T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KATLI ÇARPIM MANİFOLDLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FATMA GÜRLER

BALIKESİR, HAZİRAN - 2012

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KATLI ÇARPIM MANİFOLDLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FATMA GÜRLER

BALIKESİR, HAZİRAN - 2012

KABUL VE ONAY SAYFASI

Fatma GÜRLER tarafından hazırlanan "**KATLI ÇARPIM MANİFOLDLARI**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 08.06.12 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Prof. Dr. Cihan ÖZGÜR	....
Üye Doç. Dr. Özden KORUOĞLU	....
Üye Yard. Doç. Dr. Bengü BAYRAM	....

Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez BAÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Doç. Dr. Hilmi NAMLI ....

ÖZET

KATLI ÇARPIM MANİFOLDLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FATMA GÜRLER

BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. CİHAN ÖZGÜR)

BALIKESİR, 2012

Bu çalışmada katlı çarpım manifoldları, yarı-Einstein katlı çarpım manifoldları, semi-simetrik metrik koneksiyona göre katlı çarpım manifoldları ve semi-simetrik metrik koneksiyona göre yarı-Einstein katlı çarpım manifoldları incelenmiştir.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş bölümüdür.

İkinci bölümde, çalışmanın ileriki bölümlerinde kullanılan temel tanım ve kavramlar verilmiştir. Ayrıca katlı çarpım manifoldları ve yarı-Einstein katlı çarpım manifoldları ile ilgili temel tanım ve teoremler incelenmiştir.

Üçüncü bölümde semi-simetrik metrik koneksiyona göre katlı çarpım manifoldlarının genel bir tanımı verilmiş ve bazı bilinen teoremler ifade edilmiştir.

Son bölüm olan dördüncü bölüm orijinal sonuçlar içermektedir. Bu bölümde semi-simetrik metrik koneksiyona göre yarı-Einstein katlı çarpım manifoldları ile ilgili sonuçlar elde edilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER : katlı çarpım manifoldu, Einstein manifoldu, yarı-Einstein manifoldu, semi-simetrik metrik koneksiyon.

ABSTRACT

WARPED PRODUCTS

MSC THESIS

FATMA GÜRLER

BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE

MATHEMATICS

(SUPERVISOR: PROF. DR. CİHAN ÖZGÜR)

BALIKESİR, 2012

In this thesis, we study warped products, quasi-Einstein warped products, warped product with a semi-symmetric metric connection and quasi-Einstein warped product manifolds endowed with semi-symmetric metric connection.

This thesis consist of four chapters.

The first chapter is the introduction.

In the second chapter , we give some notion and definition which will be used in the next chapters. Furthermore, we study notion of warped product and quasi-Einstein warped product.

In the third chapter we give the definition of warped product with semi-symmetric metric connection and known theorems.

In the final chapter, which consists of original results, we obtain results of quasi-Einstein warped product with semi-symmetric metric connection.

KEYWORDS : warped product, Einstein manifold, quasi-Einstein manifold, semi-symmetric metric connection.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

$\boldsymbol{M}$	:	Manifold
$\boldsymbol{g}$	:	Metrik Tensörü
[,]	:	Lie Parantez Operatörü
$\boldsymbol{T_p M}$	:	$p \in M$ noktasındaki tanjant uzay
$\boldsymbol{\chi(M)}$	:	M manifoldunun vektör alanlarının uzayı
∇	:	Levi-Civita Koneksiyonu
$\tilde{\nabla}$	:	Semi-Simetrik Metrik Koneksiyon
Δ	:	Laplas operatörü
$\boldsymbol{R}$	:	Riemann veya Christoffel Eğrilik Tensörü
$\boldsymbol{S}$	:	Ricci Tensörü
$\boldsymbol{r}$	:	Skaler Eğrilik
$\boldsymbol{H^f}$	:	Hessian Fonksiyonu
$\boldsymbol{T}$	:	Torsiyon Tensörü
$\tilde{\boldsymbol{R}}$	:	Semi-Simetrik Metrik Koneksiyona Göre Riemann Eğrilik Tensörü
$\tilde{\boldsymbol{S}}$	:	Semi-Simetrik Metrik Koneksiyona Göre Ricci Tensörü
$\tilde{\boldsymbol{r}}$	:	Semi-Simetrik Metrik Koneksiyona Göre Skaler Eğrilik
$\boldsymbol{\pi}$	:	1-Form

ÖNSÖZ

Bu çalışmada, katlı çarpım manifoldları, yarı-Einstein katlı çarpım manifoldları, semi-simetrik metrik koneksiyona göre katlı çarpım manifoldları ile ilgili literatürde yapılmış olan çalışmalar ayrıntılı olarak incelenmiş ve semi-simetrik metrik koneksiyona göre yarı-Einstein katlı çarpım manifoldları ile ilgili orijinal sonuçlar elde edilmiştir.

Bana her türlü konuda destek olan tez danışmanım Prof. Dr. Cihan ÖZGÜR'e, her zaman tavsiyelerinden yararlandığım Prof. Dr. Nihal YILMAZ ÖZGÜR'e ve benden yardımını esirgemeyen Araş. Gör. Şaban GÜVENÇ'e teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca çalışmalarım boyunca daima yanımda olan ve manevi desteğini esirgemeyen Ali Can KARACA'ya ve benden maddi manevi desteklerini esirgemeyen her durumda yanımda olan aileme sonsuz teşekkürlerimi ve sevgilerimi sunarım.

1. GİRİŞ

Katlı çarpım manifoldlarının Diferensiyel Geometri ve Fizikte önemli bir rol oynadığı iyi bilinir. Örneğin büyük kütleli bir yıldızın dış uzayı veya kara delik belirten Schwarzschild uzay zamanın en iyi relativistik modeli bir katlı çarpım olarak verilir [1,2,3]. Bundan başka $M = M_1 \times_f M_2$ katlı çarpım manifoldu için M_2 ($n \geq 2$)-boyutlu bir yarı-Riemann manifoldu ve I bir açık aralık olduğunda $M = I \times_f M_2$ katlı çarpım manifoldu bir genelleştirilmiş Robertson-Walker uzay zamanı olarak bilinir [3]. Eğer M_2 3-boyutlu bir Riemann uzay form ve I bir açık aralık ise $M = I \times_f M_2$ katlı çarpım manifoldu bir Robertson-Walker uzay zamanıdır. Robertson-Walker uzay formlarının fizik ve matematikte bir çok uygulamaları vardır.

1924 yılında, [4] numaralı çalışmada A. Friedman ve J. A. Schouten bir Riemann manifoldu üzerinde semi-simetrik afin koneksiyon kavramını tanımlamışlardır [4]. Semi-simetrik metrik koneksiyon tanımı 1932 yılında H. A. Hayden tarafından verilmiştir [5]. Hayden'in çalışmasını kullanarak K. Yano semi-simetrik metrik koneksiyon ile ilgili çalışmaları başlatmış ve semi-simetrik koneksiyonlu bir Riemann manifoldunun eğrilik tensörünü elde etmiştir [6]. Daha sonra T. Imai semi-simetrik koneksiyonlu bir Riemann manifoldunun Ricci tensörünün özelliklerini incelemiştir [7].

Yarı-Einstein manifoldlar fizikte Einstein alan denklemlerin kesin çözümleri aranırken ortaya çıkmışlardır. Genel relativitede mükemmel akışkan uzay zaman bir dört boyutlu yarı-Einstein manifolddur.

2011 yılında C. Özgür ve S. Sular Semi-simetrik metrik koneksiyona sahip katlı çarpım manifoldlarını çalışmış ve manifoldun bir Einstein manifoldu olması için gerekli şartları elde etmiştir. Ayrıca aynı yazarlar yine 2011 yılında yarı-Einstein katlı çarpım manifoldlarını çalışmışlardır.

Bu çalışmada katlı çarpım manifoldları ve semi-simetrik metrik koneksiyona göre Einstein manifodları için daha önce yapılan çalışmalar incelenerek, semi-simetrik metrik koneksiyona göre yarı-Eisntein manifoldları incelenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanımlar ve kavramlar verilecektir.

2.1 Riemann Manifoldları

Tanım 2.1.1 M bir diferansiyellenebilir (C^∞) manifold olsun. M üzerindeki C^∞ vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve M den $\mathbb{R}$ ye C^∞ fonksiyonların uzayı $C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere, M üzerinde;

$$g: \chi(M) \times \chi(M) \to C^\infty(M, \mathbb{R})$$

şeklinde tanımlanan pozitif, simetrik ve 2-lineer g Riemann metriği ile birlikte M ye bir *Riemann manifoldu* adı verilir ve (M, g) şeklinde gösterilir [8].

M manifoldunun herhangi iki p ve q noktası için M üzerinde bu noktaları birleştiren bir eğri bulunabilirse M ye *bağlantılı manifold* adı verilir [4].

Tanım 2.1.2 M n-boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold ve M üzerindeki C^∞ vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere;

$$\nabla: \chi(M) \times \chi(M) \xrightarrow{\text{2-lineer}} \chi(M)$$

$$(X, Y) \longrightarrow \nabla(X,Y) = \nabla_X Y$$

dönüşümü ;

i) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$; $\quad \forall\, X, Y, Z \in \chi(M)$,

ii) $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$; $\quad \forall\, X, Y, Z \in \chi(M)$ ve $\forall\, f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$,

iii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$; $\quad \forall\, X, Y \in \chi(M)$ ve $\forall\, f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$

özelliklerini sağlıyor ise ∇ ya M üzerinde bir *Afin Koneksiyon* adı verilir [9].

Tanım 2.1.3 (M, g) n-boyutlu bir Riemann manifoldu ve ∇ da M üzerinde tanımlanan bir afin koneksiyonu olmak üzere;

i) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$; $\forall X, Y \in \chi(M)$,

ii) $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$; $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$

şartlarını sağladığında ∇ ya M üzerinde *sıfır torsiyonlu Riemann Koneksiyon* veya M nin *Levi-Civita Koneksiyonu* adı verilir [10].

$X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y)$$

$$- g([X, Y], Z) - g([Y, Z], X) + g([Z, X], Y) \qquad (2.1)$$

dır. (2.1) denklemine *Koszul özdeşliği* adı verilir [11].

Tanım 2.1.4 (M, g) bir Riemann manifoldu, ∇ da M üzerindeki Levi-Civita koneksiyonu olsun.

$$R: \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \qquad (2.2)$$

ile tanımlanan R fonksiyonu M üzerinde bir (1, 3)-tensör alanıdır ve M nin *Riemann eğrilik tensörü* olarak adlandırılır. Ayrıca $R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W)$ tensörüne M nin *Riemann-Christoffel eğrilik tensörü* adı verilir.

Her $X, Y, Z, V, W \in \chi(M)$ için Riemann eğrilik tensörü R;

i) $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$,

ii) $g(R(X,Y)V,W) = -g(R(X,Y)W,V)$,

iii) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$, (2.3)

iv) $g(R(X,Y)V,W) = g(R(V,W)X,Y)$,

v) $g(X, R(Y,Z)W) = R(Y,Z,W,X)$

özelliklerine sahiptir [4].

Tanım 2.1.5 *M*, *n*-boyutlu, diferensiyellenebilir bir manifold ve *M* üzerinde (*r*, *s*)-tipinde simetrik bir tensör *A* olsun. Bu durumda, $1 \leq a < b \leq s$ reel sayıları ve keyfi bir *r* değeri için;

$$C_{ab} : \chi_s^r(M) \to \chi_{s-2}^r(M)$$

$$(C_{ab}A)^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_{s-2}} = \sum_{p,q} g^{pq} A^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots \underset{a.\text{bileşen}}{p} \ldots \underset{b.\text{bileşen}}{q} \ldots j_{s-2}}$$

biçiminde tanımlanan C_{ab} operatörüne ***a*. *ve b*.** bileşenlere göre *A* tensörünün *metrik kontraksiyonu* adı verilir. Böylece kontraksiyon operatörü, (*r*, *s*)-tipindeki bir tensörü (*r*-1, *s*-1)-tipinde bir tensöre dönüştürür [3].

Tanım 2.1.6 (*M*, *g*) bir Riemann manifoldu olsun. T_pM tanjant uzayının iki boyutlu alt uzayı Π olmak üzere *V*, *W*∈ Π tanjant vektörleri için *Q* fonksiyonu;

$$Q(V, W) = g(V, V)g(W, W) - g(V, W)^2$$

biçiminde tanımlansın. Q(*V*, *W*) ≠ 0 olmak üzere;

$$K(V,W) = \frac{g(R(V,W)W,V)}{Q(V,W)}$$

olup buna Π nin *kesitsel eğriliği* denir ve *K*(Π) ile gösterilir [4].

Tanım 2.1.7 (*M*, *g*) *n*-boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, lokal vektör alanları olsunlar.

$$S: \chi(M) \times \chi(M) \to \mathbb{R}$$

$$(X,Y) \to S(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} g(R(e_i, X)Y, e_i) \qquad (2.4)$$

şeklinde tanımlı (0, 2)-tipindeki *S* tensör alanına, *M* üzerinde *Ricci eğrilik tensörü* adı verilir [12].

Tanım 2.1.8 (M, g) $n > 2$ boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Her X, $Y \in \chi(M)$ için;

$$S(X,Y) = \lambda g(X,Y) \tag{2.5}$$

olacak biçimde M üzerinde bir $\lambda \in \mathbb{R}$ sayısı var ise yani M nin Ricci tensörü S, metrik tensör g nin bir katı ise M ye bir *Einstein manifoldu* adı verilir [8].

Tanım 2.1.9 M üzerinde bir birim tanjant vektör alanı U olmak üzere, π 1-formunu

$$g(X,U) = \pi(X) \tag{2.6}$$

biçiminde tanımlayalım. Burada U vektör alanına π 1-*formunun üreteci* adı verilir. Eğer (M, g) n-boyutlu Riemann manifoldunun Ricci tensörü S, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için;

$$S(X,Y) = ag(X,Y) + b\pi(X)\pi(Y), \quad a,b \in C^{\infty}(M,\mathbb{R}) \tag{2.7}$$

koşulunu sağlıyorsa M ye *yarı-Einstein manifold* adı verilir [13]. Eğer $b = 0$ ise (M, g) manifoldu bir Einstein manifolda dönüşür.

Tanım 2.1.10 (M, g) n-boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ lokal ortonormal vektör alanları olmak üzere;

$$r = \sum_{i=1}^{n} S(e_i, e_i) \tag{2.8}$$

fonksiyonuna M nin *skaler eğrilik fonksiyonu* adı verilir [8].

Tanım 2.1.11 (M, g) n-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Eğer M nin eğrilik tensörü $\forall X,Y,Z,W \in \chi(M)$ ve $a,b \in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$, $b \neq 0$ için;

$$\begin{aligned} R(X,Y,Z,W) = {} & a[g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W)] \\ & + b[g(X,W)\pi(Y)\pi(Z) - g(X,Z)\pi(Y)\pi(W) \\ & + g(Y,Z)\pi(X)\pi(W) - g(Y,W)\pi(X)\pi(Z)] \end{aligned} \tag{2.9}$$

biçiminde ise M ye *yarı-sabit kesitsel eğrilikli uzay* adı verilir [14].

Tanım 2.1.12 M ve N sırası ile n ve $(n + d)$-boyutlu Riemann manifoldları olmak üzere M, N nin alt manifoldu ve ∇ ve $\tilde{\nabla}$ sırası ile M ve N de kovaryant türevler olsun. Böylece X ve Y, M üzerinde vektör alanları olmak üzere;

$$h : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi^{\perp}(M)$$

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - h(X, Y) \tag{2.10}$$

biçiminde *Gauss denklemi* elde edilir. Burada $\nabla_X Y$ ve $h(X, Y)$, $\tilde{\nabla}_X Y$ nin sırasıyla tanjant ve normal bileşenleridir. (2.10) ile tanımlanan h ya M nin *ikinci temel form* adı verilir. Eğer $h = 0$ ise M ye *total geodeziktir* denir [15].

