\sum_{j=0}^{m-1}(p_{\ell,j})^2\rho_j^2+\sum_{j=0}^{m-1}\sigma_{\ell,j}^2-2\sum_{j=0}^{n-1}p_{\ell,j}\rho_j\sigma_{\ell,j}\cos(\theta_j-\phi_{\ell,j}).$$

Bazı işlemlerle ρ_j ve θ_j nin aşağıdaki eşitliklerle elde edilebileceği görülür:

$$\begin{cases}\rho_j\sum\limits_{\ell=0}^{r-1} p_{\ell,j}{}^{2}-\sum\limits_{\ell=0}^{r-1}p_{\ell,j}\sigma_{\ell,j}\cos(\theta_j-\phi_{\ell,j})=0\\ \qquad\sum\limits_{\ell=0}^{r-1}p_{\ell,j}\sigma_{\ell,j}\sin(\theta_j-\phi_{\ell,j})=0.\end{cases}\qquad (j=0,\ldots,m-1)$$

Böylece

$$\begin{cases}\dfrac{\sin\theta_j}{A_j}=\dfrac{\cos\theta_j}{B_j}=\dfrac{1}{\sqrt{A_j^2+B_j^2}},\\ A_j=\sum\limits_{\ell=0}^{r-1}p_{\ell,j}\sigma_{\ell,j}\sin\phi_{\ell,j},\qquad B_j=\sum\limits_{\ell=0}^{r-1}p_{\ell,j}\sigma_{\ell,j}\cos\phi_{\ell,j}\end{cases}\qquad (j=0,\ldots,m-1)\qquad (5.6)$$

olur. Bu nedenle

$$\rho_j=\frac{\sqrt{A_j^2+B_j^2}}{\sum\limits_{\ell=0}^{r-1}(p_{\ell,j})^2}=\frac{B_j\cos\theta_j+A_j\sin\theta_j}{K_j},\quad (j=0,\ldots,m-1)\qquad (5.7)$$

çıkar. (5.5), (5.6) ve (5.7)'den (5.3) elde edilir.

Şimdi $f(z)\in A_\rho$ için $f_j(z):=f^{(j)}(z)$ alalım.

Eğer

$$L_\ell(Q_n):=\sum_{j=0}^{n-1}(j)_\ell c_j z^{j-\ell}$$

alınırsa $L_\ell(Q_n)=Q_n^{(\ell)}$ olur. Böylece (5.2)'deki minimum ile aşağıdaki

$$\sum_{\ell=0}^{r-1}\sum_{k=0}^{m-1}\left|\omega^{k\ell} f^{(\ell)}(\omega^k)-Q_n^{(\ell)}(\omega^k)\right|^2, \quad Q_n\in\pi_{n-1} \tag{5.8}$$

toplamının minimum problemi denk olur.

Önerme 2.9: Eğer, $f(z)=\sum_{v=0}^{\infty}a_v z^v\in A_\rho$ ise (5.2)'yi minimize eden polinom

$$P_{m,n,r}(z):=\sum_{j=0}^{n-1}c_j z^j, \qquad c_j=\frac{1}{A_{0,j}(r)}\sum_{\lambda=0}^{\infty}A_{\lambda,j}(r)a_{j+\lambda m} \tag{5.9}$$

ile verilir. Burada

$$A_{\lambda,j}(r)=\sum_{\ell=0}^{r-1}(j)_\ell(j+\lambda m)_\ell, \qquad \lambda=0,1,...$$

dir.

İspat: Bu durumda $p_{\ell,j}=(j)_\ell$ dir.

$$z^\ell f^{(\ell)}(z)=\sum_{v=0}^{\infty}(v)_\ell a_v z^v$$

olduğundan birimin m. dereceden köklerine göre oluşturulan $z^\ell f^{(\ell)}(z)$ nin Lagrange interpolasyon polinomu

$$\sum_{j=0}^{m-1}\alpha_{\ell,j}^{(m)}z^j$$

çıkar. Burada

$$\alpha_{\ell,j}^{(m)} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} (j+\lambda m)_{\ell}\, a_{j+\lambda m}.$$

(5.9) Önerme 2.8'deki (5.3)'ten hemen elde edilebilir. □

Şimdi

$$S_{n,\lambda,r}(f;z) := \sum_{j=0}^{n-1} \frac{A_{\lambda,j}(r)}{A_{0,j}(r)} z^j a_{j+\lambda m} \quad , \quad \lambda = 0,1,2,... \tag{5.10}$$

alalım.

Teorem 2.3.6: $f(z) \in A_{\rho}(\rho > 1)$ alalım ve m,n pozitif tamsayıları $\lim_{n\to\infty} \frac{m}{n} = q > 1$ özelliğini sağlasın.

Varsayalım ki r pozitif tamsayısı verilsin ve $P_{m,n,r}(f;z)$ birimin m. köklerinde (5.8)'i minimize eden polinom olsun. Bu durumda herhangi bir $\mu \geq 1$ tamsayısı için

$$\lim_{n\to\infty}\left[P_{m,n,r}(f;z) - \sum_{\lambda=0}^{\mu-1} S_{n,\lambda,r}(f;z) \right] = 0 \,, \quad |z| < \rho^{1+\mu q}.$$

sağlanır.

Önerme 2.9'un başka bir uygulaması olarak, Teorem 2.3.5'teki $P_{sm+n}(f;\alpha,z)$'ye benzer $\overline{P}_{sm+n}(f;\alpha,z) \in \pi_{sm+n-1}$ polinomunu göz önüne alalım.

Şimdi aşağıdaki ifadeyi bazı $\alpha \in D_{\rho}$ için sağlayan

$$\overline{P}_{sm+n}^{(v)}(f;\alpha,\alpha\omega^k) = f^{(v)}(\alpha\omega^k), \quad k = 0,1,...,m-1 \;\; ; \quad v = 0,1,...,s-1 \tag{5.11}$$

ve

$$\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{v=0}^{s+1}\left|\overline{P}_{sm+n}^{(v)}(f;\alpha,\omega^k)-f^{(v)}(\alpha\omega^k)\right|^2 \tag{5.12}$$

toplamını en küçük yapan $\overline{P}_{sm+n}(f;\alpha,z)\in\pi_{sm+n-1}$ polinomunu bulmaya çalışalım.

