T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BİHARMONİK EĞRİLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ESİN KESEN

BALIKESİR, OCAK - 2013

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BİHARMONİK EĞRİLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ESİN KESEN

BALIKESİR, OCAK - 2013

KABUL VE ONAY SAYFASI

Esin KESEN tarafından hazırlanan **"BİHARMONİK EĞRİLER"** adlı tez çalışmasının savunma sınavı 21.01.2013 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri		İmza
Danışman	Prof. Dr. Cihan ÖZGÜR	
Üye	Doç. Dr. Özden KORUOĞLU	
Üye	Doç. Dr. Bengü BAYRAM	

Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez BAÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Prof. Dr. Hilmi NAMLI ....

ÖZET

BİHARMONİK EĞRİLER
YÜKSEK LİSANS TEZİ
ESİN KESEN
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. CİHAN ÖZGÜR)

BALIKESİR, OCAK - 2013

Bu çalışmada Sasakian uzay formlarda Legendre ve Legendre olmayan eğrilerin biharmonik olması için gerekli ve yeterli şartlar belirlenmiştir.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş bölümüdür.

İkinci bölümde, çalışmanın sonraki bölümlerinde kullanılan temel tanım ve kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde bir Sasakian uzay formunda tanımlı Legendre bir eğrinin biharmonik olma koşulları incelenmiştir. Biharmonik Legendre eğrileri sınıflandırılmıştır.

Son bölüm olan dördüncü bölümde bir Sasakian uzay formunda tanjant vektör alanı ve karakteristik vektör alanı arasındaki açısı sabit olan biharmonik Legendre olmayan eğriler sınıflandırılmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: biharmonik eğri, has biharmonik eğri, Sasakian uzay form, Legendre eğri, Legendre olmayan eğri.

ABSTRACT

BIHARMONIC CURVES
MSC THESIS
ESIN KESEN
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE MATHEMATICS
(SUPERVISOR: PROF. DR. CİHAN ÖZGÜR)

BALIKESİR, JANUARY 2013

In this thesis, the necessary conditions for a Legendre or non-Legendre curve in a Sasakian space to be biharmonic curve are found.

This thesis consists of four chapters.

The first chapter is introduction.

In the second chapter the necessary notions and definitions which we use in the next sections are given.

In the third chapter we investigate the necessary conditions for a Legendre curve in a Sasakian space form to be biharmonic. We classify biharmonic Legendre curves.

In the final chapter, we classify non-Legendre curves in a Sasakian space form which the angle between tangent vector field and characteristic vector field is constant.

KEYWORDS: biharmonic curve, proper biharmonic curve, Sasakian space form, Legendre curve, non-Legendre curve.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

$\boldsymbol{M}$	:	Manifold
$\boldsymbol{g}$	:	Metrik Tensörü
$\boldsymbol{\varphi}$	:	(1,1) – Tensör Alanı
$\boldsymbol{\xi}$	:	Karakteristik Vektör Alanı
$\boldsymbol{\eta}$	:	Değme Yapı
$[\,,\,]$	:	Lie Parantez Operatörü
$\boldsymbol{T_pM}$	:	$p \in M$ noktasındaki tanjant uzay
$\chi(\boldsymbol{M})$	:	Vektör Alanları Uzayı
∇	:	Levi-Civita Koneksiyonu
Δ	:	Laplas Operatörü
$\boldsymbol{R}$	:	Sasakian Eğrilik Tensörü
$\boldsymbol{\kappa_n}$	:	Eğrilik
$\boldsymbol{\gamma}$	:	Diferansiyellenebilir ve birim hızlı eğri
$\boldsymbol{T}$	:	Tanjant Vektör Alanı

ÖNSÖZ

Bu çalışmada, bir Sasakian uzay formunda biharmonik Legendre ve Legendre olmayan eğriler ile ilgili literatürde yapılmış olan çalışmalar incelenmiştir.

Tez çalışmamın her aşamasında, çok değerli bilgi ve deneyimleri ile bana yol gösteren, ilgi ve anlayışını eksik etmeyen tez danışmanım Sayın Prof. Dr. Cihan ÖZGÜR’e ve her türlü yardımlarıyla yanımda olan Sayın Araş. Gör. Şaban GÜVENÇ’e teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca hayatım ve eğitimim boyunca maddi manevi hiçbir fedakarlıktan çekinmeyen her durumda yanımda olan ve beni destekleyen aileme sonsuz teşekkürü bir borç bilirim.

1. GİRİŞ

1964 yılında J. Eells ve J. H. Sampson poly-harmonik dönüşüm kavramını harmonik dönüşümlerin doğal bir genelleştirmesi olarak tanıtmıştır. $\phi:(M,g)\to(N,h)$ Riemann manifoldları arasındaki harmonik dönüşüm $E(\phi)=\frac{1}{2}\int_M |d\phi|^2 v_g$ enerji fonksiyonelinin kritik noktası iken, biharmonik dönüşüm $E_2(\phi)=\frac{1}{2}\int_M |\tau(\phi)|^2 v_g$ bienerji fonksiyonelinin kritik noktası olarak tanımlanmıştır[5].

Diğer taraftan, Δ Laplas operatörünü, H da ortalama eğrilik vektör alanını göstermek üzere B. Y. Chen ΔH=0 şartını sağlayan altmanifoldları biharmonik olarak tanımlamıştır[17]. Fakat iki kavram tamamen birbirinden farklıdır.

$\tau_2(\phi)=iz\nabla d\phi$ olmak üzere enerji foksiyoneli için Euler-Lagrange denklemi $\tau(\phi)=0$ olarak tanımlanmıştır. Bienerji fonksiyoneli için Euler- Lagrange denklemi G.Y. Jiang tarafından türetilmiş olup $\tau_2(\phi)=-\Delta\tau(\phi)-izR^N(d\phi,\tau(\phi))d\phi=0$ biçiminde verilir[6].

Her harmonik dönüşüm biharmoniktir. Fakat tersi doğru değildir. Bu çalışmada has biharmonik olarak adlandıracağımız harmonik olmayan biharmonik dönüşümler düşünülecektir.

[13] nolu çalışmada bir Sasakian uzay formunun biharmonik Legendre eğrileri incelenmiştir. [16] nolu çalışmada ise tanjant vektör alanı ile karakteristik vektör alanı arasındaki açı sabit olan biharmonik Legendre olmayan eğriler incelenmiştir. Bu tezde[13] ve [16] nolu çalışmalarda elde edilen sonuçların ispatları ayrıntılı olarak verilmiş ve konuyla ilgili derleme yapılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanımlar ve kavramlar verilecektir.

2.1 Riemann Manifoldları

2.1.1 Tanım M bir diferansiyellenebilir (C^{∞}) manifold olsun. M üzerinde pozitif, simetrik ve 2-lineer bir g metriği var ise M ye bir *Riemann manifoldu* adı verilir ve (M,g) şeklinde gösterilir [1].

2.1.2 Tanım M *n*-boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold ve M üzerindeki C^{∞} vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} \nabla : \chi(M)\times\chi(M) &\xrightarrow{2-lineer} \chi(M) \\ (X,Y) &\rightarrow \nabla(X,Y)=\nabla_X Y \end{aligned}$$

dönüşümü;

i) $\nabla_X(Y+Z)=\nabla_X Y+\nabla_X Z$; $\forall X,Y,Z\in\chi(M)$

ii) $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z+g\nabla_Y Z$; $\forall X,Y,Z\in\chi(M)$ $\forall f,g\in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$

iii) $\nabla_X(fY)= f\nabla_X Y+X(f)Y$; $\forall X,Y,Z\in\chi(M)$ $\forall f\in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$

özelliklerini sağlıyor ise ∇ ya M üzerinde bir *Afin Koneksiyon* adı verilir.

∇, M üzerinde tanımlanan bir afin koneksiyonu olmak üzere;

i) $\nabla_X Y-\nabla_Y X=[X,Y]$; $\forall X,Y\in\chi(M)$,

ii) $Xg(Y,Z)=g(\nabla_X Y,Z)+g(Y,\nabla_X Z)$; $\forall X,Y,Z\in\chi(M)$

şartlarını sağladığında ∇ ya M üzerinde *sıfır torsiyonlu Riemann Koneksiyon* veya M nin *Levi-Civita Koneksiyonu* adı verilir [2].

2.1.3 Tanım (*M*, *g*) bir Riemann manifoldu, ∇ da *M* üzerindeki Levi-Civita koneksiyonu olsun.

$$\begin{aligned} &R : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M) \\ &R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \end{aligned} \tag{2.1}$$

ile tanımlanan *R* fonksiyonu *M* üzerinde bir (1, 3)-tensör alanıdır ve *M* nin *Riemann eğrilik tensörü* olarak adlandırılır. Ayrıca $R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W)$ tensörüne *M* nin *Riemann-Christoffel eğrilik tensörü* adı verilir [3].

2.1.4 Tanım (*M*, *g*) bir Riemann manifoldu olsun. T_pM tanjant uzayının iki boyutlu alt uzayı Π olmak üzere $V, W \in \Pi$ tanjant vektörleri için *Q* alan fonksiyonu;

$$Q(V,W) = g(V,V)g(W,W) - g(V,W)^2$$

biçiminde tanımlansın. $Q(V,W) \neq 0$ olmak üzere;

$$K(V,W) = \frac{g(R(V,W)W,V)}{Q(V,W)}$$

ye Π nin *kesitsel eğriliği* denir ve $K(\Pi)$ ile gösterilir [3].

2.1.5 Tanım (M,g) n-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. *M* nin eğrilik tensörü, c sabit olmak üzere $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için;

$$R(X, Y, Z, W) = c\{g(Y, Z)g(X, W) - g(X, Z)g(Y,W)\}$$

biçiminde ise *M* ye *sabit eğrilikli uzay* adı verilir ve $M^n(c)$ ile gösterilir [1].

Sabit eğrilikli, tam, bağlantılı manifoldlara ise *uzay form* denir. Eğer;

$$c = 0 \; ise \;\; M^n(c) \cong E^n \; Öklid \; uzayı,$$

$$c = \frac{1}{r^2} \;\; ise \;\; M^n(c) \cong S^n(r) \;\; küresi,$$

$$c = -\frac{1}{r^2} \;\; ise \;\; M^n(c) \cong H^n(r) \;\; Hiperbolik \; uzay$$

dır $\left[4\right]$.

2.1.6 Tanım M bir Riemann manifoldu, M üzerindeki vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve C^{∞} - sınıfından fonksiyonların cümlesi $C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} grad : C^{\infty}(M,\mathbb{R}) &\rightarrow \chi(M) \\ f \quad &\rightarrow grad(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \end{aligned}$$

olarak tanımlanan fonksiyona f *fonksiyonun gradienti* denir. Ayrıca

$$\begin{aligned} div : \chi(M) &\rightarrow C^{\infty}(M,\mathbb{R}) \\ X &\rightarrow div(X) \end{aligned}$$

dönüşümünde

$$X = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

alınırsa,

$$div(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$$

bir gösterim olmak üzere

$$div(X) = \langle \nabla, X \rangle$$

şeklinde tanımlı fonksiyona *divergens fonksiyonu* denir$\left[2\right]$.

2.1.7 Tanım M bir Riemann manifoldu ve f, M üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. M üzerindeki *Laplas operatörü,*

$$\Delta f = \mathrm{div}(\mathrm{grad}\ f)$$

şeklinde tanımlanır [1].

2.1.8 Tanım *(M, g)* ve *(N, h)* Riemann manifoldu olsun.

$$\phi:(M,g)\rightarrow(N,h)$$

dönüşümünün *bienerji fonksiyoneli,*

$$E_2(\phi)=\frac{1}{2}\int_M |\tau(\phi)|^2 \upsilon_g \tag{2.2}$$

ile tanımlanır. Eğer ϕ, E_2 nin bir kritik noktası ise, ϕ ye *biharmonik dönüşüm* denir $[5]$.

2.1.9 Tanım *(M, g)* ve *(N, h)* Riemann manifoldu olsun.

$$\phi:(M,g)\rightarrow(N,h)$$

dönüşümünün *enerji fonksiyoneli,*

$$E(\phi)=\frac{1}{2}\int_M |d\phi|^2 \upsilon_g \tag{2.3}$$

denklemi ile tanımlanır. Eğer ϕ, E nin bir kritik noktası ise ϕ ye *harmonik dönüşüm* adı verilir $[5]$.

$\tau(\phi)=iz\nabla d\phi$ olarak tanımlansın. Enerji fonksiyoneli için Euler-Lagrange denklemi $\tau(\phi)$=0 dır. Bienerji fonksiyoneli için Euler- Lagrange denklemi ise

$$\tau_2(\phi)=-\Delta\tau(\phi)-izR^N(d\phi,\tau(\phi))d\phi=0$$

ile verilir. Yani $\gamma:I\subseteq\mathbb{R}\rightarrow M$ eğrisi verildiğinde $\tau_2(\gamma)=0$ ise γ eğrisine *biharmonik eğri* denir. Geodezik olmayan biharmonik eğriye ise *has biharmonik eğri* adı verilir $[6]$.

2.1.10 Tanım *M* n-boyutlu bir C^∞ manifold ve $\gamma:I\rightarrow M$ bir birim hızlı eğri olsun. Eğer γ nın yüksek mertebeden türevleri

$$\gamma'(s), \gamma''(s), \gamma'''(s), ..., \gamma^{(r)}(s)$$

lineer bağımsız ve

$$\gamma'(s), \gamma''(s), \gamma'''(s), ..., \gamma^{(r)}(s), \gamma^{(r+1)}(s)$$

$\forall s \in I$ için lineer bağımlı ise γ ya *oskülatör mertebesi r olan bir Frenet eğrisi* denir.

r. mertebeden her Frenet eğrisi için γ boyunca $\gamma'(s) = E_1(s) = T$ olmak üzere bir $E_{1,} E_2, E_3......E_r$ ortonormal çatısı bulunabilir. Bu çatıya *Frenet çatısı* denir ve $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, ..., \kappa_{r-1} : I \to \mathbb{R}$ $(r-1)-$ fonksiyonları *Frenet eğrilikleri* olmak üzere aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$E_1 = \gamma' = T$$

$$\nabla_T E_1 = \kappa_1 E_2$$

$$\nabla_T E_2 = -\kappa_1 E_1 + \kappa_2 E_3$$

$$...$$

$$\nabla_T E_r = -\kappa_{r-1} E_{r-1} \tag{2.4}$$

burada ∇, M de Levi-Civita koneksiyonudur $[7]$.

