T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

LOKAL HALKALARIN HİLBERT FONKSİYONLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FATMA KARAOĞLU

BALIKESİR, EYLÜL - 2012

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

LOKAL HALKALARIN HİLBERT FONKSİYONLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FATMA KARAOĞLU

BALIKESİR, EYLÜL - 2012

KABUL VE ONAY SAYFASI

Fatma KARAOĞLU tarafından hazırlanan "**LOKAL HALKALARIN HİLBERT FONKSİYONLARI**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 03.09.2012 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Yrd. Doç. Dr. Pınar METE	....
Üye Doç. Dr. Sebahattin İKİKARDEŞ	....
Üye Doç. Dr. Özden KORUOĞLU	....

Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez BAÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Prof. Dr. Hilmi NAMLI ....

ÖZET

LOKAL HALKALARIN HİLBERT FONKSİYONLARI
YÜKSEK LİSANS TEZİ
FATMA KARAOĞLU
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI: YRD. DOÇ. DR. PINAR METE)

BALIKESİR, EYLÜL - 2012

Bir lokal halkanın Hilbert fonksiyonu, o halkaya karşılık gelen ilişkilendirilmiş derecelendirilmiş halkasının (teğet konisinin) Hilbert fonksiyonu ile tanımlanır. Standart dereceli bir cebirin en azından Cohen-Macaulay iken Hilbert fonksiyonu iyi anlaşılmış olmasına rağmen, lokal durumda çok az bilgi vardır. Bunun sebebi, lokal halkanın güzel özelliklerinin teğet konisine taşınamamasıdır.

Bu tez çalışması, lokal halkaların Hilbert fonksiyonlarının teorisi üzerine bir derleme olup, amacımız bu konuyla ilgili temel tanım ve teoremleri vermek ve bazı açık problemleri tanıtmaktır.

ANAHTAR KELİMELER: lokal halka, Hilbert fonksiyon, standart baz, teğet koni, standart dereceli cebir, Cohen-Macaulay halka.

ABSTRACT

HILBERT FUNCTIONS OF LOCAL RINGS
MASTER'S THESIS
FATMA KARAOĞLU
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
(SUPERVISOR: ASSIST. PROF. DR. PINAR METE)

BALIKESİR, SEPTEMBER-2012

The Hilbert function of a local ring is the Hilbert function of the associated graded ring (its tangent cone). In spite of the fact that the Hilbert function of a standard graded algebra is well-understood, at least it is Cohen-Macaulay, very little is known in the local case. This is because many nice properties of the local ring can not be carried over to its tanget cone.

This thesis study is a survey of the theory of Hilbert functions of local rings, and our aim is to give basic definitions and theorems in this field and to introduce some open problems.

KEYWORDS: local ring, Hilbert function, standard basis, tangent cone, standard graded algebra, Cohen-Macaulay ring.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET i
ABSTRACT ii
İÇİNDEKİLER iii
SEMBOL LİSTESİ iv
ÖNSÖZ vi
1. GİRİŞ 1
2. TEMEL BİLGİLER 3
2.1 Lokal Halkalar ve Nakayama Yardımcı Teoremi 3
2.2 Tamlama ve Tam Lokal Halkalar 5
2.3 Lokalizasyon 7
2.4 Derecelendirilmiş Cebirler 9
2.5 Hilbert Fonksiyon ve Hilbert Serisi 16
2.6 Hilbert Polinom 23
2.7 Filtrasyon ve İlişkilendirilmiş Derecelendirilmiş Halka 29
3. TEKTERİMLİ SIRALAMALAR VE STANDART BAZ 34
3.1 Global ve Lokal Sıralamalar 34
3.2 Standart Baz 38
4. COHEN MACAULAYLIK 49
4.1 Cohen Macaulay Halkalar 49
4.2 Gorenstein Halkalar 57
4.3 Tekterimli Eğriler 59
4.4 Teğet Koniler 61
5. HİLBERT FONKSİYONLAR 64
5.1 Mertebe İdealler 64
5.2 Macaulay Temsili ve Lexsegment İdealler 67
5.3 Macaulay Teorem 74
5.4 Lokal Halkalar Üzerinde Hilbert Fonksiyon 77
5.5 Bir Boyutlu Lokal Halkaların Hilbert Fonksiyonları 82
6. SONUÇ 84
7. KAYNAKLAR 85

SEMBOL LİSTESİ

$\lim_{\leftarrow} R/m$	:	Ters limit
$\check{R}$	:	R halkasının tamlaması
$sp=\{m_1,\cdots,m_n\}$	:	$m_1,\cdots m_n$' ler tarafından gerilen küme
$M(d)$	:	M'nnin d kadar kaydırılmışı
$HF_R(n)$	:	R'nin Hilbert fonksiyonu
$HS_R(n)$	:	R'nin Hilbert serisi
$P_R(x)$	:	R'nin Hilbert polinomu
HP_M	:	M'nin Hilbert Poincarè serisi
$P_M^1(X)$	:	M'nin Hilbert Samuel polinomu
$gr_I R$	:	R'nin I idealine gore ilişkilendirilmiş
derecelendirilmiş halkası		
$boyR$	:	R'nin Krull boyutu
$h_A(z)$	:	A'nın h-polinomu
$e_0(m)$	:	katlılık
$e_1(m)$	:	indirgeme sayısı
$e_i(m)$	:	Hilbert katsayıları
$Z_{\geq 0}^n$	:	0 dahil pozitif tamsayılar kümesi
$LM(f)$	:	f'nin en yüksek dereceli tekterimlisi
$LE(f)$	:	f'nin derecesi
$LT(f)$	:	f'nin yüksek dereceli terimi
$LC(f)$	:	f'nin başkatsayısı
$t(f)$	:	f'nin kuyruğu
lp	:	Alfabetik sıralama
dp	:	Derecelendirilmiş alfabetik sıralama
Dp	:	Ters derecelendirilmiş alfabetik sıralama
ls	:	Negatif alfabetik sıralama
ds	:	Negatif derecelendirilmiş alfabetik sıralama
Ds	:	Ters negatif derecelendirilmiş alfabetik
sıralama		
ζ	:	G'nin tüm sonlu listelerinin bir kümesi
$L(G)$	:	G'nin baş ideali
NF	:	Normal form
$S(f,g)$	:	f ve g polinomlarının S-polinomu
$NFBUCHBERGER\,(f\mid G)$	:	f'nin Buchberger normal formu
$ecart(f)$	:	f'nin ecartı
$NFMORA(f\mid G)$	:	f'nin G'ye göre Mora normal formu
$STANDARDBAZ(G)$	:	G'nin standart bazı
$grad(I,M)$	:	I'nın M üzerinde gradı
$derinlik(M)$	:	M'nin derinliği
$yükseklik(I)$	:	I'nın yüksekliği
$\mu(I)$	:	I idealinin üreteçlerinin minimal sayısı
$Soc(M)$	:	M modülünün "desteği=socle",

$V(f_1,\cdots,f_s)$: $f_1,f_2,\cdots,f_s$ 'ler tarafından tanımlanan afin varyete

$I(V)$: V varyetesinin ideali

$C_p(V)$: V ' nin p noktasındaki teğet konisi

$ord(f)$: f 'in mertebesi

$In(f)$: f 'nin baş formu

$In(I)$: I idealinin baş ideali

Ĺ$_u$: u 'nun sağındaki d dereceli tekterimlilerinin kümesi

Ŕ$_u$: u 'nun solundaki d dereceli tekterimlilerinin kümesi

$[X_1,X_2,\cdots,X_i]_d$: $X_1,\cdots,X_i$ değişkenlerine bağlı derecesi d olan bütün tekterimlilerin kümesi

ÖNSÖZ

Değişmeli cebir ve cebirsel geometri ile tanışmamı sağlayan ve her zaman sabırla ve ilgiyle sorularımı yanıtlayan sayın danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Pınar Mete' ye teşekkür ederim.

Aileme ve arkadaşlarıma bu süreçte manevi desteklerini eksik etmedikleri için teşekkürlerimi sunuyorum.

1. GİRİŞ

Hilbert fonksiyon nümerik bir fonksiyondur ve Hilbert'in meşhur makalesi [1] bu fonksiyonun, yeterince büyük doğal sayılar için bir polinom (Hilbert polinom) olduğunu söyler. Bu polinom, içeriğinde önemli geometrik bilgiler içerir. Örneğin, bir varyetenin boyutu, Hilbert fonsiyonu ve Hilbert polinomu kullanılarak hesaplanabilmektedir. Hilbert'in ünlü makalesi matematikçileri uzun yıllar cezbetmesine rağmen temel problemler hala açıktır. Ancak son yıllarda bilgisayarların ve buna bağlı olarak hesapsal cebirsel geometri programlarının (Macaulay [2], Singular [3], CoCoA [4] v.b.) soluk kesici gelişimi daha önceleri elle çözülemeyen problemlerin çözülebilirliğini sağlamıştır.

Bu tezde, lokal halkaların (Cohen-Macaulay lokal halkaların) Hilbert fonksiyonları ile ilgileneceğiz.

A bir k cismi üzerinde lokal halka, m, A'nın maksimal ideali ve $\mu(I)$, A'nın I idealinin üreteçlerinin minimal sayısı olsun. A'nın Hilbert fonksiyonu, karşılık geldiği ilişkilendirilmiş derecelendirilmiş halkasının, $gr_m A$' nın, Hilbert fonksiyonu ile tanımlanır. Bu,

$$gr_m R := R/m \oplus m/m^2 \oplus m^2/m^3 \oplus \ldots = \oplus_{n\geq 0} m^n/m^{n+1}$$

ve $HF_A : N \to N$, $n \in N$ olmak üzere,

$$HF_A(n) := boy_k m^n/m^{n+1} = \mu(m^n)$$

demektir.

Problem: "Bir Cohen-Macaulay lokal halkanın Hilbert fonksiyonu hakkında ne söylenebilir?" (G. Valla)

Standart derecelendirilmiş halkaların Hilbert fonksiyonu hakkında pek çok bilgi olmasına rağmen, lokal halkaların Hilbert fonksiyonu hakkında çok az şey bilinmektedir. Hatta, bir boyutlu Cohen-Macaulay halka durumunda bile problem oldukça açıktır.

Northcott [5] tarafından 50'li yıllarda yapılan öncü çalışmadan sonra bir Cohen-Macaulay lokal halkanın Hilbert fonksiyonunu daha iyi anlamak için, halkaya karşılık gelen teğet konisinin nümerik karakterleri ve Hilbert katsayıları kullanılarak çeşitli çalışmalar yapıldı.

Bu tezde, bu geometrik problemin, Gröbner teori ile, cebirsel yaklaşım kullanılarak nasıl ele alındığı anlatılacaktır.

Tezin 2. Bölümünde konu ile ilgili temel bilgiler verilmiştir.

Tezin 3. Bölümünde, hem bir polinom halkasında hem de polinom halkasının bir maksimal idealindeki lokalizasyonunda hesap yapmak için gerekli algoritmalar verilmiştir.

Tezin 4. Bölümünde, Cohen-Macaulay ve Gorenstein halkalar anlatılmıştır. Tekterimli eğriler ve teğet konilerden bahsedilmiştir.

Tezin 5. Bölümünde, öncelikle, bir standart homojen k-cebirinin Hilbert fonksiyonunu tam olarak karakterize eden Macaulay Teorem verilmiştir. Sonra, lokal halkalar için benzer bir karakterizasyonun yapılamamasının nedenleri anlatılmıştır.

2. TEMEL BİLGİLER

Bu tez boyunca bütün halkaların değişmeli ve birimli olduğu kabul edilecektir.

2.1 Lokal Halkalar ve Nakayama Yardımcı Teoremi

Değişmeli cebirde, lokal halkalar önemli bir yere sahiptir ve oldukça geometrik nesnelerdir. Lokal halkalar ile ilgili, sadece cebirsel olan sonuçlar, cebirsel varyetelerin lokal davranışlarının çalışılması sırasında elde edilmiştir. Lokal halkalar, ilk olarak "Stellenringe" ismiyle Krull [6] tarafından ortaya konulmuştur.

Bu bölümde lokal halkanın tanımı verilerek, Nakayama Yardımcı Teoreminin ispatları yapılacaktır.

2.1.1 Tanım: R bir halka ve m, R halkasının bir maksimal ideali olsun. R halkasının m idealinden başka maksimal ideali yok ise, R halkasına lokal halka denir ve (R,m) ile gösterilir.

2.1.2 Örnek: Bütün cisimler lokal halkadır, çünkü $\{0\}$, bu halkanın tek maksimal idealidir.

k bir cisim olmak üzere, n değişkenli kuvvet serileri halkası $k[[x_1,x_2,\dots, x_n]]$, bir lokal halkadır, çünkü $(x_1,x_2,\dots, x_n)$ bu halkanın tek maksimal idealidir.

2.1.3 Tanım: R bir halka olsun. R'nin her ideali sonlu üretilmiş ideal ise R'ye Noether halkası denir.

2.1.4 Yardımcı Teorem: (Nakayama, 1. versiyon) R bir lokal halka, m, R'nin maksimal ideali ve M sonlu üretilmiş R-modül olsun.

$$m \cdot M = 0 \Rightarrow M = 0\text{' dır, [7].}$$

İspat: $r \geq 1$ olmak üzere, $x_1, x_2, \ldots, x_r$, M modülünün minimal üreteç kümesi olsun. r üzerinden tümevarım yapalım.

- $r = 0$ iken $M = 0$ olduğu açıktır.
- $r - 1$ için ifadenin doğru olduğunu kabul edelim.

$$x_r \in M = m \cdot M$$

olduğundan,

$$x_r = a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \cdots + a_r \cdot x_r$$

olacak şekilde. $a_1, a_2, \cdots, a_r \in m$ vardır.

$$(1 - a_r) \cdot x_r = a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \cdots + a_{r-1} \cdot x_{r-1},$$

burada $1 - a_r \notin m$'dir. Çünkü $1 - a_r \in m$ olsaydı, $1 - a_r + a_r = 1 \in m$ çelişkisi elde edilirdi. Üstteki eşitlikten,

$$x_r = (1 - a_r)^{-1}(a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \cdots + a_{r-1} \cdot x_{r-1})$$

elde edilir. Bu $x_1, x_2, \cdots, x_{r-1}$, M'yi üretir demektir. $r - 1$ için ifadenin doğru olduğunu kabul ettiğimizden,

$$M = 0$$

bulunur.

2.1.5 Yardımcı Teorem: (Nakayama, 2. versiyon) R bir lokal halka, m, R'nin maksimal ideali, E sonlu üretilmiş R-modül ve F, $F \subseteq E$ olacak şekilde bir altmodül olsun. Bu durumda,

$$E = F + m \cdot E = 0 \Rightarrow E = F$$

dir, [7]

İspat: $E = F + m \cdot E$ olsun. $M = E / F$ olarak alalım. Bu durumda,

$$M = m \cdot M$$

Nakayama Yardımcı Teorem 1.versiyondan,

$$M = E / F = 0$$

elde edilir. Bu, $E = F$ demektir.

2.1.6 Tanım: *R* bir lokal halka, *m*, *R*' nin maksimal ideali olsun. *R* halkasının boyutu, m / m^2 vektör uzayının boyutudur.

$$boyR = boy_{R/m}(m / m^2)$$

2.2 Tamlama ve Tam Lokal Halkalar

2.2.1 Tanım: *R* bir lokal halka ve

$$\cdots \to R / m^{n+1} \to R / m^n \to R / m^{n-1} \to \cdots \to R / m$$

halka homomorfizmalarının bir dizisi olsun. Ters limit, aşağıdaki şekilde tanımlanır ve $\lim_{\leftarrow} R / m$ ile gösterilir.

$$\lim_{\leftarrow} R / m = \{ a_n \in R / m^n \mid \varphi : R / m^n \to R / m^{n-1}, \varphi(a_n) = a_{n-1} \}$$

$$= \{ a_n \in R / m^n \mid a_{n-1} = a_n + m^{n-1} \}$$

$$= \{ g = (g_1, g_2, \ldots) \in R / m_i \mid g_j \equiv g_i (\operatorname{mod} m_i), \forall j > i \}.$$

2.2.2 Tanım: *R* bir değişmeli grup ve $R = m_0 \supset m_1 \supset m_2 \supset \cdots$ alt grupların bir dizisi olsun. *R* halkasının tamlaması, Ř, R / m_i grubunun ters limiti ile tanımlanır. Bir başka ifadeyle,

$$\check{R} := \lim_{\leftarrow} R / m_i = \{ g = (g_1, g_2, \ldots) \in R / m_i \mid g_j \equiv g_i (\operatorname{mod} m_i), \forall j > \mathrm{i} \}.$$

2.2.3 Örnek: $R=k[x_1,x_2,\cdots,x_n]$, k cismi üzerinde $x_1,x_2,\cdots,x_n$ bağımsız değişkenlerine bağlı polinom halkası ve $m=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ olsun. Bu durumda, $\check{R}_m \cong k[[x_1,x_2,\cdots,x_n]]$

$$k[[x_1,x_2,\cdots,x_n]] \to R/m^i$$

$$f \mapsto f+m^i$$

dönüşümünü tanımlayalım. $m^i \supset m^j$ olduğundan, $\forall j>i$ için

$$f+m^i \equiv f+m^j \text{' dir.}$$

Yani $(f+m, f+m^2, f+m^3,\cdots) \in \check{R}_m$' dir. O halde,

$$k[[x_1,x_2,\cdots,x_n]] \to \check{R}_m$$

$$f \mapsto (f+m, f+m^2, f+m^3,\cdots)$$

dönüşümü tanımlayabiliriz. Diğer yandan, bunun ters dönüşümünü de aşağıdaki şekilde tanımlayabiliriz.

$$\check{R}_m \to k[[x_1,x_2,\ldots,x_n]]$$

$(f+m, f+m^2, f+m^3,\cdots) \in \check{R}_m$, $\forall j>i$ için $f+m^i \equiv f+m^j$ (mod m^i) olduğundan,

$$f_i = f_j + (\text{derecesi} > \min(i,j) \text{ olan terimler})$$

Yani bu ters dönüşüm,

$$(f+m, f+m^2, f+m^3,\cdots) \mapsto f_1 + (f_2-f_1) + (f_3-f_2) + \cdots$$

olur. $f_{i+1}-f_i$'nin derecesi $i+1$ den az olduğundan ve f_i'nin f_i+m^i teriminin içerisindeki seçiminden bağımsız olduğundan, bu iyi tanımlı bir kuvvet serisidir.

2.2.4 Tanım: R bir lokal halka ve m, R'nin maksimal ideali olsun. $R \approx \lim_{\leftarrow} R/m^n$ ise, R halkasına tam lokal halka denir.

2.2.5 Örnek: k bir cisim olmak üzere, n değişkenli kuvvet serileri halkası $k[[x_1,x_2,\ldots,x_n]]$ bir tam lokal halkadır.

2.3 Lokalizasyon

Z tam sayılar halkasının sıfır olmayan elemanları, Q içinde tersinir yapılarak Q cismi elde edilir. Benzer şekilde, bir p asal sayısı ile ilgilendiğimizi düşünelim. p ile bölünmeyen tüm sayıların tersini almak istiyoruz. Böylece, Q cisminin obeb(a,b)=1 ve b ile p aralarında asal olacak şekilde a/b rasyonel sayılarından oluşan bir alt halkasını düşüneceğiz. Bu halkadaki tek bölünebilme, p veya p'nin kuvvetleri ile olan bölünebilmedir. Bu şekilde, elemanların özel bir sınıfının tersini alma işlemine lokalizasyon adı verilir.

Lokal halkalarla ilgili problemlerin çoğu lokalizasyon tekniğiyle indirgenerek çözümlenir. Bu yüzden lokalizasyon önemli ve kullanışlı bir tekniktir. Bu kısımda lokalizasyonla elde edilen lokal halkalar temel düzeyde anlatılacaktır.

2.3.1 Tanım: R bir halka ve S, R'nin bir alt kümesi olsun.

$$a,b \in S \text{ iken } a.b \in S \text{ ve } 1 \in S$$

oluyorsa S'ye çarpımsal kapalıdır denir.

2.3.2 Örnek: R bir halka ve P, R halkasının asal ideali olsun. $S = R - P$ kümesi çarpımsal kapalıdır:

$$a,b \in S = R - P \text{ ise } a,b \notin P$$

P asal ideal olduğundan,

$$a \cdot b \notin P \Rightarrow a \cdot b \in S \text{ ve } 1 \notin P \Rightarrow 1 \in S \text{' dir.}$$

2.3.3 Tanım: R bir halka ve S, R' nin çarpımsal kapalı kümesi olsun.

$$R[S^{-1}] = \{(a,u) \mid a \in R, u \in S\} /\!\sim$$

kümesine "kesirler halkası" denir. Buradaki $\sim$ bağıntısı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$(a,u) \sim (b,v) \Leftrightarrow w.(a \cdot v - b \cdot u) = 0$ şartını sağlayan en az bir $w \in S$ vardır.

