T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

AĞIRLIKLI SİMETRİK SMIRNOV UZAYLARINDA POISSON POLİNOMLARIYLA YAKLAŞIM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÖMER KAMIŞ

BALIKESİR, AĞUSTOS - 2012

KABUL VE ONAY SAYFASI

Ömer KAMIŞ tarafından hazırlanan **"AĞIRLIKLI SİMETRİK SMIRNOV UZAYLARINDA POISSON POLİNOMLARIYLA YAKLAŞIM"** adlı tez çalışmasının savunma sınavı 01.08.2012 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Doç. Dr. Ramazan AKGÜN	....
Üye Prof. Dr. Daniyal İSRAFİLZADE	....
Üye Yard. Doç. Dr. Yunus Emre YILDIRIR	....

Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez BAÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Prof. Dr. Hilmi NAMLI ....

ÖZET

AĞIRLIKLI SİMETRİK SMIRNOV UZAYLARINDA POISSON POLİNOMLARIYLA YAKLAŞIM
YÜKSEK LİSANS TEZİ
ÖMER KAMIŞ
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. RAMAZAN AKGÜN)

BALIKESİR, AĞUSTOS - 2012

Bu çalışmanın amacı analitik fonksiyonların bazı sınıflarında yaklaşım teorisinin bazı problemlerini incelemektir.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde yaklaşım teorisi ve kompleks düzlemde bu teorinin gelişimi ile ilgili kronolojik bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde temel tanımlar ve araştırma konusu olan fonksiyon uzaylarının tanımları verilmiştir. Ayrıca bu bölümde, Faber-Laurent serileri, onların temel özellikleri ve Konform Dönüşüm Teoremi hakkında genel bilgiler vardır.

Üçüncü bölümde birim çember üzerinde tanımlı ağırlıklı simetrik Smirnov uzayındaki fonksiyonlar ve onların kesirli türevleri için trigonometrik polinomlarla yaklaşım problemleri incelenmiştir. Bu problemler yardımıyla bu uzayda tanımlı Lipschitz sınıflarının yapısal karakterizasyonu elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde kapalı Dini-düzgün bir eğrinin sınırlı ve sınırsız bileşenleri üzerinde tanımlı ağırlıklı simetrik Smirnov uzayları göz önüne alınarak bu uzaylarda ağırlığın bazı koşulları sağladığı durumda Poisson polinomları, Faber polinomları ve Rasyonel fonksiyonlar ile yaklaşımın düz ve ters teoremleri ispatlanmıştır. Genelleştirilmiş Lipschitz sınıflarının yapısal karakterizasyonu problemi incelenmiştir.

Son bölümde elde edilen sonuçların bir özeti verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Smirnov uzayı, Dini-düzgün eğri, düz teorem, ters teorem, yapısal karakterizasyon.

ABSTRACT

APPROXIMATION BY POISSON POLYNAMIALS IN WEIGHTED SYMMETRIC SMIRNOV SPACES
MSC THESIS
ÖMER KAMIŞ
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE MATHEMATICS

(SUPERVISOR: ASSOC. PROF. DR. RAMAZAN AKGÜN)

BALIKESİR, AUGUST 2012

The purpose of this work is to investigate some problems of approximation theory in some classes of analytic functions.

This thesis consists of five chapters. In the first chapter, some chronological information about the approximation theory and its progress are given.

In the second chapter, basic definitions and the definitions of the function spaces which are investigated are given. In addition, it contains the definitions, general properties of the Faber-Laurent series and the Conformal Mapping Theorem.

In the third chapter, we consider the trigonometric polynomial approximation problems for functions and its fractional derivatives in weighted symmetric Smirnov spaces defined on the unit disk. Using these problems we obtained a constructive characterization of Lipschitz class in these spaces.

In the fourth chapter, considering the Smirnov spaces of the functions defined on the bounded and unbounded components of a given closed Dini-smooth curve, the direct and inverse theorems of approximation theory by the Poisson polynamials, by the Faber polynomials and Rational functions are investigated. Some constructive characterization problems of the genralized Lipschitz classes are investigated.

In the last chapter the results which are obtained are summarized according to chapters.

KEYWORDS: Smirnov spaces, Dini- smooth curve, direct theorem, inverse theorem, constructive characterization.

İÇİNDEKİLER

SEMBOL LİSTESİ

C	: Kompleks sayılar kümesi
$\overline{C}$	: Genişletilmiş kompleks sayılar kümesi
$\mathbf{R}$	: Reel sayılar kümesi
T	: Kompleks düzlemde birim çember
D	: Kompleks düzlemde birim disk
Γ	: Kompleks düzlemde sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi
S_Γ	: Cauchy singüler operatörü
Γ_R	: Seviye eğrisi
α_X, β_X	: Alt ve üst Boyd indisleri
$X(\Gamma)$	: Γ eğrisi üzerinde simetrik uzay
ω	: Ağırlık fonksiyonu
$X(\Gamma, \omega)$	: Γ eğrisi üzerinde ağırlıklı simetrik uzay
$\wp_n$	: Derecesi n' yi aşmayan cebirsel polinomların kümesi
$\Omega^r{}_{X,\Gamma,w}$	: Ağırlıklı r. düzgünlük modülü
$E_n(f,G)$	: En iyi yaklaşım hatası
$Lip(X,\Gamma,\omega)$	: Genelleştirilmiş Lipschitz sınıfı

ÖNSÖZ

Yüksek lisans çalışmam boyunca bana değerli zamanını ayıran, destekleyen, bilgi ve tecrübesiyle de bu tezin oluşmasında hiçbir yardımı esirgemeyen değerli hocam ve danışmanım Doç. Dr. Ramazan AKGÜN' e ne kadar teşekkür etsem azdır.

Matematiğe karşı ilgimin artmasında emeği olan Matematik bölümü öğretim üyelerine çok teşekkür ederim.

Son olarak beni bu zamana kadar yetiştiren, her zaman yanımda olan, haklarını asla ödeyemeyeceğim Annem ile Babama ve diğer büyüklerime, yaşadığım hayattan zevk almamı sağlayan arkadaşlarıma ve öğrencilerime ayrıca teşekkürlerimi sunuyorum.

1. GİRİŞ

Yaklaşım teorisinde belli özelliklere sahip fonksiyon uzaylarının elemanlarına, bu uzayın bir alt uzayından olup daha iyi özelliklere sahip olan fonksiyonlarla yaklaşım problemleri incelenir. Genellikle bu alt uzay olarak, özellikleri çok iyi bilinen, polinomlar ya da rasyonel fonksiyonlar ailesi alınmaktadır. Temel problemlerden biri, verilen fonksiyona alt uzaydan en iyi yaklaşan elemanın varlığı problemidir. Özel halde, alt uzay olarak poinomlar kümesi alındığında Banach uzaylarında en iyi yaklaşım elemanının varlığı iyi bilinmektedir. Bu problemin pozitif çözümü bir sonraki problemin, verilen fonksiyonla buna en iyi yaklaşan eleman arasındaki hatanın, fonksiyonun belli karakteristikleri (örneğin, düzgünlük modülü) yardımıyla değerlendirilmesi probleminin çözümü için bir altyapı oluşturmaktadır. En iyi yaklaşım hatasının üstten değerlendirilmesi ile ilgili problemlere yaklaşım teorisinin düz problemleri, elde edilen teoremlere ise düz teoremler denir. Bunun tam zıttı problemler ise yaklaşım teorisinin ters problemleri olarak bilinmektedir. Bu durumda, düzgünlük modülü üstten en iyi yaklaşım sayısı yardımı ile değerlendirilir ve fonksiyonun yaklaşım özelliklerine göre hangi sınıfa ait olduğu hakkında bilgi edinme amacı güdülür. En ideal durum belli bir sınıfta elde edilen düz ve ters yaklaşım teoremlerin gerek ve yeter koşul olarak ifade edilebilmesidir.

$E^p(G)$, $1<p<\infty$, Smirnov uzaylarında yaklaşım hızının değerlendirilmesi problemi 1959 yılında Walsh ve Russel [1] ile başlar. Bu çalışmada kompleks düzlemde sınırı analitik eğri olan G basit bağlantılı, sınırlı bölgesi göz önüne alınmış, polinomlarla yaklaşımın hızı değerlendirilmiştir. 1960 yılında S. Ya. Al'per [2] bölgenin sınırını Dini-düzgün eğri olarak almış, polinomlarla yaklaşımın düz ve ters teoremlerini elde etmiştir. Daha sonra 1967 yılında V. M. Kokilashvili [3] Al'per'in sonuçlarını geliştirmiş ve bölgenin sınırının Dini- düzgün eğri olduğu durumda düz ve ters yaklaşım teoremlerinin bazı iyileştirmelerini ispatlamıştır. V. M. Kokilashvili [4] te bölgenin sınırını Carleson eğrisi almış ve S singüler integral operatörünün $L^p(\partial G)$, $1<p<\infty$ Lebesgue uzayında sınırlı olması koşulu altında

[3] teki sonuçlarını genelleştirmiştir. Benzer bazı sonuçlar D. I. Mamedhanov ve I. I. Ibragimov [5] tarafından da elde edilmiştir. 1977 yılında J-E. Anderson [6] bazı özel bölgeler sınıfında V. M. Kokilashvili'nin [4] teki düz teoreminin $p=1$ için de doğru olduğunu göstermiştir. Diğer taraftan, $E^1(G)$ uzayında bazı yaklaşım problemleri M. I. Andrasko [7] ve D. M. Galan [8] tarafından incelenmiştir. D. M. İsrafilov, bölgenin sınırı Carleson eğrisi ve $1<p<\infty$ durumunda $E^p(G)$, $1<p<\infty$ uzayında Faber polinomları ile yaklaşımı [9] da, p-Faber poinomları ile yaklaşımı A. Çavuş'la birlikte [10] da incelemişlerdir. Bu çalışmalardaki sonuçlar ağırlıklı Lebesgue uzayına da taşınmıştır [11], [12].

Kompleks düzlemde yaklaşım problemleri daha genel uzaylar için de incelenmiştir. Bu bağlamda 1968 yılında [13] V. M. Kokilashvili tarafından Smirnov uzaylarının bir genellemesi olan $E_M(G)$ Smirnov-Orlicz sınıfı tanımlanmış ve bölge sınırı Dini-düzgün eğri iken bazı ters yaklaşım teoremleri ispatlanmıştır. Bu uzayda düz teoremler son yıllarda elde edilmiştir. A. Güven ve D. M. İsrafilov [14] te Carleson eğrisi ile sınırlı bölgede tanımlı fonksiyonların Smirnov-Orlicz uzayının belli bir alt uzayında düz teoremi ispatlamışlardır.

Bu tezde ağırlıklı simetrik Smirnov uzayı göz önüne alınıp G bölgesinin Dini-düzgün eğri ile sınırlı durumda cebirsel polinomlarla düz ve ters yaklaşım problemleri incelenmiştir.

İkinci bölümde temel tanımlar ve araştırma konusu olan fonksiyon uzaylarının tanımları verilmiştir. Ayrıca bu bölümde, Faber-Laurent serileri, onların temel özellikleri ve Konform Dönüşüm Teoremi hakkında genel bilgiler vardır.

Üçüncü bölümde $[0,2\pi]$ üzerinde tanımlı ağırlıklı simetrik Smirnov uzayındaki fonksiyonlar [15] ve onların kesirli türevleri için trigonometrik polinomlarla yaklaşım problemleri incelenmiştir. Bu problemler yardımıyla, bu uzayda tanımlı Lipschitz sınıflarının yapısal karakterizasyonu elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde kapalı Dini-düzgün bir eğrinin sınırlı ve sınırsız bileşenleri üzerinde tanımlı ağırlıklı simetrik Smirnov uzayları göz önüne alınarak bu uzaylarda ağırlığın bazı koşulları sağladığı durumlarda Poisson polinomları, Faber polinomları ve Rasyonel fonksiyonlarla [16] yaklaşımın düz ve ters teoremleri ispatlanmıştır. Genelleştirilmiş Lipschitz sınıflarının yapısal karakterizasyonu problemi incelenmiştir.

2. ÖN BİLGİLER

2.1 Fonksiyon Uzayları

Tanım 2.1.1 Kompleks düzlemde bağlantılı ve açık kümeye *bölge*, bağlantılı ve kapalı bir kümeye de *kontinyum* denir.

Γ, kompleks düzlemde bir eğri olsun. Eğer Γ bir çembere homeomorfik ise buna bir Jordan eğrisi denir. Γ eğrisinin sınırlı değişimli bir parametrizasyonu varsa bu eğriye *sonlu uzunluklu eğri* adı verilir.

Tanım 2.1.2 Γ, kompleks düzlemde sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi ve $1 \leq p < \infty$ olsun. Γ üzerinde tanımlı ve

$$\|f\|_{L_p(\Gamma)} = \left(\int_{\Gamma} |f(z)|^p |dz| \right)^{1/p} < \infty$$

koşulunu sağlayan $f : \Gamma \to C$ fonksiyonların kümesi $L_p(\Gamma)$ ile gösterilir. $L_p(\Gamma)$, $\| \cdot \|_{L_p}$ normuna göre bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.1.3 $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $L_p(\Gamma)$ Banach uzayına *Lebesgue uzayı* denir.

Γ, kompleks düzlemde sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi olsun. Γ eğrisinin $|dt|$ (Lebesgue yay uzunluğu) ölçüsü ile donatıldığını varsayalım.

$M(\Gamma)$ ile, ölçülebilir bütün $f : \Gamma \to C$ fonksiyonları kümesini ve $M^{+}(\Gamma)$ ile $M(\Gamma)$ kümesinin $[0, \infty]$ aralığında değer alan elemanlarının kümesini gösterelim.

Bir $\rho : M^+(\Gamma) \to [0,\infty]$ dönüşümünü göz önüne alalım. Her $f, g, f_n \in M^+(\Gamma)\ (n \in N)$ fonksiyonları, her $a \geq 0$ sabiti ve ölçülebilir her $E \subset \Gamma$ kümesi için aşağıdakiler sağlanıyorsa ρ dönüşümüne bir *fonksiyon normu* adı verilir:

(*i*) $\rho(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$ *h.h.* (*hemen her yerde*),

$\rho(af) = a\rho(f)$,

$\rho(f+g) \leq \rho(f) + \rho(g)$

(*ii*) $0 \leq g \leq f$ *h.h.* $\Rightarrow \rho(g) \leq \rho(f)$

(*iii*) $0 \leq f_n \uparrow f$ *h.h.* $\Rightarrow \rho(f_n) \uparrow \rho(f)$

(*iv*) $\rho(\chi_E) < \infty,\quad \int_E f|dt| \leq C_E \rho(f)$,

Burada $C_E \in (0,\infty)$ E *ve* ρ 'ya bağlı fakat f fonksiyonuna bağlı olmayan bir sabit ve χ_E ise E 'nin karakteristik fonksiyonudur.

ρ bir fonksiyon normu ise

$$\rho'(g) = \sup\left\{ \int_\Gamma f(t)g(t)|dt| :\quad f \in M^+(\Gamma), \rho(f) \leq 1 \right\}$$

dönüşümü de bir fonksiyon normu olur. Buna ρ *fonksiyon normunun eşlenik normu* adı verilir.

ρ bir fonksiyon normu olsun. $\rho(|f|) < \infty$ biçimindeki bütün $f \in M(\Gamma)$ fonksiyonlarının kümesini $X(\Gamma)$ ile gösterelim. $X(\Gamma)$ bir lineer uzaydır. Buna *Banach fonksiyon uzayı* adıverilir. $f \in X(\Gamma)$ fonksiyonunun normu

$$\| f \|_{X(\Gamma)} = \rho(|f|)$$

olarak tanımlanırsa $X(\Gamma)$ bir Banach uzayı olur.