Tanım 2.1.13 M ve N sırası ile n ve $(n + d)$-boyutlu Riemann manifoldları olmak üzere M, N nin alt manifoldu olsun. M ye normal bir birim vektör alanı ξ olsun. $\tilde{\nabla}_X \xi$ nin teğet ve normal bileşenleri sırasıyla $-A_\xi(X)$ ve $\nabla^{\perp}_X \xi$ olmak üzere;

$$A : \chi(M) \times \chi^{\perp}(M) \rightarrow \chi(M)$$

dönüşümü iyi tanımlıdır. Böylece

$$\tilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + \nabla^{\perp}_X \xi \tag{2.11}$$

biçiminde *Weingarten denklemi* elde edilir. Burada A_ξ ye şekil operatörü, $\nabla^{\perp} e$ de M nin $T^{\perp} M$ *normal demetindeki (normal) koneksiyon* adı verilir [15].

M nin şekil operatörü A_ξ ile ikinci temel form h arasında;

$$g(A_\xi X, Y) = \tilde{g}(h(X, Y), \xi) \tag{2.12}$$

bağıntısı vardır. Burada g, $T_p M$ de skaler çarpımdır [15].

Tanım 2.1.14 (M, g) bir Riemann manifoldu, $(\tilde{M}, \tilde{g})$ Riemann manifoldunun bir alt manifoldu olsun. $\tilde{M}$ nın eğrilik tensörü $\tilde{R}$, $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için;

$$\tilde{R}(X, Y)Z = \tilde{\nabla}_{\mathbf{X}} \tilde{\nabla}_{\mathbf{Y}} Z - \tilde{\nabla}_{\mathbf{Y}} \tilde{\nabla}_{\mathbf{X}} Z - \tilde{\nabla}_{[\mathbf{X},\mathbf{Y}]} Z$$

$$\tilde{R}(X, Y, Z, W) = \tilde{g}(\tilde{R}(X, Y)Z, W)$$

biçiminde tanımlanır. M nin eğrilik tensörü R ve $\tilde{M}$ nın eğrilik tensörü $\tilde{R}$ olmak üzere, (2.10) ve (2.11) denklemleri yardımıyla

$$\tilde{R}(X,Y,Z,W) = R(X,Y,Z,W) - \tilde{g}(h(Y,Z),h(X,W))$$

$$+\tilde{g}(h(X,Z),h(Y,W)) \quad (2.13)$$

elde edilir. Burada (2.13) ile tanımlanan denkleme *Gauss denklemi* adı verilir [15].

Tanım 2.1.15 M bir Riemann manifoldu olsun. Bir $f \in \chi(M)$ fonksiyonun Hessian fonksiyonu $H^f = \nabla(\nabla f)$ olacak şekilde *f* nin ikinci kovaryant türevidir [3].

Yardımcı Teorem 2.1.16 *f* nin H^f Hessian fonksiyonu

$$\begin{aligned} H^f(X,Y) &= XY[f] - (\nabla_X Y)f \\ &= \langle \nabla_X(gradf), Y\rangle \end{aligned}$$

olacak biçimde simetrik bir (0,2) tensör alanıdır [3].

Tanım 2.1.17 M bir Riemann manifoldu olsun. Bir $f \in \chi(M)$ fonksiyonun Δf Laplas fonksiyonu

$$\Delta f = div(gradf)$$

şeklindedir. Laplas fonksiyonu

$$\Delta(f_1 + f_2) = \Delta f_1 + \Delta f_2$$

$$\Delta f_1 f_2 = 2g(gradf_1, gradf_2) + f_2\Delta f_1 + f_1\Delta f_2$$

özelliklerini sağlar [3].

2.2 Katlı Çarpım Manifoldları

Tanım 2.2.1 (M_1, g_{M_1}) ve (M_2, g_{M_2}) Riemann manifoldları ve $f > 0$, M_1 üzerinde bir C^∞ fonksiyon, $\Omega : M_1 \times M_2 \to M_1$ ve $\sigma : M_1 \times M_2 \to M_2$, $M_1 \times M_2$ manifoldunun projeksiyon dönüşümleri olmak üzere $M = M_1 \times_f M_2$ katlı çarpım manifoldu

$$g = \Omega^*(g_{M_1}) + (f \circ \Omega)^2 \sigma^*(g_{M_2}) \quad (2.14)$$

metrik tensörü ile oluşturulmuş $M_1 \times M_2$ çarpım manifoldudur [3].

Eğer $V,W \in T_{(p,q)}(M_1 \times M_2)$ ise bu durumda

$$\begin{aligned} g(V,W) &= \Omega^*(g_{M_1}(V,W)) + (f \circ \Omega)^2 \sigma^*(g_{M_2}(V,W)) \\ &= g_{M_1}(d\Omega(V), d\Omega(W)) + (f \circ \Omega)^2 g_{M_2}(d\sigma(V), d\sigma(W)) \end{aligned}$$

dır. Bir Riemann manifoldundaki gibi $p \times M_2 = \Omega^{-1}(p)$ lifleri ve $M_1 \times q = \sigma^{-1}(q)$ yaprakları $M = M_1 \times_f M_2$ katlı çarpım manifoldunun alt manifoldlarıdır ve katlı metrik aşağıdaki üç özellikle karekterize edilir [3];

i) Her bir $q \in M_2$ için $\Omega_{M_1 \times q}$ dönüşümü M_1 üzerinde bir izometridir.

ii) Her bir $p \in M_1$ için $\Omega_{p \times M_2}$ dönüşümü M_2 üzerinde $1/f(p)$ sabit çarpan ile çarpım halindedir.

iii) Her bir $(p,q) \in M$ için $M_1 \times q$ yaprakları ve $p \times M_2$ lifleri (p,q) noktasında ortogonaldir.

$X \in \chi(M_1)$ ve $V \in \chi(M_2)$ için

$$\begin{aligned} K(X \wedge V) &= g(\nabla_V \nabla_X X - \nabla_X \nabla_V X, V) \\ &= (1/f)\{(\nabla_X X)f - X^2 f\} \end{aligned}$$

olmak üzere eğer (M, g) n-boyutlu bir Riemann manifoldu için $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ bir lokal ortonormal çatı, $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n_1}\}$ M_1 manifolduna ve $\{e_{n_1+1}, \ldots, e_n\}$ M_2 manifolduna teğet olacak şekilde seçilirse,

$$\frac{\Delta f}{f} = \sum_{i=1}^{n} K(e_j, e_s) \tag{2.15}$$

elde edilir [3].

Örnek 2.2.2 $\mathbb{R}^3$te verilen bir düzlemsel C eğrisinin seçilen bir eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan bir yüzey M olsun. Eksene olan uzaklığı $u : C \to \mathbb{R}^+$ ile gösterelim. Bu durumda M, $C \times_u S^1(1)$ dir [3, 16]. Gerçekten,

$$\begin{aligned} x &= u\cos v \\ y &= u\sin v \\ z &= f(u) \end{aligned}$$

koordinatları için dönel yüzey

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$(u,v) \to (u\cos v, u\sin v, f(u))$ dir. Buradan da

$$\begin{aligned} \varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) &= (\cos v, \sin v, f^{'}(u)) \\ \varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) &= (-u\sin v, u\cos v, 0) \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} g_{11} &= g\left(\varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial u}\right), \varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)\right) = 1 + (f^{'}(u))^2, \\ g_{22} &= g\left(\varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial v}\right), \varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)\right) = u^2, \\ g_{12} &= g\left(\varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial u}\right), \varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)\right) = 0 \end{aligned}$$

dır. Benzer şekilde $g_{21} = 0$ dır. Bu durumda

$$\begin{aligned} ds^2 &= \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}\,dx_i\,dx_j \\ &= g_{11}du^2 + g_{22}dv^2 \\ &= (1 + f^{'}(u)^2)du^2 + u^2dv^2 \end{aligned}$$

olur. Bu ise dönel yüzeyin bir katlı çarpım manifoldu olduğunu gösterir.

Örnek 2.2.3 $\mathbb{R}^3$ Öklid uzayı, küresel koordinatlarla birlikte bir katlı çarpım manifoldudur. Gerçekten,

$$\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$(\rho, \theta, \varphi) \to (\rho\cos\theta\cos\varphi, \rho\cos\theta\sin\varphi, \rho\sin\theta) \text{ olup}$$

$$\begin{aligned}
\phi_*(\frac{\partial}{\partial\rho}) &= (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \sin\theta) \\
\phi_*(\frac{\partial}{\partial\theta}) &= (-\rho\sin\theta\cos\varphi, -\rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta) \\
\phi_*(\frac{\partial}{\partial\varphi}) &= (-\rho\cos\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta\cos\varphi, 0)
\end{aligned}$$

elde edilir. Doğrudan hesaplamalar ile
$g_{11} = 1,\ g_{22} = \rho^2,\ g_{33} = \rho^2\cos^2\theta,\ g_{12} = g_{21} = g_{13} = g_{31} = 0$ bulunur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
ds^2 &= \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij} dx_i dx_j \\
&= g_{11} d\rho^2 + g_{22} d\theta^2 + g_{33} d\varphi^2 \\
&= d\rho^2 + \rho^2(d\theta^2 + \cos^2\theta d\varphi^2)
\end{aligned}$$

dır. Sonuç olarak $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ da $\mathbb{R}^+ \times_\rho S^2$ bir katlı çarpım manifoldudur [3, 16].

Sonuç 2.2.4 (M_1, g_{M_1}) ve (M_2, g_{M_2}) Riemann manifoldları ve $M_1 \times_f M_2$ katlı çarpım manifoldu olsun. Bu takdirde

$$X \in \chi(M_1) \text{ ve } V \in \chi(M_2) \text{ ise } g(X, V) = 0 \text{ ve } [X, V] = 0$$

dır [3].

Önerme 2.2.5 $M = M_1 \times_f M_2$ katlı çarpım manifoldu için, ∇, ${}^{M_1}\nabla$ ve ${}^{M_2}\nabla$ koneksiyonları sırasıyla *M*, *M₁* ve *M₂* üzerindeki Riemann koneksiyonlarını göstermek üzere,

Eğer $X, Y \in \chi(M_1)$ ve $V,W \in \chi(M_2)$ ise,

i) $\nabla_X Y = {}^{M_1}\nabla_X Y$

ii) $\nabla_X V = \nabla_V X = (Xf / f)V$

iii) $nor\nabla_V W = -(g(V,W)/f)gradf$

iv) $\tan\nabla_V W = {}^{M_2}\nabla_V W$

dır [3].

İspat: i) Sonuç 2.2.4 den $[X,V] = [Y,V] = 0$ olduğu için (2.1) numaralı Koszul özdeşliğinden,

$$2g(\nabla_X Y,V) = -Vg(X,Y) + g(V,[X,Y]) \tag{2.16}$$

elde edilir. Diğer taraftan, $X,Y \in \chi(M_1)$ olduğundan $g(X,Y)$, M_2 üzerinde sabittir. Böylece $V \in \chi(M_2)$ için $Vg(X,Y) = 0$ dır. Ayrıca $[X,Y] \in \chi(M_1)$ olduğundan $g(V,[X,Y]) = 0$ dır. Böylece (2.16) denklemi

$$g(\nabla_X Y,V) = 0$$

şekline dönüşür. Buradan da $\nabla_X Y = {}^{M_1}\nabla_X Y$ olduğu görülür.

ii) $[X,V] = 0$ olduğu için ve $[X,V] = \nabla_X V - \nabla_V X = 0$ dan $\nabla_X V = \nabla_V X$ dir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} g(V,W) &= g_{M_1}(V,W) + f^2 g_{M_2}(V,W) \\ &= f^2 g_{M_2}(V,W) \end{aligned} \tag{2.17}$$

ve $g(Y,V) = 0$ olduğundan,

$$\begin{aligned} &Xg(Y,V) = 0 \\ &g(\nabla_X Y,V) + g(Y,\nabla_X V) = 0 \end{aligned}$$

olup böylece

$$g(\nabla_X Y, V) = -g(Y, \nabla_X V)$$

bulunur. (i) den $g(\nabla_X Y, V) = 0$ olduğunu biliyoruz. Böylece $g(Y, \nabla_X V) = 0$ elde edilir.

Sonuç 2.2.4 ve Koszul özdeşliğinden,

$$2g(\nabla_X V, W) = Xg(V, W) \tag{2.18}$$

bulunur. Buradan da

$$Xg(V,W) = 2fX[f]g_{M_2}(V,W) + f^2 Xg_{M_2}(V,W)$$

$$= 2\frac{X[f]}{f} g(V,W) \tag{2.19}$$

elde edilir. (2.19) denklemi (2.18) denkleminde kullanılırsa,

$$g(\nabla_X V, W) = \frac{X[f]}{f} g(V,W)$$

sonucuna ulaşılır. Yukarıdaki denklem her $W \in \chi(M_2)$ için doğru olduğundan,

$$\nabla_X V = \frac{X[f]}{f} V$$

elde edilir.

iii) $g(W, X) = 0$ olduğundan her iki tarafın V yönünde türevi alındığında

$$Vg(W, X) = 0$$

olup buradan

$$g(\nabla_V W, X) = -g(W, \nabla_V X)$$

bulunur. Son eşitlikte (ii) denklemi kullanıldığında

$$g(\nabla_V W, X) = -g(W, (X[f]/f)V)$$

$$= -(X[f]/f)g(W,V) \tag{2.20}$$

sonucuna ulaşılır. Diğer taraftan,

$$X[f] = g(gradf, X) \tag{2.21}$$

olduğundan, (2.21) denklemi (2.20) denkleminde kullanılırsa,

$$g(\nabla_V W, X) = -\frac{g(W,V)}{f} g(gradf, X)$$

elde edilir. Böylece her $X \in \chi(M_1)$ için,

$$nor\nabla_V W = -\frac{g(W,V)}{f} gradf$$

bulunur.

iv) V, W, $U \in \chi(M_2)$ için (2.14) gereği

$$\begin{aligned} g(\nabla_V W, U) &= g_{M_1}(\nabla_V W, U) + f^2 g_{M_2}(\nabla_V W, U) \\ &= f^2 g_{M_2}(\nabla_V W, U) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\forall U \in \chi(M_2)$ için,

$$\tan \nabla_V W = {}^{M_2}\nabla_V W$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.■

Önerme 2.2.6 $M = M_1 \times_f M_2$ katlı çarpım manifoldunun Riemann eğrilik tensörü ${}^M R$ olmak üzere X, Y, $Z \in \chi(M_1)$ ve U, V, $W \in \chi(M_2)$ için,

i) ${}^M R(X,Y)Z = {}^{M_1} R(X,Y)Z$

ii) ${}^M R(V,X)Y = -(H^f(X,Y)/f)V,$

iii) ${}^M R(X,Y)V = {}^M R(V,W)X = 0$

iv) ${}^M R(X,V)W = -(g(V,W)/f)\nabla_X(gradf)$

v) ${}^M R(V,W)U = {}^{M_2} R(V,W)U$

$+\|gradf\|^2 / f^2 \{g(W,U)V - g(V,U)W\}$ dır [3].