$R[S^{-1}]$ halkasındaki toplama ve çarpma işlemleri aşağıdaki gibidir:

$$\frac{a}{u} + \frac{b}{v} = \frac{av + bu}{uv} \ , \ \frac{a}{u} \cdot \frac{b}{v} = \frac{a \cdot b}{u \cdot v} \ , \ \frac{0}{1} = 0 \ , \ \frac{1}{1} = 1$$

2.3.4 Örnek: $R = Z/(6)$ ve $P = (\bar{3})$ olsun. Bu durumda $R[S^{-1}] = Z_3$ olur.

$S = R - P = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{5}\}$ 'dir.

$$R[S^{-1}] = \{0, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{5}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{5}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{5}{5}\}$$

Burada,

$$\frac{3}{1} \sim \frac{0}{1} \Leftrightarrow 2.(3.1 - 1.0) = 0,$$

$$\frac{4}{1} \sim \frac{1}{1} \Leftrightarrow 2.(4.1 - 1.1) = 0,$$

$$\frac{5}{1} \sim \frac{2}{1} \Leftrightarrow 2.(5.1 - 1.2) = 0,$$

$$\vdots$$

Her biri tek tek incelendiğinde,

$$R[S^{-1}] = \{0, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}\} = Z_3$$

olduğu görülür.

2.3.5 Tanım: R bir halka ve P, R'nin asal ideali olsun. $S = R - P$ olmak üzere $R[S^{-1}]$ kesir halkasına "P'deki lokalizasyon" denir ve bu kesir halkası R_p ile gösterilir.

2.3.6 Teorem: R_P halkası lokal halkadır, [8].

2.4 Derecelendirilmiş Cebirler

Bu kısımda derecelendirilmiş k-cebiri ile ilgili temel tanım ve teoremler verilecektir.

2.4.1 Tanım: R, k cismi üzerinde bir vektör uzay olsun. $\forall x,y,z \in R$ ve $\alpha,\beta \in$ k için

1. $xy=yx$;
2. $x(yz)=(xy)z$;
3. $x(y+z)=xy+xz$;
4. $\alpha(xy)=(\alpha x)y=x(\alpha y)$;
5. $\alpha(\beta y)=(\alpha \beta)y=\beta(\alpha y)$;

şartları sağlanıyor ise R vektör uzayına değişmeli k-cebiri denir.

Bu tez boyunca tüm k-cebirleri değişmeli k-cebiridir.

2.4.2 Tanım: R bir k-cebiri ve $R=R_0 \oplus R_1 \oplus R_2 \oplus R_3 \oplus ...$ olarak yazılsın. Eğer,

- **i.** $R_0=k$,
- **ii.** $\forall\, i,j \geq 0$ için $R_i.R_j \subset R_{i+j}$;

şartları sağlanıyorsa R'ye derecelendirilmiş k-cebiri denir.

2.4.3 Örnek: k cismi üzerinde x değişkenine bağlı $k[x]$ polinom halkası bir derecelendirilmiş k-cebiridir, [9].

2.4.4 Teorem: R=$k[x_1,x_2,x_3,...,x_n]$, k cismi üzerinde n bağımsız değişkenli bir polinom halkası olsun. Eğer $\forall\, 1 \leq i \leq n$ için der(x_i)=1 ise, R sonlu üretilmiş derecelendirilmiş k cebiridir, [9].

2.4.5 Önerme: R=$k[x_1, x_2, \cdots, x_n]$, k cismi üzerinde bir derecelendirilmiş k-cebiri olsun. Eğer $\forall 1 \leq i \leq n$ için, $der(x_i) = 1$ ve

$$R = sp\{x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, \ldots, x_n^{\alpha_n} \mid 1 \leq j \leq n \text{ için } a_i \in N \text{ ve } \sum_{j=1}^{n} a_j = i\}$$

ise, k vektör uzayı üzerindeki R_i'nin boyutu,

$$boy_k(R_i) = \binom{n+i-1}{i} \text{ 'dir, [9].}$$

2.4.6 Tanım: $R = \oplus_{n \geq 0} R_n$ derecelendirilmiş k-cebiri olsun. Eğer,

i. $\forall n \geq 0$ için $I_n \subset R_n$,

ii. $\forall i, j \geq 0$ için $R_i \cdot I_j \subset I_{i+j}$

şartları sağlanıyorsa $I = \oplus_{n \geq 0} I_n$ vektör alt uzayına derecelendirilmiş ideal (veya homojen ideal) denir.

2.4.7 Örnek: I=$<xy, x^2, y^3>$, $k[x,y]$ halkasının bir derecelendirilmiş idealidir:

$$I_0 = I_1 = (0),$$

$$I_2 = sp\{xy, x^2\},$$

$$I_3 = sp\{x^2 y, xy^2, x^3, y^3\},$$

$$I_4 = sp\{x^3 y, x^2 y^2, x^4, xy^3, y^4\},$$

$$I_5 = sp\{x^4 y, x^3 y^2, x^2 y^3, xy^4, x^5, y^5\},$$

$$\vdots$$

Teorem 2.4.4'ten $R=k[x,y]$, k cismi üzerinde x ve y bağımsız değişkenlerine bağlı derecelendirilmiş k-cebiridir.

$$R=k[x,y]=R_0 \oplus R_1 \oplus R_2 \oplus R_3 \oplus \ldots$$

$$R_0 = sp\{1\},$$

$$R_1 = sp\{x, y\},$$

$$R_2 = sp\{x^2, xy, y^2\},$$

$$R_3 = sp\{x^3, x^2y, xy^2, y^3\},$$

$$R_4 = sp\{x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3, y^4\},$$

$$R_5 = sp\{x^5, x^4y, x^3y^2, x^2y^3, xy^4, y^5\},$$

$$\vdots$$

$\forall\, n \geq 0$ için $I_n \subset R_n$ ve $\forall\, i,j \geq 0$ için $R_i I_j \subset I_{i+j}$'dir.

2.4.8 Teorem: $R=\oplus_{n\geq 0} R_n$ derecelendirilmiş k cebiri ve $I = \oplus_{n\geq 0} I_n$ derecelendirilmiş ideal olsun. Bu durumda R/I, k cismi üzerinde derecelendirilmiş k-cebiridir ve

$$R/I = \oplus_{n\geq 0}(R_n / I_n)$$

dir, [9].

2.4.9 Örnek: $I=\langle xz, z^2, y^3z, y^6\rangle$, $R=k[x,y,z]$ halkasının bir derecelendirilmiş ideali olsun. Bu durumda,

$$R/I = R_0/I_0 \oplus R_1/I_1 \oplus R_2/I_2 \oplus \cdots$$

olmak üzere,

$$R_0/I_0 = k,$$

$$R_1 / I_1 = sp\{x, y, z\} \ ,$$

$$R_2 / I_2 = sp\{x^2, y^2, xy, yz\},$$

$$R_3 / I_3 = sp\{x^3, y^3, x^2y, xy^2, y^2z\},$$

$$R_4 / I_4 = sp\{x^4, y^4, x^3y, x^2y^2, xy^3\},$$

$$R_5 / I_5 = sp\{x^5, y^5, x^4y, x^3y^2, x^2y^3, xy^4\},$$

$$R_6 / I_6 = sp\{x^6, x^5z, x^4z^2, x^3y^3, x^2y^4, xy^5\},$$

$$\vdots$$

2.4.10 Tanım: $R = \oplus_{n\geq 0} R_n$ bir derecelendirilmiş halka olsun. *M*'de, M_v alt gruplarının direkt toplamları olarak yazılan bir *R*-modül olsun ($M = \oplus_{v\geq 0} M_v$). Eğer,

$$\forall n \geq 0 \text{ ve } \forall v \in Z \text{ için } R_n \cdot M_v \subset M_{n+v}$$

şartı sağlanıyorsa *M*'ye derecelendirilmiş *R*-modül denir.

2.4.11 Örnek: $R = \oplus_{n\geq 0} R_n$ derecelendirilmiş *k*-cebiri ve e_i , *i*. bileşeni 1 diğer bileşenleri 0 (yani $e_i = (0, \cdots, 1, \cdots, 0)$) ise,

$$M = R^m = \oplus_{i=1}^m R \cdot e_i$$

bir derecelendirilmiş *R*-modüldür:

$v_1, v_2, \cdots, v_m \in Z$ ve $\deg(e_i) = v_i$ olsun. $f \in R_{v-v_i}$ (yani f derecesi $v - v_i$ olan bir polinom) olmak üzere $f \cdot e_i$ polinomları tarafından üretilen M_v, R_0-modüldür. Bu durumda, $M=R^m$ bir derecelendirilmiş *R*-modüldür.

2.4.12 Tanım: $M = \oplus_{v\in Z} M_v$ derecelendirilmiş *R*-modül olsun. $d \in Z$ ve $M(d) := M_{v+d}$ olmak üzere,

$$M(d) := \oplus_{v\in Z} M(d)_v \text{ ' dir.}$$

Burada, $M(d)$ kümesine "M'nin d kadar kaydırılmışıdır" denir. Aynı zamanda $M(d)$, derecelendirilmiş R-modüldür:

$$M(d) := \oplus_{v\in Z} M(d)_v = \oplus_{v\in Z} M_{d+v}$$

M, R-modül olduğundan $\forall v \in Z$ için M_v toplamsal alt gruptur. O halde, $\forall d+v \in Z$ için $M_{d+v} = M(d)_v$, $M(d)$'nin toplamsal alt grubudur. M, R-modül olduğundan, $\forall u \geq 0$ ve $\forall v \in Z$ için $R_u \cdot M_v \subset M_{u+v}$' dir.

$$\forall u \geq 0 \text{ ve } \forall v \in Z \text{ için}$$

$$R_u \cdot M(d)_v = R_u \cdot M_{d+v} \subset M_{u+d+v} = M(d)_{u+v} \text{ ' dir.}$$

Bu durumda $M(d)$ bir R-modüldür.

2.4.13 Yardımcı Teorem: $M = \oplus_{v\in Z} M_v$ derecelendirilmiş R-modül ve $N \subset M$ olmak üzere, N, M'nin alt modülü olsun. Bu durumda aşağıdakiler birbirine denktir:

- **i.** $N = \oplus_{v\in Z}(M_v \cap N)$,
- **ii.** N homojen elemanlar tarafından üretilir,
- **iii.** $m = \sum m_v$ ve $m_v \in M_v$ olsun. Bu durumda, $\forall v$ için $m \in N \Leftrightarrow m_v \in N$' dir, [10].

2.4.14 Uyarı: $R = \oplus_{n\geq 0} R_n$ bir derecelendirilmiş halka ve $I \subset R$ homojen ideal olsun.

$$R/I = \oplus_{n\geq 0}(R_n + I)/I \cong \oplus_{n\geq 0} R_n/(I \cap R_n).$$

2.4.15 Tanım: $R = \oplus_{n\geq 0} R_n$ bir derecelendirilmiş halka ve $M = \oplus_{v\in Z} M_v$, $N = \oplus_{v\in Z} N_v$ derecelendirilmiş R-modül olsunlar. $\ell : M \to N$ homomorfizması, $\forall v$ için,

$$\ell(M_v) \subset N_{v+d}$$

şartını sağlıyorsa, ℓ'ye d dereceli homojen (veya derecelendirilmiş) homomorfizma denir. Eğer ℓ sıfır dereceli homojen homomorfizma ise ℓ'ye homojendir denir.

2.4.16 Örnek: M bir derecelendirilmiş R-modül ve $f \in R_d$ (yani derecesi d olan bir polinom) olsun. Bu durumda, $\ell : M \to M$ derecesi d olan ve f ile tanımlanan derecelendirilmiş homomorfizması yazabiliriz.

$\ell(d) : M \to M(d)$ homomorfizmasına sıfır dereceli derecelendirilmiş homomorfizma veya $\ell(d)$ homojendir denir.

2.4.17 Yardımcı Teorem: R bir derecelendirilmiş halka ve M, N derecelendirilmiş R-modüller olsun. $\ell : M \to N$ homojen R- modül homomorfizması olmak üzere $çek(\ell)$, $N/_{im(\ell)}$ ve $im(\ell)$'de derecelendirilmiş R-modüldür,[10].

İspat: $çek(\ell)$'nin derecelendirilmiş R-modül olduğunu söyleyebilmek için

$$çek(\ell) = \oplus_{v \in Z} (çek(\ell) \cap M_v)$$

olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

$K_i := çek(\ell) \cap M_v$ olarak alalım. $\forall i$ için, $K_i \subset çek(\ell)$'dir. O halde

$$\oplus K_i \subset çek(\ell) \tag{1}$$

elde edilir. Diğer yandan, $m \in çek(\ell)$ alalım.

$$\Rightarrow \ell(m) = 0, m \in M$$

olduğundan $m = \sum m_v$ olarak yazılır.

$$\Rightarrow \ell(\sum m_v) = 0$$

ℓ homomorfizma olduğundan,

$$\Rightarrow \sum \ell(m_v) = 0$$

$\ell(m_v) \in N_v$ den, $\ell(m_v)$'ler pozitiftir.

$$\Rightarrow \ell(m_v) = 0$$

$$\Rightarrow m_v \in çek(\ell), m_v \in M_v$$

$$\Rightarrow m_v \in çek(\ell) \cap M_v$$

$$\Rightarrow m \in çek(\ell) \cap M_v$$

O halde,

$$çek(\ell) \subset \oplus_{v\in Z}(çek(\ell) \cap M_v) \qquad (2)$$

(1)-(2) den

$$çek(\ell) = \oplus_{v\in Z}(çek(\ell) \cap M_v)$$

elde edilir.

2.4.18 Yardımcı Teorem: $R = \oplus_{n\geq 0} R_n$ bir Noether derecelendirilmiş k-cebiri ve $M = \oplus_{v\in Z} M_v$ sonlu üretilmiş R-modül olsun. Bu durumda,

(1) $v<m$ olmak üzere $M_v = <0>$ olacak şekilde en az bir tane $m \in Z$ vardır,

(2) $\forall v$ için $boy_k(M_v) < \infty$'dir, [10].

2.5 Hilbert Fonksiyon ve Hilbert Serisi

Bu bölümde, öncelikle derecelendirilmiş k-cebirlerinin Hilbert fonksiyonunun tanımı yapılacaktır. Sonra, bu fonksiyon, cebirlerin Hilbert serilerinin yazılmasında kullanılarak detaylı örnekler verilecektir.

2.5.1 Tanım: $R = \oplus_{n\geq 0} R_n$ sonlu üretilmiş derecelendirilmiş k-cebiri olsun. R'nin Hilbert fonksiyonu,

$$HF_R(n) := boy_k(R_n)$$

olarak tanımlanır. Burada $boy_k(R_n)$ k cismi üzerinde R_n vektör uzayının boyutudur ve $boy_k(R_n) < \infty$'dur.

$I = I_0 \oplus I_1 \oplus I_2 \oplus \cdots$ R'nin homojen ideali ise,

$$HF_I(n) := boy_k(I_n)$$

olarak tanımlanır.

2.5.2 Örnek: $I=<xz,z^2,y^3z,y^6>$, $R=k[x,y,z]$ halkasının derecelendirilmiş bir ideali olsun. Örnek 2.4.9'daki R/I derecelendirilmiş k-cebirinin Hilbert fonksiyonunu bulalım.

$$HF_{R/I}(0) = boy_k(sp\{1\}) = 1$$

$$HF_{R/I}(1) = boy_k(sp\{x,y,z\}) = 3 \ ,$$

$$HF_{R/I}(2) = boy_k(sp\{x^2,y^2,xy,yz\}) = 4,$$

$$HF_{R/I}(3) = boy_k(sp\{x^3,y^3,x^2y,xy^2,y^2z\}) = 5,$$

$$HF_{R/I}(4) = boy_k(sp\{x^4,y^4,x^3y,x^2y^2,xy^3\}) = 5,$$

$$HF_{R/I}(5) = boy_k(sp\{x^5,y^5,x^4y,x^3y^2,x^2y^3,xy^4\}) = 6,$$

$$HF_{R/I}(6) = boy_k(sp\{x^6, x^5z, x^4z^2, x^3y^3, x^2y^4, xy^5\}) = 6,$$

$$\vdots$$

$\forall n \geq 5$ için $HF_{R/I}(n) = 6$' dir.

2.5.3 Tanım: $R = \oplus_{n\geq 0} R_n$ sonlu üretilmiş k-cebiri olsun. HF_R, R'nin Hilbert fonksiyonu olmak üzere HF_R ile üretilen seriye R'nin Hilbert Serisi denir.

$$HS_R(z) := \sum_{n=0}^{\infty} HF_R(n) \cdot z^n \text{ 'dir.}$$

2.5.4 Örnek: $I=<xz, z^2, y^3z, y^6>$, $R=k[x,y,z]$ halkasının derecelendirilmiş bir ideali olsun. Örnek 2.4.9' daki R/I derecelendirimiş k-cebirinin Hilbert serisini bulalım. Örnek 2.5.2'de

$$HF_{R/I}(0) = 1,$$

$$HF_{R/I}(1) = 3,$$

$$HF_{R/I}(2) = 4,$$

$$HF_{R/I}(3) = 5,$$

$$HF_{R/I}(4) = 5,$$

$$HF_{R/I}(5) = 6,$$

$$HF_{R/I}(6) = 6,$$

$$\vdots$$

elde edilmişti. Bu durumda, R/I'nın Hilbert serisi:

$$HS_{R/I}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} HF_{R/I}(n) \cdot z^n$$

$$= 1\cdot z^0 + 3\cdot z^1 + 4\cdot z^2 + 5\cdot z^3 + 5\cdot z^4 + 6\cdot z^5 + 6\cdot z^6 + 6\cdot z^7 + \cdots$$

olur.

2.5.5 Örnek: I=<x^3,x^2y^3,y^6>, R=$k[x,y]$ halkasının derecelendirilmiş bir ideali olsun. Öncelikle, I'nın Hilbert fonksiyonunu bulalım.

$$HF_I(0) = HF_I(1) = HF_I(2) = boy_k(k) = 0$$

$$HF_I(3) = boy_k(sp\{x^3\}) = 1,$$

$$HF_I(4) = boy_k(sp\{x^4, x^3y\}) = 2,$$

$$HF_I(5) = boy_k(sp\{x^5, x^4y, x^3y^2, x^2y^3\}) = 4,$$

$$HF_I(6) = boy_k(sp\{x^6, x^5y, x^4y^2, x^3y^3, x^2y^4, y^6\}) = 6,$$

$$HF_I(7) = boy_k(sp\{x^7, x^6y, x^5y^2, x^4y^3, x^3y^4, x^2y^5, xy^6, y^7\}) = 8,$$

$$HF_I(8) = boy_k(sp\{x^8, x^7y, x^6y^2, x^5y^3, x^4y^4, x^3y^5, x^2y^6, xy^7, y^8\}) = 9,$$

$$HF_I(9) = boy_k(sp\{x^9, x^8y, x^7y^2, x^6y^3, x^5y^4, x^4y^5, x^3y^6, x^2y^7, xy^8, y^9\}) = 9,$$

$$\vdots$$

$\forall$ $n \geq 7$ için $HF_I(n)=n+1$'dir.

Şimdi ise I'nın Hilbert serisini bulalım.

$$HS_I(z) := \sum_{n=0}^{\infty} HF_I(n)\cdot z^n$$

$$HS_I(z) = 1\cdot z^3 + 2\cdot z^4 + 4\cdot z^5 + 6\cdot z^6 + 8\cdot z^7 + 9\cdot z^8 + 10\cdot z^9 + 11\cdot z^{10} + \cdots$$

$$= (1 + 2\cdot z + 3\cdot z^2 + 4\cdot z^3 + 5\cdot z^4 + \cdots) - z^6 - 2\cdot z^5 - 3\cdot z^4 - 3\cdot z^3 - 3\cdot z^2 - 2\cdot z - 1$$

Burada,

$$1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+\cdots=\frac{1}{1-z} \quad \text{ve}$$

$$\frac{d}{dz}(1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+\cdots)=1+2\cdot z+3\cdot z^2+4\cdot z^3+5\cdot z^4+\cdots=\frac{d}{dz}(\frac{1}{1-z})=\frac{1}{(1-z)^2}$$

eşitliklerini kullanarak,

$$HS_I(z)=\frac{1}{(1-z)^2}-z^6-2\cdot z^5-3\cdot z^4-3\cdot z^3-3\cdot z^2-2\cdot z-1$$

$$=\frac{1}{(1-z)^2}-z^6-2z^5-3z^4-3z^3-3z^2-2z-1$$

$$=\frac{z^3+z^5-z^8}{(1-z)^2}$$

elde edilir.

