T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KOMPLEKS ROLLE VE ORTALAMA DEĞER TEOREMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YAĞMUR KAYA

BALIKESİR, NİSAN - 2015

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KOMPLEKS ROLLE VE ORTALAMA DEĞER TEOREMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YAĞMUR KAYA

BALIKESİR, NİSAN - 2015

KABUL VE ONAY SAYFASI

Yağmur KAYA tarafından hazırlanan "**KOMPLEKS ROLLE VE ORTALAMA DEĞER TEOREMLERİ**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 08.04.2015 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Prof. Dr. Nihal YILMAZ ÖZGÜR	....
Üye Yrd. Doç. Dr. Aslı GÜLDÜRDEK	....
Üye Yrd. Doç. Dr. Beyza Billur İSKENDER EROĞLU	....

Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez BAÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Doç. Dr. Necati ÖZDEMİR ....

ÖZET

KOMPLEKS ROLLE VE ORTALAMA DEĞER TEOREMLERİ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
YAĞMUR KAYA
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. NİHAL YILMAZ ÖZGÜR)

BALIKESİR, NİSAN - 2015

Reel değerli fonksiyonlar için Ortalama Değer Teoremi ve Rolle Teoremi analizin en temel teoremlerindendir. Bu tezde kompleks değişkenli kompleks değerli fonksiyonlar için Ortalama Değer Teoremi ve Rolle Teoremi incelenecektir.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde Ortalama Değer Teoremi ve Rolle Teoremi'nin kompleks düzlemde geçerli olup olmadığı incelenmiştir.

İkinci bölümde reel değerli ve kompleks değerli fonksiyonlar için temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde reel değerli fonksiyonlar için Ortalama Değer Teoremi ile Rolle Teoremi arasındaki denklik gösterilmiştir. Ortalama Değer Teoremi'nin farklı çeşitleri incelenmiştir.

Dördüncü bölümde Kompleks Rolle Teoremi ile Kompleks Ortalama Değer Teoremi verilmiştir ve tek kompleks değişkenli analitik bir fonksiyon için Kompleks Rolle Teoremi ile Kompleks Ortalama Değer Teoremi'nin denkliği elde edilmiştir. Ayrıca bu teoremlerin çeşitli uygulamalarına yer verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Kompleks ortalama değer teoremi, kompleks Rolle teoremi, Myers teoremi

ABSTRACT

COMPLEX ROLLE AND MEAN VALUE THEOREMS
MSC THESIS
YAĞMUR KAYA
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS

(SUPERVISOR: PROF. DR. NİHAL YILMAZ ÖZGÜR)

BALIKESİR, APRIL 2015

The Mean Value and Rolle Theorems for real-valued functions are the basic theorems for analysis. In this thesis we investigate the Mean Value and Rolle Theorems for complex variabled and complex valued functions.

This thesis consists of four chapters.

In the first section; literature survey related to the Mean Value Theorem and the Rolle Theorem is mentioned.

In the second section; some basic definitions and theorems for real valued and complex valued functions are given.

In the third section; the equivalence between the Mean Value Theorem and the Rolle Theorem for real valued functions is shown. Furthermore, some different types of the Mean Value Theorem are given.

In the last section; the Complex Mean Value and Complex Rolle Theorems are given and the equivalence of these theorems for a complex valued holomorphic function is obtained. Finally, some applications of these theorems are given.

KEYWORDS: Complex mean value theorem, complex Rolle's theorem, Myers' theorem

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET i

ABSTRACT ii

İÇİNDEKİLER iii

ŞEKİL LİSTESİ iv

SEMBOL LİSTESİ v

ÖNSÖZ vi

1. GİRİŞ 1

2. TEMEL KAVRAMLAR 8

2.1 Reel Fonksiyonlar 8
2.2 Kompleks Fonksiyonlar 11

3. REEL FONKSİYONLAR İÇİN ORTALAMA DEĞER TEOREMİ VE ROLLE TEOREMİ 14

3.1 Reel Fonksiyonlar için Ortalama Değer Teoremi ile Rolle Teoremi'nin Denkliği 14
3.2 Ortalama Değer Teoremi'nin Çeşitleri 16

4. KOMPLEKS ORTALAMA DEĞER TEOREMİ VE KOMPLEKS ROLLE TEOREMİ 30

4.1 Kompleks Rolle Teoremi 31
4.2 Kompleks Ortalama Değer Teoremi 34
4.3 Kompleks Fonksiyonlar için Myers Teoremi 41

5. SONUÇ VE ÖNERİLER 47

6. KAYNAKLAR 48

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 3.1: Flett Teoremi'nin geometrik yorumu.................................23

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbb{C}$	: Kompleks düzlem
$\mathbb{R}$	: Reel eksen
$\mathbb{Z}$	: Tamsayılar kümesi
$\overline{z}$	: $z \in \mathbb{C}$ sayısının eşleniği
∂u	: u fonksiyonunun kısmi türevi
$\|b-a\|$	: $b-a$ sayısının modülü
$\langle u,v \rangle$	: u ile v'nin iç çarpımı
$D(z_0,\delta)$	: $\{z \in \mathbb{C} : \|z-z_0\| < \delta\}$ kümesi
$[a,b]$	: $\{a+t(b-a) : t \in [0,1]\}$ kümesi
(a,b)	: $\{a+t(b-a) : t \in (0,1)\}$ kümesi
U_{z_0}	: D_f'de z_0'ın konveks komşuluğu

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasında Kompleks Rolle ve Kompleks Ortalama Değer Teoremleri incelenmiştir. Bu konuda araştırma yapanlara faydalı olmasını diliyorum.

Çalışmalarım boyunca yönlendirmelerini benden esirgemeyen değerli danışman hocam Prof. Dr. Nihal YILMAZ ÖZGÜR'e teşekkür ediyorum.

Lisans eğitimimizden itibaren bizlere göstermiş olduğu değer ve yönlendirmelerden dolayı değerli hocam Prof. Dr. Ali GÜVEN'e teşekkür ediyorum.

Hayatımın her aşamasında sevgi, sabır ve her türlü desteğini yanımda hissettiğim sevgili aileme teşekkür ediyorum.

Sıkıntılı süreçlerimde sabır ve destekleriyle hep yanımda olan sevgili Yusuf BAYRAKTAR, Yeliz CANER ve Elife YIRTICI' ya teşekkür ediyorum.

1. GİRİŞ

Reel bir aralık üzerinde tanımlanmış, reel-değerli türevlenebilir fonksiyonlar için Ortalama Değer Teoremi ve Rolle Teoremi Analiz'deki en temel sonuçlardandır [1]. Bu teoremlerin pek çok çeşitleri ispatlanmıştır.

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $f'(a)$ türevi varsa f fonksiyonunun $[a,b]$ aralığının uç noktalarındaki değerleri arasındaki $f(b)-f(a)$ farkı, $f'(a)$ yardımıyla

$$f(b)-f(a)\approx f'(a)(b-a)$$

şeklinde yaklaşık olarak ifade edilebilir [2]. Burada $b-a$ ne kadar küçükse yaklaşım o kadar iyidir.

$y=f(x)$ tanım kümesinin bir x noktasında türevlenebilen bir fonksiyon ise

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

olduğu bilinir. Burada $\Delta x\to 0$ için $\varepsilon\to 0$ olmak üzere

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)+\varepsilon\approx f'(x)$$

dir. Buradan

$$f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\Delta x$$

ve dolayısıyla

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x$$

olduğundan $\Delta x = b - a$ ve $x = a$ yazılırsa

$$f(a+b-a) \approx f(a) + f'(a)(b-a)$$

$$f(b) - f(a) \approx f'(a)(b-a)$$

yaklaşımı elde edilir. Burada f' a uç noktası yerine a ile b arasındaki uygun bir c noktasında değerlendirilir [2]. Dolayısıyla bu yaklaşım

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

ifadesiyle yer değiştirebilir. f fonksiyonunun a ve b noktaları arasındaki her noktada türevlenebilir olduğu varsayılır [2]. Bu yaklaşımın sonucu analizde Ortalama Değer Teoremi olarak bilinir.

Eğer Ortalama Değer Teoremi'ni sağlayan sürekli $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığının uç noktalarında aynı değeri alıyorsa yani;

$$f(a) = f(b)$$

oluyorsa

$$0 = f(b) - f(b) = f'(c)(b-a)$$

olacağından f' türevinin sıfırları rahatlıkla bulunur. Bu sonuç analizde Rolle Teoremi olarak bilinir.

Kompleks değerli fonksiyonlar düşünüldüğü zaman, fonksiyon kompleks düzlem boyunca her noktada türevlenebilse bile Ortalama Değer Teoremi ve Rolle Teoremi geçerli değildir [1].