ρ', ρ fonksiyon normunun eşlenik normu olsun. ρ' ile üretilen Banach fonksiyon uzayına $X(\Gamma)$ *uzayının eşlenik uzayı* denir ve $X'(\Gamma)$ ile gösterilir. Her $X(\Gamma)$ Banach fonksiyon uzayı ikinci eşlenik uzayı ile çakışıktır, yani

$$X(\Gamma)=X''(\Gamma)$$

olur. Ayrıca, her $f\in X(\Gamma)$ için

$$\|f\|_{X(\Gamma)}=\|f\|_{X''(\Gamma)}$$

olur. Böylece

$$\|f\|_{X(\Gamma)}=\sup\left\{\int_\Gamma |f(t)g(t)\|dt| : g\in X'(\Gamma), \|g\|_{X'(\Gamma)}\le 1\right\}$$

ve

$$\|g\|_{X'(\Gamma)}=\sup\left\{\int_\Gamma |f(t)g(t)\|dt| : f\in X(\Gamma), \|f\|_{X(\Gamma)}\le 1\right\}$$

elde edilir.

Teorem 2.1.4 $X(\Gamma)$ bir Banach fonksiyon uzayı ve $X'(\Gamma)$ bu uzayın eşlenik Banach fonksiyon uzayı olsun. Eğer $f\in X(\Gamma)$ ve $g\in X'(\Gamma)$ ise,

$$\int_\Gamma |f(t)g(t)\|dt| \le \|f\|_{X(\Gamma)}\|g\|_{X'(\Gamma)}$$

Hölder eşitsizliği sağlanır.

$M_0(\Gamma)$ ve $M_0^{+}(\Gamma)$, sırasıyla $M(\Gamma)$ ve $M^{+}(\Gamma)$' nın hemen her yerde sonlu fonksiyonlarının sınıfları olsunlar. Bir $f\in M_0(\Gamma)$ fonksiyonunun *dağılım(distribution) fonksiyonu*

$$m_f(\lambda)=\left|\{z\in\Gamma : |f(z)|>\lambda\}\right|,\quad \lambda\ge 0$$

olarak tanımlanır. Burada $\left|\{z\in\Gamma : |f(z)|>\lambda\}\right|$, $\{z\in\Gamma : |f(z)|>\lambda\}$kümesinin Lebesgue ölçüsü anlamındadır. Eğer $f,g\in M_0(\Gamma)$ fonksiyonları için

$$m_f(\lambda)=m_g(\lambda),\quad \lambda\ge 0$$

oluyorsa, f ve g fonksiyonlarına *eş- ölçülebilir (equimeasurable) fonksiyonlar* denir.

Tanım 2.1.5 Eğer her $f,g\in M_0(\Gamma)$ eş- ölçülebilir fonksiyon çifti için $\rho(f)=\rho(g)$ oluyorsa, ρ fonksiyon normuna rearrangement invariant fonksiyon normu denir. Bu durumda, ρ ile üretilen Banach fonksiyon uzayına *rearrangement invariant (R.I.) uzay veya simetrik uzay* adı verilir.

Bir $X(\Gamma)$ Banach fonksiyon uzayının R.I. olması için yeterli koşul, bunun $X'(\Gamma)$ eşlenik uzayının R.I. olmasıdır.

$X(\Gamma)$ R.I. uzayı için

$$L_\infty \subset X(\Gamma) \subset L_1(\Gamma)$$

olur.

$f \in M_0(\Gamma)$ olsun.

$$f^*(t) = \inf\{\lambda : m_f(\lambda) \leq t\}, \quad t \geq 0$$

biçiminde tanımlanan f^* fonksiyonuna, *f fonksiyonunun azalan rearrangementi* denir.

$X(\Gamma)$, sonlu uzunluklu bir Γ Jordan eğrisi üzerinde bir R.I. uzay olsun. Luxemburg gösterim teoremine göre $R_+ = [0,\infty)$ üzerinde her $f \in M_0^+(\Gamma)$ için,

$$\rho(f) = \overline{\rho}(f^*)$$

olacak şekilde bir $\overline{\rho}$ R.I. fonksiyon normu vardır. R_+ üzerinde $\overline{\rho}$ ile üretilen R.I. uzayı $\overline{X}$ ile gösterelim.

$M_0(R_+)$ üzerinde $x > 0$ için

$$E_X(f)(t) = \begin{cases} f(xt), & xt \in [0,|\Gamma|] \\ 0 \quad , & xt \notin [0,|\Gamma|] \end{cases}, \quad t > 0$$

biçiminde tanımlanan E_X operatörünü göz önüne alalım. $B(\overline{X})$ ile $\overline{X}$ üzerindeki sınırlı lineer operatörlerin Banach cebirini gösterelim. Her $x > 0$ için $E_{1/x} \in B(\overline{X})$ olur. $h_X(x)$ ile $E_{1/x}$ operatörünün operatör normunu gösterelim, yani,

$$h_X(x) = \left\| E_{1/x} \right\|_{B(\overline{X})}$$

olsun.

$$\alpha_X = \inf_{0<x<1} \frac{\log h_X(x)}{\log x}$$

ve

$$\beta_X = \sup_{0<x<\infty} \frac{\log h_X(x)}{\log x}$$

biçiminde tanımlanan α_X ve β_X sayılarına $X(\Gamma)$ R.I. uzayının sırasıyla alt ve üst Boyd indisleri denir. Boyd indisleri

$$0 \le \alpha_X \le \beta_X \le 1$$

eşitsizliklerini sağlar. Eğer

$$0 < \alpha_X \le \beta_X < 1$$

ise, *Boyd indisleri nontrivial'*dir denir.

2.2 Analitik Fonksiyonların Bazı Sınıfları

Γ sonlu uzunluklu bir Jodan eğrisi ve $0 < p < \infty$ olsun. Jordan eğri teoremine göre, her Jordan eğrisi, kompleks düzlemi biri sınırlı diğeri sınırsız olan ve bu eğriyi ortak sınır kabul eden iki basit bağlantılı bölgeye ayırır. G ile Γ eğrisinin iç bölgesini ve G^- ile Γ eğrisinin dış bölgesini gösterelim.

Ayrıca

$$D = \{z \in C : |z| < 1\}$$

olsun.

Γ_r, $0 < r < 1$, D diskinin G bölgesi üzerine bir konform dönüşümü altında $\{w : |w| = r, 0 < r < 1\}$ çemberinin görüntüsü olsun. G bölgesinde analitik olan ve

$$\sup_{0<r<1} \int_{\Gamma_r} |f(z)|^p |dz| < \infty$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonlarının kümesini $E^{p}(G)$ ile gösterelim. $E^{p}(G)$ sınıflarına *Smirnov Uzayları* denir.

Her $f \in E^{p}(G)\,(0 < p < \infty)$ fonksiyonunun Γ üzerinde hemen her yerde açısal limit değeri vardır ve bu limit değerleri için yine f gösterimini kullanırsak $f \in L_{p}(G)$ olur.

Smirnov sınıflarının önemli bir özelliği Cauchy integral gösterimidir.

Teorem 2.2.1 $f \in E^{1}(G)$ ise

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z}d\varsigma = \begin{cases} f(z), & z \in G \\ 0\ , & z \in G^{-} \end{cases}$$

olur.

$E^{p}(G^{-})$ Smirnov uzayı da benzer şekilde tanımlanır ve $E^{p}(G)$ ile aynı özelliklere sahiptir. Cauchy integral teoremi ise, $f \in E^{1}(G^{-})$ için

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z}d\varsigma = \begin{cases} f(\infty) - f(z), & z \in G^{-} \\ f(\infty), & z \in G \end{cases}$$

biçimini alır.

$X(\Gamma)$, Γ üzerinde bir R.I uzay osun. $f \in X(\Gamma)$ biçimindeki $f \in E^{1}(G)$ fonksiyonlarının kümesini $E_{X}(G)$ ile, $f \in X(\Gamma)$ biçimindeki $f \in E^{1}(G^{-})$ fonksiyonlarının kümesini de $E_{X}(G^{-})$ ile gösterelim.

$$E_{X}(G) = \{f \in E^{1}(G) \ : \ f \in X(\Gamma)\}$$

$$E_{X}(G^{-}) = \{f \in E^{1}(G^{-}): \ f \in X(\Gamma)\}.$$

Kompleks düzlemde, derecesi en fazla $n \in N$ olan cebirsel polinomların kümesini $\wp_{n}$ ile gösterelim.

Tanım 2.2.2 $f \in E_{X}(G)$ olsun. $n \in N$ olmak üzere

$$E_{n}^{X}(f,G) := \inf_{p \in \wp_{n}}\|f - p\|_{X(\Gamma)}$$

sayısına f *fonksiyonunun* $\wp_n$ *sınıfında en iyi yaklaşım sayısı* denir.

Tanım 2.2.3 Bir $\omega : \Gamma \to [0,\infty]$ fonksiyonu

i) ω ölçülebilir

ii) $\omega^{-1}(\{0,\infty\})$ ön görüntü kümesi sıfır ölçülü küme

koşullarını sağlıyorsa ω' ya *ağırlık* adı verilir.

ω bir ağırlık olmak üzere

$$X(\Gamma,\omega) := \{f : \Gamma \to C \mid \quad f \text{ ölçülebilir}, f\omega \in X(\Gamma)\}$$

ve

$$\|f\|_{X(\Gamma,\omega)} := \|f\omega\|_{X(\Gamma)}$$

olarak tanımlanır. Bu durumda $X(\Gamma,\omega)$ bir normlu uzay olur. Bu normlu uzaya *ağırlıklı rearrangement invariant (simetrik) uzay* denir.

Eğer $\omega \in X(\Gamma)$ ve $1+\omega \in X'(\Gamma)$ ise $X(\Gamma,\omega)$ bir Banach fonksiyon uzayı olur ve Hölder eşitsizliğinden

$$L^{\infty}(\Gamma) \subset X(\Gamma,\omega) \subset L_1(\Gamma)$$

elde edilir.

$z \in \Gamma$ ve $\varepsilon > 0$ için $\Gamma(z,\varepsilon)$ ile Γ eğrisiyle z merkezli ε yarıçaplı diskin kesişimini gösterelim:

$$\Gamma(z,\varepsilon) := \{t \in \Gamma : \quad |t-z| < \varepsilon\}.$$

Bir $p \in (1,\infty)$ için $q \in (1,\infty)$ sayısını $p^{-1}+q^{-1}=1$ olacak şekilde tanımlayalım. $A_p(\Gamma)$ ile bütün $\omega : \Gamma \to [0,\infty]$ ağırlıklarının

$$\sup_{z\in\Gamma}\sup_{\varepsilon>0}\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\Gamma(z,\varepsilon)}\omega(t)^p|dt|\right)^{1/p}\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\Gamma(z,\varepsilon)}\omega(t)^{-q}|dt|\right)^{1/q} < \infty$$

şartını sağlayanlarının ailesini gösterelim.

$L_p(\Gamma, \omega)$ ile ölçülebilir $f : \Gamma \to C$ öyle ki $|f|\omega \in L_p(\Gamma)$ fonksiyonlarının ailesini gösterelim.

Γ kapalı sonlu uzunluklu Jordan eğrisi ve

$$G := \operatorname{int}\Gamma \ , G^- := ext\Gamma \ , \ D := \{w \in C : |w| < 1\} \ , \ T := \partial D \ , \ D^- := extT$$

olsun. Genelliği kaybetmeksizin $0 \in G$ varsayılabilir.

$w = \varphi(z)$ ve $w = \varphi_1(z)$, G^- ve G bölgelerini D^- bölgesine

$$\varphi(\infty) = \infty \ , \ \lim_{z \to \infty} \frac{\varphi(z)}{z} > 0$$

ve

$$\varphi_1(0) = \infty \ , \ \lim_{z \to 0} z\varphi_1(z) > 0$$

koşulları altında dönüştüren konform dönüşümler olsunlar. ψ ve ψ_1 ile φ ve φ_1 dönüşümlerinin terslerini gösterelim.

Tanım 2.2.4 ω, Γ üzerinde bir ağırlık ve

$$E_X(G, \omega) := \{f \in E^1(G) : \quad f \in X(\Gamma, \omega)\},$$

$$E_X(G^-, \omega) := \{f \in E^1(G^-) : \quad f \in X(\Gamma, \omega)\},$$
$$\widetilde{E}_X(G^-, \omega) := \{f \in E_X(G^-, \omega) : \quad f(\infty) = 0\}$$

olarak tanımlansın. Böylece tanımlanan $E_X(G, \omega)$ ve $E_X(G^-, \omega)$ fonksiyon sınıflarına *G ve G^- bölgelerinin ağırlıklı rearrangement invariant (simetrik) Smirnov uzayı* denir.

Her $f \in E_X(G, \omega)$ veya $f \in E_X(G^-, \omega)$ fonksiyonunun Γ üzerinde h.h.y açısal yollar boyunca sınır değerleri vardır.

$f \in L^1(\Gamma)$ olsun.

$$f^+(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma, \quad z \in G$$

ve

$$f^{-}(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z}d\varsigma, \quad z \in G^{-}$$

şeklinde tanımlanır ve bu fonksiyonlar G ve G^{-} bölgelerinde analitiktirler. Ayrıca $f^{-}(\infty) = 0$ dır.

$g \in X(T,\omega)$ için

$$\sigma_h(g)(\omega) := \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} g(\omega e^{it})dt, \quad 0 < h < \pi, \quad \omega \in T$$

olarak tanımlayalım. Eğer α_X ve β_X, $X(T,\omega)$ uzayının nontrivial Boyd indisleri ve $\omega \in A_{\frac{1}{\alpha_X}}(T) \cap A_{\frac{1}{\beta_X}}(T)$ ise

$$\|\sigma_h(g)\|_{X,w} \le c_1 \|g\|_{X,w}$$

olur [17] ve sonuç olarak $g \in X(T,\omega)$ için $\sigma_h(g) \in X(T,\omega)$ bulunur.

Tanım 2.2.5 α_X ve β_X nontrivial Boyd indisleri ve $\omega \in A_{\frac{1}{\alpha_X}}(T) \cap A_{\frac{1}{\beta_X}}(T)$ olsun.

$$\Omega^r_{X,w}(g,\delta) := \sup_{\substack{i=1,2,\dots,r \\ 0<h_i\le\delta}} \left\| \prod_{i=1}^{r}(I - \sigma_{h_i})g \right\|_{X(T,w)}, \quad \delta > 0, \quad r = 1,2,\dots$$

fonksiyonu $g \in X(T,\omega)$ *fonksiyonunun r. düzgünlük modülü* olarak tanımlanır.

$\Omega^r_{X,w}(g,.)$ fonksiyonu

i) süreklidir.

ii) negatif değildir ve

iii) $\lim_{\delta\to 0}\Omega^r_{X,w}(g,\delta) = 0, \quad \Omega^r_{X,w}(g+g_1,.) \le \Omega^r_{X,w}(g,.) + \Omega^r_{X,w}(g_1,.)$

özelliklerini sağlar.