2.5.6 Teorem: $R=\oplus_{n\geq 0}R_n$ bir derecelendirilmiş k-cebiri ve $I=\oplus_{n\geq 0}I_n$ derecelendirilmiş ideali olsun. Bu durumda,

$$HF_{R/I}(n)=HF_R(n)-HF_I(n)\text{'dir, [9].}$$

2.5.7 Sonuç: $R=\oplus_{n\geq 0}R_n$ derecelendirilmiş k-cebiri ve $I=\oplus_{n\geq 0}I_n$

derecelendirilmiş ideali olsun. Bu durumda,

$$HS_{R/I}(z)=HS_R(z)-HS_I(z)\text{'dir, [9].}$$

İspat: $HS_R(z)-HS_I(z)=\sum_{n\geq 0}HF_R(n)\cdot z^n-\sum_{n\geq 0}HF_I(n)\cdot z^n$

$$=\sum_{n\geq 0}(HF_R(n)-HF_I)\cdot z^n$$

$$=\sum_{n\geq 0}HF_{R/I}(n)\cdot z^n$$

$$= HS_{R/I}(z)$$

2.5.8 Teorem: $R=k[x_1,x_2,...,x_n]$ ve $1\leq i\leq n$ için $\deg(x_i)=1$ olsun. Bu durumda,

$$HS_R(z) = \frac{1}{(1-z)^n}$$

dir, [9].

2.5.9 Örnek: $I=<x^3,x^2y^3,y^6>$, $R=k[x,y]$ halkasının derecelendirilmiş bir ideali olsun. R/I'nın Hilbert serisini rasyonel formda yazalım. $R=k[x,y]$ olduğundan Teorem 2.5.8'e göre

$$HS_R(z) = \frac{1}{(1-z)^2}\text{' dir.}$$

Örnek 2.5.5' te

$$HS_I(z) = \frac{z^3+z^5-z^8}{(1-z)^2}$$

olduğunu biliyoruz. Sonuç 2.5.7'den

$$HS_{R/I}(z) = HS_R(z) - HS_I(z)$$

$$HS_{R/I}(z) = \frac{1-z^3-z^5+z^8}{(1-z)^2}$$

elde edilir.

2.5.10 Yardımcı Teorem: $R = \oplus_{n\geq 0} R_n$ bir Noether derecelendirilmiş k-cebiri ve M sonlu üretilmiş derecelendirilmiş R-modül olsun.

(1) $N\subset M$ derecelendirilmiş alt modül iken, $\forall\, n$ için,

$$HF_M(n) = HF_N(n) + HF_{M/N}(n)$$

ve

$$HS_M(z) = HS_N(z) + HS_{M/N}(z)$$

(2) d bir tamsayı olsun. Bu durumda, $\forall$ n için;

$$HF_{M(d)}(n) = HF_M(n+d)$$

$$HS_{M(d)}(z) = z^{-d} \cdot HS_M(z)$$

(3) d negatif olmayan bir tamsayı , $f \in R_d$ ve $\ell : M(-d) \to M, \ell(m) := f \cdot m$ olarak tanımlansın. Bu durumda $çek(\ell)$ ve $M/_{im(\ell)}$ derecelendirilmiş $R/<f>$-modüllerdir ve

$$HF_M(n) - HF_M(n-d) = HF_{M/_{im(\ell)}}(n) - HF_{çek(\ell)}(n-d)$$

ve

$$HS_M(z) - z^d \cdot HS_M(z) = HS_{M/_{im(\ell)}}(z) - z^d \cdot HS_{çek(\ell)}(z).$$

İspat: (1)'in ispatı Teorem 2.5.6 ve Sonuç 2.5.7 deki gibidir. (2)'nin ispatı $M(d)$'nin tanımından açıktır. (3)'ün ispatı ise, (1) ve (2) kullanıldığında açıkça görülmektedir [9].

2.5.11 Teorem: : $R = \oplus_{n\geq 0} R_n$, $x_1, x_2, \cdots, x_r \in R_1$ bağımsız değişkenleri tarafından üretilen derecelendirilmiş k-cebiri olsun. Bu durumda, herhangi bir sonlu üretilmiş derecelendirilmiş R-modül $M = \oplus_{v\in Z} M_v$ için,

$$HS_M(z) = \frac{Q(z)}{(1-z)^r}$$

Burada, Z tamsayılar kümesi olmak üzere, $Q(z) \in Z[z]$' dir, [10].

İspat: Teoremin ispatı r üzerinden tümevarım metodu kullanılarak yapılacaktır.

- $r=0$ olduğu durumda, M bir sonlu boyutlu k vektör uzyıdır ve $\forall v \geq n$ için M_v=<0> olacak şekilde bir n tam sayısı vardır. Böylelikle, $HS_M(z) \in Z[z]$' dir.
- İfadenin $r-1$ için doğru olduğunu varsayalım ve r için doğru olduğunu gösterelim:

$$\ell : M(-1) \to M, \ell(m) := x_1 \cdot m$$

olarak tanımlayalım. Yardımcı Teorem 2.5.20 (3). şartı kullanarak

$$HS_M(z) - z \cdot HS_M(z) = HS_{M/im(\ell)}(z) - z \cdot HS_{çek(\ell)}(z)$$

yazılır. Eşitliği düzenlersek,

$$HS_M(z)(1-z) = HS_{M/im(\ell)}(z) - z \cdot HS_{çek(\ell)}(z) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (*)$$

elde edilir. Yine (3).şartta da verildiği üzere, $çek(\ell)$ ve $M/im(\ell)$, derecelendirilmiş $k[x_1, x_2, \cdots, x_r] / <x_1> \cong k[x_2, \cdots, x_r]$- modüllerdir. Tümevarım hipotezinden,

$$HS_{M/im(\ell)}(z) = \frac{Q_1(z)}{(1-z)^{r-1}} \text{ ve } HS_{çek(\ell)}(z) = \frac{Q_2(z)}{(1-z)^{r-1}}$$

olarak yazılır. Bu eşitlikler ($*$)' da yerine yazılırsa,

$$HS_M(z) \cdot (1-z) = \frac{Q_1(z)}{(1-z)^{r-1}} - z \cdot \frac{Q_2(z)}{(1-z)^{r-1}}$$

$$HS_M(z) = \frac{Q(z)}{(1-z)^r}$$

elde edilir.

2.6 Hilbert Polinom

Yeterince büyük bir n tamsayısı için, $HF_R(n)$ fonsiyonu, derecesi $d-1$ olan rasyonel katsayılı bir $P_R(x)$ polinomuna dönüştürülebilir. Bu $P_R(x)$ polinomuna R'nin Hilbert polinomu denir. Bu şekilde sonsuz olan Hilbert fonksiyonu, sonlu bir polinoma dönüşür. Bu bölümde, bir halkanın Hilbert polinomunun nasıl hesaplanacağı anlatılacaktır. Bu bölümdeki ispatlar [10] kitabından alınmıştır.

2.6.1 Tanım: $R = \oplus_{n\geq 0} R_n$ bir Noether derecelendirilmiş k-cebiri, $M = \oplus_{v\in Z} M_v$ sonlu üretilmiş R-modül ve

$$HF_M : Z \to Z,\ HF_M(n) = boy_k(M_n)$$

Hilbert fonksiyonu olsun. M'nin Hilbert-Poincarè serisi, HP_M ,

$$HP_M(z) := \sum\nolimits_{v\in Z} HF_M(v) z^v \in Z[[z]]\cdot[z^{-1}]$$

olarak tanımlanır.

Uyarı: Şimdi Teorem 2.5.11' den

$$HP_M(z) = \frac{Q(z)}{(1-z)^r},$$

ve

$$0 \leq s \leq r,\ G(z) = \sum_{v=0}^{d} g_v . z^v \in Z[[z]]\ ,\ g_d \neq 0 \text{ ve } G(1) \neq 0 \text{ olmak üzere}$$

$$HP_M(z) = \frac{G(z)}{(1-z)^s}$$

yazılır. Yani s, $HP_M(z)$' nin z=1'deki kutbudur.

2.6.2 Tanım: $R = \oplus_{n\geq 0} R_n$ bir Noether derecelendirilmiş k-cebiri ve $M = \oplus_{v\in Z} M_v$ sonlu üretilmiş R-modül olsun.

(1) $Q(z)$ ve $G(z)$'ye, sırasıyla, M modülünün 1. Hilbert serisi ve 2. Hilbert serisi denir.

(2) İkinci Hilbert serisi G(z)'nin derecesi d ve yukarıdaki şekilde tanımlanmış olsun. Bu durumda,

$$P_M := \sum_{v=0}^{d} g_v . \binom{s-1+n-v}{s-1} \in Q(n)$$

M'nin Hilbert polinomudur. Burada,

$$\text{k<0 için,} \binom{n}{k} = 0\text{'dır.}$$

2.6.3 Sonuç: Üstteki varsayımlarla birlikte, P_M, $s-1$ dereceli ve rasyonel katsayılı bir polinomdur ve $n \geq d$ için

$$P_M(n) = HF_M(n)$$

eşitliği sağlanır. Üstelik, $a_{s-1} = G(1) > 0$ olmak üzere,

$$P_M = \sum_{v=0}^{s-1} a_v . \binom{n}{v} = \frac{a_{s-1}}{(s-1)!} + \text{derecesi } n\text{'den az olan terimler.}$$

eşitliği sağlanacak şekilde en az bir tane $a_v \in Z$ vardır.

İspat: $HS_M(z) = \sum_{v \in Z} HF_M(v) t^v$

$$= \frac{G(z)}{(1-z)^r}$$

$$G(z) = \sum_{v=0}^{d} g_v . z^v \quad \text{ve} \quad \frac{1}{(1-z)^r} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \binom{s-1+\mu}{s-1} . z^\mu$$

eşitlikleri kullanılarak,

$$G(z) = \sum_{\nu=0}^{d} g_\nu z^\nu \cdot \sum_{\mu=0}^{\infty} \binom{s-1+\mu}{s-1} . z^\mu$$

olarak yazılır. Buradan $n \geq d$ için aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$\sum_{\nu \in Z} HF_M(\nu) t^\nu = \sum_{\nu=0}^{d} g_\nu z^\nu \cdot \sum_{\mu=0}^{\infty} \binom{s-1+\mu}{s-1} . z^\mu$$

$$HF_M(n) = \sum_{\nu=0}^{d} g_\nu \binom{s-1+n-\nu}{s-1}$$

Tanım 2.6.2'den $P_M = \sum_{\nu=0}^{d} g_\nu \binom{s-1+n-\nu}{s-1}$ olduğunu bildiğimizden,

$$HF_M(n) = P_M \text{ ' dir.}$$

$G(z) = \sum_{\nu=0}^{d} g_\nu z^\nu$ ' dan $P_M = \sum_{\nu=0}^{d} g_\nu \dfrac{n^{s-1}}{(s-1)!}$ polinomunun en yüksek dereceli teriminin

$$G(1) = \sum_{\nu=0}^{d} g_\nu \text{ 'dir.}$$

O halde,

$$P_M = G(1) \cdot \frac{n^{s-1}}{(s-1)!}$$

yazılabilir. Buradan, P_M polinomunun derecesinin $s-1$ olduğu görülür.

Son olarak uygun bir $a_\nu \in Z, a_{s-1} > 0$ için $P_M = \sum_{\nu=0}^{s-1} a_\nu \binom{n}{\nu}$ olduğunu ispatlayalım. Böyle bir $a_\nu \in Z$ bulabildiğimizi varsayalım. Böylece,

$$P_M = \frac{a_{s-1}}{(s-1)!} \cdot n^{s-1} + \text{ derecesi } n\text{'den az olan terimler}$$

elde edilir. Yeterince büyük bir n için $HF_M(n) = P_M(n) > 0$ olmasından $a_{s-1} > 0$ olur.

Bu duruma uygun $a_v \in Z$ katsayılarının varlığı aşağıdaki yardımcı teoremin bir sonucudur.

2.6.4 Yardımcı Teorem: $f \in Q[t]$ derecesi m olan bir polinom ve n_0'dan büyük veya eşit her n için $f(n) \in Z$ olacak şekilde $n_0 \in N$ olsun. Bu durumda uygun bir $a_v \in Z$ için,

$$f(n) = \sum_{v=0}^{m} a_v \binom{n}{v} \text{'dir.}$$

İspat: $g(n) := f(n+1) - f(n)$ olsun. f polinomunun derecesi m ve $f(n) \in Z$ olduğundan $g(n)$ polinomunun derecesi $m-1$ ve $g(n) \in Z$' dir.

m üzerinde tümevarımla ispat yapılacaktır.

$$g(n) = g(n) = \sum_{v=0}^{m-1} b_v \binom{n}{v}$$

olacak şekilde bir $b_v \in Z$ olduğunu varsayalım. Şimdi aşağıdaki şekilde bir h polinomu düşünelim.

$$h(n) := f(n) - \sum_{v=0}^{m-1} b_{v-1} \binom{n}{v}$$

Bu durumda,

$$h(n+1) - h(n) = f(n+1) - \sum_{v=1}^{m} b_{v-1} \binom{n+1}{v} - \left(f(n) - \sum_{v=1}^{m} b_{v-1} \binom{n}{v} \right)$$

$$= f(n+1) - f(n) - \sum_{v=1}^{m} b_{v-1} \left(\binom{n+1}{v} - \binom{n}{v} \right)$$

$$= g(n) - \sum_{\nu=1}^{m} b_{\nu-1}\left(\binom{n+1}{\nu} - \binom{n}{\nu}\right)$$

$$= g(n) - \sum_{\nu=0}^{m-1} b_{\nu}\binom{n}{\nu} = 0 \text{ olur.}$$

Buradan, $\forall n \in N$ için

$$h(n) = h(0)$$

ve böylece h polinomunun tanımlanışından,

$$f(n) = h(n) + \sum_{\nu=0}^{m-1} b_{\nu-1}\binom{n}{\nu} = h(0) + \sum_{\nu=1}^{m} b_{\nu-1}\binom{n}{\nu}$$

olarak yazılır. Burada, $f(n) = \sum_{\nu=0}^{m} a_{\nu}\binom{n}{\nu}$ olarak yazılmak istenirse, $a_0 = h(0)$ ve $\nu \geq 1$ için $a_\nu = b_{\nu-1}$ olarak seçilmelidir.

Hilbert polinom ve Hilbert- Poincarė serisinin birbirlerini belirlediklerinden, Hilbert polinom yazabilmek için Hilbert-Poincarė serisini hesaplamak yeterli olacaktır. Hesaplama yapmadan önce gerekli bir sonuçtan bahsedelim.

2.6.5 Yardımcı Teorem: $I \subset k[x] := k[x_1, x_2, x_3 \ldots, x_r]$ homojen ideal ve $f \in k[x]$ derecesi d olan bir polinom olsun. Bu durumda,

$$HP_{k[x]/I}(t) = HP_{k[x]/<I,f>}(t) + t^d HP_{k[x]/<I:<f>>}(t)$$

İspat: [9]

2.6.6 Örnek: $k[x] := k[x_1, x_2, x_3 \ldots, x_r]$ polinom halkası olsun.

Bu durumda,

$$HF_{k[x]}(n) = P_{k[x]}(n) = \binom{n+r-1}{r-1}.$$

Üstelik,

$$HP_{k[x]}(t)=\sum_{v=0}^{\infty}\binom{r-1+v}{r-1}.t^{v}=\frac{1}{(1-t)^{r}}$$

2.6.7 Örnek: $I:=<xz,yz>\subset k[x,y,z]$ olsun $f:=z$ olarak seçelim. Burada $r=3$ ve $d=1$'dir.

$$<I,f>=<xz,yz,z>=<z>$$

ve böylece

$$k[x,y,z]/<I,f>=k[x,y,z]/<z>=k[x,y]$$

olur.

$$(I:<f>)=<xz,yz>:<z>=\{f\,|\,f.z\in(xz,yz)\}=\{f\,|\,fz=Axz+Byz\}=\{f\,|\,fz=z[Ax+By)\}$$

$$=\{f\,|\,f=Ax+By\}=<x,y>$$

Buradan,

$$k[x,y,z]/(I:<f>)=k[x,y,z]/<x,y>=k[x]$$

elde edilir. 2.6.6 Örnekten,

$$HP_{k[x,y]}(t)=\frac{1}{(1-t)^{2}}\quad \text{ve}\quad HP_{k[z]}(t)=\frac{1}{1-t}$$

olduğu açıktır.

Yardımcı Teorem 2.6.5' i kullanarak,

$$HP_{k[x,y,z]/I}(t)=HP_{k[x,y,z]/<I,z>}(t)+t.HP_{k[x,y,z]/(I:<z>)}(t)$$

$$=\frac{1}{(1-t)^{2}}+\frac{t}{1-t}=\frac{1+t-t^{2}}{(1-t)^{2}}=\frac{G(t)}{(1-t)^{s}}$$

olur. Burada, $s=2$, $G(t)=-t^{2}+t+1$ ve $0\leq s\leq r$ $(0\leq 2\leq 3)$.

$G(t)=\sum_{v=0}^{d} g_v . t^v$ olduğundan,

$$d=2 \ , g_0=1 \ , g_1=1 \ , g_2=-1 \text{ 'dir.}$$

$$P_M:=\sum_{v=0}^{d} g_v . \binom{s-1+n-v}{s-1} = g_0\binom{1+n-0}{1} + g_1\binom{1+n-1}{1} + g_2\binom{1+n-2}{1}$$

$$=1(n+1)+1.n-1.(n-1)=n+1+n-n+1=n+2$$

ve böylece,

$$P_{k[x,y,z]/<xz,yz>}(n)=n+2$$

elde edilir.

2.7 Filtrasyon ve İlişkilendirilmiş Derecelendirilmiş Halka

Bu bölümde, filtrasyon tanımı ve bununla ilgili olarak ilişkilendirilmiş derecelendirilmiş halka tanımları yapılacaktır. İlerideki bölümlerde, lokal halkaların Hilbert fonksiyonu daha detaylı anlatılacağından, bu kısımda sadece tanım ve temel bilgiler verilecektir.

2.7.1 Tanım: R değişmeli ve birimli bir halka, I, R'nin bir öz ideali ve M bir R-modül olsun. M_i' ler M R-modülünün alt modülleri olmak üzere, M modülünün, Γ, I filtrasyonu, $\forall n \in N_0$ için $I \cdot M_n \subseteq M_{n+1}$ olacak şekilde, M'nin altmodüllerinin

$$M = M_0 \geq M_1 \geq \cdots,$$

şeklinde bir azalan zinciridir. M modülünün, Γ, I-filtrasyonu, yeterince büyük n sayısı için $I \cdot M_n = M_{n+1}$ ise, Γ'ya kararlı I-filtrasyonu denir.

2.7.2 Örnek: M bir R-modül ve $n \geq 0$ için $M_n := I^n \cdot M$ olmak üzere $\Gamma = \{M_n\}_{n\geq 0}$, M' nin kararlı I-filtrasyonudur:

$$M = I \cdot M \supset I^2 \cdot M \supset I^3 \cdot M \supset I^4 \cdot M \supset \cdots$$

ve $\forall n \geq 0$ için $I \cdot I^n \cdot M \subset I^{n+1} \cdot M$, yani $I \cdot M_n \subset M_{n+1}$ olduğundan, Γ, I-filtrasyonudur. Üstelik $I \cdot I^n \cdot M = I^{n+1} \cdot M$,yani $I \cdot M_n = M_{n+1}$ olduğundan, Γ, *M*'nin karalı *I*-filtrasyonudur.

2.7.3 Yardımcı Teorem: $\Gamma = \{M_n\}_{n \geq 0}$ *M*'nin *I*-filtrasyonu ve *N*, *M*'nin alt modülü olsun. Bu durumda $\{N \cap M_n\}_{n \geq 0}$, *N*'nin *I*-filtrasyonudur, [11].

İspat: $\Gamma = \{M_n\}_{n \geq 0}$ *M*'nin *I*-filtrasyonu olduğundan,

$$M = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset \cdots$$

ve $\forall n \geq 0$ için, $I \cdot M_n \subseteq M_{n+1}$' dir. O halde,

$$N \cap M_0 \supset N \cap M_1 \supset N \cap M_2 \supset \cdots$$

ve

$$I \cdot (M_n \cap N) \subset I \cdot M_n \cap I \cdot N \subset M_{n+1} \cap N$$

olur. Bu, $\{N \cap M_n\}_{n \geq 0}$, *N*'nin *I*-filtrasyonu demektir.