Tanım kümesi ve değer kümesi kompleks düzlemde bulunan bir f fonksiyonunun Ortalama Değer Teoremi'ni sağlamadığını görmek için aşağıdaki örnek incelenecektir [1].

z_1 ve z_2 kompleks düzlemde farklı iki nokta olmak üzere

$$f(z) = \exp(i\frac{2z-(z_1+z_2)}{z_2-z_1}\pi)$$

tam fonksiyonu düşünüldüğünde

$$f(z_1) = e^{-i\pi} = -1$$

ve

$$f(z_2) = e^{i\pi} = -1$$

olup f' türevinin

$$f'(z) = \frac{2i\pi}{z_2-z_1}\exp(i\frac{2z-(z_1+z_2)}{z_2-z_1}\pi) \neq 0 \text{ , } z \in \mathbb{C}$$

olduğu açıktır. Böylece

$$f(z_1) = f(z_2) = -1$$

eşitliği kullanılarak

$$f(z_2) - f(z_1) - f'(z)(z_2 - z_1) = (-1) - (-1) - f'(z)(z_2 - z_1)$$

$$= -f'(z)(z_2 - z_1) \neq 0 \text{ , } z \in \mathbb{C}$$

elde edilir. Bu örnek gösterir ki;

$$f(z_2) - f(z_1) - f'(z)(z_2 - z_1) = 0$$

denklemi $\mathbb{C}$ düzleminde herhangi bir çözüme sahip değildir. Böylece kompleks değişkenli ve kompleks değerli olan f fonksiyonunun Ortalama Değer Teoremi'ni sağlamadığı görülür.

Rolle Teoremi de kompleks değişkenli analitik fonksiyonlar için geçerli değildir. Rolle Teoremi'nin bu durumunu görmek için

$$f(z) = e^z - 1$$

fonksiyonu incelenecektir [3]. f fonksiyonu her $k \in \mathbb{Z}$ için $z = 2k\pi i$ noktasında 0 değerini alır. Özellikle $f(0) = f(2\pi i) = 0$ dir. Ancak

$$f'(z) = e^z$$

türevi kompleks düzlemde sıfırlara sahip değildir. Böylece Rolle Teoremi'nin kompleks değişkenli analitik fonksiyonlar için geçerli olmadığı görülür.

Ortalama Değer Teoremi'nin farklı bir çeşidi 1958'de Flett [4] tarafından düşünülmüştür. Eğer Ortalama Değer Teoremi $f'(a) = f'(b)$ hipoteziyle değerlendirilirse;

$$f(c) - f(a) = f'(c)(c - a)$$

olacak şekilde bir $c \in (a, b)$ noktası elde edilir. Bu teorem analizde Flett Teoremi olarak bilinir.

Flett Teoremi de kompleks değişkenli kompleks değerli fonksiyonlar için geçerli değildir. Bunu görmek için

$$f(z) = e^z - z$$

fonksiyonu ele alınacaktır [2]. Bu durumda f fonksiyonu analitik ve

$$f'(z) = e^z - 1$$

dir. Böylece her $k \in \mathbb{Z}$ için

$$f'(2k\pi i) = e^{2k\pi i} - 1 = 0$$

elde edilir. Özellikle $f'(0) = f'(2\pi i)$ elde edilir. Yani $[0, 2\pi i]$ kapalı aralığının uç noktalarında f fonksiyonunun türevi eşittir.

$$f(z) - f(0) = f'(z)z \qquad (1.1)$$

denkleminin şimdi gösterileceği gibi $(0, 2\pi i)$ aralığında çözümü yoktur. Gerçekten yukarıdaki denklem $f(z)$ ve $f(0)$ değerleri kullanılarak düzenlenirse;

$$(e^z - z) - 1 = (e^z - 1)z$$

buradan da

$$(e^z - 1) - (e^z - 1)z = z$$

$$(e^z - 1)(1 - z) = z$$

$$e^z - 1 = \frac{z}{1 - z}$$

ve böylece

$$e^z = \frac{z}{1 - z} + 1 = \frac{1}{1 - z}$$

dolayısıyla

$$e^{-z} = 1 - z$$

elde edilir. $z = iy$ olduğunda

$$e^{-z} = e^{-x}(\cos(-y) + i\sin(-y))$$

$$= e^{0}(\cos y - i\sin y)$$

olacağından

$$e^{-z} = 1 - z = \cos y - i\sin y$$

ve buradan $z = iy$ olduğunu kullanarak

$$1 - iy = \cos y - i\sin y$$

elde edilir. Reel ve sanal kısımlar karşılaştırıldığında $(0, 2\pi)$ aralığında çözümü olmayan

$$\cos y = 1$$

ve

$$\sin y = y$$

sistemini verir. Dolayısıyla (1.1) numaralı denklemin $(0, 2\pi i)$ aralığında çözümü yoktur. Böylece Flett Teoremi'nin kompleks değişkenli fonksiyonlar için geçerli olmadığı görülür.

Çalışmanın ikinci bölümünde tezin diğer bölümleri için kullanılacak olan temel kavramlar verilmiştir. Gerekli olan tanım, teorem, örnek ve uyarılara değinilmiştir.

Çalışmanın üçüncü bölümünde, ikinci bölümde ifade edilmiş olan reel değerli fonksiyonlar için Ortalama Değer Teoremi ile Rolle Teoremi arasındaki denklik gösterilmiştir. Daha sonra Ortalama Değer Teoremi'nin farklı çeşitlerine değinilmiştir. Bunun yanında Myers Teoremi'nin hipotezinde bulunan

$$f'(a) = f'(b)$$

varsayımı kaldırılarak Myers Teoremi'nin genelliği verilmiştir.

Çalışmanın dördüncü bölümünde ise Kompleks Rolle Teoremi ile Kompleks Ortalama Değer Teoremi ispatlanarak tek kompleks değişkenli analitik bir fonksiyon için Rolle Teoremi'nin ve Ortalama Değer Teoremi'nin genellemeleri elde edilmiştir. Daha sonra tek kompleks değişkenli analitik bir fonksiyon için Kompleks Rolle Teoremi ile Kompleks Ortalama Değer Teoremi'nin denkliği ispatlanmıştır. Bu teoremlerin Kompleks Analiz'deki uygulamaları verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezin diğer bölümlerinde kullanılacak olan bazı temel kavramlara değinilecektir. Teoremlerin daha detaylı anlaşılabilmesi için örnekler verilecektir.

2.1 Reel Fonksiyonlar

2.1.1. Teorem (*Ortalama Değer Teoremi*). $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli, (a,b) açık aralığında türevlenebilir olsun. Bu durumda

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

veya

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

olacak şekilde en az bir $c\in(a,b)$ noktası vardır [5].

2.1.2. Örnek. Her $x\in\mathbb{R}$ için $e^x\geq 1+x$ olduğu Ortalama Değer Teoremi kullanılarak aşağıdaki gibi gösterilebilir [5].

$x>0$ olsun.

$$f(x)=e^x$$

şeklinde tanımlanan $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonuna $[0,x]$ aralığında Ortalama Değer Teoremi uygulanırsa,

$$\frac{e^x-e^0}{x-0}=e^{x_0}\ ,\ (0<x_0<\text{x})$$

ve buradan da

$$\frac{e^x-1}{x}>e^0=1$$

$$e^x>x+1$$

bulunur.

$x=0$ ise eşitlik durumu vardır.

$x<0$ ise

$$f(x)=e^x$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonuna $[x,0]$ aralığında Ortalama Değer Teoremi uygulanırsa

$$\frac{f(0)-f(x)}{0-x}=f'(x_0)\ ,\ \ (x<x_0<0)$$

olacağından

$$\frac{1-e^x}{-x}=e^{x_0}<e^0=1$$

olur. $-x>0$ olduğundan

$$1-e^x<-x$$

dolayısıyla

$$e^x>1+x$$

olduğu elde edilir. Buradan da her $x\in\mathbb{R}$ için $e^x\geq 1+x$ olduğu görülür.

2.1.3. Teorem (*Rolle Teoremi*). $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli, (a,b) açık aralığında türevlenebilir ve $f(a)=f(b)$ olsun. Bu durumda

$$f'(c)=0$$

olacak şekilde en az bir $c\in(a,b)$ noktası vardır [5].

2.1.4. Örnek. $7x^6-8x^3+1=0$ denkleminin $(0,1)$ açık aralığında bir köke sahip olduğu Rolle Teoremi yardımıyla aşağıdaki şekilde görülebilir.

$f(x)=x^7-2x^4+x$ fonksiyonu $[0,1]$ kapalı aralığında sürekli ve $(0,1)$ açık aralığında türevlenebilirdir. Dikkat edilirse

$$f(0)=f(1)=0$$

dir. O halde Rolle Teoremi gereği en az bir $c\in(0,1)$ için $f'(c)=0$ dir.

$$f'(x)=7x^6-8x^3+1$$

olduğundan $7x^6-8x^3+1=0$ denkleminin $(0,1)$ aralığında en az bir kökü vardır.

2.1.5. Tanım. $K\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ olsun. Eğer K kümesinin herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçası K kümesinin içinde kalıyorsa, K kümesine bir konveks küme denir [5].

2.1.6. Not. x_1 ve x_2 noktalarını birleştiren doğru parçası

$$[x_1,x_2]=\{x:x=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2,\ \lambda\in[0,1]\}$$

şeklinde gösterilebileceğinden K kümesinin konveksliği;

$$K \text{ konvekstir} \Leftrightarrow \text{her } x_1,x_2\in K \text{ ve her } \lambda\in[0,1] \text{ için } \lambda x_1+(1-\lambda)x_2\in K$$

ile ifade edilebilir [5].