$z = z(s)$ Γ sonlu uzunluklu ve kapalı Jordan eğrisinin s yay uzunluğuna göre bir parametrizasyonu olsun. l ile Γ eğrisinin uzunluğunu işaretlersek, $s \in [0,l]$ olur. $\theta(s)$ ile Γ eğrisine $z(s)$ noktasında çizilen teğetin Ox- ekseninin pozitif yönüyle oluşturduğu açıyı gösterelim.

$$\Omega(\theta, s) := \max_{\substack{|s_1 - s_2| \le \delta \\ s_1, s_2 \in [0,l]}} |\theta(s_1) - \theta(s_2)|$$

olarak tanımlansın. Eğer bir Jordan eğrisi Γ

$$\int_0^{\delta} \frac{\Omega(\theta, s)}{s} ds < \infty, \quad \delta > 0$$

koşulunu sağlıyorsa Γ' ya *Dini- düzgün eğri* adı verilir. Eğer Γ bir Dini-düzgün eğri ise

$$\begin{aligned} &0 < c_1 < |\psi'(\omega)| < c_2 < \infty, \quad |\omega| \ge 1 \\ &0 < c_3 < |\varphi'(z)| < c_4 < \infty, \quad z \in \overline{G^-} \end{aligned} \tag{1}$$

olur. Benzer eşitlikler $|\omega| = 1$ ve $z \in \Gamma$ durumlarında ψ_1' ve φ_1' için de sağlanır.

Γ bir Dini-düzgün eğri ve ω, Γ üzerinde bir ağırlık olsun. ω yardımı ile T üzerinde

$$\omega_0 := \omega \circ \psi$$

ve

$$\omega_1 := \omega \circ \psi_1$$

ağırlıklarını tanımlayalım.

$$f_0 := f \circ \psi$$

olsun. $f \in X(\Gamma, \omega)$ için (1) den $f_0 \in X(T, \omega_0)$ olur. f_0^+ fonksiyonunun açısal yollar boyunca sınır değerleri kullanılarak

$$\Omega^r_{X,\Gamma,w}(f, \delta) := \Omega^r_{X,w_0}(f_0^+, \delta), \quad \delta > 0, \quad r = 1,2,3...$$
$$\widetilde{\Omega}^r_{X,\Gamma,w}(f, \delta) := \Omega^r_{X,w_1}(f_1^+, \delta), \quad \delta > 0, \quad r = 1,2,3...$$

tanımlayalım.

$$\varepsilon_n(f)_{X,w} := \inf_{P\in\wp_n}\|f-P\|_{X(T,w)} \text{ ve } \widetilde{\varepsilon}_n(g)_{X,w} := \inf_{R\in R_n}\|g-R\|_{X(\Gamma,w)}$$

olsun. Burada $f \in E_X(D,\omega)$, $g \in E_X(G^-,\omega)$ ve R_n , $\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{z^k}$ şeklindeki rasyonel fonksiyonların ailesidir.

$f \in L_1(\Gamma)$ fonksiyonunun bir $z \in \Gamma$ noktasındaki *Cauchy singüler integrali,*

$$S_\Gamma(f)(z) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Gamma-\Gamma(t,\varepsilon)} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma$$

olarak tanımlanır. Bu limit hemen her $z \in \Gamma$ için mevcuttur.

Bir $f \in L_1(\Gamma)$ için f^+ ve f^- fonksiyonlarından birinin Γ üzerinde hemen her yerde açısal limit değerleri varsa, $S_\Gamma(f)(z)$ Cauchy singüler integrali Γ üzerinde hemen her yerde mevcuttur ve f^+ ve f^- fonksiyonlarından diğerinin de Γ üzerinde hemen her yerde açısal limit değerleri vardır.

Tersine olarak, $S_\Gamma(f)(z)$ Cauchy singüler integrali Γ üzerinde hemen her yerde mevcut ise, f^+ ve f^- fonksiyonlarının Γ üzerinde hemen her yerde açısal limit değerleri vardır. Her iki durumda da hemen her $z \in \Gamma$ için;

$$f^+(z) = S_\Gamma(f)(z) + \frac{1}{2}f(z)$$

ve

$$f^-(z) = S_\Gamma(f)(z) - \frac{1}{2}f(z)$$

eşitlikleri sağlanır ve böylece Γ üzerinde hemen her yerde

$$f = f^+ - f^-$$

olur.

$f \in L_1(\Gamma)$ fonksiyonuna Γ üzerinde hemen her yerde $S_\Gamma(f)(z)$ değerini alan $S_\Gamma(f)$ fonksiyonunu karşılık getirelim. Bu şekilde tanımlanan S_Γ lineer operatörüne *Cauchy singüler operatörü* denir.

S_Γ lineer operatörünün sınırlılığı, yaklaşım teorisinde önemli bir yer tutmaktadır. Bu operatörün $L_p(\Gamma)$ Lebesgue uzayı üzerinde sınırlılığı problemi G. David tarafından çözülmüştür. Ağırlıklı Lebesgue uzaylarında ise bu sınırlılık problemi Muckenhoupt ağırlıkları için çözülebilmiştir. A. Yu. Karlovich, David'in teoremini, Boyd interpolasyon teoremini kullanarak S_Γ operatörünün Orlicz uzayları üzerinde sınırlılığı problemini çözmüştür. Rearrangement invariant uzaylar üzerinde Cauchy singüler operatörünün sınırlılığı problemi yine A. Yu. Karlovich tarafından çözülmüştür.

2.3 Konform Dönüşüm Teoremi ve Faber Polinomları

$$T = \{z \in C : |z| = 1\}, \quad D = \operatorname{int} T \quad ve \quad D^- = extT$$

olsun.

Teorem(Riemann Dönüşüm Teoremi):

$G \subset C$ sınırı en az iki noktadan oluşan basit bağlantılı bir bölge ve $z_0 \in G$ olsun. Bu durumda, G bölgesini D üzerine

$$f(z_0) = 0 \quad ve \quad f'(z_0) > 0$$

koşulları altında resmeden bir tek f konform dönüşüm vardır.

Teorem 2.3.1 Eğer bir G bölgesinin sınırı Jordan eğrisi ise, G'nin D üzerine her konform dönüşümü $\overline{G}$ kapalı bölgesine birebir ve sürekli olarak genişletilebilir.

Γ, kompleks düzlemde sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi, $G = \operatorname{int}\Gamma$ ve $G^- = ext\Gamma$ olsun. Genelliği kaybetmeden $0 \in G$ olduğunu varsayabiliriz.

Riemann konform dönüşüm teoreminden aşağıdakiler elde edilir.

G^- bölgesinin D^- üzerine

$$\varphi(\infty) = \infty \quad ve \quad \lim_{z \to \infty} \frac{\varphi(z)}{z} > 0$$

koşullarını sağlayan bir tek φ konform dönüşümü vardır.

G bölgesinin D^- üzerine

$$\varphi_1(0) = \infty \quad \text{ve} \quad \lim_{z \to 0} z\varphi_1(z) > 0$$

koşullarını sağlayan bir tek φ_1 konform dönüşümü vardır.

φ dönüşümünün tersini ψ ve φ_1 dönüşümünün tersini ψ_1 ile gösterelim. Γ bir Jordan eğrisi olduğundan, φ ve φ_1 dönüşümlerinin Γ üzerine, ψ ve ψ_1 dönüşümlerinin de T üzerine homeomorfik genişlemeleri vardır. Ayrıca Γ sonlu uzunluklu olduğundan $\varphi' \in E^1(G^-), \varphi_1' \in E^1(G)$ ve $\psi, \psi' \in E^1(D^-)$ olur. Böylece φ' *ve* φ_1' fonksiyonları Γ üzerinde hemen her yerde açısal limit değerlerine sahiptirler ve bu limit değerleri $L_1(\Gamma)$ uzayına aittirler. Aynı şekilde ψ' *ve* ψ_1' fonksiyonlarının da T üzerinde hemen her yerde açısal limitleri vardır ve bu değerler $L_1(T)$ uzayına aittir.

k negatif olmayan bir tamsayı olsun. $[\varphi(z)]^k$ fonksiyonu G^- bölgesinde ∞ noktası dışında analitiktir ve ∞ noktasında k dereceli bir kutbu vardır. Bu nedenle

$$[\varphi(z)]^k = F_k(z) - E_k(z), \quad z \in G^-$$

olacak şekilde derecesi k olan bir $F_k(z)$ polinomu ve G^- bölgesinde analitik olan ve $E_k(\infty) = 0$ koşulunu sağlayan bir $E_k(z)$ fonksiyonu vardır.

$F_k(z)$ $(k = 0,1,2,...)$ polinomlarına G *bölgesinin Faber Polinomları* denir.

Cauchy integral formülü kullanılıp ve $\varsigma = \psi(t)$ dönüşümü yapılırsa, her $z \in G$ ve $k = 0,1,2,...$ için

$$F_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{[\varphi(\varsigma)]^k}{\varsigma - z} d\varsigma = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{t^k \psi'(t)}{\psi(t) - z} dt \qquad (2.3.1)$$

elde edilir.

Yukarıdaki formül kullanılarak Faber Polinomları için

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)-z}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{F_k(z)}{t^{k+1}}, \quad z\in G, t\in D^-$$

bağıntısı elde edilir.

$[\varphi_1(z)]^k$ fonksiyonu $G-\{0\}$ kümesinde analitiktir ve 0 noktasında k dereceli bir kutbu vardır. Bu fonksiyonun 0 noktasındaki esas kısmını $\widetilde{F}_k(1/z)$ ile gösterelim. Bu durumda G bölgesinde analitik olan ve her $z\in G-\{0\}$ için

$$[\varphi_1(z)]^k=\widetilde{F}_k(1/z)-\widetilde{E}_k(z)$$

olacak şekilde bir $\widetilde{E}_k(z)$ fonksiyonu vardır. $\widetilde{F}_k(1/z)$ $(k=0,1,2,...)$ esas kısımlarına *G bölgesinin Faber- Laurent polinomları* adı verilir.

Cauchy integral formülü kullanılıp ve $\varsigma=\psi_1(t)$ dönüşümü yapılırsa, her $z\in G^-$ ve $k=0,1,2,...$ için

$$-\widetilde{F}_k(1/z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{[\varphi_1(\varsigma)]^k}{\varsigma-z}d\varsigma=\int_{|t|=1}\frac{t^k\psi_1'(t)}{\psi_1(t)-z}dt$$

elde edilir.

Yukarıdaki formül kullanılarak Faber- Laurent polinomları için

$$\frac{\psi_1'(t)}{\psi_1(t)-z}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\widetilde{F}_k(1/z)}{t^{k+1}}, \quad z\in G, \quad t\in D^-$$

bağıntısı elde edilir.

3. AĞIRLIKLI SİMETRİK UZAYLARDA YAKLAŞIM TEOREMLERİ

$X([0,2\pi],\omega)$ ağırlıklı simetrik uzay olsun. $f \in X([0,2\pi],\omega)$ ve $\omega \in A_{\frac{1}{\alpha_X}}([0,2\pi]) \cap A_{\frac{1}{\beta_X}}([0,2\pi])$ için Jackson tipi düz eşitsizlik

$$E_n(f)_{X,w} \le c\Omega^r_{X,w}\left(f,\frac{1}{n+1}\right), \quad r,n+1=1,2,3,... \tag{3.1}$$

ve bu eşitsizliğin zayıf tersi

$$\Omega^r_{X,w}\left(f,\frac{1}{n}\right) \le \frac{c}{n^{2r}}\left(E_0(f)_{X,w} + \sum_{v=1}^{n} v^{2r-1}E_v(f)_{X,w}\right), \quad n=1,2,3,... \tag{3.2}$$

[17] A.Güven ve D. İsrafilov tarafından ispatlanmıştır. Burada

$$E_n(f)_{X,w} := \inf_{T\in\tau_n}\|f-T\|_{X,w}$$

trigonometrik polinomlarla yaklaşımın ölçüsüdür. τ_n , derecesi n'yi aşmayan trigonometrik polinomlar sınıfı,

$$\Omega^r_{X,w}(f,\delta) := \sup_{0<h_i<\delta}\left\|\prod_{i=1}^{r}(I-\sigma_{h_i})f\right\|_{X,\omega}$$

r. düzgünlük modülü, σ_t Steklov ortalama operatörü ve I birim dönüşümdür.

$$\begin{aligned} &f(x) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = \sum_{k=0}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \\ &b_0 = 0, a_k, b_k \in R, c_k = {(a_k - ib_k)}/{2}, c_{-k} = {(a_k + ib_k)}/{2}, c_0 = {a_0}/{2} \end{aligned} \tag{3.3}$$

ve

$$\tilde{f}(x) \approx \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \sin kx - b_k \cos kx)$$

$f \in L_1([0,2\pi])$ fonksiyonunun Fourier ve eşlenik Fourier serileri olsun. (3.3)' te $A_k(x) := c_k e^{ikx}$ alarak n. kısmi toplamlar dizisi

$$S_n(f) := S_n(x,f) := \sum_{k=0}^{n}(A_k(x) + A_{-k}(x)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),\ n = 0,1,2,...$$

olarak tanımlanır. Verilen bir $f \in L_1([0,2\pi])$ fonksiyonunun

$$\int_T f(x)dx = 0 \tag{3.4}$$

koşulunu sağladığını varsayalım. f 'nin α . kesirli integrali

$$I_\alpha(x,f) := \sum_{k \in Z^*} c_k (ik)^{-\alpha} e^{ikx}$$

olarak tanımlanır. Burada

$$(ik)^{-\alpha} := |k|^{-\alpha} e^{(-1/2)\pi i \alpha sign k}$$

ve

$$Z^* := \{\mp 1, \mp 2, \mp 3, ...\}$$

dir.

$\alpha \in R^+$ verilsin. (3.4) koşulunu sağlayan $f \in L_1([0,2\pi])$ fonksiyonunun $f^{(\alpha)}$ kesirli türevi

$$f^{(\alpha)}(x) := \frac{d^{[\alpha]+1}}{dx^{[\alpha]+1}} I_{1+\alpha-[\alpha]}(x,f)$$

olarak tanımlanır.

$x,t \in [0,2\pi]$, $\quad r \in R^+$ alınarak

$$\sigma_t^r f(x) := (\sigma_t - I)^r f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{r-k}\binom{r}{k}\frac{1}{(2t)^k}\int_{-t}^{t}...\int_{-t}^{t} f(x + u_1 + ... + u_k)du_1...du_k$$

olarak tanımlanır. Burada $f \in X([0,2\pi],\omega)$, $X([0,2\pi],\omega)$ ağırlıklı simetrik uzay $\omega \in A_{\frac{1}{\alpha_X}} \cap A_{\frac{1}{\beta_X}}$, $\binom{r}{k} := \dfrac{r(r-1)...(r-k+1)}{k!}$, $\binom{r}{1} := r$, $\binom{r}{0} := 1$ dir.

Teorem A: $X([0,2\pi],\omega)$ ağırlıklı simetrik Smirnov uzayı, $\omega \in A_{\frac{1}{\alpha_X}} \cap A_{\frac{1}{\beta_X}}$ ise

(i) Steklov ortalama dönüşümü $\sigma_h : f \to \sigma_h f$,

(ii) Kısmi toplam dönüşümü $S_n : f \to S_n f$ ve

(iii) Eşlenik dönüşümü $\widetilde{f} : f \to \widetilde{f}$ $X(T,\omega)$' da sınırlıdır.

