T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

$H(\lambda_4)$ HECKE GRUBUNUN SONLU İNDEKSLİ ALT GRUPLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BETÜL FİLİZ

BALIKESİR, HAZİRAN 2012

KABUL VE ONAY SAYFASI

Betül FİLİZ tarafından hazırlanan "**H(λ_4) HECKE GRUBUNUN SONLU İNDEKSLİ ALT GRUPLARI**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 11 Haziran 2012 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Doç. Dr. Sebahattin İKİKARDEŞ	....
Üye Doç. Dr. Fırat ATEŞ	....
Üye Doç. Dr. Özden KORUOĞLU	....

Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez BAÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Prof. Dr. Hilmi NAMLI ....

ÖZET

$H(\lambda_4)$ HECKE GRUBUNUN SONLU İNDEKSLİ ALT GRUPLARI
YÜKSEK LİSANS TEZİ
BETÜL FİLİZ
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. SEBAHATTİN İKİKARDEŞ)

BALIKESİR, 2012

Bu tezde $H(\lambda_4)$ Hecke grubunun sonlu indeksli normal alt grupları gösterilmiştir.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümü olan birinci bölümde, çalışma tanıtılmıştır.

İkinci bölümde, diğer bölümlerde gerekli olan temel tanımlar, kavramlar, teoremler ve metotlar verilmiştir.

Üçüncü bölüm tezin ana kısmıdır. Bu bölümde, $H(\lambda_4)$ Hecke grubunun sonlu indeksli normal alt gruplarının üreteçleri, grup gösterimleri ve simgeleri verilmiştir.

Dördüncü bölüm tezin son kısmıdır. Bu bölümde elde edilen sonuçlar verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Hecke grupları, üçgen gruplar,

ABSTRACT

FINITE SUBGROUPS OF THE HECKE GROUP H(λ_4)
MSC THESIS
BETÜL FİLİZ
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATİCS

(SUPERVISOR: ASSOC. PROF. DR. SEBAHATTIN IKIKARDES)

BALIKESİR, 2012

In this thesis, normal subgroups of finite index in the H(λ_4) Hecke group are given.

This thesis consists of four chapters. In the first chapter which is the introduction the study is introduced.

In the second chapter, the fundamental definitions, notations, theorems and methods which are needed in the other chapters are given.

The third chapter is the main part of the thesis. İn this chapter, group presentatians, signatures and generators of normal subgroups of finite index in the H(λ_4) Hecke group are given.

In the fourth chapter, the results obtained in this thesis are given.

KEYWORDS: Hecke groups, triangle groups,

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİL LİSTESİ

<u>**Sayfa**</u>

SEMBOL LİSTESİ

[G, X]	: Topolojik dönüşüm grubu
GF(p^n)	: p^n mertebeli Galois cismi
GL(2, K)	: Genel lineer grup
Z(GL(2, K))	: Genel lineer grubun merkezi
PGL(2, K)	: Projektif genel lineer grup
SL(2, K)	: Özel lineer grup
Z(SL(2, K))	: Özel lineer grubun merkezi
PSL(2, K)	: Projektif özel lineer grup
$\mathbf{C}_\infty$	: Genişletilmiş karmaşık düzlem
Aut($\mathbf{C}_\infty$)	: $\mathbf{C}_\infty$ un tüm otomorfizmlerinin kümesi
$\overline{\mathbf{Aut}}$ ($\mathbf{C}_\infty$)	: $\mathbf{C}_\infty$ un tüm otomorfizm ve anti-otomorfizmlerinin kümesi
U	:Üst yarı düzlem $\{z \in \mathbf{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$
PSL(2, R)	: $\{T \mid T(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$, a, b, c, d $\in \mathbf{R}$ ve $ad-bc=1\}$
$\mathbf{G_0}$	: $\{U \mid U(z)=\dfrac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$, a, b, c, d $\in \mathbf{R}$ ve $ad-bc=-1\}$
Γ	: Fuchsian gruplar
($g;m_1,\ldots,m_r;t;u$)	: Fuchsian grupların simgesi
$\mu(\Gamma)$	: Fuchsian grubun temel bölgesinin hiperbolik alanı
(l,m,n)	: $< x, y \mid x^l = y^m = (xy)^n = I >$ üçgen grubun simgesi
$\mathbf{C_n}$	: Devirli grup
$\mathbf{D_n}$	: Dihedral grup
$\mathbf{S_n}$	: Simetrik grup
$\mathbf{A_n}$	: Alterne grup
Σ	: Schreier transversali

A×B	: Direkt çarpım grubu
A∗B	: Serbest çarpım grubu
H(λ)	: Hecke grubu
H(λ_q)	: $\lambda = \lambda_q = 2\cos\frac{\pi}{q}$, $1 \leq \lambda < 2$ için elde edilen Hecke grubu
H (λ_4)	: $\lambda_4 = \ \overline{2}$ için elde edilen Hecke grubu

ÖNSÖZ

Tez çalışmam boyunca yanımda olan, beni yönlendiren ve desteğini hiç esirgemeyen danışman hocam Doç. Dr. Sebahattin İKİKARDEŞ'e, bilgileriyle her zaman yol gösterici ve destek olan hocam Prof. Dr. Recep ŞAHİN'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca beni yetiştiren Balıkesir Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi ve Necatibey Eğitim Fakültesi Matematik Bölümü`ndeki hocalarıma, çalışmalarım boyunca destek olan arkadaşım Nur KESKİN'e ve tüm yardımlarından dolayı arkadaşım Volkan YILMAZ'a teşekkür ederim.

Tüm öğrenim yaşantım boyunca maddi ve manevi destekleriyle bugünlere gelmemi sağlayan benim her türlü cefamı çeken aileme teşekkürlerimi ve sevgilerimi sunarım.

1. GİRİŞ

Hecke grupları literatüre, E.Hecke'nin 1936 yılında yaptığı "Über die bestimmung Dirishletscher Reihen durch ihre Funktionalgleichung" isimli çalışması ile girmiştir. H(λ) ile gösterilen Hecke grupları, λ sabit bir pozitif sayı olmak üzere;

$$T\ Z\ = -\frac{1}{z}\ \text{ve}\ U\ z\ = z + \lambda$$

kesirli doğrusal dönüşümleri ile üretilir, [1]. Ayrıca E. Hecke, H(λ) Hecke gruplarının Fuchsian olması için gerekli ve yeterli şartın $\lambda \geq 2$ veya $q \geq 3$ bir tamsayı olmak üzere $\lambda = \lambda_q = 2\cos\frac{\pi}{q}$ olması gerektiğini göstermiştir, [1].

Fuchsian grup kavramı ise Jules Henry Poincare'nin 1880 li yıllarda Paris akademisinin açtığı matematik yarışmasına katılmasıyla ortaya çıkmıştır. Bu yarışmaya katılan Jules Henry Poincare'nin amacı, 1820 li yıllarda Abel, Gauss ve Jocabi tarafından tanımlamış Eliptik fonksiyonları genelleştirmektir.

Poincare L.Fuchs'un diferansiyel denklemler hakkındaki bir çalışmasından yararlanarak eliptik fonksiyonlar ailesini, adına Fuchsian fonksiyonlar dediği bir fonksiyon ailesine genişletmeyi başarır. Poincare tarafından Fuchsian fonksiyonlarla olan ilgisi nedeniyle, Fuchsian gruplar adı verilen gruplar literatüre girmiştir.

Literatürde $H(\lambda_q)$ Hecke gruplarında, q=3 değerine karşılık gelen $H(\lambda_3)$ Hecke grubu daha çok Modüler grup olarak adlandırılır ve PSL(2,**Z**) ile gösterilir. Modüler grup matematikçiler tarafından çok çalışılan bir gruptur. Modüler grubun kendisinin yanı sıra önemli bazı alt grupları literatürde çokça kullanılmıştır. M. Newman 1962 ve 1964 yıllarında yaptığı [2,3] nolu makalelerde kuvvet ve komütatör alt gruplarını incelemiş ve bu alt gruplar aralarındaki ilişkiyi göstermiştir. Bununla beraber Newman kuvvet alt gruplarından yararlanarak Modüler grubun serbest alt grupları hakkında da bilgi vermiştir.

Hecke gruplarının $\lambda=\lambda_q=2\cos\frac{\pi}{q}$ için q=4,6 değerlerine karşılık gelen $H(\lambda_q)$ Hecke grupları ile bunların normal alt grupları Cangül tarafından çalışılmıştır, [4].

Lang, Rosen, Sheingorn, Kulkarni, Schimidt, Fine, Rosenberger, Singerman, Jones, Knopp, Cangül gibi birçok matematikçi Hecke gruplar ve Hecke grubunun normal alt grupları hakkında birçok çalışma yapmıştır, [5-10].

1980 li yıllardan itibaren Modüler gruptan yararlanarak tanımlanan, Genişletilmiş Modüler grup $\overline{\Gamma}$=PGL(2,**Z**) ve onun alt gruplarının cebirsel, geometrik ve fonksiyonel özellikleri Jones, Thornton, Sibner ve Mushtag tarafından çalışılmıştır, [11-12].

Conder ve Dobcsányi [13] nolu makalede $4 \leq q \leq 12$ değerlerine karşılık gelen Hecke gruplarının sonlu indeksli normal alt gruplarının sayısını düşük indeksli alt grup algoritmasını kullanarak bulmuştur. Bu tezde Conder ve Dobcsányi'nin makalesindeki sonuçları kullanarak $q = 4$ durumuna karşılık gelen 24 indekse kadar normal altgruplarının üreteçleri, grup gösterimleri ve simgeleri bulundu.

Tezin ikinci bölümünde tezin daha sonraki bölümlerinde kullanacağımız bazı temel tanımlar, teoremler, metotlar ve yöntemler verilmiştir. Ana hatlarıyla topolojik dönüşüm grupları, ayrık gruplar, projektif gruplar, doğrusal dönüşümler, Fuchsian grupları, permütasyon metodu, Reidemeister-Scheier metodu, serbest gruplar, serbest çarpımlar ve Hecke gruplarından bahsedilmiştir.

Tezin son bölümünde ise Conder ve Dobcsányi'nin makalesindeki sonuçlar, Reidemeister-Scheier metodu, permütasyon metodu ve Riemann-Hurwitz formülü kullanılarak $q = 4$ durumuna karşılık gelen 24 indekse kadar normal alt gruplarının üreteçleri, grup gösterimleri ve simgeleri verilmiştir.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde tezin diğer bölümleriyle bağlantılı olan kavramlar tanımlanmış, temel teoremler ve metotlar verilmiştir.