İspat: i) Önerme 2.2.5 (i) gereği $\nabla_X Y = {}^{M_1}\nabla_X Y$ olduğundan (2.2) denklemi gereği,

$$\begin{aligned} {}^{M}R(X,Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \\ &= {}^{M_1}\nabla_X {}^{M_1}\nabla_Y Z - {}^{M_1}\nabla_Y {}^{M_1}\nabla_X Z - {}^{M_1}\nabla_{[X,Y]} Z \\ &= {}^{M_1}R(X,Y)Z \end{aligned}$$

elde edilir.

ii) Sonuç 2.2.4 gereği, $[X,V]=0$ olduğu için,

$$ {}^{M}R(V,X)Y = \nabla_V \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_V Y \tag{2.22}$$

bulunur. Buradan da Önerme 2.2.5 (ii) kullanılarak,

$$\begin{aligned} \nabla_X \nabla_V Y &= \nabla_X \left(\frac{Y(f)}{f} V\right) \\ &= X\left(\frac{Y(f)}{f} V\right) + \frac{Y(f)}{f} \nabla_X V \\ &= \frac{X(Y(f))}{f} V \end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\nabla_V \nabla_X Y = \frac{\nabla_X Y(f)}{f} V$$

elde edilir. Son iki denklem (2.22) denkleminde kullanılırsa,

$$\begin{aligned} {}^{M}R(V,X)Y &= \frac{\nabla_X Y(f)}{f} V - \frac{X(Y(f))}{f} V \\ &= -\frac{H^f(X,Y)}{f} V \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

iii) $[V,W]=0$ olacak şekilde alınırsa (2.2) denkleminden,

$$ {}^{M}R(V,W)X = \nabla_V \nabla_W X - \nabla_W \nabla_V X \tag{2.23}$$

elde edilir. Buradan da Önerme 2.2.5 (ii) kullanılarak,

$$\nabla_V \nabla_W X = \nabla_V (\frac{X(f)}{f} W)$$
$$= \frac{X(f)}{f} \nabla_V W$$

ve benzer şekilde,

$$\nabla_W \nabla_V X = \frac{X(f)}{f} \nabla_W V$$

bulunur. Son iki eşitlik (2.23) denkleminde kullanılırsa,

$$^{M}R(V,W)X = \frac{X(f)}{f} (\nabla_V W - \nabla_W V)$$
$$= \frac{X(f)}{f} [V,W] = 0$$

sonucuna ulaşılır.

iv) (2.3) denklemlerinden,

$$^{M}R(X,V)W \ + \ ^{M}R(V,W)X \ + \ ^{M}R(W,X)V \ = 0$$

yazılabilir.

(iii) ve (2.3) denklemlerinden,

$$^{M}R(X,V)W = -\,^{M}R(W,X)V$$
$$= \,^{M}R(X,W)V$$

bulunur. Benzer şekilde, (2.3) denklemleri, Önerme 2.2.5 (ii) ve (2.21) den,

$$g(^{M}R(X,V)W,Y) = g(^{M}R(V,X)Y,W)$$
$$= g(-\frac{H^f(X,Y)}{f} V,W)$$
$$= -\frac{H^f(X,Y)}{f} g(V,W)$$
$$= -\frac{g(V,W)}{f} g(\nabla_X (gradf),Y)$$

elde edilir. $\forall Y \in \chi(M_1)$ için eşitlik sağlandığından,

$$^{M}R(X,V)W = -(g(V,W)/f)\nabla_X (gradf)$$

sonucuna ulaşılır.

v) $M_1 \subset M$ olduğundan (2.13) denkleminden ve Önerme 2.2.5 (iii), (iv) gereği $E \in \chi(M_2)$ için,

$$
\begin{aligned}
{}^{M_1}R(V,W,U,E) &= g({}^{M_1}R(V,W)U,E) \\
&= g({}^{M}R(V,W)U,E) + g(h(W,U),h(V,E)) - g(h(V,U),h(W,E)) \\
&= g({}^{M}R(V,W)U,E) \\
&\quad + \frac{g(gradf,gradf)}{f^2}[g(W,U)g(V,E) - g(V,U)g(W,E)]
\end{aligned}
$$

bulunur. Eşitlik $\forall E \in \chi(M_2)$ için sağlandığından ispat tamamlanmış olur.■

Önerme 2.2.7 ${}^{M}S$**,** $M = M_1 \times_f M_2$ katlı çarpım manifoldunun Ricci eğrilik tensörünü göstermek üzere $X, Y \in \chi(M_1)$ ve $V, W \in \chi(M_2)$ için,

i) ${}^{M}S(X,Y) = {}^{M_1}S(X,Y) - \dfrac{d}{f}H^f(X,Y), \quad d = boyM_2,$

ii) ${}^{M}S(X,V) = 0,$

iii) ${}^{M}S(V,W) = {}^{M_2}S(V,W) - g(V,W)[\dfrac{\Delta f}{f} + \dfrac{d-1}{f^2}\|gradf\|^2]$ dır [3].

İspat: i) $\{e_i\} \in T_pM_1$ ve $\{Fe_i\} \in T_pM_2$ olmak üzere, $boy\ T_pM_1 = m$ için,

Ricci eğrilik tensörü tanımından,

$$
{}^{M}S(X,Y) = \sum_{i=1}^{m} g({}^{M}R(e_i,X)Y,e_i) + \sum_{j=1}^{d} g({}^{M}R(Fe_j,X)Y,Fe_j) \tag{2.24}
$$

elde edilir. Önerme 2.2.6 (ii) den,

$$
{}^{M}R(Fe_j,X)Y = -\frac{H^f(X,Y)}{f}Fe_j
$$

olduğunu biliyoruz. (2.17) denklemi ve son eşitlik (2.24) denkleminde kullanılırsa,

$$
{}^{M}S(X,Y) = {}^{M_1}S(X,Y) - \frac{d}{f}H^f(X,Y)
$$

elde edilir.

ii) (2.4) numaralı Ricci eğrilik tensörü tanımından,

$$^{M}S(X,V)=\sum_{i=1}^{m}g(^{M}R(e_i,X)V,e_i)+\sum_{j=1}^{d}g(^{M}R(Fe_j,X)V,Fe_j) \tag{2.25}$$

bulunur. Böylece Önerme 2.2.6 (ii) gereği,

$$^{M}R(e_i,X)V=0 \tag{2.26}$$

ve Önerme 2.2.6 (iv) den,

$$^{M}R(Fe_j,X)V=-^{M}R(X,Fe_j)V=\frac{g(Fe_j,V)}{f}\nabla_X(gradf) \tag{2.27}$$

elde edilir. (2.26) ve (2.27) denklemleri (2.25) denkleminde kullanılırsa,

$$^{M}S(X,V)=0$$

sonucuna ulaşılır.

iii) (2.4) numaralı Ricci eğrilik tensörü tanımından,

$$^{M}S(V,W)=\sum_{i=1}^{m}g(^{M}R(e_i,V)W,e_i)+\sum_{j=1}^{d}g(^{M}R(Fe_j,V)W,Fe_j) \tag{2.28}$$

elde edilir. Önerme 2.2.6 (iv) gereği,

$$^{M}R(e_i,V)W=-\frac{g(V,W)}{f}\nabla_{e_i}(gradf) \tag{2.29}$$

olduğunu biliyoruz. Benzer şekilde, Önerme 2.2.6 (v) den,

$$^{M}R(Fe_j,V)W=\,^{M_2}R(Fe_j,V)W+\frac{\|gradf\|^2}{f^2}\{g(Fe_j,W)V-g(V,W)Fe_j\} \tag{2.30}$$

elde edilir. Buradan da (2.29) ve (2.30) denklemleri (2.28) denkleminde kullanılırsa,

$$^{M}S(V,W)=-\frac{g(V,W)}{f}\sum_{i=1}^{m}g(\nabla_{e_i}(gradf),e_i)+\sum_{j=1}^{d}\{g(^{M_2}R(Fe_j,V)W,Fe_j)$$

$$+\frac{\|gradf\|^2}{f^2}(g(Fe_j,W)g(V,Fe_j)-g(V,W)g(Fe_j,Fe_j)\} \tag{2.31}$$

bulunur.

Diğer taraftan, ortonormal açılım tanımından, Tanım 2.1.16 ve (2.31) denkleminden,

$$^{M}S(V,W) = {}^{M_2}S(V,W) - [\frac{\Delta f}{f} + (d-1)\frac{\|gradf\|^2}{f^2}]g(V,W)$$

elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.■

Önerme 2.2.8 ^{M}r, $M = M_1 \times_f M_2$ katlı çarpım manifoldunun skaler eğriliğini göstermek üzere, X, $Y \in \chi(M_1)$ için,

$$^{M}r = {}^{M_1}r + {}^{M_2}r - 2d\frac{\Delta f}{f} - d(d-1)\frac{\|gradf\|^2}{f^2}$$

dir [3].

İspat: (2.8) denkleminden,

$$^{M}r = \sum_{i=1}^{m} S(e_i, e_i) + \sum_{j=1}^{d} S(Fe_j, Fe_j)$$

elde edilir. Diğer taraftan Önerme 2.2.7 (i) ve (iii) den,

$$\begin{aligned} r &= \sum_{i=1}^{m}({}^{M_1}S(e_i,e_i) - \frac{d}{f}H^f(e_i,e_i)) + \sum_{j=1}^{d}({}^{M_2}S(Fe_j,Fe_j) \\ &\quad -(\frac{\Delta f}{f} + \frac{d-1}{f^2}\|gradf\|^2)g(Fe_j,Fe_j)) \\ &= {}^{M_1}r + {}^{M_2}r - 2d\frac{\Delta f}{f} - d(d-1)\frac{\|gradf\|^2}{f^2} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.■

Örnek 2.2.9 [17]. $\tilde{M} = M^n(c) \times_f \mathbb{R}$ bir uzay form,

$$\pi : \tilde{M} = M^n(c) \times_f \mathbb{R} \to M^n(c)$$

projeksiyon dönüşümü ve $\pi_* : T_p\tilde{M} \to T_pM^n(c)$ türev dönüşümü olsun.

$$\tilde{g} = dt^2 + f^2 g_M$$

olmak üzere $\frac{\partial}{\partial t} \in \chi(\mathbb{R})$ ve $X \in \chi(\tilde{M})$ vektör alanı $X = \pi_*(X) + \tilde{g}(X, \frac{\partial}{\partial t})\frac{\partial}{\partial t}$ şeklinde verilir. $\forall X, Y, Z, W \in \chi(\tilde{M})$ için

$$
\begin{aligned}
\tilde{R}(X,Y,Z,W) &= \tilde{R}(\pi_*(X)+\tilde{g}(X,\frac{\partial}{\partial t})\frac{\partial}{\partial t},Y,Z,W) \\
&= \tilde{R}(\pi_*(X),Y,Z,W)+\tilde{g}(X,\frac{\partial}{\partial t})\tilde{R}(\frac{\partial}{\partial t},Y,Z,W) \\
&= \tilde{R}(\pi_*(X),\pi_*(Y)+\tilde{g}(Y,\frac{\partial}{\partial t})\frac{\partial}{\partial t},Z,W) \\
&\quad +\tilde{g}(X,\frac{\partial}{\partial t})\tilde{R}(\frac{\partial}{\partial t},\pi_*(Y)+\tilde{g}(Y,\frac{\partial}{\partial t})\frac{\partial}{\partial t},Z,W) \\
&= \tilde{R}(\pi_*(X),\pi_*(Y),Z,W) \\
&\quad +\tilde{g}(Y,\frac{\partial}{\partial t})\tilde{R}(\pi_*(X),\frac{\partial}{\partial t},Z,W) \\
&\quad +\tilde{g}(X,\frac{\partial}{\partial t})\tilde{R}(\frac{\partial}{\partial t},\pi_*(Y),Z,W) \\
&\quad +\tilde{g}(X,\frac{\partial}{\partial t})\tilde{g}(Y,\frac{\partial}{\partial t})\tilde{R}(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial t},Z,W) \\
&= \tilde{R}(\pi_*(X),\pi_*(Y),\pi_*(Z),W) \\
&\quad +\tilde{g}(Z,\frac{\partial}{\partial t})\tilde{R}(\pi_*(X),\pi_*(Y),\frac{\partial}{\partial t},W) \\
&\quad +\tilde{g}(Y,\frac{\partial}{\partial t})\tilde{R}(\pi_*(X),\frac{\partial}{\partial t},\pi_*(Z),W) \\
&\quad +\tilde{g}(Y,\frac{\partial}{\partial t})\tilde{g}(Z,\frac{\partial}{\partial t})\tilde{R}(\pi_*(X),\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial t},W) \\
&\quad +\tilde{g}(X,\frac{\partial}{\partial t})\tilde{R}(\frac{\partial}{\partial t},\pi_*(Y),\pi_*(Z),W) \\
&\quad +\tilde{g}(X,\frac{\partial}{\partial t})\tilde{g}(Z,\frac{\partial}{\partial t})\tilde{R}(\frac{\partial}{\partial t},\pi_*(Y),\frac{\partial}{\partial t},W) \\
&= \tilde{R}(\pi_*(X),\pi_*(Y),\pi_*(Z),\pi_*(W)) \\
&\quad +\tilde{g}(Y,\frac{\partial}{\partial t})\tilde{g}(W,\frac{\partial}{\partial t})\tilde{R}(\pi_*(X),\frac{\partial}{\partial t},\pi_*(Z),\frac{\partial}{\partial t}) \\
&\quad +\tilde{g}(Y,\frac{\partial}{\partial t})\tilde{g}(Z,\frac{\partial}{\partial t})\tilde{R}(\pi_*(X),\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial t},\pi_*(W)) \\
&\quad +\tilde{g}(X,\frac{\partial}{\partial t})\tilde{g}(W,\frac{\partial}{\partial t})\tilde{R}(\frac{\partial}{\partial t},\pi_*(Y),\pi_*(Z),\frac{\partial}{\partial t}) \\
&\quad +\tilde{g}(X,\frac{\partial}{\partial t})\tilde{g}(Z,\frac{\partial}{\partial t})\tilde{R}(\frac{\partial}{\partial t},\pi_*(Y),\frac{\partial}{\partial t},\pi_*(W))
\end{aligned} \tag{2.32}
$$

elde edilir. Buradan $\pi_*(X),\pi_*(Y),\pi_*(Z),\pi_*(W)\in \chi(M^n(c))$ için Önerme 2.2.6 (v) kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
\tilde{R}(\pi_*(X),\pi_*(Y),\pi_*(Z),\pi_*(W)) = {}^{M^n(c)}R(\pi_*(X),\pi_*(Y),\pi_*(Z),\pi_*(W))& \\
+\frac{\|gradf\|^2}{f^2}(\tilde{g}(\pi_*(Y),\pi_*(Z)\tilde{g}(\pi_*(Y),\pi_*(W)& \\
-\tilde{g}(\pi_*(X),\pi_*(Z)\tilde{g}(\pi_*(Y),\pi_*(W))& \\
=c(\tilde{g}(\pi_*(Y),\pi_*(Z)\tilde{g}(\pi_*(Y),\pi_*(W)& \\
-\tilde{g}(\pi_*(X),\pi_*(Z)\tilde{g}(\pi_*(Y),\pi_*(W))& \\
+\frac{\|gradf\|^2}{f^2}(\tilde{g}(\pi_*(Y),\pi_*(Z)\tilde{g}(\pi_*(Y),\pi_*(W)& \\
-\tilde{g}(\pi_*(X),\pi_*(Z)\tilde{g}(\pi_*(Y),\pi_*(W))& \\
=(c+\frac{\|gradf\|^2}{f^2})(\tilde{g}(\pi_*(Y),\pi_*(Z)\tilde{g}(\pi_*(Y),\pi_*(W)& \\
-\tilde{g}(\pi_*(X),\pi_*(Z)\tilde{g}(\pi_*(Y),\pi_*(W))&
\end{aligned}
$$

bulunur. Benzer şekilde Önerme 2.2.6 (v) den,

$$
\begin{aligned}
\tilde{R}(\pi_*(X),\pi_*(Y),\pi_*(Z),\frac{\partial}{\partial t}) = {}^{M^n(c)}R(\pi_*(X),\pi_*(Y),\pi_*(Z),\frac{\partial}{\partial t})& \\
+\frac{\|gradf\|^2}{f^2}[\tilde{g}(\pi_*(Y),\pi_*(Z))\tilde{g}(\pi_*(X),\frac{\partial}{\partial t})& \\
-\tilde{g}(\pi_*(X),\pi_*(Z))\tilde{g}(\pi_*(Y),\frac{\partial}{\partial t})]& \\
=0&
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\tilde{R}(\pi_*(X),\frac{\partial}{\partial t},\pi_*(Z),\frac{\partial}{\partial t}) &= \tilde{g}(-\frac{\tilde{g}(\pi_*(X),\pi_*(Z))}{f}\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}gradf,\frac{\partial}{\partial t}) \\
&= -\frac{\tilde{g}(\pi_*(X),\pi_*(Z))}{f}f''
\end{aligned}
$$