2.1.7. Teorem (*Ara Değer Teoremi*). $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olsun. $[a,b]$ kapalı aralığında $x_1 < x_2$ ve $f(x_1)\neq f(x_2)$ olacak şekilde herhangi iki x_1, x_2 noktası verildiğinde f fonksiyonu (x_1, x_2) aralığında $f(x_1)$ ile $f(x_2)$ arasındaki her değeri en az bir defa alır [5].

2.2 Kompleks Fonksiyonlar

2.2.1. Tanım. Bir f fonksiyonu bir S kümesi üzerinde tanımlı ve $z_0 \in S\,(z_0 \in \mathbb{C}$ ya da $z_0 = \infty)$ noktası S'nin bir yığılma noktası olsun. Eğer $f(z_0)\neq\infty$ ve $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$ ise f, z_0'da süreklidir, denir [6].

2.2.2. Önerme. Bir $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ fonksiyonunun $z = z_0$'da sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul $u(x,y)$, $v(x,y)$ fonksiyonlarının $z_0 = (x_0, y_0)$ noktasında sürekli olmalarıdır [6].

2.2.3. Tanım. f fonksiyonu bir z_0 noktasının bir komşuluğunda tanımlı olsun. Eğer,

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

varsa, f fonksiyonu z_0 noktasında diferansiyellenebilir denir. Bu limit değeri $f'(z_0)$ ile gösterilir ve $f'(z_0)$ sayısına f'nin z_0'daki türevi denir. Yani $f'(z_0)$ değeri,

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

olarak tanımlanır [6].

2.2.4. Önerme. $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ fonksiyonu z noktasında diferansiyellenebilirse

$$f'(z)=u_x+iv_x=-iu_y+v_y$$

dir. Yani; u ve v fonksiyonlarının $z=(x,y)$ noktasında kısmi türevleri vardır ve bu türevler Cauchy – Riemann eşitlikleri diye adlandırılan $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$ eşitliklerini gerçekler [6].

2.2.5. Teorem. $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ fonksiyonunun bir $z_0=x_0+iy_0$ noktasında diferansiyellenebilmesi ve f' türevinin sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul u_x, v_y, u_y, v_x kısmi türevlerinin sürekli olması ve bunların Cauchy – Riemann eşitliklerini gerçeklemesidir [6].

2.2.6. Tanım. a) Bir f kompleks fonksiyonu bir z_0 noktasının belli bir $D(z_0,\delta)$ komşuluğundaki bütün noktalarda diferansiyellenebiliyorsa f, z_0 'da analitiktir, denir.

b) Eğer bir f kompleks fonksiyonu bir S kümesinin bütün noktalarında analitikse, f, S üzerinde analitiktir, denir.

c) Bir f fonksiyonu $\mathbb{C}$'nin tüm noktalarında analitikse, f'ye tam fonksiyon denir [6].

2.2.7. Teorem. $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ olsun. f 'nin bir $z_0=x_0+iy_0$ noktasında analitik ve f' türevinin sürekli olması için gerekli ve yeterli bir koşul, $z_0=(x_0,y_0)$ noktasının bir $D(z_0,\delta)$ komşuluğunun bütün noktalarında, u_x, u_y, v_x, v_y kısmi türevlerinin var, sürekli ve bu komşulukta $u_x=v_y$, $v_x=-u_y$ Cauchy – Riemann eşitliklerinin gerçeklenmesidir. Eğer f fonksiyonu analitikse,

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$$

$$= v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0)$$

dir [6].

2.2.8. Tanım. $\mathbb{R}^2$ düzlemi, $\mathbb{C}$ karmaşık düzlemiyle özdeş olarak düşünüldüğünde, x ve y gerçel değişkenleri, $z = x + iy$, $\overline{z} = x - iy$ eşitliklerinden yararlanarak, eşlenik koordinatlar diye adlandırılacak olan z ve $\overline{z}$ ile değiştirilebilir. Burada

$$x = \frac{z + \overline{z}}{2}, \; y = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

dir. Bu nedenle iki gerçel değişkenli bir $g(x, y)$ fonksiyonu z ve $\overline{z}$ karmaşık değişkenlerinin fonksiyonu gibi düşünülebilir. Dolayısıyla z ve $\overline{z}$ e göre kısmi türevlerden söz edilebilir. Böylece, eğer $g(x, y)$'nin g_x ve g_y kısmi türevleri sürekli iseler, biçimsel olarak;

$$\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}$$

ve diğer yandan diferansiyel formülünden

$$dg = g_x dx + g_y dy$$

dir. $x(t)$ ve $y(t)$ gerçel t değişkeninin diferansiyellenebilir fonksiyonları olmak üzere $z(t) = x(t) + iy(t)$ ise, $g(x, y)$ fonksiyonu için,

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

olarak tanımlanır [6].

3. REEL FONKSİYONLAR İÇİN ORTALAMA DEĞER TEOREMİ VE ROLLE TEOREMİ

Çalışmanın bu bölümünde, ikinci bölümde ifade edilmiş olan reel değerli fonksiyonlar için Ortalama Değer Teoremi ile Rolle Teoremi arasındaki denklik [1] numaralı kaynak kullanılarak gösterilecektir. Daha sonra [2, 7] numaralı kaynaklar kullanılarak Ortalama Değer Teoremi'nin farklı çeşitlerinin nasıl ifade ve ispat edilebileceği gösterilecektir. Bunun yanında [2] numaralı kaynak yardımıyla Myers Teoremi'nin hipotezinde bulunan

$$f'(a) = f'(b)$$

varsayımı kaldırılarak Myers Teoremi'nin genelliği verilecektir.

3.1 Reel Fonksiyonlar için Ortalama Değer Teoremi ile Rolle Teoremi'nin Denkliği

[1] de, reel değerli fonksiyonlar için Ortalama Değer Teoremi ile Rolle Teoremi arasındaki denklik ispatlanmıştır.

3.1.1. Teorem. $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli, (a,b) açık aralığında türevlenebilir olsun. f fonksiyonu için Ortalama Değer Teoremi ile Rolle Teoremi denktir [1].

İspat. Öncelikle Ortalama Değer Teoremi sağlanıyorsa Rolle Teoremi'nin sağlanacağı gösterilecektir. f fonksiyonu Rolle Teoremi'nin hipotezini sağlasın.

Ortalama Değer Teoremi'nden $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli, (a,b) açık aralığında türevlenebilir bir $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

olacak şekilde en az bir $c\in(a,b)$ sayısı vardır. Rolle Teoremi'nin hipotezi gereği $f(a)=f(b)$ ise

$$f(b)-f(b)=f'(c)(b-a)$$

olacağından $f'(c)=0$ olacak şekilde en az bir $c\in(a,b)$ sayısı vardır. Böylece Ortalama Değer Teoremi sağlanıyorsa Rolle Teoremi sağlanır.

Şimdi Rolle Teoremi sağlandığı zaman Ortalama Değer Teoremi'nin sağlanacağı gösterilecektir. f fonksiyonu Ortalama Değer Teoremi'nin hipotezini sağlasın. Aşağıdaki şekilde bir

$$g(x)=\begin{vmatrix} f(x) & f(a) & f(b) \\ x & a & b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(a-b)f(x)-(x-b)f(a)+(x-a)f(b)$$

fonksiyonu tanımlansın. $g(x)$ fonksiyonu incelenecek olursa;

fonksiyon $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli, (a,b) açık aralığında türevlenebilir ve $g(a)=g(b)=0$ şartını sağlayan reel bir fonksiyondur. Bu durumda Rolle Teoremi gereği en az bir $c\in(a,b)$ noktası için $g'(c)=0$ olur. $g(x)$ fonksiyonunun türevi

$$g'(x)=(a-b)f'(x)-f(a)+f(b)$$

dir. O halde $g'(c)=0$ olacağından

$$g'(c)=(a-b)f'(c)-f(a)+f(b)=0$$

dolayısıyla

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

veya

$$f(b) - f(a) = (a - b) f'(c)$$

elde edilir. Bu da bize reel değerli fonksiyonlar için Ortalama Değer Teoremi ile Rolle Teoremi'nin denkliğini gösterir. □

3.2 Ortalama Değer Teoremi'nin Çeşitleri

Ortalama Değer Teoremi'nin bilinen başka çeşitleri de vardır. [7] numaralı kaynakta, $f(b) - f(a)$, $f(b) - f(c)$, $f(c) - f(a)$ değerlerinden birini pay olarak ve $(b - a)$, $(b - c)$, $(c - a)$ değerlerinden birini payda olarak kullanarak dokuz farklı olası bölüm elde edilmiştir. Bu bölümler incelendiğinde aşağıdaki teoremler elde edilir.

3.2.1. Teorem. f, $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli, (a,b) açık aralığında türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$f'(c)(c - a) = f(b) - f(c)$$

veya

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(c)}{c - a}$$

olacak şekilde bir $c \in (a,b)$ noktası vardır [7].