Teorem 2.3.7: Her bir $f\in A_\rho(\rho>1)$ ve her bir negatif olmayan s tamsayısı ve $\alpha,\beta\in D_p$ için (5.11) ve (5.12)'yi sağlayan $\overline{P}_{sm+n}(f;\alpha,z)$ polinomunu düşünelim.

Eğer $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{m}{n}=q\le 1$ ise $\forall z(|z|<\sigma)$ için

$$\lim_{n\to\infty}\left[\overline{P}_{sm+n}(f;\alpha,z)-L_{sm+n}(f;\beta,z)\right]=0$$

sağlanır. Burada

$$\sigma=\frac{\rho}{\max\left\{\left(\dfrac{|\beta|}{\rho}\right),\left(\dfrac{|\alpha|}{\rho}\right)^{\frac{1}{r+q}}\right\}}.$$

İspat: Teorem 2.3.5'in ispatında olduğu gibi

$$\overline{P}_{sm+n}(f;\alpha,z)=h_{s,sm-1}(f;\alpha,z)+(z^m-\alpha^m)^s Q_n(z)$$

alalım. Burada Q_n (5.12) ile belirlidir. (4.5)'e ek olarak

$$\frac{d^{s+1}}{dz^{s+1}}(z^m-\alpha^m)^s\Big|_{z=\alpha\omega^k}=m^s\cdot(s+1)!\frac{1}{2}s(m-1)\alpha^{s(m-1)-1}\omega^{-k(s+1)} \tag{5.13}$$

mevcut. (5.2)'yi minimize etmek ile

$$m^s \cdot s!\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{\ell=0}^{1}\left|L_\ell(Q_n)(\omega^k) - f_\ell(\omega^k)\right|^2, \quad Q_n \in \pi_{n-1}$$

ifadesini minimize etmek denktir. Burada

$$f_\ell(z) := \left[h_{sm-1}^{(s+\ell)}(f;\alpha,z) - f^{(s+\ell)}(z)\right] z^{s+\ell} / m^s \cdot s!\alpha^{ms-s-\ell}, \quad (\ell = 0,1)$$

ve ℓ_0 *ve* ℓ_1, π_{n-1} uzayında tanımlı lineer operatörlerdir.

ℓ_0 birim operatördür ve $Q_n(z) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j z^j$ için

$$L_\ell(Q_n)(z) = (s+1)\left(\frac{1}{2}s(m-1) + z\frac{d}{dz}\right)Q_n$$

$$= (s+1)\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}s(m-1) + j\right)c_j z^j$$

sağlanır. Böylece

$$p_{0j} = 1 \text{ ve } p_{1,j} = (s+1)\left(j + \frac{1}{2}s(m-1)\right), \quad j = 0,1,\ldots,n-1. \tag{5.14}$$

Diğer taraftan,

$$h_{s,sm-1}(f;\alpha,z) - f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{f(t)(z^m - \alpha^m)^s}{(t-z)(t^m - \alpha^m)^s}dt$$

olduğundan (4.5) ve (5.13)'ü kullanarak

$$\begin{cases} f_0(\alpha\omega^k) = -\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\Gamma_R} \dfrac{f(t)}{(t^m-\alpha^m)^s}\dfrac{1}{t-\alpha\omega^k}\,dt \\ f_1(\alpha\omega^k) = -\dfrac{s+1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\Gamma_R} \dfrac{f(t)}{(t^m-\alpha^m)^s}\left\{\dfrac{\frac{1}{2}s(m-1)}{t-\alpha\omega^k} + \dfrac{\alpha\omega^k}{t-\alpha\omega^k}\right\}dt, \end{cases} \quad k=0,\ldots,m-1. \tag{5.15}$$

elde edilir. (5.15) ile biz $z^m-\alpha^m$'in sıfırlarına göre oluşturulan f_0 ve f_1'in Lagrange interpolasyon polinomları bulunabilir.

Böylece

$$L_{m-1}(f_0;\alpha,z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{f(t)}{(t^m-\alpha^m)^{s+1}} + \frac{t^m-z^m}{(t-z)}\,dt \tag{5.16}$$

ve

$$L_{m-1}(f_1;\alpha,z) = -\frac{s+1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{f(t)}{(t^m-\alpha^m)^s}K(t,z)\,dt \tag{5.17}$$

sağlanır.

Çünkü $z=\alpha\omega^k$'da $\dfrac{d}{dt}\left\{\dfrac{t(t^m-z^m)}{(t^m-\alpha^m)(t-z)}\right\}$ nın değeri $\dfrac{-\alpha\omega^k}{(t-\alpha\omega^k)^2}$'e eşittir ve

$$K(t,z) = \left[\frac{\frac{1}{2}s(m-1)}{t^m-\alpha^m}\frac{t^m-z^m}{t-z} - \frac{d}{dt}\left\{\frac{t(t^m-z^m)}{(t^m-\alpha^m)(t-z)}\right\}\right].$$

(5.16)'dan z^j nin $L_{m-1}(f_0;\alpha,z)$ içindeki katsayısı

$$\alpha_{0j}^{(m)} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{f(t)t^{m-j-1}}{(t^m-\alpha^m)^{s+1}}dt.$$

(5.17)'den de z^j nin $L_{m-1}(f_1;\alpha,z)$ 'deki katsayısı

$$\alpha_{1j}^{(m)} = -\frac{s+1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{f(t)t^{m-1-j}}{(t^m-\alpha^m)^{s}}\left\{\frac{1}{2}\frac{s(m-1)t^{m-1-j}}{t^m-\alpha^m} - \frac{d}{dt}\left(\frac{t^{m-j}}{t^m-\alpha^m}\right)\right\}dt$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{f(t)t^{m-1-j}}{(t^m-\alpha^m)^{s+1}}\left\{p_{1j} + \frac{m(s+1)\alpha^m}{t^m-\alpha^m}\right\}dt$$

olarak bulunur. $r=2$ için Önerme 2.8 kullanılarak

$$Q_n(z) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j z^j$$

olur. Burada

$$c_j = \frac{p_{0j}\alpha_{0j}^{(m)} + p_{1j}\alpha_{1j}^{(m)}}{(p_{0j})^2 + (p_{1j})^2}.$$