[18, sayfa 14] den r 'ye bağlı en az c sabiti vardır öyle ki

$$\left|\binom{r}{k}\right| \le \frac{c}{k^{r+1}}, \quad k = 0,1,2...$$

olur. Buradan

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|\binom{r}{k}\right| < \infty$$

elde edilir. Böylece

$$\left\|\sigma_t^r f\right\|_{X,w} \le c\left\|f\right\|_{X,w} < \infty \tag{3.5}$$

eşitsizliği $X([0,2\pi],\omega)$ ağırlıklı simetrik uzaydaki her f ve $\omega \in A_{\frac{1}{\alpha_X}} \cap A_{\frac{1}{\beta_X}}$ için sağlanır.

$X([0,2\pi],\omega)$ ağırlıklı simetrik uzay olsun. $r \in R^+$ için $f \in X([0,2\pi],\omega)$ fonksiyonunun r. kesirli düzgünlük modülü, $\omega \in A_{\frac{1}{\alpha_X}} \cap A_{\frac{1}{\beta_X}}$ olmak üzere,

$$\Omega_{X,w}^r(f,\delta) := \sup_{0<h_i,t<\delta}\left\|\prod_{i=1}^{[r]}(I-\sigma_{h_i})(I-\sigma_t)^{r-[r]} f\right\|_{X,w}$$

olarak tanımlanır. Burada $[x]$, x reel sayısının tam kısmıdır.

σ_t dönüşümü $X([0,2\pi],\omega)$ ' da sınırlı, $\omega \in A_{\frac{1}{\alpha_X}} \cap A_{\frac{1}{\beta_X}}$ ve $X([0,2\pi],\omega)$ ağırlıklı simetrik uzay olduğu için (3.5)' ten

$$\Omega_{X,w}^r(f,\delta) \le c\left\|f\right\|_{X,w}$$

olur. Burada $c > 0$, r 'ye bağlı bir sabittir.

Not 3.1 $\Omega^r_{X,w}(f,\delta)$ düzgünlük modülü, $r \in R^+$, $X([0,2\pi],\omega)$ ağırlıklı simetrik uzay, $\omega \in A_{\frac{1}{\alpha_X}} \cap A_{\frac{1}{\beta_X}}$, $f \in X([0,2\pi],\omega)$ için aşağıdaki özellikleri sağlar:

(i) $\Omega^r_{X,w}(f,\delta)$ negatif değildir, azalmayandır ve alttoplamsaldır.

(ii) $\lim\limits_{\delta \to 0} \Omega^r_{X,w}(f,\delta) = 0$.

Önerme 3.2 (Bernstein Eşitsizliği) : $T_n \in \tau_n, n = (1,2,3,...)$ $X([0,2\pi],\omega)$, ağırlıklı simetrik uzay ve $\omega \in A_{\frac{1}{\alpha_X}} \cap A_{\frac{1}{\beta_X}}$ olsun. Eğer $\alpha \in R^+$ ise n' den bağımsız öyle bir $c > 0$ vardır ki

$$\left\| T_n^{(\alpha)} \right\|_{X,w} \leq cn^\alpha \left\| T_n \right\|_{X,w}$$

olur.

İspat: [19] numaralı kaynaktaki yöntemi uygulayalım:

$$T_n^{(\alpha)} = \sum_{k=1}^{n} k^\alpha (a_k(T_n)\cos k(x + \frac{\alpha\pi}{2k}) + b_k(T_n)\sin k(x + \frac{\alpha\pi}{2k}))$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^\alpha A_k(T_n, x + \frac{\alpha\pi}{2k})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^\alpha \{\cos\frac{\alpha\pi}{2} A_k(T_n, x) - \sin\frac{\alpha\pi}{2} A_k(\widetilde{T}_n, x)\}$$

olur. Bu eşitlikte

$$\mu_k = \begin{cases} k^\alpha \cos\frac{\alpha\pi}{2} & ,1 \leq k \leq n \\ 0 & ,k > n, k = 0 \end{cases}$$

$$\widetilde{\mu}_k = \begin{cases} k^\alpha \sin\frac{\alpha\pi}{2} & ,1 \leq k \leq n \\ 0 & ,k > n, k = 0 \end{cases}$$

ve

$$(AT_n)(x)=\sum_{k=1}^{n}k^{\alpha}\cos\frac{\alpha\pi}{2}A_k(T_n,x)$$
$$(A\widetilde{T}_n)(x)=\sum_{k=1}^{n}k^{\alpha}\sin\frac{\alpha\pi}{2}A_k(\widetilde{T}_n,x)$$

olarak tanımlayalım. Buradan

$$T_n^{(\alpha)}(.)=(AT_n)(.)-(A\widetilde{T}_n)(.)$$

olur.

$$\sup\sum_{k=2^q}^{2^{q+1}}\left|(k+1)^{\alpha}-k^{\alpha}\right|\le cn^{\alpha}$$
$$\lambda_n=\max_{k\le n}\left|k^{\alpha}\right|=n^{\alpha}$$

olması kullanılarak

$$\sup_q\sum_{k=2^q}^{2^{q+1}}\left|\mu(k+1)-\mu(k)\right|\le cn^{\alpha}$$
$$\sup_q\sum_{k=2^q}^{2^{q+1}}\left|\widetilde{\mu}(k+1)-\widetilde{\mu}(k)\right|\le cn^{\alpha}$$

ve

$$\sup_k\left|\mu_k\right|\le n^{\alpha}$$
$$\sup_k\left|\widetilde{\mu}_k\right|\le n^{\alpha}$$

elde edilir.

Ağırlıklı simetrik uzaylar için Marcinkiewicz multiplier teoremi, Extrapolasyon Teoremi yardımıyla elde edilebileceğincen, Marcinkiewicz multiplier teoremi kullanılırsa;

$$\begin{aligned}\left\|T_n^{(\alpha)}\right\|_{X,w}&=\left\|(AT_n)-(A\widetilde{T}_n)\right\|_{X,w}\\&\le\left\|AT_n\right\|_{X,w}+\left\|A\widetilde{T}_n\right\|_{X,w}\\&\le cn^{\alpha}\left(\left\|\sum_{k=1}^{n}A_k(T_n,x)\right\|_{X,w}+\left\|\sum_{k=1}^{n}A_k(\widetilde{T}_n,x)\right\|_{X,w}\right)\end{aligned}$$

ve

$$\|\widetilde{f}\|_{X,w} \leq c\|f\|_{X,w}$$

olduğundan

$$\|T_n^{(\alpha)}\|_{X,w} \leq cn^{\alpha}\left\|\sum_{k=1}^{n} A_k(T_n, x)\right\|_{X,w} = cn^{\alpha}\|T_n\|_{X,w}$$

bulunur.

Önerme 3.3 $X([0,2\pi],\omega)$ ağırlıklı simetrik uzay olsun. $f \in X([0,2\pi],\omega)$, $\omega \in A_{\frac{1}{\alpha_X}} \cap A_{\frac{1}{\beta_X}}$ ve $\alpha \geq 0$ ise öyle bir $T_n \in \tau_n$, $(n = 0,1,2,...)$ vardır ki

$$\|f^{(\alpha)} - T_n^{(\alpha)}\|_{X,w} \leq cE_n(f^{(\alpha)})_{X,w}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat:

$$W_n(f) := W_n(x,f) := \frac{1}{n+1}\sum_{v=n}^{2n} S_v(x,f), \quad n = 0,1,2,...$$

olarak tanımlayalım.

$$W_n(.,f^{(\alpha)}) = W_n^{(\alpha)}(.,f)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\|f^{(\alpha)}(.) - T_n^{(\alpha)}(.,f)\|_{X,w} &= \|f^{(\alpha)}(.) - W_n(.,f^{(\alpha)}) + T_n^{(\alpha)}(.,W_n(f)) - T_n^{(\alpha)}(.,f) + \\
&= + W_n^{(\alpha)}(.,f) - T_n^{(\alpha)}(.,W_n(f))\|_{X,w} \\
&\leq \|f^{(\alpha)}(.) - W_n(.,f^{(\alpha)})\|_{X,w} + \|T_n^{(\alpha)}(.,W_n(f)) - T_n^{(\alpha)}(.,f)\|_{X,w} + \\
&\quad + \|W_n^{(\alpha)}(.,f) - T_n^{(\alpha)}(.,W_n(f))\|_{X,w} \\
&=: I_1 + I_2 + I_3
\end{aligned}$$

olur.

$T_n^{*}(x,f)$ ile derecesi n'yi aşmayan ve $f \in X([0,2\pi],\omega)$'ya en iyi yaklaşan polinomu gösterelim. Bu durumda W_n in $X([0,2\pi],\omega)$ da sınırlılığından

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \left\| f^{(\alpha)}(.) - W_n(., f^{(\alpha)}) \right\|_{X,w} = \\
&= \left\| f^{(\alpha)}(.) - T_n^*(.f^{(\alpha)}) + T_n^*(.f^{(\alpha)}) - W_n(., f^{(\alpha)}) \right\|_{X,w} \\
&\le c_1 E_n(f^{(\alpha)})_{X,w} + \left\| W_n(., T_n^*(f^{(\alpha)}) - f^{(\alpha)}) \right\|_{X,w} \\
&\le c_2 E_n(f^{(\alpha)})_{X,w}
\end{aligned}
$$

olur. Bernstein eşitsizliğinden

$$
I_2 = \left\| T_n^{(\alpha)}(., W_n(f)) - T_n^{(\alpha)}(., f) \right\|_{X,w} \le c_3 n^\alpha \left\| T_n(., W_n(f)) - T_n(., f) \right\|_{X,w}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
I_3 = \left\| W_n^{(\alpha)}(., f) - T_n^{(\alpha)}(., W_n(f)) \right\|_{X,w} &\le c_4 (2n)^\alpha \left\| W_n(., f) - T_n(., W_n(f)) \right\|_{X,w} \le \\
&\le c_5 (2n)^\alpha E_n(W_n(f))_{X,w}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$$
\begin{aligned}
&\left\| T_n(., W_n(f)) - T_n(., f) \right\|_{X,w} = \\
&= \left\| T_n(., W_n(f)) - W_n(., f) + W_n(., f) - f(.) + f(.) - T_n(., f) \right\|_{X,w} \le \\
&\le \left\| T_n(., W_n(f)) - W_n(., f) \right\|_{X,w} + \left\| W_n(., f) - f(.) \right\|_{X,w} + \left\| f(.) - T_n(., f) \right\|_{X,w} \\
&\le c_6 E_n(W_n(f))_{X,w} + c_7 E_n(f)_{X,w} + c_8 E_n(f)_{X,w}
\end{aligned}
$$

olur.

$$
E_n(W_n(f))_{X,w} \le c_9 E_n(f)_{X,w}
$$

olduğundan

$$
\begin{aligned}
\left\| f^{(\alpha)}(.) - T_n^{(\alpha)}(., f) \right\|_{X,w} &\le c_2 E_n(f^{(\alpha)})_{X,w} + c_{10} n^\alpha E_n(W_n(f))_{X,w} + c_{11} n^\alpha E_n(f)_{X,w} + \\
&\quad + c_5 (2n)^\alpha E_n(W_n(f))_{X,w} \\
&\le c_{12} E_n(f^{(\alpha)})_{X,w} + c_{13} n^\alpha E_n(f)_{X,w}
\end{aligned}
$$

bulunur.

$$
E_n(f)_{X,w} \le \frac{c}{(n+1)^\alpha} E_n(f^{(\alpha)})_{X,w}
$$

eşitsizliği $\alpha \in N$ doğal sayıları için [17] de ispatlanmıştır. $\alpha \in R^+$ durumu da benzer yolla ispatlanabilir.(Bakınız [Akgün İsrafilov 2010, Math Slovaca]). Böylece

$$\left\|f^{(\alpha)}(.)-T_n^{(\alpha)}(.,f)\right\|_{X,w} \leq cE_n(f^{(\alpha)})_{X,w}$$

elde edilir.

Önerme 3.4. $T_n \in \tau_n, (n=1,2,3,...)$ $X([0,2\pi],\omega)$, ağırlıklı simetrik uzay ve $\omega \in A_{\frac{1}{\alpha_X}} \cap A_{\frac{1}{\beta_X}}$ olsun. Eğer $\alpha \in R^+$ ise

$$\Omega^{\alpha}_{X,w}(T_n, \frac{\pi}{n+1}) \leq \frac{c}{(n+1)^{\alpha}}\left\|T_n^{(\alpha)}\right\|_{X,w}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat:

Öncelikle $0<\alpha<\beta$ için $\Omega^{\beta}_{X,w}(f,.) \leq c\Omega^{\alpha}_{X,w}(f,.)$ olduğunu ispalayalım. Eğer

$$\alpha \leq \beta, \quad \alpha, \beta \in Z^+$$

ise eşitsizlik sağlanır. Çünkü

$$\left\|\prod_{i=1}^{\beta}(I-\sigma_i)f\right\|_{X,w} = \left\|(I-\sigma_1)(I-\sigma_2)...(I-\sigma_\beta)f\right\|_{X,w} =$$
$$= \left\|(I-\sigma_\beta)(I-\sigma_{\beta-1})...(I-\sigma_{\beta-\alpha})....[(I-\sigma_\alpha)(I-\sigma_{\alpha-1})...(I-\sigma_1)]f\right\|_{X,w}$$

olur. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\left\|\prod_{i=1}^{\beta}(I-\sigma_i)f\right\|_{X,w} \leq c\left\|\prod_{i=1}^{\alpha}(I-\sigma_i)f\right\|_{X,w}$$

elde edilir. Buradan da

$$\Omega^{\beta}_{X,w}(f,.) \leq c\Omega^{\alpha}_{X,w}(f,.)$$

olur. Şimdi $0<\alpha<\beta<1$ durumunu inceleyelim.

$$K(x) := \sigma_t^{\alpha} f(x)$$

olsun.

$$\sigma_t^{\beta-\alpha}K(x)=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{\beta-\alpha-j}\binom{\beta-\alpha}{j}\cdot\frac{1}{(2t)^j}\int_{-t}^{t}\cdots\int_{-t}^{t}K(x+u_1+u_2+\ldots+u_j)du_1du_2\ldots du_j=$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{\beta-\alpha-j}\binom{\beta-\alpha}{j}\cdot\frac{1}{(2t)^j}\int_{-t}^{t}\cdots\int_{-t}^{t}\left[\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{\alpha-k}(\alpha,k)\cdot\frac{1}{(2t)^k}\int_{-t}^{t}\cdots\int_{-t}^{t}\right.$$

$$\left.\left(f(x+u_1+u_2+\ldots+u_j+\ldots u_{j+k})du_1du_2\ldots du_j\ldots du_{j+k}\right]$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{\beta-j-k}\binom{\beta-\alpha}{k}\binom{\alpha}{k}\left[\frac{1}{(2t)^{j+k}}\int_{-t}^{t}\cdots\int_{-t}^{t}\right.$$

$$\left.f(x+u_1+u_2+\ldots+u_j+\ldots u_{j+k})du_1du_2\ldots du_j\ldots du_{j+k}\right]$$

$$=\sum_{v=0}^{\infty}(-1)^{\beta-v}\binom{\beta}{v}\frac{1}{(2t)^v}\int_{-t}^{t}\cdots\int_{-t}^{t}f(x+u_1+u_2+\ldots+u_v)du_1du_2\ldots du_v$$

$$=\sigma_t^{\beta}f(x)$$

olur. Buradan norm alınırsa

$$\left\|\sigma_t^{\beta}f\right\|_{X,w}=\left\|\sigma_t^{\beta-\alpha}K\right\|_{X,w}\leq c\left\|\sigma_t^{\alpha}f\right\|_{X,w}$$

elde edilir. Böylece

$$\Omega_{X,w}^{\beta}(f,.)\leq c\Omega_{X,w}^{\alpha}(f,.) \qquad (*)$$

olur. Eğer

$$r_1,r_2\in Z^+,\alpha_1,\beta_1\in(0,1)$$

ise

$$\alpha:=r_1+\alpha_1;\quad \beta:=r_2+\beta_1$$

alınarak

$$\begin{aligned} r_1=r_2,&\quad \alpha_1<\beta_1\\ r_1<r_2,&\quad \alpha_1<\beta_1\\ r_1<r_2,&\quad \alpha_1>\beta_1\end{aligned}$$

durumları için de (*) eşitsizliği benzer biçimde sağlanır.