İspat. $g(x) = xf(b) - (x-a)f(x)$ olarak tanımlansın. g fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli, (a,b) açık aralığında türevlenebilir ve $g(a) = g(b) = af(b)$ eşitliğini sağlayan reel bir fonksiyondur. O halde g fonksiyonu Rolle Teoremi'nin hipotezlerini sağlar. Bu durumda Rolle Teoremi gereği (a,b) açık aralığında $g'(c) = 0$ olacak şekilde en az bir c noktası vardır. Dolayısıyla $g(x)$ fonksiyonunun türevi alınırsa

$$g'(x) = f(b) - f(x) - (x-a)f'(x)$$

bulunur. En az bir $x = c$ için $g'(c) = 0$ olacağından

$$f(b) - f(c) - (c-a)f'(c) = 0$$

veya

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(c)}{c-a}$$

elde edilir. □

3.2.2. Teorem. f, $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli, (a,b) açık aralığında türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$f'(c)(b-c) = f(c) - f(a)$$

veya

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{b-c}$$

olacak şekilde bir $c \in (a,b)$ noktası vardır [7].

İspat. $g(x) = xf(a) + (b-x)f(x)$ fonksiyonu yardımıyla Teorem 3.2.1'in ispatına benzer şekilde elde edilir. □

3.2.3. Teorem. f, türevlenebilir bir fonksiyon, f' $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde sürekli ve

$$[f(b)-f(a)][f(b)-f(a)-(b-a)f'(b)] < 0$$

ise

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{c-a}$$

olacak şekilde bir $c \in (a,b)$ noktası vardır [7].

İspat. $g(x) = f(b) - f(a) - (x-a)f'(x)$ olarak tanımlansın.

$$g(a) = f(b) - f(a)$$

ve

$$g(b) = f(b) - f(a) - (b-a)f'(b)$$

dir. Hipotezden

$$[f(b)-f(a)][f(b)-f(a)-(b-a)f'(b)] < 0$$

olduğundan

$$g(a)g(b) < 0$$

dir. Yani $g(a)$ ile $g(b)$ zıt işaretlidirler. $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu için $a<b$ ve $g(a)\neq g(b)$ olduğundan Ara Değer Teoremi gereği g fonksiyonu $g(a)$ ile $g(b)$ değerleri arasındaki her değeri en az bir defa alır. $g(a)$ ile $g(b)$ zıt işaretli olduğundan 0 bu aralıktadır ve $g(c)=0$ olacak şekilde bir $c\in(a,b)$ vardır. Yani

$$g(c)=f(b)-f(a)-(c-a)f'(c)=0$$

veya

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{c-a}$$

elde edilir. □

Teorem 3.2.3'ün geometrik yorumu Sonuç 3.2.5 ile gösterilmiştir. Sonucun daha iyi anlaşılabilmesi için öncelikle Tanım 3.2.4 verilecektir.

3.2.4. Tanım. L_1 ve L_2 doğrularının eğimleri sırasıyla m_1 ve m_2 olsun. Eğer $|m_1|>|m_2|$ ise L_1 doğrusu L_2 doğrusundan daha diktir denir [7].

3.2.5. Sonuç. $(b,f(b))$ noktasındaki teğet doğrusu, $(a,f(a))$ noktası ile $(b,f(b))$ noktasını birleştiren doğrudan daha diktir. Üstelik iki doğrunun eğimleri aynı işaretlidir [7].

3.2.6. Teorem. f, türevlenebilir bir fonksiyon, f' $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde sürekli ve

$$[f(b)-f(a)][f(b)-f(a)-(b-a)f'(a)]<0$$

ise

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-c}$$

olacak şekilde bir $c\in(a,b)$ noktası vardır [7].

İspat. $g(x)=f(b)-f(a)-(b-x)f'(x)$ fonksiyonu yardımıyla Teorem 3.2.3'in ispatına benzer şekilde elde edilir. □

3.2.7. Teorem. f, türevlenebilir bir fonksiyon, f' $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde sürekli ve

$$f'(a)[f(b)-f(a)-(b-a)f'(b)]>0$$

ise

$$f'(c)=\frac{f(c)-f(a)}{b-a}$$

olacak şekilde bir $c\in(a,b)$ noktası vardır [7].

İspat. $g(x)=f(x)-f(a)-(b-a)f'(x)$ fonksiyonu yardımıyla Teorem 3.2.3'in ispatına benzer şekilde elde edilir. □

3.2.8. Teorem. f, türevlenebilir bir fonksiyon, f' $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde sürekli ve

$$f'(b)[f(b)-f(a)-(b-a)f'(a)]>0$$

ise

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(c)}{b-a}$$

olacak şekilde bir $c\in(a,b)$ noktası vardır [7].

İspat. $g(x)=f(b)-f(x)-(b-a)f'(x)$ fonksiyonu yardımıyla Teorem 3.2.3'in ispatına benzer şekilde elde edilir. □

1958'de Flett [4] Ortalama Değer Teoremi'nin aşağıdaki çeşidini ispatladı.

3.2.9. Teorem (*Flett Teoremi*). f fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde türevlenebilir ve $f'(a)=f'(b)$ olsun. Bu durumda

$$f(c)-f(a)=f'(c)(c-a)$$

veya

$$f'(c)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}$$

olacak şekilde bir $c\in(a,b)$ noktası vardır [4].

İspat. $f'(a)=f'(b)=0$ varsayabiliriz. Çünkü $f'(a)=f'(b)\neq 0$ ise $f(x)-xf'(a)$ fonksiyonu ile aynı hipotez elde edilir.

$$\psi(a)=f'(a)=0,\ \ \psi(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a},\ \ (a<x\leq b)$$

bağıntılarıyla tanımlanan $\psi(x)$ fonksiyonunu göz önüne alalım.

ψ fonksiyonunun $a\leq x\leq b$ kapalı aralığında sürekli ve $a<x\leq b$ aralığında türevlenebilir olduğu açıktır. $\psi(x)$ fonksiyonunun türevi

$$\psi'(x)=-\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}+\frac{f'(x)}{x-a},\ \ a<x\leq b$$

dir. Teoremi ispatlamak için en az bir $c\in(a,b)$ için $\psi'(c)=0$ olduğunu göstermek yeterlidir. Eğer $\psi(b)=0$ ise Rolle Teoremi'nin bir sonucudur. $\psi(b)>0$ varsayalım.

$$\psi'(b)=-\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)^2}+\frac{f'(b)}{b-a}$$

ve hipotez gereğince

$$f'(b)=0$$

olduğundan

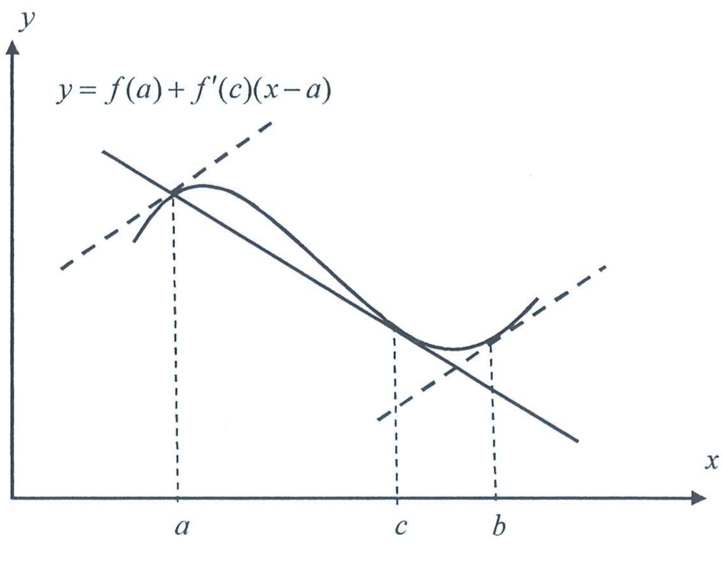
$$\psi(b)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

değeri kullanılarak

$$\psi'(b)=-\frac{\psi(b)}{b-a} \tag{3.1}$$

elde edilir. Eğer $\psi(b)>0$ ise (3.1) den $\psi'(b)<0$ elde edilir. O halde $\psi(x_1)>\psi(b)$ olacak şekilde bir $x_1 \in (a,b)$ vardır. ψ fonksiyonu $[a,x_1]$ kapalı aralığında sürekli ve $\psi(a)<\psi(b)<\psi(x_1)$ olduğundan $\psi(x_2)=\psi(b)$ olacak şekilde $x_2 \in (a,x_1)$ vardır. Böylece istenen sonuç ψ fonksiyonuna (x_2,b) aralığında Rolle Teoremi uygulanarak elde edilir. $\psi(b)<0$ ise aynı yol izlenerek ispat tamamlanır. □

Flett Teoremi'nin geometrik yorumu; eğer $y=f(x)$ eğrisi $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli bir şekilde değişen teğetlere sahip ve $x=a$ ile $x=b$ deki teğetleri paralelse, teğeti a noktasından geçen bir c ara noktası vardır.



Şekil 3.1: Flett Teoremi'nin geometrik yorumu.