(5.14), $\alpha_{0j}^{(m)}$ ve $\alpha_{1j}^{(m)}$ için göz önüne alınırsa

$$c_j = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{f(t)t^{m-1-j}}{(t^m-\alpha^m)^{s+1}}dt$$

$$-\frac{m(s+1)\alpha^m}{2\pi i}\frac{p_{1j}}{1+(p_{1j})^2}\int_{\Gamma_R} \frac{f(t)t^{m-j-1}}{(t^m-\alpha^m)^{s+2}}dt.$$

Bu nedenle

$$K_1(t,z)=\frac{t^{m-n}(t^n-z^n)}{(t^m-\alpha^m)^{s+1}(t-z)}+\frac{m(s+1)\alpha^m}{(t^m-\alpha^m)^{s+2}}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{p_{1j}t^{m-j-1}z^j}{1+(p_{1j})^2}$$

olmak üzere

$$Q_n(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} f(t)K_1(t,z)dt$$

olur. Öyleyse

$$\bar{P}_{sm+n}(f;\alpha,z)-L_{sm+n}(f;\beta,z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} f(t)\bar{K}(t,z)dt$$

bulunur. Burada

$$\bar{K}(t,z)=\frac{(t^m-\alpha^m)^s-(z^m-\alpha^m)^s}{(t^m-\alpha^m)^s(t-z)}+(z^m-\alpha^m)^s K_1(t,z)$$

$$-\frac{t^{sm+n}-z^{sm+n}}{t^{sm+n}-\beta^{sm+n}}.\frac{1}{t-z}$$

$$=\frac{1}{t-z}\left[\bar{K}_1(t,z)+\bar{K}_2(t,z)+\bar{K}_3(t,z)\right]+\bar{K}_4(t,z)$$

ve

$$\bar{K}_1(t,z):=\frac{z^{sm+n}-\beta^{sm+n}}{t^{sm+n}-\beta^{sm+n}}-\frac{z^{sm+n}}{t^{sm+n}}=\beta^{sm+n}\frac{z^{sm+n}-t^{sm+n}}{t^{sm+n}(t^{sm+n}-\beta^{sm+n})},$$

$$\bar{K}_2(t,z) := \frac{z^{sm+n}}{t^{sm+n}} - \frac{(z^m-\alpha^m)^s}{(t^m-\alpha^m)^s}\cdot\frac{z^n}{t^n} = \frac{z^n}{t^n}\left\{\frac{z^{sm}}{t^{sm}} - \frac{(z^m-\alpha^m)^s}{(t^m-\alpha^m)^s}\right\},$$

$$\bar{K}_3(t,z) := \frac{(z^m-\alpha^m)^s}{(t^m-\alpha^m)^s}\left\{\frac{z^n}{t^n} - \frac{t^{m-n}z^n-\alpha^m}{t^m-\alpha^m}\right\}$$

$$= \frac{(z^m-\alpha^m)^s}{(t^m-\alpha^m)^s}\left\{\frac{\alpha^m(t^n-z^n)}{t^n(t^m-\alpha^m)}\right\},$$

$$\bar{K}_4(t,z) = \frac{m(s+1)(z^m-\alpha^m)^s\alpha^m}{(t^m-\alpha^m)^{s+2}}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{p_{1j}t^{m-j-1}z^j}{1+(p_{1j})^2}.$$

$\bar{K}_v(t,z)$, $(v=1,\dots,4)$ çekirdekleri için verilen bu ifadelerden, eğer $|z| < \frac{R}{\frac{|\beta|}{R}}$ ise $n\to\infty$ için $\bar{K}_1(t,z)\to 0$ olur.

Önerme 2.3 ve Önerme 2.2'deki (1.6) özdeşliğinden, eğer $|z| < \frac{R}{\left|\frac{\alpha}{R}\right|^{\frac{1}{s+q}}}$ ise $n\to\infty$ iken $\bar{K}_2(t,z)\to 0$ olur.

$\bar{K}_3(t,z)$'de $|z|$ nin aynı üst sınırı için sıfıra gider.

$0 < \frac{p_{1j}}{1+(p_{1j})^2} < 1$ olduğundan

$$\left|\bar{K}_4(t,z)\right| \le \frac{m(s+1)\left|z\right|^{sm}\left|\alpha\right|^{m}}{\left|R\right|^{m(s+2)}}\, R^{m-n}\, \frac{\left|z\right|^{n}-R^{n}}{\left|z\right|-R}$$

olur ve böylece $\left|z\right| < \dfrac{R}{\left|\frac{s}{R}\right|^{\frac{1}{s+q}}}$ ise $\bar{K}_4(t,z)$ sıfıra gider.

Dolayısıyla $\left|z\right| < \min\left\{ \dfrac{R}{\left|\frac{\beta}{R}\right|}, \dfrac{R}{\left|\frac{\alpha}{R}\right|^{\frac{1}{s+q}}} \right\}$ ise

$$\bar{P}_{sm+n}(f;\alpha,z) - L_{sm+n}(f;\beta,z)$$

ifadesi $n \to \infty$ iken sıfıra gider. $R \to \rho$ yazarak benzer sonucu elde ederiz.

2.4 Birkhoff İnterpolasyonu: Bir interpolasyon probleminde eğer ardışık yüksek mertebeden türevlenme ile ilgili önveriler varsayılmamış ise Lacunary (ya da Hermite-Birkhoff interpolasyonu, ya da açıkça Birkhoff) interpolasyonu olarak adlandırılır.

Bu tip interpolasyon G. Birkhoff tarafından 19. yüzyıl başlarında tanıtılmıştır. Ama uzun zaman çalışılmamıştır. 1950'lerde P. Turan'ın çalışmaları ile yeniden hız kazanmıştır ve yaklaşım teorisinde verimli bir alan olmuştur.

$f(z) \in A_\rho\,(\rho > 1)$ alalım ve

$$0 = m_0 < m_1 < \ldots < m_q \quad \text{iken} \quad \sum_{s=1}^{q} m_s = M_q \quad (q \ge 1) \tag{1.1}$$

olsun.

