T.C.

BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORLICZ UZAYLARINDA POLİNOMLARLA YAKLAŞIM

DOKTORA TEZİ

HÜSEYİN KOÇ

BALIKESİR, MAYIS 2015

T.C.

BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORLICZ UZAYLARINDA POLİNOMLARLA YAKLAŞIM

DOKTORA TEZİ

HÜSEYİN KOÇ

BALIKESİR, MAYIS 2015

KABUL VE ONAY SAYFASI

Hüseyin KOÇ tarafından hazırlanan **"ORLICZ UZAYLARINDA POLİNOMLARLA YAKLAŞIM"** adlı tez çalışmasının savunma sınavı 22/05/2015 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Doç. Dr. Ramazan AKGÜN	....
Üye Prof. Dr. Ali GÜVEN	....
Üye Doç. Dr. Yunus Emre YILDIRIR	....
Üye Doç. Dr. Burçin OKTAY YÖNET	....
Üye Yrd. Doç. Dr. Ahmet DELİL	....

Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Doç. Dr. Necati ÖZDEMİR ....

Bu tez çalışması Balıkesir Üniversitesi Rektörlüğü Bilimsel Araştırma Projeleri tarafından 2015/132 nolu proje ile desteklenmiştir.

ÖZET

ORLICZ UZAYLARINDA POLİNOMLARLA YAKLAŞIM
DOKTORA TEZİ
HÜSEYİN KOÇ
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. RAMAZAN AKGÜN)

BALIKESİR, MAYIS 2015

Bu çalışma 4 bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, bazı temel tanım ve teoremler ile bu çalışmada bize gerekli eşitsizlikler verilmiştir.

İkinci bölümde önce klasik anlamda Orlicz sınıfı ve L_{φ}^{*} Orlicz uzayı tanımlanmıştır. Sonra L_{φ}^{*} Orlicz uzayından daha geniş ve benzer özelliklere sahip olan L_{φ}^{**} Orlicz uzayı tanımlanmış ve bu uzayın temel özellikleri ele alınmıştır.

Üçüncü bölümde konvekslik olma şartı bulunmayan Young fonksiyonları ile üretilen L_{φ}^{**} Orlicz uzaylarında cebirsel/trigonometrik polinomlarla aynı anda yaklaşım problemleri ifade edilmiş ve elde edilen sonuçlar ispatlanmıştır.

Dördüncü bölümde ise Muckenhoupt koşulunu sağlayan ağırlıklarla oluşturulan $L_{\varphi,\omega}^{**}$ ağırlıklı Orlicz uzaylarında aynı anda trigonometrik yaklaşım teoremleri ispatlanmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Orlicz sınıfı, Orlicz uzayı, cebirsel/trigonometrik polinomlarla yaklaşım, aynı anda yaklaşım, Muckenhoupt ağırlıkları, düzgünlük modülü, Jackson ve Bernstein eşitsizlikleri.

ABSTRACT

APPROXIMATION BY POLYNOMIALS IN ORLICZ SPACES
PH. D. THESIS
HÜSEYİN KOÇ
BALIKESİR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS
(SUPERVISOR: ASSOC. PROF. DR. RAMAZAN AKGÜN)

BALIKESİR, MAY 2015

This thesis consists of four chapters.

In the first chapter, some basic definitions, theorems and some inequalities which are used in this thesis are given.

In second chapter firstly Orlicz classes and classical Orlicz spaces L_{φ}^{*} are defined. Later definition of another class of functions which is wider than the classical Orlicz spaces L_{φ}^{*} is given. The wider class is denoted by L_{φ}^{**} and the generating function φ is not necessary to be convex. Moreover its general properties and some applications of the class L_{φ}^{**} are investigated.

In third chapter some theorems on simultaneous approximation by trigonometric or algebraic polynomials in Orlicz spaces L_{φ}^{**} constructed by Young functions belonging to a reasonably wide class are proved.

In fourth chapter main theorems of simultaneous trigonometric approximation with Muckenhoupt weights in weighted Orlicz spaces $L_{\varphi,\omega}^{**}$ with a generating Young function φ that may be non convex are proved.

KEYWORDS: Orlicz class, Orlicz space, trigonometric/algebraic polynomial approximation, simultaneous approximation, Muckenhoupt weights, modulus of smoothness, Jackson and Bernstein inequalities.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

Simge	**Adı**
N	Doğal sayılar kümesi
R	Reel sayılar kümesi
I	$[a,b]\subset R$ aralığı
$\mathbb{T}$	2π uzunluklu aralık
T_n	n dereceli trigonometrik polinom
P_n	n dereceli cebirsel polinom
φ	Young fonksiyonu
ψ	Tümleyen Young fonksiyonu
$E_n(f)$	En iyi yaklaşım sayısı
ω	Ağırlık fonksiyonu
A_p	Muckenhoupt sınıfı
L_φ	Orlicz sınıfı
L_φ^*	Klasik Orlicz uzayı
L_φ^{**}	Genelleştirilmiş Orlicz uzayı
$Lip\alpha$	Lipschitz sınıfı
$K_{r,\varphi}^{v}(f,t)$	$K-$fonksiyoneli
$\omega_{r,\langle\varphi\rangle}(f,t)$	$f\in L_\varphi^{**}$ için r inci düzgünlük modülü
$\Omega_r(f,\delta)_{\langle\varphi\rangle,\omega}$	$f\in L_{\varphi,\omega}^{**}$ için r inci düzgünlük modülü
$L_{\varphi,\omega}^*$	Klasik ağırlıklı Orlicz uzayı
$L_{\varphi,\omega}^{**}$	Genelleştirilmiş ağırlıklı Orlicz uzayı
$S_n(f)$	f nin Fourier serisinin $n.$ kısmi toplamı
$F_n(u)$	Fejer çekirdeği
$K_n(u)$	Drichlet çekirdeği

ÖNSÖZ

Bu çalışmamda da engin matematik bilgisini ve deneyimini hiçbir zaman esirgemeyen; bilim öğrenmede ve üretmede rehberim, danışman hocam Doç. Dr. Ramazan AKGÜN'e gönülden teşekkürlerimi sunarım.

Lisansüstü eğitimim süresince kendimi geliştirmemde büyük katkıları olan değerli hocalarım; Prof. Dr. Daniyal İSRAFİLZADE, Prof. Dr. Ali GÜVEN ve Doç. Dr. Yunus Emre YILDIRIR'a teşekkür ederim.

Manevi desteklerini esirgemeyen ağabeyim Ahmet KOÇ, ablam Emine BERBEROĞLU ve anne-babama sevgi ve saygılarımı sunar teşekkür ederim.

Lisansüstü eğitimi yapmamda her zaman destek olan ve ailemle geçirdiğim zamanımın bir kısmını doktora eğitimime ayırmamı sabırla karşılayıp hoşgörü gösteren meslektaşım, canım kızım Aybüke ile canım oğlum Aybars'ın annesi, çok kıymetli eşim Şefika KOÇ'a teşekkürlerimi sunarım. Var olun…

1. ÖN BİLGİLER

1.1 Sınırlı Küme ve Tamamen Sınırlılık

(M,d) bir metrik uzay ve $A \subset M$ olsun. $\forall x, y \in A$ için $d(x,y) < c$ olacak şekilde bir $c > 0$ sayısı varsa A ya sınırlı küme denir [1, s.29].

$\varepsilon > 0$ verildiğinde $A \subseteq \cup\{B(x_k;\varepsilon) : 1 \le k \le n\}$ koşulunu sağlayan A nın sonlu bir $E = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ altkümesine A için $\varepsilon -$ ağ adı verilir. $\varepsilon > 0$ verildiğinde A için $\varepsilon -$ ağ varsa yani herhangi bir $\varepsilon > 0$ için A, merkezleri A içinde olan ε yarıçaplı açık yuvarların sonlu bir birleşimi tarafından örtülebiliyorsa, A ya tamamen sınırlı küme denir [1, s.30].

1.2 Kompakt Küme

(M,d) bir metrik uzay olsun. Bir $A \subset M$ kümesindeki her $\{x_n\}$ dizisi A nın bir elemanına yakınsayan bir alt diziye sahipse A ya kompakt küme denir [1, s.34].

1.3 Cebirsel Polinom ve Trigonometrik Polinom

$a_0, a_1, ..., a_n \in R$ ve $a_n \neq 0$ olmak üzere,

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

fonksiyonuna n dereceli bir cebirsel polinom denir.

$n \in \mathbf{N}$, $a_k, b_k \in R,\ k = 1, 2, ..., n$ ve $|a_n| + |b_n| > 0$ olmak üzere,

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx \right)$$

fonksiyonuna n dereceli reel trigonometrik polinom denir [3, s.1].

1.4 Mutlak Sürekli Fonksiyon

$f:[a,b]\to R$ fonksiyonu verilmiş olsun. Her $\varepsilon>0$ için $[a,b]$ aralığının $\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\delta$ biçimindeki her $\{(a_i,b_i)\}_{i=1}^{n}$ ayrık alt aralıkları için $\sum_{i=1}^{n}|f(b_i)-f(a_i)|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta>0$ varsa f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde mutlak süreklidir denir.

1.5 Weierstrass Yaklaşım Teoremi

Teorem 1.5.1: $[a,b]$ aralığında sürekli f reel fonksiyonlarına düzgün yaklaşan bir P cebirsel polinomu vardır. Yani $\forall\varepsilon>0$ için

$$|f(x)-P(x)|<\varepsilon,\ a\le x\le b$$

koşulunu sağlayan n dereceli bir P cebirsel polinomu vardır [3, s.2].

Teorem 1.5.2 : $\mathbb{T}$ aralığında sürekli f fonksiyonlarına düzgün yaklaşan bir T trigonometrik polinomu vardır. Yani $\forall\varepsilon>0$ için

$$|f(x)-T(x)|<\varepsilon,\ x\in\mathbb{T}$$

koşulunu sağlayan n dereceli bir T cebirsel polinomu vardır [3, s.2].

1.6 En İyi Yaklaşım

X bir normlu uzay, Y uzayı X in bir lineer alt uzayı ve $f\in X$ olsun.

$$E(f):=E(f,Y)_X:=\inf\{\|f-P\|:\ P\in Y\}$$

sayısına f nin Y alt uzayının elemanları ile en iyi yaklaşımı (yaklaşım hatası) denir [3, s.82].

1.7 Aynı Anda Yaklaşım

P_n cebirsel polinomu f fonksiyonuna yaklaşıyor iken P_n in türevi f nin türevine yaklaşıyor ise oluşan bu duruma aynı anda yaklaşım adı verilir [3, s.245].

1.8 Konveks Fonksiyon

Sürekli $M: R \to R$ fonksiyonu verildiğinde bütün $u_1, u_2 \in R$ değerleri için

$$M\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left[M(u_1)+M(u_2)\right]$$

eşitsizliği sağlanıyorsa M fonksiyonuna konveks fonksiyon denir [2, s.1].

1.9 $N-$Fonksiyonu ve Tümleyen $N-$Fonksiyonu

Bir $\Phi(u)$ fonksiyonu

$$\Phi(u) := \int_0^{|u|} \varphi(t)dt$$

gösterimine sahipse $\Phi(u)$ fonksiyonuna $N-$fonksiyonu denir. Burada $\varphi(t)$, $t \geq 0$ için sağ sürekli, $t > 0$ için azalmayan, pozitif ve $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\infty) := \lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty$ koşullarını sağlayan bir fonksiyondur.

$$\psi(s) := \sup_{\varphi(t)\leq s} t, \ \ (s \geq 0)$$

olmak üzere

$$\Psi(u) := \int_0^{|u|} \psi(s)ds$$

fonksiyonuna $\Phi(u)$ fonksiyonunun tamamlayıcı (tümleyen) fonksiyonu denir [2, s.11].

1.10 Young Eşitsizliği

$\varphi(u)$ ve $\psi(u)$ tümleyen $N-$fonksiyonları çifti ise

$$uv \leq \varphi(u) + \psi(v)$$

eşitsizliği bütün u, v değerleri için geçerlidir. Buna Young eşitsizliği denir [2, s.12].

1.11 Δ_2 Koşulu

$\varphi(u)$ bir $N-$fonksiyon olsun. Eğer

$$\varphi(2u) \leq k\varphi(u), \ (u \geq u_0)$$

olacak şekilde bir $k > 0$ ve bir $u_0 \geq 0$ varsa $\varphi(u)$ fonksiyonu Δ_2 koşulunu sağlar denir [2, s.23].

1.12 Lipschitz Koşulu

f fonksiyonu $[a,b] \subset R$ aralığında tanımlı olsun. Eğer her $t_1, t_2 \in [a,b]$ için

$$\left| f(x_1) - f(x_2) \right| \leq M \left| x_1 - x_2 \right|^{\alpha}$$

koşulunu sağlayacak biçimde $\exists M > 0$ varsa f fonksiyonu Lipschitz koşulunu ($Lip\alpha$ koşulunu) sağlıyor denir [3, s.51].

2. L_φ^{**} ORLICZ UZAYI

2.1 Giriş

Bu bölümde klasik Orlicz uzayının bazı özelliklerini göz önüne alacağız. Negatif olmayan, konveks, orijinde 0 olan bir $\varphi(u)$ fonksiyonu $u \to \infty$ için $\frac{\varphi(u)}{u} \to \infty$ özelliğini sağlasın. $\psi(u)$ Young anlamında $\varphi(u)$ fonksiyonunun tümleyeni olsun.

$\varphi(u)$ bir $N-$fonksiyonu olsun. L_φ, $I := [a,b] \subset \mathrm{R}$ olmak üzere

$$\rho(u;\psi) := \int_I \varphi\left[|u(x)|\right] dx < \infty$$

koşulunu sağlayan ölçülebilir $u : I \to R$ fonksiyonlarının kümesi olsun. L_φ sınıflarına Orlicz sınıfı denir.

$x : I \to R$ fonksiyonu göz önüne alındığında ölçülebilir $y(t) \in L_\psi(a,b)$

$$\|x\|_\varphi = \sup_{\rho(y,\psi)\le 1} \left| \int_I x(t)\, y(t)\, dt \right| < \infty \tag{2.1}$$

koşulunu sağlayan ölçülebilir $x : I \to R$ fonksiyonlarının sınıfı L_φ^* ile gösterilir. Bu sınıf Orlicz uzayı olarak adlandırılır.

Eğer $\varphi(u)$, Δ_2 koşulunu sağlarsa L_φ ve L_φ^* denk olurlar (çakışırlar) [2, s.23].

Biz bu bölümde L_φ^* Orlicz uzayından daha geniş olan L_φ^{**} fonksiyon uzayı hakkında bilgi vereceğiz.

Kolaylık olsun diye bu çalışmada her yerde C ve c ile değişik yerlerdeki temel parametrelere bağlı farklı sabitler ifade edilecektir.

2.2 Gösterimler

(1) $\varphi(x) \sim [p_1, p_2],\ 0 \le p_1 \le p_2 \le \infty$ (ya da benzer şekilde $-\infty \le p_1 \le p_2 \le 0$) ile $x,\ (0,\infty)$ aralığında artarken $\varphi(x)x^{-p_1}$ azalmayan, $\varphi(x)x^{-p_2}$ artmayan koşullarını sağlayan $\varphi(x) \ge 0$ çift fonksiyonların sınıfını gösteririz.

(2) $\varphi(x) \sim [p_1, \infty]$ ile $x,\ (0,\infty)$ aralığında artarken $\varphi(x)x^{-p_1}$ azalmayan $\varphi(x)$ fonksiyon sınıflarını gösteririz.

(3) $\varphi(x) \sim [p_1, \infty\rangle$ ile öyle bir $N \ge p_1$ pozitif sabiti vardır ki $\varphi(x) \sim [p_1, N]$ özelliğinin sağlandığı $\varphi(x)$ fonksiyonlarının sınıfını gösteririz.

(4) $\varphi(x) \sim \langle p_1, p_2\rangle,\ 0 \le p_1 \le p_2 < \infty$ (ya da benzer şekilde $-\infty < p_1 \le p_2 \le 0$) ile bir $\varepsilon > 0$ için $\varphi(x) \sim [p_1 + \varepsilon, p_2 + \varepsilon]$ koşulunun sağlandığı $\varphi(x)$ fonksiyonlarının sınıfını gösteririz.

(5) Benzer şekilde $p_1 > p_2$ için $\varphi(x) \sim [p_2, \infty\rangle$, $\varphi(x) \sim \langle p_1, p_2]$ tanımlanır.

$M(a,b),\ 1 \le a \le b < \infty$ ile $0 \le x < \infty$ için $\varphi(0) = 0$ ve $u \to \infty$ için

$$\varphi(2u) = c.\varphi(u) \Rightarrow \varphi(2u) = O\{\varphi(u)\}, \tag{2.2}$$

$$\int_u^\infty \frac{\varphi(t)}{t^{b+1}}\,dt = O\left\{\frac{\varphi(u)}{u^b}\right\}, \tag{2.3}$$

$$\int_1^u \frac{\varphi(t)}{t^{a+1}}\,dt = O\left\{\frac{\varphi(u)}{u^a}\right\} \tag{2.4}$$

koşullarını sağlayan, sürekli, azalmayan $\varphi(x) \ge 0$ fonksiyonlarının ailesini gösteririz.

$Z(a,b)$ ile yukarıdaki (2.2) ve (2.4) koşullarına ek olarak $u \to 0^+$ iken

$$\varphi(2u) = O\{\varphi(u)\}, \tag{2.5}$$

$$\int_u^1 \frac{\varphi(t)}{t^{b+1}}\,dt = O\left\{\frac{\varphi(u)}{u^b}\right\}, \tag{2.6}$$

$$\int_0^u \frac{\varphi(t)}{t^{a+1}}\,dt = O\left\{\frac{\varphi(u)}{u^a}\right\} \tag{2.7}$$

koşullarını sağlayan $\varphi(x) \in M(a,b)$ fonksiyonlarının ailesini gösteririz.

2.3 L_{φ}^{**} Fonksiyon Uzayı

Önerme 2.3.1: Eğer $\varphi(x) \sim [a,b\rangle$, $0 \le a < b < \infty$ ve N herhangi pozitif sayı ise $\varphi(x)$, $(-N,N)$ aralığında mutlak süreklidir. Eğer $\varphi(x) \sim \langle -\infty, 0]$ ve ε herhangi pozitif bir sayı ise $\varphi(x)$, (ε,∞) aralığında mutlak süreklidir.

İspat : Öncelikle ilk kısmı ispatlayalım. İkinci kısım $\varphi(x) \sim \langle -\infty, 0]$ için benzer bir yol izlenebilir. $\varphi(x)=0$ almak genelliği bozmaz. $\varphi(x)$ $(0,\infty)$ aralığında artan olduğundan herhangi bir ε için öyle bir $\delta > 0$ bulunabilir ki
$\delta = \delta(\varphi,\varepsilon)$, $\varphi(\delta) < \varepsilon/2$ olur.
(δ, N) aralığını göz önüne alalım. Eğer $\delta \le x_1 < x_2 \le N$ ise

$$\frac{\varphi(x_2)}{x_2^b} \le \frac{\varphi(x_1)}{x_1^b}, \tag{2.8}$$

$$\varphi(x_2) - \varphi(x_1) \le \varphi(x_2).\left\{ \left(x_2/x_1 \right)^b - 1 \right\} \le \frac{\varphi(x_1)}{x_1^b} \left| x_2^b - x_1^b \right|$$

$$\le \left\{ \varphi(\delta)\big/\delta^b \right\} \left| x_2^b - x_1^b \right| = K_{\delta,\varphi} \left| x_2^b - x_1^b \right| \tag{2.9}$$

olur.

$y = x^b$ $(0,N)$ aralığında mutlak sürekli olduğunda, n herhangi bir tamsayı olmak üzere

$$\sum_1^n \left| x_{r+1} - x_r \right| < \delta' = \delta'(\varphi,\varepsilon), \; x \in (0,N)$$

ve

$$\sum_{r=1}^n \left| \varphi(x_{r+1}) - \varphi(x_r) \right| \le \varphi(\delta) + K_{\delta,\varphi} \sum_{r=1}^n \left| x_{r+1}^b - x_r^b \right| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \tag{2.10}$$

elde ederiz.

$\varphi(x)$ çift olduğundan, $(-N,N)$ aralığında mutlak süreklidir.