2.7.4 Tanım: *R* değişmeli birimli bir halka ve *I*, *R* halkasının bir özideali olsun. *I* idealine göre *R*' nin ilişkilendirilmiş derecelendirilmiş halkası, $gr_I R$,

$$gr_I R := R/I \oplus I/I^2 \oplus I^2/I^3 \oplus \ldots = \oplus_{n \geq 0} I^n / I^{n+1}$$

olarak tanımlanır.

İlişkilendirilmiş derecelendirilmiş halkadaki çarpma işlemi iyi tanımlıdır: $a \in I^i, b \in I^j$ için,

$$(a + I^i)(b + I^{j+1}) := ab + I^{i+j+1} \in I^{i+j} / I^{i+j+1}$$

A bir lokal halka ve m, A'nın maksimal ideali olsun. A'nın ilişkilendirilmiş derecelendirilmiş halkası,

$$gr_m A := \oplus_{n\geq 0} m^n / m^{n+1}$$

olarak ifade edilir.

Benzer şekilde, M bir R-modül ve $\Gamma = \{M_n\}_{n\geq 0}$, M'nin I-filtrasyonu olsun. Γ filtrasyonuna göre, M'nin ilişkilendirilmiş derecelendirilmiş modülü,

$$gr_\Gamma A := \oplus_{n\geq 0} M_n / M_{n+1} \text{ 'dir.}$$

2.7.5 Yardımcı Teorem: M sonlu üretilmiş R-modül ve Γ, kararlı I-filtrasyonu olsun. Bu durumda $gr_\Gamma(M)$ sonlu üretilmiş bir $gr_I(R)$-modüldür, [12].

2.7.6 Uyarı: A, maksimal ideali m olan bir lokal Noether halkası, M sonlu üretilmiş bir A-modül olsun. Bu durumda, M modülünün doğal kararlı m-filtrasyonu, Γ,

$$M = m^0 M_0 \geq mM_1 \geq m^2 M_2 \geq \cdots,$$

ile verilir. Böylece 2.7.5 Yardımcı Teoreminden, $gr_\Gamma(M)$ sonlu üretilmiş bir $gr_I(A)$-modüldür. Özel olarak, $gr_m(A)_0 = A/m$ bir cisimdir ve eğer, $m_1, m_2, \ldots, m_s$'ler bir A-modül olarak m idealini üretiyor ise

$$gr_m(A) = (A/m)[m_1 + m^2, \ldots, m_s + m^2].$$

$gr_m(A)$ bir A/m-cebiri olarak sonlu üretilmiştir.

2.7.7 Tanım: M modülünün Hilbert fonksiyonu,

$$HF_M(n) := HF_{gr_\Gamma(M)}(n) = boy_{R/M}\, {m^n M}/{m^{n+1} M}$$

olarak tanımlanır.

A, k cismi üzerinde bir lokal Noether halkası, m, A'nın maksimal ideali ve $\mu(I)$, A'nın I idealinin üreteçlerinin minimal sayısı olsun. A'nın Hilbert fonksiyonu, nümerik bir fonksiyon olup, A'nın ilişkilendirilmiş derecelendirilmiş halkasının Hilbert fonksiyonu ile tanımlanır. Bir başka deyişle,

$$HF_A : N \to N \text{ ve } n \in N \text{ olmak üzere,}$$

$$HF_A(n) := boy_k(m^n / m^{n+1}) = \mu(m^n) \text{ ' dir.}$$

2.7.8 Tanım: A, k cismi üzerinde bir lokal Noether halkası, m, A'nın maksimal ideali ve HF_A' da A'nın Hilbert fonksiyonu olsun. HF_A fonksiyonu tarafından üretilen kuvvet serisine, A'nın Hilbert serisi denir.

Bu durumda,

$$HS_A(z) := \sum_{n=0}^{\infty} HF_A(n) \cdot z^n \text{ 'dir.}$$

Hilbert-Serre Teoreminden, $HS_A(z)$ Hilbert serisi rasyonel formda aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$HS_A(z) = \frac{h_A(z)}{(1-z)^d}.$$

Burada, $h_A(z)$, katsayıları tamsayı ve $h_A(1) \neq 0$ olan bir polinomdur. Aynı zamanda bu polinoma A'nın h-polinomu denir. Buradaki d, A ve $gr_m A$ 'nın Krull boyutudur.

R bir halka ve P asal ideal olsun. P'nin Krull boyutu;

$$P = P_0 \supset P_1 \supset P_2 \supset \ldots \supset P_r$$

azalan asal ideal zincirinin maksimum olanının uzunluğudur.

2.7.9 Tanım: M, bir A-modül olmak üzere, M'nin uzunluğu $\lambda(M)$ şeklinde gösterilir. Yeterince büyük bir n tamsayısı için, $\lambda(A/m^{n+1})$'e A'nın Hilbert-Samuel polinomu denir ve $P_M^{\,1}(X)$ ile gösterilir. Yine,

$$P_M^1(X) := \sum_{i=0}^{d} (-1)^i e_i(m) \binom{X+d-i}{d-i}.$$

Burada, $e_0(m)$, $e_1(m)$,..., $e_d(m)$, A'nın Hilbert katsayılarıdır. Özel olarak, $e_0(m)$'a A'nın katlılığı, $e_1(m)$'e A'nın indirgeme sayısı denir. $e_i(m)= e_i$ olmak üzere, $\forall i \geq 0$ için,

$$e_i = \frac{h_A^{(i)}(1)}{i!}$$

Bu eşitlikte, $h_A^{(0)}(1)=h_A(1)$ ve $h_A^{(i)}$ ise $h_A(z)$ polinomunun i. dereceden türevidir.

3. TEKTERİMLİ SIRALAMALAR VE STANDART BAZ

Bu bölümde, global ve lokal tekterimli sıralamaları anlatılarak, standart baz algoritması verilecek ve standart baz hesabı yapılacaktır.

Bu bölümdeki tanımlar ve algoritmalar [9] kitabından aynen alınmıştır.

3.1 Global ve Lokal Sıralamalar

3.1.1 Tanım: $k[x] := k[x_1, x_2, \cdots, x_r]$, r değişkenli polinom halkası olsun. ">" tekterimli bağıntısı, $Z^n_{\geq 0} = \{\cdots\}$ veya buna denk olarak $\alpha \in Z_{\geq 0}{}^n$ iken x^α tekterimlilerinin kümesi üzerinde, $\alpha, \beta, \theta \in Z_{\geq 0}{}^n$ olmak üzere

- **i.** $>$, Z^n üzerinde lineer sıralama,
- **ii.** $\alpha > \beta \Rightarrow \alpha + \theta > \beta + \theta$
- **iii.** $>$, $Z_{\geq 0}{}^n$ üzerinde iyi sıralı, yani, $Z^n_{\geq 0}$' nın boş kümeden farklı her alt kümesinin ">" bağıntısı altında bir en küçük elemanı vardır,

koşullarını sağlayan bir bağıntıdır.

3.1.2 Tanım: ">" herhangi bir tekterimli sıralaması olsun. $f \in k[x_1, x_2, \cdots, x_r]$ polinomu, $x^\alpha > x^\beta > \cdots > x^\theta$ ve $a_\alpha, a_\beta, \cdots, a_\theta \in k$ olmak üzere,

$$f = a_\alpha \cdot x^\alpha + a_\beta \cdot x^\beta + \cdots + a_\theta \cdot x^\theta$$

şeklinde tek türlü yazılır.

(1) $LM(f) := x^\alpha$ olmak üzere $LM(f)$' ye f' nin en yüksek dereceli tekterimlisi ,

(2) $LE(f) := \alpha$ olmak üzere $LE(f)$' ye f' nin derecesi,

(3) $LT(f) := a_\alpha \cdot x^\alpha$ olmak üzere $LT(f)$' ye f' nin en yüksek dereceli terimi,

(4) $LC(f) := a_\alpha$ olmak üzere $LC(f)$'ye f'nin başkatsayısı,

(5) $t(f) := f - LT(f) = a_\beta \cdot x^\beta + \cdots + a_\theta \cdot x^\theta$ olmak üzere $t(f)$'ye f'nin kuyruğu denir.

3.1.3 Tanım: ">" , $\{ x^\alpha \mid \alpha \in N^n \}$ tekterimli kümesi üzerinde bir tekterimli sıralaması olsun.

(1) $\forall \alpha \neq (0,0,...,0)$ için $x^\alpha > 1$ ise ">" sıralamasına **global sıralama,**

(2) $\forall \alpha \neq (0,0,...,0)$ için $x^\alpha < 1$ ise ">" sıralamasına **lokal sıralama,**

(3) ">" sıralaması ne global sıralama ne de lokal sıralama ise, ">" sıralamasına da **karışık sıralama** denir.

3.1.4 Örnek: Global sıralamalar:

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n), \beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) \in Z_{\geq 0}{}^n$ ve $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$, $|\beta| = \sum_{i=1}^{n} \beta_i$ olsun.

i. Alfabetik Sıralama (lp): $\alpha - \beta \in Z_{\geq 0}{}^n$ vektör farkında en soldaki sıfırdan farklı değer pozitif ise $\alpha >_{lp} \beta$ 'dir. Böylece $x^\alpha >_{lp} x^\beta$ olur.

ii. Derecelendirilmiş Alfabetik Sıralama (dp): $|\alpha| > |\beta|$ veya $|\alpha| = |\beta|$ iken $\alpha >_{lp} \beta$ ise $\alpha >_{dp} \beta$'dir. Böylece $x^\alpha >_{dp} x^\beta$ olur.

iii. Ters Derecelendirilmiş Alfabetik Sıralama (Dp): $|\alpha| > |\beta|$ veya $|\alpha| = |\beta|$ iken $\alpha - \beta \in Z_{\geq 0}{}^n$ vektör farkında en sağdaki terim negatif oluyor ise $x^\alpha >_{Dp} x^\beta$ olur.

Not: $>_{lp}$ sıralaması bir global sıralamadır:

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ ve $\beta = (0,0,\cdots,0) = 0$ olsun. Burada, $\alpha \in Z_{\geq 0}{}^n$ olduğunu bildiğimizden,

$$\alpha - \beta = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in Z_{\geq 0}{}^n$$

vektör farkında en soldaki sıfırdan farklı değerin pozitif olduğunu görebiliriz. O halde, $x^\alpha >_{lp} x^\beta = x^0$' dır. Böylece, $x^\alpha >_{lp} 1$ olur.

3.1.5 Örnek:

(i) $k[x,y,z]$ üzerinde $x^\alpha = x \cdot y^2$ ve $x^\beta = y^3 \cdot z^4$ tekterimlilerini alalım. Burada, $\alpha = (1,2,0)$, $\beta = (0,3,4)$, $\alpha - \beta = (1,-1,-4)$ ve $1 > 0$ olduğu için $\alpha >_{lp} \beta$' dir. Bu sebeple, $x^\alpha >_{lp} x^\beta$' dir.

(ii) $k[x,y,z]$ üzerinde $x^\alpha = x \cdot y^2 \cdot z^3$ ve $x^\beta = x^3 \cdot y^2$ tekterimlilerini alalım. Burada, $\alpha = (1,2,3)$, $\beta = (3,2,0)$, ve $|\alpha|$=1+2+3=6, $|\beta|$=3+2+0=5'dan $|\alpha| > |\beta|$ olduğundan $\alpha >_{dp} \beta$' dir. Buradan, $x^\alpha >_{dp} x^\beta$' dir.

(iii) $k[x,y,z]$ üzerinde $x^\alpha = x \cdot y^5 \cdot z^2$ ve $x^\beta = x^4 \cdot y \cdot z^3$ tekterimlilerini alalım. Burada $\alpha = (1,5,2)$, $\beta = (4,1,3)$, ve $|\alpha|$=8, $|\beta|$=8'dan $|\alpha| = |\beta|$ olduğundan diğer durumu gözönüne alırız. $\alpha - \beta = (1,0,-1)$ ve $-1 < 0$ olduğu için $\alpha >_{Dp} \beta$' dir. Bu sebeple $x^\alpha >_{Dp} x^\beta$ olur.

3.1.6 Örnek:

Lokal sıralamalar: $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n), \beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) \in Z_{\geq 0}{}^n$ ve $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$, $|\beta| = \sum_{i=1}^{n} \beta_i$ olsun.

(i) Negatif Alfabetik Sıralama (ls): $\alpha - \beta$ vektör farkında en soldaki sıfırdan farklı değer negatif ise $x^\alpha >_{ls} x^\beta$'dir.

(ii) Negatif Derecelendirilmiş Alfabetik Sıralama (*ds*): $|\alpha| < |\beta|$ veya $|\alpha| = |\beta|$ iken $\alpha - \beta$ vektör farkında en sağdaki sıfırdan farklı değer negatif oluyorsa $x^{\alpha} >_{ds} x^{\beta}$' dir.

(iii) Ters Negatif Derecelendirilmiş Alfabetik Sıralama (*Ds*): $|\alpha| < |\beta|$ veya $|\alpha| = |\beta|$ iken $\alpha - \beta$ vektör farkında en soldaki sıfırdan farklı değer pozitif oluyorsa $x^{\alpha} >_{Ds} x^{\beta}$'dir.

Not: $>_{ls}$ sıralaması lokal sıralamadır:

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ ve $\beta = (0,0,\cdots,0) = 0$ olsun. Burada, $\alpha \in Z_{\geq 0}^{\ n}$ olduğundan $\beta - \alpha = (-\alpha_1, -\alpha_2, \cdots, -\alpha_n)$ vektör farkında en soldaki sıfırdan farklı değerin negatif olduğunu görülür. O halde $x^{\beta} = x^{0} >_{ls} x^{\alpha}$' dır. Böylece, $1 >_{ls} x^{\alpha}$ olduğundan *ls* lokal sıralamadır.

3.1.7 Örnek:

(i) $k[x,y,z]$ üzerinde $x^{\alpha} = x^2 \cdot y \cdot z$ ve $x^{\beta} = y^4 \cdot z^5$ tekterimlilerini alalım. Burada, $\alpha = (2,1,1)$, $\beta = (0,4,5)$, $\beta - \alpha = (-2,3,4)$ ve $-2 < 0$ olduğu için

$$x^{\beta} >_{ls} x^{\alpha}\text{' dir.}$$

(ii) $k[x,y,z]$ üzerinde $x^{\alpha} = x^2 \cdot y^3 \cdot z^5$ ve $x^{\beta} = y^4 \cdot z^3$ tekterimlilerini alalım. Burada, $|\alpha| = 10$, $|\beta| = 7$ $|\alpha| > |\beta|$ olduğundan $x^{\beta} >_{ds} x^{\alpha}$ olur. $k[x,y,z]$ üzerinde $x^{\alpha} = x^3 \cdot y^2 \cdot z$ ve $x^{\beta} = x^2 \cdot y^2 \cdot z^2$ tekterimlilerini alalım.
Burada $|\alpha| = 6$, $|\beta| = 6$ eşitliğinden $|\alpha| = |\beta|$ olur. $\alpha - \beta = (1,0,-1)$ ve $-1 < 0$ olduğu için

$$x^{\alpha} >_{ds} x^{\beta}\text{' dir.}$$

(iii) $k[x,y,z]$ üzerinde $x^{\alpha} = x \cdot y^5 \cdot z^2$ ve $x^{\beta} = x^4 \cdot y \cdot z^3$ tekterimlilerini alalım.

Burada $\alpha=(1,5,2)$, $\beta=(4,1,3)$, ve $|\alpha|=8$, $|\beta|=8$ $|\alpha|=|\beta|$ olduğundan diğer duruma bakarız. $\alpha-\beta=(1,0,-1)$ ve $1>0$ olduğu için

$$x^{\alpha} >_{Ds} x^{\beta}\text{' dir.}$$

3.2 Standart Baz

Bir idealin veya modülün standart bazı, idealin veya modülün pek çok invaryantını, kümedeki elemanların baş tekterimlilerinden hesaplanmasını mümkün kılan bir özel üreteç kümesidir.

Bu kısımda, standart baz tanımı verilerek, standart baz algoritması anlatılacaktır.

Bu bölüm boyunca, "$>$" herhangi bir tekterimli sıralaması olmak üzere, $R=k[x]:=k[x_1,x_2,\cdots,x_r]_>$, $k[x]:=k[x_1,x_2,\cdots,x_r]$ halkasının "$>$"e göre lokalizasyonudur. Bir başka ifadeyle,

$$S_>=\{u\in k[x]\setminus\{0\} \mid LM(u)=1\}$$

olmak üzere,

$$R=S_>^{-1}k[x].$$

"$>$" sıralaması global ise, $R=k[x]$, "$>$" lokal sıralama ise, $R=k[x]_{<x>}$'dir.

3.2.1 Tanım: Sonlu bir $G\subset R$ için,

$$L(G):=<LM(g) \mid g\in G\setminus\{0\}>$$

şeklinde tanımlanan $L(G)$'ye G' nin baş ideali denir.

3.2.2 Tanım: I, R'nin bir ideali ve G, R'nin sonlu bir kümesi olsun.

(1) (1) $G \subset I$ ve $L(I) = L(G)$ ise G'ye I'nın "standart bazıdır" denir. Bir başka deyişle, G'nin standart baz olması, herhangi bir $0 \neq f \in I$ için $LM(g) \mid LM(f)$ şartını sağlayacak şekilde en az bir tane $g \in G$ olmasıdır.

(2) R üzerindeki ">" sıralaması global sıralama ise standart baza "Gröbner baz" adı verilir.

(3) G bir standart bazdır demek, G' nin G ile üretilen $<G>$ idealinin standart bazı olması demektir.

3.2.3 Tanım: R bir halka ve G, R'nin herhangi bir alt kümesi olsun. $f, g \in G$ ve $f \neq g$ için,

$$0 \notin G \text{ ve } LM(g) \nmid LM(f)$$

şartları sağlanıyor ise G'ye "karşılıklı indirgenmiş" denir. G karşılıklı indirgenmiş standart baz ise G'ye "minimal standart baz" denir.

3.2.4 Tanım: $G \subset R$ ve ζ, G' nin tüm sonlu listelerinin bir kümesi olsun.

$$NF: R x \zeta \to R,$$

$$(f, G) \mapsto NF(f \mid G),$$

dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyor ise, R üzerinde "normal form" adını alır:

$\forall\, G \in \zeta$ için,

(1) $NF(0 \mid G) = 0$, ve $\forall f \in R$ ve $G \in \zeta$ için,

(2) $NF(f \mid G) \neq 0 \Rightarrow LM(NF(f \mid G)) \notin L(G)$.

(3) $G = \{g_1, g_2, \cdots, g_s\}$ ise, $r := f - NF(f \mid G)$, G' ye göre bir standart gösterime sahip, yani, $r = 0$ veya $\forall i$ için $a_i \cdot g_i \neq 0$ olacak şekilde $LM(f) \geq LM(a_i g_i)$ olmak üzere

$$r = \sum_{i=1}^{s} a_i g_i \ , \ a_i \in R.$$

Eğer, $NF(f \mid G)$, G' ye göre indirgenmiş ise, NF' ye "indirgenmiş normal form" denir.

3.2.5 Tanım: NF: $Rx\zeta \to R$, Tanım 3.2.4'de tanımlanan dönüşüm olsun. R üzerinde, Tanım 3.2.4'deki (1), (2) şartlarını ve (3) yerine de

(3') $\forall f \in R$ ve $G \in \zeta$ için,

$$u \cdot f - NF(f \mid G)$$

G'ye göre standart baz gösterimine sahip olacak şekilde, bir tersinir $u \in R^*$ vardır.

şartını sağlayan NF dönüşümüne "zayıf normal form" denir.

Normal form algoritmasına geçmeden önce önemli bir tanım verelim.

3.2.6 Tanım: $f, g \in R/\{0\}$ ve $LM(f) = x^\alpha$, $LM(g) = x^\beta$ olsun.

$\gamma := okek(\alpha, \beta) := (mak(\alpha_1, \beta_1), ..., mak(\alpha_n, \beta_n))$ ve $okek(x^\alpha, x^\beta) := x^\gamma$

($okek(x^\alpha, x^\beta)$, x^α ve x^β'nın ortak katlarının en küçüğü) olmak üzere

$$S(f,g) := \frac{x^\gamma}{LT(f)} \cdot f - \frac{x^\gamma}{LT(g)} \cdot g$$

Polinomuna, f ve g polinomlarının S-polinomu denir.

3.2.7 Algoritma: $NFBUCHBERGER\,(f \mid G)$.

">" tekterimli sıralaması "**global sıralama**" olsun.