$n \geq 1$ tamsayısı verildiğinde derecesi en fazla $q+1\ n-1$ olan ve

$$B_n^{(m_s)}(f;\omega^t) = f^{(m_s)}(\omega^t), \quad t = 1,...,n\ , \quad s = 1,...,q \tag{1.2}$$

koşulunu sağlayan bir $B_n(f;z)$ polinomunu bulmak istiyoruz. Burada ω birimin n. kökküdür.

Hermite İnterpolasyonunun aksine bu koşulları sağlayan polinomun varlığı ve tekliği açık değildir. Fakat bu çok büyük n'ler için doğrudur.

Teorem 2.4.1: Eğer

$$n \geq \max_{1\leq s\leq q} \frac{m_s}{s} \tag{1.3}$$

ise buradan herhangi bir $f(z) \in A_\rho$ için $(0, m_1, ..., m_q)$ Birkhoff interpolasyonu tek olarak çözülebilir.

İspat: $p(z) = z^{\lambda n+k}, \quad k = 0,1,...,n-1; \quad \lambda > q$ polinomunu göz önüne alalım.

Biz $\alpha_{j,\lambda,k,n}$ sayılarıyla

$$B_n(p;z) = \sum_{j=0}^{q} \alpha_{j,\lambda,k,n} z^{jn+k} \in \pi_{(q+1)n-1} \tag{1.4}$$

formundaki $B_n(p,z)$ polinomunu arıyoruz.

$f = p$ için (1.2) koşulu a ve v negatif olmayan tamsayıları için $(a)_v = a(a-1)...(a-v+1)$ notasyonu kullanılarak

$$B_n^{(m_s)}(p;\omega^t)=\sum_{j=0}^{q}\alpha_{j,\lambda,k,n}(jn+k)_{m_s}\,\omega^{t(k-m_s)}=(\lambda n+k)_{m_s}\,\omega^{t(k-m_s)} \tag{1.5}$$

$$(t=0,1,...,n-1;\quad s=0,1,...,q)$$

biçiminde yazılabilir. (Eğer $a<v$ ise $(a)_v=0$ ve $(a)_0=1$ olur.) Bu ise

$$\sum_{j=0}^{q}\alpha_{j,\lambda,k,n}(jn+k)_{m_s}=(\lambda n+k)_{m_s},\quad s=0,1,...,q \tag{1.6}$$

lineer eşitlik sistemine yol açar. Bu eşitlik sisteminin determinantı (1.3) ve $M_n(k)\neq 0\ \ (k=0,...,n-1)$ koşulları altında

$$M_n(k):=\begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ (k)_{m_s} & (n+k)_{m_s} & ... & (qn+k)_{m_s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (k)_{m_q} & (n+k)_{m_q} & ... & (qn+k)_{m_q} \end{vmatrix} \tag{1.7}$$

olur. Bunun anlamı $\alpha_{j,\lambda,k,n}$ ler tek olarak belirlidir ve (1.4) (1.5)'in koşullarını sağlar. (Eğer $\lambda\leq q$ ise $B_n(p;z)\equiv p(z).$)

Eğer

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\lambda=0}^{\infty}a_{\lambda n+k}z^{\lambda n+k} \tag{1.8}$$

ise B_n operatörünün lineerliğinden

$$B_n(f;z)=\sum_{k=0}^{(q+1)n-1}a_k z^k+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\lambda=q+1}^{\infty}a_{\lambda n+k}\sum_{j=0}^{q}a_{j,\lambda,k,n}z^{jn+k} \tag{1.9}$$

elde ederiz.

Bu $\forall f(z) \in A_\rho$ için B_n operatörünün varlığını ispatlar. Tekliği (1.7)'nin yok olmamasından ve operatörün lineerliğinden çıkar.

Teorem 2.4.2: Herhangi bir $f(z) \in A_\rho$ için

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \max_{|z|\in R} \left| f(z) - B_n(f;z) \right|^{\frac{1}{(q+1)n}} \le \begin{cases} \dfrac{1}{\rho} & eğer \quad 0 \le R \le 1, \\ \dfrac{R}{\rho} & eğer \quad 1 \le R \le \rho \end{cases} \tag{1.10}$$

Sonuç gösterir ki bütün $|z| < \rho$ nun kapalı alt bölgelerinde yakınsama noktasaldır.

İspat:

$$\left|\alpha_{j,\lambda,k,n}\right| = \frac{\left|M_{n,j,\lambda}(k)\right|}{M_n(k)} \begin{cases} \le c\lambda^{m_q}, & j = 0,\dots,q;\ k = 0,\dots,n-1;\ \lambda > q, \\ \ge c > 0, & j = 0,\dots,q;\ k = 0,\dots,n-1;\ q < \lambda \le q+\ell \end{cases} \tag{1.11}$$

(1.8) ve (1.9)'un farklarını alıp (1.11)'de kullanırsak, keyfi bir $\varepsilon > 0$ ile

$$\left| f(z) - B_n(f;z) \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\lambda=q+1}^{\infty} a_{\lambda n+k} z^k \left(1 - \sum_{j=0}^{q} \alpha_{j+\lambda,k,n} z^{jn} \right) \right|$$

$$= O\left(\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\lambda=q+1}^{\infty} (\rho-\varepsilon)^{-\lambda n-k} |z|^k \max(1,|z|^{qn}) \lambda^{m_q} \right)$$

elde ederiz. Eğer $|z| < \rho - \varepsilon$ ise $\varepsilon > 0$ keyfi alındıkça

$$O\left(\max(1,|z|^{qn}) \sum_{\lambda=q+1}^{\infty} \frac{\lambda^{m_q}}{(\rho_\varepsilon)^{\lambda n}} \right) = O\left(\frac{\max(1,|z|^{qn})}{(\rho-\varepsilon)^{(q+1)n}} \right)$$

olduğu açıktır. Bu da (1.10)'u sonuçlandırır. □

Yakınsamayı hallettikten sonra tekrar üst yakınsama problemine dönelim. Bunun için $\ell \geq 1$ karışık parametrelerini içeren

$$S_{n,\ell}(f;z) = \sum_{k=0}^{(q+1)n-1} a_k z^k + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\lambda=q+1}^{q+\ell-1} a_{\lambda n+k} \sum_{j=0}^{q} \alpha_{j,\lambda,k,n} z^{jn+k} \tag{1.12}$$

başka bir operatörü düşünelim. ($\ell = 1$ durumunda (1.12)'deki ikinci kısım görünmez ve $S_{n,1}$ Taylor açılımı olur.) Biz (1.9) ile (1.12)'nin farkını göz önüne alacağız.