2.1.11 Tanım M n-boyutlu bir C^∞ manifold ve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$ bir Frenet eğrisi olsun. Eğer,

i) γ eğrisinin oskülatör mertebesi 1 ve $\kappa_1 = 0$ ise γ eğrisine *geodezik,*

ii) γ eğrisinin oskülatör mertebesi 2 , $\kappa_1 > 0$ sabit ve $\kappa_2 = 0$ ise γ eğrisine *çember,*

iii) γ eğrisinin oskülatör mertebesi *r* ve $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, ..., \kappa_{r-1}$ Frenet eğrilikleri sabit ise γ eğrisine r.*mertebeden helis* denir. 3. mertebeden bir helise kısaca *helis* adı verilir $[2]$.

2.2 Değme Manifoldlar

2.2.1 Tanım *M*, (2n +1)-boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold olsun. *M* üzerinde her yerde;

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$$

olacak şekilde bir η-diferensiyel 1-formu var ise η ya *değme form*, (M,η) ikilisine de *değme manifold* adı verilir. Burada $(d\eta)^n$ ile $d\eta$ nın kendisiyle n. mertebeden dış çarpımı gösterilmiştir. Yani;

$$(d\eta)^n = \underbrace{d\eta \wedge d\eta \wedge \ldots \wedge d\eta}_{n-defa}$$

dir $[8]$.

2.2.2 Tanım M, (2n+1)-boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold olsun. φ (1,1)-tipinden bir tensör alanı, ξ bir vektör alanı, η da M üzerinde bir diferensiyel 1-form olmak üzere, $\forall X \in \chi(M)$ için $(\varphi,\ \xi,\ \eta)$ üçlüsü;

$$\varphi : \chi(M) \xrightarrow{\text{lineer}} \chi(M)$$

$$\eta : \chi(M) \xrightarrow{\text{dif.bilir}} C^\infty(M,R)$$

$$\eta(\xi) = 1 \text{ ve } \varphi^2(X) = -X + \eta(X)\xi \qquad (2.5)$$

koşullarını sağlıyor ise bu üçlüye bir *hemen hemen değme yapı*, $(M,\ \varphi,\ \xi,\ \eta)$ dörtlüsüne de bir *hemen hemen değme manifold* adı verilir $[9]$.

2.2.3 Tanım *M*, (2n+1)-boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold olsun. η M üzerinde bir diferensiyel 1-form olmak üzere,

$$D = \left\{ \eta : \chi(M) \xrightarrow[lineer]{dif.bilir} C^{\infty}(M, \mathbb{R}), \eta(X) = 0, X \in \chi(M) \right\} \qquad (2.6)$$

cümlesine bir *değme distribüsyon* denir $[10]$.

2.2.4 Tanım M hemen hemen değme manifoldu üzerinde $X \neq \xi$ için,

$$\eta(\xi) = 1 \text{ ve } d\eta(\xi, X) = 0$$

olacak biçimde bir tek $\xi \in \chi(M)$ vektör alanı var ise, ξ ye η *-değme yapısının karakteristik vektör alanı* denir $[8]$.

2.2.5 Örnek $\mathbb{R}^3$ deki standart koordinatlar $(x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$, $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ olmak üzere, η kontak 1-formu $\eta = \dfrac{1}{a}(dz - ydx)$, $\xi = a\left(\dfrac{\partial}{\partial z}\right) \in \chi(M)$ ve

$$\varphi : \chi(M) \to \chi(M)$$

lineer dönüşümüne $\mathbb{R}^3$ ün standart bazına karşılık gelen matris de

$$\varphi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{bmatrix}$$

olsun. $(\mathbb{R}^3, \varphi, \xi, \eta)$ dörtlüsü bir hemen hemen değme manifolddur $[11]$.

Gerçekten

$$\begin{aligned} \eta(\xi) &= \frac{1}{a}(dz - ydx)\left(a\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right) \\ &= dz\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) - ydx\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) \end{aligned}$$

dır. Burada $dz\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)=1$ ve $dx\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)=0$ olmak üzere $\eta(\xi)=1$ olarak bulunur. Böylece ilk koşul sağlanmış olur. Diğer taraftan $X = x_1\frac{\partial}{\partial x}+x_2\frac{\partial}{\partial y}+x_3\frac{\partial}{\partial z}\in\chi(M)$ olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
\eta(X) &= \frac{1}{a}\left(dz - ydx\right)\left(x_1\frac{\partial}{\partial x}+x_2\frac{\partial}{\partial y}+x_3\frac{\partial}{\partial z}\right)\\
&= \frac{1}{a}\left(dz\left(x_1\frac{\partial}{\partial x}+x_2\frac{\partial}{\partial y}+x_3\frac{\partial}{\partial z}\right)-ydx\left(x_1\frac{\partial}{\partial x}+x_2\frac{\partial}{\partial y}+x_3\frac{\partial}{\partial z}\right)\right)
\end{aligned}
$$

dır ve $\eta(X)=\frac{1}{a}\left(x_3-yx_1\right)$ bulunur. $X\in\chi(M)$ in matris formu $X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$ olmak üzere

$$
\varphi^2(X)=\varphi(\varphi(X))=\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&y&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&y&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi^2(X) &= \begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\-y&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\\
&= \left(\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-y&0&1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\\
&= I_3(X)+\begin{bmatrix}0\\0\\-yx_1+x_3\end{bmatrix}\\
&= -X+(x_3-yx_1)\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\\
&= -X+\frac{1}{a}(x_3-yx_1)\begin{bmatrix}0\\0\\a\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

dir. $\xi \in \chi(M)$ nin matrissel formu $\xi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{bmatrix}$ ve $\eta(X) = \frac{1}{a}(x_3 - yx_1)$ olup

$$\varphi^2(X) = -X + \eta(X)\xi$$

elde edilir. Dolayısıyla "Tanım 2.2.2" deki koşullar sağlanır ve $(\mathbb{R}^3, \varphi, \xi, \eta)$ dörtlüsü bir hemen hemen değme manifold olur.

2.2.6 Teorem (2n+1)-boyutlu M hemen hemen değme manifoldu üzerinde, $X, \xi \in \chi(M)$, $X \neq \xi$ vektör alanları ve $\varphi : \chi(M) \xrightarrow{\text{lineer}} \chi(M)$ için,

$$\varphi\xi = 0$$
$$\eta \circ \varphi = 0$$
$$\text{rank}\,\varphi = 2\text{n}$$

eşitlikleri sağlanır [9].

2.2.7 Tanım (2n+1)-boyutlu M hemen hemen değme manifoldu üzerinde, $\forall$ X, $Y \in \chi(M)$ ve $\xi \in \chi(M)$ için;

$$\eta(X) = g(X, \xi) \tag{2.7}$$

ve

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \tag{2.8}$$

koşullarını sağlayan bir g metriği var ise; (φ, ξ, η, g) dörtlüsüne bir *hemen hemen değme metrik yapı*, $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ beşlisine de bir *hemen hemen değme metrik manifold* adı verilir [9].

2.2.8 Teorem (2n+1)-boyutlu M hemen hemen değme manifoldu üzerinde $\forall$ X, $Y \in \chi(M)$ için,

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

olacak şekilde bir g Riemann metriği daima vardır $[9]$.

2.2.9 Sonuç (2n+1)-boyutlu M hemen hemen değme metrik manifoldu verilmiş olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$g(\varphi X,\ Y) = -g(X,\ \varphi Y) \tag{2.9}$$

dir. Bu da, φ nin g ye göre anti-simetrik bir tensör alanı olduğunu gösterir $[9]$.

2.2.10 Teorem (2n+1)-boyutlu M hemen hemen değme manifoldu verilmiş olsun. M üzerinde bir η değme yapısı verildiğinde, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$\varphi : \chi(M) \xrightarrow{\text{lineer}} \chi(M)$$

$$g(X,\ \varphi Y) = d\eta(X,\ Y)$$

olacak şekilde bir $(\varphi,\ \xi,\ \eta,\ g)$ hemen hemen değme metrik yapısı vardır $[9]$.

2.2.11 Tanım (2n+1)-boyutlu M hemen hemen değme metrik manifoldu için;

$$g(X, \varphi Y) = d\eta(X, Y)$$

yazılabiliyor ise $\{\varphi, \xi, \eta, g\}$ ye *değme metrik yapı*, $\{M, \varphi, \xi, \eta, g\}$ ye de *değme metrik manifold* adı verilir.

Her değme metrik manifold aynı zamanda bir değme manifolddur $[9]$.

2.2.12 Tanım M diferensiyellenebilir bir manifold olmak üzere, M üzerinde (1,1)-tipinde bir tensör alanı φ olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$N_\varphi(X, Y) = \varphi^2[X, Y] + [\varphi X, \varphi Y] - \varphi[\varphi X, Y] - \varphi[X, \varphi Y]$$

şeklinde tanımlı N_φ tensör alanına φ tensör alanının *Nijenhuis torsiyon tensörü* adı verilir. Eğer φ nin Nijenhuis torsiyon tensörü sıfır ise $(\varphi,\ \xi,\ \eta)$ yapısına *normal* denir $[12]$.

Yukarıda verilen normallik tanımı

$$[\varphi,\varphi](X,Y)+2d\eta(X,Y)\xi=0$$

olmasına denktir $[8]$.

2.2.13 Tanım (2n+1)-boyutlu bir $(M,\ \varphi,\ \xi,\ \eta,\ g)$ değme metrik manifoldu olsun. Eğer M nin değme metrik yapısı normal ise $(\varphi,\ \xi,\ \eta,\ g)$ yapısına *Sasakian yapı* (veya *normal değme metrik yapı*) ve $(M,\ \varphi,\ \xi,\ \eta,\ g)$ ye de *Sasakian manifold* (veya *normal değme metrik manifold*) denir $[9]$.

2.2.14 Teorem Bir $(\varphi,\ \xi,\ \eta,\ g)$ hemen hemen değme metrik yapısının Sasakian olması için gerek ve yeter şart

$$(\nabla_X\varphi)Y=g(X,Y)\xi-\eta(Y)X \tag{2.10}$$

olmasıdır. Burada $\nabla_X(\varphi Y)=(\nabla_X\varphi)Y+\varphi\nabla_XY$ dır $[9]$.

Sasakian bir manifold için

$$\nabla_X\xi=-\varphi X \tag{2.11}$$

dir $[4]$.

2.2.15 Tanım Bir $(M,\ \varphi,\ \xi,\ \eta,\ g)$ Sasakian manifoldunun değme distribüsyonu

$$\{\eta(X)=0,\ X\in\chi(M)\}$$

ile tanımlanır ve bu değme yapının bir integral eğrisine *Legendre eğrisi* denir $[13]$.

2.2.16 Tanım $(M,\ \varphi,\ \xi,\ \eta,\ g)$ bir Sasakian manifold olsun. T_pM tanjant uzayında ξ ya dik bir X birim vektörü $\{X,\varphi X\}$ ortonormal olacak şekilde var ise $\{X,\varphi X\}$ düzlemine T_pM nin φ- *kesitseli* denir.

$$K(X,\varphi X)=g(R(X,\varphi X)\varphi X,X)$$

şeklinde tanımlanan $K(X,\varphi X)$ e M nin φ-*kesitsel eğriliği* denir [9].

2.2.17 Tanım M bir Sasakian manifold olsun. M nin φ-*kesitsel eğriliği* bir c sabitine eşit ise M bir *Sasakian uzay form* olarak adlandırılır ve $M(c)$ şeklinde gösterilir [14].

2.2.18 Teorem $M(c)$ Sasakian uzay formunun R eğrilik tensörü $\forall X,Y,Z\in\chi(M)$ için,

$$\begin{aligned}R(X,Y)Z=&\frac{c+3}{4}\{g(Z,Y)X-g(Z,X)Y\}+\frac{c-1}{4}\{\eta(Z)\eta(X)Y\\&-\eta(Z)\eta(Y)X+g(Z,X)\eta(Y)\xi-g(Z,Y)\eta(X)\xi\\&+g(Z,\varphi Y)\varphi X-g(Z,\varphi X)\varphi Y+2g(X,\varphi Y)\varphi Z\}\end{aligned}\tag{2.12}$$

dir [9].

3. SASAKİAN UZAY FORMLARDA BİHARMONİK LEGENDRE EĞRİLER

Bu bölümde (2n+1)-boyutlu φ -kesitsel eğriliği bir c sabitine eşit olan $\left(M,\ \varphi,\ \xi,\ \eta,\ g\right)$ Sasakian uzay formunun Legendre eğrilerinin biharmonik olma koşulları incelenecektir.