Teorem 2.3.1: Eğer $\varphi(x) \sim \langle a,b \rangle,\ 1 \le a < b < \infty$ ise $\varphi(x) \in Z(a,b)$'dir.

$A := \{ f : f \sim \langle a,b \rangle,\ 1 \le a < b < \infty \}$,

$B := \{ f : f, Kx^a$ ile Kx^b arasında düzensiz artan fonksiyonlar$\}$ olmak üzere $A \subset B$ olur [4].

Biz şimdi L_φ^* Orlicz uzayından daha geniş ve benzer bazı özelliklere sahip olan L_φ^{**} uzayını tanımlayalım.

$\varphi(x) \sim [p_1, p_2],\ 1 \le p_1 \le p_2 \le \infty$ ile $t \to \infty$ ise $\varphi_1(t) = \varphi(t)/t \to \infty$ alalım (eğer koşul $1 < p_1 \le p_2 \le \infty$ ise $\varphi_1(t) \to \infty,\ t \to \infty$ koşulu zaten sağlanır). $\psi_1(t)$, $\varphi_1(t) = \varphi(t)/t$ fonksiyonunun ters fonksiyonu olsun. $\psi_1(t)$ azalmayan, sürekli ve pozitiftir.

$$\Phi_1(x) := \int_0^x \varphi_1(t)dt \ \text{ ve } \ \Psi_1(x) := \int_0^x \psi_1(t)dt$$

yazalım.

Buradan Φ_1, Ψ_1 konveks birer fonksiyon olurlar ve böylece Φ_1 ile Ψ_1 Young anlamında tümleyen fonksiyon olurlar.

$x(t) : I \to R$ fonksiyonu verildiğinde $x(t)y(t)$ çarpımı I aralığı üzerinde her $y(t) \in L_{\psi_1}(a,b)$ için integrallenebilir olmak üzere

$$\|x(t)\|_{\langle\varphi\rangle} = \sup_y \left| \int_I x(t)y(t)dt \right| \tag{2.11}$$

Orlicz normunu tanımlayalım. Burada supremum

$$\rho_y = \int_I \Psi_1(|y(t)|)dt \le 1 \tag{2.12}$$

koşulunu sağlayan y ler üzerinden alınmaktadır.

Böyle $x(t)$ fonksiyonlarının oluşturduğu sınıfı $L_\varphi^{**} = L_\varphi^{**}(I)$ ile göstereceğiz.

Kolaylıkla görülebilir ki eğer $\varphi(x) = x^p,\ p > 1$ ise L_φ^{**} klasik L_p uzayına dönüşür.

Önerme 2.3.2: Eğer $\varphi(x)$ negatif olmayan, konveks, $\varphi(0)=0,\ \varphi(2x)\le k\varphi(x)$ koşulunu sağlarsa öyle bir $m<\infty$ bulunabilir ki $\varphi(x)\sim[1,m\rangle$ olur.

İspat : $\varphi(0)=0,\ \varphi(x)\ge 0$ ve φ konveks olduğundan, x artarken $\dfrac{\varphi(x)}{x}$ azalmayandır. $\dfrac{\varphi(x)}{x^m}$ in azalan olduğunu göstermek için $0<x_1<x_2<\infty,\ 1<x_2/x_1<2$ durumunu göz önüne almak yeterlidir.

$x_2=x_1+\Delta x,\ \Delta x<x_1$ yazarak ve negatif olmayan, azalmayan $p(t)$ için [4, s.65] $\varphi(x)=\int_0^x p(t)dt$ yazalım.

$F(a,0)=0$ ve $\partial F/\partial x\equiv a(1+x)^{a-1}-a>0$ olduğundan $F(a,x)\equiv(1+x)^a-(1+ax)$ fonksiyonu $a>1$ ve $x>0$ için pozitiftir.

Buradan

$$\frac{\varphi(x_2)}{\varphi(x_1)}=\frac{\varphi(x_1+\Delta x)}{\varphi(x_1)}=\frac{\varphi(x_1)+\int_{x_1}^{x_1+\Delta x}p(t)dt}{\int_0^{x_1}p(t)dt}$$

$$<1+\frac{\int_{x_1}^{x_1+\Delta x}p(x_2)dt}{\int_{x_1/2}^{x_1}p(x_1/2)dt}=1+\left\{\frac{2p(x_2)}{p(x_1/2)}\right\}\left(\frac{\Delta x}{x_1}\right), \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}2x_1p(x_2)&\le 2x_1p(2x_1)<\left(\int_{2x_1}^{4x_1}+\int_0^{2x_1}\right)p(t)dt=\varphi(4x_1)\\&\le k^3\varphi(x_1/2)=k^3\int_0^{x_1/2}p(t)dt\le\frac{x_1}{2}k^3p(x_1/2)\end{aligned} \tag{2.14}$$

elde ederiz.

Buradan

$$p(x_2)\le\frac{1}{4}k^3p(x_1/2) \tag{2.15}$$

ve $m = 1 + \frac{1}{2}k^3$ alınarak

$$\frac{\varphi(x_2)}{\varphi(x_1)} < 1 + \frac{1}{2}k^3\left(\frac{\Delta x}{x_1}\right) < 1 + \left(1 + \frac{1}{2}k^3\right)\left(\frac{\Delta x}{x_1}\right) < \left\{1 + \frac{\Delta x}{x_1}\right\}^{1+\frac{1}{2}k^3} = \left(x_2/x_1\right)^m \tag{2.16}$$

olur.

$x_2/x_1 > 2$ durumunda $\left(x_2/x_1\right) = \left(x_2/x_3\right)\left(x_3/x_4\right)...\left(x_p/x_1\right)$ şeklinde yazılabilir ve bu $m = 1 + \frac{1}{2}k^3$ ile Önerme 2.3.2 ispatı tamamlanır.

Önerme 2.3.3: $\varphi(x) \sim [p_1, p_2],\ 1 \le p_1 \le p_2 < \infty$ alalım. O zaman

$$p_1 \le \frac{\varphi(x)}{\int_0^x \{\varphi(t)/t\}\,dt} = \frac{\varphi(x)}{\int_0^x \varphi_1(t)dt} = \frac{\varphi(x)}{\Phi_1(x)} \le p_2 \tag{2.17}$$

olur.

İspat : $\varphi(x)/x^{p_1}$ azalmayan ve $\varphi(x)/x^{p_2}$ artmayan olduğundan, bu ifadelerin diferansiyelini aldığımızda, bütün x ler için

$$p_1 \le \frac{\varphi'(x)}{\{\varphi(t)/t\}} = \frac{\varphi'(x)}{\varphi_1(t)} \le p_2 \tag{2.18}$$

çıkar.

$\varphi(x)$ mutlak sürekli olduğundan $\varphi(x) = \int_0^x \varphi'(t)dt$ yazılabilir. Böylece sonuç bulunur.

Teorem 2.3.2:

a) Eğer $\varphi(x)$;

i. $\varphi(x)$ bir konveks fonksiyondur,

ii. $0 = \varphi(0) \le \varphi(x) \le \varphi(y),\ 0 < x < y$,

iii. $\varphi(x)/x \uparrow \infty,\ x \to \infty$,

iv. Bütün $u > 0$ 'lar için $\varphi(2u) \le K\varphi(u)$,

koşullarını sağlarsa

$$L_\varphi = L_\varphi^* = L_\varphi^{**}$$

olur. Diğer bir ifadeyle, $\{\varphi(x)\}$ konveks fonksiyonları için, $\{L_\varphi\}$, $\{L_\varphi^*\}$, $\{L_\varphi^{**}\}$ uzaylarında bu tanımlar denktir.

b) Genel durumda, $\{\varphi(x)\}$ sınıfının dışındaki her bir $\varphi(x)$ eğer aşağıdaki koşulları sağlarsa:

i. $\varphi(x) \sim [p_1, p_2],\ 1 \le p_1 \le p_2 < \infty$;

ii. $\varphi_1(t) = \varphi(t)/t \uparrow \infty,\ t \to \infty$;

$L_\varphi^* \subset L_\varphi^{**}$ olur. Tam olarak, (i) ve (ii) koşullarını sağlayan öyle bir $\varphi(x)$ fonksiyonu vardır ki $L_\varphi^* \subset L_\varphi^{**}$, $L_\varphi^* \ne L_\varphi^{**}$ olur. Diğer bir ifadeyle $\{L_\varphi^*\}$ uzaylarının sınıfı $\{L_\varphi^{**}\}$ uzaylarının sınıfının bir özalt sınıfı olur. (i) ve (ii) koşullarını sağlayan öyle bir $\varphi(x)$ bulunabilir ki L_φ^* de tanımlanamaz. (Yani L_φ^* de boş küme olur.)

İspat :

a) Eğer $\varphi(x)$, Δ_2 koşulunu sağlarsa, L_φ ve L_φ^* denk olurlar.[5, s. 172]

$\Phi_1(x) = \int_0^x \varphi_1(t)dt$ azalmayan bir fonksiyonun integrali olduğundan, $\Phi_1(x)$ konveks fonksiyon olur ve böylece $\Phi_1(x)/x$ azalmayandır. Önerme 2.3.2 ve Önerme 2.3.3 ten $\{\varphi(x)/x\} \to \infty$ iken $\{\Phi_1(x)/x\} \to \infty$ olur. Kolayca görülebilir ki

$$\Phi_1(2u) = \Phi_1(u) + \int_0^{2u} \varphi_1(t)dt \le \Phi_1(u) + K\int_{u/2}^{u} \varphi_1(t)dt \le K\Phi_1(u)$$

olduğundan Δ_2 koşulunu sağlar.

Böylece, bizim L_φ^{**} için yaptığımız tanımdan, $L_\varphi^{**} = L_{\Phi_1}^* = L_{\Phi_1}$ olur ve Önerme 2.3.3 ten $L_\varphi^{**} = L_{\Phi_1} = L_\varphi$ elde ederiz.

b) L_φ^* uzayında, konveks bir φ için $x \to \infty$ iken $\{\varphi(x)/x\} \to \infty$ olur. $\psi_1(t)$ ve $\psi(t)$ fonksiyonları sırasıyla $\varphi_1(t)$ ve $\varphi'(t)$ nin ters fonksiyonlarını ifade etsin. (2.18) ve Önerme 2.3.3 ün varsayımından $\varphi_1(t) \le \varphi'(t)$ olur. Böylece $\psi(t) \le \psi_1(t)$ ve

$$\Psi(x)=\int_0^x \psi(t)dt \le \int_0^x \psi_1(t)dt \le \Psi_1(x),\ (x>0)$$

bulunur.

Buradan $L_\varphi^* \subset L_\varphi^{**}$ olur ve L_φ^{**} de tanımlı x in normu, L_φ^* de tanımlı x in normu tarafından sınırlandırılmıştır.

L_φ^{**} nin L_φ^* den daha geniş olduğunu göstermek için, $\varphi(x) \sim [1,m\rangle$ fonksiyonunu göz önüne alabiliriz. $\varphi(x)$ fonksiyonu konveks değilse, L_φ^* tanımlanamaz.

$\varphi(x) \sim \langle 2,3\rangle$ alalım. O zaman $\varphi'(x)$ h.h. yerde mevcut olduğundan

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{\varphi(x)}{x^2}\right\}=\left\{\frac{\varphi'(x)}{x^2}-\frac{2\varphi(x)}{x^3}\right\}>0, \tag{2.19}$$

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{\varphi(x)}{x^3}\right\}=\left\{\frac{\varphi'(x)}{x^3}-\frac{3\varphi(x)}{x^4}\right\}<0 \tag{2.20}$$

olur ve

$$2\{\varphi(x)/x\}=2\varphi_1(x)<\varphi'(x)<3\varphi_1(x)=3\{\varphi(x)/x\} \tag{2.21}$$

dir.

Tersine, eğer (2.21) sağlanırsa $\varphi(x)/x^2 \uparrow (artan)$, $\varphi(x)/x^3 \downarrow (azalan)$ ve $\varphi(x) \sim \langle 2,3\rangle$ olur. Şimdi eğer biz öyle bir $\varphi(x)$ fonksiyonu inşa edersek öyle ki $\varphi'(x)$ her zaman azalmayan değilse $\varphi'(x)$, $2\{\varphi(x)/x\}$ ve $3\{\varphi(x)/x\}$ fonksiyonları ile sınırlı olur. O zaman $\varphi(x)$ konveks olmaz. (Eğer $\varphi(x)$ konveks ise $p(t)$ azalmayan olmak üzere $\varphi(x)=\int_0^x p(t)dt$ olur.) Bunu sonlandırmak için (2.21) deki terimlerin her birini $\varphi(x)$ ile bölelim ve sonra $x>1$ için üç terimin 1 den x e integralini alalım.

Buradan

$$x^2<\varphi(x)/\varphi(1)<x^3,\ (x>1) \tag{2.22}$$

elde ederiz.

$\varphi(1)=1$ ve

$$\varphi(x)=\begin{cases} x^{5/2}, & 0\le x\le 1 \\ x^{9/4}, & x>1 \end{cases} \tag{2.23}$$

alalım. Böylece tanımlanan $\varphi(x)$ fonksiyonu (2.21) i sağlar. Diğer taraftan, $\varphi'(x)$, $x=1$ hariç her yerde mevcuttur. $\varphi'(1^-)=5/2$ ve $\varphi'(1^+)=9/4$ olduğundan $\varphi(x)$ azalmayan fonksiyonun integraline eşit değildir. Böylece $\varphi(x)$ konveks bir fonksiyon değildir. Teorem 2.3.2 den L_φ^{**} nin Orlicz uzayından daha geniş olduğu ve yukarıdaki tanımlanan p_2 sonlu ise L_φ nin L_φ^{**} ye denk olmasını sonuçlandırırız.

Şimdi L_φ^{**} nin L_φ^{*} uzayının hemen hemen bütün özelliklerine sahip olduğunu göreceğiz. Gerçekten, [5, s.170-175]'deki benzer ifadelerle, $\varphi(t)/t$ nin azalmayan olması ve $\varphi(t)/t\to\infty,\ t\to\infty$ olmasından dolayı L_φ^{**} için benzer sonuçlar elde edilebilir.

Teorem 2.3.3: L_φ^{**} uzayı bir tam uzaydır.

Eğer bir $\theta>0$ sayısı bulunabilir ve $\varphi(t)\sim[p_1,p_2],\ 1\le p_1\le p_2<\infty$ için $\theta x(t)\in L_\varphi$ ise $x(t)\in L_\varphi^{**}$ olur. Tersine, eğer $x(t)\in L_\varphi^{**}$ ise sonlu bir p_2 ile bir $\theta>0$ bulunabilir ki $\theta x(t)\in L_\varphi$. Daha açıkçası şu Teoremi elde ederiz.

Teorem 2.3.4: Eğer $x(t)\in L_\varphi^{**}$, $p_2<\infty$, $\|x(t)\|_{\langle\varphi\rangle}\neq 0$ ise

$$\int_I \varphi\left\{|x(t)|/\|x(t)\|_{\langle\varphi\rangle}\right\}dt\le C$$

olur.

Bu [5, s.171]'deki ifadeden ve (2.18)'den çıkar.

Teorem 2.3.5 [4]**:**

(a)Eğer her $x(t) \in L_{\varphi}^{**}(I)$ için

$$u(x) = \int_I x(t)\,y(t)dt$$

sınırlıysa $y(t) \in L_{\Psi_1}^{**}$ olur.

(b)Eğer bütün $x(t) \in L_{\varphi}^{**}$ ler için

$$u_n(x) = \int_I x(t)\,y_n(t)dt$$

dizisi sınırlıysa $L_{\Psi_1}^{**}$ uzayında $n \to \infty$ için $\|y_n(t)\|_{\Psi_1} = O(1)$ olur.

(c) Eğer (b) deki dizi her $x(t) \in L_{\varphi}$ için sınırlıysa öyle bir $\theta > 0$ sabiti mevcuttur ki $n \to \infty$ için

$$\int_I \Psi_1\left\{\theta\left|y_n(t)\right|\right\} dt = O(1)$$

olur.

Biz şimdi eşlenik fonksiyonlarla ilgili [4] teki bazı sonuçların karşılaştırmasını vereceğiz.

Negatif olmayan, konveks, $\varphi(0) = 0$ için $\varphi(2t) \le K\varphi(t)$, $t > 0$ ile tanımlı $\varphi(t)$ alalım. Aşağıdaki şekilde tanımlanan sınıfları ele alalım:

A sınıfı: $\varphi'(t)$ konkav ve $\varphi(t^{\theta})$, bazı $\theta < 1$ ler için konvekstir.

B sınıfı: $\varphi'(t)$ konveks öyle ki $\varphi'(0) = 0$ [4, s. 69] ve bazı $\theta < 1$ ler için $\varphi(t^{1-\theta})$ konkavdır.

C sınıfı: $\varphi_1 \in A$ ve $\varphi_2 \in B$ iken $\varphi(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t)$.

D sınıfı: $\varphi_1 \in C$ olduğunda bütün büyük t'ler için $0 < a \le \varphi(t)/\varphi_1(t) \le b < \infty$.

E sınıfı: $1 < p \ne 2$ olduğunda ve Karamata [4, kaynak 5,6] anlamında $L(t)$ yavaş değişen olduğunda $\varphi(t) = t^p L(t)$ olur.

Lamperti $A \cup B \subset C \subset D$, $E \subset D$ olduğunu ispatlamıştır ve eğer $\varphi(t)$ A dan E ye herhangi bir sınıfa aitse, $f(x) \in L_{\varphi}$ ve $\tilde{f}(x)$, $f(x)$ fonksiyonunun eşleniği olduğunda $\|\tilde{f}(x)\|_{\varphi} \le C\|f(x)\|_{\varphi}$ olur.

Sonuçları karşılaştırmak için A ya da B ye ait fonksiyonları göz önüne almak yeterlidir.

$\varphi(t)$ konveks olduğunda, $\varphi(0)=0$, $\varphi(2t)\le K\varphi(t)$ olur ve böylece sonuçlarımızdan $\varphi(t)$ mutlak sürekli olur ve $1<m<\infty$ için $\varphi(t)\sim[1,m\rangle$ olur. Eğer $\varphi(t)\in A$ ise $\varphi'(t)$ konkav ve bazı $\theta<1$'ler için $\varphi(t^{\theta})$ konvekstir. Buradan $1<p_1<p_2<\infty$ için $\varphi(t^{\theta})\sim[1,m\rangle$ ve $\varphi(t)\sim[1/\theta, m/\theta\rangle=[p_1,p_2\rangle$ çıkar. Böylece $1<a<p_2<\infty$ iken $\varphi(t)\sim\langle a,p_2\rangle$ olur. Teorem 2.3.1 ve [4, Karamata J., Teorem 1] den $1<a<p_2<\infty$ iken $\varphi\in Z(a,p_2)$ olur.

Eğer $\varphi(t)\in B$ ise $\varphi'(t)$ konveks ve bazı $\theta<1$ ler için $\varphi(t^{1-\theta})$ konkavdır. [4, s.69] daki dipnottaki genelliği kaybetmeden $\varphi''(t)>0,\ \mathrm{t}>0$ ve $\varphi'(0)=0$ alabiliriz. $\varphi''(t)$'nin azalmayan olması durumunda $\varphi'(t)=\int_0^t\varphi''(s)ds$ çıkar.

Şimdi B sınıfından bir anlamda daha geniş olma durumunda $\varphi'(t)$ konveks olduğunda $\varphi''(t)>0,\ \mathrm{t}>0$ olma durumunu göz önüne alacağız.
O zaman $\varphi'(0)=0$, $\varphi'(x)$ konveks, azalmayan ve $\varphi''(x)$ artan ise,

$$\varphi'(x)=\int_0^x\varphi''(s)ds\le\int_0^x\varphi''(x)ds=x\varphi''(x),\ \ \varphi'(x)/x\le\varphi''(x)$$

olur ve buradan

$$\varphi(t)=\int_0^t\varphi'(u)du\le\int_0^t u\varphi''(u)du=t\varphi'(t)-\int_0^t\varphi'(u)du, \tag{2.24}$$

$$\varphi'(t)\ge 2\varphi(t)/t \tag{2.25}$$

elde ederiz. Buradan $\varphi(t)/t^2$ nin azalmayan olduğu ortaya çıkar. Diğer taraftan, Önerme 2.3.2 den $\varphi(x)$ konveks, $\varphi(0)=0$, $\varphi(2x)\le C\varphi(x)$ olduğundan $\varphi(x)\sim[1,m\rangle,\ m<\infty$ olur.
$\varphi(x)/x^2$ nin azalmayan olmasından dolayı, $\varphi(x)\sim[2,m\rangle,\ m<\infty$ çıkar.