2.1 Topolojik Dönüşüm Grupları

2.1.1 Tanım : G hem bir grup hem de bir topolojik uzay olsun. Eğer her a, b $\in$ G için

$$f : G \times G \to G \; ; \; f(a,b) = ab,$$

$$g : G \to G \; ; \; g(a) = a^{-1}$$

biçiminde tanımlanan f ve g işlemleri sürekli iseler, G ye bir *topolojik grup* denir, [14].

2.1.2 Tanım : G bir topolojik grup ve X herhangi bir topolojik uzay olsun.

$$\Lambda : G \times X \to X \; ; \; \Lambda(g,x) = g \Lambda x$$

sürekli dönüşümü, eğer her g, h $\in$ G ve her x $\in$ X için

(i) $g \Lambda (h \Lambda x) = gh \Lambda x$

(ii) $e \Lambda x = x$

koşullarını sağlıyorsa [G, X] ikilisine bir *topolojik dönüşüm grubu* denir, [14].

2.2 Ayrık Gruplar

2.2.1 Teorem : G bir topolojik grup olsun.

i) G nin elemanlarının hiçbirisi G nin bir yığılma noktası değil ise G ye *ayrık grup* denir.

ii) G nin her g elemanı için {g} kümesi g nin bir komşuluğu ise G ye *ayrık grup* denir.

iii) G nin her g elemanı G nin bir ayrık noktası ise G ye *ayrık grup* denir.

iv) G nin birim elemanı olan e, G nin bir ayrık noktası ise G ye *ayrık grup* denir, [14].

2.3 Projektif Gruplar

p bir asal sayı olmak üzere, $q=p^n$ biçimindeki her asal kuvveti için izomorfizm farkıyla GF(q) ile gösterilen q elemanlı bir tek cisim vardır ve bu q elemanlı cisim Galois cismidir. Bütün sonlu cisimler bu formdadır, [4].

K, $q=p^n$ mertebeli sonlu bir cisim, yani K=GF(q) olsun. GL(2, K) ile gösterilen *genel lineer grup*,

$$GL(2,K)=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in K, ad-bc \neq 0\right\}$$

biçiminde tanımlanır. Bu grubun merkezi Z(GL(2, K)) ile gösterilir ve GL(2, K) nın normal alt grubudur. Buradan PGL(2, K) ile gösterilen *projektif genel lineer grup*

$$PGL(2,K)=GL(2,K)/Z(GL(2,K))$$

olarak tanımlanır, [4].

GL(2, K) grubunda determinantı 1 olan matrisler bir alt grup oluştururlar ve SL(2, K) ile gösterilen bu alt gruba *özel lineer grup* denir, yani

$$\mathrm{SL}(2,\mathrm{K})=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a,b,c,d\in \mathrm{K}, ad-bc=1\right\}$$

olur. Dolayısıyla PSL(2, K) ile gösterilen *projektif özel lineer grup*,

$$\mathrm{PSL}(2,\mathrm{K})=\mathrm{SL}(2,\mathrm{K})/\mathrm{Z}(\mathrm{SL}(2,\mathrm{K}))$$

biçiminde tanımlanır, [4].

Sadece sonlu cisimler üzerinde tanımladığımız yukarıdaki dört projektif grup genelde K nın sonsuz bir cisim olması halinde de tanımlanabilir. Bu durumda matrislerin ya da indirgenen kesirli lineer dönüşümlerin tüm katsayıları bu sonsuz cisimden alınır. En çok çalışılan projektif gruplar PSL(2, **Z**), PSL(2, **R**) ve PSL(2, **C**) dir.

2.4 Doğrusal Dönüşümler

$\mathbf{C}_\infty$ genişletilmiş karmaşık düzlemin otomorfizmleri a, b, c, d $\in$ **C** ve $ad-bc\neq 0$ olmak üzere

$$T(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$

biçimindeki dönüşümlerdir. Bu dönüşümlere *doğrusal dönüşüm* veya *Möbius dönüşümü* denir. Bu tip dönüşümlerin kümesi fonksiyonların bileşke işlemine göre bir grup oluşturur ve bu grup Aut($\mathbf{C}_\infty$)=PGL(2, **C**) ile gösterilir. a, b, c, d $\in$**C** ve $ad-bc\neq 0$ olmak üzere

$$U(z)=\frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$$

dönüşümleri de $\mathbf{C}_\infty$ un anti-otomorfizmleridir. İki anti-otomorfizmin birleşimi bir otomorfizm ve bir anti-otomorfizm ile bir otomorfizmin birleşimi bir anti-otomorfizmdir. Dolayısıyla $\mathbf{C}_\infty$ un tüm otomorfizm ve anti-otomorfizmleri bir grup oluşturur ve bu grup $\overline{\mathrm{Aut}}\ (\mathbf{C}_\infty)= \overline{\mathrm{PGL}}\ (2, \mathbf{C})$ biçiminde gösterilir. U bir anti-otomorfizm olmak üzere PGL(2, **C**) ve UPGL(2, **C**), $\overline{\mathrm{PGL}}(2,\mathbf{C})$ deki kosetlerdir, yani $\left[\overline{\mathrm{PGL}}(2,\mathbf{C}) : \mathrm{PGL}(2,\mathbf{C})\right] = 2$ dir ve buradan PGL(2, **C**), bu grubun normal bir alt grubudur.

U ile üst yarı düzlemi gösterelim yani, $U=\{z \in \mathbf{C}\ :\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$ olsun. Hiperbolik geometri için üst yarı düzlem gösterimini kullanacağız. Bu çalışmada kullanacağımız gruplar hiperbolik geometrinin eşmetrilerinin grupları olduğundan ve hiperbolik geometri için üst yarı düzlem gösterimini seçtiğimizden bu dönüşümlerin reel katsayılı olanları ile ilgileneceğiz. Bu nedenle PGL(2, **C**) nin bazı dönüşümlerinden oluşan

$$\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})=\{T \mid T(z)=\frac{az+b}{cz+d},\ a, b, c, d \in \mathbf{R} \text{ ve } ad-bc=1\}$$

ve

$$G_0=\{U \mid U(z)=\frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d},\ a, b, c, d \in \mathbf{R} \text{ ve } ad-bc=-1\}$$

biçimindeki iki alt kümesini alalım ve $G= \mathrm{PSL}(2, \mathbf{R}) \cup G_0$ kümesini oluşturalım. G kümesinin fonksiyonların bileşke işlemine göre bir grup olduğu kolayca görülebilir.

Matrislerde çarpma işlemi yapmak, fonksiyonların bileşke işlemine göre daha kolaydır. Bunun için, möbius dönüşümleri ile matrisler arasında bire bir ilişkiyi inceleyelim. Bu ilişki, $T(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ yerine $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrisini kullanmak olacaktır. Bunun için bazı teoremler verelim.

2.4.1 Teorem : $\theta : GL(2, \mathbf{C}) \rightarrow Aut(\mathbf{C}_\infty)$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm bir epimorfizmdir, [15].

Dikkat edilirse Teorem 2.4.1 deki dönüşüm birebir değildir. Çünkü $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrisi $\frac{az+b}{cz+d}$ dönüşümünün yanında, bu dönüşümün, k katına da gidebilir. Dolayısıyla birebirlik yoktur.

2.5 Fuchsian Gruplar

2.5.1 Tanım :

i) [G, *U*] topolojik dönüşüm grubunun ayrık alt gruplarına *Öklidyen olmayan kristallografik (non-Euclidean Crystallographic) grup* denir ve kısaca N.E.C. grup diye yazılır.

ii) PSL(2, **R**) nin alt grubu olan N.E.C. gruplara *Fuchsian gruplar* denir ve Γ ile gösterilir.

Her Γ Fuchsian grubunun aşağıdaki şekilde bir temsili vardır:

Üreteçler :$a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$ (hiperbolik)

$x_1, \ldots, x_r$ (eliptik)

$p_1, \ldots, p_t$ (parabolik)

$h_1, \ldots, h_u$ (hiperbolik sınır elemanı)

Bağıntılar : $x_1^{m_1} = x_2^{m_2} = \ldots = x_r^{m_r} = \prod_{i=1}^{g}[a_i, b_i]\prod_{j=1}^{r} x_j \prod_{k=1}^{t} p_k \prod_{l=1}^{u} h_l = 1$

Γ Fuchsian grubu

$$(g;m_1,\ldots,m_r;t;u) \qquad (2.1)$$

simgesine sahiptir denir. Burada $m_1, \ldots, m_r \geq 2$ sayıları tamsayılardır ve bunlara Γ nın *periyotları* denir. g, Γ nın üzerinde ayrık olarak hareket ettiği U/Γ Riemann yüzeyinin cinsidir, [4].

2.5.2 Riemann-Hurwitz Formülü : Γ, simgesi (2.1) biçimindeki gibi olan bir grup olsun. Γ nın hiperbolik alanını

$$\mu(\Gamma) = 2g - 2 + \sum_{i=1}^{r}(1 - \frac{1}{m_i}) + t + u$$

olarak tanımlayalım. Eğer $\mu(\Gamma) > 0$ ise simgesi (2.1) biçimindeki gibi olan bir Fuchsian grup vardır. Eğer Γ, birinci türden Fuchsian grup ise $\mu(\Gamma) > 0$ dır. Şimdi Γ_1, Γ grubunun sonlu indeksli bir alt grubu olsun. o zaman

$$[\Gamma : \Gamma_1] = \frac{\mu(\Gamma_1)}{\mu(\Gamma)}$$

olur. Burada $\mu(\Gamma_1)$ ve $\mu(\Gamma)$ sırasıyla Γ_1 ve Γ grubunun temel bölgesinin hiperbolik alanını göstermektedir. Bu formüle *Riemann-Hurwitz formülü* denir, [16].

2.6 Permütasyon Metodu

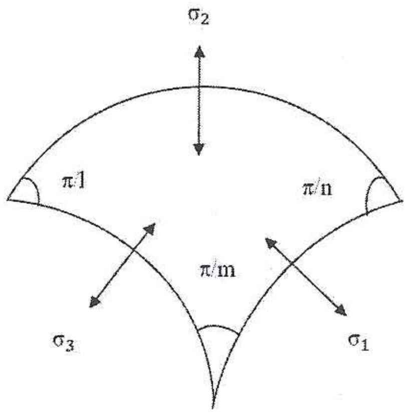
$H(\lambda_4)$ Hecke grubunun normal alt gruplarının simgelerini bulmakta kullanacağımız permütasyon metodunu aşağıdaki teorem ile verelim.

2.6.1 Teorem : $p+q=r+t$ ve $1<k_i \leq \infty$ ($1 \leq i \leq q$) olmak üzere Γ grubunun simgesi ($g; m_1,\ldots, m_p, n_1k_1,\ldots, n_qk_q$) ve Γ_1, Γ grubunun μ indeksli bir normal alt grubu ise Γ_1 alt grubu ($g_1; k_1^{(\mu/n_1)},\ldots, k_q^{(\mu/n_q)}$) simgesine sahiptir. Burada

$k_i^{(\mu/n_i)}$, k_i mertebeli elemandan μ/n_i tane var demektir ve g_1 cinsi Riemann-Hurwitz formülü ile bulunabilir, [17].