$\gamma : I \to M$ oskülatör mertebesi r olan, geodezik olmayan bir Legendre Frenet eğrisi olsun. γ nın biharmonik denklemi

$$\tau_2(\gamma) = \nabla_T^3 T - R(T, \nabla_T T)T = 0$$

dır $\left[13\right]$. Bu eğri için (2.4) eşitlikleri yardımıyla,

$$E_1 = \gamma' = T$$

$$\nabla_T E_1 = \nabla_T \gamma' = \nabla_T T = \kappa_1 E_2$$

$$\begin{aligned}\nabla_T \nabla_T T &= \nabla_T(\nabla_T T) = \nabla_T(\kappa_1 E_2) = \kappa_1^{'} E_2 + \kappa_1(\nabla_T E_2)\\ &= -\kappa_1^2 E_1 + \kappa_1^{'} E_2 + \kappa_1 \kappa_2 E_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla_T \nabla_T \nabla_T T &= \nabla_T(\nabla_T \nabla_T T) = \nabla_T(-\kappa_1^2 E_1 + \kappa_1^{'} E_2 + \kappa_1 \kappa_2 E_3)\\ &= -2\kappa_1 \kappa_1^{'} E_1 - \kappa_1^2 \nabla_T E_1 + \kappa_1^{''} E_2 + \kappa_1 \nabla_T E_2 + (\kappa_1^{'} \kappa_2 + \kappa_1 \kappa_2^{'}) E_3 + \kappa_1 \kappa_2 \nabla_T E_3\\ &= (-3\kappa_1 \kappa_1^{'}) E_1 + (\kappa_1^{''} - \kappa_1^3 - \kappa_1 \kappa_2^2) E_2 + (2\kappa_1^{'} \kappa_2 + \kappa_1 \kappa_2^{'}) E_3 + \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 E_4 \qquad (3.1)\end{aligned}$$

elde edilir ve (2.12) denkleminden

$$\begin{aligned}R(T, \nabla_T T)T &= R(T, \kappa_1 E_2)T = \kappa_1 R(T, E_2)T\\ &= \kappa_1 \left[\frac{c+3}{4} \left\{ g(T, E_2)T - g(T,T)E_2 \right\} + \frac{c-1}{4} \left\{ \eta(T)\eta(T)E_2 \right.\right.\\ &\quad - \eta(T)\eta(E_2)T + g(T,T)\eta(E_2)\xi - g(T, E_2)\eta(T)\xi\\ &\quad \left.\left. + g(T, \varphi E_2)\varphi T - g(T, \varphi T)\varphi E_2 + 2g(T, \varphi E_2)\varphi T \right\} \right] \qquad (3.2)\end{aligned}$$

bulunur. Burada $E_1 = T, E_2, E_3 ... E_r$ ortonormal Frenet çatısı olduğu için $g(T, E_2)$=0 dir. γ Legendre eğrisi olduğu için "Tanım 2.2.15" gereği $\eta(T) = 0$ ve (2.7) eşitliğini kullanarak

$$\eta(T) = 0 = g(T, \xi) \tag{3.3}$$

yazılır. (3.3) ifadesinin türevi alınır ve (2.4), (2.9), (2.11) kullanırsa

$$g(\nabla_T T, \xi) + g(T, \nabla_T \xi) = 0,$$

$$\kappa_1 g(E_2, \xi) - g(T, \varphi T) = 0,$$

$$\kappa_1 g(E_2, \xi) = 0$$

elde edilir. γ geodezik olmayan Legendre eğrisi olduğundan

$$g(E_2, \xi) = \eta(E_2) = 0 \tag{3.4}$$

dır. Böylece (3.2) denklemi kısaca

$$\begin{aligned} R(T, \nabla_T T)T &= \kappa_1 \left[\frac{c+3}{4} \{-E_2\} + \frac{c-1}{4} \{3g(T, \varphi E_2)\varphi T\} \right] \\ &= -\frac{(c+3)\kappa_1}{4} E_2 - \frac{3(c-1)\kappa_1}{4} g(E_2, \varphi T)\varphi T \end{aligned} \tag{3.5}$$

olarak yazılabilir.

$\tau_2(\gamma)$ biharmonik eğri denklemi (3.1) ve (3.5) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \tau_2(\gamma) = (-3\kappa_1\kappa_1^{'})E_1 &+ \left(\kappa_1^{''} - \kappa_1^3 - \kappa_1\kappa_2^2 + \frac{(c+3)\kappa_1}{4} \right) E_2 + \left(2\kappa_1^{'}\kappa_2 + \kappa_1\kappa_2^{'} \right) E_3 \\ &+ \kappa_1\kappa_2\kappa_3 E_4 + \frac{3(c-1)\kappa_1}{4} g(E_2, \varphi T)\varphi T = 0 \end{aligned} \tag{3.6}$$

olarak hesaplanır. Eşitlik (3.6) gereği eğer φT katsayısı sıfırdan farklı ise φT, $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ ün lineer birleşimi olarak yazılabilir. Aksi takdirde φT ile ilgili özel koşullar koymaya gerek yoktur.

Öncelikle φT nin katsayısının sıfır olması durumları Durum 1 ve Durum 2 de, daha sonra φT için ek koşullar koyarak Durum 3 ve Durum 4 te ele alınacaktır.

1. Durum: $c = 1$ olsun.

3.1 Teorem $c = 1$ olmak üzere γ eğrisinin has biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\kappa_1 = sabit > 0, \kappa_2 = sabit, \tag{3.7}$$

$$\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = 1, \tag{3.8}$$

$$\kappa_2 \kappa_3 = 0 \tag{3.9}$$

olmasıdır $[13]$.

İspat: γ has biharmonik eğri olsun. Bu durumda $\tau_2(\gamma) = 0$ dır. $c = 1$ olduğu için (3.6) denklemi

$$\begin{aligned} \tau_2(\gamma) &= \left(-3\kappa_1 \kappa_1'\right) E_1 + (\kappa_1'' - \kappa_1^3 - \kappa_1 \kappa_2^2 + \kappa_1) E_2 \\ &\quad + (2\kappa_1' \kappa_2 + \kappa_1 \kappa_2') E_3 + \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 E_4 \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.10}$$

biçimine dönüşür. Böylece

$$\kappa_1 \kappa_1' = 0 \tag{3.11}$$

$$\kappa_1'' - \kappa_1^3 - \kappa_1 \kappa_2^2 + \kappa_1 = 0 \tag{3.12}$$

$$2\kappa_1' \kappa_2 + \kappa_1 \kappa_2' = 0 \tag{3.13}$$

$$\kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 = 0 \tag{3.14}$$

yazılabilir. Buradan γ geodezik olmadığından (3.11) denklemi gereği $\kappa_1^{'} = 0$ yani $\kappa_1 = sabit > 0$ dır. $\kappa_1 > 0$ ise (3.12) denkleminden $\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = 1,$ (3.13) denkleminden $\kappa_2^{'} = 0$ yani $\kappa_2 = sabit,$ (3.14) denkleminden $\kappa_2\kappa_3 = 0$ olarak bulunur.

Tersine

$$\kappa_1 = sabit > 0,\ \kappa_2 = sabit,$$

$$\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = 1,$$

$$\kappa_2\kappa_3 = 0$$

olsun. Bu eşitlikler (3.10) denkleminde kullanıldığında $\tau_2(\gamma) = 0$ elde edilir. Böylece "Tanım 2.1.8" gereği γ eğrisi has biharmoniktir. ■

3.2 Sonuç $\gamma,\ n \geq 2$ ve $c = 1$ olacak biçimde bir Legendre Frenet eğrisi olsun. γ nın has biharmonik eğri olması için gerek ve şart γ nın $\kappa_1 = 1$ eğrilikli bir çember veya eğrilikleri arasında $\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = 1$ bağıntısı bulunan bir helis olmasıdır $[13]$.

İspat: γ has biharmonik eğri olsun. "Teorem 3.1" gereği γ eğrisi (3.7), (3.8), (3.9) denklemlerini sağlar. (3.9) gereği $\kappa_2 = 0$ veya $\kappa_3 = 0$ dır. İlk olarak $\kappa_2 = 0$ durumu incelenirse (3.8) gereği $\kappa_1 = 1$ olur. Böylece "Tanım 2.1.10" gereği γ bir çemberdir.

$\kappa_2 \neq 0$ olsun. Bu durumda $\kappa_3 = 0$ olur. (3.7) gereği κ_1 ve κ_2 pozitif sabitler ve $\kappa_3 = 0$ olduğundan "Tanım 2.1.10" gereği γ bir helistir. Ayrıca $\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = 1$ dır.

Tersine $\gamma,\ \kappa_1 = 1$ olan bir çember veya $\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = 1$ olan bir helis olsun. $\tau_2(\gamma) = 0$ olacağı kolayca gösterilebilir. Böylece "Tanım 2.1.8" gereği γ has biharmoniktir. ■

3.3 Uyarı "Teorem 3.1" $n=1$ durumunda geçersizdir. $n=1$ ve γ geodezik olmayan Legendre eğrisi olmak üzere $\{T, \varphi T, \xi\}$ γ nın Frenet çatı alanıdır. Bu durumda

$$\begin{aligned} E_1 &= T, \\ E_2 &= \varphi T, \\ E_3 &= \xi \end{aligned}$$

dır $[15]$.

(2.4) Frenet denklemlerinden

$$\nabla_T E_2 = \nabla_T \varphi T = -\kappa_1 T + \kappa_2 \xi \tag{3.15}$$

ve (2.10) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} \nabla_T \varphi T &= \nabla_T (\varphi T) = (\nabla_T \varphi) T + \varphi \nabla_T T \\ &= g(T,T)\xi - \eta(T) T + \varphi(\kappa_1 \varphi T) \end{aligned} \tag{3.16}$$

bulunur. γ Legendre eğri oldugu için "Tanım 2.2.15" gereği $\eta(T)=0$ dır. Böylece (2.5) eşitliğinden dolayı (3.16) eşitliği,

$$\nabla_T \varphi T = \xi + \kappa_1 \varphi^2 (T) = \xi - \kappa_1 T \tag{3.17}$$

olarak bulunur. (3.15) ve (3.17) denklemlerinden

$$\xi - \kappa_1 T = -\kappa_1 T + \kappa_2 \xi,$$

$$\kappa_2 = 1$$

elde edilir.

Ayrıca $\kappa_1 > 0$ olduğundan $\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = 1 + \kappa_1^2 > 1$ dır ve "Teorem 3.1" gereği γ eğrisi biharmonik olamaz $[13]$.

3.3 Yardımcı Teorem γ oskülatör mertebesi 3 olan bir Legendre Frenet eğrisi ve $E_2 \perp \varphi T$ olsun. Bu takdirde

$$\{T = E_1, E_2, E_3, \varphi T, \xi, \nabla_T \varphi T\}$$

lineer bağımsızdır ve böylece $n \geq 3$ tür [13].

İspat: γ oskülatör mertebesi 3 olan bir Legendre Frenet eğrisi ve $E_2 \perp \varphi T$ olsun. "Tanım 2.1.9" gereği $\{E_1, E_2, E_3\}$ lineer bağımsız ve

$$E_1 = \gamma' = T,$$

$$\nabla_T E_1 = \kappa_1 E_2,$$

$$\nabla_T E_2 = -\kappa_1 E_1 + \kappa_2 E_3,$$

$$\nabla_T E_3 = -\kappa_2 E_2$$

dır.

$$S_1 = \{T = E_1, E_2, E_3, \varphi T, \xi, \nabla_T \varphi T\}$$

sisteminin elemanları sıfır olmayan vektörlerdir.

$S_2 = \{T = E_1, E_2, E_3, \varphi T\}$ kümesinin lineer bağımsız olduğunu gösterelim:

(2.9) eşitliğinden $g(T, \varphi T) = 0$ olur. Böylece $T \perp \varphi T$ dir. Kabul gereği $E_2 \perp \varphi T$ olup $g(\varphi T, E_2) = 0$ dır ve bu eşitliğin türevi alınırsa,

$$g(\nabla_T \varphi T, E_2) + g(\varphi T, \nabla_T E_2) = 0 \tag{3.18}$$

dır. Burada Teorem "2.2.14" gereği,

$$\begin{aligned} \nabla_T \varphi T &= \nabla_T (\varphi T) = (\nabla_T \varphi) T + \varphi(\nabla_T T) \\ &= g(T,T)\xi - \eta(T) T + \varphi(\kappa_1 E_2) \\ &= \xi + \kappa_1 \varphi E_2 \end{aligned}$$

dır. Böylece (3.18) eşitliği,

$$g(\xi,E_2)+\kappa_1 g(\varphi E_2,E_2)-\kappa_1 g(\varphi T,E_1)+\kappa_2 g(\varphi T,E_3)=0$$

biçimine dönüşür. (2.9) ve (3.4) denklemleri kullanılarak $g(\varphi T,E_3)=0$ olur, yani $\varphi T\perp E_3$ dır. Böylece S_2 lineer bağımsızdır.

$S_3=\{T=E_1,E_2,E_3,\varphi T,\xi\}$ kümesinin lineer bağımsız olduğunu gösterelim:

γ eğrisi bir Legendre eğrisi olduğundan $\eta(T)=0$ yani $g(T,\xi)=0$ dır. Böylece $T\perp\xi$ dır. (3.4) denkleminden $\xi\perp E_2$ dir. (3.4) denkleminin türevi alınırsa $\xi\perp E_3$ bulunur. $g(\varphi T,\xi)=\eta(\varphi T)=(\eta\circ\varphi)(T)$ ve "Teorem 2.2.6" gereği $\varphi T\perp\xi$ olur.

Son olarak $S_1=\{T=E_1,E_2,E_3,\varphi T,\xi,\nabla_T\varphi T\}$ kümesini inceleyelim:

$\nabla_T\varphi T$ yerine $\xi+\kappa_1\varphi E_2$ yazılırsa,

$$\begin{aligned} g(T,\xi+\kappa_1\varphi E_2) &= g(T,\xi)+\kappa_1 g(T,\varphi E_2)\\ &= g(T,\xi)-\kappa_1 g(E_2,\varphi T)\end{aligned}$$

olur. Burada γ Legendre eğri ve $E_2\perp\varphi T$ olduğundan $g(T,\nabla_T\varphi T)=0$ yani $\nabla_T\varphi T\perp T$ dır. $g(E_2,\varphi T)=0$ olduğundan bu ifadenin türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} &g(\nabla_T E_2,\varphi T)+g(E_2,\nabla_T\varphi T)=0\\ &-\kappa_1 g(E_1,\varphi T)+\kappa_2 g(E_3,\varphi T)+g(E_2,\nabla_T\varphi T)=0\end{aligned}$$

dır. Burada $\varphi T\perp E_3$ ve φ antisimetrik olduğundan $g(E_2,\nabla_T\varphi T)=0$ yani $E_2\perp\nabla_T\varphi T$ olarak bulunur. Yine $\varphi T\perp E_3$ olduğundan $g(\varphi T,E_3)=0$ eşitliğinin türevi alındığında $E_3\perp\nabla_T\varphi T$ elde edilir. $g(\varphi T,\nabla_T\varphi T)$ için $\nabla_T\varphi T$ yerine $\xi+\kappa_1\varphi E_2$ yazılırsa,

$$g(\varphi T,\xi+\kappa_1\varphi E_2)=g(\varphi T,\xi)+\kappa_1 g(\varphi T,\varphi E_2)$$

olur ve (2.8) eşitliği gereği,

$$g(\varphi T,\xi+\kappa_1\varphi E_2)=g(\varphi T,\xi)+\kappa_1(g(T,E_2)-\eta(T)\eta(E_2))$$

biçimine dönüşür. Burada $\varphi T\perp\xi$ ve γ Legendre olduğundan $g(\varphi T,\nabla_T\varphi T)=0$ yani $\varphi T\perp\nabla_T\varphi T$ dır.