Teorem 1[4, s.64] , Önerme 2.3.1 ve Teorem 2.3.1 den dolayı $\varphi(x) \in Z(\frac{3}{2}, m+1)$ olur.

Elde edilen sonuçları toplarsak, eğer $\varphi(x) \in A$ veya $\varphi(x) \in B$ ise $1 < a < b < \infty$ için $\varphi(x) \in Z(a,b)$ olur. Böylece Lamperti'nin sonuçları Marcinkiewicz-Zygmund'un sonuçlarının özel durumları olur [4].

2.4 L_{φ}^{**} Uzayının Bazı Özellikleri

$\varphi(x) \sim [p_1, p_2]$, $1 \le p_1 \le p_2 \le \infty$ alalım ve $(0, \infty)$ aralığında t artarken $\varphi_1(t) = \varphi(t)/t$ azalmayan olsun. $\varphi_1(t)$ nin ters fonksiyonu $\psi_1(t)$ olsun.

$$\Phi_1(u) := \int_0^u \varphi_1(t)dt \text{ ve } \Psi_1(u) := \int_0^u \psi_1(t)dt$$

yazalım.

Eğer $u_n(x) \in L_{\varphi}^{*}$, $(n = 1, 2, ...)$ fonksiyon dizisi, $u_0(x) \in L_{\varphi}^{*}$ olmak üzere

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{T}} \Phi[u_n(x) - u_0(x)] dx = 0$$

sağlarsa $u_n(x)$ fonksiyon dizisi $u_0(x)$ fonksiyonuna ortalamada yakınsak denir [2, s.75].

Tanım 2.4.1: Eğer $u_n(x) \in L_{\varphi}^{**}$ fonksiyonlar dizisi eğer

$$\rho(u_n; \Phi_1) = \int_I \Phi_1[u_n(x)] dx < \infty$$

iken

$$\lim_{n \to \infty} \rho(u_n; \Phi_1) = 0$$

ise 0 a ortalamada yakınsar denir [4].

Teorem 2.4.1: Eğer $\varphi(x) \sim [p_1, p_2]$, $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$ ve eğer $\{u_n(x)\}$, L_φ^{**} de 0 a ortalamada yakınsarsa $\{u_n\}$, L_φ de 0 a ortalamada yakınsar.

İspat: Önerme 2.3.3'ten $p_2 < \infty$ için

$$p_1 \Phi_1(x) \leq \varphi(x) \leq p_2 \Phi_1(x) \tag{2.26}$$

olur. Böylece $\rho(u_n, \Phi_1) \to 0$ gösterir ki $n \to \infty$ için $\rho(u_n, \varphi) \to 0$ olur.

Tanım 2.4.2: Öyle u_0 ve k pozitif sabitleri bulunabilir ki [2, s.15]'de tanımlandığı gibi $M_1(u) \leq M_2(ku)$, $u > u_0$ olur yani $M_1(u) \prec M_2(u)$ yu ifade ederiz.

Tanım 2.4.3: $M_1(u) \sim M_2(u)$ ile $M_1(u)$ ve $M_2(u)$ nun denk oluğunu gösteririz. Yani $M_1(u) \prec M_2(u)$ ve $M_1(u) \succ M_2(u)$ olur.

Kolaylıkla görülebilir ki

i. $\|u\|_{\langle\varphi\rangle} = 0 \Leftrightarrow u(x) = 0$ h.h.;

ii. $\|\alpha u\|_{\langle\varphi\rangle} = |\alpha| \|u\|_{\langle\varphi\rangle}$, $\forall \alpha \in R$;

iii. $\|u_1 + u_2\|_{\langle\varphi\rangle} \leq \|u_1\|_{\langle\varphi\rangle} + \|u_2\|_{\langle\varphi\rangle}$.

Aşağıdaki Teorem, Teorem 2.3.3 ün bir sonucudur. ([2, s.72] ve [6, s.45 Teorem 1])

Teorem 2.4.2: Eğer $\varphi(x) \sim [p_1, p_2]$, $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$ ise L_φ^{**} bir normlu lineer uzay olur. Ayrıca L_φ^{**} bir Banach uzayıdır [4].

Önerme 9.2 [2] den şunu elde ederiz:

Teorem 2.4.3: Eğer $\varphi(x) \sim [p_1, p_2]$, $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$ iken $\|u\|_{\langle\varphi\rangle} \leq 1$ ise

$\Phi_1(x) = \int_0^x \{\varphi(t)/t\}\, dt$ ve $\rho(u; \Phi_1) \leq \|u\|_{\langle\varphi\rangle}$ olduğunda $u(x) \in L_{\Phi_1}$ olur.

Dahası, eğer $u \in L_\varphi^{**}$ ise

$$\int_I \Phi_1 \left[\frac{u(x)}{\|u\|_{\langle\varphi\rangle}} \right] dx \leq 1 \tag{2.27}$$

olur.

Ek olarak, (2.26) dan eğer $p_2 < \infty$ ise

$$\int_I \varphi\left[\frac{u(x)}{\|u\|_{\langle\varphi\rangle}}\right] dx \le p_2 \tag{2.28}$$

çıkar.

Teorem 2.4.3 den eğer $p_2 < \infty$ ve eğer L_φ^{**} de $\{u_n(x)\}$, $u_0(x)$'e normda yakınsarsa $\{u_n(x)\}$ L_φ^{**} de $u_0(x)$ e ortalamada yakınsar.

Ayrıca Teorem 2.3.4, (2.27) ve (2.28)'ten anlaşılır ki L_φ^{**} uzayı L_{Φ_1} sınıfını içeren en dar lineer küme olduğu görülür. Ayrıca
$\Phi_1(2u) \le \Phi_1(u) + 2^{p_2}\Phi_1(u) = C\Phi_1(u)$ olduğunda yani Δ_2 koşulunu sağladığında, $p_2 < \infty$ için L_φ^{**}, L_φ yi içine alan en dar lineer küme olur. Diğer bir ifadeyle, eğer p_2 sonlu ise, L_φ^{**} uzayı L_{Φ_1} deki fonksiyonların lineer bileşimini içerir.
$p_2 < \infty$ iken,

a) Eğer $\varphi \sim [p_1, p_2]$, $1 \le p_1 \le p_2 < \infty$ ve $f(x) \in L_\varphi^{**}$ ise öyle bir $k > 0$ mevcuttur ki $kf \in L_{\Phi_1}$ olur.

b) Eğer $p_2 < \infty$ ve $f(x) \in L_{\Phi_1}$ ise herhangi pozitif k sabiti için $kf \in L_\varphi^{**}$ olur.

Teorem 2.4.4: L_φ^{**} uzayının lineer uzay olması için gerek ve yeter şart φ fonksiyonunun Δ_2 koşulunu sağlamasıdır [4].
Teorem 8.2 [2] ve aşağıdaki Önerme 2.4.1 ile sonuç bulunur.

Önerme 2.4.1: Eğer $\varphi(t) \sim [p_1, p_2]$, $1 \le p_1 \le p_2 \le \infty$ ve eğer

$$\Phi_1(x) = \int_0^x \{\varphi(t)/t\}\, dt = \int_0^x \varphi_1(t)\, dt$$

ise $\Phi_1(x)$ in Δ_2 koşulunu sağlaması için gerek ve yeter şart $\varphi(x)$ in Δ_2 koşulunu sağlamasıdır.

İspat : Eğer $\varphi(x)$, Δ_2 koşulunu sağlarsa

$$\begin{aligned}\Phi_1(2x) &= \int_0^{2x} \varphi_1(t)dt = \Phi_1(x) + \int_0^{2x} \{\varphi(t)/t\}\,dt \\ &\leq \Phi_1(x) + K\int_{x/2}^{2x} \{\varphi(t)/t\}\,dt \leq K\Phi_1(x)\end{aligned} \tag{2.29}$$

olur. Buradan $\Phi_1(x)$ 'in Δ_2 koşulunu sağladığı görülür.

Tersine, eğer $\Phi_1(x)$ Δ_2 koşulunu sağlarsa, Önerme 2.3.2 ile öyle bir pozitif m sabiti mevcuttur ki $\Phi_1(x) \sim [1, m\rangle$ olur.

$\Phi_1(x)/x$ ve $\Phi_1(x)/x^m$ 'in diferansiyeli alınarak

$$1 \leq \{\Phi_1'(t)/[\Phi_1(t)/t]\} = \{\varphi(t)/\Phi_1(t)\} \leq m \tag{2.30}$$

bulunur. Bunun anlamı $\varphi(t) \sim \Phi_1(t)$ olmasıdır ve böylelikle $\varphi(t)$, Δ_2 koşulunu sağlar.

Aşağıdaki Teorem, Teorem 9.4 [2] ün bir sonucudur.

Teorem 2.4.5: Eğer $\varphi(x)$, Δ_2 koşulunu sağlarsa L_φ^{**} de normda yakınsama L_φ^{**} de ortalamada yakınsama denk olur [4].

$\aleph \subset I$ kümesinin karakteristik fonksiyonu $\chi(x;\aleph)$ olsun.

(9.11) [2] formülünden $L_\varphi^{**}(I) = L_{\Phi_1}^{*}(I)$ olduğundan şunu elde ederiz:

Teorem 2.4.6: $\Psi_1(x) = \int_0^x \psi_1(t)dt$ ve $\psi_1(t)$ de $\varphi_1(t) = \varphi(t)/t$ 'nin ters fonksiyonu olduğunda $\chi(x;\aleph)$ karakteristik fonksiyonunun normu

$$\|\chi(x;\aleph)\|_{\langle\varphi\rangle} = mes\aleph \cdot \Psi_1^{-1}\left\{\frac{1}{mes\aleph}\right\} \tag{2.31}$$

formülü ile verilir [4].

Teorem 2.4.7: Yukarıda tanımlanan L_{φ}^{**} uzayının ayrılabilir olması için gerek ve yeter şart $\varphi(t)$ fonksiyonunun Δ_2 koşulunu sağlamasıdır.

Bu Önerme 2.3.1 ve Teorem 10.2 [2] den çıkar.

Teorem 2.4.8: Eğer L_{φ}^{**} uzayı $1 \le p_1 \le p_2 \le \infty$ iken $\varphi(t) \sim [p_1, p_2]$ yardımı ile oluşturulmuş ise $\Phi_1(t) \sim [p_1, p_2]$ olmak üzere $L_{\Phi_1}^{*}$ bir Orlicz uzayıdır. Buradan $\Phi_1(x) = \int_0^x \varphi(t)/t\, dt$ olur [4].

Önerme 2.4.2: $1 \le p_1 \le p_2 \le \infty$ iken $\varphi(t)$ fonksiyonu $\varphi(t) \sim [p_1, p_2]$'yi sağlarsa, $\Phi_1(t) = \int_0^t \varphi(u)/u\, du$ olmak üzere $\Phi_1(t)$ özellikle $\Phi_1(t) \sim [p_1, p_2]$ sağlanır.

İspat : Eğer $\varphi(t) \sim [p_1, p_2]$, $1 \le p_1 \le p_2 \le \infty$ ve $0 < t < \infty$ ise

$$\frac{\varphi(x)}{x}\left(\frac{t}{x}\right)^{p_2 - 1} \le \frac{\varphi(t)}{t} \le \frac{\varphi(x)}{x}\left(\frac{t}{x}\right)^{p_1 - 1} \tag{2.32}$$

olur.

$$\frac{1}{p_2}\frac{\varphi(x)}{x} \le \frac{1}{x}\int_0^x \{\varphi(t)/t\}\, dt \le \frac{1}{p_1}\frac{\varphi(x)}{x} \tag{2.33}$$

ve

$$p_1\, \Phi_1(x)/x \le \{\varphi(x)/x\} = \Phi_1'(x) \le p_2\, \Phi_1(x)/x \tag{2.34}$$

eşitsizliklerinden çıkar.

Bunun anlamı $\Phi_1(x)x^{-p_1}$ azalmayan ve $\Phi_1(x)x^{-p_2}$'nin artmayan olmasıdır. Böylece $\Phi_1(x) \sim [p_1, p_2]$ olur.

Şimdi eğer $p_2 = \infty$ ise (2.32), (2.33), (2.34) eşitsizliklerinden biri bu koşullarda sağlanır. Bu $\Phi_1(x) \sim [p, \infty]$ olduğunu gösterir.

Tanım 2.4.4: (9.18) ve (9.19) [2] formüllerinden Lüksemburg normu tanımları görülebilir. $f \in L_M^*$ fonksiyonunun Lüksemburg normunu

$$\|f\|_{(M)} := \inf\left\{k > 0 : \rho\left(\frac{u(x)}{k}; M\right) = \int_I M\left[\frac{u(x)}{k}\right]dx \le 1\right\} \qquad (2.35)$$

biçiminde tanımlayalım.

$f \in L_\varphi^{**} = L_{\Phi_1}^*$ in Lüksemburg normunu

$$\|f\|_{[\varphi]} = \|f\|_{(\Phi_1)} \qquad (2.36)$$

eşitliği ile tanımlarız.

(9.24) formülünden [2]

$$\|f\|_{[\varphi]} \le \|f\|_{\langle\varphi\rangle} \le 2\|f\|_{[\varphi]} \qquad (2.37)$$

olur ve genelleştirilmiş Hölder eşitsizliğinden, (ayrıntılı sonuçlar (9.26) ve (9.27) [2] formüllerinde elde edilmiştir) $u \in L_{\Phi_1}^* = L_\varphi^{**},\ v \in L_{\Psi_1}^*$ iken

$$\left|\int_I u(x)v(x)dx\right| \le \|u(x)\|_{\langle\varphi\rangle}\,\|v(x)\|_{(\Psi_1)} \qquad (2.38)$$

ve $u \in L_\varphi^{**},\ v \in L_{\Psi_1}^*$ iken

$$\left|\int_I u(x)v(x)dx\right| \le \|u(x)\|_{[\varphi]}\,\|v(x)\|_{\Psi_1} \qquad (2.39)$$

olur.

Teorem 2.4.9: L_φ^{**} uzayındaki $\|.\|_{\langle\varphi\rangle}$ normu

$$\|u\|_{\langle\varphi\rangle} \le 1 + \int_I \Phi_1[u(x)]dx = 1 + \int_I dx \int_0^{u(x)} \{\varphi(t)/t\}\,dt, \qquad (2.40)$$

ve

$$\int_I \Phi_1\left[\frac{|u(x)|}{\|u\|_{\langle\varphi\rangle}}\right]dx = \int_I dx \int_0^{|u(x)|/\|u\|_{\langle\varphi\rangle}} \{\varphi(t)/t\}\,dt \le 1 \qquad (2.41)$$

ifadelerini sağlar.

Dahası, eğer $\|u\|_{\langle\varphi\rangle} \le 1$ ise,

$$\int_I \Phi_1\left[|u(x)|\right]dx = \int_I dx \int_0^{|u(x)|} \{\varphi(t)/t\}\,dt \le \|u\|_{\langle\varphi\rangle} \qquad (2.42)$$

olur [4].
Bu sonuçlar (9.12), (9.14) ve (9.21) [2] in direkt sonuçlarıdır.

Teorem 2.4.10: L_φ^{**} uzayında normda yakınsama ile ortalamada yakınsamanın eşit olması için gerek ve yeter şart L_φ^{**} de $\varphi(t)$ fonksiyonunun Δ_2 koşulunu sağlamasıdır [4].
$L_{\Phi_1}^{*} = L_\varphi^{**}$ olduğunda, Önerme 2.4.1 deki ve [2, ch. 2, Sec. 6] ile direkt sonuç elde edilir.

Tanım 2.4.5: E_φ ile Bölüm 10 [2] da olduğu gibi L_φ^{*}'de normda yakınsak sınırlı fonksiyonlar ailesinin kapanışını ifade ederiz.
Diğer deyişle, eğer

i. $u_n(x)$ ler sınırlı olmak üzere $u_n(x) \to u_0(x)$,

ii. $\|u_n(x) - u_0(x)\|_\varphi \to 0,\ n \to \infty$,

ise $u_0(x) \in E_\varphi$ olur.

Eğer $u_0(x) \in L_\varphi$ ve

$$u_n(x) = \begin{cases} u_0(x), & |u_0(x)| \le n \\ 0, & |u_0(x)| > n \end{cases} \qquad (2.43)$$

alırsak $n \to \infty$ iken $\rho[u_n - u_0] = \int_I \varphi[u_n - u_0]\, dx$ ifadesinin 0 a yaklaşmasına rağmen, $\|u_n(x) - u_0(x)\|_\varphi$ sıfıra yaklaşmayabilir [2, Önerme 10.1].

Tanım 2.4.6: E'_φ ile normda yakınsak sınırlı fonksiyonlar ailesinin $L^{**}_\varphi = L^{*}_{\Phi_1}$ kapanışını ifade ederiz.

Aşağıdaki Teorem, Önerme 10.1 [2] ve Önerme 2.4.1 in sonucudur:

Teorem 2.4.11: Eğer $\varphi(x)$, Δ_2 koşulunu sağlamazsa, normda yakınsak sınırlı fonksiyonlar ailesi L^{**}_φ içinde hiçbir yerde yoğun değildir. Ama eğer $\varphi(u)$, Δ_2 koşulunu sağlarsa, $E_\varphi = L^{*}_\varphi = L^{**}_\varphi = E'_\varphi$ olur [4].

E_φ, L_φ de L^{*}_φ nin maximal lineer alt uzayı olduğunda, E'_φ kümesi L_{Φ_1} de E^{**}_φ nin maximal lineer alt uzayı olarak göz önüne alınabilir. Bu bütün λ değerleri için $\lambda u(x) \in L_\varphi$ olmasından görülür. Ayrıca $u(x) \in E_\varphi$ olur [2, s.84]. Bunu göstermek için herhangi bir $\varepsilon > 0$ verildiğini düşünelim ve $\lambda = \varepsilon/2$ yazalım. $u(x)/\lambda \in L_\varphi$ olduğundan öyle bir $v(x) = u_1(x)/\lambda$ mevcuttur ki

$$\rho\left[v - \frac{u}{\lambda}; \varphi\right] = \int_I \varphi\left[\frac{u_1(x) - u(x)}{\lambda}\right] dx \le 1 \tag{2.44}$$

olur. $u_1(x)$ sınırlı bir fonksiyon olduğundan, $v(x) - u(x)/\lambda = (\lambda v - u)/\lambda = (u_1 - u)/\lambda$ olur. Buradan

$$\|u_1(x) - u(x)\|_{(\varphi)} \le \lambda = \varepsilon/2. \tag{2.45}$$

[2] deki formül (9.24) dolayısıyla

$$\|u_1(x) - u(x)\|_\varphi < \varepsilon \tag{2.46}$$

elde ederiz.

Bu gösterir ki öyle bir $\{u_n(x)\}$ sınırlı fonksiyonlar dizisi mevcuttur ki,

$$\|u_n(x)-u(x)\|_{\varphi} \to 0,\ n\to\infty \tag{2.47}$$

olur. Böylece $u(x)\in E_{\varphi}$ olduğu görülür.

Önerme 2.4.1 ve Teorem 10.2 [2] den aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 2.4.12: L_{φ}^{**} uzayının ayrılabilir olması için gerek ve yeter şart φ fonksiyonunun Δ_2 koşulunu sağlamasıdır [4].

2.5 Uygulamalar

L_{φ}^{**} 'de normun hesaplanmasında zorluklar olduğunda normun alternatif formlarını göz önüne alabiliriz.

Teorem 2.5.1: $u(x)\in L_{\varphi}^{**}$ ve

$$\int_I \Psi_1\left[\varphi(k^*|u(x)|)/k^*|u(x)|\right]dx = 1, \tag{2.48}$$

koşulunu sağlayan bir pozitif k^* sayısı var olsun.

Bu durumda

$$\|u\|_{\langle\varphi\rangle} = \|u\|_{\Phi_1} = \frac{1}{k^*}\int_I \varphi\left[\left(k^*|u(x)|\right)\right]dx \tag{2.49}$$

olur.

