T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

RİEMANN MANİFOLDLARI ÜZERİNDE SLANT EĞRİLER

DOKTORA TEZİ

ŞABAN GÜVENÇ

BALIKESİR, MAYIS - 2015

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

RİEMANN MANİFOLDLARI ÜZERİNDE SLANT EĞRİLER

DOKTORA TEZİ

ŞABAN GÜVENÇ

BALIKESİR, MAYIS - 2015

KABUL VE ONAY SAYFASI

Şaban GÜVENÇ tarafından hazırlanan "**RİEMANN MANİFOLDLARI ÜZERİNDE SLANT EĞRİLER**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 15.05.2015 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği ~~/ oy çokluğu~~ ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Prof. Dr. Cihan ÖZGÜR	....
Üye Prof. Dr. Kadri ARSLAN	....
Üye Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN	....
Üye Doç. Dr. Bengü BAYRAM	....
Üye Doç. Dr. Özden KORUOĞLU	....

Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Doç. Dr. Necati ÖZDEMİR ....

ÖZET

RİEMANN MANİFOLDLARI ÜZERİNDE SLANT EĞRİLER
DOKTORA TEZİ
ŞABAN GÜVENÇ
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. CİHAN ÖZGÜR)

BALIKESİR, MAYIS - 2015

Bu çalışmada, Riemann manifoldları üzerinde slant eğriler ve bunların özel bir durumu olan Legendre eğrileri ele alınmıştır. Genelleştirilmiş Sasakian uzay formlarda Legendre eğrilerinin ve S-uzay formlarda slant eğrilerin biharmonik olma koşulları verilmiştir. Ayrıca, Sasakian uzay formlarda Legendre eğrilerinin f-biharmonik olmaları için gerekli ve yeterli şartlar bulunmuş ve bazı örnekler verilmiştir. Son olarak, trans-Sasakian manifoldlarda slant eğrilerinin C-paralel ve C-proper olma özellikleri üzerinde durularak, elde edilen sonuçlar beş farklı örnek ile desteklenmiştir.

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş bölümüdür.

İkinci bölümde, konuyla ilgili temel tanım ve kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde, genelleştirilmiş Sasakian uzay formların Legendre eğrileri ele alınmıştır. Bu eğrilerin biharmonik olmaları için elde edilen esas teorem, dokuz durum için ayrı ayrı incelenmiştir. Daha sonra, bu durumlar uzay formun Sasakian, Kenmotsu veya kosimplektik olma durumlarına uygulanmıştır.

Dördüncü bölümde, S-uzay formların slant eğrilerinin biharmonik olmaları için gerekli ve yeterli şartlar dört durumda hesaplanmıştır.

Beşinci bölümde, Sasakian uzay formların f-biharmonik olma koşulları incelenerek iki örnek verilmiştir.

Son bölüm olan altıncı bölümde ise, trans-Sasakian manifoldların slant eğrileri ele alınarak bu eğrilerin C-paralel ve C-proper olma şartları bulunmuştur. Ayrıca, çeşitli uzaylarda beş özel örnek verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Legendre eğri, slant eğri, trans-Sasakian manifold, Sasakian uzay form, S-uzay form, genelleştirilmiş Sasakian uzay form, biharmonik eğri, f-biharmonik eğri, C-paralel eğri, C-proper eğri.

ABSTRACT

SLANT CURVES IN RIEMANNIAN MANIFOLDS
PH.D THESIS
ŞABAN GÜVENÇ
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS

(SUPERVISOR: PROF. DR. CİHAN ÖZGÜR)

BALIKESİR, MAY 2015

In this thesis, we consider slant curves and Legendre curves in Riemannian manifolds. We obtain necessary and sufficient conditions for Legendre curves to be biharmonic in generalized Sasakian space forms. We also consider biharmonic slant curves in *S*-space forms. Moreover, we investigate *f*-biharmonic Legendre curves in Sasakian space forms and give some examples. Finally, we study *C*-parallel and *C*-proper slant curves in trans-Sasakian manifolds and give five different examples.

This thesis consists of six chapters.

The first chapter is the introduction.

In the second chapter, we give fundamental definitions and notions to be used in the following chapters.

In the third chapter, we consider Legendre curves in generalized Sasakian space forms. We study biharmonicity of these curves in nine cases. Then we apply these cases to Sasakian, Kenmotsu and cosymplectic space forms.

In the fourth chapter, we analyse biharmonicity of slant curves in *S*-space forms in four cases.

In the fifth chapter, we find necessary and sufficient conditions for Legendre curves in Sasakian space forms to be *f*-biharmonic. We also give two examples.

In the sixth chapter, we consider *C*-parallel and *C*-proper slant curves in trans-Sasakian manifolds and obtain five examples.

KEYWORDS: Legendre curve, slant curve, trans-Sasakian manifold, Sasakian space form, *S*-space form, generalized Sasakian space form, biharmonic curve, *f*-biharmonic curve, *C*-parallel curve, *C*-proper curve.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

M	Manifold
φ	(1,1)-tensör Alanı
ξ	Karakteristik Vektör Alanı
η	(Hemen Hemen) Değme Yapı
g	Metrik Tensör
T_pM	Tanjant Uzay
$\chi(M)$	Vektör Alanları Uzayı
∇	Levi-Civita (Riemann) Koneksiyonu
$\nabla^{\perp}$	Normal Demette Levi-Civita Koneksiyonu
$E(f)$	Enerji Fonksiyoneli
$E_2(f)$	Bi-enerji Fonksiyoneli
$\tau(f)$	Birinci Gerilim Alanı
$\tau_2(f)$	İkinci Gerilim Alanı
Δ	Laplas Dönüşümü
$\Delta^{\perp}$	Normal Demette Laplas Dönüşümü
H	Ortalama Eğrilik Vektör Alanı
κ_λ	Eğrinin λ. Eğrilik Fonksiyonu
R^N	N Manifoldunun Riemann Eğrilik Tensörü
$K(\pi)$	π Düzleminin Kesitsel Eğriliği
$\otimes$	Tensör Çarpımı

ÖNSÖZ

Bu çalışmada, çeşitli Riemann manifoldları üzerindeki Legendre ve slant eğriler ele alınmıştır. Bu eğrilerin, biharmonik, *f*-biharmonik, *C*-paralel ve *C*-proper olma koşulları elde edilmiş ve örnekler verilmiştir.

Bu tezi hazırlarken, bana her türlü konuda örnek ve destek olan, yol gösteren Danışman Hocam Prof. Dr. Cihan ÖZGÜR’e teşekkürü bir borç bilirim.

Çalışmalarım süresince, maddi desteğinden dolayı TÜBİTAK BİDEB’e de teşekkürlerimi sunarım.

1. GİRİŞ

J. Eells ve L. Lemaire, 1983 yılında k-harmonik dönüşümler fikrini önermişlerdir [1]. G. Y. Jiang ise, 1986 yılında, 2-harmonik (biharmonik) dönüşümler için ikinci gerilim alanı denklemini elde etmiştir [2]. B. Y. Chen, Öklid uzayının bir biharmonik $M \subset \mathbb{E}^n$ altmanifoldunu, ortalama eğrilik vektör alanı H nın Laplas'ı ΔH olmak üzere, $\Delta H = 0$ koşulunun sağlanması olarak tanımlamıştır [3]. Öklid uzayının özellikleri ve Jiang'ın sonuçları birlikte düşünüldüğünde, iki tanımın Öklid uzayında örtüştüğü görülmektedir.

J. A. Oubiña, 1985 yılında, hemen hemen değme metrik yapıyı kullanarak trans-Sasakian manifoldları tanımlamıştır [4]. Bu manifoldlar, hem Sasakian, hem Kenmotsu, hem de kosimplektik manifoldlardan daha genel bir yapıya sahiptir.

P. Alegre, D. Blair ve A. Carriazo, 2004 yılında, genelleştirilmiş Sasakian uzay formları tanıtmışlardır [5]. Bu uzay formlar, Sasakian uzay formların Riemann eğrilik tensöründen yola çıkılarak genellenmiştir. Bu çalışmalarında, çeşitli geometrik yöntemler kullanarak (katlı çarpımlar ve konformal dönüşümler gibi) genelleştirilmiş Sasakian uzay form örnekleri de türetmişlerdir. P. Alegre ve A. Carriazo, 2008 yılında, [6] nolu kaynakta, trans-Sasakian genelleştirilmiş Sasakian uzay formları incelemişlerdir. Bu çalışmalarının ikinci kısmında, α-Sasakian ve β-Kenmotsu genelleştirilmiş Sasakian uzay formları ele almışlardır. α-Sasakian durumda α yı sabit ve β-Kenmotsu durumda $\xi(\beta)+\beta^2 = f_3 - f_1$ eşitliğini bulmuşlardır.

J. T. Cho, J. Inoguchi ve J. E. Lee, 2006 yılında, Sasakian manifoldlarda Legendre eğrilerinin daha genel bir hali olan slant eğrileri tanımlamışlardır [7]. 3-boyutlu bir Sasakian uzay formda geodezik olmayan bir eğrinin slant eğri olmasının $(\tau \pm 1)$ ve κ oranının sabit olmasına denkliğini ispatlamışlardır. Bu çalışmalarında, bir slant helis ve helis olmayan bir slant eğri örneği de vermişlerdir.

D. Fetcu, 2008 yılında, Sasakian uzay formlarda biharmonik Legendre eğrileri ele almıştır [8]. 7 boyutlu bir 3-Sasakian manifoldda böyle bir eğrinin var olmadığını ispatlamıştır. Ayrıca, yine aynı çalışmasında, 7-boyutlu küre üzerinde bazı biharmonik Legendre eğrileri için parametrik denklemler elde etmiştir. [9] nolu kaynakta ise, C. Oniciuc ile yaptığı ortak çalışmalarında, Sasakian uzay formlarda biharmonik altmanifoldlar çalışmışlardır. Bu çalışmanın ilk kısmında, biharmonik Legendre eğrileri ele almışlardır. Böyle bir Legendre eğrisi için τ_2 ikinci gerilim alanını, E_1, E_2, E_3, E_4 ve $(c-1)\varphi T$ nin bir lineer birleşimi olarak elde etmişlerdir. Burada, $E_1, E_2, E_3, E_4,$ eğrinin Frenet çatısını oluşturan vektör alanlarıdır. Katsayılar ise eğrinin eğrilik fonksiyonlarını ve türevlerini içermektedir. Fetcu ve Oniciuc, buradaki son terime, yani $(c-1)\varphi T$ terimine göre dört durum incelemişlerdir. Bu durumlar şunlardır:

(1) $c=1$ olması,

(2) $c \neq 1$ ve $\varphi T \perp E_2$ olması,

(3) $c \neq 1$ ve $\varphi T \parallel E_2$ olması,

(4) $c \neq 1$ ve $\varphi T \in span\{E_2, E_3, E_4\}$ olması.

Bu yöntem bizim çalışmalarımızda yol gösterici olmuştur ve rolü büyüktür. Tezin üçüncü, dördüncü ve beşinci bölümlerinde benzer yol kullanılmıştır.

Yukarıdaki çalışmalardan yola çıkılarak bu tezin üçüncü bölümünde, genelleştirilmiş Sasakian uzay formlarda biharmonik Legendre eğrileri incelenmiş ve sonuçlar Sasakian, Kenmotsu ve kosimplektik olma durumlarına uygulanmıştır. Üçüncü bölümde dört durum yerine dokuz durum elde edilme sebebi, ikinci gerilim alanı eşitliğinde, karakteristik vektörü içeren terimin genelleştirilmiş Sasakian manifoldlar için yok olmaması; yani, kısaca ξ yi içeren terimin daha fazla durum incelemesi gerektirmesidir. Dördüncü bölümde, Sasakian uzay formların bir başka genellemesi olan *S*-uzay formlarda slant eğriler ele alınmıştır. Beşinci bölümde, Sasakian uzay formların *f*-biharmonik Legendre eğrileri üzerinde durulmuştur. En son bölüm ise, trans-Sasakian manifoldların slant eğrilerine ayrılmıştır. Bulunan sonuçlar, örneklerle desteklenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verilecektir.

2.1 Riemann Manifoldları ve Levi-Civita Koneksiyonu

Bu kısımda, Riemann Manifoldu ve Levi-Civita Koneksiyonu tanımlarını vereceğiz. İlk olarak metrik tensör tanımı ile başlayalım:

Tanım 2.1.1: M bir diferensiyellenebilir manifold ve manifold üzerindeki diferensiyellenebilir vektör alanları kümesi $\chi(M)$ olsun. Bu durumda

$$g:\chi(M)\times\chi(M)\to C^{\infty}(M,\mathbb{R})$$

ile tanımlı g bilineer formu simetrik ve pozitif tanımlı ise, yani $\forall X,Y\in\chi(M)$ için

(a) $g(X,Y)=g(Y,X)$,

(b) $g(X,X)\geq 0$ ve $\forall X\in\chi(M)$ için $g(X,X)=0\Leftrightarrow X=0$

şartları sağlanıyorsa g bilineer formuna *Riemann metriği* veya *metrik tensör* adı verilir. Bu durumda (M,g) ikilisine *Riemann manifoldu* denir [10].

Tanım 2.1.1 den görüldüğü gibi metrik tensör, her noktaya bir iç çarpım eşleyen bir dönüşümdür.

Tanım 2.1.2: M bir diferensiyellenebilir manifold olsun. Bu durumda $\forall X,Y,Z\in\chi(M)$ ve $\forall f\in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ için

$$\nabla:\chi(M)\times\chi(M)\to\chi(M)$$

dönüşümü

(1) $\nabla_{X+Y}Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z,$

(2) $\nabla_X (Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z,$

(3) $\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y,$

(4) $\nabla_X (fY) = X\left[f\right]Y + f\nabla_X Y,$

şartlarını sağlıyorsa, ∇ ya *afin koneksiyon* denir. (M,g) bir Riemann manifoldu olsun. M üzerindeki bir ∇ afin koneksiyonu, $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için

(1) $\left[X,Y\right] = \nabla_X Y - \nabla_Y X,$

(2) $Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y,Z) + g(Y,\nabla_X Z)$

özelliklerini sağlıyorsa ∇ ya *Levi-Civita (Riemann) koneksiyonu* denir [11].

Teorem 2.1.3: Bir (M,g) Riemann manifoldu üzerinde bir ve yalnız bir tane Levi-Civita koneksiyonu vardır. Bu Levi-Civita koneksiyonu

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y,Z) &= Xg(Y,Z) + Yg(X,Z) - Zg(X,Y) \\ &\quad + g\left(\left[X,Y\right],Z\right) + g\left(\left[Z,X\right],Y\right) + g\left(X,\left[Z,Y\right]\right) \end{aligned} \tag{2.1}$$

eşitliği ile bellidir. Bu eşitliğe *Koszul formülü* denir [12].

Tanım 2.1.4: (M,g) Riemann manifoldu ve ∇ M deki Levi-Civita koneksiyonu olsun. $\forall Y,Z \in \chi(M)$ için

$$g(\nabla_Y X,Z) + g(Y,\nabla_Z X) = 0$$

olacak şekilde bir $X \in \chi(M)$ vektör alanı varsa, bu vektör alanına *Killing vektör alanı* denir [13].

Tanım 2.1.5: (M,g) Riemann manifoldu, ∇ M de Levi-Civita koneksiyonu olmak üzere, $\forall X,Y \in \chi(M)$ için

$$T(X,Y)=\nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,Y]$$

ile tanımlı $T:\chi(M)\times\chi(M)\to\chi(M)$ dönüşümüne *torsion tensörü* denir [11]. $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için

$$R(X,Y)Z=\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_{[X,Y]}Z$$

ile tanımlı $R:\chi(M)\times\chi(M)\times\chi(M)\to\chi(M)$ dönüşümüne *Riemann eğrilik tensörü* adı verilir [11]. $g(X,X)g(Y,Y)-g(X,Y)^2\neq 0$ olmak üzere,

$$K(X,Y)=\frac{R(X,Y,Y,X)}{g(X,X)g(Y,Y)-g(X,Y)^2}$$

$\{X,Y\}$ tarafından gerilen düzlemin *kesitsel eğriliği* olarak adlandırılır [11]. Eğer M manifoldunun kesitsel eğriliği sabit ise, M ye *reel uzay form* denir ve $M(c)$ ile gösterilir [13].

Tanım 2.1.6: M n-boyutlu bir diferensiyellenebilir manifold olsun. Her $p\in M$ noktası için T_pM nin r-boyutlu altuzayı D_p $(r\leq n)$ ve D_p nin bir kolleksiyonu $D=\{D_p\}$ olmak üzere, p noktasını içeren bir $V\subseteq M$ açık altkümesi üzerinde C^∞ sınıfından lineer bağımsız $\{X_1,X_2,...,X_r\}$ vektör alanları her $q\in V$ noktasında hala D_p nin bir bazı oluyorsa, D ye M üzerinde r*-boyutlu dağılım* ve $\{X_1,X_2,...,X_r\}$ kümesine D için bir *lokal baz* denir [14].

Tanım 2.1.7: (M,g) bir Riemann manifold olsun. M üzerindeki diferensiyellenebilir bir f fonksiyonu için

$$\Delta f=\mathrm{div}(\mathrm{grad}\, f)$$

ile tanımlı Δ dönüşümüne *Laplas operatörü* denir [10].

2.2 Hemen Hemen Değme Metrik Manifoldlar

Bu kısımda hemen hemen değme metrik manifold ve Sasakian yapı tanımları verilecektir.

Tanım 2.2.1: M $(2n+1)$-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. M üzerindeki her X, Y, Z vektör alanı için

$$\varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi, \quad \eta(\xi) = 1, \quad \varphi\xi = 0, \quad \eta \circ \varphi = 0$$

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y), \quad \eta(X) = g(X, \xi)$$

eşitliklerini sağlayacak şekilde φ (1,1)-tipinde tensör alanı, ξ vektör alanı, η 1-formu ve g Riemann metriği varsa; (φ, ξ, η, g) dörtlüsüne *hemen hemen değme metrik yapı*, $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ beşlisine de *hemen hemen değme metrik manifold* denir. Eğer $d\eta = \Phi$ koşulu da sağlanıyorsa, $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ ye *değme metrik manifold* denir. Burada, $\Phi(X, Y) = g(X, \varphi Y)$ eşitliği ile verilen Φ dönüşümüne, M nin *temel 2-formu* denir [13].

Tanım 2.2.2: Bir M Riemann manifoldu üzerindeki her X, Y, Z vektör alanı için

$$[\varphi, \varphi](X, Y) = \varphi^2[X, Y] + [\varphi X, \varphi Y] - \varphi[\varphi X, Y] - \varphi[X, \varphi Y]$$

ile tanımlanan $[\varphi, \varphi]$ dönüşümüne φ nin *Nijenhuis torsion tensörü* denir. Eğer, (φ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik yapısı için

$$[\varphi, \varphi] + 2d\eta \otimes \xi = 0$$

eşitliği sağlanıyorsa, bu yapıya *normaldir* denir. Normal değme metrik manifoldlara *Sasakian manifold* denir [13].

Teorem 2.2.3: Bir hemen hemen değme metrik manifoldun Sasakian olması için gerek ve yeter şart

$$(\nabla_X \varphi)Y = g(X,Y)\xi - \eta(Y)X$$

olmasıdır [13].

2.3 Frenet Eğrileri

Tanım 2.3.1: (M,g) m-boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\gamma : I \to M$ birim hızlı bir eğri olsun. Eğer γ eğrisi üzerinde

$$\begin{aligned} E_1 &= \gamma' = T, \\ \nabla_T T &= \kappa_1 E_2, \\ \nabla_T E_2 &= -\kappa_1 E_1 + \kappa_2 E_3, \\ &\dots \\ \nabla_T E_r &= -\kappa_{r-1} E_{r-1} \end{aligned} \tag{2.2}$$

olacak şekilde $E_1, E_2, ..., E_r$ ortonormal vektör alanları varsa, γ eğrisine *oskülatör mertebesi* r *olan bir Frenet eğrisi* $(1 \le r \le m)$ denir. Buradaki $\kappa_1, ..., \kappa_{r-1}$ pozitif fonksiyonlarına γ nın *eğrilik fonksiyonları* denir [15]. Bu tanıma göre, oskülatör mertebesi r olan bir Frenet eğrisi için

$$T,\ \nabla_T T,\ \nabla_T \nabla_T T, ..., \underbrace{\nabla_T \nabla_T ... \nabla_T}_{(r-1)\text{ tane}} T \tag{2.3}$$

vektör alanları lineer bağımsız, fakat

$$T,\ \nabla_T T,\ \nabla_T \nabla_T T, ...,\ \underbrace{\nabla_T \nabla_T ... \nabla_T}_{(r-1)\text{ tane}} T,\ \underbrace{\nabla_T \nabla_T ... \nabla_T}_{r\text{ tane}} T$$

vektör alanları lineer bağımlıdır [15]. (2.3) sistemi, Gram-Schmidt yöntemiyle, (2.2) eşitliklerini sağlayan $\{E_1, E_2, ..., E_r\}$ sistemine dönüştürülür. Bu yöntemde, birim teğet vektör alanı, ilk Frenet vektör alanı olarak alınır. Yani, $E_1 = \gamma' = T$ dir. Daha sonra,

$$\overline{E_{k+1}} = \underbrace{\nabla_T \nabla_T ... \nabla_T}_{k \text{ tane}} T - \sum_{\lambda=1}^{k} g(\underbrace{\nabla_T \nabla_T ... \nabla_T}_{k \text{ tane}} T, E_\lambda) E_\lambda$$

vektör alanları, $1 \leq k \leq r-1$ için hesaplanır. Böylece,

$$E_{k+1} = \frac{\overline{E_{k+1}}}{\left\| \overline{E_{k+1}} \right\|},\ k = 1,...,r-1$$

yazıldığında, $\{E_1, E_2, ..., E_r\}$ Frenet çatı alanı elde edilmiş olur. Eğrinin $\kappa_1,...,\kappa_{r-1}$ eğrilik fonksiyonları,

$$\kappa_\lambda = g(\nabla_T E_\lambda, E_{\lambda+1}),\ \lambda = 1,...,r-1$$

eşitliğiyle bulunur. O halde, (2.2) eşitlikleri, matris formunda

$$\begin{bmatrix} \nabla_T E_1 \\ \nabla_T E_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \nabla_T E_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & \cdots & 0 & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \kappa_{r-1} \\ 0 & 0 & \cdots & -\kappa_{r-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ E_r \end{bmatrix}$$

şeklinde yeniden yazılabilir [15].

Tanım 2.3.2: Oskülatör mertebesi 1 olan Frenet eğrisine *geodezik* denir. Oskülatör mertebesi 2 olan ve pozitif sabit κ_1 eğriliğine sahip Frenet eğrilerine *çember* denir. Oskülatör mertebesi $r \geq 3$ olan bir Frenet eğrisi için $\kappa_1,...,\kappa_{r-1}$ eğrilikleri pozitif sabitler ise bu eğri *r. mertebeden helis* olarak adlandırılır. 3. mertebeden bir helise, kısaca *helis* denir [15].

Tanım 2.3.3: (M, g) bir Riemann manifoldu, $\gamma : I \to M$ Frenet çatı alanı $\{T = E_1, E_2, ..., E_r\}$ ve eğrilik fonksiyonları $\kappa_1,...,\kappa_{r-1}$ olan birim hızlı bir Frenet eğrisi olsun. Bu durumda

$$H = \kappa_1 E_2$$

şeklinde tanımlanan H vektör alanına γ eğrisinin *ortalama eğrilik vektör alanı* denir [16]. Ortalama eğrilik vektör alanının *tanjant demette Laplas'ı*

$$\Delta H = -\nabla_T \nabla_T \nabla_T T$$

şeklinde, *normal demette Laplas'ı* ise

$$\Delta^{\perp} H = -\nabla_T^{\perp} \nabla_T^{\perp} \nabla_T^{\perp} T$$

şeklinde tanımlanır [16]. Burada, ∇ ve $\nabla^{\perp}$, sırasıyla M nin teğet ve normal demetteki Levi-Civita koneksiyonudur.

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ SASAKİAN UZAY FORMLARDA LEGENDRE EĞRİLERİ ÜZERİNE

D. Blair, A. Carriazo ve P. Alegre, [5] nolu kaynakta, genelleştirilmiş Sasakian uzay formları tanıtarak bu uzay formların temel özelliklerini ele almışlardır. Ayrıca, bu çalışmalarında uzayın değme metrik manifold olma durumunu inceleyip sabit olmayan fonksiyonlara sahip genelleştirilmiş Sasakian uzay form örnekleri bulmuşlardır.

Diğer taraftan, [8] ve [9] nolu kaynaklarda, D. Fetcu ve C. Oniciuc, Sasakian uzay formlarda biharmonik Legendre eğrileri çalışmışlardır. [8] nolu kaynakta, D. Fetcu, 7-boyutlu küre üzerinde bazı biharmonik Legendre eğrileri için parametrik denklemler elde etmiştir. [9] da, C. Oniciuc ile yaptıkları ortak çalışmalarında ise, Sasakian uzay formların karakteristik vektör alanından yararlanarak biharmonik altmanifold üretmek için bir yöntem geliştirmişlerdir.

C. Özgür ve M. M. Tripathi, [18] de, α -Sasakian manifoldların Legendre eğrilerini incelemişlerdir. Bu manifoldlarda, bir Legendre eğrisinin Chen anlamında biharmonik olması için eğrilik fonksiyonunun sıfır olması gerektiğini ispatlamışlardır. Bu çalışmalarında, α -Sasakian manifoldlarda Legendre eğrilerinin $AW(k)$ -tipinden olma koşullarını da elde etmişlerdir.

Bu çalışmalardan esinlenerek, bu bölümde sabit fonksiyonlara sahip genelleştirilmiş Sasakian uzay formların biharmonik Legendre eğrileri ele alınacaktır. Bu tip eğriler için eğrilik karakterizasyonları elde edilecektir.

(M,g) ve (N,h) iki Riemann manifoldu ve $\psi:(M,g)\rightarrow(N,h)$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. ψ dönüşümünün *enerji fonksiyoneli*

$$E(\psi)=\frac{1}{2}\int_M |d\psi|^2\,\upsilon_g$$

şeklinde tanımlanır. Burada υ_g, M üzerinde bir hacim formdur. Eğer ψ dönüşümü enerji fonksiyonelinin bir kritik noktası ise *harmonik dönüşüm* adını alır [17]. ψ dönüşümünün *bienerji fonksiyoneli*

$$E_2(\psi)=\frac{1}{2}\int_M |\tau(\psi)|^2\,\upsilon_g$$

ile verilir. Burada

$$\tau(\psi)=iz\nabla d\psi$$

eşitliğiyle tanımlıdır ve ψ dönüşümünün *birinci gerilim alanı* olarak adlandırılır. Bienerji fonksiyonelinin Euler-Lagrange denklemi,

$$\tau_2(\psi)=-J^{\psi}(\tau(\psi))=-\Delta\tau(\psi)-izR^N(d\psi,\tau(\psi))d\psi=0 \qquad (3.1)$$

biharmonik dönüşüm denklemini verir [2]. Burada R^N ile N manifoldunun Riemann eğrilik tensörü ve J^{ψ} ile ψ dönüşümünün Jacobi operatörü gösterilmektedir. Her harmonik dönüşümün bir biharmonik dönüşüm olduğu açıktır. Harmonik olmayan biharmonik dönüşümlere *has biharmonik dönüşüm* diyeceğiz.

Bir başka şekilde, [3] nolu kaynakta, B. Y. Chen, Öklid uzayının bir biharmonik $M\subset\mathbb{E}^n$ altmanifoldunu, ortalama eğrilik vektör alanı H nın Laplas'ı ΔH olmak üzere, $\Delta H=0$ koşulunun sağlanması olarak tanımlamıştır. M m-boyutlu bir Riemann manifoldu, $N(c)$ de n-boyutlu sabit c kesitsel eğrilikli bir Riemann uzay formu ve $\psi:M\rightarrow N(c)$ bir izometrik immersiyon olsun. O zaman

$$\tau(\psi)=mH$$

ve

$$\tau_2(\psi) = -m\Delta H + cm^2 H$$

dir. Böylece ψ nin biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\Delta H = cmH$$

olmasıdır. Yukarıdaki eşitlikte $c = 0$ yazılırsa Chen'in tanımını tekrar elde etmiş oluruz.

3.1 Genelleştirilmiş Sasakian Uzay Formlar

[4] nolu kaynakta, J. A. Oubiña trans-Sasakian manifoldları tanıtmıştır. Bir (M,φ,ξ,η,g) hemen hemen değme metrik manifoldu üzerindeki her X,Y vektör alanı için

$$(\nabla_X \varphi)Y = \alpha[g(X,Y)\xi - \eta(Y)X] + \beta[g(\varphi X,Y)\xi - \eta(Y)\varphi X] \qquad (3.2)$$

olacak şekilde, M üzerinde α ve β fonksiyonları varsa, (M,φ,ξ,η,g) manifolduna bir *trans-Sasakian manifold* denir. (3.2) eşitliği kullanılarak

$$\nabla_X \xi = -\alpha\varphi X + \beta[X - \eta(X)\xi] \qquad (3.3)$$

olduğu kolayca gösterilebilir. (3.3) eşitliği gereği, eğer $\beta = 0$ ise M ye *α-Sasakian manifold*; benzer şekilde $\alpha = 0$ ise *β-Kenmotsu manifold* denir. Sasakian manifoldlar $\alpha = 1$ olmak üzere α -Sasakian manifoldlara, Kenmotsu manifoldlar da $\beta = 1$ olmak üzere β -Kenmotsu manifoldlara birer örnektir. Bir başka trans-Sasakian manifold çeşidi ise $\alpha = \beta = 0$ alındığında elde edilen *kosimplektik manifoldlardır*. (3.3) eşitliği gereği, bir kosimplektik manifold için

$$\nabla_X \xi = 0$$

dır. Başka bir deyişle, ξ vektör alanı bir kosimplektik manifold için *Killing vektör alanıdır* [19]. Trans-Sasakian manifoldlar için aşağıdaki önerme geçerlidir:

Önerme 3.1.1: Boyutu 5 veya daha fazla olan bir trans-Sasakian manifold ya $\alpha-$Sasakian, ya $\beta-$Kenmotsu, ya da kosimplektik manifolddur [20].