$$\Delta_{n,\ell}(f;z) := B_n(f;z) - S_{n,\ell}(f;z) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\lambda=q+\ell}^{\infty} a_{\lambda n+k} \sum_{j=0}^{q} \alpha_{j,\lambda,k,n} z^{jn+k}. \tag{1.13}$$

Teorem 2.4.3: Herhangi bir $f(z) \in A_p$ için

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \max_{|z|=R} \left|\Delta_{n,\ell}(f;z)\right|^{\frac{1}{(q+1)n}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\rho^{\frac{q+\ell}{q+1}}} & eğer \quad |R| \leq 1 \\ \dfrac{|z|^{\frac{q}{q+1}}}{\rho^{\frac{q+\ell}{q+1}}} & eğer \quad 1 \leq |R| \leq \rho \\ \dfrac{|z|}{\rho^{1+\frac{\ell}{q+1}}} & eğer \quad \rho \leq |R| \end{cases} \tag{1.14}$$

olur.

Bu teorem gösterir ki yakınsamanın en iyi yarıçapı $\rho^{1+\frac{\ell}{q+1}}$ dır.

3. SİMETRİK SMİRNOV UZAYLARINDA İNTERPOLASYON POLİNOMLARI İLE YAKLAŞIM

1.1 Giriş ve Ana Sonuçlar :

C 'de kapalı, sonlu uzunluklu bir Γ Jordan eğrisi alalım. Γ eğrisi **C** 'yi iki bölgeye ayırır. Bunlar $G := \operatorname{int}\Gamma$ ve $G^- := ext\Gamma$ olsun. $\mathbf{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $\mathbf{T} := \partial\mathbf{D}$ ve $\mathbf{D}^- := ext\mathbf{T}$ olsun.

Bu bölümde Simetrik Smirnov Uzayında alınan bir fonksiyona Faber polinomlarının köklerine göre oluşturulan interpolasyon polinomunun norma göre yakınsaklığını inceleyeceğiz. Bu yönde çalışmalar yeni değildir. Örneğin $\Gamma \in C(2,\alpha)$, $0 < \alpha < 1$, varsayımı altında X.C. Shen ve L.Zhong [10] G 'de öyle interpolasyon noktaları bulmuşlardır ki interpolasyon polinomları ile en iyi yaklaşımı veren polinomun $E^p(G)$,$1 < p < \infty$ de yaklaşım hızları aynıdır. $\Gamma \in C(1,\alpha)$ ve interpolasyon noktaları olarak Faber polinomlarının köklerini seçerek L.Zhu [11] aynı sonucu göstermiştir. Eğrinin sivri içermeyen BR eğri olması durumunda interpolasyon noktaları olarak Faber polinomlarının köklerini seçerek Smirnov-Orlicz uzaylarında benzer sonuç R. Akgün ve D.M. İsrafilov [12] tarafından ispatlanmıştır

Kompleks uzayda birçok bölge köşe ya da sivrilere sahip olabilir. Γ sivrisi olmayan bir parçalı VR eğri olduğunda L.Zhong ve L.Zhu [4] göstermişlerdir ki Faber polinomlarının köklerine göre oluşturulan interpolasyon polinomlarının $E^p(G)$,$1 < p < \infty$ Smirnov sınıfından bir fonksiyona yaklaşım hızı en iyi yaklaşımı veren cebirsel polinomun yakınsama hızına eşittir.

Bu çalışmada biz, eğrinin sivri içermeyen BR olması koşulu altında Faber polinomlarının köklerine göre oluşturulan interpolasyon polinomlarının $E_X(G)$ Simetrik Smirnov Uzayında yakınsaklık özelliklerini araştırırız.

F_n Faber polinomunun kökleri G içindeyken $L_n(f;z)$ ile F_n Faber polinomlarının köklerine göre oluşturulan $f(z) \in E_X(G)$ 'nin $(n-1)$ dereceli interpolasyon polinomunu ifade edelim.

$f(z) \in E_X(G)$ için

$$E_n(f,G)_X := \inf \|f - p_n\|_{E_X(G)} : p_n \in \mathrm{P}_n$$

değerine f için en iyi yaklaşım sayısı denir.

Teorem 3.1.1: Γ sivrileri olmayan bir BR eğrisi olsun. Yeterince büyük n doğal sayıları için, Faber polinomlarının kökleri G 'dedir. Bu durumda her $f \in E_X(G)$ için sadece Γ ve M 'ye bağlı öyle bir c sabiti vardır ki $n = 1, 2, ...$ için

$$\|f(.) - L_n(f,\cdot)\|_{E_X(G)} \leq c \cdot E_{n-1}(f,G)_X$$

sağlanır.

Γ sivrisi olmayan, parçalı VR eğrisi olduğunda bu sonuç [4]'te, BR eğri olduğunda ise [12]'de ispatlanmıştır.

3.2 Yardımcı Sonuçlar: Γ 'yı sivrileri olmayan bir BR eğrisi alalım. $\arg(\varsigma - z)$ 'nin $\varsigma = z$ 'deki sıçraması z 'deki $\alpha_z \pi$ dış açısına eşittir ve

$$F_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \phi(\varsigma)^{\ n} \, d_{\varsigma} \arg(\varsigma - z) \ , \quad z \in \Gamma$$

eşitliği geçerli olur. [13]