elde edilir. Diğer taraftan Önerme 2.2.6 (ii) gereği,

$$
\tilde{R}(\pi_*(X),\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial t},\pi_*(W)) = \frac{-H^f(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial t})}{f}\tilde{g}(\pi_*(X),\pi_*(W))
$$

ve

$$\tilde{R}(\frac{\partial}{\partial t},\pi_*(Y),\pi_*(Z),\frac{\partial}{\partial t}) = \frac{-H^f(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial t})}{f}\tilde{g}(\pi_*(Y),\pi_*(Z))$$

bulunur. Ayrıca metrik tanımından,

$$\tilde{g}(\pi_*(X),\pi_*(Z)) = \tilde{g}(Y,Z) - \tilde{g}(Z,\frac{\partial}{\partial t})\tilde{g}(Y,\frac{\partial}{\partial t})$$

ve

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\pi_*(Y),\pi_*(Z))\tilde{g}(\pi_*(X),\pi_*(W)) = {} & \tilde{g}(Y,Z)\tilde{g}(X,W) - \tilde{g}(Y,Z)\tilde{g}(X,\frac{\partial}{\partial t})\tilde{g}(W,\frac{\partial}{\partial t}) \\ & - \tilde{g}(X,W)\tilde{g}(Z,\frac{\partial}{\partial t})\tilde{g}(Y,\frac{\partial}{\partial t}) \\ & + \tilde{g}(X,\frac{\partial}{\partial t})\tilde{g}(Y,\frac{\partial}{\partial t})\tilde{g}(Z,\frac{\partial}{\partial t})\tilde{g}(W,\frac{\partial}{\partial t})\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan, Yardımcı Teorem 2.1.16 yardımıyla

$$H^f(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial t}) = f^{''}$$

bulunur. Yukarıda bulunan denklemler (2.32) da yerlerine yazılıp düzenlenirse,

$$\begin{aligned}\tilde{R}(X,Y,Z,W) = {} & (c+\frac{(f^{'})^2}{f^2})(\tilde{g}(Y,Z)\tilde{g}(X,W) - \tilde{g}(X,Z)\tilde{g}(Y,W) \\ & + (c+\frac{(f^{'})^2}{f^2} - \frac{f^{''}}{f})[\tilde{g}(X,Z)\tilde{g}(Y,\frac{\partial}{\partial t})\tilde{g}(W,\frac{\partial}{\partial t}) - \tilde{g}(Y,Z)\tilde{g}(X,\frac{\partial}{\partial t})\tilde{g}(W,\frac{\partial}{\partial t}) \\ & - \tilde{g}(X,W)\tilde{g}(Z,\frac{\partial}{\partial t})\tilde{g}(Y,\frac{\partial}{\partial t}) + \tilde{g}(Y,W)\tilde{g}(Z,\frac{\partial}{\partial t})\tilde{g}(X,\frac{\partial}{\partial t})]\end{aligned}$$

elde edilir.

2.3 Yarı-Einstein Katlı Çarpım Manifoldları

Önerme 2.3.1 $boy\ I = 1$, $boy\ M_2 = n-1$, $(n \geq 3)$ olmak üzere (M, g), $M = I \times_f M_2$ biçiminde tanımlı katlı çarpım manifoldu olsun. $P \in \chi(M)$ için (M, g) bir yarı-Einstein manifold ise (M_2, g_{M_2}) bir yarı-Einstein manifolddur [18].

İspat: I üzerindeki metriği $(dt)^2$ ile gösterelim ve $f = e^{q/2}$ alalım ve Önerme 2.2.7 gereği

$$ {}^{M}S(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}) = -\frac{n-1}{4}[2q'' + (q')^2] \tag{2.33}$$

ve

$$ {}^{M}S(V,W) = {}^{M_2}S(V,W) - \frac{1}{4}e^{q}[2q'' + (n-1)(q')^2]g_{M_2}(V,W) \tag{2.34}$$

elde edilir. Diğer taraftan M yarı-Einstein manifold olduğundan (2.7) denkleminden,

$$ {}^{M}S(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}) = \alpha g(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}) + \beta\pi(\frac{\partial}{\partial t})\pi(\frac{\partial}{\partial t}) \tag{2.35}$$

ve

$$ {}^{M}S(V,W) = \alpha g(V,W) + \beta\pi(V)\pi(W) \tag{2.36}$$

bulunur. Diğer taraftan $P_I \in \chi(I)$, $P_{M_2} \in \chi(M_2)$ birim vektör alanları için $P = P_I + P_{M_2} \in \chi(M)$ ve $boy\ I = 1$ olduğundan $P_I = \frac{\partial}{\partial t}$ ve $P = \frac{\partial}{\partial t} + P_{M_2}$ alındığında,

$$\begin{aligned} \pi(\frac{\partial}{\partial t}) = g(\frac{\partial}{\partial t}, P) &= g(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} + P_{M_2}) \\ &= g(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}) + g(\frac{\partial}{\partial t}, P_{M_2}) \\ &= g(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}) = 1 \end{aligned} \tag{2.37}$$

olduğu görülür.

(2.14) ve (2.37) denklemleri (2.35) ve (2.36) denklemlerinde kullanılırsa,

$$ {}^{M}S(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial t})=\alpha+\beta \tag{2.38}$$

ve

$$ {}^{M}S(V,W)=\alpha e^{q}g_{M_2}(V,W)+\beta\pi(V)\pi(W) \tag{2.39}$$

elde edilir. Buradan (2.38) ve (2.33) denklemlerinden,

$$\alpha+\beta=-\frac{(n-1)}{4}[2q^{''}+(q^{'})^2] \tag{2.40}$$

ve benzer şekilde (2.34) ve (2.39) denklemlerinden,

$$ {}^{M_2}S(V,W)=\frac{1}{4}e^{q}[2q^{''}+(n-1)(q^{'})^2+4\alpha]g_{M_2}(V,W)+\beta\pi(V)\pi(W) \tag{2.41}$$

elde edilir. Buradan da M_2 bir yarı-Einstein manifolddur. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.■

Önerme 2.3.2 $M=M_1\times_f M_2$ tam bağlantılı $, d-boyutlu$ $(1<d<n)$ M_1 Riemann manifoldu ile $(n-d)-$ boyutlu M_2 Riemann manifoldunun katlı çarpımı ve f nin Hessian fonksiyonu g_{M_1} metrik tensörü ile orantılı olsun.

i) Eğer (M,g) yarı-sabit kesitsel eğrilikli uzay ve M de P vektör alanı bir üreteç ya da $P\in\chi(M_1)$ ise M_1, 2-boyutlu Einstein manifolddur.

ii) Eğer (M,g) yarı-sabit kesitsel eğrilikli uzay ve $P\in\chi(M_2)$ ise M_1 ${}^{M_1}r=ad(d-1)$ skaler eğrilikli bir Einstein manifolddur [18].

İspat: i) Farzedelim , M bir yarı-sabit kesitsel eğrilikli uzay olsun. Bu durumda $X,Y,Z,W\in\chi(M_1)$ için,

$$\begin{aligned} {}^{M}R(X,Y,Z,W)=&a[g(Y,Z)g(X,W)-g(X,Z)g(Y,W)]\\ &+b[g(X,W)\pi(Y)\pi(Z)-g(X,Z)\pi(Y)\pi(W)\\ &+g(Y,Z)\pi(X)\pi(W)-g(Y,W)\pi(X)\pi(Z)] \end{aligned}\tag{2.42}$$

elde edilir. $P_{M_1} \in \chi(M_1)$, $P_{M_2} \in \chi(M_2)$ olmak üzere

$$P = P_{M_1} + P_{M_2} \tag{2.43}$$

şeklinde ayıralım. Ayrıca (2.14) ve (2.3) denklemlerinden,

$$\begin{aligned}\pi(Y) &= g_{M_1}(Y,P) + f^2 g_{M_2}(Y,P)\\ &= g_{M_1}(Y,P_{M_1}) + g_{M_1}(Y,P_{M_2}) + f^2 g_{M_2}(Y,P_{M_1}) + f^2 g_{M_2}(Y,P_{M_2})\\ &= g_{M_1}(Y,P_{M_1})\end{aligned} \tag{2.44}$$

bulunur. (2.42) denkleminde (2.14) , (2.44) kullanılırsa,

$$\begin{aligned}{}^{M_1}R(X,Y,Z,W) = a[g_{M_1}(Y,Z)g_{M_1}(X,W) - g_{M_1}(X,Z)g_{M_1}(Y,W)]\\ + b[g_{M_1}(X,W)g_{M_1}(Y,P_{M_1})g_{M_1}(Z,P_{M_1})\\ - g_{M_1}(X,Z)g_{M_1}(Y,P_{M_1})g_{M_1}(W,P_{M_1})\\ + g_{M_1}(Y,Z)g_{M_1}(X,P_{M_1})g_{M_1}(W,P_{M_1})\\ - g_{M_1}(Y,W)g_{M_1}(X,P_{M_1})g_{M_1}(Z,P_{M_1})]\end{aligned} \tag{2.45}$$

elde edilir. Buradan da X ve W üzerinden (2.45) eşitliğinde kontraksiyon yapılırsa,

$${}^{M_1}S(Y,Z) = [a(d-1)+b]g_{M_1}(Y,Z) + b(d-2)\pi(Y)\pi(Z) \tag{2.46}$$

bulunur. Böylece (2.46) M_1 bir yarı-Einstein manifolddur. Diğer taraftan (2.46) denklemine Y ve Z üzerinden kontraksiyon yapılırsa,

$${}^{M_1}r = (d-1)[ad+2b] \tag{2.47}$$

sonucuna ulaşılır. M , yarı-sabit kesitsel eğrilikli uzay olduğundan (2.15) ve (2.45) denklemleri birlikte ele alınırsa,

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{ad+b}{2} \tag{2.48}$$

elde edilir.

Ayrıca *f* nin Hessian fonksiyonu g_{M_1} metrik tensörü ile orantılıdır:

Önerme 2.2.6 (ii) gereği,

$$R(V,X,Y,W) = -\frac{H^f(X,Y)}{f} g(V,W)$$

yazılabilir. Son eşitlik üzerinden *X* ve *Y* ye göre kontraksiyon yapılırsa,

$$f = -\frac{\Delta f}{cd} \tag{2.49}$$

bulunur. (2.49) denklemi Önerme 2.2.6 (ii) de yerine yazılırsa,

$$H^f(X,Y) = -\frac{\Delta f}{f} g_{M_1}(X,Y) \tag{2.50}$$

elde edilir. Buradan da (2.47) , (2.48) ve (2.50) denklemleri kullanılırsa ,

$H^f(X,Y) + fKg_{M_1}(X,Y) = 0$ elde edilir. Burada $K = \dfrac{(d-1)b - {}^{M_1}r}{2d(d-1)}$ dir.

M. Obata' nın teoremine göre [19] , M_1 (d +1)-boyutlu Öklid uzayında $\dfrac{1}{\sqrt{K}}$ yarıçaplı küreye izometriktir. Böylece M_1 bir Einstein manifoldudur. $b \neq 0$ için $d = 2$ dir. Böylece M_1, bir 2-boyutlu Einstein manifolddur.

ii) $P \in \chi(M_2)$ için, (2.42) denkleminden

$${}^{M}R(X,Y,Z,W) = a[g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W)]$$

elde edilir. Diğer taraftan (2.14) , Önerme 2.2.6 ve son eşitlik birlikte ele alınırsa,

$${}^{M_1}R(X,Y,Z,W) = a[g_{M_1}(Y,Z)g_{M_1}(X,W) - g_{M_1}(X,Z)g_{M_1}(Y,W)]$$

elde edilir.Buradan da son eşitlik üzerinden X ve *W* ya göre kontraksiyon yapılırsa

$${}^{M_1}S(Y,Z) = a(d-1)g_{M_1}(Y,Z) \ ,$$

bulunur.

Benzer şekilde son denklem üzerinden Y ve Z ye göre kontraksiyon yapılırsa,

$$^{M_1}r = ad(d-1)$$

elde edilir. Böylece M_1, $^{M_1}r = ad(d-1)$ skaler eğrilikli bir Einstein manifolddur. Bu da ispatı tamamlar.■

Önerme 2.3.3 $M = M_1 \times_f I$ tam bağlantılı, (n-1)-boyutlu M_1 Riemann manifoldu ile 1-boyutlu I , Riemann manifoldunun katlı çarpımı olsun. Eğer, (M, g) bir yarı-Einstein manifold , $P \in \chi(M)$ ve f nin hessianı g_{M_1} metrik tensörü ile orantılı ise (M_1, g_{M_1}) , $\rho = \dfrac{n-1}{\sqrt{^{M_1}r + \alpha}}$ yarıçaplı (n-1)-boyutlu bir küredir [18].

İspat: M bir katlı çarpım manifoldu olduğundan, Önerme 2.2.7 (i) gereği

$$^{M_1}S(X,Y) = {}^{M}S(X,Y) + \frac{1}{f}H^f(X,Y) \tag{2.51}$$

yazılabilir. Diğer taraftan M bir yarı-Einstein manifold olduğundan,

$$^{M}S(X,Y) = \alpha g(X,Y) + \beta\pi(X)\pi(Y) \tag{2.52}$$

dır. P birim vektör alanı $P_{M_1} \in \chi(M_1)$ ve $P_I \in \chi(I)$ olmak üzere

$$P = P_{M_1} + P_I \tag{2.53}$$

şeklinde yazılabilir. (2.6), (2.14), (2.52) ve (2.53) eşitlikleri (2.51) denkleminde yerine yazılırsa,

$$^{M_1}S(X,Y) = \alpha g_{M_1}(X,Y) + \beta g_{M_1}(X, P_{M_1}) g_{M_1}(Y, P_{M_1}) + \frac{1}{f}H^f(X,Y)$$

elde edilir. Son eşitlik üzerinden X ve Y ye göre kontraksiyon yapılırsa,

$$^{M_1}r = \alpha(n-1) + \beta g_{M_1}(P_{M_1}, P_{M_1}) + \frac{\Delta f}{f} \tag{2.54}$$

elde edilir.

Aynı şekilde (2.52) denkleminde de X ve Y ye göre kontraksiyon yapılırsa,

$$^{M}r = \alpha n + \beta g_{M_1}(P_{M_1}, P_{M_1}) \tag{2.55}$$

elde edilir. (2.54) denkleminde (2.55) yerine yazılırsa

$$^{M_1}r = {}^{M}r - \alpha + \frac{\Delta f}{f}$$

bulunur. Önerme 2.2.7 gereği,

$$-\frac{^{M}r}{n} = \frac{\Delta f}{f} \tag{2.56}$$

olduğunu biliyoruz. Son iki eşitlik birlikte ele alınırsa,

$$^{M_1}r = \frac{(n-1)\,^{M}r}{n} - \alpha \tag{2.57}$$

elde edilir. f nin Hessian fonksiyonu g_{M_1} metrik tensörü ile orantılı olduğundan,

$$H^{f}(X,Y) = -\frac{\Delta f}{n-1} g_{M_1}(X,Y) \tag{2.58}$$

yazılabilir. (2.56) ve (2.57) denklemleri (2.58) denkleminde yerine yazılırsa

$$H^{f}(X,Y) + \frac{^{M_1}r + \alpha}{(n-1)^2} f g_{M_1}(X,Y) = 0$$

elde edilir. Bu durumda M_1, (n-1)-boyutlu $\sqrt{\frac{n-1}{^{M_1}r + \alpha}}$ yarıçaplı bir küreye izometriktir [19].