Bu çalışmamızda H(λ_4) Hecke grubunun normal alt gruplarının grup gösterimlerini bulurken üçgen gruplardan faydalanacağız. Şimdi bu üçgen gruplardan bahsedelim.

l, m, n ≥ 2 olacak şekildeki tamsayılar olsun. Açıları π/l, π/m, π/n olan hiperbolik üçgeni göz önüne alalım.



Şekil 2.6 Hiperbolik Üçgen

σ_1, σ_2, σ_3 bu üçgenin kenarlarındaki yansımalar ve Γ^* grubu bu üç yansıma ile üretilen grup olsun.

$$\Gamma^* = < \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \mid \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = (\sigma_2\sigma_3)^l = (\sigma_3\sigma_1)^m = (\sigma_1\sigma_2)^n = I >$$

Burada σ_1, σ_2 ve σ_3 yön korumayan elemanları, $\sigma_2\sigma_3$, $\sigma_3\sigma_1$ ve $\sigma_1\sigma_2$ ise yön koruyan elemanlarıdır . x $=\sigma_2\sigma_3$ ve y $=\sigma_3\sigma_1$ olarak alırsak xy $=\sigma_1\sigma_2$ olarak elde edilir. Buradan Γ^* grubunun sadece x, y ve xy yön koruyan eşmetrilerinden oluşan bir Γ alt grubunu

$$\Gamma = < x, y \mid x^l = y^m = (xy)^n = I >$$

biçiminde elde ederiz. Bu alt grup bir Fuchsian gruptur ve simgesi (0;l,m,n) dir. Kısaca (l,m,n) biçiminde gösterilir. Bu Γ alt grubuna bir *üçgen grup* denir. Γ alt grubu Γ^* grubunun 2 indeksli bir normal alt grubudur, [18].

Şimdi (l,m,n) gösterimine sahip herhangi bir üçgen grup için şu teoremi verelim:

2.6.2 Teorem : Eğer $\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}>1$ ise üçgen grup sonlu, $\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\leq 1$ ise sonsuz mertebelidir, [19].

Sonlu mertebeli bazı üçgen grupları ana hatlarıyla inceleyelim:

i) C_n Devirli gruplar :

C_n devirli gruplarının gösterimleri

$$C_n \cong \langle\, \alpha \mid \alpha^n = I \,\rangle$$

biçimindedir. Bunların üçgen grubu olarak gösterimleri de her $n\in \mathbf{N}$ için (l,n,n) biçimindedir. Ayrıca m tek sayı olduğunda

$$C_{2m} \cong \langle \alpha,\beta \mid \alpha^2=\beta^m=I, \alpha\beta=\beta\alpha \rangle$$

olacağından C_{2m} in üçgen grubu olarak gösterimi (2,m,2m) biçiminde olur, [18].

ii) D_n Dihedral Gruplar :

D_n dihedral gruplar düzgün n-genlerin simetri gruplarıdır ve grup gösterimleri

$$D_n \cong \langle \alpha,\beta \mid \alpha^2=\beta^2=(\alpha\beta)^n=I \rangle$$

veya

$$D_n \cong \langle \alpha, \beta \mid \alpha^2 = \beta^n = (\alpha\beta)^2 = I \rangle$$

veya

$$D_n \cong \langle \alpha, \beta \mid \alpha^n = \beta^2 = (\alpha\beta)^2 = I \rangle$$

biçimindedir ve $|D_n|$=2n dir. D_n grubunun üçgen grubu olarak gösterimi (2,2,n) veya (2,n,2) veya (n,2,2) biçimindedir, [18].

iii) Simetrik ve Alterne Gruplar :

n elemanlı bir kümenin bütün permütasyonlarının kümesi fonksiyonların bileşke işlemine göre bir grup oluşturur. Bu gruba *simetrik grup* denir ve S_n ile gösterilir. Çift permütasyonların kümesi de bu grubun bir alt grubunu oluşturur. Bu gruba *alterne grup* denir ve A_n ile gösterilir. $|S_n|$ =n! ve $|A_n| = \frac{n!}{2}$ dir. Çok karşılaşılan simetrik ve alterne gruplar $D_3 \cong S_3 \cong (2,2,3)$, $A_4 \cong (2,3,3)$, $S_4 \cong (2,3,4)$ ve $A_5 \cong (2,3,5)$ gruplarıdır, [18].

2.7 Reidemeister-Schreier Metodu

Bu kısımda $H(\lambda_4)$ Hecke grubunun sonlu indeksli normal alt gruplarının üreteçlerini bulmakta kullanılacak bir teknik olan Reidemeister-Schreier metodu verilecektir.

G, $\{g_i\}$ üreteçleri ile üretilen bir grup ve H, G nin sonlu indeksli bir normal alt grubu olsun. Metot önce H için bir Scheier transversali seçerek ve sonra da bu transversalin, üreteçlerin ve koset gösterimlerinin elemanlarının sıralı çarpımlarının alarak, aşağıdaki gibi uygulanır.

Bir Σ Schreier transversali aşağıdaki koşulları sağlayan koset gösterimlerinin bir kümesinden oluşur:

(i) $I \in \Sigma$

(ii) Σ sağ sadeleştirme altında kapalıdır. Yani eğer $g_{i_1} \cdot g_{i_2} \ldots g_{i_r} \in \Sigma$ ise $g_{i_1} \cdot g_{i_2} \ldots g_{i_{r-1}}$ elemanı da Σ kümesinde olmalıdır.

Σ, H için Schreier transversali olsun. H nin bir Schreier üreteci aşağıdaki biçimde olacaktır, [4].

(Σ nın bir elemanı)x(G nin bir üreteci)x(önceki çarpımın koset gösterimi)$^{-1}$

2.8 Serbest Gruplar ve Serbest Çarpımlar

Şimdi $H(\lambda_q)$ bir serbest çarpım olarak bazı serbest alt gruplara sahip olduğundan, bu alt grupların yapısıyla ilgili bazı sonuçları verelim.

2.8.1 Tanım : X bir F grubunun alt kümesi ve G herhangi bir grup olmak üzere,

$$\phi_0 : X \to G$$

şeklinde herhangi bir dönüşüm için,

$$\phi : F \to G$$

ϕ_0 dönüşümünün uzantısı olan tek bir ϕ homomorfizması varsa F grubuna X üzerinde *serbesttir* denir, [20].

X bir F grubunun bir alt kümesi olsun. F, aşağıdaki koşulları sağlayan X tabanı ile bir serbest gruptur: Eğer ϕ, X kümesinden bir H grubu içine herhangi bir fonksiyon ise ϕ homomorfizminin F den H ye bir ϕ^* homomorfizmine tek bir genişlemesi vardır. Burada X e F nin *serbest tabanı* denir, [20].

X serbest tabanının mertebesine F nin *rankı* denir. Eğer $|X| = n$ ve $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ ise F, $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ üzerinde *serbesttir* diyeceğiz ve bunu F_n ile göstereceğiz, [20].

2.8.2 Teorem : İki serbest grubun izomorf olması için gerek ve yeter koşul ranklarının aynı olmasıdır,[20].

0 ranklı bir serbest grup aşikardır ve 1 ranklı bir serbest grup sonsuz devirlidir.

2.8.3 Teorem : F grubunun bir serbest grup olması için gerek ve yeter koşul F nin $F = < X; >$ biçiminde bir gösterimi olmasıdır, [21].

2.8.4 Teorem : Her G grubu bir serbest grubun bir homomorfik görüntüsüdür, [21].

2.8.5 Teorem : Bir serbest grup bükümsüzdür (torsion-free), yani bir serbest grupta birim eleman dışında sonlu mertebeli eleman yoktur, [21].

2.8.6 Teorem (Nielsen-Screier) : Bir serbest grubun her alt grubu da serbesttir, [21].

2.8.7 Tanım : $A = \langle a_1, ...; R_1, ... \rangle$ ve $B = \langle b_1, ...; S_1, ... \rangle$ iki grup olsun. A ve B gruplarının $A * B$ ile gösterilen serbest çarpımı,

$$\langle a_1,\ldots, b_1,\ldots; R_1,\ldots, S_1,\ldots\rangle$$

gösterimli gruptur. Yani G grubunun üreteçleri, A ve B gruplarının üreteçlerinin tümünden ve bağıntıları da A grubunun R_i ve B grubunun S_j bağıntılarının tümünden oluşur. A ve B gruplarına G grubunun *çarpanları* denir, [21].

2.8.8 Tanım : Eğer $A_\alpha = \langle \text{ür}A_\alpha : \text{bağ}A_\alpha \rangle, \alpha \in I$ grupların bir koleksiyonu ise bu grupların $G= * A_\alpha$ serbest çarpımı, üreteçleri A_α gruplarının üreteçlerinin ayrık birleşimlerinden ve bağıntıları da A_α gruplarının bağıntılarının ayrık birleşimlerinden oluşan gruptur, [21].

2.8.9 Teorem : $G=A * B$ olsun. O zaman $A \to G$ ve $B \to G$ eşlemeleri birebir eşlemelerdir. A nın üreteçleri ile üretilen G grubunun alt grubu <A grubunun üreteçleri, A grubunun bağıntıları> biçiminde gösterime sahiptir. Yani A grubuna izomorftur. Benzer durum B içinde geçerlidir. Bu yüzden A ve B, G grubunun alt grupları olarak düşünülebilir, [21].

Bir G grubunun bir serbest çarpım olarak ayrışıp ayrıştırılamayacağını belirlemek önemlidir. G için verilen bir gösterimde G grubunun üreteçlerini, bağıntılar da ayrışacak biçimde iki kümeye bölmeye çalışmak basit bir yöntemdir. Yani $G=<R \cup S$; {sadece R deki üreteçleri içeren bağıntılar} $\cup$ { sadece S deki üreteçleri içeren bağıntılar}> biçiminde yazmaya çalışmaktır. Artık G,

$$G_1 = <R\text{ ; R deki üreteçleri içeren bağıntılar}>$$

ve

$$G_2 = <S\text{; S deki üreteçleri içeren bağıntılar}>$$

gruplarının serbest çarpımıdır.

Serbest çarpımlar, serbest gruplarla bir çok özelliği paylaşır. Örneğin Kurosh'un teoremi ile serbest gruplar için verilmiş olan Nielsen-Schreier teoremi serbest çarpımlara genişletilmiştir.

2.8.10 Teorem (Kurosh) : G, A_α alt gruplarının çarpımı yani,

$$G = \prod_{\alpha} {}_{*}A_\alpha$$

olsun. Eğer H, G nin bir alt grubu ise

$$H = F * \prod_{\beta} {}_{*}B_\beta$$

olur. Burada F bir serbest grup ve her bir β için B_β, bir A_α alt grubuna eşleniktir, [4].