Bu sonuçlar Teorem 10.4 [2] ün direkt sonuçlarıdır.

L_{φ}^{**} de başka alternatif norm ifadesi verilebilir.

Teorem 2.5.2: $u(x)\in L_{\varphi}^{**}$ olsun. O zaman

$$\|u(x)\|_{\langle\varphi\rangle} = \|u(x)\|_{\Phi_1} = \inf_{k>0}\frac{1}{k}\left(1+\int_I \Phi_1\left[\left(k|u(x)|\right)\right]dx\right) \tag{2.50}$$

olur.

Bu, eğer $\Phi_1(u)$ yerine $M(u)$ alırsak Teorem 10.5 [2] ile denk olur.

Teorem 2.5.3: $E'_{\varphi}(I)$ uzayında bir taban mevcuttur.

Bu Teorem 12.1 [2] den ve $L^{**}_{\varphi}(I) = L^{*}_{\Phi_1}(I)$ gerçeğinden çıkar.

E'_{φ} uzayına ilişkin, $u(x)$ in E'_{φ} ye ait olmasına dair gerekli ve yeterli koşul bulmakla ilgilenelim.

Teorem 2.5.4: $u(x) \in L^{**}_{\varphi}$ fonksiyonunun E'_{φ}'ye ait olması için gerekli ve yeterli şart L^{**}_{φ} uzayının mutlak sürekli norma sahip olmasıdır. Yani her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ vardır öyle ki $mes\aleph < \delta$ iken

$$\left\| u(x)\chi(x;\aleph) \right\|_{\langle\varphi\rangle} < \varepsilon \tag{2.51}$$

sağlanır. Bu Teorem 10.3 [2] ten çıkar.

E'_{φ} ve L_{Φ_1} uzaylarını karşılaştırmak için, $\Pi(E'_{\varphi}; r)$ ile

$$d(u, E'_{\varphi}) = \inf_{W \in E'_{\varphi}} \left\| u - w \right\|_{\langle\varphi\rangle} < r \tag{2.52}$$

koşulunu sağlayan u fonksiyonlarının ailesini gösterelim.

Teorem 2.5.5: $\varphi(x)$ fonksiyonunun Δ_2 koşulunu sağlamadığını düşünelim. O zaman

$$\Pi(E'_{\varphi};1) \subset L_{\Phi_1} \subset \overline{\Pi}(E'_{\varphi};1),\ \Pi(E'_{\varphi};1) \neq L_{\Phi_1} \neq \overline{\Pi}(E'_{\varphi};1) \tag{2.53}$$

olur.

Bu Önerme 2.4.1 ve Teorem 10.1 [2] den görülür.

E_{φ} uzayı için A. N. Kolmogorov'un kompaktlık kriteri düşünülecek olursa E'_{φ} uzayı için aşağıdaki kriteri Teorem 11.1 [2] den doğrudan elde ederiz:

Teorem 2.5.6: E'_{φ} uzayında bir $\Re$ fonksiyonlar ailesinin L^{**}_{φ} ye göre kompakt olması için gerekli ve yeterli şart,

a) $\forall u(x) \in \Re$ için $\left\| u \right\|_{\langle\varphi\rangle} < A$,

b) Keyfi $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ bulunabilir ki $r < \delta$ iken $\Re$ nin her u fonksiyonlar ailesi için $\|u - u_r\|_{\langle\varphi\rangle} < \varepsilon$.

Buradaki $u_r = u_r(x)$,

$$u_r(x) = \frac{1}{m_r} \int_{T_r(x)} u(t)dt,$$

ile tanımlanan Steklov fonksiyonudur. Burada $T_r(x)$; r yarıçaplı x merkezli açık yuvardır ve m_r ise bu açık yuvarın uzunluğudur [2, (11.3) formülü].

F. Riesz'in E_φ uzayı için kompaktlık kriteri düşünülürse E'_φ için aşağıdaki kriteri elde ederiz [2, Teorem 11.4]:

Teorem 2.5.7: E'_φ uzayında bir $\Re$ fonksiyonlar ailesinin L^{**}_φ'ye göre kompakt olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki koşulların sağlanmasıdır:

a) $\forall u(x) \in \Re$ için $\|u\|_{\langle\varphi\rangle} < A$,

b) Keyfi $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ bulunabilir ki, $d(h,0)$, h ile 0 arasında uzaklığı belirtmek üzere, bütün $u(x) \in \Re$ ler için $d(h,0) < \delta$ iken $\|u(x+h) - u(x)\|_{\langle\varphi\rangle} < \varepsilon$.

Şimdi daha önce tanımlanan $\Phi_1(x) = \int_0^x \{\varphi(t)/t\}\,dx$ olmak üzere $\Phi_1(x)$ ve $\Psi_1(x)$ karşılıklı tümleyen fonksiyonlar olsunlar.

$v(x)$, $L^*_{\Phi_1}$ uzayında bir fonksiyon olmak üzere,

$$\mathfrak{I}(u) = [u, v] = \int_I u(x)v(x)dx, \; u(x) \in L^{**}_\varphi \tag{2.54}$$

alalım. O zaman $L^{**}_\varphi(I)$ tam uzayında $\mathfrak{I}(u)$ nun bir lineer fonksiyon tanımladığı Banach-Steinhaus teoreminden [4, kaynak 8 s.135 ve kaynak 2 s.54] elde edilir.

$$\|\mathfrak{I}\| = \sup_{\|u\|_{\langle\varphi\rangle} \le 1} |\mathfrak{I}(u)| \tag{2.55}$$

alalım. (14.2) [2] formülünden

$$\|\mathfrak{I}\| \leq \|v\|_{\Psi_1} \leq 2\|\mathfrak{I}\| \tag{2.56}$$

elde ederiz.

$K(v) = \|v\|_{\Psi_1} / \|\mathfrak{I}\|$ dersek. $1 \leq K(v) \leq 2$ bulunur.

$\varphi(u) = |u|^{\alpha}$, $\alpha > 1$ ile tanımlanırsa, L_{φ}^{**} için $K(v)$'nin değerinin hesaplanması için, $\Phi_1(u) = u^{\alpha}/\alpha$ olacağından,

$$\|u\|_{\langle\varphi\rangle} = \|u\|_{\Phi_1} = \alpha^{1/\alpha}\beta^{1/\beta}\left\{\int_I \Phi_1\left[|u|\right]dx\right\}^{1/\alpha} \tag{2.57}$$

kullanabilir.

Aşağıdaki ifade [2, s.125] deki sonuçtan elde edilmiştir.

$$\|\Im\| = \sup_{\|u\|_{\Phi_1} \leq 1}\left|\int_G u(x)v(x)dx\right| = \frac{\|v\|_{\Psi_1}}{\alpha^{1/\alpha}\beta^{1/\beta}}. \tag{2.58}$$

Böylece $v(x) \in \Im_{\Psi_1}$ olmak üzere

$$K(v) = \alpha^{1/\alpha}\beta^{1/\beta} \tag{2.59}$$

olur.

Teorem 2.5.8: φ fonksiyonunun Δ_2 koşulunu sağlamadığını düşünelim. O zaman (2.54) L_{φ}^{**} de bir lineer fonksiyonelin genel formu olamaz.

Bu Teorem 14.1 [2] ve Önerme 2.4.1 den çıkar.

Teorem 2.5.9: $v(x) \in L_{\Psi_1}^{*}$ olduğunda (2.54) formülü E'_{φ} üzerinde bir lineer fonksiyonelin genel formu olur.

Bu bizim E'_{φ} için tanımımızdan ve Teorem 14.2 [2] den görülür.

3. ORLICZ UZAYLARINDA POLİNOMLARLA AYNI ANDA YAKLAŞIM

3.1 Giriş

Klasik Orlicz uzaylarında cebirsel/trigonometrik polinomlarla yaklaşım problemleri birçok matematikçi tarafından çalışılmıştır. [7] de Tsyganok trigonometrik yaklaşımın Jackson eşitsizliklerini elde etmiştir. [8] de Kokilashvili trigonometrik yaklaşımın ters teoremlerini elde etmiştir. [9] da Ponomarenko, Fourier serilerinin kısmi toplamları ile trigonometrik yaklaşımın bazı düz teoremlerini ispatlamıştır. [10] da Cohen Fourier serilerinin kısmi toplamları ile trigonometrik yaklaşımın bazı düz teoremlerini ispatlamıştır. Diğer taraftan klasik Orlicz uzaylarında fonksiyonlara cebirsel/trigonometrik polinomlarla aynı anda yaklaşım [11] de Ramazanov ve [12] de Garidi tarafından çalışılmıştır. Bu sonuçlarda Orlicz uzaylarını üreten Young fonksiyonları konvekstir. Oluşturulan Young fonksiyonu kvazi-konvekslik koşulunu sağladığında benzer problemler R. Akgün [13,14,15] ve R. Akgün, D. M. İsrafilov [16,17] tarafından çalışılmıştır.

Bu bölüm L_{φ}^{**} Orlicz uzaylarında cebirsel/trigonometrik polinomlarla aynı anda yaklaşım problemlerini içerir.

$-\infty < p \le q < \infty$ alalım ve $Y[p,q]$ ile $(-\infty,\infty)$ aralığında tanımlanmış aşağıdaki iki koşulu sağlayan $\varphi \in \Phi$ fonksiyonlarını ifade edelim.

i. $|u|$ artarken, $\varphi(u)/u^{p}$ azalmayandır:

ii. $|u|$ artarken, $\varphi(u)/u^{q}$ artmayandır.

$p < q$ olduğunda $Y\langle p,q\rangle$ ile bir $\varepsilon,\delta > 0$ için $\varphi \in Y[p+\varepsilon, q-\delta]$ koşulunu sağlayan φ fonksiyonlar sınıfını ifade ederiz.

$\varphi(x) \sim [p_1, p_2],\ 0 \le p_1 \le p_2 \le \infty$ (ya da benzer şekilde $-\infty \le p_1 \le p_2 \le 0$) ile negatif olmayan $\varphi(x)$ çift fonksiyonlarını ifade ederiz öyle ki $x,\ (0,\infty)$ aralığında artarken $\varphi(x)x^{-p_1}$ azalmayan $\varphi(x)x^{-p_2}$ artmayandır.

$\varphi(x) \sim [p_1, p_2],\ 1 \le p_1 \le p_2 \le \infty$ ile $t \to \infty$ iken $\varphi_1(t) = \varphi(t)/t \to \infty$ alalım. $\psi_1(t)$, $\varphi_1(t) = \varphi(t)/t$ fonksiyonunun ters fonksiyonu olsun. $\psi_1(t)$ azalmayan, sürekli, pozitiftir.

$$\Phi_1(x) := \int_0^x \varphi_1(t)dt \text{ ve } \Psi_1(x) := \int_0^x \psi_1(t)dt$$

yazalım. Buradan $\Phi_1(x),\ \Psi_1(x)$ konveks birer fonksiyon olurlar ve böylece $\Phi_1(x)$ ile $\Psi_1(x)$ Young anlamında tümleyen fonksiyon olurlar.

$f(x)g(x)$ çarpımı I aralığı üzerinde her $g(x) \in L_{\psi_1}(I)$ için integrallenebilir koşulunu sağlayan $f : I \to R$ fonksiyonlarının ailesi L_φ^{**} ile gösterilir.

L_φ^{**} uzayında norm

$$\|f\|_{\langle\varphi\rangle} := \|f\|_{\langle\varphi\rangle(I)} := \sup_g \left| \int_I f(x)g(x)dx \right| \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanır. Burada supremum

$$\rho(g, \Psi_1) = \int_I \Psi_1(|g(x)|)dx \le 1 \tag{3.2}$$

koşulunu sağlayan g ler üzerinden alınmıştır.

$$L_\varphi^{**} := \left\{ f : I \to \mathrm{R} \mid \int_I f(x)g(x)dx < \infty,\ \forall g \in L_{\Psi_1} \right\}.$$

$f \in L_\varphi^{**},\ \ g \in L_{\Psi_1}^{**}$ için

$$\|g\|_{(\Psi_1)} := \inf \left\{ k > 0 : \rho\left(\frac{g(x)}{k}; \Psi_1 \right) \le 1 \right\}$$

olmak üzere genelleştirilmiş Hölder eşitsizliği [4]

$$\left| \int_I f(x)g(x)dx \right| \le \|f\|_{\langle\varphi\rangle} \|g\|_{(\Psi_1)} \tag{3.3}$$

olur.

1984 te A. R. –K. Ramazanov [11] L_φ^* Orlicz uzayındaki fonksiyonlar için Jackson tipli eşitsizlikleri elde etmiştir (ayrıntılı sonuçlar için (R. Akgün [13,14] ve H. Koç, R. Akgün [18]). Daha sonra Wu Garidi [12] Ramazanov'un sonuçlarını genişletmiş ve Jackson tipli eşitsizlikleri türevler için

$$L_\varphi^{*,r} := \left\{ f \in L_\varphi^* \mid f^{(r)} \in L_\varphi^* \right\}$$

Sobolev uzayında ispatlamıştır.

$a = -\pi$ ve $b = \pi$ için $L_{\varphi,\pi}^{**}$ ve $L_{\varphi,\pi}^{**,r}$ notasyonlarını kullanacağız.

$$L_\varphi^{**,r} := \left\{ f : f, f^{(r)} \in L_\varphi^{**} \setminus L_\varphi^* \right\},$$
$$L_{\varphi,\pi}^{**,r} := \left\{ f : f, f^{(r)} \in L_{\varphi,\pi}^{**} \setminus L_{\varphi,\pi}^* \right\}.$$

Ama L_φ^{**} ya da $L_{\varphi,\pi}^{**}$ uzayında öyle fonksiyonlar bulunabilir ki L_φ^* ya da $L_{\varphi,\pi}^*$ uzaylarına ait değildir.

Örneğin $\varphi(x) \sim \langle 2,3 \rangle$ alarak $\varphi(x) = x^{5/2}$, $0 \le x \le 1$ ve $\varphi(x) = x^{9/4}$, $x > 1$ tanımlanırsa [4, s. 67-68] φ konveks olmaz. L_φ^{**} tanımlanabildiği halde L_φ^* tanımlanamaz.

Bu bölümün ana amacı Sobolev tipli uzaylarda fonksiyonlara cebirsel/trigonometrik polinomlarla aynı anda yaklaşım problemlerini göz önüne almaktır.

Kolaylık olsun diye bu çalışmada her yerde C sabiti ile değişik yerlerdeki farklı pozitif reel sayılar ifade edilecektir. Ana sonuçlarımız şunlardır.

3.2 Ana Sonuçlar

Teorem 3.2.1: $\varphi \in Y\langle p,q\rangle$, $1<p<q<\infty$ alalım. $r=1,2,3,\ldots$ ve $\upsilon=0,1,2,\ldots,r$ olsun. Herhangi bir $f\in L_{\varphi}^{**,r}$ için öyle bir n dereceli P cebirsel polinomu mevcuttur ki herhangi $n\geq 1$ tamsayısı için

$$\left\|f^{(\upsilon)}-P^{(\upsilon)}\right\|_{\langle\varphi\rangle}\leq C\omega_{r-\upsilon,\langle\varphi\rangle}\left(f^{(\upsilon)},1/n\right)$$

sağlanır. Burada C sabiti sadece r ve φ ye bağlıdır.

Teorem 3.2.2: $\varphi \in Y\langle p,q\rangle$, $1<p<q<\infty$ alalım. $r=1,2,3,\ldots$ ve $\upsilon=0,1,2,\ldots,r$ olsun. Herhangi bir $f\in L_{\varphi,\pi}^{**,r}$ için öyle bir n dereceli T trigonometrik polinomu mevcuttur ki herhangi $n\geq 1$ tamsayısı için

$$\left\|f^{(\upsilon)}-T^{(\upsilon)}\right\|_{\langle\varphi\rangle}\leq C\omega_{r-\upsilon,\langle\varphi\rangle}\left(f^{(\upsilon)},1/n\right)$$

sağlanır. Burada C sabiti sadece r ve φ ye bağlıdır.

3.3 L_{φ}^{**} Uzayında K Fonksiyoneli ve Düzgünlük Modülü

Varsayalım ki $r=1,2,3,\ldots$, $\upsilon=0,1,2,\ldots r$, $t>0$ ve $f\in L_{\varphi}^{**,r}$ olsun.

$$\|f\|_{r,\langle\varphi\rangle,t}=\|f\|_{r,\langle\varphi\rangle}:=\sum_{i=0}^{\upsilon}t^{i}\left\|f^{(i)}\right\|_{\langle\varphi\rangle} \tag{3.4}$$

olmak üzere K fonksiyoneli

$$K_{r,\varphi}^{\upsilon}(f,t):=\inf\left\{\|f-g\|_{\upsilon,\langle\varphi\rangle}+t^{r}\left\|g^{(r)}\right\|_{\upsilon,\langle\varphi\rangle}:g\in L_{\varphi}^{**,(r+\upsilon)}\right\} \tag{3.5}$$

ile tanımlanır.

$$\Delta_{t}^{r}(f,x):=\sum_{i=0}^{r}(-1)^{r-i}\binom{r}{i}f(x+it)$$

ifadesi f fonksiyonunun r inci farkı olarak adlandırılır.

$h \geq 0$ için

$$I_h := \begin{cases} [a, b-h] & , 0 \leq h \leq b-a \\ \varnothing & , h > b-a \end{cases}.$$

olarak tanımlayalım.

$\|\cdot\|_{\langle\varphi\rangle(\varnothing)} = 0$ ve $f \in L_\varphi^{**}$ için r inci düzgünlük modülü

$$\omega_{r,\langle\varphi\rangle}(f,t) = \sup_{0 \leq h \leq t} \left\| \Delta_h^r (f,.) \right\|_{\langle\varphi\rangle(I_{rh})} \tag{3.6}$$

şeklinde tanımlanır.

Açıklama 3.3.1: $\omega_{r,\langle\varphi\rangle}(f,t)$ düzgünlük modülü aşağıdaki genel özellikleri sağlar:

(1) $\omega_{r,\langle\varphi\rangle}(f,t)$ ifadesi t nin monoton artan fonksiyonudur ve $\omega_{r,\langle\varphi\rangle}(f,0) = 0$.

(2) Herhangi bir $f \in L_\varphi^{**}$ için, $t \to 0$ iken $\omega_{r,\langle\varphi\rangle}(f,t) \to 0$ olması için gerek ve yeter şart φ fonksiyonunun Δ_2 koşulunu sağlamasıdır.

(3) Eğer $f \in L_\varphi^{**,r}$ ise $\omega_{r+n,\langle\varphi\rangle}(f,t) \leq t^n \omega_{r,\langle\varphi\rangle}\left(f^{(n)},t\right)$ olur.

(4) Herhangi bir negatif olmayan n tamsayısı için $\omega_{r,\langle\varphi\rangle}(f,nt) \leq n^r \omega_{r,\langle\varphi\rangle}(f,t)$ olur.

Teorem 3.3.2: φ fonksiyonunun Δ_2 koşulunu sağlaması için gerek ve yeter koşul verilen herhangi bir r tamsayısı ve $f \in L_\varphi^{**}$ fonksiyonu için $\omega_{r,\langle\varphi\rangle}(f,t) \to 0,\ t \to 0$ özelliğini sağlamasıdır.