3. SEMİ-SİMETRİK METRİK KONEKSİYONLU KATLI ÇARPIM MANİFOLDLARI

3.1 Semi-Simetrik Metrik Koneksiyon

Tanım 3.1.1 M n-boyutlu bir diferansiyellenebilir (C^{∞}) manifold ve $\tilde{\nabla}$, M üzerinde lineer koneksiyon olsun. $\forall X,\ Y \in \chi$(M) olmak üzere; $\tilde{\nabla}$ nın T torsiyon tensörü

$$T(X,Y)=\tilde{\nabla}_X Y-\tilde{\nabla}_Y X-[X,Y] \tag{3.1}$$

şeklinde verilir. Eğer $T = 0$ ise $\tilde{\nabla}$ ya *simetrik koneksiyon*, $T \neq 0$ ise *simetrik olmayan koneksiyon* adı verilir [8].

Tanım 3.1.2 M üzerinde bir g Riemann metriği;

$$\tilde{\nabla} g=0 \tag{3.2}$$

şartını sağlıyor ise $\tilde{\nabla}$ lineer koneksiyonu *metrik koneksiyon,*

$$\tilde{\nabla} g\neq 0 \tag{3.3}$$

şartını sağlıyor ise *metrik olmayan koneksiyon,* olarak adlandırılır [12].

Tanım 3.1.3 T torsiyon tensörü

$$T(X,Y)=\pi(Y)X-\pi(X)Y \tag{3.4}$$

şeklinde verilirse $\tilde{\nabla}$ *semi-simetrik koneksiyon* olarak adlandırılır. Burada π, $P\in \chi(M)$ olmak üzere

$$\pi(X)=g(X,P) \tag{3.5}$$

biçiminde tanımlanan bir 1-formdur [4, 8, 20].

Tanım 3.1.4 M Riemann manifoldu üzerinde tanımlı $\tilde{\nabla}$ lineer koneksiyonu için $\tilde{\nabla}$ nın torsiyon tensörü T,

$$T(X,Y) = \pi(Y)X - \pi(X)Y$$

koşulunu sağlıyor ve buna ek olarak $\tilde{\nabla}g = 0$ oluyorsa $\tilde{\nabla}$ ya M üzerinde *semi-simetrik metrik koneksiyon* denir [21].

Teorem 3.1.5 M Riemann manifoldu üzerinde tanımlı $\tilde{\nabla}$ ve ∇ sırası ile semi-simetrik metrik koneksiyon ve Levi-Civita koneksiyon olmak üzere

$\forall X, Y, P \in \chi(M)$ için;

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \pi(Y)X - g(X,Y)P \tag{3.6}$$

burada

$$\pi(X)=g(X, P)$$

dir [6].

$\tilde{\nabla}$ ve ∇ M Riemann manifoldu üzerinde tanımlı sırası ile semi-simetrik metrik konneksiyon ve Levi-Civita koneksiyon olmak üzere, $\tilde{\nabla}$ ve ∇ nın Riemann eğrilik tensörleri sırası ile $\tilde{R}$ ve R olsun. (3.6) denklemi kullanıldığında

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_X(\tilde{\nabla}_Y Z) &= \tilde{\nabla}_X(\nabla_Y Z + \pi(Z)Y - g(Y,Z)P) \\
&= \nabla_X \nabla_Y Z + \pi(\nabla_Y Z)X - g(X,\nabla_Y Z)P + g(\nabla_X Z,P)Y \\
&\quad + g(Z,\nabla_X P)Y + g(Z,P)(\nabla_X Y + \pi(Y)X - g(X,Y)P) \\
&\quad - g(\nabla_X Y,Z)P - g(Y,\nabla_X Z)P - g(Y,Z)(\nabla_X P + \pi(P)X - g(X,P)P)
\end{aligned} \tag{3.7}$$

benzer şekilde,

$$\tilde{\nabla}_Y(\tilde{\nabla}_X Z) = \tilde{\nabla}_Y(\nabla_X Z + \pi(Z)X - g(X,Z)P)$$

$$= \nabla_Y \nabla_X Z + \pi(\nabla_X Z)Y - g(Y, \nabla_X Z)P + g(\nabla_Y Z, P)X$$

$$+ g(Z, \nabla_Y P)X + g(Z,P)(\nabla_Y X + \pi(X)Y - g(Y,X)P)$$

$$- g(\nabla_Y X, Z)P - g(X, \nabla_Y Z)P - g(X,Z)(\nabla_Y P + \pi(P)Y - g(Y,P)P) \qquad (3.8)$$

ve

$$\tilde{\nabla}_{[X,Y]} Z = \nabla_{[X,Y]} Z + \pi(Z)[X,Y] - g([X,Y],Z)P$$

$$= \nabla_{[X,Y]} Z + \pi(Z)\nabla_X Y - \pi(Z)\nabla_Y X - g(\nabla_X Y, Z)P + g(\nabla_Y X, Z)P \qquad (3.9)$$

elde edilir.

$$\tilde{R}(X,Y)Z = \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Z - \tilde{\nabla}_{[X,Y]} Z$$

olduğu için (3.7), (3.8) ve (3.9) denklemleri son eşitlikte yerine yazılırsa,

$$\tilde{R}(X,Y)Z = R(X,Y)Z + g(Z, \nabla_X P)Y - g(Z, \nabla_Y P)X$$

$$+ g(X,Z)\nabla_Y P - g(Y,Z)\nabla_X P$$

$$+ \pi(P)[g(X,Z)Y - g(Y,Z)X]$$

$$+ P[g(Y,Z)\pi(X) - g(X,Z)\pi(Y)]$$

$$+ \pi(Z)[\pi(Y)X - \pi(X)Y] \qquad (3.10)$$

bulunur [6].

Teorem 3.1.6 $\tilde{\nabla}$ $M = M_1 \times_f M_2$ katlı çarpım manifoldu üzerinde semi-simetrik metrik koneksiyon ve ${}^{M_1}\tilde{\nabla}$ ile ${}^{M_2}\tilde{\nabla}$ sırasıyla M_1 ve M_2 üzerindeki koneksiyonlar olmak üzere $X, Y \in \chi(M_1)$, $V, W \in \chi(M_2)$ ve $P \in \chi(M_1)$ ise

i) $\tilde{\nabla}_X Y = {}^{M_1}\tilde{\nabla}_X Y,$

ii) $\tilde{\nabla}_X Y = \frac{Xf}{f} V$ ve $\tilde{\nabla}_V X = [\frac{Xf}{f} + \pi(X)]V,$

iii) $nor\tilde{\nabla}_V W = -[\frac{g(V,W)}{f}]gradf - g(V,W)P,$

iv) $\tan \tilde{\nabla}_V W = {}^{M_2}\tilde{\nabla}_V W$ dir [22].

İspat: i) X, Y, Z M üzerinde vektör alanları ve ∇, M nin Levi-Civita koneksiyonu olmak üzere, Koszul formülünden,

$$2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y,Z) + Yg(X,Z) - Zg(X,Y)$$

$$- g(X,[Y,Z]) - g(Y,[X,Z]) + g(Z,[X,Y]) \tag{3.11}$$

dir. Semi-simetrik metrik koneksiyon için (3.6) kullanılarak, $X, Y \in \chi(M_1)$ ve $V \in \chi(M_2)$ için (3.11) denkleminden,

$$2g(\tilde{\nabla}_X Y, V) = Xg(Y,V) + Yg(X,V) - Vg(X,Y)$$

$$- g(X,[Y,V]) - g(Y,[X,V]) + g(V,[X,Y])$$

$$+ 2\pi(Y)g(X,V) - 2\pi(V)g(X,Y) \tag{3.12}$$

yazılabilir. X, Y ve $[X, Y] \in \chi(M_1)$ ve $V \in \chi(M_2)$ olduğu için,

$$g(Y,V) = g(X,V) = 0 \tag{3.13}$$

ve

$$[X,V] = [Y,V] = 0 \tag{3.14}$$

olup, böylece (3.12) eşitliği,

$$2g(\tilde{\nabla}_X Y,V) = -Vg(X,Y) - 2\pi(V)g(X,Y) \tag{3.15}$$

biçimine dönüşür. Diğer taraftan $g(X,Y) \in \chi(M_1)$ olduğundan,

$$Vg(X,Y) = 0 \tag{3.16}$$

dır. Buradan (3.15) denklemi

$$g(\tilde{\nabla}_X Y,V) = -\pi(V)g(X,Y) \tag{3.17}$$

şekline dönüşür.

$P \in \chi(M_1)$ için, (3.17) denklemi kullanıldığında

$$g(\tilde{\nabla}_X Y,V) = 0$$

elde edilir.

ii) Semi-simetrik metrik koneksiyona göre kovaryant türev tanımı kullanılırsa *X, Y* M_1 üzerinde *V*, M_2 üzerinde vektör alanları olmak üzere,

$$g(\tilde{\nabla}_X V,Y) = Xg(Y,V) - g(V,\tilde{\nabla}_X Y)$$

yazılabilir. (3.13) ve (3.17) kullanılarak son eşitlik,

$$g(\tilde{\nabla}_X V,Y) = \pi(V)g(X,Y) \tag{3.18}$$

şekline dönüşür. $P \in \chi(M_1)$ alınırsa,

$$g(\tilde{\nabla}_X V,Y) = 0 \tag{3.19}$$

elde edilir. Diğer bir taraftan *X*, M_1 üzerinde *V,W* M_2 üzerinde vektör alanları olmak üzere Koszul formülü ve semi-simetrik metrik koneksiyon tanımından

$$\begin{aligned}2g(\tilde{\nabla}_X V,W) = {} & Xg(V,W) + Vg(X,W) - Wg(X,V) \\ & - g(X,[V,W]) - g(V,[X,W]) + g(W,[X,V]) \\ & + 2\pi(V)g(X,W) - 2\pi(W)g(X,V)\end{aligned}$$

yazılabilir.

(3.13) ve (3.14) denklemlerinden faydalanarak, son denklem

$$2g(\tilde{\nabla}_X V,W) = Xg(V,W) - g(X,[V,W])$$

elde edilir. $X \in \chi(M_1)$ ve $[V,W] \in \chi(M_2)$ olduğundan, g(*X*, [*V*,*W*]) = 0 dır. Böylece

$$2g(\tilde{\nabla}_X V,W) = Xg(V,W) \tag{3.20}$$

bulunur. Katlı çarpım metrik tanımından,

$$g(V,W)(p,q) = (f \circ \pi)^2(p,q)g_{M_2}(V_q,W_q)$$

olduğunu biliyoruz. $(f \circ \pi)$ yerine f alınırsa,

$$g(V,W)(p,q) = f^2(g_{M_2}(V_q,W_q) \circ \sigma)$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} Xg(V,W) &= X[f^2(g_{M_2}(V,W) \circ \sigma)] \\ &= 2fXf(g_{M_2}(V,W) \circ \sigma) + f^2 X(g_{M_2}(V,W) \circ \sigma) \end{aligned}$$

yazılabilir. $g_{M_2}(V,W) \circ \sigma$ terimi yapraklar üzerinde sabit olduğundan, son eşitlik

$$Xg(V,W) = 2(Xf/f)g(V,W) \tag{3.21}$$

şekline dönüşür. (3.20) denkleminde (3.21) kullanılırsa,

$$g(\tilde{\nabla}_X V,W) = (Xf/f)g(V,W) \tag{3.22}$$

elde edilir. $P \in \chi(M_1)$ alınırsa (3.19) ve (3.22) denklemlerinden,

$$\tilde{\nabla}_X V = (Xf/f)V$$

bulunur. Ayrıca (3.1) kullanılarak,

$$g(\tilde{\nabla}_X V,W) = g(\tilde{\nabla}_V X,W) + g([X,V],W) + g(T(X,V),W)$$

yazılabilir. (3.4) ve (3.14) denklemleri kullanılarak son eşitlik

$$g(\tilde{\nabla}_X V,W) = g(\tilde{\nabla}_V X,W) - \pi(X)g(V,W) \tag{3.23}$$

şekline dönüşür. (3.22) denklemi (3.23) denkleminde yerine yazılırsa,

$$g(\tilde{\nabla}_X V, W) = [(Xf \,/\, f) + \pi(X)]g(V,W)$$

elde edilir. Böylece,

$$\tilde{\nabla}_V X = [(Xf \,/\, f) + \pi(X)V] \tag{3.24}$$

dır.

iii)- iv) X, M_1 üzerinde ve V,W M_2 üzerinde vektör alanları olmak üzere semi-simetrik metrik koneksiyonun kovaryant türev tanımından,

$$Vg(X,W) = g(\tilde{\nabla}_V X, W) + g(\tilde{\nabla}_V W, X) \tag{3.25}$$

yazılabilir. (3.13) denklemi (3.25) denkleminde ele alınırsa,

$$g(\tilde{\nabla}_V W, X) = -g(\tilde{\nabla}_V X, W) \tag{3.26}$$

elde edilir. $P \in \chi(M_1)$ alınırsa (3.24) denkleminden,

$$g(\tilde{\nabla}_V W, X) = -[(Xf \,/\, f) + \pi(X)]g(V,W)$$

bulunur. $X \in \chi(M_1)$ için $Xf = g(gradf, X)$ olduğu için

$$\begin{aligned} g(\tilde{\nabla}_V W, X) &= -[(Xf \,/\, f) + \pi(X)]g(V,W) \\ &= -(g(gradf, X) / f)g(V,W) - \pi(X)g(V,W) \\ &= -g([g(V,W) / f]gradf, X) - \pi(X)g(V,W) \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Böylece

$$nor\tilde{\nabla}_V W = -[g(V,W) / f]gradf - g(V,W)P$$

ve $\tan\tilde{\nabla}_V W = {}^{M_2}\tilde{\nabla}_V W$ dir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.1.7 $M = M_1 \times_f M_2$ üzerinde $\tilde{\nabla}$ semi-simetrik metrik koneksiyon olmak üzere , ${}^{M_1}\tilde{\nabla}$ ve ${}^{M_2}\tilde{\nabla}$ sırasıyla M_1 ve M_2 üzerinde koneksiyonlar olmak üzere $X,Y \in \chi(M_1)$, $V,W \in \chi(M_2)$ ve $P \in \chi(M_2)$ ise

i) $nor\tilde{\nabla}_X Y = {}^{M_1}\tilde{\nabla}_X Y$,

ii) $\tan\tilde{\nabla}_X Y = -g(X,Y)P$

iii) $\tan\tilde{\nabla}_X V = (Xf / f)V$ ve $nor\tilde{\nabla}_X V = \pi(V)X$

iv) $\tilde{\nabla}_V X = (Xf / f)V$

v) $nor\tilde{\nabla}_V W = -[g(V,W) / f]gradf$

vi) $\tan\tilde{\nabla}_V W = {}^{M_2}\tilde{\nabla}_V W$

dir [22].

İspat: i)-ii) $P \in \chi(M_2)$ için (3.17) eşitliğinden,

$\forall V$ için $\tan\tilde{\nabla}_X Y = -g(X,Y)P$ ve $nor\tilde{\nabla}_X Y = {}^{M_1}\tilde{\nabla}_X Y$ bulunur.

iii) Benzer şekilde (3.18) ve (3.22) eşitliklerinden, $P \in \chi(M_2)$ için

$$\tilde{\nabla}_X V = (Xf / f)V + \pi(V)X \tag{3.27}$$

bulunur. Buradan da,

$$\tan\tilde{\nabla}_X V = (Xf / f)V$$

ve

$$nor\tilde{\nabla}_X V = \pi(V)X$$

elde edilir.

iv) (3.1) ve (3.14) denklemlerinden,

$$\tilde{\nabla}_V X = \tilde{\nabla}_X V - T(X,V)$$

yazılabilir.