Şimdi ξ ve $\nabla_T \varphi T$ nın lineer bağımlı olduklarını kabul edelim. Böylece $\nabla_T \varphi T = f\xi$ olacak şekilde $\exists\ f \in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ vardır. $\nabla_T \varphi T$ yerine $\xi + \kappa_1 \varphi E_2$ yazılırsa,

$$f\xi = \xi + \kappa_1 \varphi E_2, \tag{3.19}$$

$$(f-1)g(\xi,\xi) = \kappa_1 g(\varphi E_2, \xi) \tag{3.20}$$

elde edilir. (3.20) denkleminde (2.7) eşitliği ve "Teorem 2.2.6" kullanılırsa $f=1$ bulunur. Bu durumda (3.19) denklemi $\xi = \xi + \kappa_1 \varphi E_2$ olarak yazılırsa $\kappa_1 = 0$ elde edilir ki, γ eğrisinin geodezik olmaması ile çelişir. Böylece ξ ve $\nabla_T \varphi T$ lineer bağımsızdır. Bu durumda S_1 sistemi lineer bağımsızdır ve $n \geq 3$ tür. ■

2. Durum: $c \neq 1$ ve $E_2 \perp \varphi T$ olsun.

3.4 Teorem $c \neq 1$ ve $E_2 \perp \varphi T$ olsun. γ Legendre eğrisinin has biharmonik eğri olması için gerek ve yeter şart

$$\kappa_1 = sabit > 0,\ \ \kappa_2 = sabit, \tag{3.21}$$

$$\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = \frac{c+3}{4}, \tag{3.22}$$

$$\kappa_2 \kappa_3 = 0 \tag{3.23}$$

olmasıdır $[13]$.

İspat: γ has biharmonik bir Legendre eğrisi olsun. $g(E_2, \varphi T) = 0$ olduğundan (3.6) eşitliğinin son kısmı sıfıra eşittir. Böylece (3.6) denkleminden,

$$\kappa_1 \kappa_1' = 0$$

$$\kappa_1'' - \kappa_1^3 - \kappa_1 \kappa_2^2 + \frac{c+3}{4}\kappa_1 = 0,$$

$$2\kappa_1' \kappa_2 + \kappa_1 \kappa_2' = 0,$$

$$\kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 = 0$$

elde edilir. γ has biharmonik eğri olduğundan ilk eşitlikten $\kappa_1^{'}=0$ yani $\kappa_1 = sabit > 0$ olur. Buna göre denklem sistemi sırasıyla çözüldüğünde $\kappa_1^2+\kappa_2^2=\dfrac{c+3}{4}$, $\kappa_2 = sabit$, $\kappa_2\kappa_3=0$ bulunur.

Tersine

$$\kappa_1 = sabit > 0,\ \kappa_2 = sabit,$$

$$\kappa_1^2+\kappa_2^2=\frac{c+3}{4},$$

$$\kappa_2\kappa_3=0$$

şartlarını sağlayan bir γ eğrisi (3.6) eşitliğini gerçekler. Böylece "Tanım 2.1.8" gereği γ eğrisi has biharmoniktir. ■

3.5 Sonuç: $c \neq 1$ ve $E_2 \perp \varphi T$ olsun.

i) Eğer $c \leq -3$ ise γ nın biharmonik olması için gerek ve şart γ nın geodezik olmasıdır.

ii) Eğer $c > -3$ ise γ nın has biharmonik olması için gerek ve yeter şart

a) $n \geq 2$ ve γ, $\kappa_1^2=\dfrac{c+3}{4}$ eğrilikli bir çember olmasıdır ki bu durumda $\{E_1, E_2, \varphi T, \xi, \nabla_T \varphi T\}$ lineer bağımsızdır.

veya

b) $n \geq 3$ ve γ, eğrilikleri arasında $\kappa_1^2+\kappa_2^2=\dfrac{c+3}{4}$ bağıntısı olan bir helis olmasıdır ki bu durumda $\{E_1, E_2, E_3, \varphi T, \xi, \nabla_T \varphi T\}$ lineer bağımsızdır [13].

İspat: $c \neq 1$ ve $E_2 \perp \varphi T$ olsun.

i) γ biharmonik eğri olsun. Böylece $\tau_2(\gamma)=0$ eşitliğini sağlar. $E_2 \perp \varphi T$ olarak verildiğinden $g(E_2, \varphi T)=0$ dır. Böylece (3.6) eşitliği

$$\tau_2(\gamma)=\left(-3\kappa_1\kappa_1^{'}\right)E_1+(\kappa_1^{''}-\kappa_1^3-\kappa_1\kappa_1^2+\frac{c+3}{4}\kappa_1)E_2+\left(2\kappa_1^{'}\kappa_2+\kappa_1\kappa_2^{'}\right)E_3+\kappa_1\kappa_2\kappa_3E_4=0$$

biçimine dönüşür.

E_1 in katsayısı olan $\kappa_1\kappa_1^{'}=0$ eşitliğinden $\kappa_1=0$ veya $\kappa_1^{'}=0$ dır. $\kappa_1=0$ ise γ nın geodezik olduğu açıktır. $\kappa_1\neq 0$ ise $\kappa_1^{'}=0$ olur ve integral alındığında κ_1 pozitif sabiti elde edilir. Bu durumda $c\leq -3$ olduğundan $\kappa_1^2+\kappa_2^2=\frac{c+3}{4}<0$ çelişkisi elde edilir. Böylece $\kappa_1=0$ dır ve "Tanım 2.1.10" gereği γ bir geodeziktir.

Tersine γ geodezik eğri ve $c\leq -3$ olsun. "Tanım 2.1.10" gereği $\kappa_1=0$ dır. Böylece $\tau_2(\gamma)=0$ eşitliğinin sağlandığı kolayca görülür.

ii) $c>-3$ olmak üzere γ has biharmonik olsun. "Teorem 3.4" gereği γ (3.21), (3.22), (3.23) denklemlerini sağlar. (3.23) gereği $\kappa_2=0$ veya $\kappa_3=0$ dır.

a) $n\geq 2$ olmak üzere $\kappa_2=0$ ise (3.22) eşitliği gereği $\kappa_1^2=\frac{c+3}{4}$ olur. Böylece "Tanım 2.1.10" gereği γ bir çemberdir ve "Yardımcı Teorem 3.3" yardımıyla $\{E_1,E_2,\varphi T,\xi,\nabla_T\varphi T\}$ sisteminin lineer bağımsızlığı açıktır.

b) $n\geq 3$ olmak üzere $\kappa_2\neq 0$ ise $\kappa_3=0$ olur. (3.21) gereği κ_1 ve κ_2 pozitif sabitler ve $\kappa_3=0$ olduğundan "Tanım 2.1.10" gereği γ bir helistir. Ayrıca "Teorem3.4"gereği $\kappa_1^2+\kappa_2^2=\frac{c+3}{4}$ dır. "Yardımcı Teorem 3.3" gereği $\{E_1,E_2,E_3,\varphi T,\xi,\nabla_T\varphi T\}$ sistemi lineer bağımsızdır.

Tersine (i) ve (ii) koşullarını sağlayan γ eğrisi için $\tau_2(\gamma)=0$ has biharmonik şartının sağlandığı açıktır. ∎

3. Durum: $c\neq 1$ ve $E_2\parallel\varphi T$ olsun.

3.6 Teorem $c\neq 1$ ve $E_2\parallel\varphi T$ olsun. γ Legendre eğrisinin has biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\kappa_1 = sabit > 0,\ \kappa_2 = sabit,$$

$$\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = c,$$

$$\kappa_2\kappa_3 = 0$$

olmasıdır $[13]$.

İspat: $c \neq 1$ ve $E_2 \parallel \varphi T$ olsun.

γ bir has biharmonik Legendre eğri olsun. Buradan $g(\varphi T, \varphi T) = g(T,T) - \eta(T)\eta(T) = 1$ ve E_2 birim vektörü için $g(E_2, \varphi T) = \pm 1$ olur. $E_2 = \varphi T$ olsun. Böylece (3.6) eşitliği

$$\tau_2(\gamma) = (-3\kappa_1\kappa_1^{'})E_1 + \left(\kappa_1^{''} - \kappa_1^3 - \kappa_1\kappa_2^2 + c\kappa_1\right)E_2 + \left(2\kappa_1^{'}\kappa_2 + \kappa_1\kappa_2^{'}\right)E_3 + \kappa_1\kappa_2\kappa_3 E_4 = 0$$

biçimine dönüşür. Son denklemden

$$\kappa_1\kappa_1^{'} = 0,$$

$$\kappa_1^{''} - \kappa_1^3 - \kappa_1\kappa_2^2 + c\kappa_1 = 0,$$

$$2\kappa_1^{'}\kappa_2 + \kappa_1\kappa_2^{'} = 0,$$

$$\kappa_1\kappa_2\kappa_3 = 0$$

yazılabilir. Denklem sistemindeki ilk eşitlikten γ has biharmonik olduğundan $\kappa_1^{'} = 0$ yani $\kappa_1 = sabit > 0$ dır. $\kappa_1 > 0$ sabiti için diğer eşitlikler çözüldüğünde sırasıyla $\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = c,$ κ_2 sabit ve $\kappa_2\kappa_3 = 0$ elde edilir.

Tersine

$$\kappa_1 = sabit > 0,\ \kappa_2 = sabit,$$

$$\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = c,$$

$$\kappa_2\kappa_3 = 0$$

şartları (3.6) eşitliğinde kullanılır ve $E_2 = \varphi T$ olarak seçilirse $\tau_2(\gamma) = 0$ elde edilir. Böylece "Tanım 2.1.8" gereği γ eğrisi has biharmoniktir. ■

3.7 Sonuç Eğer $c \neq 1$ ve $E_2 \parallel \varphi T$ ise γ eğrisinin Frenet çatı alanı $\{T, \varphi T, \xi\}$ dir. Ayrıca,

i) Eğer $c \leq 1$ ise γ eğrisinin biharmonik olması için gerek ve yeter şart γ nın geodezik olmasıdır.

ii) Eğer $c > 1$ ise γ eğrisinin has biharmonik olması için gerek ve yeter şart γ nın eğrilikleri $\kappa_1^2 = c - 1$(ve κ_2 =1) olan bir helis olmasıdır $[13]$.

İspat: $c \neq 1$ olmak üzere γ, $M^{2n+1}(c)$ Sasakian uzay formunda birim hızlı bir Legendre eğrisi üzerindeki Frenet çatı alanının $\{T, \varphi T, \xi\}$ olduğunu gösterelim. Öncelikle γ Legendre eğri olduğundan

$$\eta(\gamma') = g(T,\ \xi) = 0 \tag{3.24}$$

bulunur. γ birim hızlı eğri olduğundan

$$g(\gamma', \gamma') = g(T, T) = 1$$

dir. (3.24) ve (2.8) eşitliklerinden

$$g(\varphi\gamma', \varphi\gamma') = g(\varphi T, \varphi T) = g(T, T) - \eta(T)\eta(T) = 1$$

elde edilir. ξ karakteristik vektör alanı olduğundan (2.7) ve "Tanım 2.2.4" gereği

$$g(\xi, \xi) = \eta(\xi) = 1$$

sonucuna ulaşılır. Böylece T, φT ve ξ vektör alanları birimdir. Bu vektör alanlarının ikişer ikişer ortogonal olduğunu gösterelim. φ anti-simetrik bir tensör alanı olduğundan (2.9) eşitliği kullanılarak

$$g(\gamma', \varphi\gamma') = g(T, \varphi T) = 0$$

bulunur. Ayrıca γ Legendre eğri olduğundan (2.7) eşitliği gereği

$$g(\gamma',\xi)=\eta(\gamma')=\eta(T)=0$$

dır. Son olarak “Teorem 2.2.6” ve (2.9) eşitliği birlikte düşünüldüğünde

$$g(\varphi\gamma',\xi)=-g(\gamma',\varphi\xi)=-g(T,\varphi\xi)=0$$

bulunur. Böylece $\{T,\varphi T,\xi\}$ kümesi ortonormal bir kümedir ve γ Legendre eğrisinin Frenet çatı alanını oluşturur. Ayrıca $E_2 \parallel \varphi T$ için $g(\varphi T,\varphi T)=1$ olduğundan $E_2=\varphi T$ olsun. (2.5) denklemi kullanılarak

$$E_2=\varphi T$$

$$\varphi E_2=\varphi^2 T \text{ yani } \varphi E_2=-T \tag{3.25}$$

elde edilir. (2.4), (3.17), (3.25) birlikte kullanılırsa

$$E_1=\gamma'=T$$

$$\nabla_T T=\kappa_1 E_2=\kappa_1\varphi T,$$

$$\nabla_T E_2=-\kappa_1 T+\kappa_2 E_3=\nabla_T\varphi T=\xi+\kappa_1\varphi E_2=\xi-\kappa_1 T, \tag{3.26}$$

$$\nabla_T E_3=-\kappa_2 E_2+\kappa_3 E_4=\nabla_T\xi=-\varphi T=-E_2 \tag{3.27}$$

yazılabilir. Böylece (3.26) eşitliğinden $\kappa_2=1$ ve $E_3=\xi$ olarak düşünülebilir. Bu durumda (3.27) eşitliğinden $\kappa_3=0$ elde edilir.

i) γ biharmonik eğri olsun. Böylce $\tau_2(\gamma)=0$ şartını sağlar. Ayrıca $\kappa_2=1$ olarak bulunduğundan “Teorem 3.6” gereği $\kappa_1^2+1=c$ olur ve $c\le 1$ için $\kappa_1=0$ dır. Böylece “Tanım 2.1.10” gereği γ eğrisi bir geodeziktir.

Tersine γ geodezik eğri ve $c\le 1$ olsun. “Tanım 2.1.10” gereği $\kappa_1=0$ dır. Böylece $\tau_2(\gamma)=0$ eşitliğinin sağlandığı açıktır.

ii) $c>1$ ve γ eğrisi has biharmonik olsun. ”Teorem 3.6” gereği $\kappa_1 = sabit > 0$ ve $\kappa_2 = 1$ olduğundan $\kappa_1^2 = c-1$ elde edilir. Ayrıca $\kappa_3 = 0$ elde edildiğinden “Tanım 2.1.10” gereği γ eğrisi bir helistir.