İspat: φ fonksiyonu Δ_2 koşulunu sağlasın. Varsayalım ki $P_n,\ (n = 1,2,...)$ $f \in L_\varphi^{**}$ fonksiyonuna yakınsayan bir polinomlar dizisi olsun. $0 < h < \frac{b-a}{r}$ için [8]'de olduğu gibi

$$\left\|\Delta_r^h\left(f-P_n,x\right)\right\|_{\langle\varphi\rangle[a,b-rh]} = \sup_{g\in L_{\Psi_1}}\left\{\int_a^{b-rh}\left|\Delta_r^h\left(f-P_n,x\right)g\left(x\right)\right|dx:\rho\left(g,\Psi_1\right)\le 1\right\}$$

$$=\sup\left\{\int_a^{b-rh}\left|\sum_{i=0}^{r}(-1)^{r-i}\binom{r}{i}\left(f-P_n\right)\left(x+ih\right)\right|\left|g\left(x\right)\right|dx:g\in L_{\Psi_1},\rho\left(g,\Psi_1\right)\le 1\right\}$$

$$\le\sup\left\{\int_a^{b-rh}\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}\left|f\left(x+ih\right)-P_n\left(x+ih\right)\right|\left|g\left(x\right)\right|dx:g\in L_{\Psi_1},\rho\left(g,\Psi_1\right)\le 1\right\}$$

$$=\sup\left\{\sum_{i=0}^{r}\int_a^{b-rh}\binom{r}{i}\left|f\left(x+ih\right)-P_n\left(x+ih\right)\right|\left|g\left(x\right)\right|dx:g\in L_{\Psi_1},\rho\left(g,\Psi_1\right)\le 1\right\}$$

$$=\sup\left\{\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}\int_a^{b-rh}\left|f\left(x+ih\right)-P_n\left(x+ih\right)\right|\left|g\left(x\right)\right|dx:g\in L_{\Psi_1},\rho\left(g,\Psi_1\right)\le 1\right\}$$

$$\le\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}\left\{\sup\int_a^{b-rh}\left|f\left(x+ih\right)-P_n\left(x+ih\right)\right|\left|g\left(x\right)\right|dx:g\in L_{\Psi_1},\rho\left(g,\Psi_1\right)\le 1\right\}$$

$$=\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}\left\|f\left(x+ih\right)-P_n\left(x+ih\right)\right\|_{\langle\varphi\rangle[a,b-rh]}.$$

L_φ^{**} uzayı öteleme altında invaryant olduğundan

$x+ih=u,\ 0\le i\le r,\ a\le x\le br-h,\ a\le x+rh\le b$ yazarak

$$\begin{aligned}\left\|\Delta_r^h\left(f,\cdot\right)\right\|_{\langle\varphi\rangle[a,b-rh]} &= \left\|\Delta_r^h\left(f-P_n,\cdot\right)+\Delta_r^h\left(P_n,\cdot\right)\right\|_{\langle\varphi\rangle[a,b-rh]}\\ &\le\left\|\Delta_r^h\left(f-P_n,\cdot\right)\right\|_{\langle\varphi\rangle[a,b-rh]}+\left\|\Delta_r^h\left(P_n,\cdot\right)\right\|_{\langle\varphi\rangle[a,b-rh]}\\ &\le 2^r\left\|f-P_n\right\|_{\langle\varphi\rangle[a,b-rh]}+\left\|\Delta_r^h\left(P_n,\cdot\right)\right\|_{\langle\varphi\rangle[a,b-rh]}\end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece

$$\left\|\Delta_r^h\left(f,\cdot\right)\right\|_{\langle\varphi\rangle[a,b-rh]}\le 2^r\left\|f-P_n\right\|_{\langle\varphi\rangle[a,b-rh]}+\left\|\Delta_r^h\left(P_n,\cdot\right)\right\|_{\langle\varphi\rangle[a,b-rh]}<\varepsilon$$

buluruz. Dolayısıyla, $n\to\infty$ iken $\omega_{r,\langle\varphi\rangle}\to 0$ yazılabilir çünkü,

$$C\omega_{r,\langle\varphi\rangle}\left(f\right)<\varepsilon.$$

Teorem 3.3.2 nin diğer yönünü kanıtlamak kolaydır.

Varsayalım ki $E \subset L_{\varphi}^{**,r}$ olsun. Uygun $t>0$ için en iyi yaklaşımın derecesini

$$\rho_{r,\varphi}(f,E) = \inf_{g\in E} \|f-g\|_{r,\langle\varphi\rangle,t} \tag{3.7}$$

ile verelim [12].

Teorem 3.3.3: Varsayalım ki $r=0,1,...$, $\upsilon = 0,1,...,r,$ $t>0$ ve $f \in L_{\varphi}^{**,r}$ olsun.

Sadece r,φ ye bağlı öyle c ve C sabitleri vardır ki

$$ct^{\upsilon}\omega_{r-\upsilon,\langle\varphi\rangle}\left(f^{(\upsilon)},t\right) \le K_{r,\varphi}^{\upsilon}(f,t) \le Ct^{\upsilon}\omega_{r-\upsilon,\langle\varphi\rangle}\left(f^{(\upsilon)},t\right) \tag{3.9}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

İspat: İspatta öncelikle eşitsizliğin sol tarafının hesabını yapalım. [12] deki yöntemi kullanacağız.

$0 \le \upsilon \le r$, $f \in L_{\varphi}^{**,r}$ ve herhangi $g \in L_{\varphi}^{**,r-\upsilon}$ için, $\omega_{r,\langle\varphi\rangle}(f,t)$ nin (3) üncü özelliğinden

$$\omega_{r,\langle\varphi\rangle}(f,t) \le C\left(\left\|f^{(\upsilon)}-g\right\|_{\langle\varphi\rangle} + t^{r-\upsilon}\left\|g^{(r-\upsilon)}\right\|_{\langle\varphi\rangle}\right)$$

elde ederiz. g keyfi alındığından g ler üzerinden infumum alarak

$$ct^{\upsilon}\omega_{r-\upsilon,\langle\varphi\rangle}\left(f^{(\upsilon)},t\right) \le t^{\upsilon}K_{r-\upsilon,\langle\varphi\rangle}^{0}\left(f^{(\upsilon)},t\right) \tag{3.9}$$

elde ederiz. $f \in L_{\varphi}^{**,r}$, $i = 0,1,...,\upsilon-1$ için

$$\begin{aligned} K_{r-t,\varphi}^{\upsilon-t}\left(f^{(i)},t\right) &= \inf\left\{\left\|f^{(i)}-g\right\|_{\upsilon-t,\langle\varphi\rangle} + t^{r-t}\left\|g^{(r-t)}\right\|_{\upsilon-t,\langle\varphi\rangle} : g \in L_{\varphi}^{**,(r+\upsilon-2t)}\right\} \\ &\ge \inf\left\{t.\left\|f^{(i+1)}-g'\right\|_{\upsilon-t-1,\langle\varphi\rangle} + t^{r-t}\left\|g^{(r-t)}\right\|_{\upsilon-t-1,\langle\varphi\rangle} : g \in L_{\varphi}^{**,(r+\upsilon-2t)}\right\} \\ &\ge t.\inf\left\{\left\|f^{(i+1)}-h\right\|_{\upsilon-t-1,\langle\varphi\rangle} + t^{r-t-1}\left\|h^{(r-t-1)}\right\|_{\upsilon-t-1,\langle\varphi\rangle} : h \in L_{\varphi}^{**,(r+\upsilon-2t-2)}\right\} \end{aligned}$$

$$= t.K^{\upsilon-t-1}_{r-t-1,\varphi}\left(f^{(i+1)},t\right). \tag{3.10}$$

Bu formül tekrarlanırsa

$$K^{\upsilon}_{r,\varphi}(f,t) \geq t^{\upsilon}.K^{0}_{r-\upsilon,\varphi}\left(f^{(\upsilon)},t\right). \tag{3.11}$$

Böylece (3.9) ve (3.11) den sol taraf çıkar.

$$ct^{\upsilon}\omega_{r-\upsilon,\varphi}\left(f^{(\upsilon)},t\right) \leq K^{\upsilon}_{r,\varphi}(f,t).$$

Şimdi eşitsizliğin sağ tarafını ispatlayalım. $r=0$ için $K^{0}_{0,\varphi}(f,t)=\|f\|_{\langle\varphi\rangle}=\omega_{0,\langle\varphi\rangle}(f,t)$ olduğundan sonuç açıktır. İspatta bu aşamadan sonra $r \geq 1$ ve $f \in L^{**,r}_{\varphi}$ alalım. Öncelikle $0 \leq t \leq \frac{b-a}{4r^2}$ alalım ve

$$I_0=\left[a,a+\frac{3(b-a)}{4}\right],\ I_1=\left[a+\frac{b-a}{4},b\right],\ I_2=I_0\cap I_1=\left[a+\frac{b-a}{4},a+\frac{3(b-a)}{4}\right],$$

$$g_0(x)=f(x)+t^{-r}\int_0^t\ldots\int_0^t(-1)^{r+1}\Delta^{r}_{u_1+\ldots+u_r}(f,x)\,du_1\ldots du_r,\ x\in I_0,$$

$$g_1(x)=f(x)+t^{-r}\int_0^t\ldots\int_0^t(-1)^{r+1}\Delta^{r}_{-(u_1+\ldots+u_r)}(f,x)\,du_1\ldots du_r,\ x\in I_1.$$

Varsayalım ki $\int_{I_0}\Psi_1(v(x))\,dx \leq 1$ olsun. Öyleyse $i=0,1,\ldots$ için

$$\left|\int_{I_0}\left(f^{(i)}(x)-g_0^{(i)}(x)\right)v(x)\,dx\right|=\left|\int_{I_0}\left(t^{-r}\int_0^t\ldots\int_0^t\Delta^{r}_{u_1+\ldots+u_r}\left(f^{(i)},x\right)du_1\ldots du_r\right)v(x)\,dx\right|$$

$$=\left|t^{-r}\int_0^t\ldots\int_0^t\left(\int_{I_0}\Delta^{r}_{u_1+\ldots+u_r}\left(f^{(i)},x\right)v(x)\,dx\right)du_1\ldots du_r\right|$$

$$\leq t^{-r}\int_0^t\ldots\int_0^t\omega_{r,\varphi}\left(f^{(i)},rt\right)du_1\ldots du_r$$

$$=\omega_{r,\langle\varphi\rangle}\left(f^{(i)},rt\right)\leq r^r\omega_{r,\langle\varphi\rangle}\left(f^{(i)},t\right).$$

Böylece

$$\left\| f^{(i)} - g_0^{(i)} \right\|_{\langle\varphi\rangle(I_0)} \leq r^r \omega_{r,\langle\varphi\rangle}\left(f^{(i)},t\right) \leq Ct^{\upsilon-i}\omega_{r-\upsilon,\langle\varphi\rangle}\left(f^{(\upsilon)},t\right). \tag{3.12}$$

Benzer biçimde

$$\left\| f^{(i)} - g_1^{(i)} \right\|_{\langle\varphi\rangle(I_1)} \leq Ct^{\upsilon-i}\omega_{r-\upsilon,\langle\varphi\rangle}\left(f^{(\upsilon)},t\right) \tag{3.13}$$

olur.

$$\begin{aligned} t^r \left\| g_0^{(r+i)} \right\|_{\langle\varphi\rangle(I_0)} &= \left\| \sum_{j=1}^{r} (-1)^{r+j} \binom{r}{j} j^{-r} \Delta_{ji}^r \left(f^{(i)},.\right) \right\|_{\langle\varphi\rangle(I_0)} \\ &\leq \sum_{j=1}^{r} \binom{r}{j} j^{-r} \omega_{r,\langle\varphi\rangle}\left(f^{(i)}, jt\right) \leq Ct^{\upsilon-i}\omega_{r-\upsilon,\langle\varphi\rangle}\left(f^{(\upsilon)},t\right) \end{aligned} \tag{3.14}$$

ve aynı şekilde

$$t^r \left\| g_1^{(r+i)} \right\|_{\langle\varphi\rangle(I_1)} \leq Ct^{\upsilon-i}\omega_{r-\upsilon,\langle\varphi\rangle}\left(f^{(\upsilon)},t\right). \tag{3.15}$$

$x \in \left[a, a+\frac{b-a}{4}\right]$ için $\varphi(x) = 0$, $x \in \left[a+\frac{3(b-a)}{4}, b\right]$ için $\varphi(x) = 1$ ve $x \in [a,b]$ için $\left|\varphi^{(i)}(x)\right| \leq C,\ i = 0,1,...,2r$ koşullarını sağlayan bir $\varphi(x)$ fonksiyonu alalım. $g_0 \in L_\varphi^{**,r+\upsilon}(I_0)$ ve $g_1 \in L_\varphi^{**,r+\upsilon}(I_1)$ olduğundan $g_{0,}g_1 \in L_\varphi^{**,r+\upsilon}$ biçimde genişletilebilir.[11]

$$g(x) := \left(1-\varphi(x)\right) g_0(x) + \varphi(x)\, g_1(x) \tag{3.16}$$

alalım. Buradan $i = 0,1,...,r+\upsilon$ için

$$g^{(i)}(x) = (1-\varphi(x))\, g_0^{(i)}(x) + \varphi(x)\, g_1^{(i)}(x) + \sum_{j=0}^{i-1} \varphi^{(i-j)}(x)\left(g_1^{(j)}(x) - g_0^{(j)}(x)\right) \tag{3.17}$$

olduğundan $i = 0,1,...,r+\upsilon$ için (3.12), (3.13) ve (3.17) ile

$$\left\|f^{(i)} - g^{(i)}\right\|_{\langle\varphi\rangle(I\backslash I_0)} = \left\|f^{(i)} - g_1^{(i)}\right\|_{\langle\varphi\rangle(I\backslash I_0)} \le Ct^{\upsilon-i}\omega_{r-\upsilon,\langle\varphi\rangle}\left(f^{(\upsilon)},t\right), \tag{3.18}$$

$$\left\|f^{(i)} - g^{(i)}\right\|_{\langle\varphi\rangle(I\backslash I_1)} = \left\|f^{(i)} - g_0^{(i)}\right\|_{\langle\varphi\rangle(I\backslash I_1)} \le Ct^{\upsilon-i}\omega_{r-\upsilon,\langle\varphi\rangle}\left(f^{(\upsilon)},t\right), \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}
\left\|f^{(i)} - g^{(i)}\right\|_{\langle\varphi\rangle(I_2)} &\le \left\|f^{(i)} - g_0^{(i)}\right\|_{\langle\varphi\rangle(I_0)} + \left\|f^{(i)} - g_1^{(i)}\right\|_{\langle\varphi\rangle(I_1)} + C\sum_{j=0}^{i}\left\|g_1^{(j)} - g_0^{(j)}\right\|_{\langle\varphi\rangle(I_2)} \\
&\le Ct^{\upsilon-i}\omega_{r-\upsilon,\langle\varphi\rangle}\left(f^{(\upsilon)},t\right) + C\sum_{j=0}^{i}\left(\left\|f^{(j)} - g_0^{(j)}\right\|_{\langle\varphi\rangle(I_0)} + \left\|f^{(j)} - g_1^{(j)}\right\|_{\langle\varphi\rangle(I_1)}\right) \\
&\le Ct^{\upsilon-i}\omega_{r-\upsilon,\langle\varphi\rangle}\left(f^{(\upsilon)},t\right).
\end{aligned} \tag{3.20}$$

$i = 0,1,...,r$ için (3.12), (3.17) ve Önerme 1a [11] den,

$$\begin{aligned}
\left\|g^{(r+i)}\right\|_{\langle\varphi\rangle(I)} &\le C\left(\left\|g_0^{(r+i)}\right\|_{\langle\varphi\rangle(I_0)} + \left\|g_1^{(r+i)}\right\|_{\langle\varphi\rangle(I_1)} + \right. \\
&\qquad \left. + \sum_{j=0}^{r+i}\varphi^{(i-j)}(x)\left\|g_1^{(j)}(x) - g_0^{(j)}(x)\right\|_{\langle\varphi\rangle(I_2)}\right) \\
&\le C\left(\left\|g_0^{(r+i)}\right\|_{\langle\varphi\rangle(I_0)} + \left\|g_1^{(r+i)}\right\|_{\langle\varphi\rangle(I_1)} + \left\|g_1 - g_0\right\|_{\langle\varphi\rangle(I_2)}\right) \\
&\le C\left(\left\|g_0^{(r+i)}\right\|_{\langle\varphi\rangle(I_0)} + \left\|g_1^{(r+i)}\right\|_{\langle\varphi\rangle(I_1)} + \left\|f - g_0\right\|_{\langle\varphi\rangle(I_0)} + \left\|f - g_1\right\|_{\langle\varphi\rangle(I_1)}\right) \\
&\le Ct^{\upsilon-i-r}\omega_{r-\upsilon,\langle\varphi\rangle}\left(f^{(\upsilon)},t\right)
\end{aligned} \tag{3.21}$$

elde edilir. Böylece

$$\|.\|_{\langle\varphi\rangle(I)} = \|.\|_{\langle\varphi\rangle(I_2)} + \|.\|_{\langle\varphi\rangle(I\backslash I_0)} + \|.\|_{\langle\varphi\rangle(I\backslash I_1)}$$

kullanılırsa $0 < t < \frac{b-a}{4r^2}$ için (3.18) ve (3.21) den,

$$K_{r,\varphi}^{\upsilon}(f,t) \le \|f-g\|_{\upsilon,\langle\varphi\rangle} + t^{r}\left\|g^{(r)}\right\|_{\upsilon,\langle\varphi\rangle} \le Ct^{\upsilon}\omega_{r-\upsilon,\langle\varphi\rangle}\left(f^{(\upsilon)},t\right) \tag{3.22}$$

elde ederiz. Diğer taraftan herhangi $s \ge 1$ için

$$K_{r,\varphi}^{\upsilon}(f,st) \le s^{r+\upsilon}K_{r,\varphi}^{\upsilon}(f,t)$$

buluruz. Böylece (3.22) den ve $t^{\upsilon}\omega_{r-\upsilon,\langle\varphi\rangle}\left(f^{(\upsilon)},t\right)$ nin monotonluğundan

$$K_{r,\varphi}^{\upsilon}(f,st) \le s^{r+\upsilon}Ct^{\upsilon}\omega_{r-\upsilon,\langle\varphi\rangle}\left(f^{(\upsilon)},t\right) \le \left(s^{r+\upsilon}C\right)(st)^{\upsilon}\,\omega_{r-\upsilon,\langle\varphi\rangle}\left(f^{(\upsilon)},st\right)$$

çıkar. Böylece $0 < t \le b-a$ için

$$K_{r,\varphi}^{\upsilon}(f,st) \le Ct^{\upsilon}\omega_{r-\upsilon,\langle\varphi\rangle}\left(f^{(\upsilon)},t\right) \tag{3.23}$$

elde ederiz. Burada C sabiti sadece r ve φ ye bağlıdır.

$P_{r-1} \subset L_{\varphi}^{**,r+\upsilon}$ ve ayrıca herhangi $p(x) \in P_{r-1}$ için $p^{(r+i)}(x) = 0,\ i = 0,1,...,\upsilon$ olur. Bundan dolayı $r \ge 1$ için $K_{r,\varphi}^{\upsilon}(f,t) \le \rho_{\upsilon,\varphi}(f,P_{r-1})$ olur. Böylece aşağıda verilen Önerme 3.3.4 den görülebilir ki $t \ge b-a$ için Teorem 3.3.3 doğrudur. Şimdi Teorem 3.3.3 in ispatını bitirmiş olduk.

Önerme 3.3.4: Varsayalım ki $r = 1,2,...$ ve $\upsilon = 0,1,...,r$ olsun. Bu durumda herhangi $f \in L_{\varphi}^{**,r}$ ve $t \ge b-a$ için

$$\rho_{r,\varphi}(f,P_{r-1}) \le Ct^{\upsilon}\omega_{r-\upsilon,\langle\varphi\rangle}\left(f^{(\upsilon)},t\right)$$

olur. Burada P_{r-1}, $r-1$ dereceli bütün cebirsel polinomların kümesidir ve C sabiti sadece r ve φ ye bağlıdır.