Böylece

$$F_n(z) - [\phi(z)]^n = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma \setminus \{z\}} [\phi(\varsigma)]^n \, d_\varsigma \arg(\varsigma - z) + (\alpha_z - 1)[\phi(\varsigma)]^n \tag{1.1}$$

ve

$$0 \le \max_{z \in \Gamma} |\alpha_z - 1| < 1 \,. \tag{1.2}$$

Önerme 3.1:[14] Γ bir BR eğrisi olsun. Her bir $\varepsilon > 0$ ve θ için öyle bir $\delta > 0$ vardır ki

$$\int_{\theta-\delta}^{\theta-} \left| d_t \arg [\psi(e^{it}) - \psi(e^{i\theta})] \right| + \int_{\theta+}^{\theta+\delta} \left| d_t \arg [\psi(e^{it}) - \psi(e^{i\theta})] \right| < \varepsilon \tag{1.3}$$

olur. Herhangi bir θ'dan farklı $\eta \in (\theta - \delta, \theta + \delta)$ için

$$\int_{\eta-\delta}^{\eta} \left| d_t \arg [\psi(e^{it}) - \psi(e^{i\eta})] \right| + \int_{\eta}^{\eta+\delta} \left| d_t \arg [\psi(e^{it}) - \psi(e^{i\eta})] \right| < \varepsilon + |\alpha_z - 1| \pi$$

sağlanır. Burada $\alpha_z \pi$ Γ'nın $z = \psi(e^{i\theta})$'deki dış açısıdır.

Önerme 3.2:[12] Eğer Γ bir BR eğrisi ise, her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ vardır ki

$$\int_{s_-(z,\delta) \setminus \{z\}} |d_\varsigma \arg(\varsigma - z)| + \int_{s_+(z,\delta) \setminus \{z\}} |d_\varsigma \arg(\varsigma - z)| < \varepsilon, \qquad z \in \Gamma \tag{1.4}$$

geçerli olur.

İspat: Keyfi $z \in \Gamma$ alıp düzenleyelim. $\varsigma = \psi(e^{it})$ değişken değiştirerek

$$\int\limits_{s_-(z,\delta)\setminus\{z\}} \left| d_{\varsigma} \arg(\varsigma - z) \right| = \int\limits_{\theta-\delta}^{\theta-} \left| d_{\psi(e^{it})} \arg(\psi(e^{it}) - \psi(e^{i\theta})) \right|$$

$$= \int\limits_{\theta-\delta}^{\theta-} \left| d_t \arg(\psi(e^{it}) - \psi(e^{i\theta})) \right|$$

ve benzer şekilde

$$\int\limits_{s_+(z,\delta)\setminus\{z\}} \left| d_{\varsigma} \arg(\varsigma - z) \right| = \int\limits_{\theta+}^{\theta+\delta} \left| d_{\psi(e^{it})} \arg(\psi(e^{it}) - \psi(e^{i\theta})) \right|$$

$$= \int\limits_{\theta+}^{\theta+\delta} \left| d_t \arg(\psi(e^{it}) - \psi(e^{i\theta})) \right|.$$

Her bir $\varepsilon > 0$ için (1.3)'ü kullanarak (1.4)'ü elde ederiz. □

Herhangi bir $\delta > 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$ için $I_{\theta,\delta}$ ile $s_-\left(\psi(e^{i\theta}),\delta\right) \cup s_+\left(\psi(e^{i\theta}),\delta\right)$ kümesinin ϕ altındaki görüntüsünü ifade edelim ve

$$\upsilon(t,\theta,\delta) := \begin{cases} \dfrac{e^{it}\psi'(e^{it})}{\psi(e^{it}) - \psi(e^{i\theta})} & e^{it} \notin I_{\theta,\delta}, \\ 0 & e^{it} \in I_{\theta,\delta} \end{cases}$$

alalım.

Önerme 3.3:[4] Her bir $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ için, öyle bir k doğal sayısı vardır ki her $\theta \in [0, 2\pi]$ için

$$\int_0^{2\pi} \left| \upsilon(t,\theta;\delta) - T_\theta(t) \right| dt < \varepsilon \tag{1.5}$$

koşulunu sağlayan derecesi en fazla k olan t'ye bağlı bir $T_\theta(t)$ trigonometrik polinomu vardır.

İspat: $\delta > 0$, $e^{it} \notin I_{\theta,\delta}$ için öyle bir c_δ bulunabilir ki

$$\frac{1}{\left| \Psi(e^{it}) - \Psi(e^{i\theta}) \right|} \le c_\delta$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece

$$\left| \upsilon(t,\theta;\delta) \right| \le c_\delta \left| \Psi'(e^{it}) \right|, \quad e^{it} \notin I_{\theta,\delta} \tag{1.6}$$

olur.

Keyfi bir $\theta_n \subset [0, 2\pi]$ dizisi için θ_{n_k} yakınsak alt dizisi mevcuttur. θ_0'ın limitini alırsak hemen hemen her t için

$$\upsilon(t,\theta_{n_k};\delta) \to \upsilon(t,\theta_0;\delta)$$

Baskın yakınsaklık teoremi ve (1.6)'dan

$$\int_0^{2\pi} \left| \upsilon(t;\theta_{n_k};\delta) - \upsilon(t,\theta_0;\delta) \right| dt \to 0$$

elde ederiz.

Bu $\upsilon(t,\theta;\delta):\theta\in[0,2\pi]$ fonksiyonlar kümesinin L^1 de dizisel kompakt olduğunu gösterir. Sonuç olarak, herhangi bir $\varepsilon>0$ verilmiş ise öyle bir $\upsilon(t,\theta_j;\delta),\ j=1,2,...,M$ vardır ki

$$\min_{1\le j\le M}\int_0^{2\pi}\left|\upsilon(t;\theta;\delta)-\upsilon(t,\theta_j;\delta)\right|dt<\frac{\varepsilon}{2},\quad \theta\in[2\pi].$$

sağlanır. Bu nedenle

$$\int_0^{2\pi}\left|\upsilon(t;\theta_j;\delta)-T^{(j)}(t)\right|dt<\frac{\varepsilon}{2},\qquad j=1,2,...,M$$

sağlayan sonlu sayıda $T^{(j)}(t)$ Trigonometrik polinomu bulunabilir.

Böylece

$$\min_{1\le j\le M}\int_0^{2\pi}\left|\upsilon(t;\theta_j;\delta)-T^{(j)}(t)\right|dt<\varepsilon,\qquad \theta\in[0,2\pi]$$

olur.