(3.4) ve (3.27) eşitlikleri kullanılarak, son eşitlikten

$$\tilde{\nabla}_V X = (Xf / f)V \tag{3.28}$$

bulunur. Benzer şekilde $P \in \chi(M_2)$ alınarak, (3.26) denkleminde (3.28) kullanılırsa,

$$g(\tilde{\nabla}_V W, X) = -(Xf / f)g(V,W)$$

elde edilir. $Xf = g(gradf, X)$ olduğundan,

$$nor\tilde{\nabla}_V W = -[g(V,W) / f]gradf$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.■

Teorem 3.1.8 $M = M_1 \times_f M_2$ bir katlı çarpım manifoldu olsun. R ve $\tilde{R}$ sırasıyla Levi-Civita koneksiyona ve semi-simetrik metrik koneksiyona göre M katlı çarpımının Riemann eğrilik tensörlerini göstermek üzere $X, Y, Z \in \chi(M_1)$, $U, V, W \in \chi(M_2)$ ve $P \in \chi(M_1)$ ise,

i) $\tilde{R}(X,Y)Z = {}^{M_1}\tilde{R}(X,Y)Z$,

ii) $\tilde{R}(V,X)Y = -[H^f(X,Y) / f + (Pf / f)g(X,Y) + \pi(P)g(X,Y)$
$\qquad + g(Y, \nabla_X P) - \pi(X)\pi(Y)]V$

iii) $\tilde{R}(X,Y)V = 0$

iv) $\tilde{R}(V,W)X = 0$

v) $\tilde{R}(X,V)W = g(V,W)[-(\nabla_X gradf) / f - (Pf / f)X - \nabla_X P - \pi(P)X + \pi(X)P]$

vi) $\tilde{R}(U,V)W = {}^{M_2}R(U,V)W - \{\|gradf\|^2 / f^2 + 2(Pf / f) + \pi(P)\}$
$\qquad \times [g(V,W)U - g(U,W)V]$

dır [22].

İspat: $M = M_1 \times_f M_2$ bir katlı çarpım manifoldu olsun. R ve $\tilde{R}$ sırasıyla Levi-Civita metrik koneksiyona ve semi-simetrik metrik koneksiyona göre M katlı çarpımının Riemann eğrilik tensörlerini göstersin.

i) $X, Y, Z \in \chi(M_1)$ için $\tilde{\nabla}_X Y = {}^{M_1}\tilde{\nabla}_X Y$ olduğundan $\tilde{R}$ nin tanımından, $\tilde{R}(X,Y)Z = {}^{M_1}\tilde{R}(X,Y)Z$ olduğu açıktır.

ii) $X, Y \in \chi(M_1)$, $V \in \chi(M_2)$ için (3.10) eşitliğinden,

$$\begin{aligned}\tilde{R}(V,X)Y = R(V,X)Y + g(Y,\nabla_V P)X - g(Y,\nabla_X P)V \\ - g(X,Y)[\nabla_V P + \pi(P)V - \pi(V)P] \\ + \pi(Y)[\pi(X)V - \pi(V)X]\end{aligned} \tag{3.29}$$

yazılabilir. $P \in \chi(M_1)$ için Önerme 2.2.6 (ii) ve (3.29) denklemi kullanılarak,

$$\begin{aligned}\tilde{R}(V,X)Y = -[H^f(X,Y)/f + (Pf/f)g(X,Y) + \pi(P)g(X,Y) \\ + g(Y,\nabla_X P) - \pi(X)\pi(Y)]V\end{aligned}$$

elde edilir.

iii) $V \in \chi(M_2)$ için (3.10) denkleminde $Z=V$ alınırsa,

$$\begin{aligned}\tilde{R}(X,Y)V = g(V,\nabla_X P)Y - g(V,\nabla_Y P)X \\ + \pi(V)[\pi(Y)X - \pi(X)Y]\end{aligned} \tag{3.30}$$

bulunur. $P \in \chi(M_1)$ için,

$$\tilde{R}(X,Y)V = 0$$

dır.

iv) $X \in \chi(M_1)$, $V,W \in \chi(M_2)$ için Önerme 2.2.6 (v) ve (3.10) denklemi kullanılarak,

$$\tilde{R}(V,W)X = g(X,\nabla_V P)W - g(X,\nabla_W P)V$$

$$+\pi(X)[\pi(W)V - \pi(V)W] \tag{3.31}$$

yazılabilir. $P \in \chi(M_1)$ için,

$$\tilde{R}(V,W)X = 0$$

bulunur.

v) $X \in \chi(M_1)$, $V,W \in \chi(M_2)$ için (3.10) denkleminden,

$$\tilde{R}(X,V)W = R(X,V)W + g(W,\nabla_X P)V - g(W,\nabla_V P)X$$

$$-g(V,W)[\nabla_X P + \pi(P)X - \pi(X)P]$$

$$+\pi(W)[\pi(V)X - \pi(X)V] \tag{3.32}$$

elde edilir. $P \in \chi(M_1)$ için (3.32) denkleminde Önerme 2.2.6 (iv) kullanılırsa,

$$\tilde{R}(X,V)W = g(V,W)[-(\nabla_X gradf)/f - (Pf/f)X$$
$$-\nabla_X P - \pi(P)X + \pi(X)P]$$

bulunur.

vi) $U, V, W \in \chi(M_2)$ için (3.10) denklemi kullanılarak,

$$\tilde{R}(U,V)W = R(U,V)W + g(W,\nabla_U P)V - g(W,\nabla_V P)U$$

$$+g(U,W)\nabla_V P - g(V,W)\nabla_U P$$

$$-\pi(P)[g(U,W)V - g(V,W)U]$$

$$+[g(V,W)\pi(U) - g(U,W)\pi(V)]P$$

$$+\pi(W)[\pi(V)U - \pi(U)V] \tag{3.33}$$

bulunur.

$P \in \chi(M_1)$ alınarak, (3.33) denkleminde Önerme 2.2.6 (v) kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\tilde{R}(U,V)W = {}^{M_2}R(U,V)W - \{\|gradf\|^2 / f^2 + 2(Pf / f) \\ +\pi(P)\}[g(V,W)U - g(U,W)V]\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.■

Teorem 3.1.9 $M = M_1 \times_f M_2$ bir katlı çarpım manifoldu olsun. R ve $\tilde{R}$ sırasıyla Levi-Civita koneksiyona ve semi-simetrik metrik koneksiyona göre M katlı çarpımının Riemann eğrilik tensörlerini göstermek üzere X, Y, $Z \in \chi(M_1)$, U, V, $W \in \chi(M_2)$ ve $P \in \chi(M_2)$ ise,

i) $${}^{M_1}\tilde{R}(X,Y)Z = {}^{M_1}R(X,Y)Z + \pi(P)[g(X,Z)Y - g(Y,Z)X]$$

ii) $${}^{M_2}\tilde{R}(X,Y)Z = [g(X,Z)(Yf / f) - g(Y,Z)(Xf / f)]P$$

iii) $${}^{M_1}\tilde{R}(V,X)Y = -g((\pi(V) / f)gradf, Y)X + g(X,Y)[\pi(V) / f]gradf$$

iv) $$\begin{aligned}{}^{M_2}\tilde{R}(V,X)Y = -[H^f(X,Y) / f]V - g(X,Y)(\tan\nabla_V P) \\ -\pi(P)g(X,Y)V + \pi(V)g(X,Y)P\end{aligned}$$

v) $$\tilde{R}(X,Y)V = \pi(V)[(Xf / f)Y - (Yf / f)X]$$

vi) $$\tilde{R}(V,W)X = (Xf / f)[\pi(W)V - \pi(V)W]$$

vii) $$\begin{aligned}{}^{M_1}\tilde{R}(X,V)W = -g(V,W)[(\nabla_X gradf) / f + \pi(P)X] \\ -g(W,\nabla_V P)X + \pi(V)\pi(W)X\end{aligned}$$

viii) $${}^{M_2}\tilde{R}(X,V)W = (Xf / f)[\pi(W)V - g(V,W)P]$$

ix) $$\begin{aligned}\tilde{R}(U,V)W = {}^{M_2}R(U,V)W \\ -[\|gradf^2\| / f^2]\{g(V,W)U - g(U,W)V\} \\ + g(W,\nabla_U P)V - g(W,\nabla_V P)U \\ + g(U,W)\nabla_V P - g(V,W)\nabla_U P \\ + \pi(P)[g(U,W)V - g(V,W)U] \\ + [g(V,W)\pi(U) - g(U,W)\pi(V)]P \\ + \pi(W)[\pi(V)U - \pi(U)V]\end{aligned}$$

dır [22].

İspat: i)- ii) $X, Y, Z \in \chi(M_1)$ olmak üzere $P \in \chi(M_2)$ alınırsa, (3.10) denkleminden

$$\begin{aligned}\tilde{R}(X,Y)Z = R(X,Y)Z + [g(X,Z)(Yf/f) - g(Y,Z)(Xf/f)]P \\ + \pi(P)[g(X,Z)Y - g(Y,Z)X]\end{aligned}$$

elde edilir. Önerme 2.2.6 (i) kullanılarak son eşitlikten,

$$^{M_1}\tilde{R}(X,Y)Z = {}^{M_1}R(X,Y)Z + \pi(P)[g(X,Z)Y - g(Y,Z)X]$$

ve

$$^{M_2}\tilde{R}(X,Y)Z = [g(X,Z)(Yf/f) - g(Y,Z)(Xf/f)]P$$

bulunur.

iii)-iv) Benzer şekilde $P \in \chi(M_2)$ alınarak, (3.29) denkleminde Önerme 2.2.6 (ii) kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\tilde{R}(V,X)Y = -[H^f(X,Y)/f]V - g([\pi(V)/f]gradf, Y)X \\ - g(X,Y)[\nabla_V P + \pi(P)V - \pi(V)P]\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikten,

$$^{M_1}\tilde{R}(V,X)Y = -g([\pi(V)/f]gradf, Y)X + g(X,Y)[\pi(V)/f]gradf$$

ve

$$\begin{aligned}^{M_2}\tilde{R}(V,X)Y = -[H^f(X,Y)/f]V - g(X,Y)(\tan\nabla_V P) \\ - g(X,Y)[\pi(P)V - \pi(V)P]\end{aligned}$$

bulunur.

v) $P \in \chi(M_2)$ için, (3.30) eşitliği kullanılarak,

$$\tilde{R}(X,Y)V = \pi(V)[(Xf/f)Y - (Yf/f)X]$$

elde edilir.

vi) (3.31) denkleminden $P \in \chi(M_2)$ için Önerme 2.2.6 kullanılarak ,

$$\tilde{R}(V,W)X = (Xf / f)[\pi(W)V - \pi(V)W]$$

olduğu elde edilir.

vii)- viii) Benzer şekilde (3.32) denkleminden $P \in \chi(M_2)$ için,

$$\begin{aligned} {}^{M_1}\tilde{R}(X,V)W = &-g(V,W)[(\nabla_X gradf)/f + \pi(P)X] \\ &-g(W,\nabla_V P)X + \pi(V)\pi(W)X \end{aligned}$$

ve

$${}^{M_2}\tilde{R}(X,V)W = (Xf / f)[\pi(W)V - g(V,W)P]$$

bulunur.

ix) *U, V, W* $\in \chi(M_2)$ ve $P \in \chi(M_2)$ için (3.33) denkleminde Önerme 2.2.6 (v) kullanılarak,

$$\begin{aligned} \tilde{R}(U,V)W = &{}^{M_2}R(U,V)W \\ &-[\|gradf\|^2 / f^2]\{g(V,W)U - g(U,W)V\} \\ &+g(W,\nabla_U P)V - g(W,\nabla_V P)U \\ &+g(U,W)\nabla_V P - g(V,W)\nabla_U P \\ &+\pi(P)[g(U,W)V - g(V,W)U] \\ &+[g(V,W)\pi(U) - g(U,W)\pi(V)]P \\ &+\pi(W)[\pi(V)U - \pi(U)V] \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır . Böylece teoremin ispatı tamamlanır.■

Teorem 3.1.10 *boy* $M_1 = n_1$, *boy* $M_2 = n_2$ olmak üzere $M = M_1 \times_f M_2$ bir katlı çarpım manifoldu olsun. *S* ve $\tilde{S}$ *M* nin Levi-Civita koneksiyona göre ve semi-simetrik metrik koneksiyona göre Ricci tensörlerini göstermek üzere, *X*, *Y* $\in \chi(M_1)$, *V*, *W* $\in \chi(M_2)$ ve $P \in \chi(M_1)$ ise,

i) $$\begin{aligned} \tilde{S}(X,Y) = &{}^{M_1}\tilde{S}(X,Y) - n_2[H^f(X,Y)/f + (Pf/f)g(X,Y) \\ &+\pi(P)g(X,Y) + g(Y,\nabla_X P) - \pi(X)\pi(Y)] \end{aligned}$$

ii) $\tilde{S}(X,V)=\tilde{S}(V,X)=0$

iii) $$\tilde{S}(V,W)={}^{M_2}\tilde{S}(V,W)-\sum_{i=1}^{n_1} g(\nabla_{e_i}P,e_i)g(V,W)$$
$$-[(n_2-1)\|gradf\|^2/f^2+(n_1+2n_2-2)(Pf/f)$$
$$+(n-2)\pi(P)+\frac{\Delta f}{f}]g(V,W)$$

dır [22].

İspat: i) $P\in\chi(M_1)$ alınırsa, $X, Y, Z, U\in\chi(M_1)$ için Teorem 3.1.8 den,

$$\tilde{R}(Z,X,Y,U)={}^{M_1}\tilde{R}(Z,X,Y,U)$$

olduğunu biliyoruz. Son eşitlik üzerinden Z ve U ya göre kontraksiyon yapılırsa,

$$^{1}\tilde{S}(X,Y)={}^{M_1}\tilde{S}(X,Y) \tag{3.34}$$

elde edilir. Diğer taraftan Teorem 3.1.8 (ii) den V ve W üzerinden kontraksiyon yapılırsa,

$$^{2}\tilde{S}(X,Y)=-n_2[H^f(X,Y)/f+(Pf/f)g(X,Y)$$
$$+\pi(P)g(X,Y)+g(Y,\nabla_X P)-\pi(X)\pi(Y)] \tag{3.35}$$

bulunur. Böylece (3.34) ve (3.35) denklemlerinden,

$$\tilde{S}(X,Y)={}^{M_1}\tilde{S}(X,Y)-n_2[H^f(X,Y)/f+(Pf/f)g(X,Y)$$
$$+\pi(P)g(X,Y)+g(Y,\nabla_X P)-\pi(X)\pi(Y)]$$

elde edilir.

ii) $X, Y, Z\in\chi(M_1)$, $V\in\chi(M_2)$ ve $P\in\chi(M_1)$ için

$$\tilde{R}(Y,X,V,Z)=0$$

denkleminde Y ve Z üzerinden kontraksiyon yapılırsa,

$$\tilde{S}(X,V)=0$$

bulunur.