Tersine $c>1$ ve γ eğrisi $\kappa_1^2 = c-1$ (ve κ_2 =1) eğrilikli bir helis olsun. ”Teorem 3.6” gereği $\tau_2(\gamma)=0$ eşitliğinin sağlandığı açıktır. ■

4.Durum: $c \neq 1$ ve $g(E_2,\varphi T) \neq -1,0,1$ olsun.

t parametresiyle parametrelendirilmiş, γ eğrisi boyunca diferansiyellenebilir bir f fonksiyonu

$$\begin{aligned} f &: I \to C^{\infty}(M,\mathbb{R}) \\ t &\to f(t) = g(E_2,\varphi T) \end{aligned} \tag{3.28}$$

biçiminde tanımlansın.

$f(t) = g(E_2,\varphi T)$ eşitliğinin her iki taraftan türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} f'(t) &= g(\nabla_T E_2,\varphi T) + g(E_2,\nabla_T \varphi T) \\ &= -\kappa_1 g(E_1,\varphi T) + \kappa_2 g(E_3,\varphi T) + g(E_2,\xi) + \kappa_1 g(E_2,\varphi E_2) \end{aligned}$$

dır. Burada γ Legendre bir eğri olduğundan $\eta(E_2)=0$ ve φ antisimetrik olduğundan $g(E_1,\varphi T)=0$ ve $g(E_2,\varphi E_2)=0$ dır. Böylece

$$f'(t) = \kappa_2 g(E_3,\varphi T) \tag{3.29}$$

olarak bulunur. Ayrıca γ biharmonik eğrisi için φT nın ortonormal açılımı

$$\varphi T = g(\varphi T,E_2)E_2 + g(\varphi T,E_3)E_3 + g(\varphi T,E_4)E_4 \tag{3.30}$$

olup (3.29) ve (3.30) eşitliklerinden (3.6) denklemi yeniden düzenlenirse,

$$\tau_2(\gamma) = (-3\kappa_1\kappa_1^{'})E_1 + \left(\kappa_1^{''} - \kappa_1^3 - \kappa_1\kappa_2^{2} + \frac{(c+3)\kappa_1}{4}\right)E_2 + \left(2\kappa_1^{'}\kappa_2 + \kappa_1\kappa_2^{'}\right)E_3 + \kappa_1\kappa_2\kappa_3E_4$$
$$+\frac{3(c-1)\kappa_1}{4} f\left(fE_2 + g(\varphi T, E_3)E_3 + g(\varphi T, E_4)E_4\right)$$
$$=0 \tag{3.31}$$

elde edilir. ■

3.8 Teorem $c \neq 1$ ve $f(t) = g(E_2, \varphi T) \neq -1, 0, 1$ olsun. γ, $4 \leq r \leq 2n+1$, $n \geq 2$ için oskülatör mertebesi r olan bir Legendre Frenet eğrisi olsun. γ nın has biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\kappa_1 = sabit > 0, \tag{3.32}$$

$$\kappa_1^2 + \kappa_2^{2} = \frac{c+3}{4} + \frac{3(c-1)}{4} f^2, \tag{3.33}$$

$$\kappa_2^{'} = -\frac{3(c-1)}{4} fg(\varphi T, E_3), \tag{3.34}$$

$$\kappa_2\kappa_3 = -\frac{3(c-1)}{4} fg(\varphi T, E_4) \tag{3.35}$$

olmasıdır[13].

İspat: $c \neq 1$ ve $f(t) = g(E_2, \varphi T) \neq -1, 0, 1$ olsun.

γ has biharmonik olsun. Böylece (3.31) denklemini sağlar. Buna göre,

$$\kappa_1\kappa_1^{'} = 0 \tag{3.36}$$

$$\kappa_1^{''} - \kappa_1^3 - \kappa_1\kappa_2^{2} + \frac{(c+3)\kappa_1}{4} + \frac{3(c-1)\kappa_1}{4} f^2 = 0 \tag{3.37}$$

$$2\kappa_1^{'}\kappa_2 + \kappa_1\kappa_2^{'} + \frac{3(c-1)\kappa_1}{4} fg(\varphi T, E_3) = 0 \tag{3.38}$$

$$\kappa_1\kappa_2\kappa_3 + \frac{3(c-1)\kappa_1}{4} fg(\varphi T, E_4) = 0 \tag{3.39}$$

denklem sistemi elde edilir. γ has biharmonik olduğundan (3.36) denkleminden $\kappa_1^{'}=0$ yani $\kappa_1=sabit>0$ dır. $\kappa_1>0$ sabiti için (3.37), (3.38), (3.39) denklemleri çözüldüğünde sırasıyla (3.33), (3.34), (3.35) eşitlikleri elde edilir.

Tersine (3.32), (3.33), (3.34), (3.35) eşitlikleri (3.31) denkleminde yerlerine yazıldığında $\tau_2(\gamma)=0$ eşitliğinin sağlandığı açıktır. Böylece "Tanım 2.1.8" gereği γ eğrisi has biharmoniktir. ■

3.9 Sonuç (3.29) denklemi (3.34) eşitliğinde yerine yazılır ve (3.34) denkleminin integrali alınırsa w_0 sabit olmak üzere,

$$\kappa_2^{\,2}=-\frac{3(c-1)}{4}f^2+w_0 \tag{3.40}$$

elde edilir. (3.40) denklemi (3.33) denkleminde yerine yazılır ve (3.33) denklemi düzenlenirse

$$\kappa_1^{\,2}=\frac{c+3}{4}+\frac{3(c-1)}{2}f^2-w_0$$

olur. $\kappa_1=sbt,\quad c=sbt,\ w_0=sbt$ olduğundan $f(t)=g(E_2,\varphi T)$ de sabittir. Böylece (3.40) denkleminden $\kappa_2=sabit>0$ dır. $\kappa_2=sabit>0$ ise (3.34) gereği

$$g(\varphi T,E_3)=0 \tag{3.41}$$

olur. Bu durumda γ biharmonik eğrisi için φT ortonormal açılımı

$$\varphi T=fE_2+g(\varphi T,E_4)E_4 \tag{3.42}$$

olacaktır. Böylece $f(t)=g(E_2,\varphi T)=cos\alpha_0$ ve $g(\varphi T,E_4)=sin\alpha_0$ olacak biçimde bir tek $\alpha_0\in(0,2\pi)\backslash\left\{\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2}\right\}$ sabiti vardır $[13]$.

3.10 Sonuç $c\neq1$, $n\geq2$ ve γ oskülatör mertebesi $r\geq4$ olan bir Legendre Frenet eğrisi olsun. $g(E_2,\varphi t)\neq-1,0,1$ olmak üzere**,**

i) $c\leq-3$ için γ eğrisinin biharmonik olması için gerek ve yeter şart γ nın bir geodezik olmasıdır.

ii) $c > -3$ için γ eğrisinin has biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\kappa_1 = sabit > 0, \kappa_2 = sabit,$$

$$\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = \frac{c+3}{4} + \frac{3(c-1)}{4}\cos^2\alpha_0,$$

$$\kappa_2\kappa_3 = -\frac{3(c-1)}{8} sin(2\alpha_0)$$

olmasıdır. Burada $\alpha_0 \in (0, 2\pi) \setminus \left\{\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$, $c+3+3(c-1)cos^2\alpha_0 > 0$ ve $3(c-1)\sin(2\alpha_0) < 0$ olacak şekilde bir sabittir $[13]$.

İspat: $c \neq 1$, $n \geq 2$ ve γ oskülatör mertebesi $r \geq 4$ olan bir Legendre Frenet eğrisi ve $\alpha_0 \in (0, 2\pi)\setminus\left\{\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$ için $g(E_2, \varphi T) = cos\alpha_0$ olsun.

i) $c \leq -3$ ve γ eğrisi biharmonik olsun. Böylece (3.31) eşitliğini sağlar. "Tanım 2.1.9" gereği E_1 in katsayısı olan $\kappa_1\kappa_1' = 0$ için $\kappa_1 = 0$ veya $\kappa_1' = 0$ dır. $\kappa_1 = 0$ ise γ nın geodezik olduğu açıktır. $\kappa_1 \neq 0$ ve $\kappa_1' = 0$ olsun. $\kappa_2 = sabit > 0$ ve $c \leq -3$ için $\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = \frac{c+3}{4} + \frac{3(c-1)}{4} f^2 \leq 0$ olacaktır. Bu durum $\kappa_1 = 0$ olması ile sağlanır. "Tanım 2.1.10" gereği γ eğrisi bir geodeziktir.

Tersine $c \leq -3$ olmak üzere γ bir geodezik olsun."Tanım 2.1.10" gereği $\kappa_1 = 0$ dır ve $\tau_2(\gamma) = 0$ biharmonik denklemini sağladığı açıktır.

ii) $c > -3$ için γ has biharmonik eğri olsun. Buna göre "Teorem 3.8" gereği (3.32), (3.33), (3.34), (3.35) denklemlerini sağlar. "Sonuç 3.9" da $g(E_2, \varphi T) = cos\alpha_0$ ve $g(\varphi T, E_4) = sin\alpha_0$ olarak alınırsa,

$$\kappa_1 = sabit > 0, \kappa_2 = sabit,$$

$$\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = \frac{c+3}{4} + \frac{3(c-1)}{4} cos^2\alpha_0,$$

$$\kappa_2\kappa_3 = -\frac{3(c-1)}{8}sin(2\alpha_0)$$

ifadelerinin sağlandığı açıktır.

Tersine $c > -3$ için $\alpha_0 \in (0, 2\pi) \setminus \left\{\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$, $c+3+3(c-1)cos^2\alpha_0 > 0$ ve $3(c-1)sin(2\alpha_0) < 0$ olmak üzere

$$\kappa_1 = sabit > 0, \kappa_2 = sabit,$$

$$\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = \frac{c+3}{4} + \frac{3(c-1)}{4}cos^2\alpha_0,$$

$$\kappa_2\kappa_3 = -\frac{3(c-1)}{8}sin(2\alpha_0)$$

şartlarını sağlayan γ eğrisi "Teorem 3.8" gereği has biharmoniktir. ■

3.11 Sonuç Helis olmayan biharmonik eğriler de vardır $[13]$.

4. SASAKİAN UZAY FORMLARDA LEGENDRE OLMAYAN BİHARMONİK EĞRİLER

Bu bölümde (2n+1)-boyutlu φ -kesitsel eğriliği bir sabit c sayısı olan $(M,\ \varphi,\ \xi,\ \eta,\ g)$ Sasakian uzay formunun Legendre olmayan bir γ eğrisinin biharmonik olma koşulları incelenecektir.

$\gamma : I \to M$ oskülatör mertebesi r olan, Legendre olmayan bir Frenet eğrisi olsun. f, γ eğrisi boyunca tanımlı ve sıfırdan farklı bir fonksiyon olmak üzere $\eta(T) = f$ olarak tanımlansın. γ eğrisinin biharmonik denklemi

$$\tau_2(\gamma) = \nabla_T^3 T - R(T, \nabla_T T)T = 0$$

dır. Bu eğri için (2.4) eşitlikleri yardımıyla,

$$E_1 = \gamma' = T,$$

$$\nabla_T E_1 = \nabla_T \gamma' = \nabla_T T = \kappa_1 E_2,$$

$$\begin{aligned}\nabla_T \nabla_T T &= \nabla_T(\nabla_T T) = \nabla_T(\kappa_1 E_2) = \kappa_1^{'} E_2 + \kappa_1(\nabla_T E_2)\\ &= -\kappa_1^{2} E_1 + \kappa_1^{'} E_2 + \kappa_1 \kappa_2 E_3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla_T \nabla_T \nabla_T T &= \nabla_T(\nabla_T \nabla_T T) = \nabla_T(-\kappa_1^2 E_1 + \kappa_1^{'} E_2 + \kappa_1 \kappa_2 E_3)\\ &= -2\kappa_1 \kappa_1^{'} E_1 - \kappa_1^{2} \nabla_T E_1 + \kappa_1^{''} E_2 + \kappa_1^{'} \nabla_T E_2 + (\kappa_1^{'} \kappa_2 + \kappa_1 \kappa_2^{'}) E_3 + \kappa_1 \kappa_2 \nabla_T E_3\\ &= (-3\kappa_1 \kappa_1^{'}) E_1 + (\kappa_1^{''} - \kappa_1^{3} - \kappa_1 \kappa_2^{2}) E_2 + (2\kappa_1^{'} \kappa_2 + \kappa_1 \kappa_2^{'}) E_3 + \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 E_4 \qquad (4.1)\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece "Teorem 2.2.18" gereği

$$
\begin{aligned}
R(T,\nabla_T T)T &= R(T,\kappa_1 E_2)T = \kappa_1 R(T,E_2)T \\
&= \kappa_1\Big[\frac{c+3}{4}\{g(T,E_2)T - g(T,T)E_2\} + \frac{c-1}{4}\{\eta(T)\eta(T)E_2 - \eta(T)\eta(E_2)T \\
&\quad + g(T,T)\eta(E_2)\xi - g(T,E_2)\eta(T)\xi + g(T,\varphi E_2)\varphi T - g(T,\varphi T)\varphi E_2 \\
&\quad + 2g(T,\varphi E_2)\varphi T\}\Big] \qquad (4.2)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada $E_1 = T, E_2, E_3 ... E_r$ Frenet çatısı olduğu için $g(T,E_2)$ =0 dir. Legendre olmayan bir γ eğrisi için $\eta(T) = f$ fonksiyonun türevi alınır ve (2.4), (2.7), (2.11) kullanılırsa

$$
\kappa_1 \eta(E_2) = f' \qquad (4.3)
$$

elde edilir. Böylece (4.2) denklemi

$$
\begin{aligned}
R(T,\nabla_T T)T &= \left(-\frac{c+3}{4}\kappa_1 + \frac{c-1}{4}\kappa_1 f^2\right)E_2 - \frac{c-1}{4} ff'T \\
&\quad + \frac{c-1}{4} f'\xi - \frac{3(c-1)}{4}\kappa_1 g(E_2,\varphi T)\varphi T
\end{aligned} \qquad (4.4)
$$

biçiminde yazılabilir.(4.1) ve (4.4) eşitliklerinden

$$
\begin{aligned}
\tau_2(\gamma) &= \nabla_T^3 T - R(T,\nabla_T T)T \\
&= \left(-3\kappa_1\kappa_1' + \frac{c-1}{4} ff'\right)E_1 + \left(\kappa_1'' - \kappa_1^3 - \kappa_1\kappa_2^2 + \frac{c+3}{4}\kappa_1 - \frac{c-1}{4}\kappa_1 f^2\right)E_2 \\
&\quad + \left(2\kappa_1'\kappa_2 + \kappa_1\kappa_2'\right)E_3 + \kappa_1\kappa_2\kappa_3 E_4 - \frac{c-1}{4} f'\xi + \frac{3(c-1)}{4}\kappa_1 g(E_2,\varphi T)\varphi T \\
&= 0 \qquad (4.5)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

4.1 Teorem Eğer $c = 1$ ise Legendre olmayan γ eğrisinin has biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$
\kappa_1 = sabit > 0, \kappa_2 = sabit, \qquad (4.6)
$$

$$
\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = 1, \qquad (4.7)
$$

$$
\kappa_2\kappa_3 = 0 \qquad (4.8)
$$

olmasıdır [16].