2.8.11 Teorem : Eğer G=A $*$ B ve $H \subset A$, $K \subset B$ ise H ve K ile üretilen alt grup bunların serbest çarpımıdır. Yani $\langle H,K \rangle = H * K$ dır, [21].

2.8.12 Tanım : $A = \langle a_1,...; R_1,... \rangle$ ve $B = \langle b_1,...; S_1,... \rangle$ iki grup, $H \subset A$, $K \subset B$ has alt grupları ve $\Phi : H \to K$ bir izomorfizm olsun. A ve B nin, H yi K ya birleştirerek elde edilen serbest çarpımı, gösterimi

$$G = \langle a_1,..., b_1,...; R_1,..., S_1,..., H = \Phi(H) \rangle$$

olan G grubudur. G grubunun üreteçleri A ve B nin üreteçlerinin ayrık birleşimidir ve bağıntıları da A ve B nin bağıntıları ile birlikte alt grup izomorfizmini veren bağıntıların ek bir kümesinden oluşur.

H izomorfik resmi ile özdeşlendiği için G, A ve B gruplarının H ile *birleştirilmiş serbest çarpımıdır* denir. Bu çarpım $G = A *_H B$ ile gösterilir. A ile B gruplarına G nin çarpanları denir, [4].

Bir G grubu eğer aşikar olmayan bir H has alt grubu ve her ikisi de aşikar olmayan G_1 ve G_2 grupları için $G = G_1 *_H G_2$ ise G birleştirilmiş bir serbest çarpımdır.

H={1} alınırsa bir serbest çarpım elde edilir. Bu nedenle serbest çarpımlar, birleştirilmiş serbest çarpımların özel halleridir.

2.9 Hecke Grupları

Eric Hecke, 1936 yılında "Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch ihre Funktionalgleichung" adlı çalışmasında Hecke gruplarını aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

2.9.1 Tanım : λ sabit bir pozitif reel sayı olmak üzere,

$$T(z) = -\frac{1}{z} \qquad \text{ve} \qquad U(z) = z + \lambda$$

kesirli doğrusal dönüşümleri ile üretilen gruplara *Hecke grupları* denir ve $H(\lambda)$ ile gösterilir, [4].

Burada $S = T.U$ alınırsa

$$S(z) = -\frac{1}{z+\lambda}$$

elde edilir.

2.9.2 Teorem : $H(\lambda)$ Hecke gruplarının ayrık olması için gerekli ve yeterli koşul $\lambda \geq 2$ bir reel sayı veya $\lambda = \lambda_q = 2\cos\frac{\pi}{q}$, ($q \geq 3$ bir tamsayı) olmasıdır, [1].

$\lambda \geq 2$ değerleriyle elde edilen Hecke grupları için $H(\lambda)$ gösterimi kullanılır. $\lambda = \lambda_q = 2\cos\frac{\pi}{q}$, $1 \leq \lambda < 2$, durumuna karşılık gelen Hecke grupları $H(\lambda_q)$ ile gösterilir.

2.9.3 Teorem : $H(\lambda_q)$ Hecke gruplarının grup gösterimi,

$$H(\lambda_q) = \langle T, S \mid T^2 = S^q = I \rangle \cong C_2 * C_q$$

şeklinde, 2 mertebeli devirli grup ile q mertebeli devirli grubun serbest çarpımıdır, [4].

3. BÖLÜM

Conder ve Dobcsányi [13] nolu makalede $4 \leq q \leq 12$ değerlerine karşılık gelen Hecke gruplarının sonlu indeksli normal alt gruplarının sayısını düşük indeksli alt grup algoritmasını kullanarak bulmuştur. Bu bölümde Conder ve Dobcsányi'nin makalesindeki sonuçları kullanarak $q = 4$ durumuna karşılık gelen 24 indekse kadar normal altgruplarının üreteçleri permütasyon metodu, Riemann-Huwitz formülü ve Reidemeister-Scheier metodu kullanılarak grup gösterimleri ve simgeleri bulundu.

3.1 $\mathrm{H}(\lambda_4)$ Hecke Grubunun Sonlu İndeksli Alt Grupları

3.1.1 Teorem: $\mathrm{H}(\lambda_4)$ Hecke grubu, 2 indeksli 3 tane normal alt gruba sahiptir. Bu normal alt gruplar

i) $\mathrm{N}_1 = \ \mathrm{TS},\ \mathrm{ST}|\ \ \mathrm{TS.ST}\ {}^2 = \mathrm{I}\ \ \cong \mathrm{C}_2 * \mathbb{Z}$

ii) $\mathrm{N}_2 = \ \mathrm{S},\ \mathrm{TST}|\ \ \mathrm{S}\ {}^4 = \ \mathrm{TST}\ {}^4 = \mathrm{I}\ \ \cong \mathrm{C}_4 * \mathrm{C}_4$

iii) $\mathrm{N}_3 = \ \mathrm{T}, \mathrm{S}^2,\ \mathrm{STS}^3|\ \ \mathrm{T}\ {}^2 = \ \mathrm{S}^2\ {}^2 = \ \mathrm{STS}^3\ {}^2 = \mathrm{I}\ \ \cong \mathrm{C}_2 * \mathrm{C}_2 * \mathrm{C}_2$

biçimindedir. Ayrıca bu alt grupların simgeleri sırasıyla; $0;\ 2\ {}^1, \infty\ {}^2$, $0;\ 4\ {}^2, \infty$, $0;\ 2\ {}^3, \infty$ şeklindedir.

İspat: Eğer N, $\mathrm{H}(\lambda_4)$ Hecke grubunun 2 indeksli normal alt grubu ise $\mathrm{H}(\lambda_4)/\mathrm{N}$ bölüm grubu $g_1; 2, 2, 1$, $g_2; 2, 1, 2$, $g_3; 1, 2, 2$ simgelerinden birine sahiptir.

i) Eğer $H(\lambda_4)/N_1$ bölüm grubu $g_1; 2, 2, 1$ simgeli ise

$$H(\lambda_4)/N_1 = \quad T, S | T^2 = S^2 = \quad TS \quad = I \quad \cong C_2$$

olur. Burada TS=I (T=S) olduğunu düşünürsek transversalini $\quad = I, T$ seçebiliriz. Böylece aşağıdaki çarpımları elde ederiz.

$$I.T.(T)^{-1} = I, \qquad I.S.(T)^{-1} = ST,$$

$$T.T.(I)^{-1} = I, \qquad T.S.(I)^{-1} = TS,$$

Sonuç olarak N_1 normal alt grubunun gösterimi;

$$N_1 = \quad TS, ST | \quad TS.ST \ ^2 = I \quad \cong C_2 * \mathbb{Z}$$

olarak bulunur. Şimdi Rienmann Hurwitz formülünden N_1 normal alt grubunun simgesini bulalım.

$$\frac{\mu(N_1)}{\mu(H(\lambda_4))} = \quad H \ \lambda_4 : N_1 \quad = 2$$

$$2 = \frac{2g_1 - 2 + (1 - \frac{1}{2}) + 2 \quad .2\pi}{2.0 - 2 + (1 - \frac{1}{2}) + (1 - \frac{1}{4}) + 1 \quad .2\pi}$$

buradan $g_1 = 0$ elde edilir. O halde N_1 normal alt grubunun simgesi $(0; 2^{\ 1}, \infty^{\ 2})$ olarak bulunur.

ii) Eğer $H(\lambda_4)/N_2$ bölüm grubu $g_2; 2, 1, 2$ simgeli ise

$$H(\lambda_4)/N_2 = \quad T, S | T^2 = S^1 = \quad TS \ ^2 = I \quad \cong C_2$$

olur. Burada S=I olduğu görülür. $\quad = I, T$ transversalini seçersek aşağıdaki çarpımları elde ederiz.

$$\text{I.T.(T)}^{-1} = \text{I}, \qquad \text{I.S.(I)}^{-1} = \text{S},$$

$$\text{T.T.(I)}^{-1} = \text{I}, \qquad \text{T.S.(T)}^{-1} = \text{TST},$$

Böylece N_2 normal alt grubunun gösterimi;

$$N_2 = \; S, TST| \; S^{\;4} = \; TST^{\;4} = I \; \cong C_4 * C_4$$

olarak bulunur. Şimdi Rienmann Hurwitz formülünden N_2 normal alt grubunun simgesini bulalım.

$$\frac{\mu(N_1)}{\mu(H(\lambda_4))} = \; H \; \lambda_4 : N_1 \; = 2$$

$$2 = \frac{2g_2 - 2 + (1 - \frac{1}{4}) + (1 - \frac{1}{4}) + 1 \; .2\pi}{2.0 - 2 + (1 - \frac{1}{2}) + (1 - \frac{1}{4}) + 1 \; .2\pi}$$

buradan $g_2 = 0$ elde edilir. O halde N_2 normal alt grubunun simgesi $(0; 4^{\;2}, \infty)$ olarak bulunur.

iii) Eğer $H(\lambda_4)/N_3$ bölüm grubu $g_3; 1, 2, 2$ simgeli ise

$$H(\lambda_4)/N_3 = \; T, S|T^1 = S^2 = \; TS^{\;2} = I \; \cong C_2$$

olur. Burada T=I olduğunu düşünürsek ve $\; = \; I, S$ transversalini seçersek aşağıdaki çarpımları elde ederiz.

$$\text{I.T.(I)}^{-1} = \text{T}, \qquad \text{I.S.(S)}^{-1} = \text{I},$$

$$\text{S.T.(S)}^{-1} = \text{STS}^3, \qquad \text{S.S.(I)}^{-1} = \text{S}^2.$$

Böylece N_3 normal alt grubunun gösterimi;

$$\mathrm{N}_3 = \ \mathrm{T}, \mathrm{S}^2, \mathrm{STS}^3 | \ \mathrm{T}\ ^2 = \ \mathrm{S}^2\ ^2 = \ \mathrm{STS}^3\ ^2 = \mathrm{I} \ \cong \mathrm{C}_2 * \mathrm{C}_2 * \mathrm{C}_2$$

olarak bulunur. Şimdi Rienmann Hurwitz formülünden N_3 normal alt grubunun simgesini bulalım.

$$\frac{\mu(\mathrm{N}_3)}{\mu(\mathrm{H}(\lambda_4))} = \ \mathrm{H}\ \lambda_4 : \mathrm{N}_3 \ = 2$$

$$2 = \frac{2g_3 - 2 + \ 1 - \frac{1}{2} \ + \ 1 - \frac{1}{2} \ + \ 1 - \frac{1}{2} \ + 1 \ .2\pi}{2.0 - 2 + (1 - \frac{1}{2}) + (1 - \frac{1}{4}) + 1 \ .2\pi}$$

buradan $g_3 = 0$ elde edilir. O halde N_2 normal alt grubunun simgesi $(0; 2\ ^3, \infty)$ olarak bulunur.❑