GİRDİ: $f \in k[X]$, $G \in \zeta$

ÇIKTI: $h \in k[X]$, G' ye göre f ' nin normal formu

- $h := f$;

- $(h \neq 0$ ve $G_h := \{g \in G \mid LM(g) \mid LM(h)\} \neq 0)$ iken

  bir $g \in G_h$ seç ;

  $h := S(h, g)$;

- h 'a dön;

3.2.8 Örnek: $f = x^3 + y^2 + 2 \cdot z^2 + x + y + 1$, $G = \{x, y\}$ ve sıralama $>_{dp}$ olsun. f 'nin normal formunu bulalım:

$$h_1 = x^3 + y^2 + 2 \cdot z^2 + x + y + 1 \neq 0 \text{ ve } LM(h_1) = x^3,$$

$$G_{h_1} = \{ g \in G \mid LM(x^3 + y^2 + 2 \cdot z^2) \mid LM(h)\} = \{x\}$$

$$g_1 \in G_{h_1} \text{ ve } g_1 = x;$$

$$h_2 = S(h_1, g_1) = \frac{x^3}{x^3} \cdot (x^3 + y^2 + 2z^2 + x + y + 1) - \frac{x^3}{x} \cdot x$$

$$= y^2 + 2 \cdot z^2 + x + y + 1$$

$$h_2 = y^2 + 2 \cdot z^2 + x + y + 1 \neq 0 \text{ ve } LM(h_2) = y^2,\ G_{h_2} = \{y\};$$

$$g_2 \in G_{h_1} \text{ ve } g_2 = y;$$

$$h_3 = S(h_2, g_2) = \frac{y^2}{y} \cdot (y^2 + 2z^2 + x + y + 1) - \frac{y^2}{y} \cdot y$$

$$= 2 \cdot z^2 + x + y + 1$$

$$h_3 = 2 \cdot z^2 + x + y + 1 \neq 0 \text{ ve } LM(h_3) = z^2,\ G_{h_2} = \{\};$$

Böylece, *NFBUCHBERGER* ($f \mid G$) $= 2 \cdot z^2 + x + y + 1$ ' dir.

3.2.9 Algoritma: (STANDART(G,NF)).

“>” herhangi bir tekterimli sıralaması olsun.

GİRDİ: $G \in \zeta$, NF zayıf normal form algoritması

ÇIKTI: $S \in \zeta$, $I = < G >_R$ 'nin standart bazı

- $S = G$;
- $P = \{(f,g) \mid f,g \in S, f \neq g\}$;
- $P \neq \{\}$ iken

  $(f,g) \in P$ seçelim ;

  $P = P \setminus \{(f,g)\}$;

  $H = NF(S(f,g) \mid S))$;

  Eğer ($h \neq 0$) ise

  $P = P \cup \{(h,f) \mid f \in S\}$

  $S = S \cup \{h\}$;

- S 'ye dön;

3.2.10 Örnek: $>_{dp}$ tekterimli sıralamasını seçelim. NF=$NFBUCHBERGER$ ve

$G = \{x^2 + y, x \cdot y + x\}$ olsun. $I = < G >$' ın standart bazını bulalım:

$S = \{x^2 + y, x \cdot y + x\}$ ve $f = x^2 + y$ ve $g = x \cdot y + x$

$P = \{(x^2 + y, x \cdot y + x)\} \neq \{\}$

İlk dönüşte;

$P = \{\};$

$$S(f,g) = -x^2 + y^2$$

$$h := NF(S(f,g) \mid S) = y^2 + y \neq 0$$

$$P = \{(y^2 + y, x^2 + y), (y^2 + y, x \cdot y + x)\}$$

$$S = \{x^2 + y, x \cdot y + x, y^2 + y\}$$

İkinci dönüşte;

$$P = \{(y^2 + y, x \cdot y + x)\}$$

$$S(h,f) = -x^2 \cdot y + y^3$$

$$h := NF(S(h,f) \mid S) = 0$$

Üçüncü dönüşte;

$P = \{\};$

$S(h,g) = 0$ ve

$$h := NF(0 \mid S) = 0$$

Böylece, $S = \{x^2 + y, x \cdot y + x, y^2 + y\}$ standart bazdır.

Örnekte, standart baz hesabı global sıralama seçilerek yapılmıştır. Eğer bizim elimizdeki sıralama lokal sıralama ise, *NF=NFBUCHBERGER* algoritmasını kullanamayız.

Şimdi, herhangi bir sıralama için, normal formu nasıl bulacağımıza dair bir algoritma verilecektir.

3.2.11 Tanım: $f \neq 0$ ve $f \in k[X]$ bir polinom olsun. f ' nin ecart'ı

$$ecart(f) := der(f) - derLM(f)$$

olarak tanımlanır.

f homojen polinom ise $ecart(f) = 0$ olur.

3.2.12 Algoritma: (*NFMORA*($f \mid G$))

">" herhangi bir tekterimli sıralaması olsun.

GİRDİ: $f \in k[X]$, G, $k[X]$'de sonlu bir liste

ÇIKTI: $h \in k[X]$, f'nin G'ye göre zayıf normal formu

- $h := f$;
- $T := G$;
- ($h \neq 0$ ve $T_h := \{g \in T \mid LM(g) \mid LM(h)\} \neq 0$) iken;

  $ecart(g)$ minimal olacak şekilde $g \in T_h$ seç

  eğer ($ecart(g) > ecart(h)$)

    $T := T \cup \{h\}$;

    $h := S(h, g)$;

- h'a dön.

3.2.13 Örnek: $>_{ds}$ tekterimli sıralaması olsun.

$$f = x^2 + y^2 + z^3 + x^4 + y^5 \text{ ve } G = \{x, y\}$$

iken *NFMORA*($f \mid G$)' yi bulalım:

İlk dönüşte;

$$h := x^2 + y^2 + z^3 + x^4 + y^5$$

$$T := \{x, y\}$$

$$T_h := \{g \in T \mid LM(g) \mid x^2\} = \{x\} \neq 0$$

$$x \in T_h \ , \ ecart(x) = der(x) - der(x) = 0$$

$$h := S(x^2 + y^2 + z^3 + x^4 + y^5, x)$$

$$= \frac{x^2}{x^2}(x^2 + y^2 + z^3 + x^4 + y^5) - \frac{x^2}{x}(x)$$

$$= y^2 + z^3 + x^4 + y^5$$

İkinci dönüşte;

$$h := y^2 + z^3 + x^4 + y^5$$

$$T := \{x, y\}$$

$$T_h := \{g \in T \mid LM(g) \mid y^2\} = \{y\} \neq 0$$

$$y \in T_h, \ ecart(y) = der(y) - der(y) = 0$$

$$h := S(y^2 + z^3 + x^4 + y^5, y)$$

$$= \frac{y^2}{y^2}(y^2 + z^3 + x^4 + y^5) - \frac{y^2}{y}(y)$$

$$= z^3 + x^4 + y^5$$

Üçüncü dönüşte;

$$h := z^3 + x^4 + y^5$$

$T := \{x, y\}$

$T_h := \{g \in T \mid LM(g) \mid z^3\} = \{\}$

O halde, $h = NFMORA(f \mid G) = z^3 + x^4 + y^5$'dır.

3.2.14 Algoritma (*STANDARDBAZ*(*G*)).

">" herhangi bir tekterimli sıralaması olsun.

GİRDİ: $G = \{g_1, g_2, \cdots, g_s\} \subset k[X]$

ÇIKTI: $S = \{h_1, h_2, \cdots, h_t\} \subset k[X]$, $< G > \subset R$ idealinin standart bazıdır.

- $S = STANDARD(G, NFMORA)$;
- S'ye dön.

3.2.15 Örnek: $I = \langle y \cdot z + z^2 + x^3, y^2 + x \cdot z + y^4 \rangle \subset k[x, y, z]$ idealini ve $>_{ds}$ lokal tekterimli sıralamasını alalım. NF=$NFMORA$ ve G={ $f = y \cdot z + z^2 + x^3$, $g = y^2 + x \cdot z + y^4$ } olsun. $I =< G >$'nin standart bazını bulalım:

$$S = \{y.z + z^2 + x^3, y^2 + x.z + y^4\}$$

$$P = \{(y.z + z^2 + x^3, y^2 + x.z + y^4)\}$$

İlk dönüşte;

$P = \{\}$;

$h = NFMORA(S(f, g) \mid S)$'yi bulalım:

İlk dönüşte;

$T := G$

$$h = S(f,g) = \frac{y^2 \cdot z}{yz}(y.z + z^2 + x^3) - \frac{y^2 \cdot z}{y^2}(y^2 + x.z + y^4)$$

$$= y \cdot z^2 + y \cdot x^3 - x \cdot z^2 - y^4 \cdot z$$

$$LM(h) = x \cdot z^2$$

$$T_h := \{g \in T \mid LM(g) \mid x.z^2\} = \{\}$$

$$h = -x.z^2 + y \cdot z^2 + y \cdot x^3 - y^4 \cdot z \neq 0$$

$$P = P \cup \{(h, f) | f \in S\}$$

$$S = S \cup \{h\}$$

Bu durumda;

$$P = \{(-x.z^2 + y.z^2 + y.x^3 - y^4.z, y.z + z^2 + x^3), (-x.z^2 + y.z^2 + y.x^3 - y^4.z, y^2 + x.z + y^4)\}$$
$$S = \{y.z + z^2 + x^3, y^2 + x.z + y^4, h\}$$

İkinci dönüşte;

$$T := S$$

$$P = \{(-x.z^2 + y.z^2 + y.x^3 - y^4.z, y^2 + x.z + y^4)\}$$

$h^1 = NFMORA(S(h, g) \mid S)$'yi bulalım:

$$h^1 = S(h,g) = \frac{x.y \cdot z^2}{-x.z^2}(-x.z^2 + y.z^2 + y.x^3 - y^4.z) - \frac{x.y \cdot z^2}{y.z}(y.z + z^2 + x^3)$$

$$= -y^2 \cdot z^2 - y^2 \cdot x^3 + y^5.z - x \cdot z^3 - x^4 \cdot z$$

$$LM(h^1) = y^2 \cdot z^2$$

$$T_{h^1} := \{g \in T \mid LM(g) \mid y^2.z^2\} = \{f, h\}$$

$$ecart(f) = 3 - 2 = 1 < ecart(h) = 5 - 3 = 2$$

$$ecart(h^1) = 6 - 4 = 2 \text{ ve } ecart(h^1) > ecart(f)$$

Bu durumda, T kümesi değişmez.

$$h^2 = S(h^1, f) = x.z^3 - y.z^3 + y^2.x^3 - y^5.z + x^4.z - x^3.y.z$$

$$LM(h^2) = x \cdot z^3$$

Benzer şekilde,

$$T_{h^2} := \{g \in T \mid LM(g) \mid x.z^3\} = \{h\}$$

$$ecart(h) = 5 - 3 = 2 = ecart(h^2) = 6 - 4 = 2$$

$$h^3 = S(h, h^2) = y^4.z^2 - x^3.y^2 + y^5.z - x^4.z$$

$$LM(h^3) = x^3 \cdot y^2$$

$$T_{h^3} := \{g \in T \mid LM(g) \mid x^3.y^2\} = \{g\}$$

$$ecart(g) = 4 - 2 = 2 > ecart(h^3) = 6 - 5 = 1$$

Bu durumda, h^3, T kümesine eklenerek devam edilir. Benzer döngülerden sonra, $S = \{y.z + z^2 + x^3, y^2 + x.z + y^4, -x.z^2 + y.z^2 + x^3.y - y^4.z\}$ kümesi I ideali için standart baz olur.

4. COHEN MACAULAYLIK

4.1 Cohen Macaulay Halkalar

Cohen Macaulay halkanın tanımını vermeden önce düzgün dizi ve derinlik kavramlarını tanıtacağız.

4.1.1 Tanım: A bir halka ve M bir A modül olsun. $a \in A$ alalım. $\forall 0 \neq x \in M$ için $a \cdot x \neq 0$ ise, a elemanına M-düzgün eleman denir. Bir başka ifadeyle, a, M üzerinde sıfır bölensizdir.

4.1.2 Örnek: k bir cisim ve $M = A = k[x]$ olsun. Bu durumda, x, A üzerinde düzgündür.

4.1.3 Tanım: A bir halka, $I \subset A$ ve $a \in A$ olsun. $\bar{a} = (a + I)$, A/I halkasının bir sıfır böleni değil ise, A' nın her a elemanı, A/I üzerinde bir düzgün elemandır.

Denk olarak, $a \cdot b \in I$ iken $b \in I$ ise, a, A/I üzerinde düzgündür denir.

4.1.4 Tanım: $A = k[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ ve $i = 1,2,\cdots,n$, $x_i \in A$ seçelim. $I = (0) \subset A$ olsun. A tamlık bölgesi olduğundan x_i, $A/(0) = A$ halkasında düzgün elemandır.

4.1.5 Örnek: $A = k[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ ve $I = (x_1 x_2 x_3)$ olsun.

$$\overline{x_1 x_2} \neq 0 \in A/I \quad \text{ve} \quad \overline{x_3} \neq \bar{0} \in A/I$$

fakat A/I halkasında,

$$(\overline{x_1 x_2}) \cdot (\overline{x_3}) = \overline{x_1 x_2 x_3} = \bar{0}$$

olduğundan $x_1 x_2$, A/I' da düzgün eleman değildir.

4.1.6 Örnek: $A = k[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ ve $I = (x_1, x_2) \cap (x_3, x_4)$ olsun.

$x_1 + x_3$ elemanının A/I halkasında düzgün olduğunu görelim:

Bir $b \in A$ için

$$(x_1 + x_3) \cdot b \in I = (x_1, x_2) \cap (x_3, x_4)$$

olduğunu varsayalım.

$$\Rightarrow (x_1 + x_3) \cdot b \in (x_1, x_2) \text{ ve } (x_1 + x_3) \cdot b \in (x_3, x_4)$$

$$(x_1, x_2) \text{ ve } (x_1, x_2),\ A\text{'da asal idealler ve}$$

$$x_1 + x_3 \notin (x_1, x_2) \text{ ve } x_1 + x_3 \notin (x_1, x_2)$$

olduğundan

$$b \in (x_1, x_2) \cap (x_3, x_4) = I$$

elde edilir.

4.1.7 Tanım: A bir halka ve M bir A-modül olsun. $a_1, a_2, \cdots, a_r$, A'nın elemanlarının bir dizisi olmak üzere,

(i) $(a_1, a_2, \cdots, a_r) \cdot M \neq M$ veya $M/(a_1, a_2, \cdots, a_r) \cdot M \neq 0$,

(ii)
- a_1, $M-$düzgün,
- a_2, $M/a_1 \cdot M-$düzgün,
- a_3, $M/(a_1, a_2) \cdot M-$düzgün,
- a_4, $M/(a_1, a_2, a_3) \cdot M-$düzgün,

$\vdots$

• a_r, $M/(a_1,a_2,\cdots,a_{r-1})\cdot M$ – düzgün;

şartları sağlanıyorsa, bu diziye *M*-düzgün dizi denir.

4.1.8 Örnek: $A=k[x_1,x_2,\cdots,x_r]$, $I=(0)$ ve $M=A/I$ olsun.

$x_1,x_2,\cdots,x_r$ dizisini verebiliriz.

(i) $1\notin(x_1,x_2,\cdots,x_r)\cdot M$ olduğundan $(x_1,x_2,\cdots,x_r)\cdot M\neq M$

(ii) • $q\in M$ olsun. $x_1\cdot q\in I=(0)$ iken $q=0\in I$

olduğundan x_1, $A/I=k[x_1,x_2,\cdots,x_r]$ – düzgündür.

• $x_2\cdot q\in(x_1)$ iken $q\in(x_1)$ olduğundan x_2, $M/x_1\cdot M$ – düzgündür.

• $x_3\cdot q\in(x_1,x_2)$ iken $q\in(x_1,x_2)$ olduğundan x_3, $M/(x_1,x_2)\cdot M$ – düzgündür.

Benzer şekilde devam edersek,

$$\vdots$$

• $x_r\cdot q\in(x_1,x_2,\cdots,x_{r-1})$ iken $q\in(x_1,x_2,\cdots x_{r-1})$ olduğundan x_r, $M/(x_1,x_2,\cdots,x_{r-1})\cdot M$ – düzgündür.

Tanım 4.1.7'deki şartlar sağlandığından $x_1,x_2,\cdots,x_r$ dizisi $M=k[x_1,x_2,\cdots,x_r]$ üzerinde düzgün dizidir.

4.1.9 Teorem: (Rees) *A* bir Noetherian halka, *M* bir sonlu *A*-modül ve *I*, $I\cdot M\neq M$ olacak şekilde bir ideal olsun. *I*'daki tüm maksimal *M*-dizilerinin uzunluğu aynıdır, [13]

Bu teorem, bir Noether halkasındaki *I* idealinin "gradını" tanımlamamızı sağlar.

4.1.10 Tanım: A bir Noether halkası, M bir sonlu A-modül ve I, $I \cdot M \neq M$ olacak şekilde bir ideal olsun. I idealindeki maksimal M-dizilerinin uzunluğuna I'nın M üzerinde "gradı" denir ve

$$grad(I, M)$$

olarak gösterilir.

4.1.11 Tanım: (A,m,k) bir lokal Noether halkası ve M, bir sonlu A-modül olsun. m idealinin M üzerindeki gradı, M'nin "derinliği" dir ve $derinlik(M)$ olarak gösterilir.

4.1.12 Tanım: A bir değişmeli halka ve P bir asal ideal olsun. P idealinin "yüksekliği", asal ideallerin

$$P = P_0 \supset P_1 \supset \cdots \supset P_l$$

kesin azalan dizilerinin l uzunluğunun eküs'üdür.

Bir I idealinin yüksekliği, I idealini kapsayan asal ideallerinin yüksekliklerinin ebas'ıdır. Bir başka ifadeyle,

$$\text{yükseklik}(I)=\inf\{\text{yükseklik}(P) \mid P \text{ asal ve } P \supset I\}$$

Genellikle, $\mu(I)$, I ideallerinin üreteçlerinin minimal sayısı olmak üzere

$$\text{derinlik}(I) \leq \text{yükseklik}(I) \leq \mu(I)$$

eşitsizliği vardır, [14].

Şimdi, bir Cohen-Macaulay halkanın tanımını verebiliriz.

4.1.13 Tanım: A bir Noether halkası ve I, A'nın bir ideali olsun.

$$\text{derinlik}(I) = \text{yükseklik}(I)$$

ise, A halkasına Cohen-Macaulay halka denir.

4.1.14 Önerme: A bir Noether halkası olsun. Aşağıdaki önermeler denktirler.

(i) A bir Cohen-Macaulay halkadır.

(ii) A'nın her m maksimal ideali için,

$$\text{derinlik}(m) = \text{yükseklik}(m)$$

(iii) A'nın her P asal ideali için,

$$\text{derinlik}(P) = \text{yükseklik}(P)$$

(iv) A'nın her I ideali için,

$$\text{derinlik}(I) = \text{yükseklik}(I)$$

dir, [14].

Önerme 4.1.14' den A bir lokal halka olduğunda, A' nın m maksimal ideali için

$$\text{derinlik}(m) = \text{yükseklik}(m)$$

elde edilir. (A, m) lokal halkasında,

$$\text{derinlik}(m) = \text{derinlik}(A)$$

$$\text{yükseklik}(m) = \text{boy}(A)$$

olduğundan,

$$\text{derinlik}(A) = \text{boy}(A)$$

ise, A lokal halkası Cohen-Macaulaydır.

4.1.15 Örnek: $A = k[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ halkasını göz önüne alalım.

$$(x_1) \subset (x_1, x_2) \subset \cdots \subset (x_1, \cdots, x_n)$$

olduğundan $boy(A) = n$ ' dir.

$$derinlik(A) = n = boy(A)$$

olduğundan A, Cohen-Macaulay halkadır.

4.1.16 Örnek: $A = k[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ ve

$$I = (x_1x_3, x_1x_4, x_2x_3, x_2x_4) = (x_1, x_2) \cap (x_3, x_4) \subset A$$

idealini alalım. $boy(A/I)$ 'yı hesaplamak istiyoruz.

P, A/I halkasında bir asal ideal olsun. Bu durumda, $P = \rho / I$, $I \subseteq \rho \subset A$ olacak şekilde bir ρ asal ideali vardır.