(M,φ,ξ,η,g) bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. M manifoldunun bir $p\in M$ noktasındaki φ*-kesiti*, ξ_p ye dik bir birim X_p vektörü ve φX_p tarafından gerilen $\pi\subseteq T_pM$ kesitidir. π nin $\varphi-$*kesitsel eğriliği*,

$$K(X\wedge\varphi X)=R(X,\varphi X,\varphi X,X)$$

ile tanımlanır. φ-kesitsel eğriliği sabit olan bir Sasakian manifolda *Sasakian uzay form*; benzer şekilde φ -kesitsel eğriliği sabit olan bir Kenmotsu manifolda *Kenmotsu uzay form;* φ-kesitsel eğriliği sabit olan bir kosimplektik manifolda ise *kosimplektik uzay form* denir [13].

Bir (M,φ,ξ,η,g) hemen hemen değme metrik manifoldu verildiğinde, M üzerinde her X,Y,Z vektör alanı için

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z = {} & f_1\{g(Y,Z)X-g(X,Z)Y\} \\ & +f_2\{g(X,\varphi Z)\varphi Y-g(Y,\varphi Z)\varphi X+2g(X,\varphi Y)\varphi Z\} \\ & +f_3\{\eta(X)\eta(Z)Y-\eta(Y)\eta(Z)X+g(X,Z)\eta(Y)\xi-g(Y,Z)\eta(X)\xi\} \end{aligned} \tag{3.4}$$

olacak şekilde f_1, f_2 ve f_3 fonksiyonları varsa, M manifolduna *genelleştirilmiş Sasakian uzay form* denir [5]. Burada R ile M nin eğrilik tensör alanı gösterilmektedir. Eğer M bir Sasakian uzay form ise $f_1=\frac{c+3}{4}$, $f_2=f_3=\frac{c-1}{4}$; Kenmotsu uzay form ise $f_1=\frac{c-3}{4}$, $f_2=f_3=\frac{c+1}{4}$ ve kosimplektik uzay form ise $f_1=f_2=f_3=\frac{c}{4}$ dir. Sonraki kısımlarda kullanılacak olan önerme ve teoremler aşağıda verilmiştir:

Önerme 3.1.2: $M(f_1,f_2,f_3)$ bir α -Sasakian genelleştirilmiş Sasakian uzay form olsun. Bu durumda α , ξ nin doğrultusundan bağımsızdır ve

$$f_1-f_3=\alpha^2$$

eşitliği geçerlidir. Ek olarak, M bağlantılı ise, bu durumda α bir sabittir [6].

Teorem 3.1.3: $M(f_1, f_2, f_3)$ bağlantılı bir α-Sasakian genelleştirilmiş Sasakian manifold ve M manifoldunun boyutu en az 5 olsun. Bu durumda f_1, f_2 ve f_3 fonksiyonları sabittir ve aralarındaki ilişki aşağıdaki şekildedir [6]:

i) Eğer $\alpha = 0$ ise, bu durumda $f_1 = f_2 = f_3$ dır ve M sabit φ -kesitsel eğrilikli bir kosimplektik manifolddur.

ii) Eğer $\alpha \neq 0$ ise, bu durumda $f_1 - \alpha^2 = f_2 = f_3$ dir.

Önerme 3.1.4: $M(f_1, f_2, f_3)$ bir β -Kenmotsu genelleştirilmiş Sasakian uzay form olsun. Bu durumda β , sadece ξ nin doğrultusuna bağlıdır ve f_1 , f_3 fonksiyonları

$$f_1 - f_3 + \xi(\beta) + \beta^2 = 0$$

eşitliğini sağlar [6].

Teorem 3.1.5: $M(f_1, f_2, f_3)$ bir β -Kenmotsu genelleştirilmiş Sasakian uzay form ve M manifoldunun boyutu 5 veya daha büyük olsun. Bu durumda, f_1, f_2 ve f_3 sadece ξ nin doğrultusuna bağlıdır ve aşağıdaki denklemler geçerlidir [5]:

$$\xi(f_1) + 2\beta f_3 = 0,$$

$$\xi(f_2) + 2\beta f_2 = 0.$$

Teorem 3.1.6: M 3-boyutlu bir (α, β) trans-Sasakian manifold, α ve β sadece ξ nin doğrultusuna bağlı olsun. Bu durumda M bir genelleştirilmiş Sasakian uzay formdur ve

$$f_1 = 3\tau - 2\left(\alpha^2 - \xi(\beta) - \beta^2\right),\ f_2 = 0,\ f_3 = 3\tau - 3\left(\alpha^2 - \xi(\beta) - \beta^2\right)$$

eşitlikleri sağlanır. Burada τ ile M nin skaler eğriliği gösterilmektedir [6].

(M,φ,ξ,η,g) bir hemen hemen değme metrik manifold olmak üzere M nin *değme dağılımı*

$$\{X\in\chi(M):\ \eta(X)=0\}$$

olarak tanımlanır. Değme dağılımının integral eğrilerine *Legendre eğrisi* denir [13].

3.2 Genelleştirilmiş Sasakian Uzay Formlarında Legendre Eğrileri ve Biharmonik Olma Koşulları

Şimdi, $\left(M^{2n+1},\ f_1,\ f_2,\ f_3\right)$ bir genelleştirilmiş Sasakian uzay form ve $\gamma: I\rightarrow M$ oskülatör mertebesi r olan bir Legendre eğrisi olsun. (2.2) ve (3.4) eşitlikleri kullanılarak

$$\nabla_T\nabla_T T=-\kappa_1^2E_1+\kappa_1'E_2+\kappa_1\kappa_2E_3,$$

$$\begin{aligned}\nabla_T\nabla_T\nabla_T T &= -3\kappa_1\kappa_1'E_1+\left(\kappa_1''-\kappa_1^3-\kappa_1\kappa_2^2\right)E_2\\ &\quad+\left(2\kappa_1'\kappa_2+\kappa_1\kappa_2'\right)E_3+\kappa_1\kappa_2\kappa_3E_4,\end{aligned}$$

$$R(T,\nabla_T T)T=-\kappa_1 f_1E_2-3\kappa_1 f_2 g(\varphi T,E_2)\varphi T+f_3\kappa_1\eta(E_2)\xi$$

elde edilir. Böylece, (3.1) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\tau_2(\gamma) &= \nabla_T\nabla_T\nabla_T T-R(T,\nabla_T T)T\\ &= -3\kappa_1\kappa_1'E_1\\ &\quad+\left(\kappa_1''-\kappa_1^3-\kappa_1\kappa_2^2+\kappa_1 f_1\right)E_2\\ &\quad+(2\kappa_1'\kappa_2+\kappa_1\kappa_2')E_3+\kappa_1\kappa_2\kappa_3E_4\\ &\quad+3\kappa_1 f_2 g(\varphi T,E_2)\varphi T-f_3\kappa_1\eta(E_2)\xi\end{aligned}\tag{3.5}$$

olarak hesaplanır. Burada $\{T=E_1,E_2,...,E_r\}$, γ eğrisinin Frenet çatı alanıdır.

$m = \min\{r,4\}$ olsun. (3.5) eşitliği gereği, γ eğrisinin has biharmonik olması için gerek ve yeter şart

(1) $f_2 = 0$ veya $\varphi T \perp E_2$ veya $\varphi T \in span\{E_2,...,E_m\}$ olması; ve

(2) $f_3 = 0$ veya $E_2 \perp \xi$ veya $\xi \in span\{E_2,...,E_m\}$ olması; ve

(3) $g(\tau_2(\gamma), E_i) = 0$, $\forall\ i = 1,...,m$ olmasıdır.

Buradan, aşağıdaki ana teoremi verebiliriz:

Teorem 3.2.1: $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ bir genelleştirilmiş Sasakian uzay form, $\gamma : I \to M$ oskülatör mertebesi r olan bir Legendre eğrisi ve $m = \min\{r,4\}$ olsun. Bu durumda, γ eğrisinin has biharmonik olması için gerek ve yeter şart [21]

(1) $f_2 = 0$ veya $\varphi T \perp E_2$ veya $\varphi T \in span\{E_2,...,E_m\}$ olması; ve

(2) $f_3 = 0$ veya $\xi \perp E_2$ veya $\xi \in span\{E_2,...,E_m\}$ olması; ve

(3) $\kappa_m = 0$ yazılarak aşağıdaki denklemlerin ilk m tanesinin sağlanmasıdır:

$$\kappa_1 = \text{sabit} > 0,$$

$$\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = f_1 + 3f_2\left[g(\varphi T, E_2)\right]^2 - f_3\left[\eta(E_2)\right]^2,$$

$$\kappa_2' + 3f_2 g(\varphi T, E_2) g(\varphi T, E_3) - f_3 \eta(E_2)\eta(E_3) = 0,$$

$$\kappa_2\kappa_3 + 3f_2 g(\varphi T, E_2) g(\varphi T, E_4) - f_3 \eta(E_2)\eta(E_4) = 0.$$

Şimdi, Teorem 3.2.1 i durumlara göre inceleyeceğiz.

Durum 1. $f_2 = f_3 = 0$ olması.

Eğer $f_2 = f_3 = 0$ ise, bu durumda M^{2n+1} sabit eğrilikli bir Riemann manifolddur. Bu uzaylardaki biharmonik Legendre eğrileri [7] nolu kaynakta çalışılmıştır. Şu sonuç verilmiştir:

Teorem 3.2.2: $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ bir genelleştirilmiş Sasakian uzay form, $\gamma : I \to M$ oskülatör mertebesi r olan bir Legendre eğrisi ve $f_2 = f_3 = 0$ olsun. Bu durumda, γ eğrisinin has biharmonik olması için gerek ve yeter şart $f_1 > 0$ bir sabit olmak üzere γ nın

(1) $\kappa_1 = \sqrt{f_1}$ olan bir Legendre çember olması; veya

(2) $\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = f_1$ olan bir Legendre helis olmasıdır.

Eğer f_1 bir pozitif sabit değilse, böyle bir has biharmonik Legendre eğrisi yoktur [7].

Teorem 3.2.2 den görüldüğü üzere, sabit eğrilikli Riemann uzayında oskülatör mertebesi $r > 3$ olan bir has biharmonik Legendre eğrisi elde edilemez.

Durum 2. $f_2 = 0$, $f_3 \neq 0$ ve $\xi \perp E_2$ olması.

Bu durumda, $\eta(E_2) = g(E_2,\xi) = 0$ dır. Teorem 3.2.1 gereği

$$\begin{gathered} \kappa_1 = \text{sabit} > 0, \\ \kappa_1^2 + \kappa_2^2 = f_1, \\ \kappa_2' = 0, \\ \kappa_2\kappa_3 = 0 \end{gathered} \tag{3.6}$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece sıradaki teoremi ifade edebiliriz:

Teorem 3.2.3: $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ bir genelleştirilmiş Sasakian uzay form, $\gamma : I \to M$ oskülatör mertebesi r olan bir Legendre eğrisi, $f_2 = 0$, $f_3 \neq 0$ ve $\xi \perp E_2$ olsun. Bu durumda, γ eğrisinin has biharmonik olması için gerek ve yeter şart $f_1 > 0$ bir sabit olmak üzere γ nın

(1) $\kappa_1 = \sqrt{f_1}$ olan bir Legendre çember olması; veya

(2) $\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = f_1$ olan bir Legendre helis olmasıdır.

Eğer f_1 bir pozitif sabit değilse, böyle bir has biharmonik Legendre eğrisi yoktur [21].

İspat: Gereklilik: γ eğrisi has biharmonik olsun. Bu durumda (3.6) eşitlikleri geçerlidir. Bu eşitlikler gereği $r > 3$ olamaz. Eğer $r = 2$ ise, $f_1 > 0$ bir sabit olmak üzere, γ eğrisi $\kappa_1 = \sqrt{f_1}$ olan bir çemberdir. Son olarak, $r = 3$ ise, κ_2 sıfırdan farklı bir sabittir. Böylece, $f_1 > 0$ bir sabit olmak üzere, γ eğrisi $\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = f_1$ olan bir Legendre helistir.

Yeterlilik: γ eğrisi (1) veya (2) ile verilen eğrilerden biri olsun. Buradan, (3.6) eşitliklerinin sağlanacağı açıktır. O halde, Teorem 3.2.1 gereği γ eğrisi has biharmoniktir. ■

Durum 3. $f_2 = 0$, $f_3 \neq 0$, $\xi \in span\{E_2, ..., E_m\}$ ve $\eta(E_2) \neq 0$ olması.

$i)$ $m = \min\{r, 4\} = 4$, yani $r \geq 4$ olsun. $\xi \in span\{E_2, E_3, E_4\}$ olduğundan ortonormal açılım gereği

$$\xi = \cos u_1 E_2 + \sin u_1 \cos u_2 E_3 + \sin u_1 \sin u_2 E_4 \tag{3.7}$$

yazabiliriz. Burada, $u_1 : I \to \mathbb{R}$, ξ ve E_2 arasındaki açı fonksiyonu; $u_2 : I \to \mathbb{R}$ ise ξ vektör alanının $span\{E_3, E_4\}$ üzerine dik izdüşümü ile E_3 arasındaki açı fonksiyonudur. O halde, (3.7) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \eta(E_2) &= \cos u_1, \\ \eta(E_3) &= \sin u_1 \cos u_2, \\ \eta(E_3) &= \sin u_1 \sin u_2 \end{aligned} \tag{3.8}$$

dir.

$ii)$ $r = 3$ olsun. Bu durumda E_4 bulunmadığından, $\xi \in span\{E_2, E_3\}$ tür. Ortonormal açılım gereği

$$\xi = \cos u_1 E_2 + \sin u_1 E_3 \tag{3.9}$$

dir. Burada, $u_1 : I \to \mathbb{R}$, ξ ve E_2 arasındaki açı fonksiyonudur. (3.9) eşitliğini, (3.8) eşitliğinde $u_2 = 0$ alarak da elde edebiliriz.

iii) Son olarak, $r = 2$ olsun. Bu durumda, $\xi \in span\{E_2\}$, yani $\xi \parallel E_2$ dir. Böylece

$$\xi = \pm E_2 \tag{3.10}$$

yazabiliriz. (3.10) eşitliği, (3.7) eşitliğinde $u_1 = 0, \pi$ ve $u_2 = 0$ alınarak da bulunabilir.

Teorem 3.2.1 ile (3.7), (3.9) ve (3.10) eşitliklerini kullanarak aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz:

Teorem 3.2.4: $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir genelleştirilmiş Sasakian uzay form, $\gamma : I \to M$ oskülatör mertebesi r olan bir Legendre eğrisi, $f_2 = 0$, $f_3 \neq 0$, $\eta(E_2) \neq 0$ ve $\xi \in span\{E_2, ..., E_m\}$ olsun. Eğer $r \geq 4$ ise, γ eğrisinin has biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{gathered}
\kappa_1 = \text{sabit} > 0, \\
\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = f_1 - f_3 \cos^2 u_1, \\
\kappa_2' - f_3 \cos u_1 \sin u_1 \cos u_2 = 0, \\
\kappa_2 \kappa_3 - f_3 \cos u_1 \sin u_1 \sin u_2 = 0
\end{gathered}$$

olmasıdır. Eğer $r = 3$ ise, $u_2 = 0$ alınarak yukarıdaki denklemlerin ilk üçü sağlanmalıdır. Eğer $r = 2$ ise, $u_1 = 0, \pi$ alınarak yukarıdaki denklemlerin ilk ikisi sağlanmalıdır [21].

$(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ bir trans-Sasakian genelleştirilmiş Sasakian uzay formu ve $\gamma : I \to M$ oskülatör mertebesi r olan bir Legendre eğrisi olsun. γ Legendre eğrisi olduğundan $\eta(T) = 0$ dır. (3.3) eşitliği gereği

$$\nabla_T \xi = -\alpha\varphi T + \beta T \tag{3.11}$$

yazılabilir. (3.11) eşitliğinden

$$g(\nabla_T \xi, T) = \beta \tag{3.12}$$

elde edilir. $\eta(T) = 0$ ifadesi türevlenerek (2.2) ve (3.12) eşitlikleri kullanılırsa

$$\kappa_1 \eta(E_2) = -\beta \tag{3.13}$$

bulunur.

Sonuç 3.2.5: $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ bir trans-Sasakian genelleştirilmiş Sasakian uzay form, $\gamma : I \to M$ oskülatör mertebesi r olan bir Legendre eğrisi, $f_1 = \text{sabit}$, $f_2 = 0$, f_3 ve β sıfırdan farklı sabitler, $\alpha = \text{sabit}$, $\eta(E_2) \neq 0$, $\xi \in span\{E_2,...,E_m\}$ olsun. Bu durumda, γ eğrisinin has biharmonik olması için gerek ve yeter şart γ nın $\kappa_1 = \pm\beta > 0$, $\kappa_2 = \pm\alpha = \sqrt{f_1 - f_3 - \beta^2}$ eğriliklerine sahip bir Legendre helis olmasıdır. Burada, $\xi \parallel E_2$, $\varphi T \parallel E_3$, $boyM = 3$ ve $f_1 - f_3 - \beta^2$ bir pozitif sabit olmak zorundadır [21].

İspat: M bir trans-Sasakian genelleştirilmiş Sasakian manifold olduğundan, (3.3) ve (2.2) eşitliklerini kullanarak

$$\nabla_T \eta(E_1) = \kappa_1 \eta(E_2) + \beta = 0, \tag{3.14}$$

$$\nabla_T \eta(E_2) = \kappa_2 \eta(E_3) - \alpha g(\varphi T, E_2), \tag{3.15}$$

$$\nabla_T \eta(E_3) = -\kappa_2 \eta(E_2) + \kappa_3 \eta(E_4) - \alpha g(\varphi T, E_3),$$

$$\nabla_T \eta(E_4) = -\kappa_3 \eta(E_3) + \kappa_4 \eta(E_5) - \alpha g(\varphi T, E_4)$$

yazabiliriz.

Gereklilik: γ eğrisi has biharmonik olsun.

(1) Eğer $r=2$ ise, Teorem 3.2.1 den,

$$\kappa_1 = \text{sabit} > 0,$$

$$\kappa_1^2 = f_1 - f_3\left[\eta(E_2)\right]^2$$

ve $\xi \in span\{E_2\}$, yani $\xi \parallel E_2$ dir. Böylece $\eta(E_2) = \pm 1$ elde ederiz. O halde, γ eğrisi $\kappa_1 = \sqrt{f_1 - f_3}$ olan bir çemberdir. Burada, $f_1 - f_3 > 0$ bir sabittir. $\xi = \pm E_2$ ifadesini türevlersek, $\alpha = 0$ ve $\kappa_1 = \pm\beta$ buluruz. $\alpha = 0$ olduğundan, M bir β -Kenmotsu genelleştirilmiş Sasakian uzay formdur. Önerme 3.1.4 gereği

$$f_1 - f_3 + \beta^2 = 0$$

dir. Bu, $f_1 - f_3 > 0$ olmasıyla çelişir.

(2) Eğer $r=3$ ise, Teorem 3.2.1 gereği

$$\kappa_1 = \text{sabit} > 0, \tag{3.16}$$

$$\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = f_1 - f_3\left[\eta(E_2)\right]^2, \tag{3.17}$$

$$\kappa_2' - f_3\eta(E_2)\eta(E_3) = 0 \tag{3.18}$$

ve $\xi \in span\{E_2, E_3\}$ yazılabilir. (3.17) eşitliğinin türevinde (3.15) ve (3.18) ifadeleri yerine yazılırsa

$$2\kappa_2\eta(E_3) = \alpha g(\varphi T, E_2) \tag{3.19}$$

elde edilir. β sıfırdan farklı bir sabit olduğundan, (3.14) gereği $\eta(E_2)$ sabittir. O halde, (3.15) eşitliğinden

$$\kappa_2\eta(E_3) = \alpha g(\varphi T, E_2) \tag{3.20}$$

dır. (3.19) ve (3.20) birlikte düşünüldüğünde, $\eta(E_3) = 0$ bulunur. Böylece $\xi \parallel E_2$ dir. Sonuç olarak, (3.14), (3.16), (3.17) ve (3.18) eşitliklerinden, $\kappa_1 = \pm\beta > 0$, $\kappa_2 = \pm\alpha = \sqrt{f_1 - f_3 - \beta^2}$, $\xi \parallel E_2$ ve $\varphi T \parallel E_3$ bulunur. Burada $f_1 - f_3 - \beta^2$ bir pozitif sabittir. $\alpha \neq 0$ olduğundan, Önerme 3.1.1 gereği, $boyM = 3$ tür.

(3) Eğer $r \geq 4$ ise, bu durumda $boyM \geq 5$ tir. β sıfırdan farklı bir sabit olduğundan, Önerme 3.1.1 gereği, $\alpha = 0$ dır. Böylece M bir β -Kenmotsu genelleştirilmiş Sasakian uzay form, β sıfırdan farklı bir sabit ve $boyM \geq 5$ elde ettik. O halde Teorem 3.1.5 yardımıyla $f_3 = 0$ çelişkisine ulaşırız.

Yeterlilik: γ eğrisi, Teoremde ifade edilen koşulları sağlayacak şekilde bir Legendre helis olsun. Teorem 3.2.1 deki eşitliklerin ilk üçünün sağlandığı açıktır. Yani, γ eğrisi has biharmoniktir. ■

Durum 4. $f_2 \neq 0$, $f_3 = 0$ ve $\varphi T \perp E_2$ olması.

Bu durumda, $g(\varphi T, E_2) = 0$ dır. Teorem 3.2.1 yardımıyla aşağıdaki teoremi elde ederiz:

Teorem 3.2.6: $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir genelleştirilmiş Sasakian uzay form, $\gamma : I \to M$ oskülatör mertebesi r olan bir Legendre eğrisi, $f_2 \neq 0$, $f_3 = 0$ ve $\varphi T \perp E_2$ olsun. Bu durumda, γ eğrisinin has biharmonik olması için gerek ve yeter şart $f_1 > 0$ bir sabit olmak üzere γ nın

(1) $\kappa_1 = \sqrt{f_1}$ olan bir Legendre çember olması; veya

(2) $\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = f_1$ olan bir Legendre helis olmasıdır.

Eğer f_1 bir pozitif sabit değilse, böyle bir has biharmonik Legendre eğrisi yoktur [21].

İspat: Teoremin ispatı, Teorem 3.2.3 ün ispatına benzer şekildedir. ■

Durum 5. $f_2 \neq 0$, $f_3 = 0$, $\varphi T \in span\{E_2, E_3, E_4\}$ ve $g(\varphi T, E_2) \neq 0$ olması.

$i)$ $m = \min\{r, 4\} = 4$, yani $r \geq 4$ olsun. $\varphi T \in span\{E_2, E_3, E_4\}$ olduğundan

$$\varphi T = \cos\omega_1 E_2 + \sin\omega_1 \cos\omega_2 E_3 + \sin\omega_1 \sin\omega_2 E_4 \tag{3.21}$$

yazabiliriz. Burada, $\omega_1 : I \to \mathbb{R}$ φT ve E_2 arasındaki açı fonksiyonu; $\omega_2 : I \to \mathbb{R}$ ise φT nin $\{E_3, E_4\}$ üzerine dik izdüşümü ile E_3 arasındaki açı fonksiyonudur. (3.21) eşitliğinden

$$\begin{aligned} g(\varphi T, E_2) &= \cos\omega_1, \\ g(\varphi T, E_3) &= \sin\omega_1 \cos\omega_2, \\ g(\varphi T, E_4) &= \sin\omega_1 \sin\omega_2 \end{aligned} \tag{3.22}$$

dir.

$ii)$ $r = 3$ olsun. Bu durumda, E_4 bulunmadığından, $\varphi T \in span\{E_2, E_3\}$ tür. Böylece

$$\varphi T = \cos\omega_1 E_2 + \sin\omega_1 E_3 \tag{3.23}$$

elde ederiz. Burada, $\omega_1 : I \to \mathbb{R}$, φT ve E_2 arasındaki açı fonksiyonudur. (3.23) eşitliği, (3.21) eşitliğinde $\omega_2 = 0$ yazılarak da bulunabilir.

$iii)$ Son olarak, $r = 2$ olsun. O halde, $\varphi T \in span\{E_2\}$ olduğundan $\varphi T \parallel E_2$, yani

$$\varphi T = \pm E_2 \tag{3.24}$$

dir. (3.24) eşitliğini, (3.21) de $\omega_1 = 0, \pi$ ve $\omega_2 = 0$ alarak da hesaplayabiliriz.

Böylece, (3.21), (3.23) ve (3.24) eşitlikleri yardımıyla aşağıdaki teoremi elde ederiz:

Teorem 3.2.7: $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ bir genelleştirilmiş Sasakian uzay form, $\gamma : I \to M$ oskülatör mertebesi r olan bir Legendre eğrisi, $f_2 \neq 0$, $f_3 = 0$, $\varphi T \in \operatorname{span}\{E_2, E_3, E_4\}$ ve $g(\varphi T, E_2) \neq 0$ olsun. Eğer $r \geq 4$ ise, γ eğrisinin has biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{gathered}
\kappa_1 = \text{sabit} > 0, \\
\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = f_1 + 3 f_2 \cos^2\omega_1, \\
\kappa_2' + 3 f_2 \cos\omega_1 \sin\omega_1 \cos\omega_2 = 0, \\
\kappa_2\kappa_3 + 3 f_2 \cos\omega_1 \sin\omega_1 \sin\omega_2 = 0
\end{gathered}$$

olmasıdır. Eğer $r = 3$ ise, $\omega_2 = 0$ alınarak yukarıdaki denklemlerin ilk üçü sağlanmalıdır. Eğer $r = 2$ ise, $\omega_1 = 0, \pi$ alınarak yukarıdaki denklemlerin ilk ikisi sağlanmalıdır [21].

Sonuç 3.2.8: $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ bağlantılı bir trans-Sasakian genelleştirilmiş Sasakian uzay form, $\gamma : I \to M$ oskülatör mertebesi r olan bir Legendre eğrisi, $f_1 = \text{sabit}$, f_2 sıfırdan farklı bir sabit, $f_3 = 0$, $\varphi T \in \operatorname{span}\{E_2, ..., E_m\}$, $g(\varphi T, E_2) \neq 0$, α ve β sabit olsun. Bu durumda, γ eğrisinin has biharmonik olması için gerek ve yeter şart $r \geq 4$ ve

$$\kappa_1 = \frac{-\beta}{\eta(E_2)} = \text{sabit} > 0,$$

$$\kappa_2 = \sqrt{\delta} > 0,$$

$$\kappa_3 = \frac{-3g(\varphi T, E_2)g(\varphi T, E_4)}{\sqrt{\delta}} > 0,$$

$$\kappa_4 = \frac{-\beta g(\varphi E_2, E_5)}{\eta(E_2) g(\varphi T, E_4)} > 0, \ (\text{eğer } r \geq 5 \text{ ise})$$

olmasıdır. Burada,

$$\delta = f_1 + 3f_2\left[g(\varphi T, E_2)\right]^2 - \frac{\beta^2}{\left[\eta(E_2)\right]^2} > 0$$

bir sabit, $g(\varphi T, E_3) = 0$, $\alpha = 0$, $g(\varphi T, E_2) \neq 0$ ve $g(\varphi T, E_4) \neq 0$ sabitler, $\beta \neq 0$ ve $\eta(E_2) \neq 0$ dır [21].

İspat: M bir trans-Sasakian manifold olduğundan

$$\nabla_T \varphi T = \alpha\xi + \kappa_1 \varphi E_2, \tag{3.25}$$

$$\nabla_T g(\varphi T, E_2) = \alpha\eta(E_2) + \kappa_2 g(\varphi T, E_3), \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned} \nabla_T g(\varphi T, E_3) = {} & \alpha\eta(E_3) + \kappa_1 g(\varphi E_2, E_3) \\ & -\kappa_2 g(\varphi T, E_2) + \kappa_3 g(\varphi T, E_4), \end{aligned} \tag{3.27}$$

$$\nabla_T g(\varphi T, E_4) = \alpha\eta(E_4) + \kappa_1 g(\varphi E_2, E_4) - \kappa_3 g(\varphi T, E_3)$$

eşitlikleri kolayca hesaplanabilir.

Gereklilik: γ eğrisi has biharmonik olsun.

(1) Eğer $r = 2$ ise, Teorem 3.2.1 den

$$\kappa_1 = \text{sabit} > 0, \tag{3.28}$$

$$\kappa_1^2 = f_1 + 3f_2\left[g(\varphi T, E_2)\right]^2 \tag{3.29}$$

ve $\varphi T \in span\left\{E_2\right\}$, yani $\varphi T \parallel E_2$ yazabiliriz. $\varphi T = \pm E_2$ ifadesinin türevinde Frenet denklemleri ve (3.25) eşitliği kullanılırsa

$$\alpha\xi + \kappa_1 \varphi E_2 = \mp\kappa_1 T$$

elde edilir. O halde $\alpha = 0$ bulunur. Ayrıca, (3.14) eşitliğinden $\beta = 0$ buluruz. Böylece M kosimplektik olduğundan, $f_2 = f_3$ tür. Bu bir çelişkidir.