Benzer şekilde,

$$\tilde{R}(U,V,X,W)=0$$

denkleminde U ve W üzerinden kontraksiyon yapılırsa,

$$\tilde{S}(V,X)=0$$

elde edilir.

iii) $X, Z \in \chi(M_1)$, U , $W \in \chi(M_2)$ ve $P \in \chi(M_1)$ için

Teorem 3.1.8 (v) den,

$$\begin{aligned}\tilde{R}(X,V,W,Z) &= g(V,W)[-g((\nabla_X gradf)/f,Z)-(Pf/f)g(X,Z)\\ &\quad -g(\nabla_X P,Z)-\pi(P)g(X,Z)+\pi(X)\pi(Z)]\end{aligned}$$

olduğunu biliyoruz. X ve Z ye göre kontraksiyon yapılırsa,

$$^{1}\tilde{S}(V,W)=g(V,W)[-\frac{\Delta f}{f}-\sum_{i=1}^{n_1} g(\nabla_{e_i}P,e_i)-n_1\frac{Pf}{f}+(n_1-1)\pi(P)] \tag{3.36}$$

bulunur. Benzer şekilde Teorem 3.1.8 (vi) den $E \in \chi(M_2)$ için

$$\begin{aligned}\tilde{R}(U,V,W,E) &= {}^{M_2}R(U,V,W,E)-\{\|gradf\|^2/f^2+2(Pf/f)+\pi(P)\}\\ &\quad \times[g(V,W)g(U,E)-g(U,W)g(V,E)]\end{aligned}$$

denklemi üzerinden U ve E ye göre kontraksiyon yapılırsa,

$$^{2}\tilde{S}(V,W)={}^{M_2}S(V,W)-(n_2-1)\{\frac{\|gradf\|^2}{f^2}+2\frac{Pf}{f}+\pi(P)\}g(V,W) \tag{3.37}$$

elde edilir. (3.36) ve (3.37) denklemlerinden

$$\begin{aligned}\tilde{S}(V,W) &= {}^{M_2}S(V,W)-\sum_{i=1}^{n_1} g(\nabla_{e_i}P,e_i)g(V,W)\\ &\quad -\{(n_2-1)\frac{\|gradf\|^2}{f^2}+\frac{\Delta f}{f}+(n_1+2n_2-2)\frac{Pf}{f}+(n-2)\pi(P)]g(V,W)\end{aligned}$$

bulunur. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur. ■

Teorem 3.1.11 *boy* $M_1 = n_1$, *boy* $M_2 = n_2$ olmak üzere $M = M_1 \times_f M_2$ bir katlı çarpım manifoldu olsun. S ve $\tilde{S}$ M nin Levi-Civita koneksiyona göre ve semi-simetrik metrik koneksiyona göre Ricci tensörlerini göstermek üzere, X, $Y \in \chi(M_1)$, V, $W \in \chi(M_2)$ ve $P \in \chi(M_2)$ ise,

i) $$\tilde{S}(X,Y) = {}^{M_1}S(X,Y) - (n-2)\pi(P)g(X,Y) - n_2[H^f(X,Y)/f] - \sum_{i=n_1+1}^{n} g(\nabla_{e_i}P, e_i)g(X,Y)$$

ii) $$\tilde{S}(X,V) = (2-n)\pi(V)(Xf/f) \text{ ve } \tilde{S}(V,X) = (n-2)\pi(V)(Xf/f)$$

iii) $$\tilde{S}(V,W) = {}^{M_2}S(V,W) + \sum_{i=n_1+1}^{n}\{g(W,\nabla_{e_i}P)g(V,e_i) - g(\nabla_{e_i}P,e_i)g(V,W)\}$$
$$-[(n_2-1)\|gradf\|^2/f^2 + \frac{\Delta f}{f} + (n-2)\pi(P)]g(V,W)$$
$$-(n-1)g(W,\nabla_V P) + (n-2)\pi(V)\pi(W)$$ dır [22].

İspat: i) $P \in \chi(M_2)$ ve X, Y, Z, $U \in \chi(M_1)$ için Teorem 3.1.9 (i) den,

$$^{M_1}\tilde{R}(Z,X,Y,U) = {}^{M_1}R(Z,X,Y,U) + \pi(P)[g(Y,Z)g(X,U) - g(X,Y)g(Z,U)]$$

olduğunu biliyoruz. Son eşitlik üzerinden Z ve U ya göre kontraksiyon yapılırsa,

$$^{1}\tilde{S}(X,Y) = {}^{M_1}S(X,Y) + (1-n_1)\pi(P)g(X,Y) \tag{3.38}$$

elde edilir. Diğer taraftan V, $W \in \chi(M_2)$ için Teorem 3.1.9 (iv) den,

$$^{M_2}\tilde{R}(V,X,Y,W) = -[H^f(X,Y)/f]g(V,W) - g(X,Y)g(\nabla_V P,W)$$
$$-\pi(P)g(X,Y)g(V,W) + \pi(V)\pi(W)g(X,Y)$$

bulunur. Son eşitlikte V ve W üzerinden kontraksiyon yapılırsa,

$$^{2}\tilde{S}(X,Y) = -n_2[H^f(X,Y)/f] - \sum_{i=n_1+1}^{n} g(\nabla_{e_i}P,e_i)g(X,Y)$$
$$-n_2\pi(P)g(X,Y) + \pi(P)g(X,Y) \tag{3.39}$$

elde edilir.

Böylece (3.38) ve (3.39) denklemlerinden,

$$\tilde{S}(X,Y) = {}^{M_1}S(X,Y) + (n-2)\pi(P)g(X,Y) - n_2[H^f(X,Y)/f]$$
$$- \sum_{i=n_1+1}^{n} g(\nabla_{e_i}P, e_i)g(X,Y)$$

bulunur.

ii) $X \in \chi(M_1)$, $U, V, W \in \chi(M_2)$ ve $P \in \chi(M_2)$ için Teorem 3.1.9. (vi) dan,

$$\tilde{R}(U,V,X,W) = (Xf/f)[\pi(V)g(U,W) - \pi(U)g(V,W)]$$

olduğunu biliyoruz. Son eşitlikte U ve W üzerinden kontraksiyon yapılırsa,

$$^1\tilde{S}(V,X) = (n_2 - 1)(Xf/f)\pi(V) \tag{3.40}$$

elde edilir. Diğer taraftan Teorem 3.1.9 (iii) ve ${}^{M_1}\tilde{R}(V,X)Y = -{}^{M_1}\tilde{R}(X,V)Y$ eşitliğinden,

$$^{M_1}\tilde{R}(X,V,Y,Z) = g((\pi(V)/f)gradf,Y)g(X,Z)$$
$$- g(X,Y)[\pi(V)/f]g(gradf,Z)$$

bulunur. Son denklemde X ve Z üzerinden kontraksiyon yapılırsa,

$$^2\tilde{S}(V,Y) = (n_1 - 1)\pi(V)(Yf/f) \tag{3.41}$$

elde edilir. Böylece (3.40) ve (3.41) denklemlerinden,

$$\tilde{S}(V,X) = (n-2)\pi(V)(Xf/f)$$

sonucuna ulaşılır.

iii) $X, Y \in \chi(M_1)$, $V, W \in \chi(M_2)$ ve $P \in \chi(M_2)$ için Teorem 3.1.9 (vii) den,

$$^{M_1}\tilde{R}(X,V,W,Y) = -g(V,W)[g(\nabla_X gradf)/f,Y) + \pi(P)g(X,Y)]$$
$$- g(W,\nabla_V P)g(X,Y) + \pi(V)\pi(W)g(X,Y)$$

olduğunu biliyoruz. Son denklemde X ve Y üzerinden kontraksiyon yapılırsa,

$$^1\tilde{S}(V,W) = -g(V,W)[\frac{\Delta f}{f} + n_1\pi(P)] - n_1 g(W,\nabla_V P) + n_1\pi(V)\pi(W) \tag{3.42}$$

elde edilir. Diğer taraftan, $U, V, W, E \in \chi(M_2)$ için Teorem 3.1.9 (ix) dan,

$$\begin{aligned}\tilde{R}(U,V,W,E) = {}^{M_2}R(U,V,W,E) \\ &-[\left\|gradf^2\right\| / f^2]\{g(V,W)g(U,E)-g(U,W)g(V,E)\} \\ &+g(W,\nabla_U P)g(V,E)-g(W,\nabla_V P)g(U,E) \\ &+g(U,W)g(\nabla_V P,E)-g(V,W)g(\nabla_U P,E) \\ &+\pi(P)[g(U,W)g(V,E)-g(V,W)g(U,E)] \\ &+\pi(E)[g(V,W)\pi(U)-g(U,W)\pi(V)] \\ &+\pi(W)[\pi(V)g(U,E)-\pi(U)g(V,E)]\end{aligned}$$

olduğunu biliyoruz. Son eşitlikte U ve E üzerinden kontraksiyon yapılırsa,

$$\begin{aligned}{}^2\tilde{S}(V,W) = {}^{M_2}S(V,W) \\ &-(n_2-1)[\frac{\left\|gradf\right\|^2}{f^2}]g(V,W) \\ &+\sum_{i=n_1+1}^{n} g(W,\nabla_{e_i}P)g(V,e_i) \\ &-n_2 g(W,\nabla_V P)+g(W,\nabla_V P) \\ &-\sum_{i=n_1+1}^{n} g(\nabla_{e_i}P,e_i)g(V,W) \\ &-(n_2-1)\pi(P)g(V,W)+\pi(P)g(V,W) \\ &-\pi(V)\pi(W)+(n_2-1)\pi(V)\pi(W)\end{aligned} \tag{3.43}$$

elde edilir. Böylece, (3.42) ve (3.43) denklemlerinden,

$$\begin{aligned}\tilde{S}(V,W) = {}^{M_2}S(V,W) + \sum_{i=n_1+1}^{n}[g(W,\nabla_{e_i}P)g(V,e_i)-g(\nabla_{e_i}P,e_i)g(V,W)] \\ &-[(n_2-1)\frac{\left\|gradf\right\|^2}{f^2}+\frac{\Delta f}{f}+(n-2)\pi(P)]g(V,W) \\ &-(n-1)g(W,\nabla_V P)+(n-2)\pi(V)\pi(W)\end{aligned}$$

bulunur. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.■

Teorem 3.1.12 *boy* $M_1 = n_1$, *boy* $M_2 = n_2$ olmak üzere $M = M_1 \times_f M_2$ bir katlı çarpım manifoldu olsun. r ve $\tilde{r}$ M nin Levi-Civita koneksiyona göre ve semi-simetrik metrik koneksiyona göre skaler eğrilikleri göstermek üzere, $P \in \chi(M_1)$ için

$$\tilde{r} = {}^{M_1}r + {}^{M_2}r - n_2(n_2-1)[\frac{\|gradf\|^2}{f^2}] - 2n_2(n-1)\frac{Pf}{f} - 2n_2\frac{\Delta f}{f}$$
$$-n_2[2n_1+n_2-3]\pi(P) - 2n_2\sum_{i=1}^{n_1} g(\nabla_{e_i}P, e_i)$$

dir [22].

İspat: $P \in \chi(M_1)$ için, Teorem 3.1.10. (i), (ii), (iii) denklemleri üzerinden kontraksiyon yapılırsa,

$$\tilde{r} = {}^{M_1}r + {}^{M_2}r - n_2(n_2-1)[\frac{\|gradf\|^2}{f^2}] - 2n_2(n-1)\frac{Pf}{f} - 2n_2\frac{\Delta f}{f}$$
$$-n_2[2n_1+n_2-3]\pi(P) - 2n_2\sum_{i=1}^{n_1} g(\nabla_{e_i}P, e_i)$$

elde edilir.■

Teorem 3.1.13 *boy* $M_1 = n_1$, *boy* $M_2 = n_2$ olmak üzere $M = M_1 \times_f M_2$ bir katlı çarpım manifoldu olsun. r ve $\tilde{r}$ M nin Levi-Civita koneksiyona göre ve semi-simetrik metrik koneksiyona göre skaler eğrilikleri göstermek üzere, $P \in \chi(M_2)$ için

$$\tilde{r} = {}^{M_1}r + {}^{M_2}r - \sum_{i=n_1+1}^{n} 2(n-1)g(\nabla_{e_i}P, e_i)$$
$$-(n-1)(n-2)\pi(P) - n_2[(n_2-1)(\frac{\|gradf\|^2}{f^2}) + 2\frac{\Delta f}{f}] \text{ dir [22].}$$

İspat: $P \in \chi(M_2)$ için, Teorem 3.1.11. (i), (ii), (iii) denklemleri üzerinden kontraksiyon yapılırsa,

$$\tilde{r} = {}^{M_1}r + {}^{M_2}r - \sum_{i=n_1+1}^{n} 2(n-1)g(\nabla_{e_i}P, e_i)$$
$$-(n-1)(n-2)\pi(P) - n_2[(n_2-1)(\frac{\|gradf\|^2}{f^2}) + 2\frac{\Delta f}{f}]$$ bulunur. ■

4. SEMİ-SİMETRİK METRİK KONEKSİYONA GÖRE YARI EINSTEIN KATLI ÇARPIM MANİFOLDLARI

Teorem 4.1 $boy\ I = 1,\ boy\ M_2 = n-1$ ve $n \geq 3$ olmak üzere (M,g), $M = I \times_f M_2$ biçiminde tanımlı bir katlı çarpım manifoldu olsun. Bu takdirde (M, g) nin semi-simetrik metrik koneksiyona göre bir yarı Einstein manifold olması için gerek ve yeter koşul M_2 nin $P \in \chi(I)$ için Levi-Civita koneksiyona göre bir yarı Einstein manifold olmasıdır.

İspat: I üzerindeki metrik g_I ve M bir yarı-Einstein manifold olsun. $f = e^{q/2}$ alınırsa Teorem 3.1.10 (i) gereği,

$$\tilde{S}(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial t}) = -\frac{n-1}{4}[2q^{''} + (q^{'})^2 + 2q^{'}]g_I(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial t}) \tag{4.1}$$

elde edilir. Teorem 3.1.10 (ii) den $\frac{\partial}{\partial t} \in \chi(I)$ ve $V \in \chi(M_2)$ için,

$$\tilde{S}(\frac{\partial}{\partial t},V) = \tilde{S}(V,\frac{\partial}{\partial t}) = 0 \tag{4.2}$$

bulunur. Benzer şekilde, $V, W \in \chi(M_2)$ için,

$$\tilde{S}(V,W) = {}^{M_2}S(V,W)$$

$$-e^q[\frac{n-1}{4}(q^{'})^2 + \frac{2n-3}{2}q^{'} + (n-2) + \frac{q^{''}}{2}]g_{M_2}(V,W) \tag{4.3}$$

dır. M semi-simetrik metrik koneksiyona göre yarı-Einstein manifold olduğundan, $P \in \chi(I)$ için,

$$\tilde{S}(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial t}) = \alpha g(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial t}) + \beta\pi(\frac{\partial}{\partial t})\pi(\frac{\partial}{\partial t}) \tag{4.4}$$

ve

$$\tilde{S}(V,W) = \alpha g(V,W) + \beta\pi(V)\pi(W) \tag{4.5}$$

dir. Diğer taraftan,

$$g(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial t}) = g_I(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial t}) + f^2 g_{M_2}(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial t})$$

$$= g_I(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial t}) \tag{4.6}$$

elde edilir. $P \in \chi(I)$ ve $boy\ I = 1$ olduğundan, $P = \frac{\partial}{\partial t}$ seçilebilir. Bu takdirde,

$$\pi(\frac{\partial}{\partial t}) = g(\frac{\partial}{\partial t}, P) = g(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial t}) = g_I(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial t}) = 1 \tag{4.7}$$

dir. (4.4) denkleminde (4.6) ve (4.7) denklemleri yerlerine yazılırsa,

$$\tilde{S}(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial t}) = \alpha g_I(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial t}) + \beta = \alpha + \beta \tag{4.8}$$

bulunur. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} g(V,W) &= g_I(V,W) + f^2 g_{M_2}(V,W) \\ &= (e^{q/2})^2 g_{M_2}(V,W) = e^q g_{M_2}(V,W) \end{aligned} \tag{4.9}$$

elde edilir. (4.5) denkleminde (4.9) denklemi kullanılırsa,

$$\tilde{S}(V,W) = \alpha e^q g_{M_2}(V,W) + \beta \pi(V)\pi(W) \tag{4.10}$$

bulunur. Benzer şekilde (4.4) ve (4.8) denklemlerinin sağ taraflarının eşitliğinden,

$$-\frac{n-1}{4}[2q'' + (q')^2 + 2q']g_I(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial t}) = \alpha + \beta \tag{4.11}$$

sonucuna ulaşılır. Benzer şekilde (4.3) ve (4.10) denklemlerinin sağ taraflarının eşitliğinden,

$$\begin{aligned} {}^{M_2}S(V,W) - e^q[\frac{n-1}{4}(q')^2 + \frac{2n-3}{2}q' + (n-2) + \frac{q''}{2}]g_{M_2}(V,W) \\ = \alpha e^q g_{M_2}(V,W) + \beta \pi(V)\pi(W) \end{aligned}$$

dır. Buradan da (4.11) denkleminde α yalnız bırakılıp yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa ,

$$^{M_2}S(V,W)=e^{q}[-\frac{n-2}{2}q^{''}+\frac{n-2}{2}q^{'}+(n-2)-\beta]g_{M_2}(V,W)+\beta\pi(V)\pi(W)$$

elde edilir. Böylece $P\in\chi(I)$ için M_2, Levi-Civita koneksiyona göre bir yarı-Einstein manifolddur.