Böylece $0<\alpha<\beta$ için

$$\Omega^{\beta}_{X,w}(f,.)\le c\Omega^{\alpha}_{X,w}(f,.) \qquad (**)$$

eşitsizliği elde edilir. (**) ve $\Omega^{[\alpha]}(f,t)\le c.t^{2[\alpha]}\|f\|$ olması [17] kullanılarak;

$$\Omega^{\alpha}_{X,w}(T_n,\frac{\pi}{n+1})\le c\Omega^{[\alpha]}_{X,w}(T_n,\frac{\pi}{n+1})\le c\left(\frac{\pi}{n+1}\right)^{2[\alpha]}\left\|T_n^{(2[\alpha])}\right\|_{X,w}\le$$

$$\le\frac{c}{(n+1)^{2[\alpha]}}(n+1)^{[\alpha]-(\alpha-[\alpha])}\left\|T_n^{(\alpha)}\right\|_{X,w}=\frac{c}{(n+1)^{\alpha}}\left\|T_n^{(\alpha)}\right\|_{X,w}$$

olur ve böylece önermedeki eşitsizlik $\alpha\ge 1$ için çımış olur. $0<\alpha<1$ için ise Marcinkiewicz Multiplier teoreminden sonuç bulunur.

Teorem 3.5. $X([0,2\pi],\omega)$ ağırlıklı simetrik uzay ve $r\in R^{+}$ olsun. Eğer $f\in X([0,2\pi],\omega)$ ve $\omega\in A_{\frac{1}{\alpha_X}}\cap A_{\frac{1}{\beta_X}}$ ise $\exists c>0:\ n=0,1,2,3...$ için

$$E_n(f)_{X,w}\le c\Omega^{r}{}_{X,w}(f,\frac{2\pi}{n+1})$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat:

Öyle bir $k\in Z^{+}$ vardır ki $k-1<r\le k$ olur.

$$E_n(f)_{X,w}\le c\Omega^{r}_{X,w}(f,\frac{1}{n+1}) \quad r,n+1=1,2,3,... \qquad (*)$$

olduğu [17] biliniyor. (*) dan ve not 3.1den

$$E_n(f)_{X,w}\le c\Omega^{k}_{X,w}(f,\frac{1}{n+1})$$

elde edilir. Burada $\Omega^{k}_{X,w}$'nın azalmayanlığı kullanılırsa

$$c\Omega^{k}_{X,w}(f,\frac{1}{n+1})\le c\Omega^{k}_{X,w}(f,\frac{2\pi}{n+1}),\quad n=0,1,2,...$$

olur. Bir önceki önermeden

$$\Omega^{k}_{X,w}(f,\frac{2\pi}{n+1})\le\Omega^{r}_{X,w}(f,\frac{2\pi}{n+1})$$

bulunur. Bu son iki eşitsizlikten

$$E_n(f)_{X,w} \leq c\Omega^r{}_{X,w}(f, \frac{2\pi}{n+1})$$

elde edilir.

Teorem 3.6. $X([0,2\pi],\omega)$ ağırlıklı simetrik uzay ve $r \in R^+$ olsun. Eğer $f \in X([0,2\pi],\omega)$ ve $\omega \in A_{\frac{1}{\alpha_X}} \cap A_{\frac{1}{\beta_X}}$ ise $\exists c > 0$: $\forall n = 0,1,2,3...$ için

$$\Omega^r_{X,w}(f, \frac{\pi}{n+1}) \leq \frac{c}{(n+1)^r} \sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1)^{r-1} E_\nu(f)_{X,w}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat:

$T_n \in \tau_n$, $f \in X([0,2\pi],\omega)$ fonksiyonuna en iyi yaklaşan polinom ve $m \in Z^+$ olsun. Buradan $\Omega^r_{X,w}$ nın alttoplamsallığından

$$\Omega^r_{X,w}(f, \frac{\pi}{n+1}) \leq \Omega^r_{X,w}(f - T_{2^m}, \frac{\pi}{n+1}) + \Omega^r_{X,w}(T_{2^m}, \frac{\pi}{n+1}) \leq cE_{2^m}(f)_{X,w} + \Omega^r_{X,w}(T_{2^m}, \frac{\pi}{n+1})$$

elde edilir. [17] den

$$\Omega^r_{X,w}(T_{2^m}, \frac{\pi}{n+1}) \leq c\left(\frac{1}{n+1}\right)^{2r} \left\| T_{2^m}^{(2r)} \right\|_{X,w}$$

olur.

$$T_{2^m}^{(2r)}(x) = T_1^{(2r)}(x) + \sum_{\nu=0}^{m-1} \left\{ T_{2^{\nu+1}}^{(2r)}(x) - T_{2^\nu}^{(2r)}(x) \right\}$$

olduğundan

$$\Omega^r_{X,w}(T_{2^m}, \frac{\pi}{n+1}) \leq c\left(\frac{1}{n+1}\right)^{2r} \left\| T_1^{(2r)}(x) + \sum_{\nu=0}^{m-1} \left\{ T_{2^{\nu+1}}^{(2r)}(x) - T_{2^\nu}^{(2r)}(x) \right\} \right\|_{X,w} \leq$$

$$\leq \frac{c}{(n+1)^{2r}} \left\{ \left\| T_1^{(2r)} \right\|_{X,w} + \sum_{\nu=0}^{m-1} \left\| T_{2^{\nu+1}}^{(2r)} - T_{2^\nu}^{(2r)} \right\|_{X,w} \right\}$$

elde edilir. Önerme 3.2' den

$$\left\|T_{2^{\nu+1}}^{(2r)}-T_{2^{\nu}}^{(2r)}\right\|_{X,w}=\left\|\left(T_{2^{\nu+1}}-T_{2^{\nu}}\right)^{(2r)}\right\|_{X,w}\leq c(2^{\nu})^{2r}\left\|T_{2^{\nu+1}}-T_{2^{\nu}}\right\|_{X,w}\leq c2^{2\nu r+1}E_{2^{\nu}}(f)_{X,w}$$

ve

$$\left\|T_{1}^{(2r)}\right\|_{X,w}=\left\|T_{1}^{(2r)}-T_{0}^{(2r)}\right\|_{X,w}\leq cE_{0}(f)_{X,w}$$

olur. Böylece

$$\Omega_{X,w}^{r}(T_{2^{m}},\frac{\pi}{n+1})\leq\frac{c}{(n+1)^{2r}}\left\{E_{0}(f)_{X,w}+\sum_{\nu=0}^{m-1}2^{(\nu+1)2r}E_{2^{\nu}}(f)_{X,w}\right\}$$

bulunur.

$$c^{*}:=\begin{cases}2^{2r+1}, & 0<r<1\\ 2^{4r}, & r\geq 1\end{cases}$$

olarak tanımlanırsa

$$2^{(\nu+1)2r}E_{2^{\nu}}(f)_{X,w}\leq c^{*}\sum_{\mu=2^{\nu-1}+1}^{2^{\nu}}\mu^{2r-1}E_{\mu}(f)_{X,w},\quad \nu=1,2,3,\ldots$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}\Omega_{X,w}^{r}(T_{2^{m}},\frac{\pi}{n+1})&\leq\frac{c}{(n+1)^{2r}}\left\{E_{0}(f)_{X,w}+2^{2r}E_{1}(f)_{X,w}+c\sum_{\nu=1}^{m}\sum_{\mu=2^{\nu-1}+1}^{2^{\nu}}\mu^{2r-1}E_{\mu}(f)_{X,w}\right\}\\&\leq\frac{c}{(n+1)^{2r}}\left\{E_{0}(f)_{X,w}+\sum_{\mu=1}^{2^{m}}\mu^{2r-1}E_{\mu}(f)_{X,w}\right\}\\&\leq\frac{c}{(n+1)^{2r}}\sum_{\nu=0}^{2^{m}-1}(\nu+1)^{2r-1}E_{\nu}(f)_{X,w}\end{aligned}$$

bulunur. Eğer $2^{m}<n+1\leq 2^{m+1}$ olarak alınırsa

$$\Omega_{X,w}^{r}(T_{2^{m}},\frac{\pi}{n+1})\leq\frac{c}{(n+1)^{2r}}\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{2r-1}E_{\nu}(f)_{X,w},$$

$$E_{2^{m}}(f)_{X,w}\leq E_{2^{m-1}}(f)_{X,w}\leq\frac{c}{(n+1)^{2r}}\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{2r-1}E_{\nu}(f)_{X,w}$$

olur ve bu son iki eşitsizlikten ispat biter.

Sonuç3.7 $X([0,2\pi],\omega)$ ağırlıklı simetrik uzay ve $r \in R^{+}$ olsun. Eğer $f \in X([0,2\pi],\omega)$ ve $\omega \in A_{\frac{1}{\alpha_X}} \cap A_{\frac{1}{\beta_X}}$ ve de $E_n(f)_{X,w} = O(n^{-\sigma})$, $\sigma > 0, n = 1,2...$ ise

$$\Omega^{r}_{X,w}(f,\delta) = \begin{cases} O(\delta^{\sigma}) & ; r > \sigma/2 \\ O(\delta^{\sigma}\left|\log(1/\delta)\right|) & ; r = \sigma/2 \\ O(\delta^{2r}) & ; r < \sigma/2 \end{cases}$$

olur.

Tanım 3.8 $X([0,2\pi],\omega)$ ağırlıklı simetrik uzay ve $r \in R^{+}$ olsun. Eğer $f \in X([0,2\pi],\omega)$ ve $\omega \in A_{\frac{1}{\alpha_X}} \cap A_{\frac{1}{\beta_X}}$ ise $0 < \sigma$, $r := [\alpha/2] + 1$ için

$$Lip\sigma(r,X,\omega) := \{f \in X(T,\omega) : \Omega^{r}_{X,w}(f,\delta) = O(\delta^{\sigma}), \delta > 0\}$$

olarak tanımlanır.

Sonuç3.9 $0 < \sigma$ ve $f \in X([0,2\pi],\omega)$, $\omega \in A_{\frac{1}{\alpha_X}} \cap A_{\frac{1}{\beta_X}}$ olsun. Aşağıdaki ifadeler denktirler:

(i) $f \in Lip\sigma(r,X,\omega)$

(ii) $E_n(f)_{X,w} = O(n^{-\sigma})$, $, n = 1,2...$

Teorem3.10 $X([0,2\pi],\omega)$ ağırlıklı simetrik uzay, $f \in X([0,2\pi],\omega)$ ve $\omega \in A_{\frac{1}{\alpha_X}} \cap A_{\frac{1}{\beta_X}}$ olsun. Eğer $\alpha \in (0,\infty)$ ve $\sum_{v=1}^{\infty} v^{\alpha-1} E_v(f)_{X,w} < \infty$ ise

$$E_n(f^{(\alpha)})_{X,w} \le c\left((n+1)^{\alpha} E_n(f)_{X,w} + \sum_{v=n+1}^{\infty} v^{\alpha-1} E_v(f)_{X,w}\right)$$

olur. Burada $c > 0$ bir sabittir.

İspat:

$$\left\|f^{(\alpha)}-S_n(f^{(\alpha)})\right\|_{X,w}=\left\|\sum_{k=1}^{\infty}S_{2^{k+1}}(f^{(\alpha)})-S_{2^k}(f^{(\alpha)})-S_n(f^{(\alpha)})\right\|_{X,w}=$$

$$=\left\|\sum_{k=1}^{m+1}S_{2^{k+1}}(f^{(\alpha)})-S_{2^k}(f^{(\alpha)})-S_n(f^{(\alpha)})+\sum_{k=m+2}^{\infty}S_{2^{k+1}}(f^{(\alpha)})-S_{2^k}(f^{(\alpha)})\right\|_{X,w}\leq$$

$$\leq\left\|\sum_{k=1}^{m+1}S_{2^{k+1}}(f^{(\alpha)})-S_{2^k}(f^{(\alpha)})-S_n(f^{(\alpha)})\right\|_{X,w}+\left\|\sum_{k=m+2}^{\infty}S_{2^{k+1}}(f^{(\alpha)})-S_{2^k}(f^{(\alpha)})\right\|_{X,w}$$

$$\leq\left\|S_{2^{m+2}}(f^{(\alpha)})-S_n(f^{(\alpha)})\right\|_{X,w}+\sum_{k=m+2}^{\infty}\left\|S_{2^{k+1}}(f^{(\alpha)})-S_{2^k}(f^{(\alpha)})\right\|_{X,w}$$

olur. $2^m<n\leq 2^{m+1}$ için

$$\left\|S_{2^{m+2}}(f^{(\alpha)})-S_n(f^{(\alpha)})\right\|_{X,w}\leq c2^{(m+2)\alpha}E_n(f)_{X,w}$$

bulunur. Diğer taraftan;

$$\begin{aligned}\sum_{k=m+2}^{\infty}\left\|S_{2^{k+1}}(f^{(\alpha)})-S_{2^k}(f^{(\alpha)})\right\|_{X,w}&=\left\|S_{2^{m+3}}(f^{(\alpha)})-S_{2^{m+2}}(f^{(\alpha)})\right\|_{X,w}+\ldots\\&\quad+\left\|S_{2^{m+a+2}}(f^{(\alpha)})-S_{2^{m+a}}(f^{(\alpha)})\right\|_{X,w}+\ldots\\&\leq c\left(2^{m+3}\right)^{\alpha}E_{2^{m+2}}(f)_{X,w}+\ldots+c\left(2^{m+a+2}\right)^{\alpha}E_{2^{m+a}}(f)_{X,w}+\ldots\\&=c\sum_{k=m+2}^{\infty}\left(2^{k+1}\right)^{\alpha}E_{2^k}(f)_{X,w}\\&\leq C\sum_{k=m+2}^{\infty}\ \sum_{\mu=2^{k-1}+1}^{2^k}\mu^{\alpha-1}E_{\mu}(f)_{X,w}\\&=c\sum_{v=2^{m+1}}^{\infty}v^{\alpha-1}E_v(f)_{X,w}\\&\leq c\sum_{v=n+1}^{\infty}v^{\alpha-1}E_v(f)_{X,w}\end{aligned}$$

olur. Bulunanlar bir araya getirilirse

$$\begin{aligned}\left\|f^{(\alpha)}-S_n(f^{(\alpha)})\right\|_{X,w}&\leq\left\|S_{2^{m+2}}(f^{(\alpha)})-S_n(f^{(\alpha)})\right\|_{X,w}+\sum_{k=m+2}^{\infty}\left\|S_{2^{k+1}}(f^{(\alpha)})-S_{2^k}(f^{(\alpha)})\right\|_{X,w}\\&\leq c(n+1)^{\alpha}E_n(f)_{X,w}+c\sum_{v=n+1}^{\infty}v^{\alpha-1}E_v(f)_{X,w}\end{aligned}$$

ve

$$E_n(f^{(\alpha)})_{X,w}\leq c\left((n+1)^{\alpha}E_n(f)_{X,w}+\sum_{v=n+1}^{\infty}v^{\alpha-1}E_v(f)_{X,w}\right)$$

olur ve ispat biter.