3.1.2 Teorem: $\mathrm{H}(\lambda_4)$ Hecke grubu, 4 indeksli 3 tane normal alt gruba sahiptir. Bu normal alt gruplar

i) $\mathrm{N}_1 = \ \mathrm{S}^2, \mathrm{TS}^2\mathrm{T}, \mathrm{TSTS}^3 | \ \mathrm{S}^2\ ^2 = \ \mathrm{TS}^2\mathrm{T}\ ^2 = \ \mathrm{TSTS}^3\ ^\infty = \mathrm{I} \ \cong \mathrm{C}_2 * \mathrm{C}_2 * \mathbb{Z}$

ii) $\mathrm{N}_2 = \ \mathrm{T}, \mathrm{STS}^3, \mathrm{S}^2\mathrm{TS}^2, \mathrm{S}^3\mathrm{TS} | \ \mathrm{T}^2 = \ \mathrm{STS}^3\ ^2 = \ \mathrm{S}^2\mathrm{TS}^2\ ^2 = \ \mathrm{S}^3\mathrm{TS}\ ^2 = \mathrm{I} \ \cong \mathrm{C}_2 * \mathrm{C}_2 * \mathrm{C}_2 * \mathrm{C}_2$

iii) $\mathrm{N}_3 = \ \mathrm{TS}^2, \mathrm{STS} | -$

biçimindedir. Ayrıca bu alt grupların simgeleri sırasıyla; $0;\ 2\ ^2, \infty\ ^2 \ ,\ 0;\ 2\ ^4, \infty \ ,\ 1;\ \infty$ şeklindedir.

İspat: Eğer N, $\mathrm{H}(\lambda_4)$ Hecke grubunun 4 indeksli normal alt grubu ise $\mathrm{H}(\lambda_4)/\mathrm{N}$ bölüm grubu $g_1; 2,2,2$, $g_2; 1,4,4$, $g_3; 2,4,4$ simgelerinden birine sahiptir.

i) Eğer $\mathrm{H}(\lambda_4)/\mathrm{N}_1$ bölüm grubu $g_1; 2,2,2$ simgeli ise

$$H(\lambda_4)/N_1 = \langle T, S | T^2 = S^2 = (TS)^2 = I \rangle \cong C_2 \times C_2$$

olur. Burada ve $= \{I, T, S, TS\}$ transversalini seçersek aşağıdaki çarpımları buluruz.

$$
\begin{array}{ll}
I.T.(T)^{-1} = I, & I.S.(S)^{-1} = I, \\
T.T.(I)^{-1} = I, & T.S.(TS)^{-1} = I, \\
S.T.(TS)^{-1} = STS^3T, & S.S.(I)^{-1} = S^2, \\
T.S.T.(S)^{-1} = TSTS^3, & T.S.S.(T)^{-1} = TS^2T.
\end{array}
$$

Böylece N_1 normal alt grubunun gösterimi

$$N_1 = \langle S^2, TS^2T, TSTS^3 | (S^2)^2 = (TS^2T)^2 = (TSTS^3)^\infty = I \rangle \cong C_2 * C_2 * \mathbb{Z}$$

olarak bulunur. Şimdi Rienmann-Hurwitz formülünden N_1 normal alt grubunun simgesini bulalım.

$$\frac{\mu(N_1)}{\mu(H(\lambda_4))} = |H(\lambda_4) : N_1| = 4$$

$$4 = \frac{\left(2g_1 - 2 + (1 - \frac{1}{2}) + (1 - \frac{1}{2}) + 2\right).2\pi}{\left(2.0 - 2 + (1 - \frac{1}{2}) + (1 - \frac{1}{4}) + 1\right).2\pi}$$

buradan $g_1 = 0$ elde edilir. O halde N_1 normal alt grubunun simgesi $(0; 2^{(2)}, \infty^{(2)})$ olarak bulunur.

ii) Eğer $H(\lambda_4)/N_2$ bölüm grubu $(g_1; 1, 4, 4)$ simgeli ise

$$H(\lambda_4)/N_2 = \langle T, S | T^1 = S^4 = (TS)^4 = I \rangle \cong C_4$$

olur. Burada ve $= I, S, S^2, S^3$ transversalini seçersek ve T=I olduğunu düşünürsek aşağıdaki çarpımları buluruz.

$$
\begin{array}{ll}
I.T.\ I^{-1}=T, & I.S.\ S^{-1}=I, \\
S.T.\ S^{-1}=STS^3, & S.S.\ S^{2\ -1}=I, \\
S^2.T.\ S^{2\ -1}=S^2TS^2, & S^2.S.\ S^{3\ -1}=I, \\
S^3.T.\ S^{3\ -1}=S^3TS, & S^3.S.\ I^{-1}=I.
\end{array}
$$

Böylece N_2 normal alt grubunun gösterimi;

$$
\begin{aligned}
N_2 = \ & T, STS^3, S^2TS^2, S^3TS \mid T^2 = \ STS^3\ ^2 = \ S^2TS^2\ ^2 = \ S^3TS\ ^2 = I \\
& \cong C_2 * C_2 * C_2 * C_2
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. Şimdi Rienmann-Hurwitz formülünden N_2 normal grubunun simgesini bulalım.

$$\frac{\mu(N_2)}{\mu(H(\lambda_4))} = H\ \lambda_4 : N_2 \ = 4$$

$$4 = \frac{2g_2 - 2 + (1-\frac{1}{2}) + (1-\frac{1}{2}) + (1-\frac{1}{2}) + (1-\frac{1}{2}) + 1\ .2\pi}{2.0 - 2 + (1-\frac{1}{2}) + (1-\frac{1}{4}) + 1\ .2\pi}$$

buradan $g_2 = 0$ elde edilir. O halde N_2 normal alt grubunun simgesi $(0; 2^{\ 4}, \infty)$ olarak bulunur.

iii) Eğer $H(\lambda_4)/N_3$ bölüm grubu $g_3; 2, 4, 4$ simgeli ise

$$H(\lambda_4)/N_3 = \ T, S \mid T^2 = S^4 = \ TS\ ^4 = I \ \cong C_4$$

olur. Burada ve $= I, S, S^2, S^3$ transversalini seçersek ve T=S^2 olduğunu düşünürsek aşağıdaki çarpımları buluruz.

I.T. S^2 $^{-1}$=TS^2, I.S. S $^{-1}$=I,

S.T. S^3 $^{-1}$=STS, S.S. S^2 $^{-1}$=I,

S^2.T. I $^{-1}$=S^2T, S^2.S. S^3 $^{-1}$=I,

S^3.T. S $^{-1}$=S^3TS^3, S^3.S. I $^{-1}$=I.

Böylece N_3 normal alt grubunun gösterimi;

$$N_3 = \ TS^2, STS| -$$

olarak bulunur. Şimdi Rienmann-Hurwitz formülünden N_3 normal alt grubunun simgesini bulalım.

$$\frac{\mu(N_3)}{\mu(H(\lambda_4))} = \ H \ \lambda_4 \ :N_3 \ = 4$$

$$4 = \frac{2g_3 - 2 + 1 \ .2\pi}{2.0 - 2 + (1 - \frac{1}{2}) + (1 - \frac{1}{4}) + 1 \ .2\pi}$$

buradan $g_3 = 1$ elde edilir. O halde N_3 normal alt grubunun simgesi $(1; \infty)$ olarak bulunur. ❑

3.1.3 Teorem: $H(\lambda_4)$ Hecke grubu, 6 indeksli 1 tane normal alt gruba sahiptir. Bu normal alt grup

$$N= \ a_1, \ a_2, \ a_3, a_4| \ \ a_2 \ ^2 = \ \ a_3 \ ^2 = \ \ a_4 \ ^2 = I$$

şeklindedir. Bu normal alt grubun simgesi de $(0; 2^{\ 3}, \infty^{\ 2})$ biçimindedir.

İspat: Eğer N, $H(\lambda_4)$ Hecke grubunun 6 indeksli normal alt grubu ise $H(\lambda_4)/N$ bölüm grubu $g; 2, 2, 3$ simgesine sahiptir. Bu durumda,

$$H(\lambda_4)/N= \ T,S|T^2 = S^2 = \ TS^{\ 3} = I \ \cong D_3$$

olur. Burada $\ = \ I, T, S, \ TS, TST, TSTS$ transversalini seçersek aşağıdaki çarpımları buluruz.

$I.T. \ T^{-1} = I,$	$I.S. \ S^{-1}=I,$
$T.T. \ I^{-1} = I,$	$T.S. \ TS^{-1}=I,$
$S.T. \ TSTS^{-1} = STS^3TS^3T,$	$S.S. \ I^{-1}=S^2,$
$TS.T. \ TST^{-1} = I,$	$TS.S. \ T^{-1}=TS^2T,$
$TST.T. \ TS^{-1} = I,$	$TST.S. \ TSTS^{-1}=I,$
$TSTS.T. \ S^{-1} = TSTSTS^3,$	$TSTS.S. \ TST^{-1}=TSTS^2TS^3T.$

Burada $STS^3TS^3T^{-1} = TSTSTS^3$ olduğundan, N normal alt grubunun üreteçleri $a_1 = TSTSTS^3, a_2 = S^2, \ a_3 = TS^2T$ ve $a_4 = TSTS^2TS^3T$ olarak bulunur. Ayrıca grup gösterimi

$$N= a_1, \ a_2, \ a_{3,} \ a_4| \ \ a_2^{\ 2} = \ \ a_3^{\ 2} = \ \ a_4^{\ 2} = I$$

şeklinde olur. Şimdi Rienmann-Hurwitz formülünden N normal alt grubunun simgesini bulalım.

$$\frac{\mu(N)}{\mu(H(\lambda_4))} = \ H \ \lambda_4 :N \ = 6$$

$$6 = \frac{2g-2+ \ 1-\frac{1}{2} \ + \ 1-\frac{1}{2} \ + \ 1-\frac{1}{2} \ +2 \ .2\pi}{2.0-2+(1-\frac{1}{2})+(1-\frac{1}{4})+1 \ .2\pi}$$

$g = 0$ elde edilir. O halde N normal alt grubunun simgesi $(0; 2^{\ 3}, \infty^{\ 2})$ olarak bulunur. ❑

3.1.4 Teorem: $H(\lambda_4)$ Hecke grubu, 8 indeksli 3 tane normal alt gruba sahiptir. Bu normal alt gruplar

i) $N_1 = \ TSTS, TS^2TS^2, TS^3TS^3| \ -$

ii) $N_2 = \ TSTS^3, TS^2TS^2, TS^3TS| \ -$

iii) $N_3 = \ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5| \quad a_2\ ^2 = \ a_3\ ^2 = \ a_4\ ^2 = \ a_5\ ^2 = I$

biçimindedir. Ayrıca bu alt grupların simgeleri sırasıyla; $0; \infty\ ^4 \quad 1; \infty\ ^2$, $0;\ 2\ ^4, \infty\ ^2$ şeklindedir.