ρ, $I \subseteq \rho$ olan bir asal ideal ise,

$$I = (x_1x_3, x_1x_4, x_2x_3, x_2x_4) \subseteq \rho \Rightarrow x_1x_3, x_1x_4, x_2x_3, x_2x_4 \in \rho$$

$$x_1x_3 \in \rho \Rightarrow x_1 \in \rho \text{ veya } x_3 \in \rho$$

$$x_2x_3 \in \rho \Rightarrow x_2 \in \rho \text{ veya } x_3 \in \rho$$

$$x_1x_4 \in \rho \Rightarrow x_1 \in \rho \text{ veya } x_4 \in \rho$$

$$x_2x_4 \in \rho \Rightarrow x_2 \in \rho \text{ veya } x_4 \in \rho$$

$\Rightarrow x_1, x_2 \in \rho$ (1. durum) veya $x_3, x_4 \in \rho$ (2. durum)

elde edilir.

$$P_0 = (x_1, x_2)/I, \ P_1 = (x_1, x_2, x_3)/I, \ P_2 = (x_1, x_2, x_3, x_4)/I$$

alalım. Bu durumda,

$$P_0 \subset P_1 \subset P_2$$

A/I halkasında asal ideallerin bir zinciridir. Böylece,

$$boy(A/I) \geq 2$$

elde edilir. $n \geq 3$ olmak üzere,

$$Q_0 \subset Q_1 \subset \cdots \subset Q_n \subset A/I$$

zincirinin olduğunu varsayalım. Burada, $I \subset Q_i \subset A$ asal ideali için

$$Q_i = Q_i / I$$

olur. Böylece,

$$Q_0 \subset Q_1 \subset \cdots \subset Q_n \subset A$$

zinciri elde edilir.

1. durumda, yani $x_1, x_2 \in Q_0$ olduğunu varsayalım.

$$(0) \subset (x_1) \subset Q_0 \subset Q_1 \subset \cdots \subset Q_n$$

$n + 2 \geq 3 + 2 = 5$ uzunluğunda bir zincirdir. Bu da

$$boy(A) = boy(k[x_1, x_2, x_3, x_4]) = 4$$

olması ile çelişir. Benzer şekilde 2. durum için de aynı sonuç elde edilir.Buradan $boy(A/I)$ 2' den büyük olamaz ve böylece

$$boy(A/I) = 2$$

elde edilir.

Şimdi ise $derinlik(A/I) = 1$ olduğunu görelim:

Örnek 4.1.6'dan $x_1 + x_3$ elemanının A/I üzerinde düzgün olduğunu biliyoruz.

$$\Rightarrow 1 \leq derinlik(A/I)$$

$q \in m = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ alalım.

$$\Rightarrow q = f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 + f_4 x_4,\ f_i \in k[x_1, x_2, x_3, x_4] \text{ ve } i = 1,2,3,4$$

olarak yazabiliriz. $A/(I, x_1 + x_3)$ halkasında $\overline{q} \neq \overline{0}$ olduğunu varsayalım.

$$\Rightarrow q \notin (I, x_1 + x_3)$$

$\overline{x_1} \neq \overline{0} \in A/(I, x_1 + x_3)$' dir.

$$q \cdot x_1 = f_1 x_1^2 + f_2 x_2 x_1 + f_3 x_3 x_1 + f_4 x_4 x_1$$

olarak yazılır. Sırasıyla

$$x_1^2 = x_1(x_1 + x_3) - x_1 x_3 \in (x_1 x_3, x_1 x_4, x_2 x_3, x_2 x_4, x_1 + x_3)$$

$$x_1 x_2 = x_2(x_1 + x_3) - x_2 x_3 \in (x_1 x_3, x_1 x_4, x_2 x_3, x_2 x_4, x_1 + x_3)$$

$$x_3 x_1 \in (x_1 x_3, x_1 x_4, x_2 x_3, x_2 x_4, x_1 + x_3)$$

$$x_4 x_1 \in (x_1 x_3, x_1 x_4, x_2 x_3, x_2 x_4, x_1 + x_3)$$

Buradan, $qx_1 \in (I, x_1 + x_3)$ fakat $q \notin (I, x_1 + x_3)$ elde edilir. Bu, q, $A/(I, x_1 + x_3)$ üzerinde düzgün değildir demektir. Düzgün dizinin uzunluğunu, genişletemediğimizden $derinlik(A/I) = 1$ olur.

Cohen-Macaulay özelliği, lokalizasyon ve tamlama gibi halka işlemleri altında değişmezdir.

4.2 Gorenstein Halkalar

Gorenstein halkalar, lokal halkaların en önemli sınıfıdır ve genellikle homolojik cebir kullanılarak karakterize edilir. Gorenstein bir halkanın özelliği, özünde simetri ifade etmesidir ve kökeni düzlem eğrilerinin çalışılmasına kadar uzanır.

Bu bölümde, Gorenstein halkalar ile ilgili önemli bilgiler vereceğiz. Bu bilgileri verirken homolojik cebir yerine daha elemanter bir yol takip edeceğiz.

Şimdi, tanım için gerekli bazı kavramları tanıyalım.

4.2.1 Tanım: I bir A halkasının ideali olsun.

$$f \cdot g \in I \text{ iken } f \in I \text{ veya bir } m > 0 \text{ için } g^m \in I$$

ise, I idealine "asalımsı ideal" denir.

I bir asalımsı ideal ve

$$\sqrt{I} = radI = \{r \in R \mid r^n \in I, r^n \in I, n \in N\} = P$$

ise I idealine $P-$asalımsı denir.

4.2.2 Tanım: (A,m) bir boyutlu Noether halkası ve $\{a_1, a_2, \cdots, a_d\}$, A'nın elemanlarının bir kümesi olsun. Bu küme bir $m-$asalımsı ideal üretiyor ise, $\{a_1, a_2, \cdots, a_d\}$ kümesine A'nın "parametreler sistemi" denir.

Uyarı: Böyle bir sistem her zaman vardır.[15]

4.2.3 Tanım: A bir halka ve $I \subset A$ ideal olsun. $I_1, I_2 \not\subset I$ idealleri için $I = I_1 \bigcap I_2$ iken $I = I_1$ veya $I = I_2$ ise, I idealine "indirgenemez ideal" denir.

4.2.4 Tanım: (A,m) bir lokal Noether halkası ve M bir A-modül olsun. M modülünün "desteği=socle",

$$Soc(M) = \{y \in M \mid m \cdot y = 0\}$$

olarak tanımlanır. $Soc(M)$, M modülünün, A-modül yapısı bir sonlu boyutlu vektör uzay olan en büyük alt uzayıdır.

4.2.5 Önerme: (A, m) bir lokal Cohen-Macaulay halka, $\{a_1, a_2, \cdots, a_d\}$ A'nın parametreler sistemi olsun.

$$r := boy_{A/m}(Soc(A/(a_1, \cdots, a_d)))$$

sayısı $\{a_1, a_2, \cdots, a_d\}$ sisteminin seçiminden bağımsızdır, [15].

4.2.6 Tanım: r sayısına (A, m) Cohen-Macaulay halkasının tipi denir. Tipi 1 olan Cohen-Macaulay halkaya Gorenstein halka adı verilir.

4.2.7 Yardımcı Teorem: (A, m) bir lokal Noether halkası ve q, $m-$asalımsı ideal olsun.

$$q \text{ bir indirgenemez idealdir} \Leftrightarrow boy_{A/m} Soc(A/q) = 1$$

İspat: q indirgenemez ideal $\Leftrightarrow <0> \subset A/q$ modülü indirgenemez ifadesinin doğruluğu açıktır. $<0>$ modülü indirgenebilir ise, $U_1 \cap U_n = <0>$ olacak şekilde $i = 1,2$ için $<0> \neq U_i \subset A/q$ alt modülleri bulabiliriz.

$i = 1,2$ için $Ass(U_i) = m$'dir, [15].

Bu durumda, U_i, $i = 1,2$ m ideali ile "yok edilmiş" sıfırdan farklı bir eleman içerir.

$$\Rightarrow U_i \cap Soc(A/q) = \{\bar{a} \in A/q \mid m \cdot \bar{a} = 0\}$$

$$\Rightarrow U_i \cap Soc(A/q) \neq <0>$$

$$\Rightarrow U_1 \text{ ve } U_2,\ Soc(A/q) \text{ ile kesişir.}$$

$\Rightarrow boySoc(A/q) \geq 2$ olur.

$boy_{A/m}Soc(A/q) \neq 1$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, $U_1 \cap U_n =< 0 >$ olan bir boyutlu $U_1, U_2 \subset Soc(A/q)$ alt uzaylarını seçebiliriz. Bu ise q idealinin indirgenebilir olması demektir.

4.2.8 Sonuç: (A,m) lokal Cohen-Macaulay halkasının bir Gorenstein halkası olması için gerekli ve yeterli koşul A'nın parametreler sistemi ile üretilen bir idealinin indirgenemez ideal olmasıdır.

4.3 Tekterimli Eğriler

4.3.1 Tanım: k bir cisim ve $f_1, f_2, \cdots, f_s$' ler $k[x_1, \cdots, x_n]$'de polinomlar olsun.

$$V(f_1, \cdots, f_s) = \{(a_1, \cdots, a_n) \in k^n : f_i(a_1, \cdots, a_n) = 0, \forall 1 \leq i \leq s\}$$

$V(f_1, \cdots, f_s)$ kümesine $f_1, f_2, \cdots, f_s$' ler tarafından tanımlanan afin varyete denir.

4.3.2 Tanım: $V \subset k^n$ bir afin varyete olsun.

$$I(V) = \{f \in k[x_1, \cdots, x_n] : f(a_1, \cdots, a_n) = 0, \forall (a_1, \cdots, a_n) \in V\}.$$

4.3.3 Lemma: V bir afin varyete ise, $I(V) \subset k[x_1, \cdots, x_n]$ bir idealdir. $I(V)$'ye V varyetesinin idealidir denir.

İspat: k^n'deki her noktayı sıfır polinomu sıfırlar. Yani, $0 \in I(V)$' dir.

$f, g \in I(V)$, $h \in k[x_1, \cdots, x_n]$ ve $(a_1, \cdots, a_n)$, V' de herhangibir nokta olsun. Bu durumda,

$$(f+g)(a_1, \cdots, a_n) = f(a_1, \cdots, a_n) + g(a_1, \cdots, a_n) = 0 + 0 = 0,$$

$$(h \cdot f)(a_1, \cdots, a_n) = h(a_1, \cdots, a_n) \cdot f(a_1, \cdots, a_n) = h(a_1, \cdots, a_n) \cdot 0 = 0$$

olur. Bu, $(f+g),(h\cdot f)\in I(V)$ demektir. Böylece $I(V)$, $k[x_1,\cdots,x_n]$' de bir idealdir.

4.3.4 Tanım: k karakteristiği 0 olan bir cisim, $m_1,m_2,\cdots,m_n$'ler, $m_1<m_2<\cdots<m_n$, ve $obeb(m_1,m_2,\cdots,m_n)=1$ olacak şekilde pozitif tamsayılar olsun. A^n'de, $C=C(m_1,m_2,\cdots,m_n)$ tekterimli eğrisi,

$$x_1=t^{m_1}$$

$$x_2=t^{m_2}$$

$$\vdots$$

$$x_n=t^{m_n}$$

şeklindeki paremetrizasyonla verilir. Burada t, k-cisminin bir elemanıdır.

4.3.5 Önerme: C bir tekterimli eğri ve I_C' de bu eğrinin ideali olsun. Bu durumda, I_C asal idealdir.

İspat: $$\Phi: k[x_1,\cdots,x_n]\mapsto k[t]$$

$$\Phi(x_i)=t^{m_i}$$

olsun. $C=C(m_1,m_2,\cdots,m_n)$ olmak üzere, $\ker(\Phi)=I_C$' dir.

$$k[x_1,\cdots,x_n]/I_C\cong\Phi(k[x_1,\cdots,x_n])=k[t^{m_1},\cdots,t^{m_n}]$$

olur. $k[x_1,\cdots,x_n]/I_C$ tamlık bölgesidir. O halde, I_C asal idealdir.

4.4 Teğet Koniler

Bu bölümde, ilk olarak bir afin varyetenin teğet konisinin tanımı verilecek, sonra, A bir lokal halka iken, bu halkaya karşılık gelen ilişkilendirilmiş derecelendirilmiş halkasının, A'nın teğet konisi olduğu söylenerek, $gr_m A$'nın belirlenmesi için bir yardımcı teorem ve önerme verilecektir.

$$p=(p_1,p_2,\cdots,p_n)\in k^n,\ \alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in Z_{\geq 0}^n \text{ ve}$$

$$(x-p)^\alpha=(x_1-p_1)^{\alpha_1}\cdot\cdots\cdot(x_n-p_n)^{\alpha_n}$$

olsun. $(x-p)^\alpha$'nin toplam derecesi $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$ dir. Şimdi, toplam derecesi d olan herhangi bir $0\neq f\in k[x_1,x_2,\cdots,x_n]$ polinom alalım. Bu f polinomu, x_i-p_i'lerin bir çarpımı olarak yazılılabilir. Böylece, f, $|\alpha|\leq d$ için $(x-p)^\alpha$'nın bir k-lineer kombinasyonudur. f polinomu,

$$f=f_{p,0}+f_{p,1}+\cdots+f_{p,d}$$

olarak yazılabilir. Burada $f_{p,j}$, $|\alpha|=j$ için $(x-p)^\alpha$'nın k-lineer kombinasyonudur.

4.4.1 Tanım: $V\subset k^n$'de bir afin varyete ve $p=(p_1,p_2,\cdots,p_n)\in V$ olsun.

(i) $0\neq f\in k[x_1,x_2,\cdots,x_n]$ polinom olsun. $f_{p.\min}$, j tamsayısı, $f_{p,j}\neq 0$ olacak şekilde, en küçük tamsayı olmak üzere, $f_{p,j}$ olarak tanımlansın.

(ii) V'nin p noktasındaki teğet konisi, $C_p(V)$,

$$C_p(V)=V(f_{p.\min}:f\in I(V))$$

varyetesidir.

Şimdi, A bir lokal halka ve m, A halkasının maksimal ideali olsun.

4.4.2 Tanım (A,m) lokal halka ve $gr_m A$'da A'nın ilişkilendirilmiş derecelendirilmiş halkası olsun. $gr_m A$'ya A'nın teğet konisi denir.

4.4.3 Tanım: $0 \neq f \in k[x]_{\langle x \rangle} \setminus \{0\}$, $x = (x_1, x_2, \cdots, x_r)$ için, ve

$$u \cdot f = \sum_{\alpha} a_\alpha \cdot x^\alpha \in k[x]$$

olacak şekilde $u \in k[x], u(0) \neq 0$, bulunabilir. Bu durumda,

$$ord(f) := \min\{ \, |\alpha| \, : a_\alpha \neq 0\}$$

f'nin mertebesidir.

4.4.4 Tanım:

(1) $x = (x_1, x_2, \cdots, x_r)$ olmak üzere, $0 \neq f \in k[x]_{\langle x \rangle}$ için

$$u \cdot f = \sum_{\alpha} a_\alpha \cdot x^\alpha \in k[x]$$

olacak şekilde $u \in k[x]$, $u(0) = 1$ seçelim. $d := ord(f)$ olmak üzere,

$$In(f) := \sum_{\deg(x^\alpha) = d} a_\alpha \cdot x^\alpha$$

eşitliğine, f'nin baş formu denir.

(2) I, $k[x]_{\langle x \rangle}$'nın bir ideali olsun.

$$In(I) := \langle In(f) : f \in I \setminus \{0\} \rangle \subset k[x]$$

idealine de baş ideal denir.

4.4.5 Yardımcı Teorem: I, $x=(x_1,x_2,\cdots,x_r)$ olmak üzere $I\subset\langle x\rangle\subset k[x]$ olan bir ideal ve lokal bir sıralamaya göre I'nın standart bazı $\{f_1,f_2,\cdots f_s\}$ olsun. Bu durumda,

$$In(I)=\langle In(f_1),\cdots,In(f_s)\rangle \text{ 'dir, [10].}$$

4.4.6 Önerme: $I\subset\langle x\rangle\subset k[x]$, $x=(x_1,x_2,\cdots,x_r)$ bir ideal $A=k[x]_{<x>}/I$ ve m , A' nın maksimal ideali olsun. Bu durumda,

$$gr_n A\cong k[x]/In(I) \text{ 'dır, [10].}$$

4.4.7 Örnek: $I=\langle y\cdot z+z^2+x^3,y^2+x\cdot z+y^4\rangle\subset k[x,y,z]$ ideali olsun. Bu idealin baş idealini bulalım. 3.2.5 Örnek'ten, I'nın standart bazının,

$$S=\{f,g,h=x.z^2-y.z^2-x^3.y+y^4.z)\}$$

olduğunu biliyoruz. Burada,

$$In(f)=y^2+x\cdot z,\quad In(g)=y\cdot z+z^2\ ,\ In(h)=x\cdot z^2-y\cdot z^2$$

olur. Bu durumda, I'nın baş ideali,

$$In(I)=\langle y^2+x\cdot z,y\cdot z+z^2,x\cdot z^2-y\cdot z^2\rangle$$

olarak elde edilir.

5. HİLBERT FONKSİYONLAR

k bir cisim ve R bir homojen k-cebiri olsun. Macaulay teorem, herhangi bir nümerik fonksiyonun hangi şartlar altında homojen bir k-cebirinin Hilbert fonksiyonuna karşılık geldiğini söylemektedir.

Standart derecelendirilmiş cebirlerin Hilbert fonksiyonları Macaulay [14]tarafından tam olarak karakterize edilmiştir. Bu teorem, bu alanda çalışan pek çok araştırmacı için müthiş bir kaynaktır.

Bu bölümde, önce Macaulay Teorem için ön hazırlık yapılacak, sonra teoremin ispatı detaylıca anlatılacaktır. Sonraki alt bölümlerde, lokal halkaların Hilbert fonksiyonlarının hesabı bir örnekle açıklanarak, lokal halkalarda fazla bir bilgiye ulaşılamamasının sebebi anlatılacaktır.

İlk 3 alt bölümde, [13] kitabı aynı şekilde takip edilerek, detaylı ispatlar verilecektir.

5.1 Mertebe İdealler

Bu bölümde, mertebe ideallerin tanımı verilerek, önemli teoremler açıklanacaktır.

$R = \oplus_{n\geq 0} R_n$ bir homojen k-cebiri olsun. Burada, $R_0 = k$ bir cisimdir. Önce, R'nin R_1'in bir $x_1, x_2, \cdots, x_m$ bazındaki tekterimlileri içeren, bir k-bazına sahip olduğunu göstereceğiz.

5.1.1 Tanım: Γ , $X_1, \cdots, X_m$'lere bağlı tekterimlilerin boş olmayan bir kümesi olsun. $m \in \Gamma$ ve m' tekterimlisi m'yi böldüğü durumda $m' \in \Gamma$ oluyorsa Γ'ya mertebe ideali denir.

Buna denk olarak, $X_1^{\alpha_1}\cdot\dots\cdot X_m^{\alpha_m}\in\Gamma$ ve $0\le\beta_i\le\alpha_i$ $(i=1,\cdots,m)$ ise $X_1^{\beta_1}\cdot\dots\cdot X_m^{\beta_m}\in\Gamma$' dir.

5.1.2 Uyarı: Γ'nın tekterimlilerinin mertebe ideali, bir idealin k-bazı değildir. Γ sadece bir idealdir. Γ' nın Γ' tümleyenini alalım. Bu durumda, Γ', $m\in\Gamma'$ tekterimlileri tarafından üretilen idealin *k*-bazıdır.

5.1.3 Teorem R bir homojen bir *k*-cebiri olsun. R_1'in *k*-bazı $x_1,x_2,\cdots,x_m$ ve $i=1,\cdots,m$ için

$$\pi:k[X_1,\cdots,X_m]\to R \text{ ve } \pi(X_i)=x_i$$

bir *k*-cebir homomorfizması olsun. Bu durumda, $\pi(\Gamma)$ R'nin *k*-bazı olacak şekilde tekterimlilerin bir Γ"mertebe ideali" vardır.

İspat: S, $X_1,\cdots,X_m$' deki bütün tekterimlilerin kümesi ve S üzerindeki tekterimli sıralaması, ters derecelendirilmiş alfabetik sıralama olsun. $\Gamma=\{u_1,u_2,\cdots\}$ olmak üzere $\pi(\Gamma)$ R'nin *k*-bazıdır. Γ'nın bir mertebe ideali olmadığını varsayalım. Bu durumda,

$$u\mid u_{i_0}\quad(u_{i_0}=u\cdot X_j)$$

olacak şekilde $\exists u_{i_0}\in\Gamma$ vardır ve $u\notin\Gamma$' dır. $u\in S\setminus\Gamma=\Gamma'$'dır. Γ'nin tümleyeni, $\pi(\Gamma)$ bazı tarafından üretilen bir idealdir. O halde,

$$\pi(u)=\sum\lambda_i\cdot\pi(u_i)\ ,\ u_i\in\Gamma,\lambda_i\in k \text{ ve } u_i<u$$

olarak yazılır. Bu durumda,

$$\pi(u_{i_0})=\pi(u\cdot X_j)=\pi(u)\cdot\pi(X_j)=\sum\lambda_i\cdot\pi(u_i)\cdot\pi(X_j)=\sum\lambda_i\cdot\pi(u_i\cdot X_j)$$

ve $u_i\cdot X_j<u_{i_0}$' dir. Bu çelişki verir. O halde, Γ, bir mertebe idealidir.