Teorem 1, Teorem 2 ve Teorem 3'ün sonucu olarak :

Sonuç3.11 $f \in X([0,2\pi],\omega)$, $\omega \in A_{\frac{1}{\alpha_X}} \cap A_{\frac{1}{\beta_X}}$, $r \in (0,\infty)$ ve bir $\alpha > 0$ için $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{\alpha-1} E_\nu(f)_{X,w} < \infty$ sağlansın. Bu durumda $n = 0,1,2,...$ için $\exists c > 0$:

$$\Omega_{X,w}^{r}\left(f^{(\alpha)}, \frac{\pi}{n+1}\right) \leq \frac{c}{(n+1)^{2r}} \sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1)^{\alpha+2r-1} E_\nu(f)_{X,w} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{\alpha-1} E_\nu(f)_{X,w}$$

olur.

4. AĞIRLIKLI SİMETRİK SMIRNOV UZAYLARINDA YAKLAŞIM

4.1 Temel Sonuçlar

$f \in E_{X,w}(G)$ için Poisson polinomları

$$V_n(f,z) := \sum_{k=0}^{n} c_k.F_k(z) + \sum_{k=n+1}^{2n-1}\left(2-\frac{k}{n}\right)c_k.F_k(z), \quad z \in G$$

olarak tanımlanır. Burada $F_k(z)$, Faber Polinomları ve c_k lar da f 'nin Faber katsayılarıdır.

Teorem 4.1.1 Γ bir Dini Düzgün eğri, $X(T,\omega)$ ağırlıklı simetrik Smirnov uzayı ve $\omega \in A_{\frac{1}{\alpha_X}}(\Gamma) \cap A_{\frac{1}{\beta_X}}(\Gamma)$ olsun. Bu durumda her $f \in E_X(G,\omega)$ için $\exists c > 0$:

$$\left\| f - V_n(f,.) \right\|_{X,\Gamma,\omega} \leq c.E_n(f)_{X,\Gamma,\omega}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Teorem 4.1.2 Γ, bir Dini-düzgün eğri, α_X, β_X nontrivial Boyd indisleri $\omega \in A_{\frac{1}{\alpha_X}}(\Gamma) \cap A_{\frac{1}{\beta_X}}(\Gamma)$, $X(\Gamma,\omega)$ ağırlıklı simetrik Smirnov uzayı ve $f \in X(\Gamma,\omega)$ olsun. Bu durumda $\exists c > 0$: her $n \in N$ için

$$\left\| f - R_n(.,f) \right\|_{X,\Gamma,w} \leq c.\left\{ \Omega^r_{X,\Gamma,w}\left(f,\frac{1}{n+1}\right) + \widetilde{\Omega}^r_{X,\Gamma,w}\left(f,\frac{1}{n+1}\right) \right\}$$

olur. Burada $r > 0$ ve $R_n(.,f)$ f-nin Faber Laurent serisinin n. kısmi toplamıdır.

Sonuç4.1.3 Γ, Dini-düzgün eğri, $X(\Gamma,\omega)$ ağırlıklı simetrik Smirnov uzayı ve $\omega \in A_{\frac{1}{\alpha_X}}(\Gamma) \cap A_{\frac{1}{\beta_X}}(\Gamma)$ olsun. Eğer $f \in E_X(G,\omega)$ ise $\exists c>0$: her $n \in N$ için

$$\|f-P_n(.,f)\|_{X,\Gamma,w} \leq c.\Omega^r_{X,\Gamma,w}\left(f,\frac{1}{n+1}\right), \quad r=1,2,...$$

olur. Burada $P_n(.,f)$, f-nin Faber serisinin n. kısmi toplamıdır.

Sonuç4.1.4 Γ bir Dini-düzgün eğri olsun. $X(\Gamma,\omega)$ ağırlıklı simetrik Smirnov uzayı ve $\omega \in A_{\frac{1}{\alpha_X}}(\Gamma) \cap A_{\frac{1}{\beta_X}}(\Gamma)$ olsun. Eğer $f \in \widetilde{E}_X(G^-,\omega)$ ise $\exists c>0$: her $n \in N$ için

$$\|f-R_n(.,f)\|_{X,\Gamma,w} \leq c.\widetilde{\Omega}^r_{X,\Gamma,w}\left(f,\frac{1}{n+1}\right), \quad r=1,2,...$$

olur. Burada $R_n(.,f)$ Teorem 4.1.2 deki gibidir.

Teorem4.1.5 Γ, bir Dini-düzgün eğri, $X(T,\omega)$ ağırlıklı simetrik Smirnov uzayı ve $\omega \in A_{\frac{1}{\alpha_X}}(\Gamma) \cap A_{\frac{1}{\beta_X}}(\Gamma)$ olsun. Eğer $f \in E_X(G,\omega)$ ise $r>0$ için $\exists c>0$:

$$\Omega^r_{X,\Gamma,w}\left(f,\frac{1}{n}\right) \leq \frac{c}{n^{2r}}\left\{E_0(f)_{X,\Gamma,w} + \sum_{k=1}^{n} k^{2r-1}E_k(f)_{X,\Gamma,w}\right\}$$

eşitsizliği sağlanır.

Sonuç4.1.6 Sonuç 4.1.3 ün koşulları altında eğer $E_n(f)_{X,\Gamma,w} = O(n^{-\alpha})$, $\alpha>0$, $n=1,2,3,...$ ise $f \in E_X(G,\omega)$ ve $r>0$ için

$$\Omega^r_{X,\Gamma,w}(f,\delta) = \begin{cases} O(\delta^{\alpha}) & ,r>\alpha/2 \\ O(\delta^{\alpha}\left|\log\frac{1}{\delta}\right|) & ,r=\alpha/2 \\ O(\delta^{2r}) & ,r<\alpha/2 \end{cases}$$

olur.

Tanım 4.1.7 $X(\Gamma,\omega)$ ağırlıklı simetrik Smirnov uzayı ve $\alpha \in R^{+}$ olsun. Eğer $f \in \widetilde{E}_X(G^{-},\omega)$ ise $0<\sigma$, $r := \left[\alpha/2\right]+1$ için

$$\widetilde{L}ip\sigma(\alpha,X,\Gamma,\omega) := \left\{f \in \widetilde{E}_X(G^{-},\omega): \ \Omega^{r}_{X,\Gamma,w}(f,\delta) = O(\delta^{\alpha})\right\}$$

ve

$$Lip\sigma(\alpha,X,\Gamma,\omega) := \left\{f \in E_X(G,\omega): \ \Omega^{r}_{X,\Gamma,w}(f,\delta) = O(\delta^{\alpha}), \quad \delta>0\right\}$$

olarak tanımlanır.

Sonuç (4.1.3) ve sonuç (4.1.6) dan $Lip\sigma(\alpha,X,\Gamma,\omega)$ sınıflarının karakterizasyonu elde edilir.

Sonuç 4.1.8 $0<\sigma$ ve $f \in E_X(G,\omega)$, $\omega \in A_{\frac{1}{\alpha_X}}(\Gamma) \cap A_{\frac{1}{\beta_X}}(\Gamma)$, $X(\Gamma,\omega)$ ağırlıklı simetrik Smirnov uzayı olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

i) $f \in Lip\sigma(\alpha,X,\Gamma,\omega)$

ii) $E_n(f)_{X,\Gamma,w} = O(n^{-\sigma}), \quad n=1,2,3,...$

4.2 Yardımcı Sonuçlar ve İspatları

Lemma 4.2.1 [16] eğer $0<\alpha_X,\beta_X<1$, $\omega \in A_{\frac{1}{\alpha_X}}(\Gamma) \cap A_{\frac{1}{\beta_X}}(\Gamma)$ ise her $f \in X(\Gamma,\omega)$ için

$$f^{+} \in E_X(G,\omega) \text{ ve } f^{-} \in \widetilde{E}_X(G^{-},\omega)$$

olur.

Lemma 4.2.2 [17] eğer α_X ve β_X nontrivial Boyd indisleri ve $\omega \in A_{\frac{1}{\alpha_X}}(T) \cap A_{\frac{1}{\beta_X}}(T)$ ise $\exists c>0$: her $n \in N$ için

$$\left\|g - T_n g\right\|_{X(T,w)} \le c\,\Omega^{r}_{X,w}\left(g,\frac{1}{n+1}\right), \quad g \in E_X(D,\omega)$$

olur. Burada $r = 1,2,3,...$ ve $T_n g$ g 'nin orijindeki Taylor açılımının n . kısmi toplamıdır.

[28] den

$$\frac{\psi'(w)}{\psi(w)-z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_k(z)}{w^{k+1}}, \quad z \in G, \quad w \in D^-$$

ve

$$\frac{\psi_1'(w)}{\psi_1(w)-z} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_k(1/z)}{w^{k+1}}, \quad z \in G^-, \quad w \in D^-$$

olduğunu biliyoruz. Burada $\varphi_k(z)$ ve $F_k(1/z)$ $\overline{G}$ ve $\overline{C}-G$ kontinyumlarına göre Faber polinomlarıdır ve

$$\varphi_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R} \frac{w^k \psi'(w)}{\psi(w)-z} dw, \quad z \in G, \quad R > 1$$

$$F_k(1/z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} \frac{w^k \psi_1'(w)}{\psi_1(w)-z} dw, \quad z \in G^-$$

$$\phi_k(z) = \varphi^k(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi^k(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma, \quad z \in G^-, \quad k = 0,1,2,... \tag{4.2.1}$$

$$F_k(1/z) = \varphi_1^k(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi_1^k(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma, \quad z \in G - \{0\} \tag{4.2.2}$$

integral gösterimlerine sahiptir. $f \in L_1(\Gamma)$ alıp

$$a_k := a_k(f) := \frac{1}{2\pi i} \int_{T} \frac{f(\psi(w))}{w^{k+1}} dw, \quad k = 0,1,2,...$$

$$\widetilde{a}_k := \widetilde{a}_k(f) := \frac{1}{2\pi i} \int_{T} \frac{f(\psi_1(w))}{w^{k+1}} dw, \quad k = 1,2,...$$

diyerek $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{a}_k F_k(1/z)$ serisine karşılık getirelim. Bu seriler f 'nin Faber-Laurent serisi olarak adlandırılır ve a_k, $\widetilde{a}_k$ katsayılarına da f 'nin Faber-Laurent katsayıları denir.

$\wp$ (derecesinde bir sınırlama olmaksızın) polinomlar ailesi ve $\wp(D)$ de $\wp$ 'nin D üzerindeki izdüşümü olsun.

$$\mathrm{T} : \wp(D) \to E_X(G, \omega),$$

$$\widetilde{\mathrm{T}} : \wp(D) \to \widetilde{E}_X(G^-, \omega),$$

$$T(P)(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{P(w)\psi'(w)}{\psi(w) - z} dw, \quad z \in G,$$

$$\widetilde{T}(P)(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{P(w)\psi_1'(w)}{\psi_1(w) - z} dw, \quad z \in G^-$$

dönüşümlerini tanımlayalım. Buradan

$$T\left(\sum_{k=0}^{n} b_k w^k\right) = \sum_{k=0}^{n} b_k \phi_k(z)$$

ve

$$\widetilde{T}\left(\sum_{k=0}^{n} d_k w^k\right) = \sum_{k=0}^{n} d_k F_k(1/z)$$

olur.

Eğer $z' \in G$ ise

$$T(P)(z') = \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{P(w)\psi'(w)}{\psi(w) - z'} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{(P \circ \varphi)(\varsigma)}{\varsigma - z'} d\varsigma = (P \circ \varphi)^+(z')$$

olur ve Cauchy singüler operatöründen Γ üzerinde h.h.y

$$T(P)(z) = S_\Gamma(P \circ \varphi)(z) + (1/2)(P \circ \varphi)(z)$$

olur. Benzer şekilde Γ dışında $z'' \to z \in \Gamma$ için açısal yollar üzerinden limit alınırsa

$$\widetilde{T}(P)(z'') = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{P(\varphi_1(\varsigma))}{\varsigma - z''} d\varsigma = [(P \circ \varphi_1)]^-(z''), \quad z'' \in G^-$$

ve yine Cauchy singüler operatöründen Γ üzerinde h.h.y.

$$\widetilde{T}(P)(z) = S_\Gamma(P \circ \varphi_1)(z) - (1/2)(P \circ \varphi_1)(z)$$

olur. S_Γ $X(\Gamma,\omega)$ da sınırlı [26] olduğundan aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Önerme 4.2.3 Γ, bir Dini-düzgün eğri ve α_X, β_X nontrivial Boyd indisleri olsun. Eğer $\omega \in A_{\frac{1}{\alpha_X}}(\Gamma) \cap A_{\frac{1}{\beta_X}}(\Gamma)$ ise $T : \wp(D) \to E_X(G,\omega)$, $\widetilde{T} : \wp(D) \to \widetilde{E}_X(G^-,\omega)$ lineer dönüşümleri sınırlıdır.

[17] den trigonometrik polinomlar ailesi $X([-\pi,\pi],\omega)$'da yoğun olduğundan cebirsel polinomlar $E_X(D,\omega)$'da yoğun olur. Sonuç olarak önerme 4.2.3' ten Hahn Banach Teoremi kullanılarak $\wp(D)$'den $E_X(D,\omega_0)$ ve $E_X(D,\omega_1)$'e giden T ve $\widetilde{T}$ dönüşümlerinin lineer ve sınırlı dönüşümler olduğu elde edilir ve genişlemeden dolayı

$$T : E_X(D,\omega_0) \to E_X(G,\omega)$$

ve

$$\widetilde{T} : E_X(D,\omega_1) \to \widetilde{E}_X(G^-,\omega)$$

dönüşümleri için

$$T(g)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{g(w)\psi'(w)}{\psi(w) - z}dw, \quad z \in G, \quad g \in E_X(D,\omega_0)$$

$$\widetilde{T}(g)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{g(w)\psi_1'(w)}{\psi_1(w) - z}dw, \quad z \in G^-, \quad g \in E_X(D,\omega_1)$$

gösterimleri elde edilir.

Önerme 4.2.4 [16] eğer $0 < \alpha_X, \beta_X < 1$, $\omega \in A_{\frac{1}{\alpha_X}}(T) \cap A_{\frac{1}{\beta_X}}(T)$ ve $X(T)$ bir yansımalı rearrangement invariant (simetrik) uzay ise bir $f \in X(T,\omega)$ için

$$\|P_r(f) - f\|_{X(T,w)} \to 0, \quad r \to 1^-$$

olur. Burada

$$P_r(f)(w) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(r,\theta-t)f(e^{it})dt\,,\ w = re^{i\theta},\ 0<r<1$$

ve $P(r,\theta-t)$ Poisson çekirdeğidir.

Teorem 4.2.5 [16] Γ , bir Dini-düzgün eğri, $X(\Gamma,\omega)$ ağırlıklı simetrik Smirnov uzayı, α_X , β_X nontrivial Boyd indisleri ve $\omega \in A_{\frac{1}{\alpha_X}}(\Gamma)\cap A_{\frac{1}{\beta_X}}(\Gamma)$ olsun.

Bu durumda

$$T: E_X(D,\omega_0) \to E_X(G,\omega)$$

ve

$$\widetilde{T}: E_X(D,\omega_1) \to \widetilde{E}_X(G^-,\omega)$$

dönüşümleri birebir ve örtendir.