Reel değerli fonksiyonlar için Flett Teoremi'nin hipotezinde bulunan $f'(a)=f'(b)$ koşulu kaldırılmıştır [8]. Sahoo ve Reidel Teoremi olarak bilinen bu teoremi inceleyelim.

3.2.10. Teorem (*Sahoo ve Reidel Teoremi*). $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde türevlenebilir olsun. Bu durumda

$$f(c)-f(a)=f'(c)(c-a)-\frac{1}{2}\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}(c-a)^2$$

olacak şekilde bir $c\in(a,b)$ noktası vardır [8].

Flett Teoremi'nin bir çeşidi olan aşağıdaki sonuç Myers [7] tarafından ispatlanmıştır.

3.2.11. Teorem (*Myers Teoremi*). $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde türevlenebilir ve $f'(a)=f'(b)$ olsun. Bu durumda

$$f(b)-f(c)=f'(c)(b-c)$$

veya

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}$$

olacak şekilde bir $c\in(a,b)$ noktası vardır [7].

Şimdi reel değerli fonksiyonlar için Myers Teoremi'nin hipotezinde bulunan $f'(a)=f'(b)$ koşulu kaldırıldığında elde edilecek olan sonuçlar incelenecektir. Sonrasında $f'(a)=f'(b)$ koşulu eklendiğinde bu sonuçların Myers Teoremi'ne indirgendiği gösterilecektir.

3.2.12. Teorem. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$f(b)-f(c)=f'(c)(b-c)+\frac{1}{2}\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}(b-c)^2$$

olacak şekilde bir $c\in(a,b)$ noktası vardır [2].

İspat .

$$h(x)=f(x)-\frac{1}{2}\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}(x-a)^2 \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlanan $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ yardımcı fonksiyonunu alalım. Bu durumda h $[a,b]$ üzerinde türevlenebilirdir ve

$$h'(x)=f'(x)-\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}(x-a) \tag{3.3}$$

dir. O halde

$$h'(a)=h'(b)=f'(a)$$

olduğu görülür. Myers Teoremi h fonksiyonuna uygulanırsa, bir $c\in(a,b)$ için

$$h(b)-h(c)=h'(c)(b-c) \tag{3.4}$$

eşitliğinin sağlandığı elde edilir. (3.2) ve (3.3) numaralı denklemler yardımıyla

$$h(b)=f(b)-\frac{1}{2}\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}(b-a)^2$$

$$h(c)=f(c)-\frac{1}{2}\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}(c-a)^2$$

ve

$$h'(c) = f'(c) - \frac{f'(b) - f'(a)}{b - a}(c - a)$$

olduğu görülür. Bu değerleri (3.4) de kullanarak

$$[f(b) - \frac{1}{2}\frac{f'(b) - f'(a)}{b - a}(b - a)^2] - [f(c) - \frac{1}{2}\frac{f'(b) - f'(a)}{b - a}(c - a)^2]$$

$$= [f'(c) - \frac{f'(b) - f'(a)}{b - a}(c - a)](b - c)$$

elde edilir. Buradan da

$$f(b) - f(c) = f'(c)(b - c) - \frac{f'(b) - f'(a)}{b - a}(c - a)(b - c)$$

$$+\frac{1}{2}\frac{f'(b) - f'(a)}{b - a}(b - a)^2 - \frac{1}{2}\frac{f'(b) - f'(a)}{b - a}(c - a)^2$$

dir. Dolayısıyla

$$f(b) - f(c) = f'(c)(b - c)$$

$$+\frac{1}{2}\frac{f'(b) - f'(a)}{b - a}[-2bc + 2c^2 + 2ab - 2ac - c^2 + 2ac - a^2 + b^2 - 2ab + a^2]$$

olduğundan

$$f(b)-f(c)=f'(c)(b-c)+\frac{1}{2}\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}(b-c)^2$$

elde edilir. □

3.2.13. Uyarı.

1) Eğer Myers Teoremi'nin genelleşmiş durumu olan

$$f(b)-f(c)=f'(c)(b-c)+\frac{1}{2}\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}(b-c)^2$$

sonucuna $f'(a)=f'(b)$ hipotezi eklenirse

$$f(b)-f(c)=f'(c)(b-c)+\frac{1}{2}\frac{f'(b)-f'(b)}{b-a}(b-c)^2$$

olacağından

$$f(b)-f(c)=f'(c)(b-c)$$

elde edilir. Yani $f'(a)=f'(b)$ olduğu durumda Teorem 3.2.12 Myers Teoremi'ne indirgenir [2].

2) Teorem 3.2.12'deki (3.2) numaralı $h(x)$ fonksiyonu

$$h(x) = f(x) - \frac{1}{2}\frac{f'(b) - f'(a)}{b-a}(x-b)^2$$

fonksiyonu ile yer değiştirirse Teorem 3.2.12 yine sağlanır. Bu da h fonksiyonunun tek olmadığını gösterir. Böylece başka bir yardımcı h fonksiyonu kullanılarak aynı sonuçlar bulunabilir [2].

Şimdi Ortalama Değer Teoremi'nin aşağıdaki sonuçlarına değinilecektir.

3.2.14. Sonuç. $g : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu bir A aralığı üzerinde türevlenebilir ve her $x \in A$ için $g'(x) = 0$ ise bir $k \in \mathbb{R}$ sabiti için $g(x) = k$ dır [9].

İspat. $x, y \in A$ için $x < y$ olduğunu varsayalım. $[x, y]$ aralığı üzerindeki g fonksiyonuna Ortalama Değer Teoremi uygulanırsa en az bir $c \in A$ noktası için

$$g'(c) = \frac{g(y) - g(x)}{y - x}$$

dir. Hipotezden $g'(c) = 0$ ise

$$g(y) = g(x)$$

elde edilir. k değeri bu ortak değere eşit alınabilir. Çünkü x ve y keyfidir. Dolayısıyla her $x \in A$ için $g(x) = k$ dir. □

3.2.15. Sonuç. f ve g bir A aralığı üzerinde türevlenebilir fonksiyonlar ve her $x \in A$ için $f'(x) = g'(x)$ olsun. Bu durumda bir $k \in \mathbb{R}$ sabiti için $f(x) = g(x) + k$ dir [9].

İspat. $h(x) = f(x) - g(x)$ fonksiyonu yardımıyla Teorem 3.2.14'un ispatına benzer şekilde elde edilir. □

4. KOMPLEKS ORTALAMA DEĞER TEOREMİ VE KOMPLEKS ROLLE TEOREMİ

Tezin bu bölümünde [3] numaralı kaynak kullanılarak kompleks Ortalama Değer Teoremi ve kompleks Rolle Teoremi ispatlanarak tek kompleks değişkenli analitik bir fonksiyon için Rolle Teoremi'nin ve Ortalama Değer Teoremi'nin bir genelliği sunulacaktır. Daha sonra [2] numaralı kaynak kullanılarak tek kompleks değişkenli analitik bir fonksiyon için Kompleks Rolle Teoremi ile Kompleks Ortalama Değer Teoremi'nin denkliği ispatlanacaktır. Kompleks Ortalama Değer Teoremi'nin ve Kompleks Rolle Teoremi'nin kompleks analizde ifade ettiği temel sonuçlar incelenecektir. Verilen bu sonuçların uygulamalarından bahsedilecektir.

Öncelikle tek kompleks değişkenli analitik bir fonksiyon için Kompleks Rolle Teoremi'nin ve Kompleks Ortalama Değer Teoremi'nin ispatı yapılırken kullanılacak olan aralık kavramı aşağıdaki şekilde tanımlanacaktır [2, 3].

$\mathbb{C}$ düzlemindeki birbirinden farklı a ve b noktaları için;

$$[a,b] := \{a + t(b-a) : t \in [0,1]\}$$

kümesi ile tanımlansın. Benzer şekilde,

$\mathbb{C}$ düzlemindeki birbirinden farklı a ve b noktaları için;

$$(a,b) := \{a + t(b-a) : t \in (0,1)\}$$

kümesi ile tanımlansın.

4.1 Kompleks Rolle Teoremi

4.1.1. Teorem. f, $\mathbb{C}$'nin açık konveks bir alt kümesi olan D_f üzerinde tanımlanmış analitik bir fonksiyon olsun. a ile b D_f'de farklı iki nokta ve $f(a)=f(b)=0$ olsun. Bu durumda

$$\operatorname{Re}(f'(z_1))=0$$

ve

$$\operatorname{Im}(f'(z_2))=0$$

olacak şekilde z_1, z_2 $\in(a,b)$ vardır [3].