(2) Eğer $r = 3$ ise, Teorem 3.2.1 gereği

$$\kappa_1 = \text{sabit} > 0, \tag{3.30}$$

$$\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = f_1 + 3f_2\left[g(\varphi T, E_2)\right]^2, \tag{3.31}$$

$$\kappa_2' + 3f_2 g(\varphi T, E_2) g(\varphi T, E_3) = 0 \tag{3.32}$$

ve $\varphi T \in span\{E_2, E_3\}$ tür. (3.31) ifadesinin türevini alıp (3.26) ve (3.32) eşitliklerini kullanırsak

$$-2\kappa_2 g(\varphi T, E_3) = \alpha\eta(E_2) \tag{3.33}$$

buluruz. $\varphi T \in span\{E_2, E_3\}$ olduğundan

$$\varphi T = g(\varphi T, E_2)E_2 + g(\varphi T, E_3)E_3 \tag{3.34}$$

dir. Kolayca $g(\varphi E_2, E_3) = 0$ buluruz. Şimdi, (3.34) eşitliğini türevleyip, (2.2), (3.25), (3.26) ve (3.27) eşitliklerini kullanırsak

$$\alpha\xi + \kappa_1\varphi E_2 = -\kappa_1 g(\varphi T, E_2)T + \alpha\eta(E_2)E_2 + \alpha\eta(E_3)E_3 \tag{3.35}$$

elde ederiz. $\alpha = 0$ varsayalım. (3.33) eşitliği gereği $g(\varphi T, E_3) = 0$, yani $\varphi T = \pm E_2$ dir. O halde (3.27) eşitliğinden $\kappa_2 = 0$ bulunur. Bu bir çelişkidir. Yani $\alpha \neq 0$ dır. Bu durumda (3.35) eşitliği ξ ile çarpılırsa $[\eta(E_2)]^2 + [\eta(E_3)]^2 = 1$ elde edilir. Bu da $\xi \in span\{E_2, E_3\}$ demektir. Yine (3.35) eşitliğinden $\varphi T = \pm E_2$ buluruz. O halde $\xi = \pm E_3$ tür. (3.14) eşitliği gereği $\beta = 0$ buluruz. Sonuçta, M bağlantılı bir α-Sasakian genelleştirilmiş Sasakian uzay formdur. $boyM \geq 5$ ise, Teorem 3.1.3 den $f_2 = f_3$ çelişkisine ulaşırız. Eğer $boyM = 3$ ise, Teorem 3.1.6 gereği $f_2 = 0$ çelişkisi çıkar.

(3) $r \geq 4$ olsun. Bu durumda, Teorem 3.2.1 den

$$\kappa_1 = \text{sabit} > 0, \tag{3.36}$$

$$\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = f_1 + 3f_2[g(\varphi T, E_2)]^2, \tag{3.37}$$

$$\kappa_2' + 3f_2 g(\varphi T, E_2) g(\varphi T, E_3) = 0, \tag{3.38}$$

$$\kappa_2\kappa_3 + 3f_2 g(\varphi T, E_2) g(\varphi T, E_4) = 0 \tag{3.39}$$

ve $\varphi T \in span\{E_2, E_3, E_4\}$ dir. (3.37) ifadesini türevlersek, (3.26) ve (3.38) yardımıyla

$$-2\kappa_2 g(\varphi T, E_3) = \alpha\eta(E_2) \tag{3.40}$$

yazabiliriz. $g(\varphi T, E_3) \neq 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $\alpha \neq 0$ ve $\eta(E_2) \neq 0$ dır. $boyM \geq 5$ olduğunundan $\beta = 0$ elde ederiz. Bu, $\eta(E_2) \neq 0$ olmasıyla çelişir. O halde varsayımımız yanlıştır. $g(\varphi T, E_3) = 0$ dır. Yani, $\varphi T \in span\{E_2, E_4\}$ tür. (3.40) eşitliğinden $\alpha = 0$ buluruz. (3.26) gereği, $g(\varphi T, E_2) \neq 0$ bir sabittir. $\varphi T \in \mathrm{span}\{E_2, E_3, E_4\}$ olduğundan $g(\varphi T, E_4)$ de sıfırdan farklı bir sabittir. (3.14), (3.36), (3.37), (3.38) ve (3.39) eşitliklerini kullanarak Teoremdeki eşitlikleri elde ederiz. Eğer $r \geq 5$ ise, $g(\varphi T, E_5) = 0$ ifadesinin türevini ve (3.25) eşitliğini kullanarak

$$\kappa_4 = \frac{-\beta g(\varphi E_2, E_5)}{\eta(E_2) g(\varphi T, E_4)}$$

buluruz.

Yeterlilik: γ eğrisi, Teoremde verilen eşitlikleri sağlayan bir Legendre eğrisi olsun. Teorem 3.2.1 in sağlandığı, yani, $\tau_2(\gamma) = 0$ olduğu kolayca gösterilebilir. O halde γ has biharmoniktir. ■

Durum 6. $f_2 \neq 0$, $f_3 \neq 0$, $\varphi T \perp E_2$ ve $\xi \perp E_2$ olması.

Bu durumda, $g(\varphi T, E_2) = 0$ ve $\eta(E_2) = 0$ dır. Teorem 3.2.1 kullanılarak, aşağıdaki teorem ifade edilebilir:

Teorem 3.2.9: $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir genelleştirilmiş Sasakian uzay form, $\gamma : I \to M$ oskülatör mertebesi r olan bir Legendre eğrisi, $f_2 \neq 0$, $f_3 \neq 0$, $\varphi T \perp E_2$ ve $\xi \perp E_2$ olsun. γ eğrisinin has biharmonik olması için gerek ve yeter şart $f_1 > 0$ bir sabit olmak üzere γ nın

(1) $\kappa_1 = \sqrt{f_1}$ olan bir Legendre çember olması; veya

(2) $\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = f_1$ olan bir Legendre helis olmasıdır.

Eğer f_1 bir pozitif sabit değilse, böyle bir has biharmonik Legendre eğrisi yoktur [21].

İspat: Teoremin ispatı, Teorem 3.2.3 ün ispatı gibi yapılır. ■

Durum 7. $f_2 \neq 0,\quad f_3 \neq 0,\quad \varphi T \perp E_2,\quad \xi \in span\left\{E_2,...,E_m\right\}$ ve $\eta(E_2) \neq 0$ olması.

Bu durumda, $g(\varphi T, E_2) = 0$ dir. Teorem 3.2.1 ile birlikte (3.7) ve (3.8) eşitliklerini kullanarak aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 3.2.10: $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ bir genelleştirilmiş Sasakian uzay form, $\gamma : I \to M$ oskülatör mertebesi r olan bir Legendre eğrisi, $f_2 \neq 0,\quad f_3 \neq 0,$ $\varphi T \perp E_2,\quad \xi \in span\left\{E_2,...,E_m\right\}$ ve $\eta(E_2) \neq 0$ olsun. Eğer $r \geq 4$ ise, γ eğrisinin has biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \text{sabit} > 0, \\ \kappa_1^2 + \kappa_2^2 &= f_1 - f_3\cos^2 u_1, \\ \kappa_2' - f_3 \cos u_1 \sin u_1 \cos u_2 &= 0, \\ \kappa_2\kappa_3 - f_3 \cos u_1 \sin u_1 \sin u_2 &= 0 \end{aligned} \tag{3.41}$$

olmasıdır. Eğer $r = 3$ ise, $u_2 = 0$ alınarak yukarıdaki denklemlerin ilk üçü sağlanmalıdır. Eğer $r = 2$ ise, $u_1 = 0, \pi$ alınarak yukarıdaki denklemlerin ilk ikisi sağlanmalıdır [21].

Sonuç 3.2.11: $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ bir trans-Sasakian genelleştirilmiş Sasakian uzay form, $\gamma : I \to M$ oskülatör mertebesi r olan bir Legendre eğrisi, $f_1 = \text{sabit}$, f_2 ve f_3 sıfırdan farklı sabitler, α ve β sabit, $\varphi T \perp E_2$, $\xi \in span\left\{E_2,...,E_m\right\}$, $\eta(E_2) \neq 0$ olsun. Bu durumda, γ eğrisinin has biharmonik olması için gerek ve yeter şart γ nın

$$\kappa_1 = \frac{-\beta}{\eta(E_2)} = \text{sabit} > 0,$$

$$\kappa_2 = \sqrt{\delta} > 0,$$

$$\kappa_3 = \frac{f_3\eta(E_2)\eta(E_4)}{\sqrt{\delta}} = \text{sabit} > 0$$

eşitliklerini sağlayan 4. mertebeden bir helis olmasıdır. Burada

$$\delta = f_1 - f_3\left[\eta(E_2)\right]^2 - \frac{\beta^2}{\left[\eta(E_2)\right]^2}$$

bir pozitif sabit, $\eta(E_3) = 0$ ve $\alpha = 0$ dır.

İspat: Sonuç 3.2.5 in ispatına benzer şekildedir. ■

Durum 8. $f_2 \neq 0,\ \ f_3 \neq 0,\ \ \varphi T \in span\left\{E_2,...,E_m\right\}$, $g(\varphi T, E_2) \neq 0$ ve $\xi \perp E_2$ olması.

Bu durumda $\eta(E_2) = 0$ dır. Ayrıca, (3.21) ve (3.22) eşitlikleri geçerlidir. Böylece aşağıdaki teoremi elde ederiz:

Teorem 3.2.12: $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir genelleştirilmiş Sasakian uzay form, $\gamma : I \to M$ oskülatör mertebesi r olan bir Legendre eğrisi, $f_2 \neq 0,\ \ f_3 \neq 0,$ $\varphi T \in \text{span}\left\{E_2,...,E_m\right\}$, $g(\varphi T, E_2) \neq 0$ ve $\xi \perp E_2$ olsun. Eğer $r \geq 4$ ise, γ eğrisinin has biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned}
\kappa_1 &= \text{sabit} > 0,\\
\kappa_1^2 + \kappa_2^2 &= f_1 + 3f_2\cos^2\omega_1,\\
\kappa_2' + 3f_2\cos\omega_1\sin\omega_1\cos\omega_2 &= 0,\\
\kappa_2\kappa_3 + 3f_2\cos\omega_1\sin\omega_1\sin\omega_2 &= 0
\end{aligned} \tag{3.42}$$

olmasıdır. Eğer $r = 3$ ise, $\omega_2 = 0$ alınarak yukarıdaki denklemlerin ilk üçü sağlanmalıdır. Eğer $r = 2$ ise, $\omega_1 = 0, \pi$ alınarak yukarıdaki denklemlerin ilk ikisi sağlanmalıdır [21].

Sonuç 3.2.13: $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ bir trans-Sasakian genelleştirilmiş Sasakian uzay form, $\gamma: I \to M$ oskülatör mertebesi r olan bir Legendre eğrisi, $f_1 = \text{sabit}$, f_2 ve f_3 sıfırdan farklı sabitler, α ve β sabit, $\varphi T \in \operatorname{span}\{E_2,...,E_m\}$, $g(\varphi T, E_2) \neq 0$ ve $\xi \perp E_2$ olsun. Bu durumda, γ eğrisinin has biharmonik olması için gerek ve yeter şart γ nın aşağıdakilerden biri olmasıdır [21]:

(1) $\alpha = \beta = 0$, $\varphi T \parallel E_2$ ve $f_1 + 3f_2$ bir pozitif sabit olmak üzere $\kappa_1 = \sqrt{f_1 + 3f_2}$ eğriliğine sahip bir çember; veya

(2) $\alpha \neq 0$ sabit, $f_1 + 3f_2 - \alpha^2 > 0$ sabit, $\beta = 0$, $\varphi T \parallel E_2$ ve $\xi \parallel E_3$ olmak üzere $\kappa_1 = \sqrt{f_1 + 3f_2 - \alpha^2}$, $\kappa_2 = \pm\alpha > 0$ eğriliklerine sahip bir helis; veya

(3) $g(\varphi T, E_3) = 0,$ $g(\varphi T, E_2) \neq 0$ ve $g(\varphi T, E_4) \neq 0$ sabit, $\delta > 0$ ve $f_1 + 3f_2\left[g(\varphi T, E_2)\right]^2 - \delta^2 > 0$ birer sabit olmak üzere

$$\begin{aligned}
\kappa_1 &= \delta > 0, \\
\kappa_2 &= \sqrt{f_1 + 3f_2\left[g(\varphi T, E_2)\right]^2 - \delta^2} > 0, \\
\kappa_3 &= \frac{-3f_2 g(\varphi T, E_2) g(\varphi T, E_4)}{\sqrt{f_1 + 3f_2\left[g(\varphi T, E_2)\right]^2 - \delta^2}} > 0, \\
\kappa_4 &= \frac{\delta g(\varphi E_2, E_5)}{g(\varphi T, E_4)} > 0, \text{ (eğer } r \geq 5 \text{ ise)}
\end{aligned}$$

eşitliklerini sağlayan oskülatör mertebesi $r \geq 4$ olan bir Frenet eğrisi.

İspat: Sonuç 3.2.8 in ispatına benzer şekilde ispatlanır. ■

Durum 9. $f_2 \neq 0,$ $f_3 \neq 0,$ $\varphi T \in \operatorname{span}\{E_2,...,E_m\},$ $g(\varphi T, E_2) \neq 0,$ $\xi \in \operatorname{span}\{E_2,...,E_m\}$ ve $\eta(E_2) \neq 0$ olması.

Bu durumda, Teorem 3.2.1 ile (3.7), (3.8), (3.21) ve (3.22) eşitlikleri yardımıyla sıradaki teorem verebiliriz:

Teorem 3.2.14: $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ bir genelleştirilmiş Sasakian uzay form, $\gamma: I \to M$ oskülatör mertebesi r olan bir Legendre eğrisi, $f_2 \neq 0$, $f_3 \neq 0$, $\varphi T \in \operatorname{span}\{E_2,...,E_m\}$, $g(\varphi T, E_2) \neq 0$, $\xi \in \operatorname{span}\{E_2,...,E_m\}$ ve $\eta(E_2) \neq 0$ olsun. Eğer $r \geq 4$ ise, γ eğrisinin has biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{gathered}
\kappa_1 = \text{sabit} > 0, \\
\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = f_1 + 3 f_2 \cos^2\omega_1 - f_3 \cos^2 u_1, \\
\kappa_2' + 3 f_2 \cos\omega_1 \sin\omega_1 \cos\omega_2 - f_3 \cos u_1 \sin u_1 \cos u_2 = 0, \\
\kappa_2\kappa_3 + 3 f_2 \cos\omega_1 \sin\omega_1 \sin\omega_2 - f_3 \cos u_1 \sin u_1 \sin u_2 = 0
\end{gathered}$$

olmasıdır. Eğer $r = 3$ ise, $\omega_2 = 0$ alınarak yukarıdaki denklemlerin ilk üçü sağlanmalıdır. Eğer $r = 2$ ise, $\omega_1 = 0,\pi$ alınarak yukarıdaki denklemlerin ilk ikisi sağlanmalıdır [21].

Sonuç 3.2.15: $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ bir trans-Sasakian genelleştirilmiş Sasakian uzay form, $\gamma: I \to M$ oskülatör mertebesi $r \geq 4$ olan bir Legendre eğrisi, $f_1 = \text{sabit}$, f_2 ve f_3 sıfırdan farklı sabitler, $\varphi T \in \operatorname{span}\{E_2, E_3, E_4\}$, $g(\varphi T, E_2) \neq 0$, $\xi \in \operatorname{span}\{E_2, E_3, E_4\}$ ve $\eta(E_2) \neq 0$ olsun. O halde, γ eğrisinin has biharmonik olması için gerek ve yeter şart

(1) $\lambda \neq 0$ ve $\mu \neq 0$ olmak üzere

$$\begin{gathered}
\kappa_1 = \frac{-\beta}{\eta(E_2)} = \text{sabit} > 0, \\
\kappa_2 = \frac{\lambda}{2\mu} = \sqrt{\delta} = -\int \mu ds > 0, \\
\kappa_3 = \frac{2\mu\{ f_3\eta(E_2)\eta(E_4) - 3 f_2 g(\varphi T, E_2) g(\varphi T, E_4)\}}{\lambda} > 0
\end{gathered}$$

olması; veya

(2) δ bir pozitif sabit, $\lambda = \mu = 0$ olmak üzere

$$\kappa_1 = \frac{-\beta}{\eta(E_2)} = \text{sabit} > 0,$$
$$\kappa_2 = \sqrt{\delta} > 0,$$
$$\kappa_3 = \frac{f_3\eta(E_2)\eta(E_4) - 3f_2 g(\varphi T, E_2)g(\varphi T, E_4)}{\sqrt{\delta}} > 0$$

olmasıdır. Burada

$$\lambda = (3f_2 + f_3)\alpha g(\varphi T, E_2)\eta(E_2), \tag{3.43}$$

$$\mu = f_3\eta(E_2)\eta(E_3) - 3f_2 g(\varphi T, E_2)g(\varphi T, E_3) \tag{3.44}$$

ve

$$\delta = f_1 + 3f_2\left[g(\varphi T, E_2)\right]^2 - f_3\left[\eta(E_2)\right]^2 - \frac{\beta^2}{\left[\eta(E_2)\right]^2} \tag{3.45}$$

dir [21].

İspat: Gereklilik: Teorem 3.2.1 den

$$\kappa_1 = \text{sabit} > 0,$$

$$\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = f_1 + 3f_2\left[g(\varphi T, E_2)\right]^2 - f_3\left[\eta(E_2)\right]^2, \tag{3.46}$$

$$\kappa_2' + 3f_2 g(\varphi T, E_2)g(\varphi T, E_3) - f_3\eta(E_2)\eta(E_3) = 0, \tag{3.47}$$

$$\kappa_2\kappa_3 + 3f_2 g(\varphi T, E_2)g(\varphi T, E_4) - f_3\eta(E_2)\eta(E_4) = 0 \tag{3.48}$$

yazabiliriz. $\eta(T) = 0$ ifadesini türevler ve (2.2) eşitliklerini kullanırsak $\kappa_1\eta(E_2) = -\beta,$ yani

$$\kappa_1 = \frac{-\beta}{\eta(E_2)}$$

buluruz. (3.46) eşitliğinin türevini alırsak

$$\kappa_2\kappa_2' = 3f_2 g(\varphi T, E_2)\nabla_T g(\varphi T, E_2) - f_3\eta(E_2)\nabla_T\eta(E_2) \tag{3.49}$$

elde ederiz. M bir trans-Sasakian manifold olduğundan, (3.15), (3.26) ve (3.47) eşitliklerini (3.49) da yerine yazarsak

$$2\kappa_2\mu = \lambda \tag{3.50}$$

yazabiliriz. Burada λ ve μ, sırasıyla (3.43) ve (3.44) eşitliklerindeki gibidir.

Eğer $\lambda \neq 0$ ve $\mu \neq 0$ ise, (3.50) eşitliği gereği $\kappa_2 = \dfrac{\lambda}{2\mu} \neq 0$ bulunur. κ_3 ise (3.48) eşitliğinden hesaplanır.

Eğer $\mu = 0$ ise, (3.50) gereği $\lambda = 0$ dır. Ayrıca, (3.47) den κ_2 bir sabittir. Böylece, (3.46) eşitliğini kullanarak $\kappa_2 = \sqrt{\delta}$ yazabiliriz. Burada δ, (3.45) eşitliğindeki gibidir. (3.48) eşitliğinden de κ_3 ü elde ederiz.

Yeterlilik: γ eğrisi Teoremde verilen (1) veya (2) koşullarını sağlıyor olsun. O halde, Teorem 3.2.1 deki eşitliklerin sağlandığı gösterilebilir. Yani γ eğrisi has biharmoniktir. ■

3.3 Durumların Bazı Uzay Formlara Uygulanması

$(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ bir Sasakian uzay form olsun. Böylece $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $f_1 = \dfrac{c+3}{4}$, $f_2 = f_3 = \dfrac{c-1}{4}$ dir. Bu durumda (3.13) eşitliği, $\kappa_1\eta(E_2) = 0$ haline dönüşür. Yani $\eta(E_2) = 0$ dır. O halde, tüm olası durumlar; Durum 1, Durum 6 ve Durum 8 dir.

Durum 1 ve Durum 6 için, aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz:

Teorem 3.3.1: $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ bir Sasakian uzay form, $\gamma : I \to M$ bir Legendre eğrisi, $c = 1$ veya $\varphi T \perp E_2$ olsun. Bu durumda, γ eğrisinin has biharmonik olması için gerek ve yeter şart $c > -3$ olmak üzere γ nın

(1) $\kappa_1 = \dfrac{1}{2}\sqrt{c+3}$ eğriliğine sahip bir çember; veya

(2) $\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = \dfrac{c+3}{4}$ eşitliğini sağlayan bir helis olmasıdır.

Eğer $c \le -3$ ise, böyle bir has biharmonik Legendre eğrisi yoktur [9].

Örnek 3.3.2: $\mathbb{S}^7(1) \subset \mathbb{E}^8$ Sasakian uzay formunu ele alalım. $\mathbb{E}^8 = \left(\mathbb{R}^8, \langle\ ,\ \rangle\right)$ uzayındaki denklemi

$$\gamma(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\sqrt{2}s)e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}s)e_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_3$$

olan $\gamma: I \to \mathbb{S}^7(1)$ eğrisi, $\left\{e_i, Je_j\right\}$ birbirine dik sabit birim vektörler olmak üzere $\kappa_1 = c = 1$ eğriliğine sahip bir has biharmonik Legendre çemberdir. Burada,

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I_4 \\ -I_4 & 0 \end{bmatrix},\ \xi = -Jx,\ \eta(Y) = g(Y,\xi),$$
$$\varphi Y = JY - \eta(Y)x,\ x \in \mathbb{S}^7(1),\ Y \in \chi\left(\mathbb{S}^7(1)\right)$$

ve g, $\mathbb{E}^8$ den indirgenen metrik tensördür [9].

Durum 8 için aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 3.3.3: $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir Sasakian uzay form, $\gamma: I \to M$ bir Legendre eğrisi, $c \ne 1$, $\varphi T \in span\left\{E_2, ..., E_m\right\}$, $g(\varphi T, E_2) \ne 0$ olsun. Bu durumda, γ eğrisinin has biharmonik olması için gerek ve yeter şart γ nın

(1) $c > 1$, $\varphi T \parallel E_2$ ve $\xi \parallel E_3$ olmak üzere $\kappa_1 = \sqrt{c-1}$ ve $\kappa_2 = 1$ eğriliklerine sahip bir helis; veya

(2) $g(\varphi T, E_3) = 0$, $g(\varphi T, E_2) \ne 0$ ve $g(\varphi T, E_4) \ne 0$ birer sabit, $\delta > 0$ ve $c + 3 + 3(c-1)\left[g(\varphi T, E_2)\right]^2 - 4\delta^2 > 0$ birer sabit olmak üzere

$$\kappa_1 = \delta,$$
$$\kappa_2 = \frac{1}{2}\sqrt{c + 3 + 3(c-1)\left[g(\varphi T, E_2)\right]^2 - 4\delta^2},$$

$$\kappa_3 = \frac{-3(c-1)g(\varphi T, E_2)g(\varphi T, E_4)}{2\sqrt{c+3+3(c-1)\left[g(\varphi T, E_2)\right]^2 - 4\delta^2}} > 0,$$

$$\kappa_4 = \frac{\delta g(\varphi E_2, E_5)}{g(\varphi T, E_4)} > 0 \text{ (eğer } r \geq 5 \text{ ise)}$$

eşitliklerini sağlayan, oskülatör mertebesi $r \geq 4$ olan bir Frenet eğrisi olmasıdır [9].

İspat: Sonuç 3.2.13 te $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $f_1 = \dfrac{c+3}{4}$, $f_2 = f_3 = \dfrac{c-1}{4}$ yazılırsa, ispat açıktır. ■

Uyarı: κ_4 sabit olmak zorunda değildir. Bu sebeple, $boyM \geq 5$ olan Sasakian uzay formlarda helis olmayan has biharmonik eğriler de vardır.

Şimdi, $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir Kenmotsu uzay form olsun. O halde $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $f_1 = \dfrac{c-3}{4}$, $f_2 = f_3 = \dfrac{c+1}{4}$ tür. Bu durumda, Teorem 3.1.5 ve 3.1.6 yardımıyla, $f_2 = \dfrac{c+1}{4} = 0$ bulunur. Yani $c = -1$ dir. Bu durumda sadece Durum 1 geçerlidir.

Teorem 3.3.4: Bir Kenmotsu uzay formda has biharmonik Legendre eğrisi yoktur [21].

İspat: $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir Kenmotsu uzay form olsun. $c = -1$ olduğundan, $f_1 = \dfrac{c-3}{4} = -1 < 0$ bulunur. Teorem 3.2.2 gereği, M de has biharmonik Legendre eğrisi yoktur. ■

$(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir kosimplektik uzay form olsun. Bu durumda $\alpha = \beta = 0$, $f_1 = f_2 = f_3 = \dfrac{c}{4}$ tür. (3.13) eşitliğinden $\xi \perp E_2$ bulunur. O halde, kosimplektik uzay form için tüm olası durumlar; Durum 1, Durum 6 ve Durum 8 dir. Durum 1 için $f_1 = f_2 = f_3 = \dfrac{c}{4} = 0$ olduğundan, $f_1 > 0$ olmasıyla çelişir. Durum 6 için aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 3.3.5: $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ bir kosimplektik uzay form, , $\gamma : I \to M$ bir Legendre eğrisi, $c \neq 0$ ve $\varphi T \perp E_2$ olsun. Bu durumda, γ eğrisinin has biharmonik olması için gerek ve yeter şart $c > 0$ olmak üzere γ nın $\kappa_1 = \frac{\sqrt{c}}{2}$ eğriliğine sahip bir çember veya $\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = \frac{c}{4}$ eşitliğini sağlayan bir helis olmasıdır [21].

Durum 8 için aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 3.3.6: $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ bir kosimplektik uzay form, , $\gamma : I \to M$ bir Legendre eğrisi, $c \neq 0$, $\varphi T \in span\{E_2, E_3, E_4\}$ ve $g(\varphi T, E_2) \neq 0$ olsun. Bu durumda, γ eğrisinin has biharmonik olması için gerek ve yeter şart γ eğrisinin

(1) $c > 0$ ve $\varphi T \parallel E_2$ olmak üzere, $\kappa_1 = \sqrt{c}$ eğriliğine sahip bir çember olması; veya

(2) $g(\varphi T, E_3) = 0$, $g(\varphi T, E_2) \neq 0$ ve $g(\varphi T, E_4) \neq 0$ birer sabit, $\delta > 0$ ve $c + 3c\left[g(\varphi T, E_2)\right]^2 - 4\delta^2 > 0$ birer sabit olmak üzere

$$\kappa_1 = \delta > 0,$$

$$\kappa_2 = \frac{1}{2}\sqrt{c + 3c\left[g(\varphi T, E_2)\right]^2 - 4\delta^2} > 0,$$

$$\kappa_3 = \frac{-3cg(\varphi T, E_2)g(\varphi T, E_4)}{2\sqrt{c + 3c\left[g(\varphi T, E_2)\right]^2 - 4\delta^2}} > 0,$$

$$\kappa_4 = \frac{\delta g(\varphi E_2, E_5)}{g(\varphi T, E_4)} (\text{eğer } r \geq 5 \text{ ise})$$

eşitliklerini sağlayan $r \geq 4$ olan bir Frenet eğrisi olmasıdır [21].

İspat: Sonuç 3.2.13 te $\alpha = \beta = 0$, $f_1 = f_2 = f_3 = \frac{c}{4}$ yazılırsa ispat kolayca tamamlanır. ■

Örnek 3.3.7: (N,J,G) bir Kähler manifoldu olsun. $M=N\times\mathbb{R}$ çarpım manifoldu üzerinde

$$\varphi X=JX,\ X\in\chi(N),\ \varphi\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)=0,$$

$$\xi=\frac{\partial}{\partial s},\ \eta=ds,\ g=ds\otimes ds+G$$

eşitlikleri ile (φ,ξ,η,g) hemen hemen değme metrik yapısı tanımlanabilir. Böylece (M,φ,ξ,η,g) bir kosimplektik manifolddur [22]. Eğer (N,J,G) manifoldunun holomorfik kesitsel eğriliği sabit bir μ reel sayısına eşitse, (M,φ,ξ,η,g) manifoldu da sabit $c=\mu$ φ-kesitsel eğriliğine sahiptir [23]. (N,G) ve (M,g) manifoldlarının Levi-Civita koneksiyonları sırasıyla ∇ ve $\overline{\nabla}$ ile gösterilsin. Bu durumda $\nabla_X Y=\overline{\nabla}_X Y$ dir [23]. N manifoldunda yatan her eğri, M nin bir Legendre eğrisidir. Ayrıca, $\nabla_X Y=\overline{\nabla}_X Y$ olduğundan N nin biharmonik eğrileri, M kosimplektik uzay formunun da biharmonik eğrileridir. $N=\mathbb{C}P^n$ seçelim. O halde, (M,φ,ξ,η,g) manifoldu $c=4$ φ-kesitsel eğriliğine sahip bir kosimplektik uzay formdur. $\mathbb{C}P^n$ nin biharmonik eğrileri, [24] nolu kaynakta çalışılmıştır. Bu kaynağın beşinci bölümünde verilen eğri örnekleri, (M,φ,ξ,η,g) kosimplektik uzay formunda biharmonik Legendre eğrileridir.