4.3 Temel Sonuçların İspatları

Teorem 4.1.1 in ispatı: $V_n(f,z) := \sum_{k=0}^{n} c_k.F_k(z) + \sum_{k=n+1}^{2n-1}\left(2-\frac{k}{n}\right)c_k.F_k(z)$ olduğundan (2.3.1) ve (2.3.2) den

$$V_n(f,z) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{T}}\frac{f_0(\omega)}{\omega^{k+1}}d\omega.\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{T}}\frac{\omega^k.\Psi'(\omega)}{\Psi(\omega)-z}d\omega +$$
$$+\sum_{k=n+1}^{2n-1}(2-\frac{k}{n})\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{T}}\frac{f_0(\omega)}{\omega^{k+1}}d\omega.\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{T}}\frac{\omega^k.\Psi'(\omega)}{\Psi(\omega)-z}d\omega$$

elde edilir. Bu terimlerdeki ilk integrallerde $\omega = e^{it}$ ve ikinci integrallerde $\Psi(\omega)=\varsigma$ dönüşümleri yapılırsa

$$V_n(f,z) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f_0(e^{it})}{(e^{it})^{k+1}}ie^{it}dt\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\Phi^k(\varsigma)}{\varsigma-z}d\varsigma +$$
$$+\sum_{k=n+1}^{2n-1}(2-\frac{k}{n})\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f_0(e^{it})}{(e^{it})^{k+1}}ie^{it}dt\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\Phi^k(\varsigma)}{\varsigma-z}d\varsigma$$

bulunur. Bulunan bu ifadede gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$V_n(f,z)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f_0(e^{it}).e^{-ikt}dt.\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\Phi^k(\varsigma)}{\varsigma-z}d\varsigma+$$
$$+\sum_{k=n+1}^{2n-1}(2-\frac{k}{n})\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f_0(e^{it}).e^{-ikt}dt.\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\Phi^k(\varsigma)}{\varsigma-z}d\varsigma$$

olur. e^{-ikt} çarpanı ς dan bağımsız olduğu için ikinci integrallerin içine alınırsa

$$V_n(f,z)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f_0(e^{it})dt.\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\Phi^k(\varsigma)e^{-ikt}}{\varsigma-z}d\varsigma+$$
$$+\sum_{k=n+1}^{2n-1}(2-\frac{k}{n})\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f_0(e^{it})dt.\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\Phi^k(\varsigma)e^{-ikt}}{\varsigma-z}d\varsigma$$

elde edilir. $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f_0(e^{it})dt$ çarpanı k' dan bağımsız olduğu için $\sum$ işaretinin dışına

çıkarılırsa

$$V_n(f,z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f_0(e^{it})dt\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\Phi^k(\varsigma)e^{-ikt}}{\varsigma-z}d\varsigma+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f_0(e^{it})dt\sum_{k=n+1}^{2n-1}(2-\frac{k}{n})\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\Phi^k(\varsigma)e^{-ikt}}{\varsigma-z}d\varsigma$$

olarak bulunur.

Eşitliğin sağ tarafı $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f_0(e^{it})dt$ ortak çarpanı parantezine alınırsa

$$V_n(f,z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f_0(e^{it})dt\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\Phi^k(\varsigma)e^{-ikt}}{\varsigma-z}d\varsigma+\sum_{k=n+1}^{2n-1}(2-\frac{k}{n})\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\Phi^k(\varsigma)e^{-ikt}}{\varsigma-z}d\varsigma\right]$$

olur. İntegral ile sonlu toplamın yer değiştirmesi özelliğinden

$$V_n(f,z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f_o(e^{it})dt\left[\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\sum_{k=0}^{n}\Phi^k(\varsigma)e^{-ikt}}{\varsigma-z}d\varsigma+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\sum_{k=n+1}^{2n-1}(2-\frac{k}{n})\Phi^k(\varsigma)e^{-ikt}}{\varsigma-z}\right]$$

olarak bulunur. Bulunan bu son eşitlikte köşeli parantez içindeki ifade tek integral altında birleştirilir ve

$$\lambda_{|k|} := \begin{cases} 1, 0 \le k \le n \\ 2 - \dfrac{k}{n}, n+1 \le k \le 2n-1 \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa

$$V_n(f,z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0(e^{it})dt . \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\sum_{k=-(2n-1)}^{2n-1} \lambda_{|k|}\Phi^k(\varsigma)e^{-ikt}}{\varsigma - z} d\varsigma$$

olur ve son olarak da

$$f_0 := f \circ \Psi$$

yerine yazılırsa

$$V_n(f,z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(\Psi(e^{it})\right)\frac{dt}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\sum_{k=-(2n-1)}^{2n-1} \lambda_{|k|}\Phi^k(\varsigma)e^{-ikt}}{\varsigma - z} d\varsigma, \quad z \in G$$

olur.

Eğer $P_n \in \wp_n$, $f \in E_X(G,\omega)$ için neredeyse en iyi yaklaşım ise(near best approximant)

$$\begin{aligned} \|f - V_n(f,.)\|_{X,\Gamma,\omega} &= \|f - P_n + P_n - V_n(f,.)\|_{X,\Gamma,\omega} \\ &\le \|f - P_n\|_{X,\Gamma,\omega} + \|P_n - V_n(f,.)\|_{X,\Gamma,\omega} \\ &= E_n(f)_{X,\Gamma,\omega} + \|P_n - V_n(f,.)\|_{X,\Gamma,\omega} \end{aligned}$$

elde edilir.

$$P_n(z) = V_n(P_n, z)$$

eşitliğinden

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_n(\Psi(e^{it}))\frac{dt}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\sum_{k=-(2n-1)}^{2n-1} \lambda_{|k|}\Phi^k(\varsigma)e^{-ikt}}{\varsigma - z} d\varsigma, \quad z \in G$$

olur. Bu eşitlikten

$$P_n(z)-V_n(f,z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{P_n(\Psi(e^{it}))-f(\Psi(e^{it}))\right\}\frac{dt}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\sum_{k=-(2n-1)}^{2n-1}\lambda_{|k|}\Phi^k(\varsigma)e^{-ikt}}{\varsigma-z}d\varsigma,\quad z\in G$$

elde edilir. Bulunan bu son eşitlikte Γ üzerinde $z\to z_0$ için açısal yollar üzerinden limit alınırsa ve

$$f^+(z)=\frac{1}{2}f(z)+(S_\Gamma f)(z)$$

eşitliği kullanılırsa

$$P_n(z_0)-V_n(f,z_0)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{P_n(\Psi(e^{it}))-f(\Psi(e^{it}))\right\}dt\left[\frac{1}{2}\sum_{k=-(2n-1)}^{2n-1}\lambda_{|k|}\Phi^k(\varsigma)e^{-ikt}+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\sum_{k=-(2n-1)}^{2n-1}\lambda_{|k|}\Phi^k(\varsigma)e^{-ikt}}{\varsigma-z_0}d\varsigma\right]$$

olur.

$\Phi^{-2n}(\varsigma)\sum_{k=-(2n-1)}^{2n-1}\lambda_{|k|}\Phi^k(\varsigma)e^{-ikt}$ G^- de analitik olduğundan sınırsız bölgeler için Cauchy İntegral Teoremi gereğince

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\sum_{k=-(2n-1)}^{2n-1}\lambda_{|k|}\Phi^k(\varsigma)e^{-ikt}}{(\varsigma-z)\Phi^{2n}(\varsigma)}d\varsigma=0,\quad z\in G \qquad (4.3.1)$$

olur. (4.31) de açısal yollar üzerinden limit alınırsa

$$\frac{1}{2}\sum_{k=-(2n-1)}^{2n-1}\lambda_{|k|}\Phi^k(z_0)e^{-ikt}=-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\Phi^{2n}(z_0)}{\Phi^{2n}(\varsigma)}\cdot\frac{\sum_{k=-(2n-1)}^{2n-1}\lambda_{|k|}\Phi^k(\varsigma)e^{-ikt}}{\varsigma-z_0}d\varsigma$$

eşitliği bulunur.

$$z_0=\Psi(\omega_0)$$

dönüşümü yapılırsa

$$P_n(z_0)-V_n(f,z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(P_n(\Psi(e^{it}))-f(\Psi(e^{it})))\frac{dt}{2\pi i}\left[\int_T\frac{\sum\limits_{k=-(2n-1)}^{2n-1}\lambda_{|k|}\omega^k e^{-ikt}}{\Psi(\omega)-\Psi(\omega_0)}\Psi'(\omega)d\omega-\right.$$

$$\left.-\int_T\frac{\omega_0^{2n}}{\omega^{2n}}\cdot\frac{\sum\limits_{k=-(2n-1)}^{2n-1}\lambda_{|k|}\omega^k e^{-ikt}}{\Psi(\omega)-\Psi(\omega_0)}\Psi'(\omega)d\omega\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(P_n(\Psi(e^{it}))-f(\Psi(e^{it})))\frac{dt}{2\pi i}\int_T(1-\frac{\omega_0^{2n}}{\omega^{2n}}).\frac{\sum\limits_{k=-(2n-1)}^{2n-1}\lambda_{|k|}\omega^k e^{-ikt}}{\Psi(\omega)-\Psi(\omega_0)}\Psi'(\omega)d\omega$$

elde edilir. Bulunan bu son eşitlikteki ikinci integralde $\frac{1}{\omega-\omega_0}$ terimini ekleyip çıkartalım:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_T(1-\frac{\omega_0^{2n}}{\omega^{2n}})\frac{\sum\limits_{k=-(2n-1)}^{2n-1}\lambda_{|k|}\omega^k e^{-ikt}}{\Psi(\omega)-\Psi(\omega_0)}\Psi'(\omega)d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_T(1-\frac{\omega_0^{2n}}{\omega^{2n}})\sum_{k=-(2n-1)}^{2n-1}\lambda_{|k|}\omega^k e^{-ikt}\left[\frac{\Psi'(\omega)}{\Psi(\omega)-\Psi(\omega_0)}-\frac{1}{\omega-\omega_0}+\frac{1}{\omega-\omega_0}\right]d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_T(1-\frac{\omega_0^{2n}}{\omega^{2n}})\sum_{k=-(2n-1)}^{2n-1}\lambda_{|k|}\omega^k e^{-ikt}\left[\frac{\Psi'(\omega)}{\Psi(\omega)-\Psi(\omega_0)}-\frac{1}{\omega-\omega_0}\right]d\omega+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_T(1-\frac{\omega_0^{2n}}{\omega^{2n}})\frac{1}{\omega-\omega_0}\sum_{k=-(2n-1)}^{2n-1}\lambda_{|k|}\omega^k e^{-ikt}d\omega$$

eşitliği elde edilir. Bulduğumuz bu ifadeyi $P_n(z_0)-V_n(f,z_0)$ da yerine yazarsak

$$P_n(z_0)-V_n(f,z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{P_n(\Psi(e^{it}))-f(\Psi(e^{it}))\right\}dt\times$$

$$\times\frac{1}{2\pi i}\int_{T}(1-\frac{\omega_0^{2n}}{\omega^{2n}})\sum_{k=-(2n-1)}^{2n-1}\lambda_{|k|}\omega^k e^{-ikt}\left[\frac{\Psi'(\omega)}{\Psi(\omega)-\Psi(\omega_0)}-\frac{1}{\omega-\omega_0}\right]d\omega+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{P_n(\Psi(e^{it}))-f(\Psi(e^{it}))\right\}dt\frac{1}{2\pi i}\int_{T}(1-\frac{\omega_0^{2n}}{\omega^{2n}})\frac{1}{\omega-\omega_0}\sum_{k=-(2n-1)}^{2n-1}\lambda_{|k|}\omega^k e^{-ikt}d\omega=$$

$$=:\mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2 \tag{4.3.2}$$

olur. Buradan

$$\mathrm{I}_1:=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{P_n(\Psi(e^{it}))-f(\Psi(e^{it}))\right\}dt\frac{1}{2\pi i}\int_{T}(1-\frac{\omega_0^{2n}}{\omega^{2n}})\sum_{k=-(2n-1)}^{2n-1}\lambda_{|k|}\omega^k e^{-ikt}\left[\frac{\Psi'(\omega)}{\Psi(\omega)-\Psi(\omega_0)}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\omega-\omega_0}\right]d\omega,$$

$$\mathrm{I}_2:=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{P_n(\Psi(e^{it}))-f(\Psi(e^{it}))\right\}dt\frac{1}{2\pi i}\int_{T}(1-\frac{\omega_0^{2n}}{\omega^{2n}})\frac{1}{\omega-\omega_0}\sum_{k=-(2n-1)}^{2n-1}\lambda_{|k|}\omega^k e^{-ikt}d\omega$$

şeklindedir.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{T}(1-\frac{\omega_0^{2n}}{\omega^{2n}})\frac{1}{\omega-\omega_0}\sum_{k=-(2n-1)}^{2n-1}\lambda_{|k|}\omega^k e^{-ikt}d\omega=\sum_{k=-(2n-1)}^{2n-1}\lambda_{|k|}\omega_0^k e^{-ikt}$$

eşitliği gereği

$$\|\mathrm{I}_2\|_{X,\Gamma,\omega}\le E_n(f)_{X,\Gamma,\omega}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=-(2n-1)}^{2n-1}\lambda_{|k|}\omega_0^k e^{-ikt}\right|dt. \tag{4.3.3}$$

Diğer taraftan

$$\|\mathrm{I}_1\|_{X,\Gamma,\omega}\le E_n(f)_{X,\Gamma,\omega}\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=-(2n-1)}^{2n-1}\lambda_{|k|}\omega^k e^{-ikt}\right|\int_{T}\left|1-\frac{\omega_0^{2n}}{\omega^{2n}}\right|.\left|\frac{\Psi'(\omega)}{\Psi(\omega)-\Psi(\omega_0)}-\frac{1}{\omega-\omega_0}\right|.|d\omega|$$

olur.

$$\mathrm{A}:=\left\{\omega\in\mathrm{T}:\ \ |\omega-\omega_0|\le c.\frac{1}{n},\quad \omega_0\in\mathrm{T}\right\}$$

olarak tanımlayalım ve

$$\int_{T} f d\mu = \int_{A} f d\mu + \int_{T/A} f d\mu$$

eşitliğini de kullanırsak

$$\int_{A}\left|1-\frac{\omega_0^{2n}}{\omega^{2n}}\right|.\left|\frac{\Psi'(\omega)}{\Psi(\omega)-\Psi(\omega_0)}-\frac{1}{\omega-\omega_0}\right|.|d\omega| \le \int_{A}\left|\omega^{2n}-\omega_0^{2n}\right|.\left|\frac{\Psi'(\omega)}{\Psi(\omega)-\Psi(\omega_0)}-\frac{1}{\omega-\omega_0}\right|.|d\omega| \le c$$

çıkar. Γ Dini Düzgün eğri olduğundan

$$\int_0^{\delta}\frac{\Omega(\theta,s)}{s}ds<\infty \qquad (*)$$

Sağlanır ve (*) ile

$$\int_{T/A}\left|1-\frac{\omega_0^{2n}}{\omega^{2n}}\right|.\left|\frac{\Psi'(\omega)}{\Psi(\omega)-\Psi(\omega_0)}-\frac{1}{\omega-\omega_0}\right|.|d\omega| \le 2\int_{T/A}\frac{\left|\Psi'(\omega)(\omega-\omega_0)-[\Psi(\omega)-\Psi(\omega_0)]\right|}{|\Psi(\omega)-\Psi(\omega_0)||\omega-\omega_0|}|d\omega|$$

$$\le c\int_{1/n}^{1}\frac{\omega(\Psi',t)}{t}dt \le c$$

bulunur. Elde edilenlerden

$$\|I_1\|_{X,\Gamma,\omega} \le E_n(f)_{X,\Gamma,\omega}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=-(2n-1)}^{2n-1}\lambda_{|k|}\omega^k e^{-ikt}\right|dt. \qquad (4.3.4)$$

Ayrıca (4.3.2),(4.3.3) ve (4.3.4) ten

$$\|P_n(.)-V_n(f,.)\|_{X,\Gamma,\omega} \le E_n(f)_{X,\Gamma,\omega}\left\{\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=-(2n-1)}^{2n-1}\lambda_{|k|}\omega_0^k e^{-ikt}\right| + \int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=-(2n-1)}^{2n-1}\lambda_{|k|}\omega^k e^{-ikt}\right|\right\}$$

olur.

$$\forall\omega\in T \text{ için } \int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=-(2n-1)}^{2n-1}\lambda_{|k|}\omega^k e^{-ikt}\right|\le c$$

olduğundan teoremdeki eşitsizlik elde edilir.