İspat. Her $z\in D_f$ için $a_1=\operatorname{Re}(a)$, $a_2=\operatorname{Im}(a)$, $b_1=\operatorname{Re}(b)$, $b_2=\operatorname{Im}(b)$, $u(z)=\operatorname{Re}(f(z))$, $v(z)=\operatorname{Im}(f(z))$ olsun. Her $t\in[0,1]$ için

$$\phi(t)=(b_1-a_1)u(a+t(b-a))+(b_2-a_2)v(a+t(b-a))$$

fonksiyonu tanımlansın. O halde hipotezden $f(a)=f(b)=0$ olduğundan

$$f(a)=u(a)+iv(a)=0,$$

$$u(a)=v(a)=0$$

ve

$$f(b)=u(b)+iv(b)=0,$$

$$u(b)=v(b)=0$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\phi(0)=(b_1-a_1)u(a)+(b_2-a_2)v(a),$$

$$\phi(1)=(b_1-a_1)u(b)+(b_2-a_2)v(b)$$

ve dolayısıyla

$$\phi(0)=0 \text{ ve } \phi(1)=0$$

elde edilir. $\phi(0)=\phi(1)=0$ ve ϕ fonksiyonu $[0,1]$ kapalı aralığında sürekli, $(0,1)$ açık aralığında türevlenebilir olduğundan Rolle Teoremi gereği

$$\phi'(t_1)=0$$

olacak şekilde $t_1 \in (0,1)$ vardır. $z_1 = a+t_1(b-a)$ olsun. O halde

$$z = a+t(b-a) = a_1 + ia_2 + t(b_1+ib_2-a_1-ia_2)$$

$$= a_1 + t(b_1-a_1) + i(a_2+t(b_2-a_2))$$

$$= x(t)+iy(t),$$

$$z_1 = a+t_1(b-a) = a_1+ia_2+t_1(b_1+ib_2-a_1-ia_2)$$

$$= a_1+t_1(b_1-a_1)+i(a_2+t_1(b_2-a_2))$$

$$= x(t_1)+iy(t_1)$$

elde edilir ve bu eşitlik kullanılarak

$$0=\phi'(t)=(b_1-a_1)[\frac{\partial u(z)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u(z)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}]$$

$$+(b_2-a_2)[\frac{\partial v(z)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial v(z)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}]$$

ve dolayısıyla

$$0=\phi'(t_1)=(b_1-a_1)[\frac{\partial u}{\partial x}(z_1)(b_1-a_1)+\frac{\partial u}{\partial y}(z_1)(b_2-a_2)]$$

$$+(b_2-a_2)[\frac{\partial v}{\partial x}(z_1)(b_1-a_1)+\frac{\partial v}{\partial y}(z_1)(b_2-a_2)]$$

elde edilir. Cauchy – Riemann eşitlikleri gereğince

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \text{ ve } \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

olduğundan

$$0=\frac{\partial u}{\partial x}(z_1)[(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2]$$

elde edilir. Böylece

$$(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2\neq 0$$

olduğu bilindiğinden

$$\operatorname{Re}(f'(z_1))=\frac{\partial u}{\partial x}(z_1)=0 \tag{4.1}$$

bulunur. Şimdi $g=-if$ olduğunda f fonksiyonu ile g fonksiyonunun türevlerinin reel ve sanal kısımları arasındaki ilişki incelenecektir.

$f(z)=u(z)+iv(z)$ dir. $g(z)=u_1(z)+iv_1(z)$ olsun. Dolayısıyla

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

ve

$$g'(z)=\frac{\partial u_1}{\partial x}+i\frac{\partial v_1}{\partial x}$$

dir. $g=-if$ ise $g'=-if'$ dir. Dolayısıyla

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}+i\frac{\partial v_1}{\partial x}=-i(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x})=\frac{\partial v}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial x}$$

ve böylece

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial x}$$

elde edilir.

Elde edilen bu denklem sistemleri yorumlanırsa;

g fonksiyonunun türevinin reel kısmı f fonksiyonunun türevinin sanal kısmına eşittir. Aynı şekilde g fonksiyonunun türevinin sanal kısmı f fonksiyonunun türevinin reel kısmının negatifine eşittir. Bu sonuç (4.1) numaralı denklem ile birlikte düşünülürse ve Cauchy-Riemann eşitliklerinin

$$\frac{\partial v}{\partial x}(z_2) = -\frac{\partial u}{\partial y}(z_2)$$

kısmı dikkate alınırsa

$$0 = \mathrm{Re}(g'(z_2)) = \frac{\partial v}{\partial x}(z_2) = -\frac{\partial u}{\partial y}(z_2) = \mathrm{Im}(f'(z_2))$$

olacak şekilde bir $z_2 \in (a,b)$ olduğu elde edilir. □

Kompleks Rolle Teoremi'nin önemli bir uygulaması Ortalama Değer Teoremi'nin genelleştirilmiş halidir [3].

4.2 Kompleks Ortalama Değer Teoremi

4.2.1. Teorem. f, $\mathbb{C}$'nin açık konveks bir alt kümesi olan D_f üzerinde tanımlanmış analitik bir fonksiyon ve a ile b D_f'de farklı iki nokta olsun. Bu durumda

$$\mathrm{Re}(f'(z_1)) = \mathrm{Re}(\frac{f(b)-f(a)}{b-a})$$

ve

$$\mathrm{Im}(f'(z_2)) = \mathrm{Im}(\frac{f(b)-f(a)}{b-a})$$

olacak şekilde z_1, z_2 $\in (a,b)$ vardır [3].

İspat. Her $z \in D_f$ için

$$g(z) = f(z) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(z - a) \qquad (4.2)$$

yardımcı fonksiyonu alınsın.

$$g(a) = g(b) = 0$$

dir. g, $\mathbb{C}$'nin açık konveks bir alt kümesi olan D_f üzerinde tanımlanmış analitik bir fonksiyon, a ile b D_f'de farklı iki nokta ve $g(a) = g(b) = 0$ olduğundan Kompleks Rolle Teoremi gereği

$$\operatorname{Re}(g'(z_1)) = 0$$

ve

$$\operatorname{Im}(g'(z_2)) = 0$$

olacak şekilde z_1, z_2 $\in (a,b)$ vardır. (4.2) numaralı fonksiyon yardımıyla her $z \in D_f$ için

$$g'(z) = f'(z) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

dir. Böylece

$$0 = \operatorname{Re}(g'(z_1)) = \operatorname{Re}(f'(z_1)) - \operatorname{Re}(\frac{f(b) - f(a)}{b - a})$$

ve

$$0 = \operatorname{Im}(g'(z_2)) = \operatorname{Im}(f'(z_2)) - \operatorname{Im}(\frac{f(b) - f(a)}{b - a})$$

dir. Dolayısıyla

$$\operatorname{Re}(f'(z_1)) = \operatorname{Re}(\frac{f(b) - f(a)}{b - a})$$

ve

$$\mathrm{Im}(f'(z_2)) = \mathrm{Im}(\frac{f(b)-f(a)}{b-a})$$

elde edilir. □

Kompleks Ortalama Değer Teoremi yardımıyla kompleks analizin Teorem 4.2.3 ile verilen temel sonucu ispatlanabilir. Bunun için aşağıdaki yardımcı teorem kullanılacaktır.

4.2.2. Yardımcı Teorem. $\Lambda \neq \varnothing$ bağlantılı bir topolojik uzay, S bir küme ve $f:\Lambda \to S$ bir dönüşüm olsun. Her $t_0 \in \Lambda$ için f fonksiyonunun t_0 'ın bir komşuluğuna kısıtlaması sabit ise f fonksiyonu Λ üzerinde sabittir [10].

4.2.3. Teorem. f, $\mathbb{C}$'nin açık bağlantılı bir alt kümesi olan D_f üzerinde tanımlanmış, her $z \in D_f$ için $f'(z)=0$ olacak şekilde analitik bir fonksiyon olsun. Bu durumda f sabittir [3].

İspat. D_f'de keyfi bir z_0 noktası alınsın. U_{z_0}, D_f'de bulunan z_0'ın konveks komşuluğu olsun.

$z \neq z_0$ özelliğinde bir $z \in U_{z_0}$ noktası alalım. Teorem 4.2.1'den

$$\mathrm{Re}(f'(z_1)) = \mathrm{Re}(\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}) = 0$$

ve

$$\mathrm{Im}(f'(z_2)) = \mathrm{Im}(\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}) = 0$$

olacak şekilde z_1, $z_2 \in (z_0, z)$ sayıları vardır. Dikkat edilirse

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

fonksiyonunun hem reel hem de sanal kısmı sıfırdır. Dolayısıyla

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=0$$

elde edilir. Böylece $f(z)=f(z_0)$ dir. Dolayısıyla f U_{z_0} 'da sabittir. Yardımcı Teorem 4.2.2'den f fonksiyonu z_0 'ın komşuluğunda sabitse f fonksiyonu D_f üzerinde sabittir. □

Kompleks düzlemdeki Ortalama Değer Teoremi ile Rolle Teoremi arasındaki denklik Çakmak ve Tiryaki [2] tarafından ispatlanmıştır.

4.2.4. Teorem. $\mathbb{C}$ 'nin açık konveks bir alt kümesi olan D_f üzerinde tanımlanmış analitik bir f fonksiyonu için Kompleks Ortalama Değer Teoremi ile Kompleks Rolle Teoremi birbirine denktir [2].