4. *S*-UZAY FORMLARDA SLANT EĞRİLER

Bu bölümde *S*-uzay formlar tanıtılacak ve *S*-uzay formlarda slant eğrilerin biharmonik olma koşulları incelenecektir.

4.1 *S*-Uzay Formlar

$(M^{2m+s},\varphi,\xi_\alpha,\eta^\alpha,g)$, $(2m+s)$-boyutlu *çatılı metrik manifold* [12] ve üzerindeki bir *çatılı metrik yapı* $(\varphi,\xi_\alpha,\eta^\alpha,g)$, $\alpha\in\{1,...,s\}$ şöyle tanımlanır: φ, rankı $2m$ olan bir φ*-yapı* tanımlayan $(1,1)$-tensor alanı; $\xi_1,...,\xi_s$ birer vektör alanı; $\eta^1,...,\eta^s$ birer 1-form ve g, M üzerinde bir Riemannian metriği olmak üzere her $X,Y\in\chi(M)$ ve $\alpha,\beta\in\{1,...,s\}$ için

$$\varphi^2=-I+\sum_{\alpha=1}^{s}\eta^\alpha\otimes\xi_\alpha,\quad \eta^\alpha(\xi_\beta)=\delta_\beta^\alpha,\quad \varphi(\xi_\alpha)=0,\quad \eta^\alpha\circ\varphi=0, \tag{4.1}$$

$$g(\varphi X,\varphi Y)=g(X,Y)-\sum_{\alpha=1}^{s}\eta^\alpha(X)\eta^\alpha(Y), \tag{4.2}$$

$$d\eta^\alpha(X,Y)=g(X,\varphi Y)=-d\eta^\alpha(Y,X),\quad \eta^\alpha(X)=g(X,\xi_\alpha) \tag{4.3}$$

eşitlikleri sağlanıyorsa $(M^{2m+s},\varphi,\xi_\alpha,\eta^\alpha,g)$ ye *çatılı* φ*-manifold* [25] veya *hemen hemen* r *-kontakt metrik manifold* [26] denir. Eğer φ nin Nijenhuis tensörü her $\alpha\in\{1,...,s\}$ için $-2d\eta^\alpha\otimes\xi_\alpha$ ye eşitse, o zaman $(\varphi,\xi_\alpha,\eta^\alpha,g)$ ye *S-yapı* ve $(M^{2m+s},\varphi,\xi_\alpha,\eta^\alpha,g)$ ye *S-manifold* denir [27]. Eğer $s=1$ ise, çatılı metrik yapı bir hemen hemen kontakt metrik yapıya dönüşür ve bir *S*-yapı ise Sasakian yapı olur. Bir *S*-yapı aşağıdaki eşitlikleri sağlar [27]:

$$(\nabla_X\varphi)Y=\sum_{\alpha=1}^{s}\left\{g(\varphi X,\varphi Y)\xi_\alpha+\eta^\alpha(Y)\varphi^2X\right\}, \tag{4.4}$$

$$\nabla\xi_\alpha=-\varphi,\ \alpha\in\{1,...,s\}. \tag{4.5}$$

M sabit φ-kesitsel eğrilikli bir S-manifold olmak üzere, M nin Riemann eğrilik tensörü, her $X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$
\begin{aligned}
R(X,Y)Z = \sum_{\alpha,\beta} & \left\{ \eta^{\alpha}(X)\eta^{\beta}(Z)\varphi^{2}Y - \eta^{\alpha}(Y)\eta^{\beta}(Z)\varphi^{2}X \right. \\
& \left. -g(\varphi X,\varphi Z)\eta^{\alpha}(Y)\xi_{\beta} + g(\varphi Y,\varphi Z)\eta^{\alpha}(X)\xi_{\beta} \right\} \\
& + \frac{c+3s}{4}\left\{ -g(\varphi Y,\varphi Z)\varphi^{2}X + g(\varphi X,\varphi Z)\varphi^{2}Y \right\} \\
& + \frac{c-s}{4}\left\{ g(X,\varphi Z)\varphi Y - g(Y,\varphi Z)\varphi X + 2g(X,\varphi Y)\varphi Z \right\}
\end{aligned} \tag{4.6}
$$

biçimindedir. Böyle bir S-manifolda *S-uzay form* denir ve $M(c)$ ile gösterilir. $s = 1$ olduğunda, bir S-uzay form Sasakian uzay forma dönüşür [13].

Eğer her X teğet vektörü için $\eta^{\alpha}(X) = 0, \quad \alpha = 1,...,s$ oluyorsa, S-manifoldun altmanifolduna *integral altmanifold* denir [28]. Bir $(M^{2m+s}, \varphi, \xi_{\alpha}, \eta^{\alpha}, g)$ S-uzay formunun 1-boyutlu integral altmanifolduna M nin bir *s-Legendre eğrisi* adı verilir. Başka bir deyişle, $T \perp span\{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_s\}$ oluyorsa $\gamma : I \to M$ eğrisine M nin bir *s-Legendre eğrisi* denir [29]. Burada T, γ nın teğet vektör alanıdır. Daha genel olarak, her $\alpha = 1,...,s$ için $\eta^{\alpha}(T) = \cos\theta$ olacak şekilde sabit bir θ açısı varsa, γ eğrisi *slant eğri* olarak adlandırılır. Buradaki θ açısına, γ eğrisinin *değme açısı* denir. Her s-Legendre eğrisi, değme açısı $\frac{\pi}{2}$ olan bir slant eğri olarak düşünülebilir.

S-manifoldlarda slant eğriler için ilk olarak aşağıdaki önermeyi verebiliriz:

Önerme 4.1.1: $M = (M^{2m+s}, \varphi, \xi_{\alpha}, \eta^{\alpha}, g)$ bir S-manifold olsun. M deki geodezik olmayan bir slant eğrinin değme açısı θ ise,

$$\frac{-1}{\sqrt{s}} < \cos\theta < \frac{1}{\sqrt{s}}$$

dir.

İspat: $\gamma : I \to M = (M^{2m+s}, \varphi, \xi_{\alpha}, \eta^{\alpha}, g)$ geodezik olmayan birim hızlı bir slant eğri ve γ nın değme açısı θ olsun. O halde, (4.2) eşitliğinden

$$g(\varphi T,\varphi T)=g(T,T)-\sum_{\alpha=1}^{s}\left[\eta^{\alpha}(T)\right]^{2} \qquad (4.7)$$
$$=1-s\cos^{2}\theta$$

elde edilir. γ geodezik olmadığından, $\varphi T\neq 0$ dır. Bu durumda,

$$g(\varphi T,\varphi T)=1-s\cos^{2}\theta>0$$

bulunur. Böylece istenilen sonuç elde edilir. ■

[8] ve [9] nolu kaynaklarda, D. Fetcu ve C. Oniciuc, Sasakian uzay formlarda biharmonik Legendre eğrileri çalışmıştır. Onların çalışmasının bir genellemesi olarak, biz de *S*-uzay formlarda biharmonik *s*-Legendre eğrilerini [29] nolu kaynakta incelemiştik. Bu bölümde ise, *S*-uzay formlarda slant eğrilerin biharmonik olma koşullarını elde edeceğiz.

4.2 *S*-Uzay Formlarda Biharmonik Slant Eğriler

$(M^{2m+s},\varphi,\xi_{\alpha},\eta^{\alpha},g)$ bir *S*-uzay form ve $\gamma:I\to M$ oskülatör mertebesi r olan bir slant eğrisi olsun. Her $\alpha\in\{1,...,s\}$ için

$$\eta^{\alpha}(T)=\cos\theta \qquad (4.8)$$

ifadesini türevlersek,

$$\eta^{\alpha}(E_2)=0,\ \alpha\in\{1,...,s\} \qquad (4.9)$$

elde ederiz. Böylece (2.2), (4.1), (4.2), (4.3), (4.6), (4.7), (4.8) ve (4.9) eşitliklerini kullanarak

$$\nabla_T\nabla_T T=-\kappa_1^2E_1+\kappa_1'E_2+\kappa_1\kappa_2E_3,$$
$$\nabla_T\nabla_T\nabla_T T = -3\kappa_1\kappa_1'E_1+\left(\kappa_1''-\kappa_1^3-\kappa_1\kappa_2^2\right)E_2$$
$$+\left(2\kappa_1'\kappa_2+\kappa_1\kappa_2'\right)E_3+\kappa_1\kappa_2\kappa_3E_4,$$

$$R(T,\nabla_T T)T=-\kappa_1\left[s^2\cos^2\theta+\frac{c+3s}{4}(1-s\cos^2\theta)\right]E_2-3\kappa_1\frac{(c-s)}{4}g(\varphi T,E_2)\varphi T$$

buluruz. O halde

$$\begin{aligned}\tau_2(\gamma)=&\ \nabla_T\nabla_T\nabla_T T-R(T,\nabla_T T)T\\=&\ -3\kappa_1\kappa_1' E_1\\&+\left(\kappa_1''-\kappa_1^3-\kappa_1\kappa_2^2+\kappa_1\left[s^2\cos^2\theta+\frac{c+3s}{4}(1-s\cos^2\theta)\right]\right)E_2\\&+(2\kappa_1'\kappa_2+\kappa_1\kappa_2')E_3+\kappa_1\kappa_2\kappa_3E_4\\&+3\kappa_1\frac{(c-s)}{4}g(\varphi T,E_2)\varphi T\end{aligned}\tag{4.10}$$

dir.

$k=\min\{r,4\}$ olsun. (4.10) eşitliğinden, γ eğrisinin has biharmonik olması için gerek ve yeter şart $\kappa_1>0$ ve

(1) $c=s$ veya $\varphi T\perp E_2$ veya $\varphi T\in span\{E_2,...,E_k\}$ olması; ve

(2) Her $\lambda=1,...,k$ için $g(\tau_2(\gamma),E_\lambda)=0$ olmasıdır.

Böylece şu ana teoremi verebiliriz.

Teorem 4.2.1: $(M^{2m+s},\varphi,\xi_\alpha,\eta^\alpha,g)$ bir S-uzay form, $\gamma:I\to M$ oskülatör mertebesi r olan bir slant eğri, $\alpha\in\{1,...,s\}$ ve $k=\min\{r,4\}$ olsun. Bu durumda, γ eğrisinin has biharmonik olması için gerek ve yeter şart

(1) $c=s$ veya $\varphi T\perp E_2$ veya $\varphi T\in span\{E_2,...,E_k\}$ olması; ve

(2) $\kappa_k=0$ yazılarak aşağıdaki eşitliklerin ilk k tanesinin sağlanmasıdır:

$$\kappa_1=\text{sabit}>0,$$
$$\kappa_1^2+\kappa_2^2=s^2\cos^2\theta+\frac{c+3s}{4}(1-s\cos^2\theta)+\frac{3(c-s)}{4}\left[g(\varphi T,E_2)\right]^2,$$
$$\kappa_2'+\frac{3(c-s)}{4}g(\varphi T,E_2)g(\varphi T,E_3)=0,$$
$$\kappa_2\kappa_3+\frac{3(c-s)}{4}g(\varphi T,E_2)g(\varphi T,E_4)=0.$$

Şimdi, Teorem 4.2.1 i daha açık bir şekilde, dört farklı durumda inceleyeceğiz.

Durum 1. $c = s$ olması.

Bu durumda, γ eğrisinin has biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{gathered} \kappa_1 = \text{sabit} > 0, \\ \kappa_1^2 + \kappa_2^2 = s, \\ \kappa_2 = \text{sabit}, \\ \kappa_2\kappa_3 = 0 \end{gathered} \tag{4.11}$$

olmasıdır. Bu eşitlikleri kullanarak aşağıdaki teoremi elde ederiz:

Teorem 4.2.2: $(M^{2m+s}, \varphi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$, $\alpha \in \{1,...,s\}$ bir S-uzay form, $\gamma : I \to M$ oskülatör mertebesi r olan geodezik olmayan bir slant eğri ve $c = s$ olsun. γ eğrisinin has biharmonik olması için gerek ve yeter şart $\kappa_1 = \sqrt{s}$ eğriliğine sahip bir çember veya $\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = s$ eşitliğini sağlayan bir helis olmasıdır. Özel olarak, eğer γ bir s-Legendre eğrisi ise $2m + s > 3$ tür.

İspat: Gereklilik: $\gamma : I \to M$ eğrisi has biharmonik olsun. O halde, (4.11) eşitliklerinden, $\kappa_2 = 0$ veya $\kappa_3 = 0$ dır. Eğer $\kappa_2 = 0$ ise, $\kappa_1^2 = s = \text{sabit}$ olduğundan γ eğrisi $\kappa_1 = \sqrt{s}$ olan bir çemberdir. Eğer $\kappa_2 \neq 0$ ise, bu durumda $\kappa_3 = 0$ dır ve γ eğrisi $\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = s$ eşitliğini sağlayan bir helistir.

Yeterlilik: γ eğrisi, teoremde verilen eğrilerden biri olsun. O halde, (4.11) eşitlikleri sağlandığından, γ has biharmonik eğridir.

Eğer $2m + s = 3$ ise, $m = s = 1$ olacağından M bir 3-boyutlu Sasakian uzay form olur. 3-boyutlu Sasakian manifoldlardaki bir Legendre eğrisinin torsiyonu 1 olduğundan [30], $\kappa_1 > 0$ ve $\kappa_2 = 1$ yazabiliriz. Bu, $\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = s = 1$ olmasıyla çelişir. O halde, γ nın s-Legendre olması durumunda $(2m + s) > 3$ tür. ■

Özel olarak, Teorem 4.2.2 de $\theta = \frac{\pi}{2}$ seçilirse, s-Legendre eğrileri için, [29] nolu kaynaktaki Teorem 3.2 elde edilir.

Durum 2. $c \neq s$ ve $\varphi T \perp E_2$ olması.

Bu durumda, $g(\varphi T, E_2) = 0$ dır. Teorem 4.2.1 den

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \text{sabit} > 0, \\ \kappa_1^2 + \kappa_2^2 &= s^2 \cos^2\theta + \frac{c+3s}{4}(1 - s\cos^2\theta), \\ \kappa_2 &= \text{sabit}, \\ \kappa_2\kappa_3 &= 0 \end{aligned} \tag{4.12}$$

yazabiliriz. Öncelikle aşağıdaki önermeyi verelim:

Önerme 4.2.3: $(M^{2m+s}, \varphi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ bir S-uzay form, $\gamma : I \to M$ oskülatör mertebesi 3 olan bir slant eğri, $\alpha \in \{1, ..., s\}$ ve $\varphi T \perp E_2$ olsun. O halde $\{T = E_1, E_2, E_3, \varphi T, \nabla_T \varphi T, \xi_1, ..., \xi_s\}$ kümesi γ eğrisinin her noktasında lineer bağımsızdır. Bu sebeple $m \geq 3$ tür.

İspat: γ eğrisi oskülatör mertebesi 3 olan bir Frenet eğrisi olduğundan

$$\begin{aligned} E_1 &= \gamma' = T, \\ \nabla_T E_1 &= \kappa_1 E_2, \\ \nabla_T E_2 &= -\kappa_1 E_1 + \kappa_2 E_3, \\ \nabla_T E_3 &= -\kappa_2 E_2 \end{aligned} \tag{4.13}$$

yazabiliriz. $S_1 = \{T = E_1, E_2, E_3, \varphi T, \nabla_T \varphi T, \xi_1, ..., \xi_s\}$ sistemi sıfırdan farklı vektör alanlarından oluşur. (4.1), (4.2), (4.3) , (4.4), (4.7) ve (4.8) eşitliklerinden

$$\nabla_T \varphi T = -s\cos\theta T + \sum_{\alpha=1}^{s} \xi_\alpha + \kappa_1 \varphi E_2 \tag{4.14}$$

buluruz. (4.9), (4.13) ve (4.14) eşitlikleri gereği

$$E_2 \perp T,\ E_2 \perp E_3,\ E_2 \perp \varphi T,$$
$$E_2 \perp \nabla_T \varphi T,\ E_2 \perp \xi_\alpha,\ \alpha \in \{1,...,s\}$$

dir. Bu nedenle, S_1 sisteminin lineer bağımsız olması için gerek ve yeter şart $S_2 = \{T, E_3, \varphi T, \nabla_T \varphi T, \xi_1, ..., \xi_s\}$ sisteminin lineer bağımsız olmasıdır. Hipotezden $E_2 \perp \varphi T$ dir. O halde $g(\varphi T, E_2) = 0$ ifadesini türevlersek, $g(\varphi T, E_3) = 0$ buluruz. Ayrıca, (4.7) eşitliğinin türevinden, $\varphi T \perp \nabla_T \varphi T$ dir. (4.1) ve (4.3) eşitlikleri gereği, $\varphi T \perp T$ ve $\varphi T \perp \xi_\alpha,\ \alpha = 1,...,s$ çıkar. Böylece S_2 sisteminin lineer bağımsız olması için gerek ve yeter şart $S_3 = \{T, E_3, \nabla_T \varphi T, \xi_1, ..., \xi_s\}$ sisteminin lineer bağımsız olmasıdır. (4.13) denklemlerinden $T \perp E_3$ olduğu açıktır. (4.14) eşitliğini T ile çarparsak, $T \perp \nabla_T \varphi T$ elde ederiz. $T \in span\{\xi_1, ..., \xi_s\}$ olduğunu varsayalım. O halde

$$T = \cos\theta \sum_{\alpha=1}^{s} \xi_\alpha$$

yazılabilir. Bu ifadenin türevini alırsak

$$\kappa_1 E_2 = -s \cos\theta \varphi T$$

bulunur. Bu bir çelişkidir. Çünkü hipotezden $\varphi T \perp E_2$ dir. Bu durumda, varsayım yanlıştır. Yani $T \notin span\{\xi_1, ..., \xi_s\}$ dir. O halde S_3 sisteminin lineer bağımsız olması, $S_4 = \{E_3, \nabla_T \varphi T, \xi_1, ..., \xi_s\}$ sisteminin lineer bağımsız olmasına denktir. Eğer $g(\varphi T, E_3) = 0$ ifadesini türevlersek, $E_3 \perp \nabla_T \varphi T$ elde ederiz. $E_3 \in span\{\xi_1, ..., \xi_s\}$ olduğunu varsayalım. O halde

$$E_3 = \sum_{\alpha=1}^{s} \eta^\alpha (E_3) \xi_\alpha$$

yazabiliriz. Bu ifadeyi türevlersek

$$-\kappa_2 E_2 = \sum_{\alpha=1}^{s} \left\{ \nabla_T \left[\eta^\alpha (E_3) \right] . \xi_\alpha - \eta^\alpha (E_3) \varphi T \right\}$$

buluruz. Bu son eşitliği E_2 ile çarparsak, $\kappa_2 = 0$ çelişkisi çıkar. Bu durumda varsayım yanlıştır. Yani $E_3 \notin span\{\xi_1,...,\xi_s\}$ dir. Böylece S_4 kümesinin lineer bağımsız olması için gerek ve yeter şart $S_5 = \{\nabla_T \varphi T, \xi_1,...,\xi_s\}$ kümesinin lineer bağımsız olmasıdır. $\kappa_1 \neq 0$ ve her $\alpha \in \{1,...,s\}$ için $\varphi E_2 \perp \xi_\alpha$ olduğundan, (4.14) eşitliği gereği, $\nabla_T \varphi T \notin span\{\xi_1,...,\xi_s\}$ dir. Böylece S_5 lineer bağımsızdır. Sonuç olarak, $\{T = E_1, E_2, E_3, \varphi T, \nabla_T \varphi T, \xi_1,...,\xi_s\}$ lineer bağımsız olduğundan, $boyM = 2m + s \geq s + 5$ olur. Yani $m \geq 3$ tür. ■

Artık sıradaki teoremi ifade edebiliriz:

Teorem 4.2.4: $(M^{2m+s}, \varphi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$, $\alpha \in \{1,...,s\}$ bir S-uzay form, $\gamma : I \to M$ bir slant eğri, $c \neq s$ ve $\varphi T \perp E_2$ olsun. γ eğrisinin has biharmonik olması için gerek ve yeter şart

(1) $m \geq 2$, γ nın $\kappa_1 = \frac{1}{2}\sqrt{c + 3s - (c - s)s\cos^2\theta}$ eğriliğine sahip bir çember olması, $c > -3s + (c - s)s\cos^2\theta$ ve $\{T = E_1, E_2, \varphi T, \nabla_T \varphi T, \xi_1,...,\xi_s\}$ kümesinin lineer bağımsız olması; veya

(2) $m \geq 3$, γ nın $\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = \frac{1}{4}\left[c + 3s - (c - s)s\cos^2\theta\right]$ eşitliğini sağlayan bir helis olması, $c > -3s + (c - s)s\cos^2\theta$ ve $\{T = E_1, E_2, E_3, \varphi T, \nabla_T \varphi T, \xi_1,...,\xi_s\}$ kümesinin lineer bağımsız olmasıdır.

İspat: Önerme 4.2.3 ve (4.12) eşitlikleri birlikte düşünüldüğünde ispat kolayca tamamlanır. ■

Özel olarak, değme açısını $\frac{\pi}{2}$ alarak, s-Legendre eğrileri için aşağıdaki sonucu verebiliriz:

Sonuç 4.2.5: $(M^{2m+s}, \varphi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ bir S-uzay form, $\gamma : I \to M$ oskülatör mertebesi r olan bir s-Legendre eğrisi, $\alpha \in \{1,...,s\}$, $c \neq s$ ve $\varphi T \perp E_2$ olsun. Bu durumda, γ eğrisinin has biharmonik olması için gerek ve yeter şart [29]

(1) $m \geq 2$ ve $c > -3s$ olmak üzere, γ nın $\kappa_1 = \frac{1}{2}\sqrt{c+3s}$ eğriliğine sahip bir çember ve $\{T = E_1, E_2, \varphi T, \nabla_T \varphi T, \xi_1, ..., \xi_s\}$ kümesinin lineer bağımsız olması; veya

(2) $m \geq 3$ ve $c > -3s$ olmak üzere, γ nın $\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = \frac{c+3s}{4}$ eşitliğini sağlayan bir helis ve $\{T = E_1, E_2, E_3, \varphi T, \nabla_T \varphi T, \xi_1, ..., \xi_s\}$ kümesinin lineer bağımsız olmasıdır. Eğer $c \leq -3s$ ise, γ eğrisinin biharmonik olması için gerek ve yeter şart bir geodezik olmasıdır.

Durum 3. $c \neq s$ ve $\varphi T \parallel E_2$ olması.

Bu durumda,

$$\begin{aligned} &\varphi T = \pm\sqrt{1 - s\cos^2\theta}E_2, \; g(\varphi T, E_2) = \pm\sqrt{1 - s\cos^2\theta}, \\ &g(\varphi T, E_3) = 0, \;\; g(\varphi T, E_4) = 0 \end{aligned}$$

dır. Teorem 4.2.1 deki eşitlikler

$$\begin{gathered} \kappa_1 = \text{sabit} > 0, \\ \kappa_1^2 + \kappa_2^2 = c - s\cos^2\theta(c - s), \\ \kappa_2 = \text{sabit}, \\ \kappa_2\kappa_3 = 0 \end{gathered} \tag{4.15}$$

haline dönüşür. $\varphi T = \sqrt{1 - s\cos^2\theta}E_2$ seçebiliriz. Her iki tarafa φ uygulanırsa

$$\sqrt{1 - s\cos^2\theta}\varphi E_2 = \varphi^2 T = -T + \sum_{\alpha=1}^{s}\eta^\alpha(T)\xi_\alpha = -T + \cos\theta\sum_{\alpha=1}^{s}\xi_\alpha$$

bulunur. $\varphi T = \sqrt{1 - s\cos^2\theta}E_2$ ifadesinin türevi alınır ve Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}\nabla_T \varphi T &= -s\cos\theta T + \sum_{\alpha=1}^{s}\xi_\alpha + \kappa_1\left[\frac{-1}{\sqrt{1-s\cos^2\theta}}T + \frac{\cos\theta}{\sqrt{1-s\cos^2\theta}}\sum_{\alpha=1}^{s}\xi_\alpha\right] \\ &= \sqrt{1-s\cos^2\theta}(-\kappa_1 T + \kappa_2 E_3)\end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece

$$\left(1+\frac{\kappa_1\cos\theta}{\sqrt{1-s\cos^2\theta}}\right)\left(-s\cos\theta T + \sum_{\alpha=1}^{s}\xi_\alpha\right) = \kappa_2\sqrt{1-s\cos^2\theta}E_3 \tag{4.16}$$

sonucuna ulaşılır.

Özel olarak, [29] nolu kaynaktan, $\varphi T \parallel E_2$ özelliğine sahip bir s-Legendre eğrisi için,

$$\begin{aligned}\kappa_2 &= \left\|\sum_{\alpha=1}^{s}\xi_\alpha\right\| = \sqrt{s}, \\ E_3 &= \frac{1}{\sqrt{s}}\sum_{\alpha=1}^{s}\xi_\alpha, \\ \eta^\alpha(E_3) &= \frac{1}{\sqrt{s}},\ \alpha\in\{1,...,s\}\end{aligned}$$

dir.

Şimdi aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz:

Teorem 4.2.6: $(M^{2m+s},\varphi,\xi_\alpha,\eta^\alpha,g)$, $\alpha\in\{1,...,s\}$ bir S-uzay form, $\gamma: I\to M$ geodezik olmayan bir slant eğri, $c\neq s$ ve $\varphi T\parallel E_2$ olsun. Bu durumda γ eğrisinin has biharmonik olması için gerek ve yeter şart

(1) $c>s$ olmak üzere, γ eğrisinin Frenet çatı alanı

$$\left\{T,\varphi T,\frac{1}{\sqrt{s}}\sum_{\alpha=1}^{s}\xi_\alpha\right\}$$

olan, $\kappa_1=\sqrt{c-s}$ ve $\kappa_2=\sqrt{s}$ eğriliklerine sahip bir s-Legendre helis; veya

(2) $\cos\theta<0$, $c-s\cos^2\theta(c-s)>0$ olmak üzere, γ eğrisinin Frenet çatı alanı

$$\left\{T, \frac{\varphi T}{\sqrt{1-s\cos^2\theta}}\right\}$$

olan,

$$\kappa_1 = \frac{-\sqrt{1-s\cos^2\theta}}{\cos\theta} = \sqrt{c - s\cos^2\theta(c-s)}$$

eşitliğini sağlayan s-Legendre olmayan bir slant çember; veya

(3) $c - s\cos^2\theta(c-s) > 0$ olmak üzere, γ eğrisinin Frenet çatı alanı

$$\left\{T, \frac{\varphi T}{\sqrt{1-s\cos^2\theta}}, \frac{1}{\sqrt{s}\sqrt{s\cos^2\theta - \cos(2\theta)}}\left(\sum_{\alpha=1}^{s}\xi_\alpha - s\cos\theta T\right)\right\}$$

ve

$$\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = c - s\cos^2\theta(c-s)$$

eşitliğini sağlayan s-Legendre olmayan bir slant helis olmasıdır.

İspat: (4.15) ve (4.16) eşitlikleri birlikte düşünülerek ispat tamamlanır. ■

s-Legendre eğrileri için, Teorem 4.2.6 dan aşağıdaki sonucu ifade edebiliriz:

Sonuç 4.2.7: $(M^{2m+s}, \varphi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ bir S-uzay form, $\gamma : I \to M$ oskülatör mertebesi r olan bir s-Legendre eğrisi, $\alpha \in \{1,...,s\}$, $c \neq s$ ve $\varphi T \parallel E_2$ olsun. Bu durumda, γ nın Frenet çatı alanı

$$\left\{T, \varphi T, \frac{1}{\sqrt{s}}\sum_{\alpha=1}^{s}\xi_\alpha\right\}$$

dir. γ eğrisinin has biharmonik olması için gerek ve yeter şart $c > s$ olmak üzere, $\kappa_1 = \sqrt{c-s}$ ve $\kappa_2 = \sqrt{s}$ eğriliklerine sahip bir helis olmasıdır. Eğer $c \leq s$ ise, γ eğrisinin biharmonik olması ile geodezik olması denktir [29].

Durum 4. $c \neq s$, $\varphi T \nparallel E_2$ ve $g(\varphi T, E_2) \neq 0$ olması.