İspat: Teorem 3.3.3 in ispatının ilk kısmından $f \in L_{\varphi}^{**,r}$ için öyle $g \in L_{\varphi}^{**,r+\upsilon}$ mevcuttur ki

$$\|f-g\|_{\upsilon,\langle\varphi\rangle,(b-a)}+(b-a)^r\left\|g^{(r)}\right\|_{\upsilon,\langle\varphi\rangle,(b-a)}\le C(b-a)^r\,\omega_{r-\upsilon,\langle\varphi\rangle}\left(f^{(\upsilon)},b-a\right) \tag{3.24}$$

olur. [12] de olduğu gibi $p(x)=\sum_{i=0}^{r-1}\frac{g^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i\in P_{r-1}$ olsun. Buradan $i=1,...,r$ ve $x\in[a,b]$ için

$$\begin{aligned}\left|g^{(i-1)}(x)-p^{(i-1)}(x)\right|&=\left|\int_a^x\left(g^{(i)}(t)-p^{(i)}(t)\right)dt\right|\\&\le\int_a^x\left|\left(g^{(i)}(t)-p^{(i)}(t)\right)\right|dt\le\left\|g^{(i)}-p^{(i)}\right\|_{\langle\varphi\rangle}\|1\|_{\Psi_1}.\end{aligned}$$

Böylece $i=1,...,r$ için kolaylıkla görülebilir ki

$$\begin{aligned}\left\|g^{(i-1)}-p^{(i-1)}\right\|_{\langle\varphi\rangle}&=\sup_{\rho(v,\Psi_1)\le1}\left|\int_I\left(g^{(i-1)}(x)-p^{(i-1)}(x)\right)v(x)\,dx\right|\\&\le\left\|g^{(i)}-p^{(i)}\right\|_{\langle\varphi\rangle}\|1\|_{\Psi_1}\sup_{\rho(v,\Psi_1)\le1}\int_a^b|v(x)|\,dx\\&=\|1\|_{\langle\varphi\rangle}\|1\|_{\Psi_1}\left\|g^{(i)}-p^{(i)}\right\|_{\langle\varphi\rangle}\le C(b-a)\left\|g^{(i)}-p^{(i)}\right\|_{\langle\varphi\rangle}.\end{aligned}$$

Bundan dolayı, $t\ge b-a$ için

$$\begin{aligned}\|f-p\|_{\upsilon,\langle\varphi\rangle,t}&\le\|f-g\|_{\upsilon,\langle\varphi\rangle,t}+\|g-p\|_{\upsilon,\langle\varphi\rangle,t}\\&\le\|f-g\|_{\upsilon,\langle\varphi\rangle,t}+\left[C(b-a)\right]^r\left\|g^{(r)}\right\|_{\langle\varphi\rangle}\sum_{i=0}^{\upsilon}\left(\frac{t}{C(b-a)}\right)^i\\&\le C\left\{\|f-g\|_{\upsilon,\langle\varphi\rangle,t}+(b-a)^r\left\|g^{(r)}\right\|_{\langle\varphi\rangle}\sum_{i=0}^{\upsilon}\left(\frac{t}{(b-a)}\right)^i\right\}\\&\le C\left(\frac{t}{(b-a)}\right)^{\upsilon}\left\{\|f-g\|_{\upsilon,\langle\varphi\rangle,(b-a)}+(b-a)^r\left\|g^{(r)}\right\|_{\langle\varphi\rangle}(\upsilon+1)\right\}\\&\le C\left(\frac{t}{(b-a)}\right)^{\upsilon}\left\{\|f-g\|_{\upsilon,\langle\varphi\rangle,(b-a)}+(b-a)^r\left\|g^{(r)}\right\|_{\upsilon,\langle\varphi\rangle,(b-a)}\right\}\end{aligned} \tag{3.25}$$

olarak elde ederiz. (3.24), (3.25) ve aşağıdaki eşitsizlik ışığında $t \ge b-a$ için

$$(b-a)^{\upsilon}\,\omega_{r-\upsilon,\langle\varphi\rangle}\left(f^{(\upsilon)},b-a\right) \le t^{\upsilon}\omega_{r-\upsilon,\langle\varphi\rangle}\left(f^{(\upsilon)},t\right)$$

Önerme 3.3.4 nın ispatını tamamlarız.

Sonuç 3.3.5: Varsayalım ki L , L_{φ}^{**} dan L_{φ}^{**} a bir sınırlı lineer operatör olsun ve $\|L\|_{\upsilon,\langle\varphi\rangle} \le C_0$ olsun. Eğer herhangi bir $g \in L_{\varphi}^{**,r+\upsilon}$ için

$$\|g - L(g)\|_{\upsilon,\langle\varphi\rangle} \le C_0 t^r \left\|g^{(r)}\right\|_{\upsilon,\langle\varphi\rangle}$$

ise herhangi $f \in L_{\varphi}^{**,r}$ için $\|L\|_{\upsilon,\langle\varphi\rangle} = \sup\limits_{\|f\|_{\upsilon,\langle\varphi\rangle}\le 1} \|L(f)\|_{\upsilon,\langle\varphi\rangle}$ olmak üzere

$$\|f - L(f)\|_{\upsilon,\langle\varphi\rangle} \le C t^{\upsilon}\omega_{r-\upsilon,\langle\varphi\rangle}\left(f^{(\upsilon)},t\right)$$

olur. Burada C sabiti sadece r ve φ ye bağlıdır.

3.4 Ana Sonuçların İspatı

İspat için aşağıdaki Önermelere ihtiyacımız vardır.

Önerme 3.4.1: Varsayalım ki $I = [a,b]$ ve $J = [c,d]$ kapalı aralıklar olsunlar. $I \subset J$, $r = 0,1,...$ ve $f(x)$ fonksiyonu I üzerinde tanımlı olsun. $f(x)$ fonksiyonunu I dan J ye aşağıdaki formülle genişletelim:

$$f_0(x) = \begin{cases} f(x) & , x \in [a,b], \\ \sum\limits_{i=0}^{2r} \alpha_i f\left(a + 2^{-i}\,\frac{b-a}{a-c}(a-x)\right) & , x \in [c,a\ ). \\ \sum\limits_{i=0}^{2r} \beta_i f\left(b - 2^{-i}\,\frac{b-a}{d-b}(x-b)\right) & , x \in (b,d]. \end{cases}$$

Burada $\{\alpha_i\}$ ve $\{\beta_i\}$ aşağıdaki koşulları sağlayan reel sayılardır:

$$\sum_{i=0}^{2r}\alpha_i\left(-2^{-i}\tfrac{b-a}{a-c}\right)^j=1\ ,\ \ \sum_{i=0}^{2r}\beta_i\left(-2^{-i}\tfrac{b-a}{d-b}\right)^j=1,\quad j=0,1,...,2r\cdot$$

Öyleyse $i,j=0,1,...,r$, $t>0$ ve herhangi $f\in L_{\varphi}^{**,i}$ için

$$\omega_{j,\langle\varphi\rangle(J)}\left(f_0^{(i)},t\right)\le C\omega_{j,\langle\varphi\rangle(I)}\left(f^{(i)},t\right)$$

olur. Burada C sabiti r, φ, I ve J ye bağlıdır.

Önerme 3.4.1 in ispatı Ramazanov'un çalışmasındaki Önerme[11] ve Teorem 2[11] nin yöntemi kullanarak yapılır. n dereceli bütün cebirsel polinomların kümesi P_n olsun.

$$\int_{\frac{-1}{4r}}^{\frac{1}{4r}}\lambda_n(t)\,dt=1 \tag{3.26}$$

olacak şekilde $\lambda_n(t)\in P_n$ alalım.

$$K_n(t)=\lambda_n\left(\frac{t}{4}\right)\Big/4 \tag{3.27}$$

ve

$$\mu_n(t):=\sum_{k=1}^{r}(-1)^{k+1}\binom{r}{k}K_n\left(\frac{t}{k}\right)\Big/k \tag{3.28}$$

olsun.

Eğer $f(x)$ fonksiyonu $[-1,1]$ aralığında tanımlı ise, $f(x)$ fonksiyonunu $[-2,2]$ ye genişletmek için Önerme 3.4.1 deki yöntemi kullanırız ve genişletilmiş $f(x)$ fonksiyonunu $f_0(x)$ ile ifade ederiz.

$$\Phi_n(f,x):=\int_{-2}^{2}f_0(t)\mu_n(t-x)\,dt\in P_n, \tag{3.29}$$

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

alalım.

Varsayalım ki $-1+\frac{2i}{r},\ i=1,2,...,r$ interpolasyon noktaları ile $F(x)$ in r inci interpolasyon polinomu $Q_r(x)$ olsun.

$q(f,x):=Q_r'(x)$ yazarak aşağıdaki önemli bir polinomu tanımlayalım:

$$L_n(f,x)=\Phi_n\left(f-q(f),x\right)+q(f,x)\in P_n,\ n\geq 1. \tag{3.30}$$

Önerme 3.4.2: [19] Varsayalım ki $r,n=1,2,...$ ve $i=0,1,...,4r-2$ olsun. Bu durumda (3.27) de tanımlanan $K_n(t)$,

$$\int_{-4}^{4}|t|^i K_n(t)\,dt\leq Cn^{-i}, \tag{3.31}$$

$$\leq C\left\{1+\left\|q^{(\upsilon)}\right\|(b-a)^{\upsilon}\right\}\omega_{r-\upsilon,\langle\varphi\rangle}\left(f^{(\upsilon)},b-a\right). \tag{3.32}$$

eşitsizliklerini sağlar. Burada C sadece r ve φ ye bağlıdır.

Önerme 3.4.3: $r=1,2,...$ ve $\upsilon=0,1,...,r$ olduğunu varsayalım. Öyleyse (3.29) da tanımlanan Φ_n lineer operatörü ve $[-1,1]$ aralığında en azından υ kökü bulunan herhangi $f\in L_\varphi^{**,r}$ için,

$$\left\|f^{(\upsilon)}(.)-\Phi_n^{(\upsilon)}(f,.)\right\|_{\langle\varphi\rangle}\leq C\left\{\omega_{r-\upsilon,\langle\varphi\rangle}\left(f^{(\upsilon)},\frac{1}{n}\right)+n^{1-4r+\upsilon}\left\|f^{(\upsilon)}\right\|_{\langle\varphi\rangle}\right\}$$

elde ederiz. Burada C sadece r ve φ ye bağlıdır

İspat: [12] deki değişkenleri kullanarak

$$E_{i,x}=\left[\frac{-2-x}{i},\frac{2-x}{i}\right]\setminus\left(-\frac{1}{r},\frac{1}{r}\right),\ R_{i,x}=\int_{E_{i,x}} f_0(x+it)K_n(t)\,dt$$

alalım. O zaman

$$\Phi_n(f,x)=\int_{-\frac{1}{r}}^{\frac{1}{r}}\left\{f_0(x)+(-1)^{r+1}\Delta_t^r(f_0,x)\right\}K_n(t)\,dt+\sum_{i=1}^{r}(-1)^{i+1}\binom{r}{i}R_i(x)$$

$$=A_n(f,x)+B_n(f,x)$$

ve

$$\left\|f^{(\upsilon)}(.)-\Phi_n^{(\upsilon)}(f,.)\right\|_{\langle\varphi\rangle}\le\left\|f^{(\upsilon)}(.)-A_n^{(\upsilon)}(f,.)\right\|_{\langle\varphi\rangle}+\left\|B_n^{(\upsilon)}(f,.)\right\|_{\langle\varphi\rangle}$$

olur.

$g\in L_{\varphi}^{**,r+\upsilon}$ ve g_0, g nin $[-1,1]$ den $[-2,2]$ ye genişletilmiş fonksiyonu olsun. Öyleyse (3.26) dan,

$$g^{(i)}(x)-A_n^{(i)}(g,x)=(-1)^r\int_{-\frac{1}{r}}^{\frac{1}{r}}\Delta_t^r\left(g_0^{(i)},x\right)K_n(t)\,dt,\ i=0,1,...,\upsilon$$

çıkar. $i=0,1,...,\upsilon$ için Önerme 3.4.1 ve (3.31) den,

$$\left\|g^{(i)}(.)-A_n^{(i)}(g,.)\right\|_{\langle\varphi\rangle}=\sup_{\rho(v,\Psi_1)\le1}\left|\int_{-1}^{1}\left(\int_{-\frac{1}{r}}^{\frac{1}{r}}\Delta_t^r\left(g_0^{(i)},x\right)K_n(t)\,dt\right)v(x)\,dx\right|$$

$$\le\int_{-\frac{1}{r}}^{\frac{1}{r}}\left(\sup_{\rho(v,\Psi_1)\le1}\left|\int_{-1}^{1}\Delta_t^r\left(g_0^{(i)},x\right)v(x)\,dx\right|\right)K_n(t)\,dt$$

$$\le\int_{-\frac{1}{r}}^{\frac{1}{r}}\omega_{r,\langle\varphi\rangle}\left(g_0^{(i)},t\right)K_n(t)\,dt\le\int_{-\frac{1}{r}}^{\frac{1}{r}}|t|^r\left\|g_0^{(i+r)}\right\|_{\langle\varphi\rangle[-2,2]}K_n(t)\,dt$$

$$\le C\left\|g^{(i+r)}\right\|_{\langle\varphi\rangle[-1,1]}\int_{-\frac{1}{r}}^{\frac{1}{r}}|t|^r K_n(t)\,dt\le Cn^{-r}\left\|g^{(i+r)}\right\|_{\langle\varphi\rangle[-1,1]}$$

elde ederiz. Bundan dolayı $t=\frac{1}{n}$ ve herhangi $g\in L_{\varphi}^{**,r+\upsilon}$ için

$$\left\|g(.)-A_n(g,.)\right\|_{\upsilon,\langle\varphi\rangle,\frac{1}{n}}\le C\left(\frac{1}{n}\right)^r\left\|g^{(r)}\right\|_{\upsilon,\langle\varphi\rangle,\frac{1}{n}}\tag{3.33}$$

buluruz. Diğer taraftan $f \in L_{\varphi}^{**,r+\upsilon}[-1,1]$ ve $i=0,1,...,\upsilon$ için kolaylıkla

$$\left\| A_n^{(i)}(f,.) \right\|_{\langle\varphi\rangle} = \left\| f^{(i)}(x) + \sum_{j=0}^{r} \int_{-\frac{1}{r}}^{\frac{1}{r}} (-1)^{r-j} \binom{r}{j} f_0^{(i)}(x+jt) K_n(t)\, dt \right\|_{\langle\varphi\rangle}$$

$$\leq \left\| f^{(i)}(x) \right\|_{\langle\varphi\rangle} + \sup_{\rho(v,\Psi_1)\leq 1} \left| \int_{-1}^{1} \left\{ \sum_{j=0}^{r} \int_{-\frac{1}{r}}^{\frac{1}{r}} (-1)^{r-j} \binom{r}{j} f_0^{(i)}(x+jt) K_n(t)\, dt \right\} v(x)\, dx \right|$$

$$\leq \left\| f^{(i)}(x) \right\|_{\langle\varphi\rangle} + \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} \int_{-\frac{1}{r}}^{\frac{1}{r}} \left\{ \sup_{\rho(v,\Psi_1)\leq 1} \left| \int_{-1+jt}^{1+jt} f_0^{(i)}(y) v(y-jt)\, dy \right| \right\} K_n(t)\, dt$$

$$\leq \left\| f^{(i)}(x) \right\|_{\langle\varphi\rangle} + \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} \int_{-\frac{1}{r}}^{\frac{1}{r}} \left\{ \sup_{\rho(v,\Psi_1)\leq 1} \left\| f_0^{(i)} \right\|_{\langle\varphi\rangle[-1+jt,1+jt]} \left\| v \right\|_{\langle\Psi_1\rangle[-1,1]} \right\} K_n(t)\, dt$$

$$\leq \left\| f^{(i)}(x) \right\|_{\langle\varphi\rangle} + C \left\| f_0^{(i)} \right\|_{\langle\varphi\rangle[-2,2]} \int_{-\frac{1}{r}}^{\frac{1}{r}} K_n(t)\, dt \leq C \left\| f^{(i)} \right\|_{\langle\varphi\rangle[-1,1]}.$$

Dolayısıyla

$$\left\| A_n(f,.) \right\|_{\upsilon,\langle\varphi\rangle} \leq C \left\| f \right\|_{\upsilon,\langle\varphi\rangle}, \quad f \in L_{\varphi}^{**,r}[-1,1]$$

buluruz ki bu

$$\left\| A_n \right\|_{\upsilon,\langle\varphi\rangle} \leq C, \quad (n=1,2,...) \tag{3.34}$$

olduğunu gösterir.

$f \in L_{\varphi}^{**,r}[-1,1]$ için (3.33), (3.34) ve Teorem 3.3.3 ün sonucundan,

$$\left\| f(.) - A_n(f,.) \right\|_{\upsilon,\langle\varphi\rangle,\frac{1}{n}} \leq C \left(\frac{1}{n} \right)^{\upsilon} \omega_{r-\upsilon,\langle\varphi\rangle} \left(f^{(\upsilon)}, \frac{1}{n} \right).$$

Bundan dolayı,

$$\left\| f^{(\upsilon)}(.) - A_n^{(\upsilon)}(f,.) \right\|_{\langle\varphi\rangle} \le C\omega_{r-\upsilon,\langle\varphi\rangle}\left(f^{(\upsilon)}, \frac{1}{n} \right) \tag{3.35}$$

çıkar. Ayrıca

$$B_n^{(\upsilon)}(f,x) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^{i+1} \binom{r}{i} R_i^{(\upsilon)}(x)$$

ve

$$R_i^{(\upsilon)}(x) = \int_{E_{i,x}} f_0^{(\upsilon)}(x+it) K_n(t)\,dt +$$

$$+\sum_{j=0}^{\upsilon-1} \left\{ \left(1-\frac{1}{i}\right)^{j+1} \left[f_0^{(\upsilon-1-j)}(2) K_n^{(j)}\left(\frac{2-x}{i}\right) - f_0^{(\upsilon-1-j)}(-2) K_n^{(j)}\left(\frac{-2-x}{i}\right) \right] \right\}$$

göz önünde bulundurularak (3.32) den,

$$\begin{aligned} \left\| \int_{E_{i,x}} f_0^{(\upsilon)}(x+it) K_n(t)\,dt \right\|_{\langle\varphi\rangle} &= \sup_{\rho(v,\Psi_1)\le 1} \left| \int_{-1}^{1} \left\{ \int_{E_{i,x}} f_0^{(\upsilon)}(x+it) K_n(t)\,dt \right\} v(x)\,dx \right| \\ &\le \int_{E_{i,x}} \left\{ \sup_{\rho(v,\Psi_1)\le 1} \left| \int_{-1+it}^{1+it} f_0^{(\upsilon)}(y) v(y-it)\,dy \right| \right\} K_n(t)\,dt \\ &\le c \left\| f_0^{(\upsilon)} \right\|_{\langle\varphi\rangle[-2,2]} \int_{E_{i,x}} K_n(t)\,dt \le cn^{1-4r} \left\| f^{(\upsilon)} \right\|_{\langle\varphi\rangle[-1,1]} \\ &\le cn^{1-4r+\upsilon} \left\| f^{(\upsilon)} \right\|_{\langle\varphi\rangle}. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Varsayımlarımızdan, $f^{(i)}$, $i = 1,2,...,\upsilon-1$ nin $[-1,1]$ üzerinde i tane kökü vardır.

Varsayalım ki $i = 1,2,...,\upsilon-1$ için $f^{(i)}$ nin kökleri c_i olsun. Öyleyse $x \in [-2,2]$ için

$$\begin{aligned} \left| f_0^{(i)}(x) \right| &= \left| \int_{c_i}^{x} f_0^{(i+1)}(t)\,dt \right| \le \int_{-2}^{2} \left| f_0^{(i+1)}(x) \right| dx \\ &\le \left\| f_0^{(i+1)} \right\|_{\langle\varphi\rangle[-2,2]} \|1\|_{\langle\Psi_1\rangle} \le C \left\| f^{(i+1)} \right\|_{\langle\varphi\rangle[-1,1]} \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece $i=0,1,...,\upsilon-1$ için,

$$\left\|f^{(i)}\right\|_{\langle\varphi\rangle[-1,1]} \le C\left\|f^{(i+1)}\right\|_{\langle\varphi\rangle[-1,1]}$$

çıkar. Dolayısıyla $x\in[-2,2]$ için,

$$\left|f_0^{(i)}(x)\right| \le C\left\|f^{(i+1)}\right\|_{\langle\varphi\rangle} \le ... \le C\left\|f^{(\upsilon)}\right\|_{\langle\varphi\rangle},\ i=0,1,...,\upsilon-1$$

olur. Bundan dolayı $j=0,1,...,\upsilon-1$ için,

$$\left|f_0^{(\upsilon-1-j)}(2)\right| \le C\left\|f^{(\upsilon)}\right\|_{\langle\varphi\rangle},\ \left|f_0^{(\upsilon-1-j)}(-2)\right| \le C\left\|f^{(\upsilon)}\right\|_{\langle\varphi\rangle}.$$

(3.32) yi tekrarlarsak

$$\left|\sum_{j=0}^{\upsilon-1}\left\{\left(-\frac{1}{i}\right)^{j+1}\left[f_0^{(\upsilon-1-j)}(2)K_n^{(j)}\left(\frac{2-x}{i}\right)-f_0^{(\upsilon-1-j)}(-2)K_n^{(j)}\left(\frac{-2-x}{i}\right)\right]\right\}\right|$$
$$\le Cn^{1-4r+\upsilon}\left\|f^{(\upsilon)}\right\|_{\langle\varphi\rangle}$$

buluruz. Böylece

$$\left\|\sum_{j=0}^{\upsilon-1}\left\{\left(-\frac{1}{i}\right)^{j+1}\left[f_0^{(\upsilon-1-j)}(2)K_n^{(j)}\left(\frac{2-x}{i}\right)-f_0^{(\upsilon-1-j)}(-2)K_n^{(j)}\left(\frac{-2-x}{i}\right)\right]\right\}\right\|_{\langle\varphi\rangle} \tag{3.37}$$
$$\le Cn^{1-4r+\upsilon}\left\|f^{(\upsilon)}\right\|_{\langle\varphi\rangle}$$

elde ederiz. (3.36) ve (3.37) den

$$\left\|R_i^{(\upsilon)}(.)\right\|_{\langle\varphi\rangle} \le Cn^{1-4r+\upsilon}\left\|f^{(\upsilon)}\right\|_{\langle\varphi\rangle},\ i=1,...,r$$

buluruz. Bundan dolayı

$$\left\| B_n^{(\upsilon)}(f,.) \right\|_{\langle\varphi\rangle} \le C n^{1-4r+\upsilon} \left\| f^{(\upsilon)} \right\|_{\langle\varphi\rangle}. \tag{3.38}$$

(3.35) ve (3.38) ten, Önerme 3.4.3 un ispatını tamamlayabiliriz.