İspat: γ has biharmonik eğri olsun. Bu durumda $\tau_2(\gamma)=0$ dır ve $c=1$ olduğundan (4.5) denklemi

$$\tau_2(\gamma)=\left(-3\kappa_1\kappa_1^{'}\right)E_1+(\kappa_1^{''}-\kappa_1^3-\kappa_1\kappa_1^2+\kappa_1)E_2+\left(2\kappa_1^{'}\kappa_2+\kappa_1\kappa_2^{'}\right)E_3+\kappa_1\kappa_2\kappa_3E_4=0$$

biçimine dönüşür. Böylece

$$\kappa_1\kappa_1^{'}=0, \tag{4.9}$$

$$\kappa_1^{''}-\kappa_1^3-\kappa_1\kappa_1^2+\kappa_1=0, \tag{4.10}$$

$$2\kappa_1^{'}\kappa_2+\kappa_1\kappa_2^{'}=0, \tag{4.11}$$

$$\kappa_1\kappa_2\kappa_3=0 \tag{4.12}$$

denklem sistemi yazılabilir. γ geodezik olmadığından (4.9) eşitliğinde $\kappa_1^{'}=0$ yani $\kappa_1=sabit>0$ dır. $\kappa_1>0$ ise (4.10) denkleminden $\kappa_1^2+\kappa_2^2=1,$ (4.11) denkleminden $\kappa_2^{'}=0$ yani $\kappa_2=sabit,$ (4.12) denkleminden $\kappa_2\kappa_3=0$ olarak bulunur.

Tersine

$$\kappa_1=sabit>0,\ \kappa_2=sabit,$$

$$\kappa_1^2+\kappa_2^2=1,$$

$$\kappa_2\kappa_3=0$$

olsun. Bu eşitlikler (4.5) denkleminde kullanıldığında $\tau_2(\gamma)=0$ elde edilir. Böylece "Tanım 2.1.8" gereği γ eğrisi has biharmoniktir. ■

4.2 Sonuç γ eğrisi has biharmonik eğri ve M nin φ kesitsel eğriliği $c=1$ olsun. γ nın has biharmonik eğri olması için gerek ve şart $\kappa_1=1$ eğrililikli bir çember veya eğrilikleri arasında $\kappa_1^2+\kappa_2^2=1$ bağıntısı bulunan bir helis olmasıdır $[16]$.

İspat: γ eğrisi has biharmonik eğri ve M nin φ kesitsel eğriliği $c=1$ olsun. Bu takdirde $\gamma,$ "Teorem 4.1" deki şartları sağlar. (4.8) denkleminden $\kappa_2=0$ veya

$\kappa_3 = 0$ dır. $\kappa_2 = 0$ ise (4.7) denkleminden $\kappa_1 = 1$ elde edilir. Bu durumda ”Tanım 2.1.10” gereği γ bir çember belirtir. $\kappa_2 \neq 0$ ve $\kappa_3 = 0$ durumunda ise γ, (4.7) denklemini sağlayan bir helistir.

Tersine γ Legendre olmayan bir eğri ve M nin φ-kesitsel eğriliği sabit $c = 1$ olsun. $\kappa_1 = 1$, $\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = 1$ değerleri (4.5) eşitliğinde yerlerine yazıldığında $\tau_2(\gamma) = 0$ elde edilir ki “Tanım 2.1.8” gereği γ eğrisi has biharmoniktir. ■

4.3 Teorem (2n+1)-boyutlu, $c \neq 1$ olan $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ Sasakian uzay formunda Legendre olmayan γ eğrisinin has biharmonik eğri olması için gerek ve yeter şart

$$\kappa_1 = sabit > 0, \tag{4.13}$$

$$\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = \frac{c+3}{4} - \frac{c-1}{4} f^2 - \frac{1}{\kappa_1^2}\frac{c-1}{4}(f')^2 + \frac{3(c-1)}{4}(g(E_2, \varphi T))^2, \tag{4.14}$$

$$\kappa_2' - \frac{1}{\kappa_1}\frac{c-1}{4} f'\eta(E_3) + \frac{3(c-1)}{4} g(E_2, \varphi T) g(E_3, \varphi T) = 0, \tag{4.15}$$

$$\kappa_2 \kappa_3 - \frac{1}{\kappa_1}\frac{c-1}{4} f'\eta(E_4) + \frac{3(c-1)}{4} g(E_2, \varphi T) g(E_4, \varphi T) = 0 \tag{4.16}$$

olmasıdır [16].

İspat: Legendre olmayan γ eğrisi has biharmonik eğri olsun.

$$\varphi T = g(E_2, \varphi T)E_2 + g(E_3, \varphi T)E_3 + g(E_4, \varphi T)E_4,$$

$$\xi = \eta(E_1)E_1 + \eta(E_2)E_2 + \eta(E_3)E_3 + \eta(E_4)E_4$$

ortonormal açılımlarını kullanarak (4.5) denklemi,

$$\tau_2(\gamma) = (-3\kappa_1\kappa_1' + \frac{c-1}{4} ff')E_1 + (\kappa_1'' - \kappa_1^3 - \kappa_1\kappa_2^2 + \frac{c+3}{4}\kappa_1 - \frac{c-1}{4}\kappa_1 f^2)E_2$$
$$+(2\kappa_1'\kappa_2 + \kappa_1\kappa_2')E_3 + \kappa_1\kappa_2\kappa_3 E_4 - \frac{c-1}{4} f' \left[fE_1 + f' \frac{1}{\kappa_1} E_2 + \eta(E_3)E_3 + \eta(E_4)E_4 \right]$$
$$+\frac{3(c-1)}{4}\kappa_1 g(E_2,\varphi T)\left[g(E_2,\varphi T)E_2 + g(E_3,\varphi T)E_3 + g(E_4,\varphi T)E_4 \right]$$
$$= 0 \tag{4.17}$$

biçiminde yazılabilir. Böylece

$$\left(-3\kappa_1\kappa_1' + \frac{c-1}{4} ff' - \frac{c-1}{4} ff'\right) = 0, \tag{4.18}$$

$$\kappa_1'' - \kappa_1^3 - \kappa_1\kappa_2^2 + \frac{c+3}{4}\kappa_1 - \frac{c-1}{4}\kappa_1 f^2$$
$$-\frac{c-1}{4}(f')^2 \frac{1}{\kappa_1} + \frac{3(c-1)}{4}\kappa_1 (g(E_2,\varphi T))^2 = 0 \tag{4.19}$$

$$2\kappa_1'\kappa_2 + \kappa_1\kappa_2' - \frac{c-1}{4} f'\eta(E_3) + \frac{3(c-1)}{4}\kappa_1 g(E_2,\varphi T) g(E_3,\varphi T) = 0, \tag{4.20}$$

$$\kappa_1\kappa_2\kappa_3 - \frac{c-1}{4} f'\eta(E_4) + \frac{3(c-1)}{4}\kappa_1 g(E_2,\varphi T) g(E_4,\varphi T) = 0 \tag{4.21}$$

denklem sistemi elde edilir. Burada γ eğrisi has biharmonik olduğundan (4.18) eşitliğinden $\kappa_1' = 0$ yani $\kappa_1 = sabit > 0$ dır. Buna göre (4.19), (4.20), (4.21) denklemleri çözülürse sırayla (4.14), (4.15), (4.16) eşitlikleri elde edilir.

Tersine (4.13), (4.14), (4.15), (4.16) eşitlikleri (4.5) denkleminde yerlerine yazıldığında $\tau_2(\gamma) = 0$ biharmonik olma şartının sağlandığı açıktır. ■

4.4 Sonuç (2n+1)-boyutlu $\varphi-$ kesitsel eğriliği sabit $c \neq 1$ olan $(M,\ \varphi,\ \xi,\ \eta,\ g)$ Sasakian uzay formunda $\gamma,$ oskülatör mertebesi r olan, Legendre olmayan bir Frenet eğrisi olsun. $\eta(T) = cos\beta_1 = sabit \notin \{-1,0,1\}$ olmak üzere γ eğrisinin has biharmonik olması için gerek ve yeter şart γ nın

i) $\varphi T = \pm sin\beta_1 E_2$ olmak üzere $\kappa_1^2 = 1 + (c-1)\sin^2\beta_1 > 0$ eğrilikli bir çember

veya

ii). $\varphi T = \pm sin\beta_1 E_2$ olmak üzere eğrilikleri arasında $\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = 1 + (c-1)sin^2\beta_1 > 0$ bağıntısı bulunan bir helis

veya

iii) $\varphi T = sin\beta_1 cos\beta_2 E_2 + sin\beta_1 sin\beta_2 E_4$ olmak üzere

$$\kappa_1 = sabit > 0,\ \kappa_2 = sabit,$$

$$\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = \frac{c+3}{4} - \frac{c-1}{4} cos^2\beta_1 + \frac{3(c-1)}{4} sin^2\beta_1 cos^2\beta_2,$$

$$\kappa_2\kappa_3 = -\frac{3(c-1)}{8} sin^2\beta_1 sin(2\beta_2)$$

eşitliklerini sağlayan, oskülatör mertebesi $r \geq 4$ olan bir Frenet eğrisi olmasıdır. Burada $\beta_1 \in (0,\pi) \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ değme açısı T tanjant vektör alanı ile ξ karakteristik vektör alanı arasındaki açı, $\beta_2 \in (0, 2\pi)$ sabit olmak üzere $c + 3 - (c-1)cos^2\beta_1 + 3(c-1)sin^2\beta_1 cos^2\beta_2 > 0,\ 3(c-1)sin(2\beta_2) < 0$ ve $n \geq 2$ dir $[16]$.

İspat: $c \neq 1$ ve γ, oskülatör mertebesi r olan has biharmonik eğri olsun. Bu durumda $\tau_2(\gamma) = 0$ dır. "Teorem 4.3" te geçen f fonksiyonu $\beta_1 \in (0,\pi) \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ için

$$f = \eta(T) = g(T,\xi) = cos\beta_1 \tag{4.22}$$

olsun. (4.22) eşitliğinin türevi alınır, (2.9) ve (2.11) denklemleri kullanılırsa;

$$g(E_2,\xi) = \frac{f'}{\kappa_1} = 0 \tag{4.23}$$

elde edilir. Ayrıca α, γ eğrisi boyunca tanımlı bir fonksiyon olmak üzere

$$g(E_2, \varphi T) = \alpha \tag{4.24}$$

olsun. Eşitliğin türevi alınırsa,

$$g(\nabla_T E_2, \varphi T) + g(E_2, \nabla_T \varphi T) = \alpha' \tag{4.25}$$

elde edilir. Burada (2.10) denkleminden faydalanılarak,

$$\begin{aligned} \nabla_T(\varphi T) &= (\nabla_T \varphi)T + \varphi \nabla_T T \\ &= g(T,T)\xi - \eta(T)T + \varphi(\kappa_1 E_2) \\ &= \xi - fT + \kappa_1 \varphi E_2 \end{aligned} \tag{4.26}$$

olur. (2.4) ve (4.26) eşitlikleri kullanılırsa,

$$-\kappa_1 g(E_1, \varphi T) + \kappa_2 g(E_3, \varphi T) + g(E_2, \xi) - fg(E_2, T) + \kappa_1 g(E_2, \varphi E_2) = \alpha'$$

bulunur. Buradan (2.9) ve (4.23) denklemlerinden

$$\kappa_2 g(E_3, \varphi T) = \alpha' \tag{4.27}$$

olur.