$(M^{2m+s}, \varphi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ bir S-uzay form, $\alpha \in \{1,...,s\}$, $\gamma : I \to M$ oskülatör mertebesi $4 \leq r \leq 2m+s$ olan bir slant eğri ve $m \geq 2$ olsun. Bu durumda, $\varphi T \in span\{E_2, E_3, E_4\}$ yazabiliriz. φT ve E_2 arasındaki açı fonksiyonunu $\mu(t)$ ile gösterelim. Yani

$$g(\varphi T, E_2) = \sqrt{1 - s\cos^2\theta}\cos\mu(t) \tag{4.17}$$

olsun. (4.17) eşitliğini γ boyunca türevlersek

$$\begin{aligned} -\sqrt{1-s\cos^2\theta}\,\mu'(t)\sin\mu(t) &= \nabla_T g(\varphi T, E_2) = g(\nabla_T \varphi T, E_2) + g(\varphi T, \nabla_T E_2) \\ &= g(-s\cos\theta T + \sum_{\alpha=1}^{s}\xi_\alpha + \kappa_1 \varphi E_2, E_2) \\ &\quad + g(\varphi T, -\kappa_1 T + \kappa_2 E_3) \\ &= \kappa_2 g(\varphi T, E_3) \end{aligned} \tag{4.18}$$

buluruz. Ortonormal açılım gereği

$$\varphi T = g(\varphi T, E_2)E_2 + g(\varphi T, E_3)E_3 + g(\varphi T, E_4)E_4 \tag{4.19}$$

yazabiliriz. Teorem 4.2.1 den

$$\begin{gathered} \kappa_1 = \text{sabit} > 0, \\ \kappa_1^2 + \kappa_2^2 = s^2\cos^2\theta + \frac{c+3s}{4}(1 - s\cos^2\theta) + \frac{3(c-s)}{4}\left[g(\varphi T, E_2)\right]^2, \\ \kappa_2' + \frac{3(c-s)}{4} g(\varphi T, E_2) g(\varphi T, E_3) = 0, \\ \kappa_2\kappa_3 + \frac{3(c-s)}{4} g(\varphi T, E_2) g(\varphi T, E_4) = 0 \end{gathered} \tag{4.20}$$

eşitlikleri geçerlidir. (4.20) deki üçüncü denklemi $2\kappa_2$ ile çarpar ve (4.18) eşitliğini kullanırsak

$$2\kappa_2\kappa_2' + \sqrt{1-s\cos^2\theta}\,\frac{3(c-s)}{4}(-2\mu'\cos\mu\sin\mu) = 0,$$

veya denk olarak ω_0 bir sabit olmak üzere

$$\kappa_2^2 = -\sqrt{1-s\cos^2\theta}\,\frac{3(c-s)}{4}\cos^2\mu + \omega_0 \tag{4.21}$$

elde ederiz. (4.21) eşitliğini (4.20) deki ikinci eşitlikte yerine yazarsak

$$\kappa_1^2 = s^2\cos^2\theta + \frac{c+3s}{4}(1-s\cos^2\theta) + \frac{3(c-s)}{4}\left(1-s\cos^2\theta + \sqrt{1-s\cos^2\theta}\right)\cos^2\mu + \omega_0$$

buluruz. Böylece μ bir sabittir. (4.18) ve (4.21) eşitliklerinden, $g(\varphi T, E_3) = 0$ ve $\kappa_2 = \text{sabit} > 0$ dır. Ayrıca,

$$\|\varphi T\| = \sqrt{1-s\cos^2\theta}$$

olduğundan,

$$g(\varphi T, E_4) = \sqrt{1-s\cos^2\theta}\,\sin\mu$$

çıkar. $\varphi T \nparallel E_2$ ve $g(\varphi T, E_2) \neq 0$ hipotezinden

$$\mu \in (0, 2\pi) \setminus \left\{\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$$

dir. Böylece aşağıdaki teoremi iade edebiliriz:

Teorem 4.2.8: $(M^{2m+s}, \varphi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$, $\alpha \in \{1, ..., s\}$ bir *S*-uzay form, $\gamma : I \to M$ bir slant eğri, $r \geq 4$, $m \geq 2$, $c \neq s$, $\varphi T \nparallel E_2$ ve $g(\varphi T, E_2) \neq 0$ olsun. Bu durumda, γ eğrisinin has biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\kappa_\lambda = \text{sabit} > 0,\ \lambda \in \{1,2,3\},$$
$$\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = s^2\cos^2\theta + \frac{c+3s}{4}(1 - s\cos^2\theta)$$
$$+ \frac{3(c-s)}{4}(1 - s\cos^2\theta)\cos^2\mu,$$
$$\kappa_2\kappa_3 = \frac{3(s-c)}{8}(1 - s\cos^2\theta)\sin 2\mu$$

olmasıdır. Burada $\mu \in (0,2\pi) \setminus \left\{\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$ bir sabit, $3(s-c)\sin 2\mu > 0$,

$$\varphi T = \sqrt{1 - s\cos^2\theta}\cos\mu E_2 + \sqrt{1 - s\cos^2\theta}\sin\mu E_4$$

ve

$$4s^2\cos^2\theta + (c+3s)(1 - s\cos^2\theta) + 3(c-s)(1 - s\cos^2\theta)\cos^2\mu > 0$$

dır.

Bir s-Legendre eğrisi için değme açısı $\theta = \frac{\pi}{2}$ olduğundan, aşağıdaki sonucu elde ederiz:

Sonuç 4.2.9: $(M^{2m+s}, \varphi, \xi_\alpha, \eta^\alpha, g)$ bir S-uzay form, $\gamma : I \to M$ oskülatör mertebesi r olan bir s-Legendre eğrisi, $\alpha \in \{1,...,s\}$, $r \geq 4$, $m \geq 2$, $c \neq s$ ve $g(\varphi T, E_2) \neq 0,1,-1$ olsun. Bu durumda, γ eğrisinin has biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned}
\kappa_\lambda &= \text{sabit} > 0,\ \lambda \in \{1,2,3\}, \\
\kappa_1^2 + \kappa_2^2 &= \frac{1}{4}\left[c + 3s + 3(c-s)\cos^2\mu\right], \\
\kappa_2\kappa_3 &= \frac{3(s-c)\sin 2\mu}{8}
\end{aligned}$$

olmasıdır. Burada, $c > -3s$, $\varphi T = \cos\mu E_2 + \sin\mu E_4$, $\mu \in (0,2\pi) \setminus \left\{\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$ bir sabit, $c + 3s + 3(c-s)\cos^2\mu > 0$ ve $3(s-c)\sin 2\mu > 0$ dır [29].

4.3 $\mathbb{R}^{2n+s}(-3s)$ Üzerinde Slant Eğriler

Bu kısımda, [31] nolu kaynakta verilen, $\mathbb{R}^{2n+s}(-3s)$ S-uzay formu üzerindeki slant eğriler incelenecektir. Öncelikle, $\mathbb{R}^{2n+s}(-3s)$ uzayını tanıtalım [31]:

$M=\mathbb{R}^{2n+s}$ uzayı, $\{x_1,...,x_n,y_1,...,y_n,z_1,...,z_s\}$ koordinat fonksiyonları ile verilsin. Bu uzay üzerinde

$$X=\sum_{i=1}^{n}\left(X_i\frac{\partial}{\partial x_i}+Y_i\frac{\partial}{\partial y_i}\right)+\sum_{\alpha=1}^{s}Z_\alpha\frac{\partial}{\partial z_\alpha}\in\chi(M)$$

olmak üzere,

$$\xi_\alpha=2\frac{\partial}{\partial z_\alpha},\ (\alpha=1,...,\mathrm{s}),$$

$$\eta^\alpha=\frac{1}{2}\left(dz_\alpha-\sum_{i=1}^{n}y_i dx_i\right),\ (\alpha=1,...,s),$$

$$\varphi X=\sum_{i=1}^{n}Y_i\frac{\partial}{\partial x_i}-\sum_{i=1}^{n}X_i\frac{\partial}{\partial y_i}+\left(\sum_{i=1}^{n}Y_i y_i\right)\left(\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial}{\partial z_\alpha}\right),$$

$$g=\sum_{\alpha=1}^{s}\eta^\alpha\otimes\eta^\alpha+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\left(dx_i\otimes dx_i+dy_i\otimes dy_i\right)$$

olarak tanımlansın. Böylece, $(\mathbb{R}^{2n+s},\varphi,\xi_\alpha,\eta^\alpha,g)$ bir S-uzay formdur ve $c=-3s$ sabit φ -kesitsel eğriliğine sahiptir. Bu uzay, kısaca $\mathbb{R}^{2n+s}(-3s)$ ile gösterilir [31]. $\mathbb{R}^{2n+s}(-3s)$ üzerinde, $\alpha\in\{1,...,s\}$ ve $i\in\{1,...,n\}$ olmak üzere

$$X_i=2\frac{\partial}{\partial y_i},\ X_{n+i}=\varphi X_i=2\left(\frac{\partial}{\partial x_i}+y_i\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial}{\partial z_\alpha}\right),\ \xi_\alpha=2\frac{\partial}{\partial z_\alpha}$$

vektör alanları bir g-ortonormal baz oluşturur. Bu baza göre Levi-Civita koneksiyonu

$$\nabla_{X_i} X_j = \nabla_{X_{n+i}} X_{n+j} = 0,\ \nabla_{X_i} X_{n+j} = \delta_{ij} \sum_{\alpha=1}^{s} \xi_\alpha,$$
$$\nabla_{X_{n+i}} X_j = -\delta_{ij} \sum_{\alpha=1}^{s} \xi_\alpha,\ \nabla_{X_i} \xi_\alpha = \nabla_{\xi_\alpha} X_i = -X_{n+i},$$
$$\nabla_{X_{n+i}} \xi_\alpha = \nabla_{\xi_\alpha} X_{n+i} = X_i$$

şeklinde hesaplanır [31].

$\gamma : I \to \mathbb{R}^{2n+s}(-3s)$ eğrisi, değme açısı θ olan birim hızlı bir slant eğri olsun. γ eğrisini, t yay parametresi olmak üzere

$$\gamma(t) = \left(\gamma_1(t), ..., \gamma_n(t), \gamma_{n+1}(t), ..., \gamma_{2n}(t), \gamma_{2n+1}(t), ..., \gamma_{2n+s}(t)\right)$$

şeklinde gösterelim. Bu durumda, γ eğrisinin teğet vektör alanı

$$T = \gamma' = \gamma_1' \frac{\partial}{\partial x_1} + ... + \gamma_n' \frac{\partial}{\partial x_n} + \gamma_{n+1}' \frac{\partial}{\partial y_1} + ... + \gamma_{2n}' \frac{\partial}{\partial y_n} + \gamma_{2n+1}' \frac{\partial}{\partial z_1} + ... + \gamma_{2n+s}' \frac{\partial}{\partial z_s}$$

şeklindedir. $\{X_1, ..., X_n, X_{n+1}, ..., X_{2n}, \xi_1, ..., \xi_s\}$ bazı cinsinden

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{2}\big[& \gamma_{n+1}' X_1 + ... + \gamma_{2n}' X_n + \gamma_1' X_{n+1} + ... + \gamma_n' X_{2n} \\ & + \left(\gamma_{2n+1}' - \gamma_1' \gamma_{n+1} - ... - \gamma_n' \gamma_{2n}\right) \xi_1 + ... \\ & + \left(\gamma_{2n+s}' - \gamma_1' \gamma_{n+1} - ... - \gamma_n' \gamma_{2n}\right) \xi_s \big] \end{aligned}$$

yazabiliriz. γ eğrisi bir slant eğri olduğundan, her $\alpha = 1, ..., s$ için

$$\eta^\alpha(T) = \frac{1}{2}(\gamma_{2n+\alpha}' - \gamma_1' \gamma_{n+1} - ... - \gamma_n' \gamma_{2n}) = \cos\theta$$

dir. Böylece,

$$\gamma_{2n+1}' = ... = \gamma_{2n+s}' = \gamma_1' \gamma_{n+1} + ... + \gamma_n' \gamma_{2n} + 2\cos\theta$$

elde ederiz. Ayrıca, γ eğrisi birim hızlı olduğundan

$$\left(\gamma_1'\right)^2 + ... + \left(\gamma_{2n}'\right)^2 = 4\left(1 - s\cos^2\theta\right)$$

dır. Şimdi, aşağıdaki örnekleri verebiliriz:

Örnek 4.3.1: $n=1$ ve $s=2$ olsun. Bu durumda, $\gamma: I \to \mathbb{R}^4(-6)$, $\gamma(t)=\left(\sqrt{2}t,0,t,t\right)$ eğrisinin $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ değme açısına sahip bir slant çember olduğunu gösterelim. $\{X_1, X_2, \xi_1, \xi_2\}$ bazına göre, γ eğrisinin teğet vektör alanı

$$T=\frac{1}{2}\left[\sqrt{2}X_2+\xi_1+\xi_2\right]$$

dir. O halde,

$$\eta^1(T)=\eta^2(T)=\frac{1}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

elde ederiz. Yani, γ bir slant eğridir. Şimdi, γ eğrisinin bir çember olduğunu gösterelim. Levi-Civita koneksiyonu yardımıyla

$$\nabla_T T=\sqrt{2}X_1$$

buluruz. Yani, $\kappa_1=\sqrt{2}$ ve $E_2=X_1$ dir. Böylece,

$$\nabla_T E_2=-X_2-\frac{\sqrt{2}}{2}(\xi_1+\xi_2)=-\kappa_1 T$$

elde ederiz. Sonuç olarak, $\gamma(t)=\left(\sqrt{2}t,0,t,t\right)$ eğrisi, $\kappa_1=\sqrt{2}$ eğriliğine ve $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ değme açısına sahip bir slant çemberdir.

Örnek 4.3.2: $\cos\theta\in\left(-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}\right)$ olacak şekilde sabit bir açı, $u: I\to\mathbb{R}$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $t_0\in I$, c_1, c_2, c_3 ve c_4 keyfi sabitler,

$$\gamma_1(t)=c_1+2\sqrt{-\cos 2\theta}\int_{t_0}^{t}\cos u(p)dp,\ \gamma_2(t)=c_2+2\sqrt{-\cos 2\theta}\int_{t_0}^{t}\sin u(p)dp,$$

$$\gamma_3(t)=\gamma_4(t)+c_3=c_4+2\sqrt{-\cos 2\theta}\int_{t_0}^{t}\cos u(q)\left(c_2+2\sqrt{-\cos 2\theta}\int_{t_0}^{q}\sin u(p)dp\right)dq$$
$$+2\cos\theta t$$

olmak üzere, $\gamma: I\to\mathbb{R}^4(-6)$, $\gamma(t)=\left(\gamma_1(t),\gamma_2(t),\gamma_3(t),\gamma_4(t)\right)$ eğrisi, değme açısı θ olan bir slant eğridir.

5. SASAKİAN UZAY FORMLARDA f-BİHARMONİK LEGENDRE EĞRİLERİNİN BİR KARAKTERİZASYONU

(M,g) ve (N,h) iki Riemann manifoldu, $\psi:(M,g)\to(N,h)$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. ψ nin f *-bienerji fonksiyoneli*

$$E_{2,f}(\psi)=\frac{1}{2}\int_M f\left|\tau(\psi)\right|^2\upsilon_g$$

ile verilir. Eğer ψ, bu f -bienerji fonksiyonelinin bir kritik noktası ise ψ ye f*-biharmonik dönüşüm* denir [32]. f-bienerji fonksiyonelinin Euler-Lagrange denklemi,

$$\tau_{2,f}(\psi)=f\tau_2(\psi)+\left(\Delta f\right)\tau\left(\psi\right)+2\nabla^{\psi}_{gradf}\tau\left(\psi\right)=0 \tag{5.1}$$

f*-biharmonik dönüşüm denklemini* verir [32]. Her harmonik dönüşüm biharmoniktir. Benzer şekilde her biharmonik dönüşüm f-biharmoniktir. Biharmonik olmayan f-biharmonik dönüşümlere *has* f*-biharmonik dönüşümler* denir [33].

f-biharmonik dönüşümler [32] nolu kaynakta tanıtılmıştır. Ye-Lin Ou [33] nolu kaynakta reel uzay formlarda f- biharmonik eğriler çalışmıştır. D. Fetcu ve C. Oniciuc ise [8] ve [9] nolu kaynaklarda Sasakian uzay formlarda biharmonik Legendre eğriler çalışmışlardır. Bu çalışmalardan esinlenerek, bu bölümde, Sasakian uzay formlarda f-biharmonik Legendre eğrileri ele alacağız. Bu tip eğrilerin eğrilik fonksiyonları için denklemler elde edeceğiz.

5.1 Sasakian Uzay Formlar

$(M^{2m+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ değme metrik manifold olsun. Eğer φ nin Nijenhuis tensörü $-2d\eta\otimes\xi$ ye eşitse, (M,φ,ξ,η,g) ye *Sasakian manifold* denir [27]. Bir Sasakian manifold için

$$(\nabla_X\varphi)Y = g(X,Y)\xi-\eta(Y)X, \tag{5.2}$$

$$\nabla_X\xi = -\varphi X \tag{5.3}$$

eşitlikleri çok iyi bilinmektedir [13].

Bir Sasakian uzay formun eğrilik tensörü, (3.4) eşitliği gereği

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= \frac{c+3}{4}\{g(Y,Z)X-g(X,Z)Y\} \\ &+\frac{c-1}{4}\{g(X,\varphi Z)\varphi Y-g(Y,\varphi Z)\varphi X+2g(X,\varphi Y)\varphi Z \\ &+\eta(X)\eta(Z)Y-\eta(Y)\eta(Z)X+g(X,Z)\eta(Y)\xi-g(Y,Z)\eta(X)\xi\} \end{aligned} \tag{5.4}$$

dir [13].

5.2 Sasakian Uzay Formlarda *f*-Biharmonik Legendre Eğrileri

$\gamma:(a,b)\to(M,g)$ birim hızlı bir eğri olsun. (5.1) eşitliği gereği,

$$f(\nabla_T\nabla_T\nabla_T T-R(T,\nabla_T T)T)+2f'\nabla_T\nabla_T T+f''\nabla_T T=0 \tag{5.5}$$

olacak şekilde bir $f:(a,b)\to(0,\infty)$ fonksiyonu varsa, γ eğrisi f- biharmoniktir [33].

$M=(M^{2m+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ bir Sasakian uzay form ve $\gamma:I\to M$ oskülatör mertebesi r olan bir Legendre eğrisi olsun. O halde

$$\eta(T)=0 \tag{5.6}$$

ifadesi türevlenerek, Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\eta(E_2) = 0 \tag{5.7}$$

elde edilir. (5.4) eşitliği ve Frenet denklemleri yardımıyla

$$\nabla_T \nabla_T T = -\kappa_1^2 E_1 + \kappa_1' E_2 + \kappa_1 \kappa_2 E_3,$$

$$\begin{aligned} \nabla_T \nabla_T \nabla_T T &= -3\kappa_1 \kappa_1' E_1 + \left(\kappa_1'' - \kappa_1^3 - \kappa_1 \kappa_2^2\right) E_2 \\ &+ \left(2\kappa_1' \kappa_2 + \kappa_1 \kappa_2'\right) E_3 + \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 E_4, \end{aligned}$$

$$R(T, \nabla_T T)T = -\kappa_1 \frac{(c+3)}{4} E_2 - 3\kappa_1 \frac{(c-1)}{4} g(\varphi T, E_2)\varphi T,$$

bulunur [9]. (5.5) eşitliğinde soldaki ifadeyi $f.\tau_3$ ile gösterelim. Böylece

$$\begin{aligned} \tau_3 &= \nabla_T \nabla_T \nabla_T T - R(T, \nabla_T T)T + 2\frac{f'}{f} \nabla_T \nabla_T T + \frac{f''}{f} \nabla_T T \\ &= \left(-3\kappa_1 \kappa_1' - 2\kappa_1^2 \frac{f'}{f}\right) E_1 \\ &+ \left(\kappa_1'' - \kappa_1^3 - \kappa_1 \kappa_2^2 + \kappa_1 \frac{(c+3)}{4} + 2\kappa_1' \frac{f'}{f} + \kappa_1 \frac{f''}{f}\right) E_2 \\ &+ (2\kappa_1' \kappa_2 + \kappa_1 \kappa_2' + 2\kappa_1 \kappa_2 \frac{f'}{f}) E_3 + \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 E_4 \\ &+ 3\kappa_1 \frac{(c-1)}{4} g(\varphi T, E_2)\varphi T \end{aligned} \tag{5.8}$$

elde ederiz.

$k = \min\{r, 4\}$ olsun. (5.8) eşitliğinden, γ nın has f-biharmonik olması için gerek ve yeter şart $\tau_3 = 0$ olması; yani,

(1) $c = 1$ veya $\varphi T \perp E_2$ veya $\varphi T \in span\{E_2, ..., E_k\}$ olması; ve

(2) Her $i = 1, ..., k$ için, $g(\tau_3, E_i) = 0$ olmasıdır.

Buna göre, aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 5.2.1: $M=(M^{2m+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ bir Sasakian uzay form, $\gamma: I \to M$ oskülatör mertebesi r olan geodezik olmayan bir Legendre eğrisi ve $k=\min\{r,4\}$ olsun. Bu durumda, γ eğrisinin f-biharmonik olması için gerek ve yeter şart

(1) $c=1$ veya $\varphi T \perp E_2$ veya $\varphi T \in span\{E_2,...,E_k\}$ olması; ve

(2) $\kappa_k=0$ yazılarak aşağıdaki denklemlerin ilk k tanesinin sağlanmasıdır:

$$\begin{gathered}
3\kappa_1' + 2\kappa_1 \frac{f'}{f} = 0, \\
\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = \frac{c+3}{4} + \frac{3(c-1)}{4}\left[g(\varphi T, E_2)\right]^2 + \frac{\kappa_1''}{\kappa_1} + \frac{f''}{f} + 2\frac{\kappa_1'}{\kappa_1}\frac{f'}{f}, \\
\kappa_2' + \frac{3(c-1)}{4} g(\varphi T, E_2) g(\varphi T, E_3) + 2\kappa_2 \frac{f'}{f} + 2\kappa_2 \frac{\kappa_1'}{\kappa_1} = 0, \\
\kappa_2\kappa_3 + \frac{3(c-1)}{4} g(\varphi T, E_2) g(\varphi T, E_4) = 0.
\end{gathered}$$

Teorem 5.2.1 den, $\kappa_1 = \text{sabit}$ olduğunda f-biharmonik eğrinin biharmonik olduğu açıktır. Sasakian uzay formlarda biharmonik Legendre eğrileri Fetcu ve Oniciuc tarafından [9] nolu kaynakta çalışılmıştır. Bu sebeple, bu çalışmada $\kappa_1 \neq \text{sabit}$ olan f-biharmonik eğriler ele alınacaktır.

Şimdi, Teorem 5.2.1 i dört farklı durum için inceleyeceğiz.

Durum 1. $c=1$ olması.

Bu durumda, γ eğrisinin f-biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{gathered}
3\kappa_1' + 2\kappa_1 \frac{f'}{f} = 0, \\
\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = 1 + \frac{\kappa_1''}{\kappa_1} + \frac{f''}{f} + 2\frac{\kappa_1'}{\kappa_1}\frac{f'}{f}, \\
\kappa_2' + 2\kappa_2 \frac{f'}{f} + 2\kappa_2 \frac{\kappa_1'}{\kappa_1} = 0, \\
\kappa_2\kappa_3 = 0
\end{gathered} \tag{5.9}$$

olmasıdır. Böylece şu teoremi verebiliriz:

Teorem 5.2.2: $M=(M^{2m+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ bir Sasakian uzay form, $\gamma: I \to M$ oskülatör mertebesi r olan bir Legendre eğrisi, $c=1$ ve $m>1$ olsun. γ eğrisinin has f-biharmonik olması için gerek ve yeter şart

(1) γ nın oskülatör mertebesi $r=2$, $f=c_1\kappa_1^{-3/2}$, $c_1>0$, $c_3<-2$ ve c_4 keyfi sabitler, t yay parametresi ve

$$\frac{1}{2}(-\sqrt{c_3^2-4}-c_3)<\kappa_1(t)<\frac{1}{2}(\sqrt{c_3^2-4}-c_3) \tag{5.10}$$

olmak üzere κ_1 in

$$t\pm\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2+c_3\kappa_1}{2\sqrt{-\kappa_1^2-c_3\kappa_1-1}}\right)+c_4=0 \tag{5.11}$$

denklemini sağlaması; veya

(2) γ nın oskülatör mertebesi $r=3$, $f=c_1\kappa_1^{-3/2}$, $\dfrac{\kappa_2}{\kappa_1}=c_2$, $c_1>0$, $c_2>0$, $c_3<-2\sqrt{(1+c_2^2)}$ ve c_4 keyfi sabitler, t yay parametresi ve

$$\frac{1}{2(1+c_2^2)}(-\sqrt{c_3^2-4(1+c_2^2)}-c_3)<\kappa_1(t)<\frac{1}{2(1+c_2^2)}(\sqrt{c_3^2-4(1+c_2^2)}-c_3) \tag{5.12}$$

olmak üzere κ_1 in

$$t\pm\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2+c_3\kappa_1}{2\sqrt{-(1+c_2^2)\kappa_1^2-c_3\kappa_1-1}}\right)+c_4=0 \tag{5.13}$$

denklemini sağlamasıdır.

İspat: Gereklilik: γ eğrisi has f-biharmonik olsun. (5.9) eşitliklerinden ilkini kullanırsak, keyfi bir $c_1>0$ sabiti için $f=c_1\kappa_1^{-3/2}$ yazabiliriz. Böylece

$$\frac{f'}{f}=\frac{-3}{2}\frac{\kappa_1'}{\kappa_1},\ \frac{f''}{f}=\frac{15}{4}\left(\frac{\kappa_1'}{\kappa_1}\right)^2-\frac{3}{2}\frac{\kappa_1''}{\kappa_1} \tag{5.14}$$

buluruz.

Eğer $\kappa_2=0$ ise, γ nın oskülatör mertebesi $r=2$ dir ve (5.9) eşitliklerinin ilk ikisi sağlanmalıdır. Böylece ikinci eşitlikte (5.14) ü yerine yazarsak

$$3(\kappa_1')^2-2\kappa_1\kappa_1''=4\kappa_1^2(\kappa_1^2-1) \tag{5.15}$$

diferensiyel denklemini elde ederiz. t yay parametresini göstermek üzere $\kappa_1=\kappa_1(t)$ olsun. (5.15) diferensiyel denklemini çözersek (5.11) eşitliğini elde ederiz. (5.11) denkleminin iyi tanımlı olması için $-\kappa_1^2-c_3\kappa_1-1>0$ olmalıdır. $\kappa_1>0$ olduğundan $c_3<-2$ ve (5.10) eşitsizliğine ulaşırız.

Eğer $\kappa_2=\text{sabit}\neq 0$ ise, (5.9) in birinci ve üçüncü eşitliklerinden f bir sabit çıkar. Bu sebeple, γ eğrisi has f-biharmonik olamaz. $\kappa_2\neq\text{sabit}$ olsun. (5.9) deki dördüncü eşitlikten $\kappa_3=0$ buluruz. Böylece γ nın oskülatör mertebesi $r=3$ tür. (5.9) deki üçüncü eşitlikten $c_2>0$ bir keyfi sabir olmak üzere, $\frac{\kappa_2}{\kappa_1}=c_2$ elde ederiz. Bu eşitlikleri, (5.9) deki ikinci denklemde yerine yazarsak

$$3(\kappa_1')^2-2\kappa_1\kappa_1''=4\kappa_1^2[(1+c_2^2)\kappa_1^2-1] \tag{5.16}$$

diferensiyel denklemini buluruz. $c_3<-2\sqrt{(1+c_2^2)}$ olmak üzere, (5.16) denkleminin genel çözümü (5.13) dir. Paydada yer alan karekök içindeki ifadenin pozitif olması gerektiğinden, (5.12) eşitsizliği de sağlanmalıdır.

Yeterlilik: γ eğrisi (1) veya (2) ile verilen koşulları sağlıyor olsun. O halde (5.9) eşitliklerinin sağlanacağı açıktır. ■

Uyarı: Eğer $m=1$ ise, M 3-boyutlu bir Sasakian uzay form olacağından $\kappa_2=1$ sabit olur [30]. Bu da f nin sabit olmasını gerektirdiğinden, γ eğrisi has f-biharmonik olamaz. O halde $m>1$ olmalıdır.

Durum 2. $c \neq 1$ ve $\varphi T \perp E_2$ olması.

Bu durumda $g(\varphi T, E_2) = 0$ dır. Teorem 5.2.1 den

$$\begin{aligned} 3\kappa_1' + 2\kappa_1 \frac{f'}{f} &= 0, \\ \kappa_1^2 + \kappa_2^2 &= \frac{c+3}{4} + \frac{\kappa_1''}{\kappa_1} + \frac{f''}{f} + 2\frac{\kappa_1'}{\kappa_1}\frac{f'}{f}, \\ \kappa_2' + 2\kappa_2 \frac{f'}{f} + 2\kappa_2 \frac{\kappa_1'}{\kappa_1} &= 0, \\ \kappa_2 \kappa_3 &= 0 \end{aligned} \tag{5.17}$$

eşitliklerini yazabiliriz. İlk olarak, [9] nolu kaynaktan, aşağıdaki önermeye ihtiyacımız vardır:

Önerme 5.2.3: $M = (M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir Sasakian uzay form, $\gamma : I \to M$ oskülatör mertebesi 3 olan bir Legendre eğrisi ve $\varphi T \perp E_2$ olsun. O halde, $\{T = E_1, E_2, E_3, \varphi T, \nabla_T \varphi T, \xi\}$ kümesi γ nın her noktasında lineer bağımsızdır [9].