Bu ispatta,

$$\pi(u_1), \pi(u_2), \cdots$$

R'nin k-bazıdır ve $u \in S$ ve $\pi(u) = \sum_{\lambda_i \neq 0} \lambda_i \cdot \pi(u_i)$ yazıldığında, $u \notin \Gamma$ ise, $\forall i$ için

$$u_i \leq u \,,$$

olur.

5.1.4 Sonuç: J , Γ' nın tümleyeni olan Γ'' deki tekterimliler tarafından üretilen bir ideal olsun. Bu durumda R homojen k-cebiri ve $k[X_1, \cdots, X_m]/J$ aynı Hilbert fonksiyonuna sahiptir.

R ile ilişkili Γ' tekterimlilerin kümesi başka bir şekilde de tanımlanabilir:

$$I = çek\pi \text{ ve } L(I) = \{L(f) : f \in I\} \text{ ve } In(I) = L(I) \cdot R$$

olsun. Burada $L(f)$, f 'nin, ds sıralamasına göre, en yüksek dereceli terimi olsun.

5.1.5 Uyarı: $L(I) = \Gamma'$ dür.

$v \in L(I)$ olsun ve $f \in I$ seçelim. v_i 'ler tekterimliler ve $v = L(f) = v_n$ olacak şekilde,

$$f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i$$

olur. $v_n \notin \Gamma'$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, $v_n \in \Gamma$ olur . $f \in I$ = $çek\pi$ olduğundan,

$$\pi(f) = \sum \lambda_i \cdot \pi(v_i) = 0$$

$$\lambda_1 \cdot \pi(v_1) + \lambda_2 \cdot \pi(v_2) + \cdots + \lambda n \cdot \pi(v_n) = 0$$

$$\lambda_n \cdot \pi(v_n) = -\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \cdot \pi(v_i)$$

$$\pi(v_n) = -\sum_{i=1} \lambda_n^{-1} \cdot \lambda_i \cdot \pi(v_i)$$

elde edilir. $a_{ij} \in k, u_j \in \Gamma$ ve $u_j \leq v_i \leq v_n$ olmak üzere, $\pi(u_i)$'ler $\sum a_{ij} \cdot \pi(u_j)$'lerin lineer kombinasyonudur. $v_n \in \Gamma$ idi. Üstteki Teorem 5.1.3 ile çelişir. O halde varsayımımız yanlıştır. $v = v_n \in \Gamma'$' dır ve böylece $L(I) \subset \Gamma'$ olur.

Tersine, $v \in \Gamma'$ olsun. Bu durumda,

$$\pi(v) = \sum \lambda_i \cdot \pi(u_i) \text{ ve } u_i \in \Gamma \text{ , } u_i < v$$

olur. Böylece

$$f = v - \sum \lambda_i \cdot u_i$$

$$\pi(f) = \pi(v - \sum \lambda_i \cdot u_i)$$

$$= \pi(v) - \sum \lambda_i \cdot \pi(u_i)$$

$$= \sum \lambda_i \cdot \pi(u_i) - \sum \lambda_i \cdot \pi(u_i) = 0$$

elde edilir. Böylece,

$$f \in \ker \pi \Rightarrow f \in I \Rightarrow L(f) = v \Rightarrow v \in L(I)$$

Buradan $\Gamma' \subset L(I)$ olur. Sonuçta $\Gamma' = L(I)$' dır.

5.2 Macaulay Temsili ve Lexsegment İdealler

$S = k[X_1, \cdots, X_m]$, k cismi üzerinde bir polinom halkası olsun. S'nin bir R homojen bölüm halkasının Hilbert fonksiyonunu belirleme problemi aşağıdaki soruya indirgenebilir:

$V \subset S_d$ alt uzayı verilsin.

"S_{d+1}'de $S_1 \cdot V$ alt uzayının k-boyutu hakkında ne söylenebilir?"

Bu probleme, çok özel fakat önemli bir durumda cevap vereceğiz. $u \in S_d$ bir tekterimli olsun. u' nun sağındaki d dereceli tekterimlilerinin kümesini,

$$\acute{L}_u = \{v \in S_d : v < u\}$$

ve solundaki tekterimlilerin kümesini

$$\acute{R}_u = \{v \in S_d : v \geq u\}$$

olarak tanımlayalım. Burada, $\acute{R}_{X_1} = \{X_1, \cdots, X_n\}$' dir.

5.2.1 Tanım: $\acute{R}_u \subset S_d$ formundaki tekterimliler kümesine d dereceden lexsegment adı verilir.

5.2.2 Yardımcı Teorem: $\acute{R}_{X_1} \cdot \acute{R}_u = \acute{R}_{X_1 \cdot u}$.

İspat: $\acute{R}_{X_1} = \{X_i : X_i \geq X_1\} = \{X_1, \cdots, X_n\}$,

$\acute{R}_u = \{v \in S_d : v \geq u\}$ ve

$\acute{R}_{X_1 \cdot u} = \{X_1 \cdot v : X_i \cdot v \geq X_1 \cdot u\}$

olduğunu hatırlayalım. $X_i \cdot v \in \acute{R}_{X_1} \cdot \acute{R}_u$ alalım.

$$X_i \geq X_1 \Rightarrow X_i \cdot v \geq X_1 \cdot v \text{ ve } v \geq u \Rightarrow X_1 \cdot v \geq X_1 \cdot u$$

olduğundan $X_i \cdot v \geq X_1 \cdot u$ olur. O halde, $X_i \cdot v \in \acute{R}_{X_1 \cdot u}$

Tersine, $v \in \acute{R}_{X_1 \cdot u}$ olsun. Varsayalım ki, X_1 , v' yi bölmesin. Bu durumda $v > X_1 \cdot u$ olur. $u = X_1^{\alpha_1} \cdots\cdots X_m^{\alpha_m}$, $v = X_1^{\beta_1} \cdots\cdots X_m^{\beta_m}$ ve i, $\beta_i > \alpha_i$ olacak şekilde en büyük tamsayısı olsun. $b_j > 0$ olan $j<i$ sayısı varsa, $X_j^{-1} \cdot v \in \acute{R}_u$, aksi durumda $X_i^{-1} \cdot v \in \acute{R}_u$ olur. Her iki durumda da $v \in \acute{R}_{X_1} \cdot \acute{R}_u$'dir.

5.2.3 Uyarı: $Ĺ_u$ kümesinin doğal ayrışımı vardır. Şimdi bu ayrışımın nasıl olduğunu görelim. i, $X_i|u$ olacak şekilde en büyük tamsayı olsun. Bu durumda,

$$Ĺ_u = Ĺ'_u \cup Ĺ''_u \cdot X_i$$

eşitliğini yazabiliriz. Burada, X_i, $Ĺ'_u$ 'nun hiç bir elemanını bölmez. Bu ayrışım tektir. $Ĺ'_u$, $X_1,\cdots,X_{i-1}$ değişkenli d dereceden tüm tekterimlilerin kümesidir ve $Ĺ''_u = Ĺ_{X_i^{-1}\cdot u}$'dur. Burada, $Ĺ_{X_i^{-1}\cdot u} = \{v \in S_{d-1} : v < X_i^{-1} \cdot u\}$ olduğunu hatırlayalım.

5.2.4 Örnek: $S = k[X_1,X_2,X_3,X_4]$ ve $u = X_2^2 \cdot X_3$ ($d = 3$) olsun. Burada, $i \neq 4$ çünkü, X_4, u'yu bölmez. Böylece $i = 3$ olur.

Şimdi derecesi 3 olan ve X_1,X_2 değişkenlerine bağlı tüm tekterimlilerin kümesini oluşturalım.

$$Ĺ'_u = \{X_1^3, X_1^2X_2, X_1X_2^2, X_2^3\}$$

olur. Şimdi de, $Ĺ''_u$ kümesini oluşturalım.

$$Ĺ''_u = Ĺ_{X_3^{-1}\cdot u} = Ĺ_{X_2^2} = \{v \in S_2 : v < X_2^2\} = \{X_1^2, X_1X_2\}$$

$$Ĺ''_u \cdot X_3 = \{X_1^2X_3, X_1X_2X_3\}$$

$$Ĺ_u = Ĺ'_u \cup Ĺ''_u \cdot X_3 = \{X_1^3, X_1^2X_2, X_1X_2^2, X_2^3, X_1^2X_3, X_1X_2X_3\}$$

Not: $X_1,\cdots,X_i$ değişkenlerine bağlı derecesi d olan bütün tekterimlilerinin kümesini $[X_1,X_2,\cdots,X_i]_d$ olarak gösterelim. O halde, $Ĺ_u$'nun ayrışımını şu şekilde de yazabiliriz:

$1 \leq j(1) \leq j(2) \leq \cdots \leq j(d)$ olmak üzere,

$$u = X_{j(1)}X_{j(2)}\cdots X_{j(d)}$$

yazarsak,

$$\acute{L}_u = [X_1, X_2, \cdots, X_{j(d)-1}]_d \cup \acute{L}_{X^{-1}_{j(d)}u} \cdot X_{j(d)}$$

$$= [X_1, X_2, \cdots, X_{j(d)-1}]_d \cup [X_1, X_2, \cdots, X_{j(d-1)-1}]_{d-1} \cdot X_{j(d)} \cup \acute{L}_{X^{-1}_{j(d-1)}X^{-1}_{j(d)}u} \cdot X_{j(d-1)} \cdot X_{j(d)}$$

$$= \cdots$$

Ve sonunda,

$$\acute{L}_u = \cup_{i=1}^{d} [X_1, \cdots, X_{j(i)-1}]_i X_{j(i+1)} \cdots X_{j(d)} .$$

elde edilir. Bu ayrışıma, $\acute{L}_u$ 'nun dogal ayrışımı denir.

Bunu takiben,

$$| \acute{L}_u | = \sum_{i=1}^{d} \binom{k(i)}{i}, \; k(i) = j(i) + i - 2$$

yazabiliriz. Burada, $k(d) > k(d-1) > \cdots > k(1) \geq 0$ 'dir ve $0 \leq k < l$ için $\binom{k}{l} = 0$ olduğunu kullanıyoruz.

5.2.5 Yardımcı Teorem: d pozitif bir tamsayı olsun. Herhangi bir a sayısı $k(d) > k(d-1) > \cdots > k(1) \geq 0$ olmak üzere,

$$a = \binom{k(d)}{d} + \binom{k(d-1)}{d-1} + \cdots + \binom{k(1)}{1}$$

olarak tek türlü yazılır.

İspat: Varlığını ispatlamak için, $\binom{k(d)}{d} \leq a$ olacak şekilde maksimal $k(d)$ seçelim. İspatı tümevarımla yapıyoruz. Eğer $\binom{k(d)}{d} = a$ ise, $i = 1,2,\cdots,d-1$ için

$$\sum_{i=1}^{d} \binom{k(i)}{i} = a \;, k(i) = i - 1$$

olur. O halde,

$$a = \binom{k(d)}{d} + \binom{k(d-1)}{d-1} + \cdots + \binom{k(1)}{1}$$

olarak yazılabilir. $\binom{k(d)}{d} < a$ yani, $a' = a - \binom{k(d)}{d}$ ve $k(d-1) > \cdots > k(1) \geq 0$

olduğunu varsayalım. a' için tümevarım hipotezimiz doğru olsun. Yapmamız gereken $k(d) > k(d-1)$ eşitsizliğini göstermektir. $\binom{k(d)+1}{d} > a$

$\binom{k(d)}{d-1} = \binom{k(d)+1}{d} - \binom{k(d)}{d}$ olmasından,

$$\frac{k(d) \cdot \cdots \cdot (k(d)-d+2)}{(d-1)!} = \frac{(k(d)+1) \cdot \cdots \cdot (k(d)-d+2)}{d!} - \frac{k(d) \cdot \cdots \cdot (k(d)-d+1)}{d!}$$

$$\frac{k(d) \cdot \cdots \cdot (k(d)-d+2)}{(d-1)!} = \frac{(k(d) + \cdots \cdot (k(d)-d+2))(k(d)+1-(k(d)-d+1))}{d \cdot (d-1)!}$$

Sadeleştirme işlemini yaparsak $d = d$ olduğunu görürüz. Buradan,

$$\binom{k(d)}{d-1} = \binom{k(d)+1}{d} - \binom{k(d)}{d} > a' \geq \binom{k(d-1)}{d-1}$$

$$\Rightarrow \binom{k(d)}{d-1} > \binom{k(d-1)}{d-1}$$

$$\Rightarrow k(d) > k(d-1)$$

elde edilir.

Şimdi a'nın tekliğini, a üzerinden tümevarım yaparak gösterelim. Eğer,

$$k(d) > k(d-1) > \cdots > k(1) \geq 0 \text{ ve } a = \sum_{i=1}^{d} \binom{k(d)}{d}$$

ise, bu durumda $k(d)$, $\binom{k(d)}{d} \leq a$ şartını sağlayan $k(d)$'lerin en büyüğüdür. Bu durumu ispatlamak için de yine a üzerinden tümevarım yapalım. $a = 1$ için durum açıktır. Varsayalım ki, $a > 1$ ve $\binom{k(d)+1}{d} \leq a$ olsun. Bu durumda,

$$\sum_{i=1}^{d}\binom{k(i)}{i} \geq \binom{k(d)+1}{d} - \binom{k(d)}{d} = \binom{k(d)}{d-1} \geq \binom{k(d-1)+1}{d-1}$$

olur. Bu tümevarım hipotezi ile çelişir.

5.2.6 Tanım: Yardımcı Teorem 5.2.5'deki,

$$a = \binom{k(d)}{d} + \binom{k(d-1)}{d-1} + \cdots + \binom{k(1)}{1}$$

toplamına a'nın Macaulay temsili ve $k(d), k(d-1), \cdots, k(1)$ sayılarına da a'nın d Macaulay katsayıları denir.

Not: $\forall i \leq d$ için $k(i)$ katsayısı,

$$\binom{j}{i} \leq a - \binom{k(d)}{d} - \cdots - \binom{k(i+1)}{i+1}$$

olacak şekilde maksimal j tamsayısının olmasıyla belirlenir.

5.2.7 Yardımcı Teorem: Sırasıyla, $k(d), k(d-1), \cdots, k(1)$, a'nın $k'(d), k'(d-1), \cdots, k'(1)$' de a' nün d. Macaulay katsayıları olsun. Tekterimli sıralaması alfabetik sıralama olmak üzere,

$$a > a' \Leftrightarrow (k(d) - \cdots, k(1)) > (k'(d), \cdots, k'(1))$$

İspat: d üzerinden tümevarım yaparak ispat yapalım.

$d = 1$ olduğu durumda,

$$a=\binom{k(1)}{1}=k(1) \text{ ve } a'=\binom{k'(1)}{1}=k'(1)$$

tümevarım hipotezi aşikardır. $d>1$ olduğunu varsayalım. $k(d)=k'(d)$ ise, $k(d-1),\cdots,k(1)$, $a-\binom{k(d)}{d}$ ' nın $k'(d-1),\cdots,k'(1)$ ' de $a'-\binom{k'(d)}{d}$ nün $d-1$. Macaulay katsayılarıdır ve tümevarım hipotezini uygulayabiliriz. Eğer $k(d)\neq k'(d)$ ise, $k(d)>k'(d) \Leftrightarrow a>a'$ olur.

Not: $k(d)>k(d-1)>\cdots>k(1)\geq 0$ olmak üzere,

$$a=\binom{k(d)}{d}+\binom{k(d-1)}{d-1}+\cdots+\binom{k(1)}{1}$$

Şimdi $a^{<d>}$ gösterimini tanımlayalım.

$$a^{<d>}=\binom{k(d)+1}{d+1}+\binom{k(d-1)+1}{d}+\cdots+\binom{k(1)+1}{2}$$

$$=\binom{k(d)+1}{d+1}+\binom{k(d-1)+1}{d}+\cdots+\binom{k(j)+1}{j+1}$$

olur. Burada, $0^{<d>}=0$ ' dır.

5.2.8 Önerme: u , S polinom halkasında derecesi d olan bir tekterimli olsun. Bu durumda,

$$|\acute{L}_{X_1u}|=|\acute{L}_u|^{<d>} \text{'dir.}$$

5.2.9 Tanım: $S=k[X_1,\cdots,X_m]$, k cismi üzerinde bir polinom halkası ve $u\in S$ bu halkanın bir tekterimlisi olsun. Her bir derecesi lexsegment tarafından gerilen ideale lexsegment ideal denir.

Yardımcı Teorem 4.2.5 ve Önerme 4.2.8' den aşağıdaki sonucu elde ederiz.

5.2.10 Sonuç: $I \subset S$ bir lexsegment ideal ve $R = S/I$ olsun. Bu durumda, $\forall n$ için,

$$HF(R, n+1) \leq HF(R, n)^{<n>}$$

5.3 Macaulay Teorem

Şimdi, Macaulay teoremin ifadesini ve ispatını verelim.

5.3.1 Teorem: (Macaulay) k bir cisim ve $h : N \to N$ nümerik bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdakiler birbirine denktir:

a) $\forall n \geq 0$ için, Hilbert fonksiyonu $HF(R,n) = h(n)$ olan bir R homojen k-cebiri vardır;

b) $\forall n \geq 0$ için, Hilbert fonksiyonu $HF(R,n) = h(n)$ ve üzerinde tekterimli bağıntıları olan bir R homojen k-cebiri vardır;

c) $h(0) = 1$ ve $\forall n \geq 1$ için $h(n+1) \leq h(n)^{<n>}$;

d) $m = h(1)$ olsun ve her bir $n \geq 0$ için M_n, ters derecelenmiş alfabetik sıralaması ile derecesi n olan $X_1, X_2, \cdots, X_m$ değişkenli ilk $h(n)$ tekterimlileri olsun. $M = \cup_{n\geq 0} M_n$ alalım. Bu durumda M, tekterimlilerin bir mertebe idealidir, [16].

İspat: (a)$\Rightarrow$(b) Sonuç 5.1.4'ten görülebilir.

(d)$\Rightarrow$(b) Hilbert fonksiyon tanımından açıktır.

(c)$\Rightarrow$(d) : $h(1) = m$ olduğunu varsayalım. Bu durumda (c) den,

$$h(n) \leq \binom{n+m-1}{n}$$

olur. $h(n+1) = \binom{n+m}{n+1}$ olsun. Bu durumda, $h(n) = \binom{n+m-1}{n}$ olur ve böylece $i = n$ ve $i = n+1$ için $M_i = [X_1, \cdots, X_m]_i$ elde edilir. Böylece, eğer $u \in M_{n+1}$ ve

X_i, u'yu böler ise, $X_i^{-1}u \in M_n$ elde edilir. Şimdi, $h(n+1) < \binom{n+m}{n+1}$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, $M_{n+1} = \acute{L}_{u_{n+1}}$ olacak şekilde en az bir tane u_{n+1} tekterimlisi vardır. Eğer, $M_n = [X_1, \cdots, X_m]_n$, ise ispatlanacak bir şey yoktur. Diğer durumda, $M_n = \acute{L}_{u_n}$ olacak şekilde bir u_n tekterimlisi vardır. (c) koşulu ve Önerme 5.2.8'den,

$$\acute{R}_{X_1} \cdot \acute{R}_{u_n} \subset \acute{R}_{u_{n+1}}$$

olur. Böylece, eğer $u \in M_{n+1}$ ve X_i böler u ise, $X_i^{-1}u \in M_n$' dir. Başka bir deyişle, $M = \cup_{n \geq 0} M_n$ tekterimlilerin bir mertebe ideali olur.

(a)$\Rightarrow$(c) kısmı ispatın en zor kısmıdır. Bu kısım için Green Teoreminin sadece ifadesi verilecektir.

5.3.2 Teorem: (Green) k sonsuz bir cisim ve R homojen k-cebiri $n \geq 1$ tamsayı olsun. Bu durumda,

$$HF(R/hR, n) \leq HF(R, n)_{<n>}\text{' dir, [17].}$$

Macaulay Teoremin ispatını tamamlamak için, aşağıdaki nümerik sonuca da ihtiyaç vardır.