İspat: Eğer N, $H(\lambda_4)$ Hecke grubunun 8 indeksli normal alt grubu ise $H(\lambda_4)/N$ bölüm grubu $g_1; 2,4,2$, $g_2; 2,4,4$, $g_3; 2,2,4$ simgelerinden birine sahiptir.

i) Eğer $H(\lambda_4)/N_1$ bölüm grubu $g_1; 2,4,2$ simgeli ise

$$H(\lambda_4)/N_1 = \ T, S|T^2 = S^4 = \ TS\ ^2 = I \ \cong D_4$$

olur. Burada ve $= \ I, T, S, S^2, S^3, TS, ST, TS^2$ transversalini seçersek aşağıdaki çarpımları buluruz.

$I.T.\ T\ ^{-1} = I,$	$I.S.\ S\ ^{-1} = I,$
$T.T.\ I\ ^{-1} = I,$	$T.S.\ TS\ ^{-1} = I,$
$S.T.\ ST\ ^{-1} = I,$	$S.S.\ S^2\ ^{-1} = I,$
$S^2.T.\ TS^2\ ^{-1} = S^2TS^2T,$	$S^2.S.\ S^3\ ^{-1} = I,$
$S^3.T.\ TS\ ^{-1} = S^3TS^3T,$	$S^3.S.\ I\ ^{-1} = I,$
$TS.T.\ S^3\ ^{-1} = TSTS,$	$TS.S.\ TS^2\ ^{-1} = I,$
$ST.T.\ S\ ^{-1} = I,$	$ST.S.\ T\ ^{-1} = STST,$
$TS^2.T.\ S^2\ ^{-1} = TS^2TS^2,$	$TS^2.S.\ ST\ ^{-1} = TS^3TS^3.$

Burada $S^2TS^2T^{-1} = TS^2TS^2$, S^3TS^3T, $^{-1} = TSTS$ ve $STST^{-1} = TS^3TS^3$ olduğundan , N_1 normal alt grubunun gösterimi

$$N_1 = \quad TSTS, TS^2TS^2, TS^3TS^3 | -$$

olarak bulunur. Şimdi Rienmann-Hurwitz formülünden N_1 normal alt grubunun simgesini bulalım.

$$\frac{\mu(N_1)}{\mu(H(\lambda_4))} = \ H\ \lambda_4 : N_1 \ = 8$$

$$8 = \frac{2g_1 - 2 + 4\ .2\pi}{2.0 - 2 + (1 - \frac{1}{2}) + (1 - \frac{1}{4}) + 1\ \ .2\pi}$$

buradan $g_1 = 0$ elde edilir. O halde N_1 normal alt grubunun simgesi $(0; \infty^{\ 4})$ olarak bulunur.

ii) Eğer $H(\lambda_4)/N_2$ bölüm grubu $g_2; 2, 4, 4$ simgeli ise,
$H(\lambda_4)/N_2 = \ T, S | T^2 = S^4 = \ TS^{\ 4} = I \ \cong C_2 \times C_4$

olur. Burada ve $= \ I, T, S, S^2, S^3, TS, TS^2, TS^3$ transversalini seçersek aşağıdaki çarpımları buluruz.

$I.T.\ T^{-1} = I$,	$I.S.\ S^{-1} = I$,
$T.T.\ I^{-1} = I$,	$T.S.\ TS^{-1} = I$,
$S.T.\ TS^{-1} = STS^3T$,	$S.S.\ S^{2\ -1} = I$,
$S^2.T.\ TS^{2\ -1} = S^2TS^2T$,	$S^2.S.\ S^{3\ -1} = I$,
$S^3.T.\ TS^{3\ -1} = S^3TST$,	$S^3.S.\ I^{-1} = I$,
$TS.T.\ S^{-1} = TSTS^3$,	$TS.S.\ TS^{2\ -1} = I$,
$TS^2.T.\ S^{2\ -1} = TS^2TS^2$,	$TS^2.S.\ TS^{3\ -1} = I$,
$TS^3.T.\ S^{3\ -1} = TS^3TS$,	$TS^3.S.\ T^{-1} = I$.

Burada $S^2TS^2T^{-1} = TS^2TS^2$, $S^3TST,^{-1} = TS^3TS$ ve $STS^3T^{-1} = TSTS^3$ olduğundan , N_2 normal alt grubunun gösterimi

$$N_2 = \langle TSTS^3, TS^2TS^2, TS^3TS | - \rangle$$

olarak bulunur. Şimdi Rienmann-Hurwitz formülünden N_2 normal alt grubunun simgesini bulalım.

$$\frac{\mu(N_2)}{\mu(H(\lambda_4))} = |H(\lambda_4) : N_2| = 8$$

$$8 = \frac{(2g_2 - 2 + 2).2\pi}{(2.0 - 2 + (1 - \frac{1}{2}) + (1 - \frac{1}{4}) + 1).2\pi}$$

buradan $g_2 = 1$ elde edilir. O halde N_2 normal alt grubunun simgesi $(1; \infty^{2})$ olarak bulunur.

iii) Eğer $H(\lambda_4)/N_3$ bölüm grubu $(g_3; 2, 2, 4)$ simgeli ise

$$H(\lambda_4)/N_3 = \langle T, S | T^2 = S^2 = (TS)^4 = I \rangle \cong D_4$$

olur. Burada ve $= \{I, T, S, TS, TST, TSTS, TSTST, TSTSTS\}$ transversalini seçersek aşağıdaki çarpımları buluruz.

$I.T.(T)^{-1} = I$, $I.S.(S)^{-1}=I$,

$T.T.(I)^{-1} = I$, $T.S.(TS)^{-1}=I$,

$S.T.((TS)^3)^{-1} = ST(S^3T)^3$, $S.S.(I)^{-1}=S^2$,

$TS.T.(TST)^{-1} = I$, $TS.S.(T)^{-1} = TS^2T$,

$TST.T.(TS)^{-1} = I$, $TST.S.(TSTS)^{-1}=I$,

$TSTS.T.(TSTST)^{-1} = I$, $TSTS.S.(TST)^{-1}=TSTS^2TS^3T$,

$TSTST.T.(TSTS)^{-1}=I$, $TSTST.S.(TSTSTS)^{-1} = I$,

$TSTSTS.T.(S)^{-1} = (TS)^3TS^3$, $(TS)^3.S.(TSTST)^{-1} = (TS)^2TS^2T(S^3T)^2$.

Burada $STS^3TS^3TS^3T^{-1} = TSTSTSTS^3$ olduğundan N_3 normal alt grubunun üreteçleri $a_1 = TSTSTSTS^3$, $a_2 = S^2$, $a_3 = TS^2T$, $a_4 = TSTS^2TS^3T$, $a_5 = (TS)^2TS^2T(S^3T)^2$ olarak bulunur. Buradan grup gösterimi

$$N_3 = a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \mid a_2^{\ 2} = a_3^{\ 2} = a_4^{\ 2} = a_5^{\ 2} = I$$

şeklinde olur. Şimdi Rienmann-Hurwitz formülünden N_3 normal alt grubunun simgesini bulalım.

$$\frac{\mu(N_3)}{\mu(H(\lambda_4))} = H\ \lambda_4 : N_3 = 8$$

$$8 = \frac{2g_3 - 2 + 2\ .2\pi}{2.0 - 2 + (1 - \frac{1}{2}) + (1 - \frac{1}{4}) + 1\ .2\pi}$$

buradan $g_3 = 0$ elde edilir. O halde N_3 normal alt grubunun simgesi $0;\ 2^{\ 4}, \infty^{\ 2}$ olarak bulunur. ❑

3.1.5 Teorem: $H(\lambda_4)$ Hecke grubu, 10 indeksli 1 tane normal alt gruba sahiptir. Bu normal alt grup

$$N = a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \mid a_2^{\ 2} = a_3^{\ 2} = a_4^{\ 2} = a_5^{\ 2} = a_6^{\ 2} = I$$

Ayrıca bu alt grubun simgesi $0; 2^{\ 5}, \infty^{\ 2}$ şeklindedir.

İspat: Eğer N, $H(\lambda_4)$ Hecke grubunun 10 indeksli normal alt grubu ise $H(\lambda_4)/N$ bölüm grubu $g; 2, 2, 5$ simgesine sahiptir. Bu durumda,

$$H(\lambda_4)/N = T, S \mid T^2 = S^2 = TS^{\ 5} = I \ \cong D_5$$

olur. Burada $= I, T, S, TS, TST, TSTS, TSTST, TSTSTS, TSTSTST, TSTSTSTS$ transversalini seçersek aşağıdaki çarpımları buluruz.

I.T. $T^{-1} = I$,	I.S. $S^{-1}=I$,
T.T. $I^{-1} = I$,	T.S. $TS^{-1}=I$,
S.T. $(TS)^{4\ -1} = ST(S^3T)^4$,	S.S. $I^{-1}=S^2$,
TS.T. $TST^{-1} = I$,	TS.S. $T^{-1}=TS^2T$,
TST.T. $TS^{-1} = I$,	TST.S. $TSTS^{-1} = I$,
TSTS.T. $TSTST^{-1} = I$,	TSTS.S. $TST^{-1}=TSTS^2TS^3T$,
TSTST.T. $TSTS^{-1} = I$,	TSTST.S. $TSTSTS^{-1} = I$,
TSTSTS.T. $TSTSTST^{-1} = I$,	TSTSTS.S. $TSTST^{-1} = (TS)^2TS^2T(S^3T)^2$,
TSTSTST.T. $TSTSTS^{-1} = I$,	TSTSTST.S. $TSTSTSTS^{-1} = I$,
$(TS)^4$.T. $S^{-1} = (TS)^4TS^3$,	$(TS)^4$.S. $TSTSTST^{-1}=(TS)^3TS^2T(S^3T)^3$.