Şimdi aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz:

Teorem 5.2.4: $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir Sasakian uzay form, $\gamma : I \to M$ oskülatör mertebesi r olan bir Legendre eğrisi, $c \neq 1$ ve $\varphi T \perp E_2$ olsun. γ eğrisinin has f-biharmonik olması için gerek ve yeter şart

(1) $r = 2$, $f = c_1 \kappa_1^{-3/2}$, $m \geq 2$, $\{T = E_1, E_2, \varphi T, \nabla_T \varphi T, \xi\}$ kümesinin lineer bağımsız olması ve

(a) Eğer $c > -3$ ise, κ_1 in

$$t \pm \frac{1}{\sqrt{c+3}} \arctan\left(\frac{c+3+2c_3\kappa_1}{\sqrt{c+3}\sqrt{-4\kappa_1^2 - 4c_3\kappa_1 - c - 3}} \right) + c_4 = 0$$

denklemini sağlaması,

(b) Eğer $c=-3$ ise, κ_1 in

$$t\pm\frac{\sqrt{-\kappa_1(\kappa_1+c_3)}}{c_3\kappa_1}+c_4=0$$

denklemini sağlaması,

(c) Eğer $c<-3$ ise, κ_1 in

$$t\pm\frac{1}{\sqrt{-c-3}}\ln\left(\frac{c+3+2c_3\kappa_1-\sqrt{-c-3}\sqrt{-4\kappa_1^2-4c_3\kappa_1-c-3}}{(c+3)\kappa_1}\right)+c_4=0$$

denklemini sağlaması; veya

(2) $r=3$, $f=c_1\kappa_1^{-3/2}$, $m\geq 3$, $\{T=E_1,E_2,E_3,\varphi T,\nabla_T\varphi T,\xi\}$ kümesinin lineer

bağımsız olması, $\dfrac{\kappa_2}{\kappa_1}=c_2=\text{sabit}>0$ ve

(a) Eğer $c>-3$ ise, κ_1 in

$$t\pm\frac{1}{\sqrt{c+3}}\arctan\left(\frac{c+3+2c_3\kappa_1}{\sqrt{c+3}\sqrt{-4(1+c_2^2)\kappa_1^2-4c_3\kappa_1-c-3}}\right)+c_4=0$$

denklemini sağlaması,

(b) Eğer $c=-3$ ise, κ_1 in

$$t\pm\frac{\sqrt{-\kappa_1\left[(1+c_2^2)\kappa_1+c_3\right]}}{c_3\kappa_1}+c_4=0$$

denklemini sağlaması,

(c) Eğer $c<-3$, κ_1 in

$$t \pm \frac{1}{\sqrt{-c-3}} \ln\left(\frac{c+3+2c_3\kappa_1 - \sqrt{-c-3}\sqrt{-4(1+c_2^2)\kappa_1^2 - 4c_3\kappa_1 - c - 3}}{(c+3)\kappa_1} \right) + c_4 = 0$$

denklemini sağlamasıdır. Burada $c_1 > 0,\ c_2 > 0,\ c_3$ ve c_4 uygun keyfi sabitler, t yay parametresi ve κ_1 uygun aralıkta tanımlıdır.

İspat: Teoremin ispatı, Teorem 5.2.2 nin ispatına benzer şekilde yapılır. ■

Durum 3. $c \neq 1$ ve $\varphi T \parallel E_2$ olması.

Bu durumda, $\varphi T = \pm E_2,\ g(\varphi T, E_2) = \pm 1,\quad g(\varphi T, E_3) = g(\pm E_2, E_3) = 0$ ve $g(\varphi T, E_4) = g(\pm E_2, E_4) = 0$ dır. Teorem 5.2.1 gereği

$$\begin{gathered} 3\kappa_1' + 2\kappa_1 \frac{f'}{f} = 0, \\ \kappa_1^2 + \kappa_2^2 = c + \frac{\kappa_1''}{\kappa_1} + \frac{f''}{f} + 2\frac{\kappa_1'}{\kappa_1}\frac{f'}{f}, \\ \kappa_2' + 2\kappa_2 \frac{f'}{f} + 2\kappa_2 \frac{\kappa_1'}{\kappa_1} = 0, \\ \kappa_2\kappa_3 = 0 \end{gathered} \tag{5.18}$$

eşitlikleri geçerlidir. $\varphi T = \pm E_2$ ifadesinin türevini alır ve Frenet denklemlerini kullanırsak, kolayca $\kappa_2 = 1$ elde ederiz. Böylece, (5.18) deki birinci ve üçüncü eşitliklerden f sabit çıkar. Buradan, aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz:

Teorem 5.2.5: $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ Sasakian uzay formunda $c \neq 1$ ve $\varphi T \parallel E_2$ olacak şekilde has *f*-biharmonik Legendre eğrisi yoktur.

Durum 4. $c \neq 1$ ve $g(\varphi T, E_2) \neq 0, 1, -1$ olması.

$(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir Sasakian uzay form, $\gamma : I \to M$ oskülatör mertebesi $4 \leq r \leq 2m+1$ olan bir Legendre eğrisi ve $m \geq 2$ olsun. Bu durumda

$\varphi T \in span\{E_2, E_3, E_4\}$ tür. $\theta(t)$ ile φT ve E_2 arasındaki açı fonksiyonunu gösterelim; yani, $g(\varphi T, E_2) = \cos\theta(t)$ olsun. Bu ifadeyi γ boyunca türevlersek

$$\begin{aligned} -\theta'(t)\sin\theta(t) &= \nabla_T g(\varphi T, E_2) = g(\nabla_T \varphi T, E_2) + g(\varphi T, \nabla_T E_2) \\ &= g(\xi + \kappa_1 \varphi E_2, E_2) + g(\varphi T, -\kappa_1 T + \kappa_2 E_3) \\ &= \kappa_2 g(\varphi T, E_3) \end{aligned} \tag{5.19}$$

elde ederiz. Ortonormal açılım gereği

$$\varphi T = g(\varphi T, E_2)E_2 + g(\varphi T, E_3)E_3 + g(\varphi T, E_4)E_4$$

olduğundan, Teorem 5.2.1 deki eşitlikler

$$3\kappa_1' + 2\kappa_1 \frac{f'}{f} = 0, \tag{5.20}$$

$$\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = \frac{c+3}{4} + \frac{3(c-1)}{4}\cos^2\theta + \frac{\kappa_1''}{\kappa_1} + \frac{f''}{f} + 2\frac{\kappa_1'}{\kappa_1}\frac{f'}{f}, \tag{5.21}$$

$$\kappa_2' + \frac{3(c-1)}{4}\cos\theta g(\varphi T, E_3) + 2\kappa_2 \frac{f'}{f} + 2\kappa_2 \frac{\kappa_1'}{\kappa_1} = 0, \tag{5.22}$$

$$\kappa_2\kappa_3 + \frac{3(c-1)}{4}\cos\theta g(\varphi T, E_4) = 0 \tag{5.23}$$

şekline dönüşür. Eğer (5.14) eşitliklerini (5.21) ve (5.22) de yerine yazarsak, sırasıyla

$$\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = \frac{c+3}{4} + \frac{3(c-1)}{4}\cos^2\theta - \frac{\kappa_1''}{2\kappa_1} + \frac{3}{4}\left(\frac{\kappa_1'}{\kappa_1}\right)^2 \tag{5.24}$$

ve

$$\kappa_2' - \frac{\kappa_1'}{\kappa_1}\kappa_2 + \frac{3(c-1)}{4}\cos\theta g(\varphi T, E_3) = 0 \tag{5.25}$$

elde ederiz. (5.25) eşitliğini $2\kappa_2$ ile çarpar ve (5.19) i kullanırsak

$$2\kappa_2\kappa_2' - 2\frac{\kappa_1'}{\kappa_1}\kappa_2^2 + \frac{3(c-1)}{4}(-2\theta'\cos\theta\sin\theta) = 0 \qquad (5.26)$$

buluruz. t yay parametresi olmak üzere, $\upsilon(t) = \kappa_2^2(t)$ diyelim. Böylece (5.26) denklemi

$$\upsilon' - 2\frac{\kappa_1'}{\kappa_1}\upsilon = -\frac{3(c-1)}{4}(-2\theta'\cos\theta\sin\theta) \qquad (5.27)$$

haline gelir. Bu lineer bir adi diferansiyel denklemdir. (5.27) yı çözersek şu sonuçları elde ederiz:

(1) Eğer θ bir sabit ise, o zaman $c_2 > 0$ bir keyfi sabit olmak üzere

$$\frac{\kappa_2}{\kappa_1} = c_2 \qquad (5.28)$$

dir. (5.19) den $g(\varphi T, E_3) = 0$ buluruz. $\|\varphi T\| = 1$ ve $\varphi T = \cos\theta E_2 + g(\varphi T, E_4)E_4$ olduğundan, $g(\varphi T, E_4) = \pm\sin\theta$ dır. (5.21) ve (5.28) eşitliklerinden

$$3(\kappa_1')^2 - 2\kappa_1\kappa_1'' = 4\kappa_1^2[(1+c_2^2)\kappa_1^2 - \frac{c+3+3(c-1)\cos^2\theta}{4}]$$

dir.

(2) Eğer $\theta = \theta(t)$ sabit olmayan bir fonksiyonsa, o zaman

$$\lambda(t) = -\frac{3(c-1)}{2}\int\frac{\cos^2\theta\kappa_1'}{\kappa_1^3}dt$$

olmak üzere, (5.27) denkleminin çözümü

$$\kappa_2^2 = -\frac{3(c-1)}{4}\cos^2\theta + \lambda(t).\kappa_1^2 \qquad (5.29)$$

dir. Eğer (5.29) i (5.24) de yerine yazarsak,

$$\left[1+\lambda(t)\right].\kappa_1^2 = \frac{c+3+6(c-1)\cos^2\theta}{4} - \frac{\kappa_1''}{2\kappa_1} + \frac{3}{4}\left(\frac{\kappa_1'}{\kappa_1}\right)^2$$

eşitliğine ulaşırız.

Sonuç olarak, aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 5.2.6: (M,φ,ξ,η,g) bir Sasakian uzay form, $\gamma : I \to M$ oskülatör mertebesi $4 \le r \le 2m+1$ olan bir Legendre eğrisi, $m \ge 2$, $c \ne 1$, $g(\varphi T, E_2) = \cos\theta(t) \ne 0,1,-1$ olsun. Bu durumda γ nın has f -biharmonik olması için gerek ve yeter şart $f = c_1\kappa_1^{-3/2}$ ve

(1) eğer θ sabitse,

$$\frac{\kappa_2}{\kappa_1} = c_2,$$

$$3(\kappa_1')^2 - 2\kappa_1\kappa_1'' = 4\kappa_1^2[(1+c_2^2)\kappa_1^2 - \frac{c+3+3(c-1)\cos^2\theta}{4}],$$

$$\kappa_2\kappa_3 = \pm\frac{3(c-1)\sin 2\theta}{8}$$

olması; veya

(2) eğer θ sabit olmayan bir fonksiyonsa,

$$\kappa_2^2 = -\frac{3(c-1)}{4}\cos^2\theta + \lambda(t).\kappa_1^2,$$

$$3(\kappa_1')^2 - 2\kappa_1\kappa_1'' = 4\kappa_1^2[(1+\lambda(t))\kappa_1^2 - \frac{c+3+6(c-1)\cos^2\theta}{4}],$$

$$\kappa_2\kappa_3 = \pm\frac{3(c-1)\sin 2\theta \sin w}{8}$$

olmasıdır. Burada, c_1 ve c_2 pozitif sabitler, $w = w(t)$, φT nin $span\{E_3, E_4\}$ üzerine dik izdüşümü ile E_3 arasındaki açı fonksiyonu olmak üzere

$$\varphi T = \cos\theta E_2 \pm \sin\theta\cos wE_3 \pm \sin\theta\sin wE_4$$

dir. w ile θ arasındaki ilişki $\cos w = \dfrac{-\theta'}{\kappa_2}$ dir ve $\lambda(t)$ ise

$$\lambda(t) = -\frac{3(c-1)}{2}\int \frac{\cos^2\theta\kappa_1'}{\kappa_1^3}dt$$

ile verilir.

Teorem 5.2.6 nın doğrudan bir sonucu şu şekilde elde edilir:

Sonuç 5.2.7: (M,φ,ξ,η,g) bir Sasakian uzay form, $\gamma : I \to M$ oskülatör mertebesi $4 \le r \le 2m+1$ olan bir Legendre eğrisi, $m \ge 2$, $c \ne 1$, $g(\varphi T, E_2) = \cos\theta$ ve $\theta \in (0,2\pi)\setminus\left\{\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2}\right\}$ bir sabit olsun. Bu durumda, γ nın has f -biharmonik olması için gerek ve yeter şart $f = c_1\kappa_1^{-3/2}$,

$$\frac{\kappa_2}{\kappa_1} = c_2 = \text{sabit} > 0,$$

$$\kappa_2\kappa_3 = \pm\frac{3(c-1)\sin 2\theta}{8},$$

$$\kappa_4 = \pm\frac{\eta(E_5) + g(\varphi E_2, E_5)\kappa_1}{\sin\theta} \text{ (eğer } r > 4 \text{ ise); ve}$$

(1) eğer $a > 0$ ise, κ_1 in

$$t \pm \frac{1}{2\sqrt{a}}\arctan\left(\frac{1}{2\sqrt{a}}\frac{2a + c_3\kappa_1}{\sqrt{-(1+c_2^2)\kappa_1^2 - c_3\kappa_1 - a}}\right) + c_4 = 0$$

denklemini sağlaması,

(2) eğer $a = 0$ ise, κ_1 in

$$t \pm \frac{\sqrt{-\kappa_1\left[(1+c_2^2)\kappa_1 + c_3\right]}}{c_3\kappa_1} + c_4 = 0$$

denklemini sağlaması,

(3) eğer $a < 0$ ise, κ_1 in

$$t \pm \frac{1}{2\sqrt{-a}} \ln\left(\frac{2a + c_3\kappa_1 - 2\sqrt{-a}\sqrt{-(1+c_2^2)\kappa_1^2 - c_3\kappa_1 - a}}{2a\kappa_1} \right) + c_4 = 0$$

denklemini sağlamasıdır.

Burada, $a = \left[c + 3 + 3(c-1)\cos^2\theta\right]/4$, $\varphi T = \cos\theta E_2 \pm \sin\theta E_4$, $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, c_3 ve c_4 uygun keyfi sabitler, t yay parametresi ve $\kappa_1(t)$ uygun aralıkta tanımlıdır.

5.3 *f*-Biharmonik Eğri Örnekleri

Şimdi, Teorem 5.2.4 için örnek elde edeceğimiz $\mathbb{R}^{2m+1}(-3)$ Sasakian uzay formunu tanıtacağız [13]. Bu uzay form, dördüncü bölümde verilen $\mathbb{R}^{2n+s}(-3s)$ *S*-uzay formunun $s = 1$ için özel bir halidir.

$M = \mathbb{R}^{2m+1}$ olsun. M manifoldu üzerinde, standart koordinat fonksiyonları $(x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_m, z)$ olmak üzere, $\eta = \frac{1}{2}(dz - \sum_{i=1}^{m} y_i dx_i)$ değme kontakt yapısı, $\xi = 2\frac{\partial}{\partial z}$ karakteristik vektör alanı ve

$$\varphi = \begin{bmatrix} 0 & \delta_{ij} & 0 \\ -\delta_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & y_j & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanan (1,1)-tipinden φ tensör alanı verilsin. *M* üzerinde

$$g=\eta\otimes\eta+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{m}\left[(dx_i)^2+(dy_i)^2\right]$$

Riemann metriğini düşünelim. Böylece (M,φ,ξ,η,g) bir Sasakian uzay formdur ve $c=-3$ sabit φ-kesitsel eğriliğine sahiptir. Bu Sasakian uzay form kısaca $\mathbb{R}^{2m+1}(-3)$ ile gösterilir. $\mathbb{R}^{2m+1}(-3)$ te, $i\in\{1,...,m\}$ olmak üzere

$$X_i=2\frac{\partial}{\partial y_i},\ X_{m+i}=\varphi X_i=2(\frac{\partial}{\partial x_i}+y_i\frac{\partial}{\partial z}),\ \xi=2\frac{\partial}{\partial z}$$

vektör alanları bir g-ortonormal baz oluşturur. Bu baza göre Levi-Civita koneksiyonu

$$\begin{gathered}\nabla_{X_i}X_j=\nabla_{X_{m+i}}X_{m+j}=0,\ \nabla_{X_i}X_{m+j}=\delta_{ij}\xi,\\ \nabla_{X_{m+i}}X_j=-\delta_{ij}\xi,\ \nabla_{X_i}\xi=\nabla_{\xi}X_i=-X_{m+i},\\ \nabla_{X_{m+i}}\xi=\nabla_{\xi}X_{m+i}=X_i\end{gathered}$$

şeklinde hesaplanır [13].

Şimdi, $\mathbb{R}^7(-3)$ uzayında has *f*-biharmonik Legendre eğri örnekleri elde edeceğiz:

$\mathbb{R}^7(-3)$ te birim hızlı bir eğri $\gamma=(\gamma_1,...,\gamma_7)$ olsun. γ nın teğet vektör alanı

$$T=\frac{1}{2}\left[\gamma_4'X_1+\gamma_5'X_2+\gamma_6'X_3+\gamma_1'X_4+\gamma_2'X_5+\gamma_3'X_6+(\gamma_7'-\gamma_1'\gamma_4-\gamma_2'\gamma_5-\gamma_3'\gamma_6)\xi\right]$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda, γ eğrisinin birim hızlı bir Legendre eğrisi olması için gerek ve yeter şart $\eta(T)=0$ ve $g(T,T)=1$ olması; yani,

$$\gamma_7'=\gamma_1'\gamma_4+\gamma_2'\gamma_5+\gamma_3'\gamma_6$$

ve

$$(\gamma_1')^2+...+(\gamma_6')^2=4$$

olmasıdır.

Bir Legendre eğrisi için Levi-Civita koneksiyonunu kullanarak

$$\nabla_T T = \frac{1}{2}\left(\gamma_4'' X_1 + \gamma_5'' X_2 + \gamma_6'' X_3 + \gamma_1'' X_4 + \gamma_2'' X_5 + \gamma_3'' X_6\right)$$

ve ayrıca φ tensör alanının tanımından

$$\varphi T = \frac{1}{2}(-\gamma_1' X_1 - \gamma_2' X_2 - \gamma_3' X_3 + \gamma_4' X_4 + \gamma_5' X_5 + \gamma_6' X_6)$$

elde ederiz. Bu son iki eşitlik kullanıldığında $\varphi T \perp E_2$ olması için gerek ve yeter şart

$$\gamma_1''\gamma_4' + \gamma_2''\gamma_5' + \gamma_3''\gamma_6' = \gamma_1'\gamma_4'' + \gamma_2'\gamma_5'' + \gamma_3'\gamma_6''$$

olmasıdır.

Sonuç olarak, aşağıdaki iki örneği verebiliriz:

Örnek 5.3.1: $\mathbb{R}^7(-3)$ Sasakian uzay formunda

$$\gamma(t) = (2\operatorname{arcsinh}(t), \sqrt{1+t^2}, \sqrt{3}\sqrt{1+t^2}, 0, 0, 0, 1)$$

eğrisini ele alalım. Yukarıdaki eşitlikler ve Teorem 5.2.4 yardımıyla, γ eğrisinin oskülatör mertebesi $r = 2$ olan f-biharmonik bir Legendre eğrisi olduğu gösterilebilir. γ eğrisi için $\kappa_1 = \dfrac{1}{1+t^2}$, $f = c_1(1+t^2)^{3/2}$ olarak hesaplanır. Burada $c_1 > 0$ bir keyfi sabittir. $c_3 = -1$ ve $c_4 = 0$ alarak Teorem 5.2.4 deki koşullar sağlanır.

Örnek 5.3.2: $\mathbb{R}^7(-3)$ Sasakian uzay formunda

$$\gamma(t) = (a_1, a_2, a_3, \sqrt{2}t, 2\operatorname{arcsinh}(\frac{t}{\sqrt{2}}), \sqrt{2}\sqrt{2+t^2}, a_4)$$

eğrisini düşünelim. Burada $a_\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda = 1,...,4$ tür. Bu durumda

$$T = \frac{\sqrt{2}}{2} X_1 + \frac{1}{\sqrt{2+t^2}} X_2 + \frac{\sqrt{2}t}{2\sqrt{2+t^2}} X_3,$$

$$E_2 = \frac{-t}{\sqrt{2+t^2}} X_2 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+t^2}} X_3,$$

$$E_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} X_1 - \frac{1}{\sqrt{2+t^2}} X_2 - \frac{\sqrt{2}t}{2\sqrt{2+t^2}} X_3,$$

$$\kappa_1 = \kappa_2 = \frac{1}{2+t^2}, \; r = 3$$

olarak hesaplarız. O halde Teorem 5.2.4 te $c_1 > 0$, $c_2 = 1$, $c_3 = -1$ ve $c_4 = 0$ alındığında $f = c_1(2+t^2)^{3/2}$ olmak üzere γ eğrisi f -biharmonik bir Legendre eğridir.

6. TRANS-SASAKİAN MANİFOLDLARDA SLANT EĞRİLER

J. E. Lee, Y. J. Suh ve H. Lee, [34] nolu kaynakta teğet ve normal demetlerde C-paralel ve C-proper eğri kavramlarını tanıttılar. (M,φ,ξ,η,g) bir hemen hemen değme Riemann metrik manifold, $\gamma : I \to M$ birim hızlı bir eğri olsun. γ eğrisine; eğer $\nabla_T H = \lambda\xi$ ise *C-paralel,* $\Delta H = \lambda\xi$ ise *C-proper,* $\nabla_T^{\perp} H = \lambda\xi$ ise *normal demette C-paralel,* $\Delta^{\perp} H = \lambda\xi$ ise *normal demette C-proper eğri* denir. Burada T γ eğrisinin teğet vektör alanı, H ortalama eğrilik vektör alanı, Δ Laplas dönüşümü, λ sıfırdan farklı diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $\nabla^{\perp}$ ve $\Delta^{\perp}$ sırasıyla normal koneksiyon ve normal demette Laplas'tır [34]. $\overline{M}$ bir Riemann manifoldu olmak üzere, bir $M \subset \overline{M}$ altmanifoldu için $\Delta H = \lambda H$ oluyorsa, M ye *has ortalama eğrilik vektör alanına sahip altmanifold* [35]; eğer $\Delta^{\perp} H = \lambda H$ oluyor ise, *normal demette has ortalama eğrilik vektör alanına sahip altmanifold* [16] denir.

M bir hemen hemen değme metrik manifold ve $\gamma : I \to M$ birim hızlı bir Frenet eğrisi olsun. Yay parametresi s ile gösterilmek üzere,

$$\cos[\alpha(s)] = g(T(s),\xi)$$

eşitliği ile tanımlı $\alpha(s)$ fonksiyonuna *değme açısı* denir. Eğer değme açısı sabitse, γ eğrisine *slant eğri* denir [7].

Srivastava, [36] nolu kaynakta, trans-Sasakian 3-manifoldlarda Legendre eğrileri çalıştı. [37] nolu kaynakta ise, Inoguchi ve Lee, normal hemen hemen değme 3-manifoldlarda Legendre eğrileri araştırmışlardır. Yine aynı yazarlar, [38] de normal hemen hemen değme metrik 3-manifoldlarda slant eğriler üzerinde durdular. [34] nolu kaynakta, J. E. Lee, Y. J. Suh ve H. Lee, Sasakian 3-manifoldlarda slant eğrileri inceleyerek, teğet ve normal demetlerde C-paralel ve C-proper eğrilerin karakterizasyonunu belirlediler. Bu bölümdeki amacımız, [34] nolu kaynaktaki sonuçları genelleyerek, bir trans-Sasakian manifolddaki slant eğrilerin C-paralel ve C-proper olma koşullarını elde etmektir.

Bu bölümde, " (α,β)-trans-Sasakian manifold " ifadesi kullanıldığında, manifoldun boyutunun 3 ve $\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0$ olduğu kastedilmektedir.

(M,g) bir Riemann manifold ve $\gamma : I \to M$ oskülatör mertebesi r olan bir Frenet eğrisi olsun. Frenet formülleri yardımıyla, kolayca

$$\nabla_T \nabla_T T = -\kappa_1^2 E_1 + \kappa_1' E_2 + \kappa_1 \kappa_2 E_3,$$

$$\begin{aligned}\nabla_T \nabla_T \nabla_T T &= -3\kappa_1 \kappa_1' E_1 + \left(\kappa_1'' - \kappa_1^3 - \kappa_1 \kappa_2^2\right) E_2 \\ &\quad + \left(2\kappa_1' \kappa_2 + \kappa_1 \kappa_2'\right) E_3 + \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 E_4,\end{aligned}$$

$$\nabla_T^{\perp} \nabla_T^{\perp} T = \kappa_1' E_2 + \kappa_1 \kappa_2 E_3,$$

$$\nabla_T^{\perp} \nabla_T^{\perp} \nabla_T^{\perp} T = \left(\kappa_1'' - \kappa_1 \kappa_2^2\right) E_2 + \left(2\kappa_1' \kappa_2 + \kappa_1 \kappa_2'\right) E_3 + \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 E_4$$

eşitlikleri hesaplanır. Böylelikle

$$\nabla_T H = -\kappa_1^2 E_1 + \kappa_1' E_2 + \kappa_1 \kappa_2 E_3, \tag{6.1}$$

$$\begin{aligned}\Delta H &= -\nabla_T \nabla_T \nabla_T T \\ &= 3\kappa_1 \kappa_1' E_1 + \left(\kappa_1^3 + \kappa_1 \kappa_2^2 - \kappa_1''\right) E_2 \\ &\quad - (2\kappa_1' \kappa_2 + \kappa_1 \kappa_2') E_3 - \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 E_4,\end{aligned} \tag{6.2}$$

$$\nabla_T^{\perp} H = \kappa_1' E_2 + \kappa_1 \kappa_2 E_3, \tag{6.3}$$

$$\begin{aligned}\Delta^{\perp} H &= -\nabla_T^{\perp} \nabla_T^{\perp} \nabla_T^{\perp} T \\ &= \left(\kappa_1 \kappa_2^2 - \kappa_1''\right) E_2 - \left(2\kappa_1' \kappa_2 + \kappa_1 \kappa_2'\right) E_3 \\ &\quad - \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 E_4\end{aligned} \tag{6.4}$$

elde ederiz [16]. (6.1), (6.2), (6.3) ve (6.4) eşitliklerini kullanarak, aşağıdaki önermeyi verebiliriz:

Önerme 6.1: (M,φ,ξ,η,g) bir trans-Sasakian manifold ve $\gamma: I \to M$ geodezik olmayan bir Frenet eğrisi olsun. Bu durumda, γ eğrisinin

(i) *C*-paralel ortalama eğrilik vektör alanına sahip olması için gerek ve yeter şart

$$-\kappa_1^2 E_1 + \kappa_1' E_2 + \kappa_1\kappa_2 E_3 = \lambda\xi \tag{6.5}$$

olması,

(ii) *C*-proper ortalama eğrilik vektör alanına sahip olması için gerek ve yeter şart

$$3\kappa_1\kappa_1' E_1 + \left(\kappa_1^3 + \kappa_1\kappa_2^2 - \kappa_1''\right) E_2 - (2\kappa_1'\kappa_2 + \kappa_1\kappa_2') E_3 - \kappa_1\kappa_2\kappa_3 E_4 = \lambda\xi \tag{6.6}$$

olması,

(iii) normal demette *C*-paralel ortalama eğrilik vektör alanına sahip olması için gerek ve yeter şart

$$\kappa_1' E_2 + \kappa_1\kappa_2 E_3 = \lambda\xi \tag{6.7}$$

olması,

(iv) normal demette *C*-proper ortalama eğrilik vektör alanına sahip olması için gerek ve yeter şart

$$\left(\kappa_1\kappa_2^2 - \kappa_1''\right) E_2 - \left(2\kappa_1'\kappa_2 + \kappa_1\kappa_2'\right) E_3 - \kappa_1\kappa_2\kappa_3 E_4 = \lambda\xi \tag{6.8}$$

olmasıdır. Burada $\lambda: I \to \mathbb{R}$, γ eğrisi boyunca sıfırdan farklı diferensiyellenebilir bir fonksiyondur [39].

Şimdi, (M,φ,ξ,η,g) bir trans-Sasakian manifold, $\gamma: I \to M$ oskülatör mertebesi r olan, geodezik olmayan bir slant eğri ve γ nın değme açısı α_0 olsun. (3.2), (3.3) ve (2.2) eşitlikleri yardımıyla

$$\eta(T) = \cos\alpha_0 \tag{6.9}$$

$$\kappa_1\eta(E_2) = -\beta\sin^2\alpha_0, \tag{6.10}$$

$$\nabla_T\xi = -\alpha\varphi T + \beta[T - \cos\alpha_0\xi], \tag{6.11}$$

$$\nabla_T\varphi T = \alpha[\xi - \cos\alpha_0 T] - \beta\cos\alpha_0\varphi T + \kappa_1\varphi E_2 \tag{6.12}$$

olarak hesaplarız. İlk olarak, şu teoremi verebiliriz:

Teorem 6.2: (M,φ,ξ,η,g) bir trans-Sasakian manifold, $\gamma: I \to M$ oskülatör mertebesi r olan, geodezik olmayan bir slant eğri ve γ nın değme açısı α_0 olsun. Eğer γ eğrisi normal demette *C*-paralel veya normal demette *C*-proper ortalama eğrilik vektör alanına sahipse, o zaman γ bir Legendre eğrisidir [39].

İspat: (6.7) ve (6.8) eşitlikleri ξ ile çarpılır ve (6.9) eşitliği kullanılırsa ispat biter. ■

6.1 *C*-paralel Slant Eğriler

C-paralel ortalama eğrilik vektör alanına sahip slant eğrileri oskülatör mertebesine göre üç durumda inceleyeleceğiz.

Durum 1. $r = 2$ olması.

Bu durum için aşağıdaki teorem ve sonucu ifade edebiliriz:

Teorem 6.1.1: (M,φ,ξ,η,g) bir trans-Sasakian manifold, $\gamma: I \to M$ oskülatör mertebesi 2 olan bir slant eğri ve γ nın değme açısı α_0 olsun. O halde, γ eğrisinin *C*-paralel ortalama eğrilik vektör alanına sahip olması için gerek ve yeter şart c keyfi bir sabit ve s yay parametresi olmak üzere

$$\kappa_1 = \frac{\mp\cot\alpha_0}{c-s}, \tag{6.13}$$

$$\lambda = \frac{-\cot \alpha_0 \csc \alpha_0}{(c-s)^2}, \tag{6.14}$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır. Bu durumda, γ boyunca

$$\beta = \frac{\cot \alpha_0 \csc \alpha_0}{c-s}$$

olmak üzere, M bir (α, β) trans-Sasakian veya β-Kenmotsu manifold olur [39].