İspat. Öncelikle Kompleks Ortalama Değer Teoremi sağlanıyorsa Kompleks Rolle Teoremi'nin sağlanacağı gösterilecektir. f fonksiyonu Kompleks Rolle Teoremi'nin hipotezini sağlasın. Kompleks Ortalama Değer Teoremi'nden $\mathbb{C}$ 'nin açık konveks bir alt kümesi olan D_f üzerinde tanımlanmış analitik bir f fonksiyonu için

$$\mathrm{Re}(f'(z_1))=\mathrm{Re}\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right) \tag{4.3}$$

ve

$$\mathrm{Im}(f'(z_2)) = \mathrm{Im}(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}) \tag{4.4}$$

olacak şekilde z_1 , z_2 $\in (a,b)$ sayıları vardır. Kompleks Rolle Teoremi'nin hipotezinden $f(a) = f(b) = 0$ olduğundan (4.3) ve (4.4) gereğince

$$\mathrm{Re}(f'(z_1)) = 0$$

ve

$$\mathrm{Im}(f'(z_2)) = 0$$

olacak şekilde z_1 , z_2 $\in (a,b)$ olduğu görülür. Yani Kompleks Ortalama Değer Teoremi sağlanıyorsa Kompleks Rolle Teoremi sağlanır.

Şimdi Kompleks Rolle Teoremi sağlandığında Kompleks Ortalama Değer Teoremi'nin sağlanacağını gösterelim. Varsayalım ki f fonksiyonu Kompleks Ortalama Değer Teoremi'nin hipotezini sağlasın.

$$g(z) = \frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} f(z) & f(a) & f(b) \\ z & a & b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \tag{4.5}$$

fonksiyonu tanımlansın.

$$g(z) = \frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} f(z) & f(a) & f(b) \\ z & a & b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= f(z) - f(a)\frac{z-b}{a-b} + f(b)\frac{z-a}{a-b}$$

fonksiyonu her $z \in D_f$ için analitik bir fonksiyondur. g fonksiyonu $g(a) = g(b) = 0$ koşulunu sağlar. Böylece Kompleks Rolle Teoremi'nden

$$\mathrm{Re}(g'(z_1)) = 0$$

ve

$$\mathrm{Im}(g'(z_2)) = 0$$

olacak şekilde z_1, $z_2 \in (a,b)$ sayıları vardır. Böylece (4.5) numaralı fonksiyonunun türevi alınırsa, her $z \in D_f$ için

$$g'(z) = f'(z) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \tag{4.6}$$

elde edilir. (4.6) eşitliğinin her iki tarafının reel kısmı alınarak

$$0 = \mathrm{Re}(g'(z_1)) = \mathrm{Re}(f'(z_1)) - \mathrm{Re}(\frac{f(b)-f(a)}{b-a})$$

ve (4.6) eşitliğinin her iki tarafının sanal kısmı alınarak

$$0 = \mathrm{Im}(g'(z_2)) = \mathrm{Im}(f'(z_2)) - \mathrm{Im}(\frac{f(b)-f(a)}{b-a})$$

elde edilir. Böylece Kompleks Rolle Teoremi sağlandığında Kompleks Ortalama Değer Teoremi'nin sağlandığı görülür. Bu da Kompleks Ortalama Değer Teoremi ile Kompleks Rolle Teoremi'nin denkliğini gösterir. □

Kompleks Rolle Teoremi'nin ana fikri bir analitik f fonksiyonunun sıfırları ile $\mathrm{Re}(f')$'nin sıfırları arasındaki veya bir analitik f fonksiyonunun sıfırları ile

$\mathrm{Im}(f')$ 'nin sıfırları arasındaki ilişkiyi düşünmektir. Aşağıdaki örnekler kompleks Rolle Teoremi'ne ve bir analitik fonksiyonun türevinin reel ve sanal kısımlarının sıfırlarının analitik fonksiyonun sıfırlarını ayırdığı iddiasına ışık tutar [3].

4.2.5. Örnek. $f(z)=e^z-1$ fonksiyonu incelenirse;

her $k\in\mathbb{Z}$ için $z=2k\pi i$ olmak üzere $f(z)=0$ dir. Yani f fonksiyonunun sıfırları $z=2k\pi i$ noktalarıdır.

$$f'(z)=e^z=e^x\cos y+ie^x\sin y$$

olduğundan f fonksiyonun türevinin sıfırları düşünülecek olursa

$$y=\frac{(2k+1)\pi}{2} \text{ ise } \mathrm{Re}(f'(z))=0$$

ve

$$y=k\pi \text{ ise } \mathrm{Im}(f'(z))=0$$

dir. Böylece f' 'nün reel ve sanal kısımlarının sıfırlarının ikisi de f fonksiyonunun sıfırlarını ayıran düz doğrulardır [3].

4.2.6. Örnek. $a\neq b$ için $f(z)=(z-a)(z-b)$ fonksiyonu incelenirse;

$z=a$ veya $z=b$ olduğunda $f(z)=0$ dir. Yani f fonksiyonunun sıfırları $z=a$ ve $z=b$ noktalarıdır.

$$f'(z)=2z-a-b$$

olduğundan f fonksiyonun türevinin sıfırları düşünülecek olursa

$$x = \text{Re}\frac{(a+b)}{2} \text{ ise } \text{Re}(f'(z)) = 0$$

ve

$$y = \text{Im}\frac{(a+b)}{2} \text{ ise } \text{Im}(f'(z)) = 0$$

dir. Böylece f''nün reel ve sanal kısımlarının sıfırlarının ikisi de f'nin sıfırlarını ayıran doğrulardır [3].

4.3 Kompleks Fonksiyonlar için Myers Teoremi

Tek kompleks değişkenli analitik fonksiyonlar için Flett Teoremi'nin bir çeşidi 1999 yılında ispatlanmıştır [11].

4.3.1. Teorem. (*Davitt, Powers, Riedel ve Sahoo Teoremi*). f, $\mathbb{C}$'nin açık konveks bir alt kümesi olan D_f'de tanımlanmış analitik bir fonksiyon ve a ile b D_f'de farklı iki nokta olsun. Bu durumda

$$\text{Re}(f'(z_1)) = \frac{\langle b-a, f(z_1) - f(a)\rangle}{\langle b-a, z_1 - a\rangle} + \frac{1}{2}\frac{\text{Re}(f'(b) - f'(a))}{b-a}(z_1 - a)$$

ve

$$\text{Im}(f'(z_2)) = \frac{\langle b-a, -i[f(z_2) - f(a)]\rangle}{\langle b-a, z_2 - a\rangle} + \frac{1}{2}\frac{\text{Im}(f'(b) - f'(a))}{b-a}(z_2 - a)$$

olacak şekilde z_1, z_2 $\in (a,b)$ vardır [11].

Çakmak ve Tiryaki [2], 2012'de tek kompleks değişkenli analitik fonksiyonlar için Myers Teoremi'nin bir çeşidini ispatlamıştır.

4.3.2. Teorem. f, $\mathbb{C}$ 'nin açık konveks bir alt kümesi olan D_f 'de tanımlanmış analitik bir fonksiyon olsun. a ve b D_f'de farklı iki nokta olsun. Bu durumda

$$\mathrm{Re}(f'(z_1)) = \frac{\langle b-a, f(b)-f(z_1)\rangle}{\langle b-a, b-z_1\rangle} - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{Re}(f'(b)-f'(a))}{b-a}(b-z_1)$$

ve

$$\mathrm{Im}(f'(z_2)) = \frac{\langle b-a, -i[f(b)-f(z_2)]\rangle}{\langle b-a, b-z_2\rangle} - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{Im}(f'(b)-f'(a))}{b-a}(b-z_2)$$

olacak şekilde z_1, z_2 $\in (a,b)$ vardır [2].

İspat. $z \in D_f$ için $u(z) = \mathrm{Re}(f(z))$ ve $v(z) = \mathrm{Im}(f(z))$ olsun. Her $t \in [0,1]$ için

$$\phi(t) = \mathrm{Re}[(b-a)u(a+t(b-a))] + \mathrm{Im}[(b-a)v(a+t(b-a))] \qquad (4.7)$$