Burada $ST(S^3T)^{4\ -1} = (TS)^4TS^3$ olduğundan, N normal alt grubunun üreteçleri $a_1 =$ TSTSTSTS^3, $a_2 = S^2$, $a_3 = TS^2T$, $a_4 = TSTS^2TS^3T$ $a_5 = (TS)^2TS^2T(S^3T)^2$, $a_6 = (TS)^3TS^2T(S^3T)^3$ olarak bulunur. Ayrıca grup gösterimi

$$N= a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 | \quad a_2{}^2 = a_3{}^2 = a_4{}^2 = a_5{}^2 = a_6{}^2 = I$$

şeklinde olur. Şimdi Rienmann-Hurwitz formülünden N normal alt grubunun simgesini bulalım.

$$\frac{\mu(N)}{\mu(H(\lambda_4))} = H\ \lambda_4 : N = 10$$

$$10 = \frac{2g-2+5.\ 1-\frac{1}{2}\ +2\ .2\pi}{2.0-2+(1-\frac{1}{2})+(1-\frac{1}{4})+1\ .2\pi}$$

$g = 0$ elde edilir. O halde N normal alt grubunun simgesi $(0; 2^5, \infty^2)$ olarak bulunur. ❑

3.1.6 Teorem: $H(\lambda_4)$ Hecke grubu, 12 indeksli 1 tane normal alt gruba sahiptir. Bu normal alt grup

$$N = a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 | \ a_2{}^2 = a_3{}^2 = a_4{}^2 = a_5{}^2 = a_6{}^2 = a_7{}^2 = I$$

Ayrıca bu alt grubun simgesi $0; 2^6, \infty^2$ şeklindedir.

İspat: Eğer N, $H(\lambda_4)$ Hecke grubunun 12 indeksli normal alt grubu ise $H(\lambda_4)/N$ bölüm grubu $g; 2, 2, 6$ simgesine sahiptir. Bu durumda,

$$H(\lambda_4)/N = T, S | T^2 = S^2 = TS^6 = I \cong D_6$$

olur. Burada

$= \{I, T, S, TS, TST, TSTS, TSTST, TSTSTS, TSTSTST, TSTSTSTS, TSTSTSTST,$

$TSTSTSTSTS\}$ transversalini seçersek aşağıdaki çarpımları buluruz.

$I.T.\ T^{-1} = I,$	$I.S.\ S^{-1} = I,$
$T.T.\ I^{-1} = I,$	$T.S.\ TS^{-1} = I,$
$S.T.\ (TS)^{5\ -1} = ST(S^3T)^5,$	$S.S.\ I^{-1} = S^2,$
$TS.T.\ TST^{-1} = I,$	$TS.S.\ T^{-1} = TS^2T,$
$TST.T.\ TS^{-1} = I,$	$TST.S.\ TSTS^{-1} = I,$
$TSTS.T.\ TSTST^{-1} = I,$	$TSTS.S.\ TST^{-1} = TSTS^2TS^3T,$
$TSTST.T.\ TSTS^{-1} = I,$	$TSTST.S.\ TSTSTS^{-1} = I,$
$TSTSTS.T.\ TSTSTST^{-1} = I,$	$TSTSTS.S.\ TSTST^{-1} = (TS)^2TS^2T(S^3T)^2,$
$TSTSTST.T.\ TSTSTS^{-1} = I,$	$TSTSTST.S.\ TSTSTSTS^{-1} = I,$
$(TS)^4.T.\ (TS)^4T^{-1} = I,$	$(TS)^4.S.\ TSTSTST^{-1} = (TS)^3TS^2T(S^3T)^3,$
$(TS)^4T.T.\ (TS)^{4\ -1} = I,$	$(TS)^4T.S.\ TSTSTST^{-1} = I,$
$(TS)^5.T.\ S^{-1} = (TS)^5TS^3,$	$(TS)^5.S.\ (TS)^4T^{-1} = (TS)^4TS^2T(S^3T)^4.$

Burada $ST(S^3T)^{5\ -1} = (TS)^5TS^3$olduğundan, N normal alt grubunun üreteçleri $a_1 = TSTSTSTS^3, a_2 = S^2,\ a_3 = TS^2T, a_4 = TSTS^2TS^3T, a_5 = (TS)^2TS^2T(S^3T)^2,\ a_6 = (TS)^3TS^2T(S^3T)^3,\ a_7 = (TS)^4TS^2T(S^3T)^4$ olarak bulunur. Ayrıca grup gösterimi

$$N = a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 | \ a_2{}^2 = a_3{}^2 = a_4{}^2 = a_5{}^2 = a_6{}^2 = a_7{}^2 = I$$

şeklinde olur. Şimdi Rienmann-Hurwitz formülünden N normal alt grubunun simgesini bulalım.

$$\frac{\mu(N)}{\mu(H(\lambda_4))} = H\ \lambda_4 : N = 12$$

$$12 = \frac{2g - 2 + 6.\ 1 - \frac{1}{2}\ + 2\ .2\pi}{2.0 - 2 + (1 - \frac{1}{2}) + (1 - \frac{1}{4}) + 1\ .2\pi}$$

$g = 0$ elde edilir. O halde N normal alt grubunun simgesi $(0; 2^{\ 6}, \infty^{\ 2})$ olarak bulunur. ❑

3.1.7 Teorem: $H(\lambda_4)$ Hecke grubu, 14 indeksli 1 tane normal alt gruba sahiptir. Bu normal alt grup

$$N = a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8 | \ a_2{}^2 = a_3{}^2 = a_4{}^2 = a_5{}^2 = a_6{}^2 = a_7{}^2 = a_8{}^2 = I$$

Ayrıca bu alt grubun simgesi $\ 0; 2^{\ 7}, \infty^{\ 2}\ $ şeklindedir.

İspat: Eğer N, $H(\lambda_4)$ Hecke grubunun 14 indeksli normal alt grubu ise $H(\lambda_4)/N$ bölüm grubu $\ g; 2, 2, 7\ $ simgesine sahiptir. Bu durumda,

$$H(\lambda_4)/N = \ T, S | T^2 = S^2 = \ TS^{\ 7} = I \ \cong D_7$$

olur. Burada

= { I, T, S, TS, TST, TSTS, TSTST, TSTSTS, TSTSTST, TSTSTSTS, TSTSTSTST,

TSTSTSTSTS, TSTSTSTSTST, TSTSTSTSTSTS} transversalini seçersek aşağıdaki çarpımları buluruz.

$I.T.\ T^{-1} = I,$	$I.S.\ S^{-1} = I,$
$T.T.\ I^{-1} = I,$	$T.S.\ TS^{-1} = I,$
$S.T.\ (TS)^{6\ -1} = ST(S^3T)^6,$	$S.S.\ I^{-1} = S^2,$
$TS.T.\ TST^{-1} = I,$	$TS.S.\ T^{-1} = TS^2T,$
$TST.T.\ TS^{-1} = I,$	$TST.S.\ TSTS^{-1} = I,$
$TSTS.T.\ TSTST^{-1} = I,$	$TSTS.S.\ TST^{-1} = TSTS^2TS^3T,$
$TSTST.T.\ TSTS^{-1} = I,$	$TSTST.S.\ TSTSTS^{-1} = I,$
$TSTSTS.T.\ TSTSTST^{-1} = I,$	$TSTSTS.S.\ TSTST^{-1} = (TS)^2TS^2T(S^3T)^2,$
$TSTSTST.T.\ TSTSTS^{-1} = I,$	$TSTSTST.S.\ TSTSTSTS^{-1} = I,$
$(TS)^4.T.\ (TS)^4T^{-1} = I,$	$(TS)^4.S.\ TSTSTST^{-1} = (TS)^3TS^2T(S^3T)^3,$
$(TS)^4T.T.\ (TS)^{4\ -1} = I,$	$(TS)^4T.S.\ TSTSTST^{-1} = I,$
$(TS)^5.T.\ (TS)^5T^{-1} = I,$	$(TS)^5.S.\ (TS)^4T^{-1} = (TS)^4TS^2T(S^3T)^4,$
$(TS)^5T.T.\ (TS)^{5\ -1} = I,$	$(TS)^5T.S.\ TSTSTST^{-1} = I,$
$(TS)^6.T.\ (TS)^6T^{-1} = I,$	$(TS)^6.S.\ (TS)^5T^{-1} = (TS)^5TS^2T(S^3T)^5,$
$(TS)^6T.T.\ (TS)^{6\ -1} = I,$	$(TS)^6T.S.\ (TS)^{7\ -1} = I,$
$(TS)^6.T.\ S^{-1} = (TS)^6TS^3,$	$(TS)^7.S.\ (TS)^6T^{-1} = (TS)^6TS^2T(S^3T)^6.$

Burada $ST(S^3T)^{6\ -1} = (TS)^6TS^3$ olduğundan, N normal alt grubunun üreteçleri $a_1 = TSTSTSTS^3, a_2 = S^2,\ a_3 = TS^2T, a_4 = TSTS^2TS^3T, a_5 = (TS)^2TS^2T(S^3T)^2,\ a_6 = (TS)^3TS^2T(S^3T)^3,\ a_7 = (TS)^4TS^2T(S^3T)^4,\ a_8 = (TS)^5TS^2T(S^3T)^5$ olarak olarak bulunur. Ayrıca grup olarak bulunur.

$$N = a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8 \mid a_2{}^2 = a_3{}^2 = a_4{}^2 = a_5{}^2 = a_6{}^2 = a_7{}^2 = a_8{}^2 = I$$

şeklinde olur. Şimdi Rienmann-Hurwitz formülünden N normal alt grubunun simgesini bulalım.

$$\frac{\mu(\mathrm{N})}{\mu(\mathrm{H}(\lambda_4))} = \mathrm{H}\ \lambda_4 : \mathrm{N}\ = 14$$

$$14 = \frac{2g - 2 + 7.\ 1 - \frac{1}{2}\ + 2\ .2\pi}{2.0 - 2 + (1 - \frac{1}{2}) + (1 - \frac{1}{4}) + 1\ .2\pi}$$

$g = 0$ elde edilir. O halde N normal alt grubunun simgesi $(0; 2^{\ 7}, \infty^{\ 2})$ olarak bulunur.❑

3.1.8 Teorem: $\mathrm{H}(\lambda_4)$ Hecke grubu, 16 indeksli 0 cinsli 1 tane normal alt gruba sahiptir. Bu normal alt grup

$$\mathrm{N} = a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9 |\ a_2{}^2 = a_3{}^2 = a_4{}^2 = a_5{}^2 = a_6{}^2$$
$$= a_7{}^2 = a_8{}^2 = a_9{}^2 = \mathrm{I}$$

Ayrıca bu alt grubun simgesi $0; 2^{\ 8}, \infty^{\ 2}$ şeklindedir.

İspat: Eğer N, $\mathrm{H}(\lambda_4)$ Hecke grubunun 16 indeksli normal alt grubu ise $\mathrm{H}(\lambda_4)/\mathrm{N}$ bölüm grubu $g; 2, 2, 8$ simgesine sahiptir. Bu durumda,

$$\mathrm{H}(\lambda_4)/\mathrm{N} = \mathrm{T}, \mathrm{S} | \mathrm{T}^2 = \mathrm{S}^2 = \mathrm{TS}^{\ 8} = \mathrm{I}\ \cong \mathrm{D}_8$$

Burada

$= \{\mathrm{I}, \mathrm{T}, \mathrm{S}, \mathrm{TS}, \mathrm{TST}, \mathrm{TSTS}, \mathrm{TSTST}, \mathrm{TSTSTS}, \mathrm{TSTSTST}, \mathrm{TSTSTSTS}, \mathrm{TSTSTSTST},$

$\mathrm{TSTSTSTSTS}, \mathrm{TSTSTSTSTST}, \mathrm{TSTSTSTSTSTS}, \mathrm{TSTSTSTSTSTST}, \mathrm{TSTSTSTSTSTSTS}\}$ transversalini seçersek aşağıdaki çarpımları buluruz.