İspat: Gereklilik: γ eğrisi C-paralel ortalama eğrilik vektör alanına sahip olsun. (6.5) eşitliğinden

$$-\kappa_1^2 E_1 + \kappa_1' E_2 = \lambda \xi \tag{6.15}$$

yazabiliriz. Eğer $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ ise, $\kappa_1 = 0$ çelişkisini elde ederiz. O halde $\alpha_0 \neq \frac{\pi}{2}$ dir.

$\beta \neq 0$ olsun. Böylece, M bir (α, β) trans-Sasakian veya β-Kenmotsu manifolddur. $\eta(E_2) = \pm \sin \alpha_0$ olduğundan, (6.10) eşitliği gereği

$$\kappa_1 = \mp \beta \sin \alpha_0 \tag{6.16}$$

dir. (6.9), (6.10) ve (6.15) i kullanarak,

$$\lambda = \frac{-\kappa_1^2}{\cos \alpha_0} \tag{6.17}$$

ve

$$\kappa_1' = \kappa_1 \beta \sin \alpha_0 \tan \alpha_0 \tag{6.18}$$

elde ederiz. (6.16) ifadesinin türevi ile (6.18) eşitliğini birlikte düşünürsek

$$\beta' = \beta^2 \sin \alpha_0 \tan \alpha_0 \tag{6.19}$$

diferensiyel denklemine ulaşırız. (6.19) denkleminin genel çözümü, c keyfi bir sabit olmak üzere,

$$\beta = \frac{\cot\alpha_0 \csc\alpha_0}{c-s} \tag{6.20}$$

dir. (6.20) eşitliğini (6.16) ve (6.17) de yerine yazarsak, sırasıyla (6.13) ve (6.14) eşitliklerini elde ederiz.

$\beta = 0$ olsun. O halde $\eta(E_2) = 0$ dır. (6.15) eşitliğini E_2 ile çarparsak, $\kappa_1 = \text{sabit}$ buluruz. O halde

$$-\kappa_1^2 E_1 = \lambda\xi$$

dir. Böylece $\xi = \pm E_1$ olacağından,

$$\nabla_T \xi = -\alpha\varphi T = 0 = \pm\kappa_1 E_2 \tag{6.21}$$

yazabiliriz. γ geodezik olmadığından, (6.21) bir çelişkidir.

Yeterlilik: γ teoremdeki eşitlikleri sağlayacak şekilde bir slant eğri olsun. (6.5) eşitliğinin sağlandığı kolayca gösterilebilir. ■

Teorem 6.1.1 in ispatından, aşağıdaki sonucu verebiliriz:

Sonuç 6.1.2: Bir α-Sasakian veya kosimplektik manifoldda, *C*-paralel ortalama eğrilik vektör alanına sahip ve oskülatör mertebesi 2 olan bir slant eğri yoktur [39].

Normal demette, aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz:

Teorem 6.1.3: (M,φ,ξ,η,g) bir trans-Sasakian manifold, $\gamma : I \to M$ oskülatör mertebesi 2 olan bir slant eğri ve γ nın değme açısı α_0 olsun. O halde, γ eğrisinin normal demette *C*-paralel ortalama eğrilik vektör alanına sahip olması için gerek ve yeter şart γ nın

$$\kappa_1 = \mp\beta,\ \xi = \pm E_2,\ \lambda = \pm\beta' \tag{6.22}$$

eşitliklerini sağlayan bir Legendre eğrisi olmasıdır. Bu durumda, $\beta \neq \text{sabit}$ ve γ eğrisi boyunca $\alpha = 0$ dır [39].

İspat: Gereklilik: γ normal demette C-paralel ortalama eğrilik vektör alanına sahip olsun. (6.7) eşitliği ve Teorem 6.2 den

$$\kappa_1' E_2 = \lambda \xi \tag{6.23}$$

yazabiliriz. Böylece

$$\lambda = \pm \kappa_1' \tag{6.24}$$

ve

$$\xi = \pm E_2 \tag{6.25}$$

elde ederiz. (6.25) ifadesini türevlersek

$$-\alpha \varphi E_1 + \beta E_1 = \mp \kappa_1 E_1 \tag{6.26}$$

eşitliğine ulaşırız. (6.26) eşitliğini E_1 ile çarparsak, $\kappa_1 = \mp \beta$ ve γ eğrisi boyunca $\alpha = 0$ elde ederiz. λ sıfırdan farklı olduğundan, (6.24) gereği $\beta \neq \text{sabit}$ bulunur.

Yeterlilik: γ eğrisi (6.22) eşitliklerini sağlayan bir Legendre eğrisi, $\beta \neq \text{sabit}$ ve γ eğrisi boyunca $\alpha = 0$ olsun. (6.7) eşitliğinin sağlandığı kolayca gösterilebilir. ■

Durum 2. $r = 3$ olması.

Oskülatör mertebesi 3 olan slant eğriler için aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz:

Teorem 6.1.4: $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir trans-Sasakian manifold, $\gamma : I \to M$ oskülatör mertebesi 3 olan bir slant eğri ve γ nın değme açısı α_0 olsun. O halde, γ eğrisinin C-paralel ortalama eğrilik vektör alanına sahip olması için gerek ve yeter şart γ nın aşağıdakilerden birini sağlamasıdır [39]:

(1)

$$\kappa_1 = c.e^{\sin\alpha_0 \tan\alpha_0 \int \beta(s)ds}, \tag{6.27}$$

$$\kappa_2 = \left|\tan\alpha_0\right| \sqrt{\kappa_1^2 - \beta^2 \sin^2\alpha_0}, \tag{6.28}$$

$$\xi = \cos\alpha_0 E_1 - \frac{\beta \sin^2\alpha_0}{\kappa_1} E_2 - \frac{\kappa_2 \cos\alpha_0}{\kappa_1} E_3 \tag{6.29}$$

ve

$$\lambda = \frac{-\kappa_1^2}{\cos\alpha_0} \tag{6.30}$$

dir. Burada $\kappa_1^2 > \beta^2 \sin^2\alpha_0$, $\alpha_0 \neq \frac{\pi}{2}$, c bir keyfi sabit, s yay parametresidir. Bu durumda, M bir (α, β) trans-Sasakian veya β -Kenmotsu manifold olur.

(2) γ bir helis,

$$\lambda = \frac{-\kappa_1^2}{\cos\alpha_0},\ \alpha_0 \neq \frac{\pi}{2},$$

$$\kappa_2 = -\kappa_1 \tan\alpha_0$$

ve

$$\xi = \cos\alpha_0 E_1 + \sin\alpha_0 E_3$$

tür. Bu durumda $\alpha \neq 0$ ve γ eğrisi boyunca $\beta = 0$ dır.

İspat: Gereklilik: γ *C*-paralel ortalama eğrilik vektör alanına sahip olsun. (6.5) eşitliğinden

$$-\kappa_1^2 E_1 + \kappa_1' E_2 + \kappa_1\kappa_2 E_3 = \lambda\xi \tag{6.31}$$

yazabiliriz. Eğer $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ ise, $\kappa_1 = 0$ çelişkisine ulaşırız. Bu yüzden, $\alpha_0 \neq \frac{\pi}{2}$ dir.

$\beta \neq 0$ olsun. Böylece M bir (α,β) trans-Sasakian veya β -Kenmotsu manifolddur. (6.31) eşitliği gereği, $\xi \in span\{E_1, E_2, E_3\}$ olduğundan

$$\xi = \cos\alpha_0 E_1 + \sin\alpha_0 \left(\cos\theta E_2 + \sin\theta E_3\right) \tag{6.32}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada θ, ξ nin $span\{E_2, E_3\}$ üzerine dik izdüşümü ile E_2 arasındaki açı fonksiyonudur. (6.31) ve (6.32) den

$$\cos\theta = \frac{-\beta\sin\alpha_0}{\kappa_1},\ \sin\theta = \frac{-\kappa_2\cot\alpha_0}{\kappa_1} \tag{6.33}$$

olur. Böylece (6.29) elde edilir. Ayrıca (6.31) den, (6.30) eşitliğini doğrudan bulabiliriz. $\lambda\eta(E_2) = \kappa_1'$ olduğundan,

$$\kappa_1' = \kappa_1\beta\sin\alpha_0\tan\alpha_0 \tag{6.34}$$

denklemini elde ederiz. Bu da (6.27) eşitliğini verir. (6.33) ten ise (6.28) i hesaplarız.

Şimdi, $\alpha \neq 0$ ve γ boyunca $\beta = 0$ olsun. O zaman $\eta(E_2) = 0$ olduğundan, (6.31) ve (6.32) gereği, $\kappa_1 > 0$ bir sabit, $\theta = \frac{\pi}{2}$ ve

$$-\kappa_1^2 E_1 + \kappa_1\kappa_2 E_3 = \lambda(\cos\alpha_0 E_1 + \sin\alpha_0 E_3) \tag{6.35}$$

çıkar. (6.35) eşitliğinden $\kappa_2 = -\kappa_1\tan\alpha_0$ buluruz. Böylece κ_2 de bir sabit olduğundan γ eğrisi bir helistir.

Son olarak da, eğri boyunca $\alpha = \beta = 0$ olsun. Bu durumda, (6.31) ve (6.32) eşitliklerinden

$$-\kappa_1^2 E_1 + \kappa_1\kappa_2 E_3 = \lambda\xi, \tag{6.36}$$

$$\xi = \cos\alpha_0 E_1 + \sin\alpha_0 E_3 \tag{6.37}$$

yazabiliriz. (6.37) yi türevlersek

$$\frac{\kappa_2}{\kappa_1} = \cot\alpha_0 \tag{6.38}$$

ve (6.37) eşitliğinden

$$\frac{\kappa_2}{\kappa_1} = -\tan\alpha_0 \tag{6.39}$$

elde ederiz. (6.38) ve (6.39) gereği, $\cot\alpha_0 = -\tan\alpha_0$ çıkar. Bu bir çelişkidir.

Yeterlilik: γ eğrisi (1) veya (2) deki koşulları sağlasın. (6.31) eşitliğinin doğrulandığı gösterilebilir. ■

Teorem 6.1.4 ü kullanarak aşağıdaki sonucu verebiliriz:

Sonuç 6.1.5: Bir kosimplektik manifoldda oskülatör mertebesi 3 olan C-paralel ortalama eğrilik vektör alanına sahip bir slant eğri yoktur [39].

Normal demette, aşağıdaki teoremi elde ederiz:

Teorem 6.1.6: (M,φ,ξ,η,g) bir trans-Sasakian manifold, $\gamma : I \to M$ oskülatör mertebesi 3 olan bir slant eğri ve γ nın değme açısı α_0 olsun. O halde, γ eğrisinin normal demette C-paralel ortalama eğrilik vektör alanına sahip olması için gerek ve yeter şart γ nın aşağıdakilerden birini sağlamasıdır [39]:

(1) γ nın bir Legendre eğrisi,

$$\kappa_1 \neq \text{sabit},$$

$$\kappa_2 = \frac{\kappa_1'\sqrt{\kappa_1^2 - \beta^2}}{\kappa_1 \beta},$$

$$\xi = \frac{-\beta}{\kappa_1}E_2 - \frac{\sqrt{\kappa_1^2-\beta^2}}{\kappa_1}E_3 \tag{6.40}$$

ve

$$\lambda = \frac{-\kappa_1'\kappa_1}{\beta}$$

olmasıdır. Bu durumda, M bir (α,β) trans-Sasakian veya β-Kenmotsu manifold olur.

(2) γ nın bir Legendre eğrisi,

$$\xi = E_3, \kappa_2 = \alpha > 0, \lambda = \kappa_1\kappa_2$$

olmasıdır. Bu durumda, M bir α-Sasakian veya (α,β) trans-Sasakian manifold olur.

İspat: Gereklilik: γ C-paralel ortalama eğrilik vektör alanına sahip olsun. (6.7) den

$$\kappa_1'E_2 + \kappa_1\kappa_2E_3 = \lambda\xi \tag{6.41}$$

yazabiliriz. Ayrıca

$$\eta(E_1) = 0,$$

$$\kappa_1\eta(E_2) = -\beta \tag{6.42}$$

dır. Öncelikle $\beta \neq 0$ olsun. O zaman, M bir (α,β) trans-Sasakian veya β-Kenmotsu manifolddur. (6.41) ve (6.42) den

$$\lambda = \frac{-\kappa_1'\kappa_1}{\beta}$$

buluruz. Buradan, $\kappa_1 \neq$ sabittir. Ayrıca

$$\eta(E_3) = \frac{-\beta\kappa_2}{\kappa_1'} \tag{6.43}$$

yazabiliriz. (6.42) ve (6.43) eşitliklerinden

$$\xi = \frac{-\beta}{\kappa_1}E_2 - \frac{\beta\kappa_2}{\kappa_1'}E_3 \tag{6.44}$$

elde ederiz. ξ birim vektör alanı olduğundan

$$\kappa_2 = \frac{\kappa_1'\sqrt{\kappa_1^2 - \beta^2}}{\kappa_1\beta} \tag{6.45}$$

buluruz.

Son olarak, eğri boyunca $\beta = 0$ olsun. O halde, (6.42) den $\eta(E_2) = 0$ elde ederiz. (6.41) eşitliğini de kullanırsak, $\kappa_1 = \text{sabit}$, $\xi = E_3$ ve $\lambda = \kappa_1\kappa_2$ buluruz. $\xi = E_3$ ifadesinin türevini alarak $\kappa_2 = \alpha$ buluruz. $\kappa_2 = \alpha > 0$ olduğundan, M kosimplektik olamaz.

Yeterlilik: γ eğrisi (1) veya (2) ile verilen koşulları sağlıyor olsun. Bu durumda (6.41) eşitliği sağlanır. ■

Durum 3. $r \geq 4$ olması.

Oskülatör mertebesi $r \geq 4$ olan slant eğriler için aşağıdaki teorem geçerlidir:

Teorem 6.1.7: (M,φ,ξ,η,g) bir trans-Sasakian manifold, *boyM* ≥ 5, $\gamma : I \to M$ oskülatör mertebesi $r \geq 4$ olan bir slant eğri ve γ nın değme açısı α_0 olsun. γ eğrisinin *C*-paralel ortalama eğrilik vektör alanına sahip olması için gerek ve yeter şart

$$\kappa_1 = \text{sabit},$$

$$\kappa_2 = -\kappa_1 \tan\alpha_0 = \text{sabit},$$

$$\kappa_3 = \frac{-\alpha g(\varphi E_1, E_4)}{\sin\alpha_0} = \sqrt{\alpha^2 - \frac{4\kappa_1^2}{\sin^2(2\alpha_0)}} = \text{sabit},$$

$$\xi = \cos\alpha_0 E_1 + \sin\alpha_0 E_3,$$

$$\varphi E_1 \in span\{E_2, E_4\},\ g(\varphi E_1, E_4) \neq 0$$

ve

$$\lambda = \frac{-\kappa_1^2}{\cos\alpha_0} = \text{sabit}$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır. Bu durumda, M bir α -Sasakian manifolddur [39].

İspat: Gereklilik: γ eğrisi, *C*-paralel ortalama eğrilik vektör alanına sahip olsun. (6.5) eşitliğinden

$$-\kappa_1^2 E_1 + \kappa_1' E_2 + \kappa_1\kappa_2 E_3 = \lambda\xi \tag{6.46}$$

dir. Ayrıca, Önerme 3.1.1 geçerli olduğundan; M manifoldu, ya $\alpha-$Sasakian, ya $\beta-$Kenmotsu, ya da kosimplektik manifolddur.

Önce, M nin $\alpha-$Sasakian olma durumunu inceleyelim. Böylece

$$\eta(E_2) = 0, \tag{6.47}$$

$$\nabla_T \xi = -\alpha\varphi E_1 \tag{6.48}$$

eşitlikleri geçerlidir. (6.46) ve (6.47) eşitliklerinden, κ_1 sabit çıkar. γ eğrisinin Legendre olması geodezik olmaması ile çeliştiğinden, $\alpha_0 \neq \dfrac{\pi}{2}$ dir. O halde, (6.46) eşitliğinden

$$\lambda = \frac{-\kappa_1^2}{\cos\alpha_0} = \text{sabit}, \tag{6.49}$$

$$\xi = \cos\alpha_0 E_1 + \sin\alpha_0 E_3 \tag{6.50}$$

buluruz. (6.50) yi türevler ve (6.48) i kullanırsak

$$-\alpha\varphi E_1 = (\kappa_1\cos\alpha_0 - \kappa_2\sin\alpha_0)E_2 + \kappa_3\sin\alpha_0 E_4 \tag{6.51}$$

elde ederiz. Bu da bize

$$\varphi E_1 \in span\{E_2, E_4\}, \tag{6.52}$$

$$\kappa_3 = \frac{-\alpha g(\varphi E_1, E_4)}{\sin\alpha_0} \tag{6.53}$$

eşitliklerini verir. $\kappa_3 > 0$ olduğundan, $g(\varphi E_1, E_4) \neq 0$ olmalıdır. (6.46), (6.49) ve (6.50) eşitliklerini birlikte düşünürsek

$$\kappa_2 = -\kappa_1\tan\alpha_0 = \text{sabit} \tag{6.54}$$

olarak hesaplarız. Böylece (6.51) ve (6.54) eşitliklerinden

$$\kappa_1\cos\alpha_0 - \kappa_2\sin\alpha_0 = \frac{\kappa_1}{\cos\alpha_0}$$

ve

$$-\alpha\varphi E_1 = \frac{\kappa_1}{\cos\alpha_0}E_2 + \kappa_3\sin\alpha_0 E_4 \tag{6.55}$$

yazabiliriz. $g(\varphi E_1, \varphi E_1) = \sin^2\alpha_0$ olduğundan, (6.55) eşitliği gereği

$$\kappa_3 = \sqrt{\alpha^2 - \frac{4\kappa_1^2}{\sin^2(2\alpha_0)}} = \text{sabit}$$

olur.

İkinci olarak, M nin β-Kenmotsu olma durumunu inceleyelim. Böylece

$$\kappa_1\eta(E_2) = -\beta\sin^2\alpha_0 \tag{6.56}$$

ve

$$\nabla_T\xi = \beta[T - \cos\alpha_0\xi] \tag{6.57}$$

eşitlikleri geçerlidir. $\xi \in span\{E_1, E_2, E_3\}$ olduğundan

$$\xi = \cos\alpha_0 E_1 + \sin\alpha_0 \left\{\cos\theta E_2 + \sin\theta E_3\right\} \tag{6.58}$$

yazabiliriz. Burada, $\theta = \theta(s)$ ile ξ nin $span\left\{E_2, E_3\right\}$ üzerine dik izdüşümü ile E_2 arasındaki açı fonksiyonu gösterilmektedir. $\kappa_3 > 0$ ve $\sin\alpha_0 \neq 0$ olduğundan; (6.58) eşitliğini türevler ve (6.57) yi kullanırsak $\sin\theta = 0$ çıkar. Buradan

$$\xi = \cos\alpha_0 E_1 + \sin\alpha_0 E_2 \tag{6.59}$$

elde ederiz. (6.46) ve (6.59) eşitliklerinden, $\kappa_2 = 0$ buluruz. Bu ise, $r \geq 4$ olmasıyla çelişir.

Son olarak, M nin kosimplektik olma durumunu inceleyelim. Böylece

$$\eta(E_2) = 0 \tag{6.60}$$

ve

$$\nabla_T\xi = 0 \tag{6.61}$$

eşitlikleri geçerlidir. (6.46) ve (6.60) gereği, $\kappa_1 = \text{sabit}$ ve

$$\xi = \cos\alpha_0 E_1 + \sin\alpha_0 E_3 \tag{6.62}$$

yazabiliriz. (6.62) nin türevinde (6.61) eşitliğini kullanırsak, bu sefer de $\kappa_3 = 0$ çelişkisini elde ederiz.

Yeterlilik: γ eğrisi teoremde verilen eşitlikleri sağlayan bir slant eğri olsun. (6.46) eşitliği sağlandığından, γ eğrisi C-paralel ortalama eğrilik vektör alanına sahiptir. ■

Teorem 6.1.7 yi kullanarak aşağıdaki iki sonucu doğrudan ifade edebiliriz:

Sonuç 6.1.8: Teorem 6.1.8 de oskülatör mertebesi $r = 4$ alınırsa, o zaman γ bir helistir [39].

Sonuç 6.1.9: β-Kenmotsu veya kosimplektik manifoldlarda oskülatör mertebesi $r \geq 4$ olan, C-paralel ortalama eğrilik vektör alanına sahip slant eğri yoktur [39].

Normal demette, aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 6.1.10: $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir trans-Sasakian manifold, $boyM \geq 5$, $\gamma : I \to M$ oskülatör mertebesi $r \geq 4$ olan bir slant eğri ve γ nın değme açısı α_0 olsun. γ eğrisinin normal demette C-paralel ortalama eğrilik vektör alanına sahip olması için gerek ve yeter şart γ nın bir Legendre eğrisi olması,

$$\kappa_1 = \text{sabit},$$

$$\kappa_2 = \alpha g(\varphi E_1, E_2), \tag{6.63}$$

$$\kappa_3 = -\alpha g(\varphi E_1, E_4), \tag{6.64}$$

$$\kappa_2^2 + \kappa_3^2 = \alpha, \tag{6.65}$$

$$\lambda = \kappa_1 \kappa_2,$$

$$\xi = E_3, \alpha \neq 0$$

ve

$$\varphi E_1 = \frac{\kappa_2}{\alpha} E_2 - \frac{\kappa_3}{\alpha} E_4 \tag{6.66}$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır. Bu durumda, M bir α -Sasakian manifolddur [39].

İspat: Gereklilik: γ eğrisi normal demette C-paralel ortalama eğrilik vektör alanına sahip olsun. (6.7) eşitliğinden

$$\kappa_1' E_2 + \kappa_1 \kappa_2 E_3 = \lambda \xi \tag{6.67}$$

yazabiliriz. Böylece,

$$\eta(E_1) = 0$$

ve

$$\kappa_1\eta(E_2) = -\beta \tag{6.68}$$

dır. Öncelikle, $\beta = 0$ olsun. (6.67) ve (6.68) eşitliklerini kullanarak

$$\eta(E_2) = 0,$$

$$\lambda = \kappa_1\kappa_2,$$

$$\xi = E_3 \tag{6.69}$$

elde ederiz. (6.69) ifadesini türevlersek

$$-\alpha\varphi E_1 = -\kappa_2 E_2 + \kappa_3 E_4$$

buluruz. Bu da bize, $\alpha \neq 0$ olmak üzere (6.63), (6.64), (6.65) ve (6.66) eşitliklerini verir.

Şimdi, $\beta \neq 0$ olduğunu varsayalım. $\xi \in span\{E_2, E_3\}$ olduğundan,

$$\xi = \cos\theta E_2 + \sin\theta E_3 \tag{6.70}$$

yazabiliriz. Burada, $\theta = \theta(s)$ ξ ile E_3 arasındaki açı fonksiyonudur. (6.70) eşitliğinin türevinden

$$\kappa_3 = \frac{-\alpha g(\varphi E_1, E_4)}{\sin\theta}$$

buluruz. Buradan, $\alpha \neq 0$ dır. $boyM \geq 5$ olduğu için, bu bir çelişkidir.Varsayımımız yanlıştır. O halde, $\beta = 0$ dır.

Yeterlilik: γ eğrisi, Teoremde verilen eşitlikleri sağlıyor olsun. Bu durumda, (6.67) eşitliğini de sağlayacağından ispat biter. ■

6.2 *C*-proper Slant Eğriler

C-proper ortalama eğrilik vektör alanına sahip slant eğrileri, oskülatör mertebesine göre üç farklı durum inceleyeceğiz.

Durum 1. $r = 2$ olması.

Bu durum için teğet demette, aşağıdaki teorem geçerlidir:

Teorem 6.2.1: (M,φ,ξ,η,g) bir trans-Sasakian manifold, $\gamma : I \to M$ oskülatör mertebesi 2 olan bir slant eğri ve γ nın değme açısı α_0 olsun. γ eğrisinin C-proper ortalama eğrilik vektör alanına sahip olması için gerek ve yeter şart γ boyunca $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$ olması ve γ nın

(1) $\kappa_1 = \mp\beta = \text{sabit}$, $\xi = \pm E_2$, $\lambda = -\beta^3$ eşitliklerini sağlayan bir Legendre çember olması; veya

(2)

$$\kappa_1 = \mp\beta \sin\alpha_0,$$

$$\kappa_1'' - \kappa_1^3 = \pm 3\kappa_1'\kappa_1 \tan\alpha_0 \tag{6.71}$$

$$\xi = \cos\alpha_0 E_1 \pm \sin\alpha_0 E_2$$

ve

$$\lambda = \frac{3\kappa_1'\kappa_1}{\cos\alpha_0} \tag{6.72}$$

eşitliklerini sağlayan Legendre olmayan bir slant eğri olmasıdır [39].

İspat: Gereklilik: γ eğrisi C-proper ortalama eğrilik vektör alanına sahip olsun. (6.6) eşitliğinden

$$3\kappa_1\kappa_1' E_1 + \left(\kappa_1^3 - \kappa_1''\right) E_2 = \lambda\xi \tag{6.73}$$

yazabiliriz. Böylece $\xi \in span\{E_1, E_2\}$ olduğundan,

$$\xi = \cos\alpha_0 E_1 \pm \sin\alpha_0 E_2 \tag{6.74}$$

elde ederiz. (6.74) eşitliğini türevler ve (6.11) eşitliğini kullanırsak

$$-\alpha\varphi E_1 + \beta\sin^2\alpha_0 E_1 \mp \beta\cos\alpha_0\sin\alpha_0 E_2 = \mp\kappa_1\sin\alpha_0 E_1 + \kappa_1\cos\alpha_0 E_2 \tag{6.75}$$

buluruz. (6.75) eşitliğini E_1 ile çarparsak, $\kappa_1 = \mp\beta\sin\alpha_0$ sonucuna ulaşırız. Buradan, $\beta \neq 0$ dır. Yine (6.75) eşitliği gereği, eğri boyunca $\alpha = 0$ çıkar. Eğer $\alpha_0 = \dfrac{\pi}{2}$ ise, γ eğrisi $\kappa_1 = \mp\beta = \text{sabit}$, $\xi = \pm E_2$, $\lambda = -\beta^3$ olan bir Legendre çemberdir. $\alpha_0 \neq \dfrac{\pi}{2}$ olması halinde ise, (6.73) ve (6.74) eşitlikleri, (6.71) ve (6.72) eşitliklerini verir.

Yeterlilik: γ eğrisi, (1) veya (2) koşullarını sağlayan bir slant eğri olsun. (6.73) eşitliği doğrulanacağından ispat tamamlanmış olur. ■

Normal demette, aşağıdaki teorem ifade edilebilir:

Teorem 6.2.2: $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir trans-Sasakian manifold, $\gamma : I \to M$ oskülatör mertebesi 2 olan bir slant eğri ve γ nın değme açısı α_0 olsun. γ eğrisinin normal demette C-proper ortalama eğrilik vektör alanına sahip olması için gerek ve yeter şart γ nın

$$\kappa_1 = \mp\beta, \xi = \pm E_2, \lambda = \beta'' \tag{6.76}$$

koşullarını sağlayan bir Legendre eğrisi olmasıdır. Burada, a ve b keyfi sabitler olmak üzere, $\beta(s) \neq as + b$ ve eğri boyunca $\alpha = 0$ dır [39].

İspat: Gereklilik: γ eğrisi normal demette C-proper ortalama eğrilik vektör alanına sahip olsun. (6.8) eşitliği ve Teorem 6.2 den, γ eğrisi

$$-\kappa_1'' E_2 = \lambda \xi$$

eşitliğini sağlayan bir Legendre eğrisidir. Buradan

$$\lambda = \pm \kappa_1'$$

ve

$$\xi = \pm E_2 \tag{6.77}$$

buluruz. (6.77) eşitliğini türevlersek

$$-\alpha \varphi E_1 + \beta E_1 = \mp \kappa_1 E_1 \tag{6.78}$$

elde ederiz. Böylece (6.78) den (6.76) eşitliklerine ve eğri boyunca $\alpha = 0$ olduğuna ulaşırız.

Yeterlilik: γ eğrisi, (6.76) koşullarını sağlayan bir Legendre eğrisi olduğunda, (6.8) eşitliğini sağladığı kolayca gösterilebilir. ■

Durum 2. $r = 3$ olması.

Bu durum için, teğet demette aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 6.2.3: $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir trans-Sasakian manifold, $\gamma : I \to M$ oskülatör mertebesi 3 olan bir slant eğri ve γ nın değme açısı α_0 olsun. γ eğrisinin C-proper ortalama eğrilik vektör alanına sahip olması için gerek ve yeter şart γ nın

$$3\kappa_1 \kappa_1' = \lambda \cos \alpha_0, \tag{6.79}$$

$$\kappa_1^3 + \kappa_1 \kappa_2^2 - \kappa_1'' = \lambda \eta(E_2), \tag{6.80}$$

$$-\left(2\kappa_1'\kappa_2+\kappa_1\kappa_2'\right)=\lambda\eta(E_3) \tag{6.81}$$

ve

$$\eta(E_2)^2+\eta(E_3)^2=\sin^2\alpha_0 \tag{6.82}$$

eşitliklerini sağlamasıdır [39].

İspat: Gereklilik: γ eğrisi C-proper ortalama eğrilik vektör alanına sahip olsun. (6.6) eşitliğinden

$$3\kappa_1\kappa_1'E_1+\left(\kappa_1^3+\kappa_1\kappa_2^2-\kappa_1''\right)E_2-(2\kappa_1'\kappa_2+\kappa_1\kappa_2')E_3=\lambda\xi \tag{6.83}$$

dir. Bu ifadeyi sırasıyla E_1, E_2 ve E_3 ile çarparsak, (6.79), (6.80) ve (6.81) eşitliklerini elde ederiz. ξ birim vektör alanı ve $\xi\in span\{E_1,E_2,E_3\}$ olduğundan

$$\eta(E_2)^2+\eta(E_3)^2=\sin^2\alpha_0$$

dir.