Önerme 3.4.4: Varsayalım ki $r = 1,2,\ldots$, $\upsilon = 0,1,\ldots,r$ ve $q(f,x)$ yukarıda tanımlandığı gibi olsun. $\left\| q^{(\upsilon)} \right\| = \sup_{\|f\|_{\langle\varphi\rangle} \le 1} \left\| q^{(\upsilon)}(f,.) \right\|_{\langle\varphi\rangle}$ alalım. Böylece herhangi $f \in L_\varphi^{**,r}$ için,

$$\left\| f^{(\upsilon)}(.) - q^{(\upsilon)}(f,.) \right\|_{\langle\varphi\rangle} \le C\left\{ 1 + \left\| q^{(\upsilon)} \right\| (b-a)^{\upsilon} \right\} \omega_{r-\upsilon,\langle\varphi\rangle}\left(f^{(\upsilon)}, b-a \right)$$

olur. Burada C sadece r ve φ ye bağlıdır.

İspat: $Q(x) \in P_{r-1}$ olduğunu varsayalım. Öyleyse, Önerme 3.3.4 ü kullanarak, [12] den,

$$\begin{aligned} \left\| f^{(\upsilon)}(.) - q^{(\upsilon)}(f,.) \right\|_{\langle\varphi\rangle} &\le \left\| f^{(\upsilon)} - Q^{(\upsilon)} \right\|_{\langle\varphi\rangle} + \left\| q^{(\upsilon)}(f-Q,.) \right\|_{\langle\varphi\rangle} \\ &\le \left\{ (b-a)^{-\upsilon} + \left\| q^{(\upsilon)} \right\| \right\} \left\| f^{(\upsilon)} - Q^{(\upsilon)} \right\|_{\upsilon,\langle\varphi\rangle(b-a)} \\ &\le C\left\{ 1 + \left\| q^{(\upsilon)} \right\| (b-a)^{\upsilon} \right\} \omega_{r-\upsilon,\langle\varphi\rangle}\left(f^{(\upsilon)}, b-a \right). \end{aligned}$$

Teorem 3.2.1'in İspatı: Varsayalım ki $x \in [-1,1]$ için $\upsilon = 0,1,\ldots,r$ olsun. Markov eşitsizliğinden,

$$\left| q^{(\upsilon)}(f,x) \right| \le C \max_{x\in[-1,1]} \left| q(f,x) \right| = C \max_{x\in[-1,1]} \left| Q_r'(x) \right| \le C \max_{x\in[-1,1]} \left| Q_r(x) \right|. \tag{3.39}$$

[19] daki Önerme 4 ü kullanarak

$$C \max_{x\in[-1,1]} \left| Q_r(x) \right| \le C \max_{x\in[-1,1]} \left| F(x) \right| = C \max_{x\in[-1,1]} \left| \int_0^x f(t)\,dt \right|$$

$$\leq C\int_{-1}^{1}\left|f(x)\right|dx \leq C\left\|f\right\|_{\langle\varphi\rangle}\left\|1\right\|_{\langle\Psi_1\rangle} \leq C\left\|f\right\|_{\langle\varphi\rangle} \qquad (3.40)$$

buluruz. (3.39) ve (3.40) tan,

$$\left\|q^{(\upsilon)}(f,.)\right\|_{\langle\varphi\rangle} \leq C\left\|f\right\|_{\langle\varphi\rangle} \text{ ve } \left\|q^{(\upsilon)}\right\|_{\langle\varphi\rangle} \leq C$$

çıkar. Önerme 3.4.3, Önerme 3.4.4 ve $q(f,x)$ in $r-1$ dereceli bir polinom olması ile [12]

$$\begin{aligned}
\left\|f^{(\upsilon)}(.)-L_n^{(\upsilon)}(f,.)\right\|_{\langle\varphi\rangle} &= \left\|f^{(\upsilon)}(.)-q^{(\upsilon)}(f,.)-\Phi_n^{(\upsilon)}(f-q(f),.)\right\|_{\langle\varphi\rangle} \\
&\leq C\left\{\omega_{r-\upsilon,\langle\varphi\rangle}\left(f^{(\upsilon)},\frac{1}{n}\right)+n^{1-4r+\upsilon}\left\|f^{(\upsilon)}(.)-q^{(\upsilon)}(f,.)\right\|_{\langle\varphi\rangle}\right\} \\
&\leq C\left\{\omega_{r-\upsilon,\langle\varphi\rangle}\left(f^{(\upsilon)},\frac{1}{n}\right)+n^{1-4r+\upsilon}\omega_{r-\upsilon,\langle\varphi\rangle}\left(f^{(\upsilon)},2\right)\right\} \\
&\leq C\left\{\omega_{r-\upsilon,\langle\varphi\rangle}\left(f^{(\upsilon)},\frac{1}{n}\right)+n^{1-4r+\upsilon}(2n)^{r-\upsilon}\,\omega_{r-\upsilon,\langle\varphi\rangle}\left(f^{(\upsilon)},\frac{1}{n}\right)\right\} \\
&\leq C\omega_{r-\upsilon,\langle\varphi\rangle}\left(f^{(\upsilon)},\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

elde ederiz.

Teorem 3.2.2 nin İspatı: [6] daki Bölüm 4 ten $r=1,2,...$ için, öyle $\left\{\tilde{K}_n(t)\right\}\subset T_n$ mevcuttur ki

$$\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{K}_n(t)\,dt=1, \qquad (3.41)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}|t|^i\left|\tilde{K}_n(t)\right|dt \leq Cn^{-i},\ i=0,1,...,r \qquad (3.42)$$

olur.

$$L_n(f,x):=\int_{-\pi}^{\pi}\left\{f(x)+(-1)^{r+1}\Delta_t^r(f,x)\right\}\tilde{K}_n(t)\,dt\in T_n \qquad (3.43)$$

alalım [12]. (3.33) ve (3.34) daki gibi benzer sonuçlardan, (3.41) ve (3.42) den

$$\left\| g(.) - L_n(g,.) \right\|_{\upsilon,\langle\varphi\rangle,\frac{1}{n}} \le C\left(\frac{1}{n}\right)^r \left\| g^{(r)} \right\|_{\upsilon,\langle\varphi\rangle,\frac{1}{n}},\ g \in L_{\varphi,\pi}^{**,r+\upsilon} \tag{3.44}$$

$$\left\| L_n \right\|_{\upsilon,\langle\varphi\rangle} \le C,\ n = 1,2,.... \tag{3.20}$$

olduğu görülebilir. Böylece herhangi $f \in L_{\varphi,\pi}^{**,r+\upsilon}$ için Teorem 3.3.3 ün sonucundan,

$$\left\| f(.) - L_n(f,.) \right\|_{\upsilon,\langle\varphi\rangle,\frac{1}{n}} \le C\left(\frac{1}{n}\right)^\upsilon \omega_{r-\upsilon,\langle\varphi\rangle}\left(f^{(\upsilon)},\frac{1}{n}\right)$$

çıkar. Dolayısıyla

$$\left\| f^{(\upsilon)}(.) - L_n^{(\upsilon)}(f,.) \right\|_{\langle\varphi\rangle[-\pi,\pi]} \le C\omega_{r-\upsilon,\langle\varphi\rangle}\left(f^{(\upsilon)},\frac{1}{n}\right)$$

elde ederiz.

4. AĞIRLIKLI ORLICZ UZAYLARINDA AYNI ANDA YAKLAŞIM

4.1 Giriş

Bu bölümde konvekslik şartı olmayan Young fonksiyonu ile üretilen $L^{**}_{\varphi,\omega}$ ağırlıklı Orlicz uzaylarında aynı anda trigonometrik yaklaşımın temel teoremleri ifade ve ispat edilmiştir. Biz özellikle A_p Muckenhoupt koşulunu sağlayan ağırlıkları kullanacağız.

Özel durumda, φ konveks olduğunda, trigonometrik yaklaşımda Jackson eşitsizlikleri ve tersi gibi bazı temel eşitsizlikler İsrafilov ve Güven tarafından incelenmiştir. Örneğin [20] de klasik ağırlıklı Orlicz uzaylarında Jackson tipli eşitsizlikleri ve tersi İsrafilov ve Güven tarafından ispatlanmıştır. [21] de klasik ağırlıklı Orlicz uzaylarında fonksiyonların türevleri için Jackson tipli eşitsizlikleri ve tersi İsrafilov ve Güven tarafından ispatlanmıştır.

φ kvazi-konveks yani φ bir konveks Young fonksiyonuna denk olduğunda [16] da Akgün $L^{*}_{\varphi,\omega}$ de bazı düz ve ters teoremleri elde etmiştir. Özellikle [17] de Akgün ve İsrafilov aynı anda yaklaşım ve ters yaklaşım teoremlerini incelediler.

İnceleyeceğimiz fonksiyon sınıflarını tanımlamak için klasik ağırlıklı Orlicz uzayı tanımı ile başlayalım.

Kolaylık olsun diye bu çalışmada her yerde C sabiti ile değişik yerlerdeki farklı pozitif reel sayılar ifade edilecektir.

Bir $\omega:\mathbb{T}\to[0,\infty]$ fonksiyonu ölçülebilir ve $\omega^{-1}\left(\{0,\infty\}\right)$ öngörüntü kümesinin ölçümü sıfır oluyorsa ω fonksiyonuna ağırlık fonksiyonu denir.

2π periyotlu bir ω ağırlık fonksiyonu eğer

$$\left(\frac{1}{|J|}\int_J \omega(x)dx\right)\left(\frac{1}{|J|}\int_J \omega^{-\frac{1}{p-1}}(x)dx\right)^{p-1} \le C,\ \ 1<p<\infty,$$

sağlarsa ω, A_p, $1 < p < \infty$ Muckenhoupt sınıfında bir ağırlıktır denir. Burada C sonlu bir sabit; J, $\mathbb{T}$ nin herhangi bir alt aralığı, $|J|$, J nin uzunluğunu ifade eder [24].

$M(\infty) := \lim_{x\to\infty} M(x) = \infty$ koşulunu sağlayan $M : [0,\infty) \to [0,\infty)$ artan fonksiyonların sınıfını Φ ile ifade edeceğiz. M bir $N-$fonksiyonu olduğunda [2] $N(u)$ ile $M(u)$ $N-$fonksiyonunun tümleyenini ifade ederiz. $M(u)$ bir $N-$fonksiyonu olsun. $\mathbb{T} := [0, 2\pi)$ üzerinde tanımlanmış ölçülebilir f fonksiyonlar sınıfını göz önüne alalım öyle ki $f(x)g(x)\omega(x)$ çarpımı $\mathbb{T}$ üzerinde her ölçülebilir $g \in L_N$ için integrallenebilir olsun ve

$$\rho_g := \rho(g, N, \omega) = \int_{\mathbb{T}} N(|g(x)|)\omega(x)dx,$$

$$\rho(g, N, \omega) \leq 1$$

yazalım.

Son eşitsizliği sağlayan bütün g ler üzerinden supremum alarak

$$\|f\|_{M,\omega} := \sup_g \left| \int_{\mathbb{T}} f(x)g(x)\omega(x)dx \right|$$

Orlicz normunu tanımlarız. $\|f\|_{M,\omega} < \infty$ koşulunu sağlayan $f : \mathbb{T} \to R$ fonksiyonlarının oluşturduğu bu sınıf $L^*_{M,\omega}$ ile gösterilir ve klasik ağırlıklı Orlicz uzayı olarak adlandırılır.

$M(x, p) := x^p$, $1 < p < \infty$ alarak bir ω ağırlığı için $L^p(\mathbb{T}, \omega) := L_{M(\cdot,p),\omega}(\mathbb{T})$ oluşur.

Biz şimdi klasik $L^*_{M,\omega}$ Orlicz uzayından daha geniş olan başka bir fonksiyon sınıfının tanımını vereceğiz. Bu geniş sınıfı $L^{**}_{\varphi,\omega}$ ile ifade edeceğiz. $\varphi \in L^{**}_{\varphi,\omega}$ fonksiyonlarının konveks olmasına gerek yoktur.

$-\infty < p \le q < \infty$ alalım ve $Y[p,q]$ ile $(-\infty,\infty)$ aralığında tanımlanmış aşağıdaki iki koşulu sağlayan $\varphi \in \Phi$ çift fonksiyonlarını ifade edelim.

i) $|u|$ artarken, $\varphi(u)/u^p$ azalmayandır:

ii) $|u|$ artarken, $\varphi(u)/u^q$ artmayandır.

$p < q$ olduğunda $Y\langle p,q \rangle$ ile bir $\varepsilon, \delta > 0$ için $\varphi \in Y[p+\varepsilon, q-\delta]$ koşulunu sağlayan φ fonksiyonlar sınıfını ifade ederiz.

$\varphi(x) \sim [p_1, p_2],\ 0 \le p_1 \le p_2 \le \infty$ (ya da benzer şekilde $-\infty \le p_1 \le p_2 \le 0$) ile $x,\ (0,\infty)$ aralığında artarken $\varphi(x)x^{-p_1}$ azalmayan, $\varphi(x)x^{-p_2}$ artmayan koşullarını sağlayan $\varphi(x) \ge 0$ çift fonksiyonların sınıfı gösterilir.

$\varphi(x) \sim [p_1, p_2],\ 1 \le p_1 \le p_2 \le \infty$ ile $t \to \infty$ iken $\varphi_1(t) = \varphi(t)/t \to \infty$ alalım. $\psi_1(t)$, $\varphi_1(t) = \varphi(t)/t$ fonksiyonunun ters fonksiyonu olsun. $\psi_1(t)$ azalmayan, sürekli, pozitiftir.

$$\Phi_1(x) := \int_0^x \varphi_1(t)dt \ \text{ ve } \ \Psi_1(x) := \int_0^x \psi_1(t)dt$$

yazalım. Buradan $\Phi_1(x),\ \Psi_1(x)$ konveks birer fonksiyon olurlar ve böylece $\Phi_1(x)$ ile $\Psi_1(x)$ Young anlamında tümleyen fonksiyon olurlar.

$L^{**}_{\varphi,\omega}(\mathbb{T})$ ile öyle $f(x)$, $x \in \mathbb{T}$ fonksiyonlarını tanımlarız ki $f(x)g(x)$ çarpımı $\mathbb{T}$ aralığında her $g(x) \in L_{\psi_1,\omega}$ için integrallenebilirdir.

$$L^{**}_{\varphi,\pi,\omega} := L^{**}_{\varphi,\omega}(\mathbb{T}) := \left\{ f : \mathbb{T} \to R;\ \int_{\mathbb{T}} f(x)g(x)\omega(x)dx < \infty,\ g \in L_{\Psi_1,\omega} \right\}.$$

$L^{**}_{\varphi,\pi,\omega}$ uzayında Lüksemburg normu

$$\|f\|_{(\varphi),\omega} := \inf\left\{ \tau > 0 : \rho\left(\Psi_1, \frac{|f|}{\tau}, \omega \right) \le 1 \right\}$$

şeklinde tanımlayabiliriz.

Öyle sabitler mevcuttur ki

$$1\|f\|_{\langle\varphi\rangle,\omega} \le \|f\|_{(\varphi),\omega} \le 2\|f\|_{\langle\varphi\rangle,\omega}.$$

Kolaylıkla görülebilir ki yukarıdaki normlarla $L^{**}_{\varphi,\omega}(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$ olur ve $L^{**}_{\varphi,\omega}(\mathbb{T})$ bir Banach uzayı olur. $L^{**}_{\varphi,\omega}(\mathbb{T})$ Banach uzayı ağırlıklı Orlicz uzayı olarak adlandırılır ve

$$\|f\|_{\langle\varphi\rangle,\omega} := \sup_g \left\{ \int_{\mathbb{T}} |f(x)g(x)|\,\omega(x)dx : \int_{\mathbb{T}} \Psi_1(|g(x)|)\,\omega(x)dx \le 1 \right\}$$

olur.

$f \in L^{**}_{\varphi,\pi,\omega},\ g \in L_{\Psi_1,\omega}$ için

$$\left| \int_{\mathbb{T}} f(x)g(x)\omega(x)dx \right| \le \|f\|_{\langle\varphi\rangle,\omega} \|g\|_{(\Psi_1),\omega}$$

eşitsizliğine genelleştirilmiş Hölder eşitsizliği denir.

Bu bölümün ana amacı Sobolev tipli ağırlıklı uzaylarda fonksiyonlara trigonometrik polinomlarla aynı anda yaklaşım problemlerini göz önüne almaktır.

$$L^{**,r}_{\varphi,\pi,\omega} := \left\{ f \in L^1 : f, f^{(r)} \in L^{**}_{\varphi,\pi,\omega} \setminus L^{*}_{\varphi,\pi,\omega} \right\}.$$

$f \in L^{**}_{\varphi,\omega}(\mathbb{T})$ alarak

$$A_h f(x) := \frac{1}{h} \int_{x-h/2}^{x+h/2} f(t)dt,\ x \in \mathbb{T}$$

ortalamasını tanımlarız.

Hardy-Littlewood Maksimal operatörünün $\varphi \in Y\langle p,q\rangle$, $1<p<q<\infty$ ve $\omega \in A_p$ için $f \in L^{**}_{\varphi,\omega}(\mathbb{T})$ de sınırlılığını kullanarak $\|A_h f(.)\|_{\langle\varphi\rangle,\omega} \le C\|f\|_{\langle\varphi\rangle,\omega} < \infty$ elde ederiz [15].

Şimdi ağırlıklı düzgünlük modülünü tanımlayalım. Eğer $r \in \mathbf{N}$, $\varphi \in Y\langle p,q\rangle$, $1<p<q<\infty$ ve $\omega \in A_p$ ise, I birim operatör olmak üzere, bir $f \in L^{**}_{\varphi,\omega}(\mathbb{T})$ fonksiyonu için ağırlıklı düzgünlük modülü

$$\Omega_0(f,\delta)_{\langle\varphi\rangle,\omega} := \|f\|_{\langle\varphi\rangle,\omega}$$

ve

$$\Omega_r(f,\delta)_{\langle\varphi\rangle,\omega} := \sup_{0\le h_i\le\delta}\left\|\prod_{i=1}^{r}(I-A_{h_i}(f)\right\|_{\langle\varphi\rangle,\omega},$$

şeklinde tanımlanır.

Bu koşullar altında

$$\Omega_r(f,\delta)_{\langle\varphi\rangle,\omega} \le C\|f\|_{\langle\varphi\rangle,\omega}$$

olur [25].

$\mathcal{T}_n$ ile derecesi n den büyük olamayan trigonometrik polinomlar sınıfını ifade edelim. $f \in L^{**}_{\varphi,\omega}(\mathbb{T})$ için

$$E_n(f)_{\langle\varphi\rangle,\omega} := \inf\left\{\|f-T\|_{\langle\varphi\rangle,\omega} : T \in \mathcal{T}_n\right\}$$

olarak tanımlanır.