γ has biharmonik eğri olduğu için "Teorem 4.3" gereği (4.15) eşitliğinde α ve α' değerlerini yerine yazılıp κ_2 eğriliği ile çarpılırsa,

$$\kappa_2 \kappa_2' + \frac{3(c-1)}{4}\alpha\alpha' = 0 \tag{4.28}$$

dır. Böylece eşitliğin integrali alındığında w_0 sabit olmak üzere

$$\kappa_2^2 + \frac{3(c-1)}{4}\alpha^2 + w_o = 0 \tag{4.29}$$

elde edilir. Buradan (4.29) eşitliği, (4.14) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = \frac{c+3}{4} - \frac{c-1}{4} f^2 - \kappa_2^2 - w_0$$

elde edilir. Böylece $c = sbt$, $w_0 = sbt$, $\kappa_1 = sbt$ ve $f = sbt$ olduğundan κ_2 de sabittir. κ_2 sabit ise (4.29) denkleminden α sabittir. Buna göre (4.27) denkleminden $\kappa_2 = 0$ veya $g(E_3, \varphi T) = 0$ olmak üzere iki durum karşımıza çıkar:

i) $\kappa_2 = 0$ ise (4.5) biharmonik denklemi

$$\left(-\kappa_1^3 + \frac{c+3}{4}\kappa_1 - \frac{c-1}{4}\kappa_1 f^2\right)E_2 + \frac{3(c-1)}{4}\kappa_1\alpha(\varphi T) = 0$$

biçimine dönüşür. Burada $\kappa_1 = sbt,\ c = sbt,\ f = sbt,\ \alpha = sbt$ olduğundan $E_2 \parallel \varphi T$ elde edilir. Böylece $g(\varphi T, \varphi T) = 1 - f^2 = sin^2\beta_1$ ve E_2 ortonormal vektöründen $g(E_2, \varphi T) = \pm sin\beta_1$ dir. Buradan $\varphi T = \pm sin\beta_1 E_2$ olarak ifade edilir. Ayrıca $g(E_2, \varphi T) = \pm sin\beta_1$ ve f fonksiyonun sabitliğini kullanarak (4.14) eşitliğinden $\kappa_1^2 = 1 + (c-1)sin^2\beta_1 > 0$ elde edilir. Böylece "Tanım 2.1.10" gereği γ eğrisi bir çemberdir.

ii) $\kappa_2 \neq 0$ olsun. Bu durumda $g(E_3, \varphi T) = 0$ dır ve $\kappa_3 = 0$ ise κ_1 ve κ_2 sabit olduğundan "Tanım 2.1.10" gereği γ eğrisi bir helis olur. Ayrıca (4.5) biharmonik denkleminden $E_2 \parallel \varphi T$ dir. Böylece $\varphi T = \pm sin\beta_1 E_2$ ve (4.14) denkleminden $\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = 1 + (c-1)sin^2\beta_1 > 0$ elde edilir.

iii) $\kappa_2 \neq 0$ ve $g(E_3, \varphi T) = 0$ olsun. γ eğrisinin oskülatör mertebesi $r \geq 4$ olmak üzere (4.5) biharmonik denkleminden $\varphi T \in span\{E_2, E_4\}$ elde edilir.

Ayrıca $g(\varphi T, \varphi T) = 1 - f^2 = sin^2\beta_1$ ve $\beta_2 \in (0, 2\pi)$ φT ve E_2 arasındaki açı olmak üzere $g(\varphi T, E_2) = \alpha = sin\beta_1 cos\beta_2$ ve $g(\varphi T, E_4) = sin\beta_1 sin\beta_2$ olarak bulunur. Böylece φT ortonormal açılımından

$$\varphi T = sin\beta_1 cos\beta_2 E_2 + sin\beta_1 sin\beta_2 E_4$$

dır. Diğer taraftan γ has biharmonik eğrisi için κ_2 sabit ve "Teorem 4.3" gereği $\kappa_1 = sbt > 0,\ g(\varphi T, E_2) = sin\beta_1 cos\beta_2,\ g(\varphi T, E_4) = sin\beta_1 sin\beta_2$ değerleri de (4.14), (4.16) denklemlerinde yerlerine yazıldığında

$$\kappa_1 = sabit > 0, \ \kappa_2 = sabit,$$

$$\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = \frac{c+3}{4} - \frac{c-1}{4} cos^2\beta_1 + \frac{3(c-1)}{4} sin^2\beta_1 cos^2\beta_2,$$

$$\kappa_2\kappa_3 = -\frac{3(c-1)}{8} sin^2\beta_1 sin(2\beta_2)$$

olarak bulunur.

Tersine (2n+1) boyutlu φ-kesitsel eğriliği sabit $c \neq 1$ olan $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ Sasakian uzay formunda γ (i), (ii), (iii) şartlarını sağlayan Legendre olmayan bir Frenet eğrisi olsun. Bu durumda γ eğrisinin $\tau_2(\gamma) = 0$ has biharmonik olma şartını sağladığı açıktır. ■

$g(\varphi T, E_2)$, $\tau_2(\gamma) = 0$ biharmonik denkleminde önemli bir rol oynar ve oskülatör mertebesi r olan bir γ Frenet eğrisinde $\eta(T) = f(s) = cos\beta(s)$ her zaman sabit olmak zorunda değildir. Bununla beraber $E_2 \perp \varphi T$ veya $E_2 \parallel \varphi T$ olması durumlarında da özel sonuçlar elde edilir.

1.Durum: $c \neq 1, \ E_2 \perp \varphi T$ olsun.

4.5 Teorem $E_2 \perp \varphi T$ olmak üzere (2n+1) boyutlu, $c \neq 1$ olan $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ Sasakian uzay formunda Legendre olmayan γ eğrisinin has biharmonik eğri olması için gerek ve yeter şart

$$\kappa_1 = sabit > 0, \tag{4.30}$$

$$\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = \frac{c+3}{4} - \frac{c-1}{4} f^2 - \frac{1}{\kappa_1^2}\frac{c-1}{4}\left(f'\right)^2, \tag{4.31}$$

$$\kappa_2' - \frac{1}{\kappa_1}\frac{c-1}{4} f' \eta(E_3) = 0, \tag{4.32}$$

$$\kappa_2\kappa_3 - \frac{1}{\kappa_1}\frac{c-1}{4} f' \eta(E_4) = 0 \tag{4.33}$$

olmasıdır [16].

İspat: Legendre olmayan γ eğrisi has biharmonik eğri olsun. Bu durumda γ eğrisi (4.13), (4.14), (4.15), (4.16) denklemlerini sağlar ve $E_2 \perp \varphi T$ kabulünden $g(E_2, \varphi T) = 0$ dır. Böylece (4.31),(4.32),(4.33) denklemleri elde edilir.

Tersine $E_2 \perp \varphi T$ olmak üzere (4.30), (4.31), (4.32), (4.33) denklemleri (4.17) denkleminde yerlerine yazıldığında $\tau_2(\gamma) = 0$ biharmonik denklemini sağladığı açıktır. ■

$f = g(T, \xi) = \eta(T)$ fonksiyonun türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} f' &= g(\nabla_T T, \xi) + g(T, \nabla_T \xi) \\ &= g(\kappa_1 E_2, \xi) + g(T, -\varphi T) \end{aligned}$$

olup buradan (2.9) gereği $f' = \kappa_1 g(E_2, \xi)$ dir ve

$$g(E_2, \xi) = \eta(E_2) = \frac{f'}{\kappa_1} \tag{4.34}$$

denkleminin de türevi alınırsa,

$$g(\nabla_T E_2, \xi) + g(E_2, \nabla_T \xi) = \frac{f''}{\kappa_1},$$

yani

$$g(-\kappa_1 E_1 + \kappa_2 E_3, \xi) + g(E_2, -\varphi T) = \frac{f''}{\kappa_1}$$

elde edilir. Burada $E_2 \perp \varphi T$ olduğundan

$$\kappa_2 \eta(E_3) = \frac{1}{\kappa_1} f'' + \kappa_1 f \tag{4.35}$$

dır. Diğer taraftan (4.32) denkleminde (4.35) eşitliği yerine yazılırsa

$$\kappa_2' - \frac{1}{\kappa_1}\frac{c-1}{4} f' \left(\frac{1}{\kappa_1 \kappa_2} f'' + \frac{\kappa_1}{\kappa_2} f \right) = 0 \tag{4.36}$$

dır ve eşitlik κ_2 ile çarpılırsa,

$$\kappa_2 \kappa_2' - \frac{1}{\kappa_1^2}\frac{c-1}{4}\left(f' f'' + \kappa_1^2 f f' \right) = 0 \tag{4.37}$$

elde edilir. (4.37) eşitliğinin integrali alınırsa w_1 sabit olmak üzere,

$$\kappa_2^2 - \frac{1}{\kappa_1^2}\frac{c-1}{4}\left((f')^2 + \kappa_1^2 f^2 \right) + w_1 = 0 \tag{4.38}$$

olur. (4.31) denkleminde κ_2^2 yerine (4.38) eşitliği yazılırsa,

$$\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = \frac{c+3}{4} - \kappa_2^2 - w_1$$

elde edilir ki burada $\kappa_1 = sbt, c = sbt, w_1 = sbt$ olduğundan κ_2 de sabit olacaktır. Böylece (4.37) denklemi $\kappa_1 = sabit > 0$ ve $c \neq 1$ olmak üzere

$$f'(f'' + \kappa_1^2 f) = 0 \tag{4.39}$$

dır. Ayrıca $g(E_2, \varphi T) = 0$ varsayımının türevi alınırsa,

$$-\kappa_1 g(E_1, \varphi T) + \kappa_2 g(E_3, \varphi T) + g(E_2, \xi) - f g(E_2, T) + \kappa_1 g(E_2, \varphi E_2) = 0$$

denklemi elde edilir. Burada φ antisimetrik ve $\eta(E_2) = \frac{f'}{\kappa_1}$ olduğundan

$$\kappa_2 g(E_3, \varphi T) = -\frac{f'}{\kappa_1} \tag{4.40}$$

biçimine dönüşür. Ayrıca (4.35) ifadesinin türevi alınırsa

$$\kappa_2 \left(g(\nabla_T E_3, \xi) + g(E_3, \nabla_T \xi) \right) = \frac{1}{\kappa_1} f''' + \kappa_1 f'$$

yani

$$\kappa_2\left(-\kappa_2 g(E_2,\xi)+\kappa_3 g(E_4,\xi)\right)-\kappa_2 g(E_3,\varphi T)=\frac{1}{\kappa_1}f^{'''}+\kappa_1 f^{'}$$

dır. Burada (4.34) ve (4.40) ifadeleri yerlerine yazılırsa,

$$\kappa_2\kappa_3\eta(E_4)=\frac{1}{\kappa_1}\left(f^{'''}+(\kappa_1^2+\kappa_2^2-1)f^{'}\right) \tag{4.41}$$

elde edilir.

Diğer taraftan γ eğrisi has biharmonik olduğu için $\tau_2(\gamma)=0$ eşitliğini sağlar. Böylece $\eta(\tau_2(\gamma))=0$ olacaktır. κ_2 sabit olmak üzere $\eta(\xi)=1,\ \eta(T)=f,\ (\eta\circ\varphi)=0,$ (4.34), (4.35), (4.36) ifadeleri yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\eta\left(\tau_2(\gamma)\right)&=\frac{c-1}{4}f^{'}f^{2}+\left(-\kappa_1^{3}-\kappa_1\kappa_2^{2}+\frac{c+3}{4}\kappa_1-\frac{c-1}{4}\kappa_1 f^{2}\right)\frac{1}{\kappa_1}f^{'}\\&\quad+\left(f^{'''}+(\kappa_1^2+\kappa_2^2-1)f^{'}\right)-\frac{c-1}{4}f^{'}\\&=0\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $f^{'''}=0$ olarak bulunur. Ayrıca (4.39) ifadesinin türevi alınır ve $f^{'''}=0$ olduğu göz önüne alınırsa $\kappa_1^2(f^{'})^2+(f^{''}+\kappa_1^2 f)f^{''}=0$ elde edilir. $\kappa_1=sabit>0$ olduğundan $f^{'}=0$ yani f sabittir. Böylece $E_2\perp\varphi T$ koşuluyla "Teorem 4.5" de f fonksiyonu yerine $f=\eta(T)=cos\beta_0\in(0,2\pi)\setminus\left\{\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2}\right\}$ sabiti alınabilir $[16]$. ■

4.6 Sonuç $c\neq 1,\ n\geq 2$ ve $E_2\perp\varphi T$ olsun. Legendre olmayan γ eğrisinin has biharmonik olabilmesi için gerek ve yeter şart γ nın

i) $\eta(T)=cos\beta_0$ ve $\kappa_1^2=\frac{c+3}{4}-\frac{c-1}{4}cos^2\beta_0$ eğrilikli bir çember,

veya

ii) $\eta(T)=cos\beta_0$ ve eğrilikleri arasında $\kappa_1^2+\kappa_2^2=\frac{c+3}{4}-\frac{c-1}{4}cos^2\beta_0$ bağıntısı bulunan bir helis olmasıdır. Burada $\beta_0\in(0,2\pi)\setminus\left\{\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2}\right\}$ sabit ve $\frac{c+3}{4}-\frac{c-1}{4}cos^2\beta_0>0$ dır $[16]$.

İspat: $c\neq 1$, $n\geq 2$ ve $E_2\perp\varphi T$ olsun.

Legendre olmayan γ eğrisi has biharmonik olsun. Böylece γ "Teorem 4.5" şartlarını sağlar. $f=\eta(T)=cos\beta_0$ sabiti için (4.33) eşitliği $\kappa_2\kappa_3=0$ olur.

$\kappa_2=0$ ve $\kappa_3\neq 0$ ise (4.31) denklemlerinden $\kappa_1^2=\frac{c+3}{4}-\frac{c-1}{4}cos^2\beta_0$ elde edilir. Bu durumda γ eğrisi bir çemberdir.

$\kappa_2\neq 0$ ve $\kappa_3=0$ ise (4.32) eşitliğinden κ_2 sabittir ve (4.31) denkleminden $\kappa_1^2+\kappa_2^2=\frac{c+3}{4}-\frac{c-1}{4}cos^2\beta_0$ elde edilir. Böylece γ eğrisi bir helistir.

Tersine Legendre olmayan γ eğrisi (i) ve (ii) şartlarını sağlayan bir eğri olsun. Bu durumda γ eğrisinin $\tau_2(\gamma)=0$ has biharmonik olma şartını sağladığı açıktır. ■

2.Durum: $c\neq 1$ ve $E_2\parallel\varphi T$ olsun.

Bu durumda "Teorem 2.2.6" gereği $g(\varphi T,\xi)=\eta(\varphi T)=(\eta\circ\varphi)(T)=0$ olduğundan $g(E_2,\xi)=\frac{1}{\kappa_1}f'=0$ dır. Böylece $f=\eta(T)=cos\beta_0$ sabittir. $g(\varphi T,\varphi T)=1-(\eta(T))^2=sin^2\beta_0$ ve $\varphi T=\pm sin\beta_0 E_2$ dır.

Yardımcı Teorem 4.7 $c\neq 1$ ve $E_2\parallel\varphi T$ olsun. γ eğrisinin has biharmonik olması için gerek ve yeter şart γ nın

i) $\eta(T)=cos\beta_0$ ve $\kappa_1^2=c-(c-1)cos^2\beta_0$ eğrilikli bir çember,

veya

ii) $\eta(T)=cos\beta_0$ ve eğrilikleri arasında $\kappa_1^2+\kappa_2^2=c-(c-1)cos^2\beta_0$ bağıntısı bulunan bir helis olmasıdır. Burada $\beta_0\in(0,2\pi)\ \backslash\ \left\{\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2}\right\}$ sabit ve $c-(c-1)cos^2\beta_0>0$ dır $[16]$.