Yeterlilik: Teoremin tersinin ispatı açıktır. ■

Normal demette, aşağıdaki teorem geçerlidir:

Teorem 6.2.4: (M,φ,ξ,η,g) bir trans-Sasakian manifold, $\gamma:I\to M$ oskülatör mertebesi 3 olan bir slant eğri ve γ nın değme açısı α_0 olsun. γ eğrisinin normal demette C-proper ortalama eğrilik vektör alanına sahip olması için gerek ve yeter şart γ nın aşağıdaki koşullardan birini sağlayan bir Legendre eğrisi olmasıdır:

(1)

$$\kappa_1=c_1e^{\alpha s}+c_2e^{-\alpha s}, \tag{6.84}$$

$$\kappa_2=\alpha,$$

$$\xi=E_3,\ \varphi E_1=E_2$$

ve

$$\lambda = -2\alpha^2 (c_1 e^{\alpha s} - c_2 e^{-\alpha s}) \tag{6.85}$$

dır. Burada, c_1 ve c_2 keyfi sabitler ve M bir α -Sasakian manifolddur.

(2)

$$\lambda = \frac{\kappa_1 \kappa_1'' - \kappa_1^2 \kappa_2^2}{\beta}, \tag{6.86}$$

$$\xi = \frac{-\beta}{\kappa_1} E_2 \pm \frac{\sqrt{\kappa_1^2 - \beta^2}}{\kappa_1} E_3 \tag{6.87}$$

ve

$$\pm\left(\kappa_1'' - \kappa_1 \kappa_2^2\right)\sqrt{\kappa_1^2 - \beta^2} = 2\kappa_1' \kappa_2 + \kappa_1 \kappa_2' \tag{6.88}$$

dir. Bu durumda, M bir (α, β) trans-Sasakian veya β -Kenmotsu manifolddur [39].

İspat: Gereklilik: γ eğrisi normal demette C- proper ortalama eğrilik vektör alanına sahip olsun. Teorem 6.2 den γ bir Legendre eğrisidir. (6.8) eşitliğinden

$$\left(\kappa_1 \kappa_2^2 - \kappa_1''\right) E_2 - \left(2\kappa_1' \kappa_2 + \kappa_1 \kappa_2'\right) E_3 = \lambda \xi \tag{6.89}$$

dir. $\beta = 0$ olsun. Bu durumda, $\eta(E_2) = 0$ olduğundan

$$\kappa_1 \kappa_2^2 - \kappa_1'' = 0, \tag{6.90}$$

$$\xi = E_3 \tag{6.91}$$

ve

$$\lambda = -\left(2\kappa_1' \kappa_2 + \kappa_1 \kappa_2'\right) \tag{6.92}$$

elde ederiz. (6.91) eşitliğini türevlersek

$$\kappa_2 = \alpha \tag{6.93}$$

ve

$$\varphi E_1 = E_2 \tag{6.94}$$

buluruz. α sıfırdan farklı bir sabit olduğundan, (6.90) ve (6.93) eşitliklerinden, (6.84) eşitliğine ulaşırız. Ayrıca, (6.84), (6.92) ve (6.93) eşitliklerini kullanırsak, (6.85) i elde ederiz.

$\beta \neq 0$ olsun. (6.10) ve (6.89) eşitlikleri, (6.86) yı verir. ξ birim vektör alanı ve $\xi \in span\{E_2, E_3\}$ olduğundan, (6.10) eşitliğinden (6.87) yi hesaplarız. (6.86), (6.87) ve (6.89) gereği, (6.88) bulunur.

Yeterlilik: γ eğrisi, teoremde verilen (1) veya (2) koşullarını sağlıyorsa, (6.89) eşitliğini de sağlanacağından ispat biter. ■

Durum 3. $r \geq 4$ olması.

Teorem 6.2.5: $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir trans-Sasakian manifold, $boyM \geq 5$, $\gamma : I \to M$ oskülatör mertebesi $r \geq 4$ olan bir slant eğri ve γ nın değme açısı α_0 olsun. γ eğrisinin *C*-proper ortalama eğrilik vektör alanına sahip olması için gerek ve yeter şart

$$3\kappa_1\kappa_1' = \lambda \cos\alpha_0,$$

$$\kappa_1^3 + \kappa_1\kappa_2^2 - \kappa_1'' = \lambda\eta(E_2),$$

$$-(2\kappa_1'\kappa_2 + \kappa_1\kappa_2') = \lambda\eta(E_3),$$

$$-\kappa_1\kappa_2\kappa_3 = \lambda\eta(E_4)$$

ve

$$\eta(E_2)^2+\eta(E_3)^2+\eta(E_4)^2=\sin^2\alpha_0$$

olmasıdır. Burada, λ sıfırdan farklı diferensiyellenebilir bir fonksiyondur [39].

İspat: Teorem 6.2.3 ün ispatına benzer şekilde yapılır. ■

Son olarak, normal demette aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 6.2.6: (M,φ,ξ,η,g) bir trans-Sasakian manifold, $boyM\geq 5$, $\gamma:I\rightarrow M$ oskülatör mertebesi $r\geq 4$ olan bir slant eğri ve γ nın değme açısı α_0 olsun. γ eğrisinin normal demette C-proper ortalama eğrilik vektör alanına sahip olması için gerek ve yeter şart γ nın

$$\kappa_1\kappa_2^2-\kappa_1''=0,$$

$$\kappa_2=\alpha g(\varphi E_1,E_2),$$

$$\kappa_3=-\alpha g(\varphi E_1,E_4),$$

$$\kappa_2^2+\kappa_3^2=\alpha,$$

$$\lambda=-2\kappa_1'\kappa_2-\kappa_1\kappa_2',$$

$$\xi=E_3,\ \alpha\neq 0$$

ve

$$\varphi E_1=\frac{\kappa_2}{\alpha}E_2-\frac{\kappa_3}{\alpha}E_4$$

eşitliklerini sağlayan bir Legendre eğrisi olmasıdır. Bu durumda, M bir α-Sasakian manifolddur [39].

İspat: Teorem 6.1.11 in ispatına benzer şekildedir. ■

6.3 C-paralel ve C-proper Slant Eğri Örnekleri

Bu kısımda, bazı özel trans-Sasakian manifoldlar üzerinde C-paralel ve C-proper slant eğri örnekleri verilecektir. Bu örnekleri şöyle sıralayabiliriz:

Örnek 6.3.1: $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z>0\}$ 3-boyutlu Riemann manifoldunu ele alalım. Burada (x,y,z) $\mathbb{R}^3$ deki standart koordinat fonksiyonlarıdır. M üzerindeki metrik tensör

$$g=\frac{1}{z^2}(dx^2+dy^2+dz^2)$$

olarak verilsin. $\chi(M)$ deki

$$e_1=z\frac{\partial}{\partial x}, e_2=z\frac{\partial}{\partial y}, e_3=-z\frac{\partial}{\partial z}$$

vektör alanları $\chi(M)$ in bir g-orthonormal çatısını oluştururlar. $\{e_1,e_2,e_3\}$ bazı için

$$[e_1,e_2]=0,\ [e_1,e_3]=e_1,\ [e_2,e_3]=e_2$$

dir. O halde, bu baza göre Levi-Civita koneksiyonu

$$\begin{array}{lll}\nabla_{e_1}e_1=-e_3, & \nabla_{e_1}e_2=0, & \nabla_{e_1}e_3=e_1,\\ \nabla_{e_2}e_1=0, & \nabla_{e_2}e_2=-e_3, & \nabla_{e_2}e_3=e_2,\\ \nabla_{e_3}e_1=0, & \nabla_{e_3}e_2=0, & \nabla_{e_3}e_3=0\end{array}$$

olarak hesaplanır. φ $(1,1)$-tensör alanını

$$\varphi e_1=-e_2,\ \varphi e_2=e_1,\ \varphi e_3=0$$

şeklinde tanımlayalım. Her $Z\in\chi(M)$ için bir 1-form $\eta(Z)=g(Z,e_3)$ ve karakteristik vektör alanı $\xi=e_3$ olsun. (M,φ,ξ,η,g) bir Kenmotsu manifolddur ([40], [41]). Yani, $\alpha=0,\ \beta=1$ şeklindeki bir trans-Sasakian manifolddur.

M deki bir $\gamma(s)=(\gamma_1(s),\gamma_2(s),\gamma_3(s))$ eğrisinin değme açısı α_0 olan bir slant eğri olabilmesi için gerek ve yeter şart $c>0$ keyfi bir sabit olmak üzere

$$\left(\gamma_1'\right)^2+\left(\gamma_2'\right)^2=\sin^2\alpha_0(\gamma_3)^2,$$
$$\gamma_3=c.e^{-s\cos\alpha_0}$$

olmasıdır.

$a,b,m,n,c\in\mathbb{R},\quad c>0,\quad a^2+m^2=c^2$ olmak üzere M de $\gamma:I\subseteq\mathbb{R}\to M$, $\gamma(s)=(as+b,ms+n,c)$ eğrisini ele alalım. γ eğrisi boyunca T birim teğet vektör alanı

$$T=\frac{a}{c}e_1+\frac{m}{c}e_2$$

şeklindedir. Bu durumda $\eta(T)=0$ olduğundan γ bir Legendre eğrisidir; yani, $\alpha_0=\dfrac{\pi}{2}$ dir. Levi-Civita koneksiyonu yardımıyla, $\nabla_T T=-e_3$, $\kappa_1=1$, $E_2=-e_3$ elde ederiz. Tekrar işlem yaparsak $\nabla_T E_2=-T$ buluruz. O halde $\kappa_2=0$ dır. Sonuç olarak γ eğrisinin oskülatör mertebesi $r=2$ dir. Teorem 6.2.1 (1) den, γ eğrisi $\kappa_1=\beta=1$, $\xi=-E_2$, $\lambda=-\beta^3=-1$ olmak üzere teğet demette C-proper ortalama eğrilik vektör alanına sahiptir. O halde, Teorem 6.2.1 (1) için bir örnek $\gamma(s)=(3s,4s,5)$ olarak alınabilir [39].

Örnek 6.3.2: Yukarıdaki örnekte, $e_3=z\dfrac{\partial}{\partial z}$, $\xi=e_3$ olarak alınıp diğer yapılar aynı şekilde tanımlanırsa, $\alpha=0$, $\beta=-1$ şeklinde bir trans-Sasakian manifold elde edilir ([40], [42]). Bu manifoldda, $\gamma(s)=(s,0,1)$ eğrisi, $\kappa_1=-\beta=1$, $\xi=E_2$, $\lambda=-\beta^3=1$ olmak üzere, Teorem 6.2.1 (1) e bir başka örnektir [39].

Sonraki örnekleri oluşturabilmek için [43] nolu kaynakta verilen aşağıdaki trans-Sasakian manifold yapısını kullanacağız:

N, $\mathbb{R}^2$ nin bağlantılı ve açık bir altkümesi ve (a,b) $\mathbb{R}$ nin bir açık aralığı olmak üzere, $M = N\times(a,b)$ manifoldunu ele alalım. (x,y,z) M üzerindeki koordinat fonksiyonları olsun. Şimdi

$$\omega_1,\omega_2 : N \to \mathbb{R},\ f : M \to \mathbb{R},\ \sigma : M \to \mathbb{R}_+$$

fonksiyonlarını alalım. M üzerindeki (φ,ξ,η,g) normal almost kontakt metrik yapısı şöyle verilsin:

$$\varphi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\omega_2 \\ -1 & 0 & \omega_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\xi = \frac{\partial}{\partial z},\ \eta = dz + \omega_1 dx + \omega_2 dy,$$

$$g = \begin{bmatrix} \omega_1^2 + \sigma e^{2f} & \omega_1\omega_2 & \omega_1 \\ \omega_1\omega_2 & \omega_2^2 + \sigma e^{2f} & \omega_2 \\ \omega_1 & \omega_2 & 1 \end{bmatrix}.$$

M nin g-orthonormal çatı alanlarını aşağıdaki şekilde seçelim:

$$H_1 = \frac{e^{-f}}{\sqrt{\sigma}}\left[\frac{\partial}{\partial x} - \omega_1\frac{\partial}{\partial z}\right],\ H_2 = \frac{e^{-f}}{\sqrt{\sigma}}\left[\frac{\partial}{\partial y} - \omega_2\frac{\partial}{\partial z}\right],\ H_3 = \xi = \frac{\partial}{\partial z}.$$

M manifoldunun

$$\alpha = \frac{e^{-2f}}{2\sigma}\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial y} - \frac{\partial\omega_2}{\partial x}\right),\ \beta = \frac{1}{2\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z}$$

olacak şekilde bir trans-Sasakian manifold olduğu bilinmektedir.

$\{H_1,H_2,H_3\}$ bazı için

$$[H_1,H_2] = \frac{\sqrt{\sigma}}{e^{-f}}\left[-H_2\left(\frac{e^{-f}}{\sqrt{\sigma}}\right)H_1 + H_1\left(\frac{e^{-f}}{\sqrt{\sigma}}\right)H_2\right] + \frac{e^{-2f}}{\sigma}\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial y} - \frac{\partial\omega_2}{\partial x}\right)H_3,$$

$$[H_1, H_3] = \frac{\sigma_z}{2\sigma} H_1, \ [H_2, H_3] = \frac{\sigma_z}{2\sigma} H_2$$

dir [43].

Koszul formülü yardımıyla, $\{H_1, H_2, H_3\}$ bazına göre, M nin Levi-Civita koneksiyonu

$$\nabla_{H_1} H_1 = \frac{\sqrt{\sigma}}{e^{-f}} H_2 \left(\frac{e^{-f}}{\sqrt{\sigma}} \right) H_2 - \frac{\sigma_z}{2\sigma} H_3,$$

$$\nabla_{H_1} H_2 = \frac{-\sqrt{\sigma}}{e^{-f}} H_2 \left(\frac{e^{-f}}{\sqrt{\sigma}} \right) H_1 + \frac{e^{-2f}}{2\sigma} \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial y} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x} \right) H_3,$$

$$\nabla_{H_1} H_3 = \frac{\sigma_z}{2\sigma} H_1 - \frac{e^{-2f}}{2\sigma} \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial y} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x} \right) H_2,$$

$$\nabla_{H_2} H_1 = \frac{-\sqrt{\sigma}}{e^{-f}} H_1 \left(\frac{e^{-f}}{\sqrt{\sigma}} \right) H_2 - \frac{e^{-2f}}{2\sigma} \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial y} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x} \right) H_3,$$

$$\nabla_{H_2} H_2 = \frac{\sqrt{\sigma}}{e^{-f}} H_1 \left(\frac{e^{-f}}{\sqrt{\sigma}} \right) H_1 - \frac{\sigma_z}{2\sigma} H_3,$$

$$\nabla_{H_2} H_3 = \frac{e^{-2f}}{2\sigma} \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial y} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x} \right) H_1 + \frac{\sigma_z}{2\sigma} H_2,$$

$$\nabla_{H_3} H_1 = \frac{-e^{-2f}}{2\sigma} \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial y} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x} \right) H_2,$$

$$\nabla_{H_3} H_2 = \frac{e^{-2f}}{2\sigma} \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial y} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x} \right) H_1,$$

$$\nabla_{H_3} H_3 = 0$$

şeklinde hesaplanır.

M üzerindeki bir $\gamma(s)=(\gamma_1(s),\gamma_2(s),\gamma_3(s))$ eğrisinin, değme açısı α_0 olan bir slant eğri olması için gerek ve yeter şart

$$(\gamma_1')^2+(\gamma_2')^2=\frac{\sin^2\alpha_0}{\sigma}e^{-2f},$$

$$\omega_1\gamma_1'+\omega_2\gamma_2'+\gamma_3'=\cos\alpha_0$$

olmasıdır [43]. Bu yöntemi kullanarak diğer örneklerimizi verebiliriz.

Örnek 6.3.3: $\omega_1=f=0,\quad \omega_2=2x$ ve $\sigma=2z$ seçelim. (M,φ,ξ,η,g) üzerindeki $\gamma(s)=(0,\frac{s}{2},2)$ Legendre helisi ele alalım. Bu durumda M $(\frac{-1}{2z},\frac{1}{2z})$ tipinden bir trans-Sasakian manifolddur; yani,

$$\alpha=\frac{-1}{2z}=-\beta$$

dir.

[44] nolu kaynakta $\kappa_1=\kappa_2=\frac{1}{4}$ olduğu gösterilmiştir. Biz de γ nın teğet ve normal demette C-proper ortalama eğrilik vektör alanına sahip olduğunu göstereceğiz. Tanımlanan çatıyı ve Levi-Civita koneksiyonunu kullanarak, $T=H_2$, $\nabla_T T=\frac{-1}{4}H_3$ elde ederiz. O halde, $\xi=H_3=-E_2$ dir. Son olarak, $\nabla_T E_2=\frac{-1}{4}T+\frac{1}{4}H_1$ buluruz. Yani $E_3=H_1$ dir. Teorem 6.2.3 ve 6.2.4 yardımıyla, γ eğrisi $\lambda_1=\frac{-1}{32}$ olmak üzere teğet demette ve $\lambda_2=\frac{-1}{64}$ olmak üzere normal demette C-proper ortalama eğrilik vektör alanına sahiptir [39]. Ayrıca, [43] nolu kaynakta, γ eğrisinin $\lambda_3=\frac{1}{8}$ olmak üzere (teğet demette) proper ortalama eğrilik vektör alanına sahip olduğu gösterilmiştir.

Örnek 6.3.4: $\omega_1 = f = 0$, $\omega_2 = -y$ ve $\sigma = z$ seçelim. O halde $\alpha = 0$ ve $\beta = \frac{1}{2z}$ dir. Bu durumda M bir β-Kenmotsu manifolddur. M deki bir $\gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s))$ eğrisinin slant eğri olması için gerek ve yeter şart

$$(\gamma_1')^2 + (\gamma_2')^2 = \frac{\sin^2 \alpha_0}{\gamma_3},$$

$$-\gamma_2\gamma_2' + \gamma_3' = \cos\alpha_0$$

olmasıdır. M üzerindeki $\gamma(s) = (0, 2^{3/4}\sqrt{s}, \sqrt{2}s)$ eğrisini ele alalım. $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ buluruz, yani, γ bir Legendre eğrisidir. γ eğrisinin oskülatör mertebesini $r = 2$ dir. Teorem 6.1.3 yardımıyla, $\kappa_1 = \beta = \frac{\sqrt{2}}{4s}$, $\xi = -E_2$ ve $\lambda = -\beta' = \frac{\sqrt{2}}{4s^2}$ olmak üzere γ eğrisi normal demette C-parallel ortalama eğrilik vektör alanına sahiptir.Ayrıca, Teorem 6.2.2 den, $\lambda = \beta'' = \frac{\sqrt{2}}{2s^3}$ olmak üzere, γ eğrisi normal demette C-proper ortalama eğrilik vektör alanına sahiptir [39].

Örnek 6.3.5: $\omega_1 = f = 0$, $\omega_2 = y$ ve $\sigma = z$ seçelim. Bu durumda $\alpha = 0$, $\beta = \frac{1}{2z}$ bulunur ve M bir β-Kenmotsu manifolddur. M üzerindeki bir $\gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s))$ eğrisinin bir slant eğri olması için gerek ve yeter şart

$$(\gamma_1')^2 + (\gamma_2')^2 = \frac{\sin^2 \alpha_0}{\gamma_3},$$

$$\gamma_2\gamma_2' + \gamma_3' = \cos\alpha_0$$

olmasıdır.

M deki $\gamma(s) = (\frac{4}{105} 7^{3/4} \sqrt{30s}, 0, \frac{\sqrt{7}s}{15})$ eğrisi Legendre olmayan bir slant eğridir. γ nın değme açısı $\alpha_0 = \arccos(\frac{\sqrt{7}}{15}) = \arcsin(\frac{2\sqrt{2}}{15})$ dir. Levi-Civita koneksiyonu kullanılarak yapılan hesaplamalardan sonra, Teorem 6.2.1 (2) gereğince, γ eğrisi

$$\kappa_1 = \frac{\sqrt{14}}{7s}, \ \xi = \frac{\sqrt{7}}{15} E_1 - \frac{2\sqrt{2}}{15} E_2, \ \beta = \frac{15\sqrt{7}}{14s}, \ \lambda = \frac{-90\sqrt{7}}{49s^3}$$

olmak üzere teğet demette C-proper ortalama eğrilik vektör alanına sahiptir. κ_1 eğriliğinin, Teorem 6.2.1 deki

$$\kappa_1'' - \kappa_1^3 = -3\kappa_1'\kappa_1 \tan \alpha_0$$

adi diferensiyel denklemini sağladığı kolayca gösterilebilir [39].

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

3. bölümde, genelleştirilmiş Sasakian uzay formlarda Legendre eğrilerinin biharmonik olma koşulları Teorem 3.2.1 ile verilmiştir. Bu teorem, dokuz ayrı durum için incelenmiştir. Daha sonra, elde edilen sonuçlar, uzay formun Sasakian, Kenmotsu ve kosimplektik olma durumlarına uygulanmıştır.

4. bölümde, *S*-uzay formların biharmonik slant eğrileri ele alınmıştır. Teorem 4.2.1 dört farklı durum için incelenmiştir. Özel olarak, Legendre eğrileri için Sonuç 4.2.5, Sonuç 4.2.7 ve Sonuç 4.2.9 verilmiştir.

5. bölümde, Sasakian uzay formların *f*-biharmonik Legendre eğrileri dört durumda incelenmiştir. Bu bölümün sonunda, Örnek 5.3.1 ve Örnek 5.3.2 elde edilmiştir.

Son bölüm olan 6. bölümde, trans-Sasakian manifoldların *C*-paralel ve *C*-proper slant eğrileri ele alınmıştır. Bu eğriler, oskülatör mertebesine göre üçer durumda incelenmiştir. Son olarak, Örnek 6.3.1, Örnek 6.3.2, Örnek 6.3.3, Örnek 6.3.4 ve Örnek 6.3.5 verilmiştir.

Elde edilen sonuçların farklı manifoldlar üzerinde karşılıklarının incelenebilmesi mümkün görülmektedir.

8. KAYNAKLAR

[1] J. Eells, Jr. and L. Lemaire, “Selected topics in harmonic maps”, *Amer. Math. Soc., Providence, R.I.*, (1983).

[2] Jiang, G. Y., “2-harmonic maps and their first and second variational formulas”, *Chinese Ann. Math. Ser. A*, 7, 389-402, (1986).

[3] Chen, B.Y., “A report on submanifolds of finite type”, *Soochow J. Math.*, 22, 117-337, (1996).

[4] Oubiña, J. A., “New classes of almost contact metric structures”, *Publ. Math. Debrecen* 32, 187-193, (1985).

[5] Alegre, P., Blair, D. E. and Carriazo, A., “Generalized Sasakian space-forms”, *Israel J. of Math.*, 141, 157-183, (2004).

[6] Alegre, P. and Carriazo, A., “Structures on generalized Sasakian-space-forms”, *Differential Geom. Appl.*, 26, 656-666, (2008).

[7] Cho, J. T., Inoguchi, J. and Lee, J.E., “On slant curves in Sasakian 3-manifolds”, *Bull. Austral. Math. Soc.*, 74, 359-367, (2006).

[8] Fetcu, D., “Biharmonic Legendre curves in Sasakian space forms”, *J. Korean Math. Soc.*, 45, 393-404 (2008).

[9] Fetcu, D. and Oniciuc, C., “Explicit formulas for biharmonic submanifolds in Sasakian space forms”, *Pacific J. Math.*, 240, 85-107, (2009).

[10] Kobayashi, S. and Nomizu, K., *Foundations of differential geometry*, John Wiley and Sons, Inc., New York, (1996).

[11] Hacısalihoğlu, H. H., *Diferensiyel Geometri*, İnönü Üniversitesi Yayınları, (1983).

[12] Yano, K. and Kon, M., *Structures on manifolds*, Series in Pure Mathematics, 3.World Scientific Publishing Co., Singapore, (1984).

[13] Blair, D. E., *Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds, Second Edition*, Progress in Mathematics, 203, Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, (2010).

[14] Brickel, F. and Clark, R. S., Differentiable manifolds, An Introduction, V. N. Reinhold Co, London, New York, (1970).

[15] Ferus, D. and Schirrmacher, S., "Submanifolds in Euclidean Space with simple geodesics", *Math Ann.*, 260, no. 1, 57-62, (1982).

[16] Arroyo, J., Barros, M. and Garay, O. J., "A characterisation of helices and Cornu spirals in real space forms", *Bull. Austral. Math. Soc.*, 56, no. 1, 37-49, (1997).

[17] Eells, Jr. J. and Sampson, J. H., "Harmonic mappings of Riemannian manifolds", *Amer. J. Math.*, 86, 109-160, (1964).

[18] Özgür C. and Tripathi M., "On Legendre curves in α -Sasakian manifolds", *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, 31, no. 1, 91-96, (2008).

[19] Blair, D. E., "The theory of quasi-Sasakian structures", *Journal of Differential Geometry*, 1, 331-345, (1967).

[20] Marrero, J.C., "The local structure of trans-Sasakian manifolds", *Ann. Mat. Pura Appl.*, 162, 77-86, (1992).

[21] Özgür, C. and Güvenç, Ş., "On some classes of biharmonic Legendre curves in generalized Sasakian space forms", *Collect. Math.*, 65, no. 2, 203-218, (2014).

[22] Olszak, Z., "Locally conformal almost cosymplectic manifolds", *Colloq. Math.*, 57, no. 1, 73-87, (1989).

[23] Falcitelli, M., "A class of almost contact metric manifolds with pointwise constant φ-sectional curvature", *Math. Balkanica (N.S.)*, 22, no. 1-2, 133-153, (2008).

[24] Fetcu, D., Loubeau, E., Montaldo, S. and Oniciuc, C., "Biharmonic submanifolds of $\mathbb{CP}^n$ ", *Math. Z.*, 266, 505-531, (2010).

[25] Nakagawa, H., "On framed f-manifolds", *Kodai Math. Sem. Rep.*, 18, 293-306, (1966).

[26] Vanzura, J., “Almost r-contact structures”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, (3) 26, 97-115, (1972).

[27] Blair, D. E.,“Geometry of manifolds with structural group $\mathcal{U}(n)\times\mathcal{O}(s)$ ”, *J. Differential Geometry*, 4, 155-167, (1970).

[28] Kim, J. S., Dwivedi, M. K. and Tripathi, M. M., “Ricci curvature of integral submanifolds of an $\mathcal{S}$-space form”, *Bull. Korean Math. Soc.*, 44 , 395-406, (2007).

[29] Özgür, C. and Güvenç, Ş., “On biharmonic Legendre curves in *S*-space forms”, *Turkish J. Math.*, 38, no. 3, 454-461, (2014).

[30] Baikoussis, C. and Blair, D. E., “On Legendre curves in contact 3-manifolds”, *Geom. Dedicata*, 49, 135-142, (1994).

[31] Hasegawa, I., Okuyama, Y. and Abe, T., “On *p*-th Sasakian manifolds”, *J. Hokkaido Univ. Ed. Sect. II A*, 37, no. 1, 1–16, (1986).

[32] Lu, Wei-Jun, “On *f*-biharmonic maps between Riemannian manifolds”, arXiv:1305.5478, (2013).

[33] Ou, Y.L., “On *f*-biharmonic maps and *f*-biharmonic submanifolds”, arXiv:1306.3549v1, (2013).

[34] Lee, J. E., Suh, Y. J. and Lee, H., “C-parallel mean curvature vector fields along slant curves in Sasakian 3-manifolds”, *Kyungpook Math. J.*, 52, no. 1, 49-59, (2012).

[35] Chen, B. Y., “Some open problems and conjectures on submanifolds of finite type*:* recent development”, arXiv:1401.3793, (2014).

[36] Srivastava, S. K., “Almost contact curves in trans-Sasakian 3-manifolds”, preprint, arXiv:1401.6429, (2013).

[37] Inoguchi J. and Lee, J-E., “Almost contact curves in normal almost contact 3-manifolds”, *Journal of Geometry*, 103, 457-474, (2012).

[38] Inoguchi J. and Lee, J-E., “On slant curves in normal almost contact metric 3-manifolds”, *Beitr. Algebra Geom.*, 55, no. 2, 603-620, (2014).

[39] Güvenç, Ş. and Özgür, C., “On slant curves in trans-Sasakian manifolds”, *Rev. Un. Mat. Argentina*, 55, no. 2, 81–100, (2014).

[40] Kenmotsu, K., “A class of almost contact Riemannian manifolds”, *Tôhoku Math. J.*, 24, 93-103, (1972).

[41] De, U. C., Yıldız, A. and Yalınız, A. F., “On φ-recurrent Kenmotsu manifolds”, *Turkish J. Math.*, 33, no. 1, 17-25, (2009).

[42] De, U. C. and Sarkar, A., “On three-dimensional trans-Sasakian manifolds”, *Extracta Math.*, 23, no. 3, 265-277, (2008).

[43] Calin, C. and Crasmareanu, M., “Slant curves in 3-dimensional normal almost contact geometry”, *Mediterr. J. Math.*, 10, 1067-1077, (2013).

[44] Welyczko, J., “On Legendre curves in 3-dimensional normal almost contact metric manifolds”, *Soochow J. Math.*, 33 (no. 4), 929-937, (2007).