N 'yi $T^{(j)}(t),\ j=1,2,...,M$ Trigonometrik polinomların en büyük derecelisinin derecesi olarak seçersek ispat tamamlanır. □

Önerme 3.4:[12] Γ, sivrileri olmayan bir BR eğrisi olsun. Her $\varepsilon>0$ için öyle bir pozitif n_0 tamsayısı vardır ki her $n>n_0$ için

$$\left|F_n(z)-\ \phi(z)^{\ n}\right|<\left|\alpha_z-1\right|+\varepsilon,\qquad z\in\Gamma \tag{1.7}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ bulunur ki (1.4) sağlanır. $s(z) := s_-\left(z,\delta\right) \cup s_+\left(z,\delta\right)$, $z \in \Gamma$ alalım.

Önerme 3.3'e göre verilen ε ve δ için öyle bir n_0 doğal sayısı vardır ki (1.5) geçerlidir.

(1.1)'den $z = \psi(e^{i\theta})$ alarak

$$F_n(z) - \left[\phi(z)\right]^n = \frac{1}{\pi}\left\{ \int\limits_{s_+(z,\delta)\setminus\{z\}} + \int\limits_{s_-(z,\delta)\setminus\{z\}} \right\} \left[\phi(\varsigma)\right]^n d_\varsigma \arg(\varsigma - z)$$

$$+\frac{1}{\pi} \int\limits_{\Gamma\setminus s(z)} \left[\phi(\varsigma)\right]^n d_\varsigma \arg(\varsigma - z) + (\alpha_z - 1)e^{in\theta}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{ \int\limits_{s_+(z,\delta)\setminus\{z\}} + \int\limits_{s_-(z,\delta)\setminus\{z\}} \right\} \left[\phi(\varsigma)\right]^n d_\varsigma \arg(\varsigma - z)$$

$$+\frac{1}{\pi} \int\limits_{e^{it}\notin I_{\theta,\delta}} e^{\mathrm{int}} d_t \arg\left[\psi(e^{it}) - \psi(e^{i\theta})\right] + (\alpha_z - 1)e^{in\theta}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{ \int\limits_{s_+(z,\delta)\setminus\{z\}} + \int\limits_{s_-(z,\delta)\setminus\{z\}} \right\} \left[\phi(\varsigma)\right]^n d_\varsigma \arg(\varsigma - z)$$

$$+\frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{\mathrm{int}} \operatorname{Im}\left[i\upsilon(t,\theta;\delta)\right] dt + (\alpha_z - 1)e^{in\theta}.$$

e^{int}, $n > n_0$ için $T_\theta(t)$'ye dikey olduğundan

$$F_n(z) - [\phi(z)]^n = \frac{1}{\pi}\left\{ \int\limits_{s_+(z,\delta)\setminus\{z\}} + \int\limits_{s_-(z,\delta)\setminus\{z\}} \right\} [\phi(\varsigma)]^n d_\varsigma \arg(\varsigma - z)$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{\mathrm{int}} \operatorname{Im}[i\upsilon(t,\theta;\delta) - iT_\theta(t)]\, dt + (\alpha_z - 1)e^{in\theta}$$

ve böylece

$$\left|F_n(z) - [\phi(z)]^n\right| \le \frac{1}{\pi}\left\{ \int\limits_{s_+(z,\delta)\setminus\{z\}} + \int\limits_{s_-(z,\delta)\setminus\{z\}} \right\} \left|d_\varsigma \arg(\varsigma - z)\right| + \left|\alpha_z - 1\right|$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \left|\upsilon(t,\theta;\delta) - T_\theta(t)\right| dt.$$

Eğer z, Γ 'nın köşesi değilse $|\alpha_z - 1| = 0$ olur ve (1.4) ve (1.5)'ten varsayımımız doğru olur.

Eğer z, Γ 'nın köşesi ise, $0 \le |\alpha_z - 1| < 1$ olur ve bundan dolayı (1.4) ve (1.5)'ten yine (1.7)'i elde ederiz. İspatı bitirmiş oluruz. □

Önerme 3.5 : [15] Γ sivrileri olmayan bir BR eğri ve $X(\Gamma)$ Γ üzerinde non-trivial Boyd indislerine sahip Simetrik Banach Fonksiyon Uzayı olsun. S_Γ lineer operatörü $X(\Gamma)$ üzerinde sınırlıdır. Yani,

$$\|S_\Gamma f\|_{X(\Gamma)} \le c.\|f\|_{X(\Gamma)}, \quad f \in X(\Gamma)$$

olacak şekilde bir $c > 0$ sabitin var olması için gerek ve yeter koşul Γ 'nın bir Carleson eğrisi olmasıdır.

3.3 Ana Sonucun İspatı: Öncelikle yeterince büyük n için F_n Faber polinomlarının bütün köklerinin G 'de olduğunu [12]'dekine benzer bir şekilde gösterelim.

$$\kappa := \max_{z\in\Gamma} |\alpha_z - 1|, \quad z \in \Gamma$$

alalım.

(1.2)'den $0 \le \kappa < 1$ olduğunu biliyoruz. Önerme 3.4'te $\varepsilon := \frac{1-\kappa}{2}$ koyarak, yeterince büyük n için,

$$\left| F_n(z) - \phi(z)^n \right| < \frac{1+\kappa}{2}, \quad z \in \Gamma \tag{1.8}$$

elde ederiz.

$F_n(z) - \phi(z)^n$, $C\overline{G} := \overline{\mathbf{C}} \setminus \overline{G}$ üzerinde analitik olduğunda maksimum prensibinden

$$\left| F_n(z) - \phi(z)^n \right| < \frac{1+\kappa}{2}, \quad z \in CG$$

elde ederiz. Böylelikle,

$$|F_n(z)| \ge |\phi(z)|^n - \frac{1+\kappa}{2} \ge \frac{1-\kappa}{2} > 0, \quad z \in CG$$

olur. Bu bize teoremin ilk kısmını verir.

$P_{n-1}(z)$, $E_X(G)$'de f'e en iyi yaklaşan $(n-1)$ nci dereceden cebirsel polinom olsun. Böylece $L_n(f,.)$ lineer operatörü $E_X(G)$'de sınırlı olduğunda

$$\| f - L_n(f,\cdot)\|_{E_X(G)} = \| f - P_{n-1} - L_n(f - P_{n-1},\cdot)\|_{E_X(G)}$$

$$\leq \ 1 + \|L_n\| \ \| f - P_{n-1}\|_{E_X(G)}$$

olur.