5.3.3 Yardımcı Teorem: a, a' ve d pozitif tamsayılar olsun.

a) $a \leq a' \Rightarrow a^{<d>} \leq a'^{<d>}$' dir.

b) $k(d), k(d-1), \cdots, k(1)$'ler a'nın d. Macaulay katsayıları ve $j = \min\{i : k(i) \geq i\}$ olsun. Bu durumda,

$$(a+1)^{<d>} = \begin{cases} a^{<d>} + k(1) + 1; j = 1 \\ a^{<d>} + 1 \quad ; j > 1 \end{cases}$$

İspat: (Macaulay Teorem) (a)$\Rightarrow$(c) g bir lineer form olsun ve $S = R/gR$ alalım.

$$0 \to gR_n \to R_{n+1} \to S_{n+1} \to 0$$

tam dizisinden,

$$HF(R,n+1) \leq HF(R,n) + HF(S,n+1)$$

eşitsizliği elde edilir. $a = HF(R,n)$ and $b = HF(R,n+1)$ yazalım. Herhangi bir g lineer formu için, üstteki eşitsizlik ve 5.3.2 Green Teorem kullanılarak,

$$b \leq a + b_{<n+1>}$$

elde edilir. $k(n+1), k(n), \cdots, k(1)$'ler b'nin $n+1$. Macaulay katsayıları olsun. Bu durumda,

$$b_{<n+1>} = \binom{k(n+1)-1}{n+1} + \cdots + \binom{k(1)-1}{1}$$

olur ve böylece

$$a \geq \binom{k(n+1)-1}{n} + \cdots + \binom{k(2)-1}{1} + \binom{k(1)-1}{0}$$

elde edilir. Yine, $j = \min\{i : k(i) \geq i\}$ olsun.

$$j > 1 \Rightarrow k(1) = 0 \text{ ve } a^{<n>} \geq \binom{k(n+1)}{n+1} + \cdots + \binom{k(2)}{2} = b\text{'dir.}$$

$j = 1 \Rightarrow$ Yardımcı Teorem 5.3.3'ten,

$$a^{<n>} \geq \binom{k(n+1)}{n+1} + \cdots + \binom{k(3)}{3} + \binom{k(2)}{2} + k(2)\text{' dir.}$$

Fakat, $k(2) > k(1)$ olduğundan $a^{<n>} > b$ bulunur.

5.3.4 Sonuç: k bir cisim ve R homojen k-cebiri olsun. Bu durumda,

$$\forall n >> 0 \text{ için } HF(R,n+1) = HF(R,n)^{<n>}.$$

5.4 Lokal Halkalar Üzerinde Hilbert Fonksiyon

Bir nümerik fonksiyonun, hangi şartlar altında, standart derecelendirilmiş bir Cohen-Macaulay halkanın Hilbert fonksiyonu olduğunu Macaulay Teorem tam olarak karakterize etmesine rağman, lokal halkalar için böyle bir bilgi yoktur. Bunun sebebi, lokal halkanın Hilbert fonksiyonu, ilişkilendirilmiş derecelendirilmiş halkasının Hilbert fonksiyonuyla tanımlıdır ve maalesef lokal halkadaki güzel özellikler bu derecelendirilmiş halkaya taşınamamaktadır.

Bu bölümde ilk önce, lokal halkadaki özelliklerin, halkanın ilişkilendirilmiş derecelendirilmiş halkasına taşınamamasını bir örnekle açıklayacağız. Sonrasında ise, bu alandaki ünlü konjektürlere yer vereceğiz.

5.4.1 Örnek: $C = C(6,7,15)$ tekterimli eğrisinin koordinat halkası A olsun. Burada, $V = \{(t^6, t^7, t^{15}) : t \in k\}$ ve

$$x = t^6$$

$$y = t^7$$

$$z = t^{15}$$

Burada, $I_C = < x^5 - z^2, y^3 - x \cdot z >$'dir. O halde, $C = C(6,7,15)$ tarafından parametrize edilen tekterimli eğrinin kordinat halkası,

$$A = k\,[[t^6, t^7, t^{15}]] = k\,[[x, y, z]]/I_C$$

olur. Bu halka, bir boyutlu lokal Cohen-Macaulay halkadır.

Önerme 4.4.6 dan, A'nın ilişkilendirilmiş derecelendirilmiş halkasının,

$$gr_m A \cong k[x, y, z] / In(I)$$

olduğunu biliyoruz. $In(I)$ Örnek 4.4.7 deki gibi benzer şekilde yapılarak

$$In(I) = < x \cdot z, z^2, y^3 \cdot z, y^6 >$$

olarak bulunur. A'nın Hilbert fonksiyonu,

$$gr_m A \cong k[x,y,z]/<x\cdot z, z^2, y^3\cdot z, y^6>$$

halkasının Hilbert fonksiyonuyla tanımlıdır. $gr_m A$'nın Hilbert fonksiyonunu bulalım:

$$A' = gr_m A,\ R = k[x,y,z]\quad I^* = In(I) \text{ ve } A' = R/I^* \text{ olsun.}$$

$$R = k[x,y,z] = R_0 \oplus R_1 \oplus R_2 \oplus \cdots$$

$$I^* = <xz, z^2, y^3z, y^6> = I_0^* \oplus I_1^* \oplus I_2^* \oplus \cdots$$

$$A'_0 = sp\{1\},$$

$$A'_1 = sp\{x,y,z\},$$

$$A'_2 = sp\{x^2, xy, xz, yz, y^2, z^2\},$$

$$A'_3 = sp\{x^3, y^3, z^3, x^2y, x^2z, xy^2, xz^2, yz^2, yz^2, y^2z, xyz\},$$

$$\vdots$$

Buradan,

$HF_{A'}(0) = 1$, $HF_{A'}(1) = 3$, $HF_{A'}(2) = 4$, $HF_{A'}(3) = 5$, $HF_{A'}(4) = 5$, $HF_{A'}(5) = 6$, $HF_{A'}(6) = 6$, $HF_{A'}(7) = 6$, ...

Bu durumda, $n \geq 5$ için, $HF_{A'}(n) = 6$' dır.

Şimdi ise A'nın Hilbert serisini bulalım:

$$HS_A(z) = 1\cdot z^0 + 3\cdot z^1 + 4\cdot z^2 + 5\cdot z^3 + 5\cdot z^4 + 6\cdot z^5 + 6\cdot z^6 + 6\cdot z^7 + \cdots$$

$$= 6\cdot(1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \cdots) - 5 - 3\cdot z - 2\cdot z^2 - z^3 - z^4$$

$$= 6 \cdot \frac{1}{1-z} - 5 - 3 \cdot z - 2 \cdot z^2 - z^3 - z^4$$

$$= \frac{1 + 2 \cdot z + z^2 + z^3 + z^5}{1-z}$$

Burada A 'nın h-polinomu, $h(z) = 1 + 2 \cdot z + z^2 + z^3 + z^5$ ve A 'nın krull boyutu $d = 1$ ' dir.

A 'nın Hilbert-katsayılarını hesaplayalım:

$$h(z) = 1 + 2 \cdot z + z^2 + z^3 + z^5 \ , \quad e_0(m) = h(1) = 6$$

$$h'(z) = 2 + 2 \cdot z + 3 \cdot z^2 + 5 \cdot z^4 \ , \quad e_1(m) = \frac{h'(1)}{1!} = 12$$

$$h''(z) = 2 + 6 \cdot z + 20 \cdot z^3 \ , \quad e_2(m) = \frac{h''(1)}{2!} = 14$$

$$h'''(z) = 6 + 60 \cdot z^2 \ , \quad e_3(m) = \frac{h'''(1)}{3!} = 11$$

$$h^{iv}(z) = 120 \cdot z \ , \quad e_4(m) = \frac{h^{iv}(1)}{4!} = 30$$

$$h^{v}(z) = 120 \ , \quad e_5(m) = \frac{h^{v}(1)}{5!} = 24$$

$$h^{vi}(z) = 0 \ , \quad e_6(m) = \frac{h^{vi}(1)}{6!} = 0$$

$$\vdots$$

A 'nın Hilbert-Samuel polinomunu hesaplayalım:

$$P_A^1(X) := \sum_{i=0}^{d} (-1)^i e_i(m) \binom{X + d - i}{d - i}$$

$$= \sum_{i=0}^{1} (-1)^i e_i(m) \binom{X+1-i}{1-i}$$

$$= (-1)^0 e_0(m) \binom{X+1}{1} + (-1)^1 e_1(m) \binom{X}{0}$$

$$= 6(X+1) - 12x$$

$= 6x - 6$ ' dır.

Şimdi, A lokal halkasındaki bazı özelliklerin A'nın teğet konisi $gr_m A$'da bulunmadığını söyleyeceğiz. Devamında ise, derecelendirilmiş halkalarda bulunmuş olan bir kaç sonuç verilerek bu sonuçların lokal durumda doğru olmadığını gösteren ters örnekler verilecektir.

Örnek 5.4.1'deki A lokal halkası 1-boyutlu Cohen-Macaulay halka iken $gr_m A$ değildir ve $derinlik(gr_m(A)) = 0$ 'dır:

Önce teğet koninin Cohen-Macaulaylığını test eden kullanışlı bir teorem verelim.

5.4.2 Teorem: C, 4.3.4 Tanımdaki gibi bir tekterimli eğri olsun. $g_1, ..., g_s$ 'ler $I^* = In(I)$ için, x_1'i en küçük değişken yapan bir ters derecelendirilmiş alfabetik sırasına göre minimal Gröbner baz olsun. Bu durumda, $gr_m(k[[t^{m_1}, ..., t^{m_n}]])$ Cohen-Macaulay halka ancak ve ancak $in(g_i)$, g_i'nin en büyük dereceli terimi olmak üzere, $1 \le i \le n$ için x_1, $in(g_i)$terimini bölmez, [18].

$In(I) = < x \cdot z, z^2, y^3 \cdot z, y^6 >$ ve $x \mid x.z$ olduğundan, $gr_m A$ Cohen-Macaulay halka değildir.

Örnek 5.4.1'deki A lokal halkası Gorenstein bir halkadır: $I_C = < x^5 - z^2, y^3 - x \cdot z >$ uzunluğu 2 olan bir düzgün dizi tarafından üretilir. I_C idealinin eşboyutu, yani, afin uzayın boyutundan varyetenin boyutunun farkı,

$$\text{eşboyut}\,(I_C)=3-1=2$$

olur. Böylece [19] kitabındaki Sonuç 21.10' dan A bir Gorenstein halkadır. $gr_m A$ bir Cohen-Macaulay halka olmadığından Gorenstein halka da olamaz.

Örnek 5.4.1'deki A' nın Hilbert serisi,

$$HS_A(z)=\frac{1+2\cdot z+z^2+z^3+z^5}{1-z}$$

Bu nümerik fonksiyon Macaulay teoremini sağlamaz. Bu durumda, hiç bir derecelendirilmiş Cohen-Macaulay cebiri için olası bir Hilbert fonksiyon değildir.

Kleiman[20], sabit bir katlılık ve boyuta sahip olan derecelendirilmiş halkalar için mümkün olabilecek Hilbert fonksiyonunun sonlu sayıda olduğunu ispatlamıştır. Fakat lokal halkalar için benzer bir sonuç yoktur.

Şimdi boyutu 2 ve katlılığı 4 olan lokal halkaların sınıfını göz önüne alalım. Burada bu halkaların sonlu sayıda Hilbert fonksiyonunun olmadığını göstereceğiz.

$r>1$ ve $A_r := k[[x,y,w,t]]/\wp_r$ olsun. Burada,

$$\wp_r=(w^r t^r-xy,x^3-w^{2r}y,y^3-t^{2r}x,x^2t^r-y^2w^r)$$

İdeali $k[[x,y,w,t]]$'da asal idealdir. A_r'nin teğet konisi (ilişkilendirilmiş derecelendirilmişhalkası) standart derecelendirilmiş bir cebir olup,

$$gr_m(A_r)=k[x,y,w,t]/(xy,x^3,y^3,x^2t^r-y^2w^r)$$

halkasıdır. A_r'nin Hilbert serisi;

$$HS_{A_r}(z)=\frac{1+2\cdot z+2\cdot z^2-z^{r+2}}{(1-z)^2}\text{, dır.}$$

Burada, lokal halkanın Hilbert fonksiyonu r'ye bağlıdır. Bu da Hilbert fonksiyonunun sonlu sayıda olmadığını anlamına gelir.

5.5 Bir Boyutlu Lokal Halkaların Hilbert Fonksiyonları

Bir Cohen-Macaulay lokal halkanın Hilbert fonksiyonu hakkında ne söylenebilir?

Verilen bir nümerik fonksiyonun ne zaman bir lokal halkanın Hilbert fonksiyonu olacağı problemi hala çözülmekten çok uzaktır. Bu problem bir boyuttaki Cohen-Macaulay lokal halkalarda bile hala oldukça açık bir problemdir. Bu durumda, en azından bir tekterimli eğrinin Hilbert fonksiyonunun davranışını belirlemek önemli bir soru haline gelir.

Bu bölümde, bu problem ile ilgili bilinen bazı konjektürler ve sonuçlar sunulacaktır.

5.5.1 Sally' nin Konjektürü: A yeterince küçük bir gömme boyutuna sahip olan 1-boyutlu Cohen Macaulay lokal halka olsun. Bu durumda, A' nın Hilbert fonksiyonu azalan değildir, [21].

Literatürde Hilbert fonksiyonu azalan olan ilk örnek J.Herzog ve R.Waldi [22] tarafından 1975 yılında bulundu:

$$A = k[[t^{30}, t^{35}, t^{42}, t^{47}, t^{148}, t^{153}, t^{157}, t^{169}, t^{181}, t^{193}]]$$

semigrup halkasının gömme boyutu $b = HF_A(1) = 10$, katlılığı $e_o = 30$ dur. Burada,

$$HF_A(0) = 1,\ HF_A(1) = 10,\ HF_A(2) = 9,\ HF_A(3) = 16,\ HF_A(4) = 25, \cdots$$

$HF_A(2) = 9 < HF_A(1) = 10$'dir.

İkinci örnek ise Eakin ve Sathaye [23] tarafından verilmiştir. Bu örnek, katlılığı $e_o = 15$ ve gömme boyutu $b = HF_A(1) = 12$ olan

$$A = k[[t^{15}, t^{21}, t^{23}, t^{47}, t^{48}, t^{49}, t^{50}, t^{52}, t^{54}, t^{55}, t^{56}, t^{58}]]$$

semigrup halkasıdır. Burada,

$$HF_A(0)=1,\ HF_A(1)=12,\ HF_A(2)=11,\ HF_A(3)=13,\ HF_A(4)=15,\cdots$$

ve $HF_A(2)=11<HF_A(1)=12$ ' dir.

Bazı hesaplamalar, Cohen-Macaulay halka durumunda oluşan bazı patolojilerin, lokal halka Gorenstein olduğunda oluşmayacağını hissettirmektedir. Bundan dolayı, konjektür M.E. Rossi tarafından aşağıdaki gibi tekrar ifade edilmiştir.

5.5.2 Rossi' nin Konjektürü: A 1-boyutlu Gorenstein lokal halka olsun. Bu durumda, A ' nın Hilbert fonksiyonu azalan değildir, [24].

Şimdiye kadar olan hiç bir çalışmada bu konjektüre ters düşen bir örnek bulunamamış olmasına rağmen doğruluğu da henüz ispatlanamamıştır.

6. SONUÇ

Bu tezde, Cohen-Macaulay lokal halkaların Hilbert fonksiyonlarını çalıştık. Özellikle lokalizasyonla elde edilen lokal halkalar ile ilgilendiğimizden ilk olarak lokal halkalar ve lokalizasyonu anlattık. Ayrıca derecelendirilmiş halkaların Hilbert fonksiyonunun tanımını verdik ve derecelendirilmiş halkalar üzerinde Hilbert fonksiyon, Hilbert serisi ve Hilbert polinom hesaplanışlarını örneklerle gösterdik.

Tezin üçüncü bölümünde, hesapsal bakış açısını anlamak için global ve lokal sıralamaları tanıttık ve lokal halkalar üzerinde standart baz hesaplamasını anlattık.

Dördüncü bölümde, bir halkanın ne zaman Cohen-Macaulay ve Gorenstein halka olduğunu verdik. Bir halkanın teğet konisini (ilişkilendirilmiş derecelendirilmiş halkasını) ve tekterimli eğrileri tanıttık.

Tezin son bölümünde ise, ilk olarak derecelendirilmiş Cohen-Macaulay halkanın Hilbert fonksiyonunun yapısını tam anlamıyla karakterize eden Macaulay Teoremini detaylıca anlamaya çalıştık. Sonrasında, lokal halkaların geometrik özelliklerinin teğet konisine taşınamamasını bir tekterimli eğri örneği üzerinden çalıştık. Son olarak, lokal halkaların Hilbert fonksiyonunun yapısını belirlemek için öne sürülen konjektürlere yer verdik.

7. KAYNAKLAR

[1] Hilbert, D., "Über die Theorie der algebraischen Formen", *Math.Ann.*, 42, 473-534, (1890).

[2] Bayer, D. ve Stillman, M., *Macaulay, A system for computation in algebraic geometry and commutative algebra,* (1992).

[3] Greuel, G. M., Pfister, G., Schönemann, H., SINGULAR 2.0. A Computer Algebra System for Polynomial Computations. Centre for Computer Algebra, [online], (27.08.2012), http://www.singular.uni-kl.de, (2001).

[4] CoCoA: A system for doing Computations in Commutative Algebra[online], (27.08.2012), http://cocoa.dima.unige.it

[5] Northcott, D. G., "A note on the coefficients of the abstract Hilbert function", *J. London Math. Soc.*, 35, 209-214, (1960).

[6] Krull, W. , "Dimensionstheorie in Stellenringen", *Crelle Journal*, 179, 204-226, (1938).

[7] Igusa, K., Commutative Algebra, Part B, Math 101B, [online], (27.08.2012), http://people.brandeis.edu/~igusa/Math101bS07/Math101b_notesB6.pdf

[8] Schenck H., *Computational Algebraic Geometry,* Cambridge University Press, (2003).

[9] Smith, J. *A.*, "Hilbert Sequences of Monomial Ideals", Lisans, Bard College, New York, (2002).

[10] Greuel, G.M. ve Pfister, G., *A Singular Introduction to Commutative Algebra,* New York: Springer Berlin Heidelberg, (2002).

[11] Rossi, M. E., Valla, G. *Hilbert functions of Filtered Modules Lecture Notes of the Unione Mathematica Italiana*, 9.cilt, Springer, (2010).

[12] Atiyah, M. F. ve MacDonald, I. G., *Introduction to Commutative Algebra*, Westview Press, (1969).

[13] Bruns, W. ve Herzog, J., *Cohen-Macaulay Rings,* Cambridge University Press: Cambridge, (1993).

[14] Balcerzyk, S. ve Jósefiak, T., *Commutative Rings, Dimension, Multiplicity and Homological Methods,* Ellis Horwood Ltd., Warsaw: PWN-Polish Scientific Publishers, (1989).

[15] Kunz, E., *Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry,* Boston Basel Berlin: Birkhäuser, (1991).

[16] Macaulay, F.S., "Some properties of enumeration in the theory of modular Systems", *Proc. London Math. Soc.*, 26, 531-555, (1927).

[17] Green, M., Restrictions of linear series to hyperplanes , and some results of Macaulay and Gotzmann. (eds : E. Ballico and C. Ciliberto), *Algebraic Curves and Projective Geometry*, Italy: Springer, 76-86, (1989).

[18] Arslan, S.F., "Cohen-Macaulayness of tangent cones", *Proc. Amer. MAth. Soc.*, 128, 2243-2251, (1999).

[19] Eisunbud, D., *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geomety,* New York: Springer-Verlag, (1995).

[20] Kleiman, S., "Theorie des intersections et theoreme de Riemann-Roch",*Lecture Notes in Math.*, Springer, 225, (1971).

[21] Sally, J., "Number of generators of ideals in local rings", *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, 35, (1978).

[22] Herzog, J. ve Waldi, R., " A note on the Hilbert function of a one-dimensional Cohen-Macaulay ring", *Manuscripta Math.*, 16, 251-260, (1975).

[23] Eakin, J. ve Sathaye, A., "Prestable ideals", *Journal of Algebra*, 41, 439-454, (1976).

[24] Rossi, M. E., "Hilbert Functions of Cohen-Macaulay local rings ", *Lecture notes in Commutative Algebra and its Connections to Geometry,* Universidade Federal de Pernambuco, Olinda (Brasil), (2009).