İspat: $c\neq 1$ ve $E_2 \parallel \varphi T$ olmak üzere γ has biharmonik olsun. Bu durumda (4.5) denklemini sağlar. “Teorem 4.3” gereği $\kappa_1=sabit>0,\ \ f=cos\beta_0$ olmak üzere $g(E_2,\varphi T)=sin\beta_0,\ \varphi T=sin\beta_0 E_2$ değerleri (4.5) denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$-\kappa_1\left(\kappa_1^2+\kappa_2^2-\frac{c+3}{4}+\frac{c-1}{4}cos^2\beta_0-\frac{3(c-1)}{4}sin^2\beta_0\right)E_2+\kappa_1\kappa_2'E_3+\kappa_1\kappa_2\kappa_3E_4=0$$

olur. Böylece

$$\kappa_1^2+\kappa_2^2=\frac{c+3}{4}-\frac{c-1}{4}cos^2\beta_0+\frac{3(c-1)}{4}sin^2\beta_0, \tag{4.42}$$

$$\kappa_1\kappa_2'=0, \tag{4.43}$$

$$\kappa_1\kappa_2\kappa_3=0 \tag{4.44}$$

denklem sistemi elde edilir. $\kappa_1=sbt>0$ için (4.43) eşitliğinden $\kappa_2'=0$ yani κ_2 sabittir ve (4.44) eşitliğinden $\kappa_2\kappa_3=0$ yani $\kappa_2=0$ veya $\kappa_3=0$ dır.

Eğer $\kappa_2=0$ ise (4.42) denkleminden $\kappa_1^2=c-(c-1)cos^2\beta_0$ elde edilir ve böylece γ eğrisi bir çemberdir.

Eğer $\kappa_3=0$ ise (4.42) denkleminden eğrilikleri arasında $\kappa_1^2+\kappa_2^2=c-(c-1)cos^2\beta_0$ bağıntısı bulunan bir helis elde edilir.

Tersine (i) veya (ii) şartlarını sağlayan bir γ eğrisi (4.5) denklemini sağlar. Bu durumda “Tanım 2.1.8” gereği γ has biharmonik eğridir. ■

4.8 Teorem $c \neq 1$ ve $E_2 \,||\, \varphi T$ olsun. $r \leq 3$ olmak üzere γ, oskülatör mertebesi r olan bir Frenet eğrisi olsun. γ eğrisinin has biharmonik olması için gerek ve yeter şart

i) $\eta(T) = \pm\sqrt{\dfrac{c+1-\sqrt{c^2-2c+5}}{2(c-1)}}$ ve $\kappa_1{}^2 = \dfrac{c-1+\sqrt{c^2-2c+5}}{2}$ olmakla birlikte γ nın bir çember

veya

ii) $\eta(T) = cos\beta_0$ ve κ_1 eğriliği $\kappa_1{}^2 \pm cos(2\beta_0)\kappa_1 + (1-c)sin^4\beta_0 = 0$ bağıntısını sağlamakla birlikte γ nın bir helis olmasıdır. Burada $\beta_0 = sabit \in (0, 2\pi) \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{3\pi}{2}\right\}$ ve $\kappa_2{}^2 = (\kappa_1 cot\beta_0 \pm 1)^2$ dir $[16]$.

İspat: $c \neq 1$ ve $E_2 \,||\, \varphi T$ için γ Legendre olmayan has biharmonik bir eğri olsun. $\eta(T) = cos\beta_0$ için $E_2 \,||\, \varphi T$ olmak üzere

$$\varphi T = \pm sin\beta_0 E_2 \tag{4.45}$$

dır. (4.45) denklemi φ ile işlem alınır ve (2.5) eşitliği gereği

$$\varphi^2 T = -T + cos\beta_0 \xi = \pm sin\beta_0 \varphi(E_2) \tag{4.46}$$

elde edilir. Buradan $\varphi(E_2) = \mp \dfrac{T}{sin\beta_0} \pm \dfrac{cos\beta_0}{sin\beta_0}\xi$ biçiminde yazılabilir. Diğer yandan (4.45) eşitliğinin türevi alınırsa,

$$\nabla_T \varphi T = \pm \sin\beta_0 \nabla_T E_2 \tag{4.47}$$

dır. Burada $\nabla_T \varphi T$ aynı zamanda

$$\begin{aligned} \nabla_T \varphi T &= (\nabla_T \varphi)T + \varphi(\nabla_T T) \\ &= \xi - cos\beta_0 T + \kappa_1 \varphi(E_2) \end{aligned} \tag{4.48}$$

olduğundan (4.47) ve (4.48) denklemleri birlikte kullanılırsa

$$\xi - \cos\beta_0 T + \kappa_1\left(\frac{\mp T}{sin\beta_0} \pm \frac{cos\beta_0}{sin\beta_0}\xi\right) = \pm sin\beta_0 \nabla_T E_2$$

elde edilir. Böylece

$$\nabla_T E_2 = -\frac{1}{sin\beta_0}\left(\frac{\kappa_1}{sin\beta_0} \pm cos\beta_0\right)T + \frac{1}{sin\beta_0}\left(\frac{\kappa_1 cos\beta_0}{sin\beta_0} \pm 1\right)\xi \tag{4.49}$$

olur. Ayrıca $\nabla_T E_2 = -\kappa_1 T + \kappa_2 E_3$ ifadesinin her iki tarafının ξ ile iççarpımı yapılırsa,

$$-\kappa_1\eta(T) + \kappa_2\eta(E_3) = -\frac{1}{sin\beta_0}\left(\frac{\kappa_1}{sin\beta_0} \pm cos\beta_0\right)\eta(T) + \frac{1}{sin\beta_0}\left(\frac{\kappa_1 cos\beta_0}{sin\beta_0} \pm 1\right)\eta(\xi)$$

dır. Burada $\eta(T) = cos\beta_0$ ve $\eta(\xi) = 1$ olmak üzere,

$$\kappa_2\eta(E_3) = (\pm sin\beta_0 + \kappa_1 cos\beta_0) \tag{4.50}$$

biçimine dönüşür. Diğer taraftan $E_2 \parallel \varphi T$ olduğundan $g(\varphi T, E_3) = 0$ ve $g(\varphi T, E_4) = 0$ dır. $g(\varphi T, E_3) = 0$ ifadesinin türevi alınırsa

$$g(\nabla_T \varphi T, E_3) + g(\varphi T, -\kappa_2 E_2 + \kappa_3 E_4) = 0,$$

$$g(\xi - cos\beta_0 T + \kappa_1\varphi E_2, E_3) + g(\varphi T, -\kappa_2 E_2 + \kappa_3 E_4) = 0,$$

$$\eta(E_3) - \cos\beta_0 g(T, E_3) + \kappa_1 g(\varphi E_2, E_3) - \kappa_2 g(\varphi T, E_2) = 0,$$

$$\eta(E_3) + \kappa_1 g(\varphi E_2, E_3) \mp \kappa_2 sin\beta_0 = 0 \tag{4.51}$$

elde edilir. Ayrıca (4.46) eşitliğinde E_3 ile iççarpım alınır ve her iki taraf κ_1 ile çarpılırsa,

$$\pm\kappa_1 \cos\beta_0 g(E_3, \xi) = \kappa_1 \sin\beta_0 g(\varphi E_2, E_3) \tag{4.52}$$

olur. Böylece (4.51) ve (4.52) eşitlikleri kullanılarak

$$\eta(E_3) = \frac{\pm\kappa_2 sin^2\beta_0}{sin\beta_0 \pm \kappa_1 cos\beta_0} \tag{4.53}$$

olarak bulunur. (4.50) ifadesinde $\eta(E_3)$ yerine yazılırsa

$$\kappa_2^2 = \frac{\left(\kappa_1 cos\beta_0 \pm sin\beta_0\right)^2}{sin^2\beta_0} \tag{4.54}$$

elde edilir. Burada eğer $\kappa_2 = 0$ ise γ eğrisi bir çemberdir ve (4.54) eşitliğinden $\kappa_1 = \mp tan\beta_0 > 0$ olmalıdır. ”Yardımcı Teorem 4.7” gereği γ has biharmonik eğrisinin bir çember olması için gerek ve yeter şart $\kappa_1 = tan\beta_0$ için $cos^2\beta_0 = \frac{1}{1+\kappa_1^2}$ olmasıdır. Yine ”Yardımcı Teorem 4.7” gereği $\kappa_1^2 = c-(c-1)cos^2\beta_0$ ifadesinde $cos^2\beta_0$ yerine $\frac{1}{1+\kappa_1^2}$ yazılır ve düzenlenirse

$$\kappa_1^2 = \frac{c-1+\sqrt{c^2-2c+5}}{2},$$

$$(\eta(T))^2 = cos^2\beta_0 = \frac{c+1-\sqrt{c^2-2c+5}}{2(c-1)}$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece (i) ispatlanmış olur.

Eğer $\kappa_2 \neq 0$ ise $\nabla_T E_2 = -\kappa_1 T + \kappa_2 E_3$ denkleminin türevi alınır, $\nabla_T(\nabla_T E_2) = -\kappa_1 \nabla_T T + \kappa_2(\nabla_T E_3)$ eşitliğinde (4.49), (2.4), $\nabla_T E_3 = -\kappa_2 E_2 + \kappa_3 E_4$ değerlerleri yerlerine yazılır ve düzenlenirse

$$\left(\frac{-\kappa_1^2}{\sin^2\beta_0} \mp \frac{2\kappa_1\cos\beta_0}{\sin\beta_0} - 1 + \kappa_1^2 + \kappa_2^2\right)E_2 = \kappa_2\kappa_3 E_4$$

eşitliği elde edilir. Eşitliğin her iki tarafı E_4 vektörü ile çarpılırsa $\kappa_2\kappa_3 = 0$ olarak bulunur. $\kappa_2 = sabit > 0$ olduğundan $\kappa_3 = 0$ dır. Böylece γ eğrisi bir helistir. (4.14) denkleminde $f = cos\beta_0$, $g(E_2, \varphi T) = \pm sin\beta_0$ ve $\kappa_2^2 = \dfrac{\left(\kappa_1 cos\beta_0 \pm sin\beta_0\right)^2}{sin^2\beta_0}$ değerleri yerine yazılır ve düzenlenirse

$$\kappa_1^{\ 2} \pm cos(2\beta_0)\kappa_1 + (1-c)sin^4\beta_0 = 0$$

elde edilir. Böylece (ii) ispatlanmış olur.

Tersine $c \neq 1$ ve $E_2 \,||\, \varphi T$ olsun. $r \leq 3$ olmak üzere γ, oskülatör mertebesi r olan (i) ve (ii) şartlarını sağlayan bir eğri olsun. Bu durumda γ eğrisinin $\tau_2(\gamma) = 0$ has biharmonik olma şartını sağladığı açıktır. ■

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

3.bölümde Sasakian uzay formunda Legendre eğrilerin biharmonik ve has biharmonik olma koşulları incelenmiş ve Teorem 3.1, Teorem 3.4, Teorem 3.6, Teorem 3.8 ile sonuçları ispatlanmıştır.

4.bölümde Sasakian uzay formunda tanjant vektör alanı ile karakteristik vektör alanı arasındaki açısı sabit olan, Legendre olmayan eğrilerin biharmonik ve has biharmonik olma koşulları incelenmiş ve Teorem 4.1, Teorem 4.3, Teorem 4.5 ve sonuçları ile Yardımcı Teorem 4.7, Teorem 4.8 ispatlanmıştır.

6. KAYNAKLAR

[1] Kobayashi, S. and Nomizu, K., *Foundations of differential geometry*, New York: John Wiley and Sons, Inc., (1996).

[2] Hacısalihoğlu, H. H., *Diferensiyel Geometri*, İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları, (1983).

[3] O'Neill, B., *Elementary differantial geometry*, Newyork, London: Academic Press, (1996).

[4] Chen, B. Y., "Geometry of submanifolds", *Pure and Applied Mathematichs, 22, Marcel Dekker, Inc.,* New York, (1973).

[5] Eells, J. and Sampson, J. H., "Harmonic mappings of Riemannian manifolds" , *Amer. J. Math.*, 86, 109–160, (1964).

[6] Jiang, G., Y., "2-harmonic maps and their first and second variational formulas", *Chinese Ann. Math.*, 7 (4), 389–402, (1986).

[7] Ferus, D. and Schirrmacher, S., "Submanifolds in Euclidean space with simple geodesics", *Math Ann*., 260, 57–62, (1982).

[8] Blair, D. E., *Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds Second Edition*, Boston, MA: Progress in Mathematics, 203. Birkhäuser Boston, Inc., (2010).

[9] Yano, K. and Kon, M., *Structures on manifolds*, Series in Pure Mathematics, 3, Singapore: World Scientific Publishing Co., (1984).

[10] Blair, D. E., *Contact Manifolds in Riemannian Geometry*, Lecture Notes in Math., 509, Berlin: Springer-Verlag, (1976).

[11] Kocayiğit, H., ”Lorentz 3-Manifoldlarında Biharmonik Eğriler ve Kontakt Geometri.”, Doktora Tezi, *Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Matematik Anabilimdalı, Ankara, (2004).

[12] Yano, K. and Kon, M., *Anti-invariant submanifolds*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, (21), New York, Basel: Marcel Dekker, Inc., (1976).

[13] Fetcu, D. and Oniciuc, C., “Explicit formulas for biharmonic submanifolds in Sasakian space forms”, *Pacific J. Math.*, 240 (1), 85-107, (2009).

[14] Verstraelen, L. and Vrancken, L.,”Pinching Teorems for C-Totally Real Submanifolds of Sasakian Space Forms”, *Journal of Geometry*, 33 (1), 172-184, (1988).

[15] Baikoussis, C. and Blair, D. E., “On Legendre curves in contact 3-manifolds”, *Geometria Dedicata*, 49, 135-142, (1994).

[16] Fetcu, D. “A note on biharmonic curves in Sasakian space forms” *Ann. Mat. Pura Appl.*, 189 (4), 591-603, (2010).

[17] Chen, B. Y., “A report on submanifolds of finite type”, *Soochow J. Math.*, 22, 117–337, (1996).