İkinci olarak, $P\in\chi(M_2)$, $X\in\chi(I)$ ve $V\in\chi(M_2)$ alınırsa Teorem 3.1.11 (ii) denkleminden,

$$\tilde{S}(\frac{\partial}{\partial t},V)=(2-n)\frac{q^{'}}{2}\pi(V)g_I(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial t}) \tag{4.12}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\tilde{S}(V,\frac{\partial}{\partial t})=(n-2)\frac{q^{'}}{2}\pi(V)g_I(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial t}) \tag{4.13}$$

olduğu yazılabilir. Ayrıca M bir yarı-Einstein manifold ve $g(V,\frac{\partial}{\partial t})=0$ olduğundan,

$$\tilde{S}(\frac{\partial}{\partial t},V)=\tilde{S}(V,\frac{\partial}{\partial t})=\alpha g(V,\frac{\partial}{\partial t})+\beta\pi(V)\pi(\frac{\partial}{\partial t})=0 \tag{4.14}$$

bulunur. (4.12), (4.13) ve (4.14) denklemleri karşılaştırılırsa,

$$(n-2)\frac{q^{'}}{2}\pi(V)=(2-n)\frac{q^{'}}{2}\pi(V)=0$$

$$q^{'}=0$$

elde edilir. Bu durumda q, I üzerinde sabittir ve buradan da $f=e^{q/2}$ sabit bulunur. Bu da teoremi ispatlar. ■

Teorem 4.1. in ispatında β=0 alınır ise aşağıdaki sonuç elde edilir :

Sonuç 4.2 $boy\ I=1,\ boy\ M_2=n-1$ ve $n\geq 3$ olmak üzere (*M*, *g*), $M=I\times_f M_2$ biçiminde tanımlı bir katlı çarpım manifoldu olsun. Bu takdirde (*M*, *g*) nin semi-simetrik metrik koneksiyona göre bir Einstein manifold olması için gerek ve yeter koşul M_2 nin $P\in\chi(I)$ için Levi-Civita koneksiyona göre bir Einstein manifold olmasıdır [10].

Teorem 4.3 $boy\ I=1,\ boy\ M_1=n-1$ ve $n\geq 3$ olmak üzere (*M*, *g*), $M=M_1\times_f I$ olacak şekilde bir katlı çarpım manifoldu olsun.

i) Eğer (*M*,*g*) semi-simetrik metrik koneksiyona göre bir yarı-Einstein manifold, $P\in\chi(M_1)$ M_1 üzerinde Levi-Civita anlamında paralel ve *f* sabit ise

$$^{M_1}\tilde{r}=\beta-(n-2)^2\pi(P)$$

dir.

ii) $P\in\chi(I)$ için eğer (*M*,*g*) semi-simetrik metrik koneksiyona göre bir yarı-Einstein manifold ise *f* sabittir.

iii) Eğer *f* sabit ve $P\in\chi(I)$ için M_1 Levi-Civita koneksiyona göre bir yarı-Einstein manifold ise *M*, semi-simetrik metrik koneksiyona göre bir yarı-Einstein manifolddur.

İspat: i) (*M*,*g*) semi-simetrik metrik koneksiyona göre bir yarı-Einstein manifold olsun. Buradan $X,Y\in\chi(M_1)$ için,

$$\tilde{S}(X,Y)=\alpha g(X,Y)+\beta\pi(X)\pi(Y)\ ,\quad \beta\neq 0 \tag{4.15}$$

yazılabilir. (4.15) denklemi üzerinden kontraksiyon yapılırsa,

$$\tilde{r}=\alpha n+\beta$$

elde edilir. Son eşitlikte α yalnız bırakılırsa,

$$\alpha=\frac{\tilde{r}-\beta}{n}$$

bulunur. $P\in\chi(M_1)$ için, $g(X,Y)=g_{M_1}(X,Y)+f^2 g_{M_2}(X,Y)=g_{M_1}(X,Y)$ ve Teorem 3.1.12 den

$$\tilde{r}={}^{M_1}\tilde{r}-2(n-1)\frac{Pf}{f}-2\frac{\Delta f}{f}-2(n-2)\pi(P)-2\sum_{i=1}^{n-1}g(\nabla_{e_i}P,e_i)$$

bulunur. α ve $\tilde{r}$ (4.15) eşitliğinde yerine yazılırsa ,

$$\begin{aligned}\tilde{S}(X,Y)&=(\frac{\tilde{r}}{n}-\frac{\beta}{n})g(X,Y)+\beta\pi(X)\pi(Y)\\&=\frac{1}{n}[{}^{M_1}\tilde{r}-2(n-1)\frac{Pf}{f}-2\frac{\Delta f}{f}-2(n-2)\pi(P)-2\sum_{i=1}^{n-1}g(\nabla_{e_i}P,e_i)]g_{M_1}(X,Y)\\&\quad-\frac{\beta}{n}g_{M_1}(X,Y)+\beta\pi(X)\pi(Y)\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikte X ve Y üzerinden kontraksiyon yapılırsa,

$$\begin{aligned}\tilde{r}=\frac{n-1}{n}[{}^{M_1}\tilde{r}-2(n-1)\frac{Pf}{f}-2\frac{\Delta f}{f}-2(n-2)\pi(P)\\-2\sum_{i=1}^{n-1}g(\nabla_{e_i}P,e_i)]+\frac{\beta}{n}\end{aligned}\tag{4.16}$$

bulunur.

$P\in\chi(M_1)$ için Teorem 3.1.10 dan,

$$\begin{aligned}\tilde{S}(X,Y)&={}^{M_1}\tilde{S}(X,Y)\\&\quad-[\frac{H^f(X,Y)}{f}+\frac{Pf}{f}g(X,Y)+\pi(P)g(X,Y)+g(Y,\nabla_X P)-\pi(X)\pi(Y)]\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlik üzerinden X ve Y ye göre kontraksiyon yapılırsa,

$$\tilde{r}={}^{M_1}\tilde{r}-\frac{\Delta f}{f}+(n-1)\frac{Pf}{f}-(n-2)\pi(P)-\sum_{i=1}^{n-1}g(\nabla_{e_i}P,e_i)\tag{4.17}$$

bulunur.

(4.16) ve (4.17) denklemleri karşılaştırılırsa,

$$\frac{n-1}{n}[{}^{M_1}\tilde{r} - 2(n-1)\frac{Pf}{f} - 2\frac{\Delta f}{f} - 2(n-2)\pi(P) - 2\sum_{i=1}^{n-1} g(\nabla_{e_i} P, e_i)] + \frac{\beta}{n}$$
$$= {}^{M_1}\tilde{r} - \frac{\Delta f}{f} + (n-1)\frac{Pf}{f} - (n-2)\pi(P) - \sum_{i=1}^{n-1} g(\nabla_{e_i} P, e_i)$$

yazılabilir. $P \in \chi(M_1)$ paralel ve *f*, *M* üzerinde sabit olduğundan,

$$\frac{Pf}{f} = 0 \ , \ \frac{\Delta f}{f} = 0 \ \text{ ve } \ \sum_{i=1}^{n-1} g(\nabla_{e_i} P, e_i) = 0$$

dır. Böylece son eşitlikten

$${}^{M_1}\tilde{r} = \beta - (n-2)^2 \pi(P)$$

elde edilir.

ii) $P \in \chi(I)$, $X \in \chi(M_1)$ ve $V \in \chi(I)$ olsun. Teorem 3.1.11 den,

$$\tilde{S}(X,V) = (2-n)\pi(V)\frac{Xf}{f}$$

ve

$$\tilde{S}(V,X) = (n-2)\pi(V)\frac{Xf}{f}$$

olduğu biliniyor. boy *I* = 1 olduğundan *V*=*P* alınabilir. O zaman son iki eşitlikten,

$$\tilde{S}(X,P) = (2-n)\pi(P)\frac{Xf}{f} \tag{4.18}$$

ve

$$\tilde{S}(P,X) = (n-2)\pi(P)\frac{Xf}{f} \tag{4.19}$$

elde edilir. Diğer taraftan *M* bir yarı-Einstein manifold olduğundan,

$$\tilde{S}(X,P) = \tilde{S}(P,X) = \alpha g(P,X) + \beta\pi(P)\pi(X)$$

dir. $g(P,X)=0$ ve $\pi(X)=g(X,P)=0$ olduğundan son eşitlik,

$$\tilde{S}(X,P)=\tilde{S}(P,X)=0 \tag{4.20}$$

biçimine dönüşür. (4.18) , (4.19) ve (4.20) denklemlerinin sağ tarafları eşitlenirse,

$$(2-n)\pi(P)\frac{Xf}{f}=(n-2)\pi(P)\frac{Xf}{f}=0$$

$Xf=0$ elde edilir. Böylece f sabittir.

iii) M_1, Levi-Civita koneksiyona göre bir yarı-Einstein manifold olsun.

O zaman

$$\tilde{S}(X,Y)=\alpha g(X,Y)+\beta\pi(X)\pi(Y) \tag{4.21}$$

dir. Diğer taraftan, Teorem 3.1.11 den,

$$\tilde{S}(X,Y)={}^{M_1}\tilde{S}(X,Y)-(n-2)\pi(P)g(X,Y)$$

$$-\frac{H^f(X,Y)}{f}-\sum_{i=n}^{n}g(\nabla_{e_i}P,e_i)g(X,Y) \tag{4.22}$$

elde edilir. $P\in\chi(M_2)$ için ,

$$\sum_{i=n}^{n}g(\nabla_{e_i}P,e_i)g(X,Y)=g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}P,\frac{\partial}{\partial t})=0$$

ve f, M_1 üzerinde sabit olduğundan,

$$H^f(X,Y)=\langle\nabla_X gradf,Y\rangle=0$$

elde edilir. Buradan da (4.22) eşitliği,

$$\tilde{S}(X,Y)={}^{M_1}\tilde{S}(X,Y)-(n-2)\pi(P)g(X,Y) \tag{4.23}$$

şekline dönüşür.

Diğer taraftan (4.23) denkleminde (4.21) denklemi yazılırsa,

$$\tilde{S}(X,Y)=[\alpha-(n-2)\pi(P)]g(X,Y)+\beta\pi(X)\pi(Y)$$

bulunur. Bu da gösteriyor ki $M_1\times_f I$, semi-simetrik metrik koneksiyona göre bir yarı-Einstein manifolddur.

Teorem 4.3 ün ispatında β=0 alınır ise aşağıdaki sonuç elde edilir :

Sonuç 4.4 $boy\ I=1$, $boy\ M_1=n-1$ ve $n\geq 3$ olmak üzere (*M, g*), $M=M_1\times_f I$ olacak şekilde bir katlı çarpım manifoldu olsun.

i) Eğer *(M,g)* semi-simetrik metrik koneksiyona göre bir Einstein manifold, $P\in\chi(M_1)$ M_1 üzerinde Levi-Civita anlamında paralel ve *f* sabit ise

$$^{M_1}\tilde{r}=-(n-2)^2\pi(P)$$

dir.

ii) $P\in\chi(I)$ için eğer *(M,g)* semi-simetrik metrik koneksiyona göre bir Einstein manifold ise *f* sabittir.

iii) Eğer *f* sabit ve $P\in\chi(I)$ için M_1 Levi-Civita koneksiyona göre bir Einstein manifold ise *M*, semi-simetrik metrik koneksiyona göre bir Einstein manifolddur [10].

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

2. bölümde katlı çarpım manifoldları ve yarı-Einstein katlı çarpım manifoldları incelenerek, $M = M_1 \times_f M_2$ olmak üzere (M,g) katlı çarpım manifoldu için Önerme 2.2.5., Önerme 2.2.6., Önerme 2.2.7., Önerme 2.2.8., Önerme 2.3.1, Önerme 2.3.1., Önerme 2.3.2. ve Önerme 2.3.3. ispatlanmıştır.

3. bölümde semi-simetrik metrik koneksiyona göre katlı çarpım manifoldları incelenmiş ve Teorem 3.1.6., Teorem 3.1.7., Teorem 3.1.8, Teorem 3.1.9., Teorem 3.1.10. ve Teorem 3.1.11 ispatlanmıştır.

Son bölümde semi-simetrik metrik koneksiyona göre yarı-Einstein katlı çarpım manifoldları incelenerek (M,g) katlı çarpım manifoldu için Teorem 4.1. ve Teorem 4.3. ispatlanmıştır.

6. KAYNAKLAR

[1] Beem, J. K., Ehrlich, P. E. And Powell, Th. G., “Warped product manifolds in relativity”, *Selected Studies: Physics-Astrophysics, Mathematics, History of Science. North-Holland, NewYork*, (1982).

[2] Chen, B. Y., “Geometry of warped products as Riemannian submanifolds and related problems”, *Soochow J. Math*, 28 ,125-156, (2002).

[3] O’Neill, B., “Semi-Riemannian geometry with applications to relativity”, *Pure and Applied Mathematics, 103. Academic Press, Inc. (Harcourt Brace Jovanovich, Publisher), New York,* (1983).

[4] Friedmann and Schouten J. A., “Über die Geometrie der halbsymmetrischen Übertragungen”, *Math. Z.*, 21 / 1, 211—223, (1924).

[5] Hayden, H. A. “Subspace of a space with torsion”, *Proceedings of the London Mathematical Society II Series* 34 , 27-50 (1932).

[6] Yano, K., “On semi-symmetric metric connection”, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, 15, 1579-1586, (1970).

[7] Imai T., “Notes on semi-symmetric metric connections”, *Vol. I. Tensor* (*N.S.*), 24, (1972).

[8] Kobayashi S. and Nomizu K.,” Foundations of differential geometry”, *John Wiley and Sons, Inc., New York* (1996).

[9] Hacısalihoğlu, H. H., *Diferensiyel Geometri*, İnönü Üniversitesi Yayınları, (1983).

[10] Deszcz, R. and Hotlos, M., “On certain subclass of pseudosymmetric manifolds”, *publ. Math. Debrecen*, 53, 29-48, (1998).

[11] Bootyby, W. M., “An Indroduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry”, *Academic Inc*., (1986).

[12] Yano, K. and Kon, M., *Structures on manifolds. Series in Pure Mathematics, 3. World Scientific Publishing Co*., Singapore, (1984).

[13] Chaki, M. C. and Maity, R. K., “On quasi Einstein manifolds”, *Publ. Math. Debrecen*, 57, 297-306, (2000).

[14] Chen, B.Y., and Yano, K., “Hypersurfaces of a confomally flat space”, *Tensor* (*N.S.*), 26, 318-322, (1972).

[15] Chen, B.Y., “Geometry of submanifolds”, *Pure and Applied Mathematics, No. 22. Marcel Dekker, Inc., New York,* (1973).

[16] Bulut, S., “Ayrışım Teoremleri Üzerine”, Yüksek Lisans, *Fen Bilimleri Enstitüsü,* Malatya, (2009).

[17] Özgür C. and Murathan C., “B. Y. Chen inequalities for submanifolds of warped products $\mathbb{R}\times_f M^n(c)$ and $M^n(c)\times_f \mathbb{R}$ ”, yayına sunuldu.

[18] Sular, S. and Özgür, C., “On Quasi-Einstein Warped Products”, *An. Ştiinţ. Univ. Al. I. Cuza Iaşi. Mat. (N.S.)*

[19] Obata, M., “Certain conditions for a Riemannian manifold to be ioso-metric with a sphere”, *J. Math. Soc. Japan* 14, 333-340, (1962).

[20] Schouten, J. A., Ricci-Calculas. *Springer, Berlin,* (1954).

[21] Pak, E., “On the pseudo-Riemann spaces”, *J Korean Math. Soc.*, 6, 23-31, (1969).

[22] Sular S. and Özgür C., “Warped Product Manifolds with a semi-symmetric Metric Connection”, *Taiwanese J. Math.* 15 / 4, 1701-1719, (2011).