özelliğinde olan $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ yardımcı fonksiyonu

$$\phi(t) = \langle b-a, f(a+t(b-a))\rangle \qquad (4.8)$$

şeklinde tanımlansın. (4.8) den

$$\begin{aligned}\phi'(t) &= \langle 0, f(a+t(b-a))\rangle + \langle b-a, f'(a+t(b-a))\rangle \\ &= \langle b-a, f'(a+t(b-a))\rangle\end{aligned}$$

ve (4.7) den

$$\phi'(t) = \mathrm{Re}((b-a)^2)\frac{\partial u(z)}{\partial x} + \mathrm{Im}((b-a)^2)\frac{\partial v(z)}{\partial y}$$

elde edilir. Böylece Cauchy – Riemann eşitlikleri gereğince

$$\frac{\partial v(z)}{\partial y} = \frac{\partial u(z)}{\partial x}$$

olduğundan

$$\phi'(t) = \mathrm{Re}((b-a)^2)\frac{\partial u(z)}{\partial x} + \mathrm{Im}((b-a)^2)\frac{\partial u(z)}{\partial x}$$

$$= |b-a|^2 \frac{\partial u(z)}{\partial x}$$

$$= |b-a|^2 \mathrm{Re}(f'(z)) \qquad (4.9)$$

elde edilir. $[0,1]$ aralığındaki ϕ fonksiyonu için Teorem 3.2.12 kullanılarak bir $t_1 \in (0,1)$ için

$$(1-t_1)\phi'(t_1) = \phi(1) - \phi(t_1) - \frac{1}{2}\frac{\phi'(1)-\phi'(0)}{1-0}(1-t_1)^2$$

elde edilir. Böylece $z_1 = a + t_1(b-a)$ olduğunda (4.9) dan

$$\phi'(t_1) = |b-a|^2 \mathrm{Re}(f'(z_1))$$

olduğu için

$$(1-t_1)|b-a|^2 \mathrm{Re}(f'(z_1)) = \phi(1) - \phi(t_1) - \frac{1}{2}[\phi'(1)-\phi'(0)](1-t_1)^2 \qquad (4.10)$$

dir. Dahası $z_1 = a + t_1(b-a)$ ve $t_1 \in [0,1]$ olduğundan

$$\langle b-a, b-z_1\rangle = \langle b-a, b\rangle - \langle b-a, z_1\rangle$$

$$= \langle b-a, b-a-t_1(b-a)\rangle$$

$$= \langle b-a, b-a\rangle + \langle b-a, -t_1(b-a)\rangle$$

$$= \langle b-a, b-a\rangle - t_1\langle b-a, b-a\rangle$$

$$= (1-t_1)\langle b-a, b-a\rangle = (1-t_1)(b-a)\overline{(b-a)}$$

elde edilir ve

$$(b-a)\overline{(b-a)} = |b-a|^2$$

olduğundan

$$(1-t_1)|b-a|^2=\langle b-a,b-z_1\rangle$$

bulunur. Böylece (4.10) denklemi

$$\mathrm{Re}(f'(z_1))=\frac{\phi(1)-\phi(t_1)}{(1-t_1)|b-a|^2}-\frac{1}{2}\frac{\phi'(1)-\phi'(0)}{|b-a|^2}(1-t_1) \tag{4.11}$$

denklemine indirgenir. (4.11) denkleminde (4.8) ve $z_1=a+t_1(b-a)$ kullanarak

$$\phi(t)=\langle b-a,f(a+t(b-a))\rangle$$

olduğundan

$$\phi(1)=\langle b-a,f(b)\rangle,$$

$$\phi(t_1)=\langle b-a,f(z_1)\rangle$$

ve

$$\phi'(t)=|b-a|^2\,\mathrm{Re}(f'(z)),\;\; z=a+t(b-a)$$

olduğundan

$$\phi'(1)=|b-a|^2\,\mathrm{Re}(f'(b)),\;\; z=a+1.(b-a)=b,$$

$$\phi'(0)=|b-a|^2\,\mathrm{Re}(f'(a)),\;\; z=a+0.(b-a)=a$$

eşitlikleri (4.11) de yerine yazılarak

$$\mathrm{Re}(f'(z_1))=\frac{\langle b-a,f(b)-f(z_1)\rangle}{\langle b-a,b-z_1\rangle}-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{Re}(f'(b)-f'(a))}{b-a}(b-z_1) \tag{4.12}$$

elde edilir. Şimdi $g=-if$ olduğunda f fonksiyonu ile g fonksiyonunun türevlerinin reel ve sanal kısımları arasındaki ilişki incelenecektir.

$f(z)=u(z)+iv(z)$ dir. $g(z)=u_1(z)+iv_1(z)$ olsun. Dolayısıyla

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

ve

$$g'(z) = \frac{\partial u_1}{\partial x} + i\frac{\partial v_1}{\partial x}$$

dir. $g = -if$ ise $g' = -if'$ dir. Dolayısıyla

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + i\frac{\partial v_1}{\partial x} = -i(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}) = \frac{\partial v}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial x}$$

ve böylece

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

ve

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial x}$$

elde edilir. Elde edilen bu denklem sistemleri yorumlanırsa;

g fonksiyonunun türevinin reel kısmı f fonksiyonunun türevinin sanal kısmına eşittir. Aynı şekilde g fonksiyonunun türevinin sanal kısmı f fonksiyonunun türevinin reel kısmının negatifine eşittir. Bu sonuç Cauchy-Riemann eşitliklerinin

$$\frac{\partial v}{\partial x}(z_2) = -\frac{\partial u}{\partial y}(z_2)$$

kısmı ile birlikte düşünülürse

$$\mathrm{Re}(g'(z_2)) = \frac{\partial v}{\partial x}(z_2) = -\frac{\partial u}{\partial y}(z_2) = \mathrm{Im}(f'(z_2))$$

olacak şekilde bir $z_2 \in (a,b)$ olduğu elde edilir. g için (4.12) ye başvurarak, $z_2 = a + t_2(b-a)$ ve $t_2 \in [0,1]$ olan bir $z_2 \in (a,b)$ için

$$\mathrm{Re}(g'(z_2)) = \frac{\langle b-a, g(b)-g(z_2)\rangle}{\langle b-a, b-z_2\rangle} - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{Re}(g'(b)-g'(a))}{b-a}(b-z_2)$$

elde edilir.

$\mathrm{Re}(g'(z_2)) = \mathrm{Im}(f'(z_2))$ ve $g = -if$ olduğundan

$$\mathrm{Im}(f'(z_2)) = \frac{\langle b-a, -i[f(b)-f(z_2)]\rangle}{\langle b-a, b-z_2\rangle} - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{Im}(f'(b)-f'(a))}{b-a}(b-z_2)$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır. □

4.3.3. Uyarı. $f'(a) = f'(b)$ olduğunda Teorem 4.3.2'nin Myers Teoremi'nin aşağıdaki kompleks çeşidine indirgeneceği görülür [2].

4.3.4. Sonuç. f, $\mathbb{C}$'nin açık konveks bir alt kümesi olan D_f üzerinde tanımlanmış analitik bir fonksiyon olsun. a ve b D_f'de farklı iki nokta ve $f'(a) = f'(b)$ olsun. Bu durumda

$$\mathrm{Re}(f'(z_1)) = \frac{\langle b-a, f(b)-f(z_1)\rangle}{\langle b-a, b-z_1\rangle} - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{Re}(f'(b)-f'(b))}{b-a}(b-z_1)$$

olduğundan

$$\mathrm{Re}(f'(z_1)) = \frac{\langle b-a, f(b)-f(z_1)\rangle}{\langle b-a, b-z_1\rangle}$$

ve

$$\mathrm{Im}(f'(z_2)) = \frac{\langle b-a, -i[f(b)-f(z_2)]\rangle}{\langle b-a, b-z_2\rangle} - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{Im}(f'(b)-f'(b))}{b-a}(b-z_2)$$

olduğundan

$$\mathrm{Im}(f'(z_2)) = \frac{\langle b-a, -i[f(b)-f(z_2)]\rangle}{\langle b-a, b-z_2\rangle}$$

olacak şekilde z_1, z_2 $\in (a,b)$ vardır [2].

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde reel değerli fonksiyonlar için Ortalama Değer Teoremi ile Rolle Teoremi arasındaki denklik ele alınmıştır. Ortalama Değer Teoremi'nin farklı çeşitleri incelenmiştir. Ayrıca kompleks değişkenli kompleks değerli fonksiyonlar için Ortalama Değer Teoremi ve Rolle Teoremi incelenmiştir. Yine kompleks durumda da Rolle Teoremi ile Ortalama Değer Teoremi'nin denkliği ifade edilmiştir. Ayrıca bu teoremlerin çeşitli uygulamalarına yer verilmiştir.

6. KAYNAKLAR

[1] Qazi, M. A., "The mean value theorem and analytic functions of a complex variable", *J. Math. Anal. Appl.*, 324 (1), 30-38, (2006).

[2] Cakmak, D., and Tiryaki, A., "Mean value theorem for holomorphic functions", *Electron. J. Diff. Eqn.*, 2012(34), 1-6, (2012).

[3] Evard, J. C., and Jafari, F., "A complex Rolle's theorem", *Amer. Math. Monthly*, 99(9), 858-861, (1992).

[4] Flett, T. M., "A mean value theorem", *Math. Gazette*, 42(339), 38-39, (1958).

[5] Balcı, M., *Matematik Analiz*, 1, Ankara: Balcı Yayınları, (1999).

[6] Başkan, T., *Kompleks Fonksiyonlar Teorisi*, Bursa: Dora, (2010).

[7] Myers, R. E., "Some elementary results related to the mean value theorem", *The Two-Year College Mathematics Journal*, 8(1), 51-53, (1977).

[8] Sahoo, P. K. and Riedel, T., *Mean value theorems and functional equations*, New Jersey: World Scientific, (1998).

[9] Abbott, S., *Understanding Analysis*, USA: Springer, (2002).

[10] Evard, J. C., "On matrix functions which commute with their derivative", *Linear Algebra Appl*, 68, 145-178, (1985).

[11] Davitt, R. M., Powers, R. C., Riedel, T., Sahoo, P. K., "Flett's mean value theorem for holomorphic functions", *Math. Magazine*, 72(4), 304-307, (1999).