Şimdi sadece yeterince büyük n değerleri için, $L_n(f,z)$ operatörünün $E_X(G)$'de düzgün sınırlı olduğunu gösterirsek ispat tamamlanır.

İnterpolasyon noktalarını Faber polinomlarının kökleri olarak seçerek, $z' \in G$ için

$$f(z') - L_n(f,z') = \frac{F_n(z')}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\varsigma)}{F_n(\varsigma)\ \ \varsigma - z'} d\varsigma$$

$$= F_n(z') \left(H \left[\frac{f}{F_n} \right] \right) (z').$$

$z' \to z \in \Gamma$ limiti teğetsel olmayan yollar boyunca Γ içinden alınarak

$$\| f - L_n(f,\cdot)\|_{E_X(G)} = \left\| F_n(z) \cdot \left(H \left[\frac{f}{F_n} \right] \right)(z) \right\|_{E_X(\Gamma)}$$

$$\leq \ \max_{z\in\Gamma} |F_n(z)| \ \cdot \left\| H \left[\frac{f}{F_n} \right] \right\|_{E_X(\Gamma)}$$

olur. Önerme 3.5'ten

$$\| f - L_n(f,\cdot)\|_{E_X(G)} \leq c_1. \ \max_{z\in\Gamma} |F_n(z)| \ \cdot \left\| \frac{f}{F_n} \right\|_{E_X(\Gamma)}$$

$$\le c_1 \cdot \left\{ \max_{z,\varsigma\in\Gamma} \left| \frac{F_n(z)}{F_n(\varsigma)} \right| \right\} \cdot \| f \|_{E_X(\Gamma)} .$$

(1.8)'den

$$\frac{1-\kappa}{2} < \left| F_n(z) \right| < \frac{3+\kappa}{2}, \qquad z \in \Gamma$$

olur ve böylece

$$\| f - L_n(f,\cdot) \|_{E_X(G)} \le c_1 \cdot \frac{3+\kappa}{1-\kappa} \cdot \| f \|_{E_X(\Gamma)} .$$

Diğer taraftan

$$\| L_n(f,\cdot) \|_{E_X(G)} \le \| f \|_{E_X(G)} + \| f - L_n(f,\cdot) \|_{E_X(G)}$$

$$\le \left(1 + c_1 \cdot \frac{3+\kappa}{1-\kappa} \right) \cdot \| f \|_{E_X(\Gamma)} ,$$

olduğunda, $c_2 := 1 + c_1 \cdot \dfrac{3+\kappa}{1-\kappa}$ seçerek $\| L_n \| \le c_2$ elde ederiz. Böylelikle

$$\| f - L_n(f,\cdot) \|_{E_X(G)} \le (1+c_2) \| f - P_{n-1} \|_{E_X(\Gamma)}$$

$$= c_3 \cdot E_{n-1}(f,G)_X$$

bulunur.

SONUÇ

Bu tezde elde edilen yeni sonuçlar üçüncü bölümü oluşturmaktadır.

Üçüncü bölümde sivri içermeyen sınırlı rotasyonlu sınıra sahip bölgeler üzerinde tanımlı Simetrik Smirnov Uzayında alınan bir fonksiyona kompleks interpolasyon polinomları ile yaklaşım hızı incelenmiştir. En iyi yaklaşımı veren cebirsel polinomun yaklaşım hızı ile Faber polinomlarının köklerine göre oluşturulan kompleks interpolasyon polinomunun hızının aynı olduğu ispatlanmıştır.

KAYNAKLAR

[1] Başkan T., Kompleks Fonksiyonlar Teorisi, Nobel Yayınları, 5. Basım, (2005), s.89.

[2] Goluzin G. M., Geometric Theory Of Functions Of A Complex Variable, Translations Of Mathematical Monographs, Amer. Math. Soc., Vol. 26, (1969), p.417.

[3] Böttcher A., Karlovich Y. I., Carleson Curves, Muckenhoupt Weights and Toeplitz Operators, Chemnitz, (1997), p.2.

[4] Zhong L. and Zhu L., ‘‘Convergence Of The Interpolants Based On The Roots Of Faber Polynomials’’, Acta Math. Hungar. 65, No. 3, (1994), p.273.

[5] Gaier D., Lectures On Complex Approximation, Birkhauser, Boston, (1987), p.45.

[6] Suetin P. K., Series Of Faber Polynomials, Gordon and Breach, Science Publishers (1998), p.33.

[7] Bennett C., Sharpley R., Interpolation Of Operators, Academic Pres Inc., Orlando, Florida, (1988), p.2.

[8] Güven A. and İsrafilov D. M., ‘‘Approximation In Rearrengement Invariant Spaces On Carleson Curves’’, East Journal On Approximations, Vol.12, No. 4, (2006), p.381.

[9] Jakimovski A., Sharma A., Szabados J., Walsh Equiconvergence Of Complex Interpolating Polynomials, Springer, (2006), p.1.

[10] Shen X. C. and Zhong L., ‘‘On Lagrange Interpolation In $E^p(D)$ For $1 < p < \infty$ ’’, Adv. Math. 18, (1989), p.342, (Chinese).

[11] Zhu L. Y., ‘‘A Kind Of Interpolation Nodes, Adv. Math.’’, (1994), (Chinese).

[12] Akgün R. and İsrafilov D. M., ‘‘Approximation By Interpolating Polynamials In Smirnov-Orlicz Class’’, J. Korean Math. Soc. 43, No.2, (2006), p.413.

[13] Pommerenke Ch., ‘‘Conforme Abbildung Und Fekete-Punkte’’, Math. Z. 89 (1965), p.422.

[14] Anderson J. M. And Clunie J., ‘‘Isomorphisms Of The Disc Algebra And Inverse Faber Sets’’, Math. Z.188, No:4, (1985), p.545.

[15] Karlovich A. Yu., ‘‘Singular İntegral Operators With Piecewise Continuous Coefficients In Reflexive Rearrangement-Invariant Spaces’’, Integr. Equat. Oper. Theory 32, (1998), p.436.