$f \in L^1(\mathbb{T})$ için

$$f(x) \sim \frac{\alpha_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx) =: \sum_{k=0}^{\infty} A_k(x,f)$$

ve

$$\widetilde{f}(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\sin kx - b_k(f)\cos kx) =: \sum_{k=0}^{\infty} A_k(x,\widetilde{f})$$

serilerine f nin Fourier ve eşlenik Fourier serileri denir. f nin Fourier serilerinin n inci kısmi toplamını

$$S_n(f) := S_n(x,f) := \sum_{k=0}^{n} A_k(x,f),\ n = 0,1,2,...$$

ile ifade edelim.

4.2 Ana Sonuçlar ve İspatları

Teorem 4.2.1: $\varphi \in Y\langle p,q\rangle$, $1 < p < q < \infty$ alalım. $n, r \in \mathbf{N}$ ve $\omega \in A_p$ olsun. Böylece $f \in L^{**,r}_{\varphi,\pi,\omega}$ için

$$E_n(f)_{\langle\varphi\rangle,\omega} \le C_{\varphi,\omega,r}(n+1)^{-r} E_n\left(f^{(r)}\right)_{\langle\varphi\rangle,\omega}$$

sağlanır. Burada C sabiti sadece φ, ω ve r ye bağlıdır.

İspat: [16] daki Teorem 1 in ispat yolunu kullanıp $A_k(x,f) := a_k\cos kx + b_k \sin kx$ alalım. Herhangi $f \in L^{**,r}_{\varphi,\pi,\omega}$ ve $\varepsilon > 0$ için [22, Önerme 3] ten n dereceli öyle bir T trigonometrik polinomu bulunabilir ki

$$\int_{\mathbb{T}} \varphi(|f(x) - T(x)|)\omega(x)dx < \varepsilon \tag{4.1}$$

olur.

Young eşitsizliği $xy \le \varphi(x) + \varphi(y)$, $(x, y \ge 0)$ ve (4.1) gösterir ki $\|f - T\|_{\langle\varphi\rangle,\omega} < \varepsilon$ dir. Böylece $n \to \infty$ iken $E_n(f)_{\langle\varphi\rangle,\omega} \to 0$ olur. Diğer taraftan $\|S_n(f)\|_{\langle\varphi\rangle,\omega} \le C_{\varphi,}\|f\|_{\langle\varphi\rangle,\omega}$ ten [15, Remark 1.4.] $E_n(f)_{\langle\varphi\rangle,\omega} \approx \|f(x) - S_n(f)\|_{\langle\varphi\rangle,\omega}$ elde ederiz ki bundan dolayı $\|\cdot\|_{\langle\varphi\rangle,\omega}$ normunda $f(\cdot) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(\cdot, f)$ olur.

$$A_k(x,f) = A_k\left(x+\frac{r\pi}{2k}, f\right)\cos\frac{r\pi}{2} + A_k\left(x+\frac{r\pi}{2k}, \widehat{f}\right)\sin\frac{r\pi}{2},$$

$$A_k(x,f^{(r)}) = k^r A_k\left(x+\frac{r\pi}{2k}, f\right),\quad k=1,2,3,...,\ r\in R^+$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} A_k(\cdot,f) &= A_0(\cdot,f) + \cos\frac{r\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty} A_k\left(\cdot+\frac{r\pi}{2k}, f\right) + \sin\frac{r\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty} A_k\left(\cdot+\frac{r\pi}{2k}, \widehat{f}\right) \\ &= A_0(\cdot,f) + \cos\frac{r\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty} k^{-r}A_k(\cdot,f^{(r)}) + \sin\frac{r\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty} k^{-r}A_k(\cdot,\widehat{f}^{(r)}).\end{aligned}$$

Böylece,

$$f(\cdot) - S_n(\cdot,f) = \cos\frac{r\pi}{2}\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-r}A_k(\cdot,f^{(r)}) + \sin\frac{r\pi}{2}\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-r}A_k(\cdot,\widehat{f}^{(r)}).$$

Buradan

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-r}A_k(\cdot,f^{(r)}) &= \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-r}\left[\left(S_k(.,f^{(r)}) - f^{(r)}(.)\right) - \left(S_{k-1}(.,f^{(r)}) - f^{(r)}(.)\right)\right] \\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty}\left(k^{-r} - (k+1)^{-r}\right)\left(S_k(.,f^{(r)}) - f^{(r)}(.)\right) - \\ &\quad -(n+1)^{-r}\left(S_n(.,f^{(r)}) - f^{(r)}(.)\right)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-r}A_k(\cdot,\widehat{f}^{(r)}) &= \sum_{k=n+1}^{\infty}\left(k^{-r} - (k+1)^{-r}\right)\left(S_k(.,\widehat{f}^{(r)}) - \widehat{f}^{(r)}(.)\right) - \\ &\quad -(n+1)^{-r}\left(S_n(.,\widehat{f}^{(r)}) - \widehat{f}^{(r)}(.)\right),\end{aligned}$$

ile

$$
\begin{aligned}
\left\|f-S_n(f)\right\|_{\langle\varphi\rangle,\omega} \le & \sum_{k=n+1}^{\infty}\left(k^{-r}-(k+1)^{-r}\right)\left\|S_k(f^{(r)})-f^{(r)}\right\|_{\langle\varphi\rangle,\omega} \\
& +(n+1)^{-r}\left\|S_n(f^{(r)})-f^{(r)}\right\|_{\langle\varphi\rangle,\omega} \\
& +\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(k^{-r}-(k+1)^{-r}\right)\left\|S_k(\widehat{f}^{(r)})-\widehat{f}^{(r)}\right\|_{\langle\varphi\rangle,\omega}+ \\
& +(n+1)^{-r}\left\|S_n(\widehat{f}^{(r)})-\widehat{f}^{(r)}\right\|_{\langle\varphi\rangle,\omega} \\
\le C & \left[\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(k^{-r}-(k+1)^{-r}\right)E_k\left(f\right)_{\langle\varphi\rangle,\omega}+(n+1)^{-r}E_n\left(f^{(r)}\right)_{\langle\varphi\rangle,\omega}\right] \\
+C & \left[\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(k^{-r}-(k+1)^{-r}\right)E_k\left(\widehat{f}\right)_{\langle\varphi\rangle,\omega}+(n+1)^{-r}E_n\left(\widehat{f}^{(r)}\right)_{\langle\varphi\rangle,\omega}\right].
\end{aligned}
$$

buluruz. Sonuç olarak

$$
\begin{aligned}
\left\|f-S_n(f)\right\|_{\langle\varphi\rangle,\omega} & \le CE_k\left(f^{(r)}\right)_{\langle\varphi\rangle,\omega}\left[\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(k^{-r}-(k+1)^{-r}\right)+(n+1)^{-r}\right] \\
& +CE_n\left(\widehat{f}^{(r)}\right)_{\langle\varphi\rangle,\omega}\left[\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(k^{-r}-(k+1)^{-r}\right)+(n+1)^{-r}\right] \\
& \le CE_n\left(f^{(r)}\right)_{\langle\varphi\rangle,\omega}\left[\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(k^{-r}-(k+1)^{-r}\right)+(n+1)^{-r}\right] \\
& \le C\frac{1}{(n+1)^r}E_n\left(f^{(r)}\right)_{\langle\varphi\rangle,\omega}.
\end{aligned}
$$

Teorem 4.2.2: $\varphi\in Y\left\langle p,q\right\rangle$, $1<p<q<\infty$, $n,r\in\mathbf{N}$ ve $\omega\in A_p$ olsun. Böylece $L^{**,r}_{\varphi,\pi,\omega}$ de n dereceli her $T\in\mathcal{T}_n$ trigonometrik polinomu için

$$
\left\|T_n^{(r)}\right\|_{\langle\varphi\rangle,\omega}\le Cn^r\left\|T_n\right\|_{\langle\varphi\rangle,\omega}, \quad r=1,2,3,\ldots
$$

sağlanır. Burada C sabiti sadece r, φ ve ω ya bağlıdır.

İspat: $L^{**,r}_{\varphi,\pi,\omega}$ de $\omega \in A_p$ ise

$$K_n(\cdot,f) := \frac{1}{n+1}\left\{S_0(\cdot,f), S_1(\cdot,f), ..., S_n(\cdot,f)\right\}$$

olduğunda

$$\left\|K_n(.,f)\right\|_{\langle\varphi\rangle,\omega} \le C\left\|f\right\|_{\langle\varphi\rangle,\omega},\ n = 0,1,2,...$$

olur.[23, s.99] dan

$$F_n(u) := \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{k}\cos ju\right)$$

olduğundan

$$T_n'(\cdot) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} T_n(\cdot+u)n\sin nF_{n-1}(u)du$$

olur. Böylece

$$\left|T_n'(\cdot)\right| \le 2nK_{n-1}(\cdot,\left|T_n\right|)$$

elde ederiz. Buradan da $\left\|T_n'\right\|_{\langle\varphi\rangle,\omega} \le Cn\left\|T_n\right\|_{\langle\varphi\rangle,\omega}$ Bernstein eşitsizliğini buluruz ve böylece $r = 1,2,3,...$ için

$$\left\|T_n^{(r)}\right\|_{\langle\varphi\rangle,\omega} \le Cn^r\left\|T_n\right\|_{\langle\varphi\rangle,\omega}$$

elde ederiz.

Teorem 4.2.3: $\varphi \in Y\langle p,q \rangle$, $1<p<q<\infty$ alalım. $n,r\in \mathbf{N}$, $v=0,1,2,\ldots,r$, $\omega \in A_p$ ve $E_n(f)_{\langle\varphi\rangle,\omega} = \left\| f - T_n^* \right\|_{\langle\varphi\rangle,\omega}$ olsun. Böylece $f\in L^{**,r}_{\varphi,\pi,\omega}$ için n dereceli öyle bir T_n trigonometrik polinomu bulunabilir ki

$$\left\| f^{(v)} - T_n^{(v)} \right\|_{\langle\varphi\rangle,\omega} \le C n^{v-r} E_n\left(f^{(r)}\right)_{\langle\varphi\rangle,\omega}$$

sağlanır. Burada C sabiti sadece φ, ω ve r ye bağlıdır.

İspat : [15,Remark 1.4.] ten $\left\| S_n(f,.) \right\|_{\langle\varphi\rangle,\omega} \le C \left\| f \right\|_{\langle\varphi\rangle,\omega}$ dir.

$E_n\left(f^{(v)}\right)_{\langle\varphi\rangle,\omega} = \left\| f^{(v)} - q_n \right\|_{\langle\varphi\rangle,\omega}$, $q_n \in T_n$ olsun. Buradan Teorem 4.2.1 i kullanarak

$$\begin{aligned}
\left\| f^{(\nu)} - T_n^{*(\nu)} \right\|_{\langle\varphi\rangle,\omega} &\le \left\| f^{(\nu)} - S_n(f^{(\nu)}) \right\|_{\langle\varphi\rangle,\omega} + \left\| S_n^{(\nu)}(f) - T_n^{*(\nu)} \right\|_{\langle\varphi\rangle,\omega} \\
&\le \left\| f^{(\nu)} - q_n \right\|_{\langle\varphi\rangle,\omega} + \left\| q_n - S_n(f^{(\nu)}) \right\|_{\langle\varphi\rangle,\omega} + \left\| (S_n(f) - T_n^*)^{(\nu)} \right\|_{\langle\varphi\rangle,\omega} \\
&\le E_n\left(f^{(\nu)}\right)_{\langle\varphi\rangle,\omega} + \left\| S_n(q_n) - S_n(f^{(\nu)}) \right\|_{\langle\varphi\rangle,\omega} + C n^{\nu} \left\| S_n(f) - T_n^* \right\|_{\langle\varphi\rangle,\omega} \\
&\le (1+C) E_n\left(f^{(\nu)}\right)_{\langle\varphi\rangle,\omega} + C n^{\nu} \left\| S_n(f) - S_n(T_n^*) \right\|_{\langle\varphi\rangle,\omega} \\
&\le C n^{\nu-r} E_n\left(f^{(r)}\right)_{\langle\varphi\rangle,\omega} + C n^{\nu} E_n(f)_{\langle\varphi\rangle,\omega} \\
&\le C n^{\nu-r} E_n\left(f^{(r)}\right)_{\langle\varphi\rangle,\omega}
\end{aligned}$$

çıkar ve teoremin ispatını tamamlanır.

Teorem 4.2.4: $\varphi \in Y\langle p,q \rangle$, $1<p<q<\infty$ alalım. $n,r\in \mathbf{N}$, $r=0,1,2,\ldots$, $v=0,1,2,\ldots,r$ ve $\omega \in A_p$ olsun. Her $f\in L^{**,r}_{\varphi,\pi,\omega}$ için n dereceli öyle bir T_n trigonometrik polinomu bulunabilir ki

$$\left\| f^{(v)} - T_n^{(v)} \right\|_{\langle\varphi\rangle,\omega} \le C_{\varphi,\omega,r} n^{v-r} \Omega_{r,\langle\varphi\rangle,\omega}\left(1/n, f^{(r)}\right)$$

sağlanır. Burada C sabiti sadece φ, ω ve r ye bağlıdır.

İspat : $T_n \in T_n^*$, $E_n(f)_{\langle\varphi\rangle,\omega} = \left\| f - T_n^* \right\|_{\langle\varphi\rangle,\omega}$ alalım ve $\omega \in A_p$ olsun. Teorem 1.5 [15], Teorem 1 [17] ve Teorem 4.2.1 den

$$\left\| f - T_n \right\|_{\langle\varphi\rangle,\omega} \le C n^{-r} \Omega_{r,\langle\varphi\rangle,\omega}\left(1/n, f^{(r)}\right)$$
$$\left\| f - T_n^* \right\|_{\langle\varphi\rangle,\omega} \le C n^{-r} \Omega_{r,\langle\varphi\rangle,\omega}\left(1/n, f^{(r)}\right)$$

elde ederiz. Diğer taraftan

$$\left\| T_n - T_n^* \right\|_{\langle\varphi\rangle,\omega} \le 2C n^{-r} \Omega_{r,\langle\varphi\rangle,\omega}\left(1/n, f^{(r)}\right)$$

olur. Böylece Bernstein eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \left\| f^{(v)} - T_n^{(v)} \right\|_{\langle\varphi\rangle,\omega} &\le \left\| f^{(v)} - T_n^{*(v)} \right\|_{\langle\varphi\rangle,\omega} + \left\| T_n^{(v)} - T_n^{*(v)} \right\|_{\langle\varphi\rangle,\omega} \\ &\le C n^{v-r} E_n\left(f^{(r)}\right) + c n^{v-r} \Omega_{r,\langle\varphi\rangle,\omega}\left(1/n, f^{(r)}\right) \\ &\le C n^{v-r} \Omega_{r,\langle\varphi\rangle,\omega}\left(1/n, f^{(r)}\right) \end{aligned}$$

elde ederiz. Burada C sabiti sadece φ, ω ve r ye bağlıdır. ▢

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde L_{φ}^{*} Orlicz uzayından daha geniş ve benzer özelliklerine sahip olan L_{φ}^{**} Orlicz uzayı tanımlanmış ve bu Orlicz uzaylarının temel özellikleri ele alınmıştır.

Bu çalışmada ele alınan Orlicz uzayının üretildiği φ fonksiyonlarının konveks olma zorunluluğu yoktur. Bu tezde L_{φ}^{**} uzaylarında incelenecek olan yaklaşım teorisi problemlerinde önemli bir koşulun zayıflatılması gibi bir kolaylık ortaya konulmuştur.

Bu tezin ana amacı Sobolev tipli uzaylarda fonksiyonlara cebirsel/trigonometrik polinomlarla aynı anda yaklaşım problemleridir. Bu tezde konvekslik şartı olmayabilen Young fonksiyonları ile üretilen Orlicz uzaylarında cebirsel/trigonometrik polinomlarla yaklaşımın bazı problemleri çalışılmıştır. Aynı zamanda K Fonksiyoneli ve L_{φ}^{**} uzayında düzgünlük modülü ele alınıp bazı özellikleri incelenmiştir.

Ayrıca konvekslik şartı olmayabilen Young fonksiyonları ile üretilen Muckenhoupt ağırlıkları ile oluşturulan Orlicz uzaylarında trigonometrik polinomlarla aynı anda yaklaşım problemleri ele alınmıştır.

6. KAYNAKLAR

[1] Soykan, Y., *Fonksiyonel Analiz,* İstanbul: Nobel Yayın Dağıtım, (2008).

[2] Krasnoselskii, M. A., Rutickii, Y. B., *Convex functions and Orlicz spaces*, Groningen: Translated from the first Russian edition by Leo F. Boron, P. Noordhoff Ltd., (1961).

[3] Lorentz, G. G., DeVore, R. A., *Constructive Approximation,* New York: Springer-Verlag, (1993).

[4] Chen, Y.-M, "On two-functional spaces", *Studia Mathematica*, 24, 61-88 (1964).

[5] Zygmund, A., *Trigonometric series*, Cambridge University Press: (1), 2nd edition, (1959)

[6] Lorentz, G. G., *Approximation of functions*, Holt, Rinehart and Winston, (1966).

[7] Tsyganok, I. I., ''A generalization of a theorem of Jackson'', (Russian) *Mat. Sb. (N.S.)* 71 (113), 257-260, (1966).

[8] Kokilasvili, V. M., ''An inverse theorem of the constructive theory of functions in Orlicz spaces'', (Russian) *Soobsc. Akad. Nauk Gruzin*. SSR 37 263-270, (1965).

[9] Ponomarenko, V. G., ''Approximation of periodic functions in an Orlicz space'', (Russian) *Sibirsk. Mat.* Z. (7), 1337-1346, (1966).

[10] Cohen, E., ''On the degree of approximation of a function by the partial sums of its Fourier series'', *Trans. Amer. Math. Soc.* (235), 35-74, (1978).

[11] Ramazanov, A.-R. K., ''On approximation by polynomials and rational functions in Orlicz spaces'', *Anal. Math.* 10 (2), 117-132, (1984).

[12] Garidi, W., ''On approximation by polynomials in Orlicz spaces'', *Approx. Theory Appl*. 7 (3), 97-110, (1991).

[13] Akgün, R., ''Approximating polynomials for functions of weighted Smirnov-Orlicz spaces'', *J. Funct. Spaces Appl.* , Article ID 982360, 41 pp. (2012)

[14] Akgün, R., ''Inequalities for one sided approximation in Orlicz spaces'', *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 40 (2), 231-240, (2011).

[15] Akgün, R., ''Some inequalities of trigonometric approximation in weighted Orlicz spaces'', *Mathematica Slovaca,* in press.

[16] Akgün, R., Israfilov, D. M., ''Approximation in weighted Orlicz spaces'', *Mathematica Slovaca*,, 61 (4), 601-618, (2011).

[17] Israfilov, D. M., Akgün, R., ‘‘Simultaneous and converse approximation theorems in weighted Orlicz spaces’’, *Bulletin of the Belgium Mathematics Society*, Simon Stevin, 17 (1), 13-28. (2010).

[18] Akgün, R., Koç, H., ‘‘Approximation by interpolating polynomials in weighted symmetric Smirnov spaces’’, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics,* 41 (5), 643-649., (2012).

[19] Yiqun, Y., ‘‘K-functional and Degree of Approximation (I)’’*,* (in Chinese), *Acta Mathematica Sinica,* 27 (1), 133-144, (1984).

[20] Guven, A., Israfilov, D. M., ‘‘On approximation in weighted Orlicz spaces’’, *Mathematica Slovaca*, 62 (1), 77-86, (2011).

[21] Israfilov, D. M., Guven, A., ‘‘*Approximation by trigonometric polynomials in weighted Orlicz spaces’’*, *Stud. Math*., 174 (2), 147-168, (2006).

[22] Khabazi, M., ‘‘The mean convergence of trigonometric Fourier series in weighted Orlicz classes’’, *Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute*, (129), 65-75, (2002)

[23] Butzer, P. L., -Nessel, R., *Fourier Analysis and Approximation*, Basel-Stuttgart: One dimensional Theory, Birkhauser, (1971).

[24] Muckenhoupt, B., ‘‘Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function’’. *Trans. Amer. Math. Soc*. (165), 207-226, (1972).

[25] Jafarov, S. Z., ‘‘On moduli of smoothness in Orlicz classes’’*, Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb.* (33), 95-100, (2010).