Teorem 4.1.2 nin ispatı:

$$R_n(z,f):=\sum_{k=0}^{n}a_kF_k(z)+\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a}_k\widetilde{F}_k(1/z)$$

rasyonel fonksiyonunun teorem 4.2 deki eşitsizliği sağladığını kanıtlayacağız. Eğer

$$\left\| f^{-}(z)+\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a}_k\widetilde{F}_k\left(\tfrac{1}{z}\right)\right\|_{X,\Gamma,w} \le c\widetilde{\Omega}^r_{X,\Gamma,w}\left(f,\frac{1}{n+1}\right) \tag{4.3.5}$$

ve

$$\left\| f^{+}(z)-\sum_{k=0}^{n}a_k\varphi_k(z)\right\|_{X,\Gamma,w} \le c\Omega^r_{X,\Gamma,w}\left(f,\frac{1}{n+1}\right) \tag{4.3.6}$$

eşitsizliklerini gösterebilirsek teorem 4.2'deki eşitsizlik doğru olur çünkü

$$f(z)=f^{+}(z)-f^{-}(z)\ \text{h.h.y}\ \Gamma.$$

Öncelikle (4.3.5)'i kanıtlayalım.

$f\in X(\Gamma,\omega)$ olsun. Buradan $f_1\in X(T,\omega_1)$, $f_0\in X(T,\omega_0)$ olur.

$$f_0(w)=f_0^{+}(w)-f_0^{-}(w)$$

olduğundan

$$f(\varsigma)=f_0^{+}(\varphi(\varsigma))-f_0^{-}(\varphi(\varsigma)) \tag{4.3.7}$$

eşitliği Γ üzerinde h.h.y sağlanır. Öte yandan önerme 4.2.1 den

$$f_1(w)=f_1^{+}(w)-f_1^{-}(w)$$

dolayısıyla

$$f(\varsigma)=f_1^{+}(\varphi_1(\varsigma))-f_1^{-}(\varphi_1(\varsigma)) \tag{4.3.8}$$

eşitliği Γ üzerinde h.h.y geçerlidir.

$z'\in G-\{0\}$ olsun. (4.3.8) ve $\widetilde{F}_k\left(\tfrac{1}{z}\right)=\varphi_1^k(z)-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\varphi_1^k(\varsigma)}{\varsigma-z}d\varsigma,\quad z\in G-\{0\}$ kullanılarak

$$\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a}_kF_k\left(\tfrac{1}{z'}\right)=\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a}_k\varphi_1^k(z')-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a}_k\varphi_1^k(\varsigma)}{\varsigma-z'}d\varsigma$$

bulunur. (4.3.8)' de $f(\varsigma)$'yı ekleyip çıkartırsak

$$\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a}_k F_k\left(1/z'\right)=\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a}_k\varphi_1^k(z')-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a}_k\varphi_1^k(\varsigma)-f_1^+(\varphi_1(\varsigma))}{\varsigma-z'}d\varsigma-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f_1^-(\varphi_1(\varsigma))}{\varsigma-z'}d\varsigma-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\varsigma)}{\varsigma-z'}d\varsigma$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a}_k\varphi_1^k(z')-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a}_k\varphi_1^k(\varsigma)-f_1^+(\varphi_1(\varsigma))}{\varsigma-z'}d\varsigma-f_1^-(\varphi_1(z'))-f^-(z')$$

bulunur. Burada son eşitlik elde edilirken Cauchy Tipli İntegral gösterimi kullanılmıştır. Γ içerisinde $z'\to z\in\Gamma$ için açısal yollar üzerinden limit alınırsa

$$\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a}_k F_k\left(1/z\right)=\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a}_k\varphi_1^k(z)-\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a}_k\varphi_1^k(z)-f_1^+(\varphi_1(z))\right)-$$

$$-S_\Gamma\left[\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a}_k\varphi_1^k-(f_1^+\circ\varphi_1)\right]-f_1^-(\varphi_1(z))-f^-(z)$$

elde edilir.

$f=f^+-f^-$, $f(\varsigma)=f_1^+(\varphi_1(\varsigma))-f_1^-(\varphi_1(\varsigma))$, Minkowski eşitsizliği ve S_Γ 'nın sınırlılığından

$$\left\|f^-(z)+\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a}_k F_k\left(1/z'\right)\right\|_{X(\Gamma,w)}=\left\|\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a}_k\varphi_1^k(z)-f_1^+(\varphi_1(z))\right)-\right.$$

$$\left.-S_\Gamma\left[\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a}_k\varphi_1^k-(f_1^+\circ\varphi_1)\right](z)\right\|_{X(\Gamma,w)}$$

$$\leq c_1\left\|\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a}_k\varphi_1^k(z)-f_1^+(\varphi_1(z))\right\|_{X(\Gamma,w)}$$

$$\leq c_2\left\|f_1^+(w)-\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a}_k w^k\right\|_{X(T,w_1)}$$

olur. Burada son eşitsizliğe geçiş yapılırken $w=\varphi_1(z)$ dönüşümü kullanılmıştır. Diğer taraftan teorem 4.2.5 ten f 'nin $\widetilde{a}_k$ Faber-Laurent katsayıları ile f_1^+ 'nın orijindeki Taylor katsayıları aynıdır. Buradan önerme 4.2.2 hesaba katılırsa

$$\left\|f^-+\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a}_k F_k\left(1/z\right)\right\|_{X(\Gamma,w)}\leq c_3\Omega_{X,w_1}^r\left(f,\frac{1}{n+1}\right)=c_3\widetilde{\Omega}_{X,\Gamma,w}^r\left(f,\frac{1}{n+1}\right)$$

bulunur ve (4.3.5) kanıtlanmış olur. Benzer bir yolla (4.3.6) nın da geçerli olduğu görülebilir ve ispat biter.

Teorem 4.1.5 in ispatı: $f \in X(\Gamma,\omega)$ olsun. Buradan

$$T(f_0^+) = f$$

olur. Teorem 4.2.5 teki $T : E_X(D,\omega_0) \to E_X(G,\omega)$ dönüşümü lineer, sınırlı, 1-1 ve örtendir. $T^{-1} : E_X(G,\omega) \to E_X(D,\omega_0)$ dönüşümü de lineer ve sınırlıdır.

$P_n^* \in \wp_n$ $f \in X(\Gamma,\omega)$ fonksiyonuna en iyi yaklaşan cebirsel polinom olarak alınsın:

$$E_n(f,G)_{X,w} = \left\|f - P_n^*\right\|_{X(\Gamma,w)}, \quad T^{-1}(P_n^*) \in \wp_n(D)$$

ve buradan

$$E_n(f_0^+)_{X,w_0} \le \left\|f_0^+ - T^{-1}(P_n^*)\right\|_{X(T,w_0)} = \left\|T^{-1}(f) - T^{-1}(P_n^*)\right\|_{X(T,w_0)} = \left\|T^{-1}(f - P_n^*)\right\|_{X(T,w_0)}$$

$$\le \left\|T^{-1}\right\| \left\|f - P_n^*\right\|_{X(\Gamma,w)} = \left\|T^{-1}\right\| E_n(f,G)_{X,w} \qquad (*)$$

elde edilir. Burada bir alt satıra geçişte T^{-1}'in sınırlılığı kullanılmıştır. Diğer taraftan [17] den

$$\Omega_{X,w_0}^r\left(f_0^+,\frac{1}{n}\right) \le \frac{c_1}{n^{2r}}\left\{E_0(f_0^+)_{X,w_0} + \sum_{k=1}^{n} k^{2r-1} E_k(f_0^+)_{X,w_0}\right\}, \quad r => 0$$

biliniyor. Son eşitsizlik ve (*) dan

$$\Omega_{X,\Gamma,w}^r\left(f_0^+,\frac{1}{n}\right) = \Omega_{X,w_0}^r\left(f_0^+,\frac{1}{n}\right) \le \frac{c_2}{n^{2r}}\left\{E_0(f_0^+)_{X,w_0} + \sum_{k=1}^{n} k^{2r-1} E_k(f_0^+)_{X,w_0}\right\}$$

$$\le \frac{c_3\left\|T^{-1}\right\|}{n^{2r}}\left\{E_0(f,G)_{X,w} + \sum_{k=1}^{n} k^{2r-1} E_k(f,G)_{X,w}\right\}, \quad r => 0$$

olur ve ispat biter.

5. SONUÇ

Bu çalışmada elde edilen yeni sonuçlar üçüncü ve dördüncü bölümde bulunmaktadır ve bunlar aşağıdaki gibi belirtilebilir.

Üçüncü bölümde $[0,2\pi]$ üzerindeki ağırlıklı simetrik uzaydaki fonksiyonlar ve onların kesirli türevleri için trigonometrik polinomlarla yaklaşımın düz teoremi ve ters teoremi elde edilmiştir. Elde edilen teoremlerin sonucu olarak Lipschitz sınıflarının bir karakterizasyonu verilmiştir.

Dördüncü bölümde kapalı Dini-düzgün bir eğrinin sınırlı ve sınırsız bileşenleri üzerinde tanımlı ağırlıklı simetrik Smirnov uzayları göz önüne alınarak bu uzayda ağırlığın bazı koşulları sağladığı durumda Poisson polinomları, Faber polinomları ve Rasyonel fonksiyonlar ile yaklaşımın düz ve ters teoremleri elde edilmiştir. Bu teoremler yardımıyla genelleştirilmiş Lipschitz sınıflarının bir karakterizasyonu verilmiştir.

6. KAYNAKLAR

[1] Walsh, J. L. and Russel, H. G., "Integrated contiunity conditions and degree of approximation by polynomials or by bounded analytic functions", *Trans. Amer. Math. Soc.*, 92, 355 (1959).

[2] Al'per, S. Y., "Approximation in the Mean of Analytic Functions of class E^p" *Gosudarstv. Izdat. Fiz-Mat. Lit.*, Moscow, 273 ,(1960).

[3] Kokilashvili, V. M., "Approximation in the mean of analytic functions of class E_p", *Sov. Math., Dokl.*, 8,1393, (1967).

[4] Kokilashvili, V.M., "A direct theorem on mean approximation of analytic functions by polynomials", *Sov. Math., Dokl.*, 10, 411 (1969).

[5] Ibragimov, I. I. And Mamedhanov, D. I., "Constructive characterization of a certain class of functions", *Sov. Math., Dokl.*, 16, 820 ,(1975).

[6] Andersson, J. E. "On the degree of polynomial approximation in $E^p(D)$", J. Approximation theory, 19, 61, (1977).

[7] Andrasko, M. I. "On the approximation in the mean of analytic functions in regions with smooth boundaries", *Problems in mathematical physics and fuction theory, Izdat. Akad. Nauk Ukrain. RSR*, 1, p.3, Kiev, (1963).

[8] Galan, D. M., "Approximation in the mean of regular functions of class E^1 In regions with smooth boundaries" *Dopovidi Akad. Nauk. Ukrain. RSR Ser A*, p.673, (1967).

[9] İsrafilov, D. M., "Approximate properties of generalized Faber series in an integral metric", *Izv. Akad. Nauk. Az SSR, Ser. Fiz.- Tekh. Math. Nauk*, 2, 10, (1987).

[10] Cavus, A., and İsrafilov D. M., " Approximation by Faber-Laurent rational functions in the mean of functions of class $L^p(\Gamma)$ with $1 < p < \infty$", *Approximation Theory Appl.*, 11, 1, 105, (1995).

[11] İsrafilov, D. M., "Approximation by p-Faber polynomials in the weighted Smirnov class $E_p(G,\omega)$ and the Bieberbach polynomials", *Constr. Approx.*, 17,3, 335, (2001).

[12] İsrafilov D. M., "Approximation by p- Faber –Laurent rational functions in the weighted Lebesgue spaces", *Czechoslovak Math. J.*, 54, 751, (2004).

[13] Kokilashvili, V. M., "on analytic functions of Smirnov- Orlicz classes", *Studia Math.*, 31, 43, (1968).

[14] Güven, A. and İsrafilov, D. M., "Polynomial approximation in Smirnov-Orlicz classes", *Comput. Methods and Function Theory*, 2, 2, 509, (2002).

[15] Akgün, R. "Approximating polynomials for functions of weighted Smirnov- Orlicz spaces", *J. Funct. Spaces Appl.* ,(982360), 41, (2012).

[16] İsrafilov, D. M. and Akgün, R., "Approximation by polynomials and rational functions in weighted rearrangement invariant spaces", *J. Math. Anal.* 346, 489-500, (2008).

[17] Güven, A. Israfilov, D. M. "Approximation by trigonometric polynomials in weighted rearrangement invariant spaces, *Glass. Mat. Ser.III*, 44, (64), 423-446, (2009).

[18] Samko, S. G., Kilbas, A. A. and Marichev, O. I., " Fractional integrals and derivatives", *Theory and applications*, Gordon and Breach Science Publishers, 1993.

[19] Akgün, R. and Kokilashvili, V., " Approximation by trigonometric polynomials of functions haning (α,ψ) - derivatives in weighted variable exponent Lebesgue spaces", [In Russian] *Probl. Mat. Anal.*, 65, 3-12, (2012); English transl. *J. Math. Sci.*, 184, 371-382, (2012).

[20] Böttcher, A. and Karlovich, A. Yu., "Carleson curves, Muckenhoupt weights and Toeplitz operators" *Prog. Math.* Vol. 154, Birkhauser, 1997.

[21] Lindenstrauss, J. and Tzafriri, L., *Classical Banach spaces I and II*, Classics Math. Springer-Verlag, 1996.

[22] Shvai, A. I., "Approximation on analytic functions by Poisson polynomials", *Ukr. Math. J.*, 25(6), 710-713, (1960).

[23] Suetin, P. K., *Series of Faber polynomials,* vol. 1, Gordon and Breach, Reading, 1998.

[24] Muckenhoupt, B., "Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function", *Trans. Amer. Math. Soc.*, 167, 207-226, (1972).

[25] Boyd, D.W., " Spaces between a pair of reflexive Lebesgue spaces" *Proc. Amer. Math. Soc.*, 18, 215-219, (1967)

[26] Karlovich, A. Yu., " Fredholmness of singular integral operators with piecewise continious coefficients on weighted Banach funtion spaces", *J. Integral Equations Appl.*, 15, 263- 320, (2002).

[27] Karlovich, A. Yu., "The essential norm of the Cauchy singular integral operator in weighted rearrangement invariant spaces", *Integral Equaitons Operator Theory* ,38, 28-50, (2000).

[28] Rudin, W., *Real and Complex Analysis Third ed.*, McGraw-Hill, 1987.