I.T. $T^{-1} = I$,	I.S. $S^{-1} = I$,
T.T. $I^{-1} = I$,	T.S. $TS^{-1} = I$,
S.T. $(TS)^{7\ -1} = ST(S^3T)^7$,	S.S. $I^{-1} = S^2$,
TS.T. $TST^{-1} = I$,	TS.S. $T^{-1} = TS^2T$,
TST.T. $TS^{-1} = I$,	TST.S. $TSTS^{-1} = I$,
TSTS.T. $TSTST^{-1} = I$,	TSTS.S. $TST^{-1} = TSTS^2TS^3T$,
TSTST.T. $TSTS^{-1} = I$,	TSTST.S. $TSTSTS^{-1} = I$,
TSTSTS.T. $TSTSTST^{-1} = I$,	TSTSTS.S. $TSTST^{-1} = (TS)^2TS^2T(S^3T)^2$,
TSTSTST.T. $TSTSTS^{-1} = I$,	TSTSTST.S. $TSTSTSTS^{-1} = I$,
$(TS)^4$.T. $(TS)^4T^{-1} = I$,	$(TS)^4$.S. $TSTSTST^{-1} = (TS)^3TS^2T(S^3T)^3$
$(TS)^4$T.T. $(TS)^{4\ -1} = I$,	$(TS)^4$T.S. $TSTSTST^{-1} = I$,
$(TS)^5$.T. $(TS)^5T^{-1} = I$,	$(TS)^5$.S. $(TS)^4T^{-1} = (TS)^4TS^2T(S^3T)^4$,
$(TS)^5$T.T. $(TS)^{5\ -1} = I$,	$(TS)^5$T.S. $TSTSTST^{-1} = I$,
$(TS)^6$.T. $(TS)^6T^{-1} = I$,	$(TS)^6$.S. $(TS)^5T^{-1} = (TS)^5TS^2T(S^3T)^5$,
$(TS)^6$T.T. $(TS)^{6\ -1} = I$,	$(TS)^6$T.S. $(TS)^{7\ -1} = I$,
$(TS)^7$.T. $S^{-1} = (TS)^7TS^3$,	$(TS)^7$.S. $(TS)^6T^{-1} = (TS)^6TS^2T(S^3T)^6$.

Burada $STS^3TS^3TS^3TS^3T^{-1} = TSTSTSTSTS^3$ olduğundan, N normal alt grubunun üreteçleri $a_1 = TSTSTSTS^3, a_2 = S^2$, $a_3 = TS^2T$ ve $a_4 = TSTS^2TS^3T$, $a_5 = (TS)^2TS^2T(S^3T)^2$, $a_6 = (TS)^3TS^2T(S^3T)^3$, $a_7 = (TS)^4TS^2T(S^3T)^4$, $a_8 = (TS)^5TS^2T(S^3T)^5$, $a_9 = (TS)^6TS^2T(S^3T)^6$ olarak olarak bulunur. Ayrıca grup gösterimi

$$N = a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9 \mid a_2^{\ 2} = a_3^{\ 2} = a_4^{\ 2} = a_5^{\ 2} = a_6^{\ 2} = a_7^{\ 2} = a_8^{\ 2} = a_9^{\ 2} = I$$

şeklinde olur. Şimdi Rienmann-Hurwitz formülünden N normal alt grubunun simgesini bulalım.

$$\frac{\mu(N)}{\mu(H(\lambda_4))} = H\ \lambda_4 : N\ = 16$$

$$16 = \frac{2g-2+8.\ 1-\frac{1}{2}\ +2\ .2\pi}{2.0-2+(1-\frac{1}{2})+(1-\frac{1}{4})+1\ .2\pi}$$

$g = 0$ elde edilir. O halde N normal alt grubunun simgesi $(0; 2^{8}, \infty^{2})$ olarak bulunur.❑

3.1.9 Teorem: $H(\lambda_4)$ Hecke grubu, 18 indeksli 1 tane normal alt gruba sahiptir. Bu normal alt grup

$$N = a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10} \mid a_2^{\ 2} = a_3^{\ 2} = a_4^{\ 2} = a_5^{\ 2} = a_6^{\ 2} = a_7^{\ 2} = a_8^{\ 2} = a_9^{\ 2} = a_{10}^{\ 2} = I$$

Ayrıca bu alt grubun simgesi $0; 2^{9}, \infty^{2}$ şeklindedir.

İspat: Eğer N, $H(\lambda_4)$ Hecke grubunun 18 indeksli normal alt grubu ise $H(\lambda_4)/N$ bölüm grubu $g; 2, 2, 9$ simgesine sahiptir. Bu durumda,

$$H(\lambda_4)/N = T, S \mid T^2 = S^2 = TS^{\ 9} = I \cong D_9$$

olur. Burada

$= \{$ I, T, S, TS, TST, TSTS, TSTST, TSTSTS, TSTSTST, TSTSTSTS, TSTSTSTST, TSTSTSTSTS, TSTSTSTSTST, TSTSTSTSTSTS, TSTSTSTSTSTST, TSTSTSTSTSTSTS, TSTSTSTSTSTSTST, TSTSTSTSTSTSTSTS$\}$ transversalini seçersek aşağıdaki çarpımları buluruz.

I.T. $T^{-1} = I$,	I.S. $S^{-1} = I$,
T.T. $I^{-1} = I$,	T.S. $TS^{-1} = I$,
S.T. $(TS)^{8\ -1} = ST(S^3T)^8$,	S.S. $I^{-1} = S^2$,
TS.T. $TST^{-1} = I$,	TS.S. $T^{-1} = TS^2T$,

$TST.T.\ TS^{-1} = I,$	$TST.S.\ TSTS^{-1} = I,$
$TSTS.T.\ TSTST^{-1} = I,$	$TSTS.S.\ TST^{-1}=TSTS^2TS^3T,$
$TSTST.T.\ TSTS^{-1} = I,$	$TSTST.S.\ TSTSTS^{-1} = I,$
$TSTSTS.T.\ TSTSTST^{-1} = I,$	$TSTSTS.S.\ TSTST^{-1} = (TS)^2TS^2T(S^3T)^2,$
$TSTSTST.T.\ TSTSTS^{-1} = I,$	$TSTSTST.S.\ TSTSTSTS^{-1} = I,$
$(TS)^4.T.\ (TS)^4T^{-1} = I,$	$(TS)^4.S.\ TSTSTST^{-1}=(TS)^3TS^2T(S^3T)^3,$
$(TS)^4T.T.\ (TS)^{4\ -1} = I,$	$(TS)^4T.S.\ TSTSTST^{-1} = I,$
$(TS)^5.T.\ (TS)^5T^{-1} = I,$	$(TS)^5.S.\ (TS)^4T^{-1}=(TS)^4TS^2T(S^3T)^4,$
$(TS)^5T.T.\ (TS)^{5\ -1} = I,$	$(TS)^5T.S.\ TSTSTST^{-1} = I,$
$(TS)^6.T.\ (TS)^6T^{-1} = I,$	$(TS)^6.S.\ (TS)^5T^{-1}=(TS)^5TS^2T(S^3T)^5,$
$(TS)^6T.T.\ (TS)^{6\ -1} = I,$	$(TS)^6T.S.\ (TS)^{7\ -1} = I,$
$(TS)^7.T.\ (TS)^7T^{-1} = I,$	$(TS)^7.S.\ (TS)^6T^{-1}=(TS)^6TS^2T(S^3T)^6,$
$(TS)^7T.T.\ (TS)^{7\ -1} = I,$	$(TS)^7T.S.\ (TS)^{8\ -1} = I,$
$(TS)^8.T.\ S^{-1}=(TS)^8TS^3,$	$(TS)^8.S.\ (TS)^7T^{-1}=(TS)^7TS^2T(S^3T)^7.$

Burada $ST(S^3T)^{8\ -1} = (TS)^8TS^3$ olduğundan, N normal alt grubunun üreteçleri $a_1 = TSTSTSTS^3, a_2 = S^2,\ a_3 = TS^2T$ ve $a_4 = TSTS^2TS^3T$, $a_5 = (TS)^2TS^2T(S^3T)^2,\ a_6 = (TS)^3TS^2T(S^3T)^3,\ a_7 = (TS)^4TS^2T(S^3T)^4,\ a_8 = (TS)^5TS^2T(S^3T)^5,\ a_9 = (TS)^6TS^2T(S^3T)^6,\ a_{10} = (TS)^7TS^2T(S^3T)^7$ olarak bulunur. Ayrıca grup gösterimi

$$N = a_1,\ a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10} \mid\ a_2{}^2 = a_3{}^2 = a_4{}^2 = a_5{}^2 = a_6{}^2 = a_7{}^2 = a_8{}^2 = a_9{}^2 = a_{10}{}^2 = I$$

şeklinde olur. Şimdi Rienmann-Hurwitz formülünden N normal alt grubunun simgesini bulalım.

$$\frac{\mu(N)}{\mu(H(\lambda_4))} = H\ \lambda_4 : N = 18$$

$$18 = \frac{2g - 2 + 9.\ 1 - \frac{1}{2}\ + 2\ .2\pi}{2.0 - 2 + (1 - \frac{1}{2}) + (1 - \frac{1}{4}) + 1\ .2\pi}$$

$g = 0$ elde edilir. O halde N normal alt grubunun simgesi $(0; 2^{\ 9}, \infty^{\ 2})$ olarak bulunur.❑

3.1.10 Teorem: $\mathrm{H}(\lambda_4)$ Hecke grubu, 20 indeksli 0 cinsli 1 tane normal alt gruba sahiptir. Bu normal alt grup

$$\mathrm{N} = a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11} |\ a_2^{\ 2} = a_3^{\ 2} = a_4^{\ 2} = a_5^{\ 2}$$
$$= a_6^{\ 2} = a_7^{\ 2} = a_8^{\ 2} = a_9^{\ 2} = a_{10}^{\ 2} = a_{11}^{\ 2} = \mathrm{I}$$

Ayrıca bu alt grubun simgesi $0; 2^{\ 10}, \infty^{\ 2}$ şeklindedir.

İspat: Eğer N, $\mathrm{H}(\lambda_4)$ Hecke grubunun 20 indeksli normal alt grubu ise $\mathrm{H}(\lambda_4)/\mathrm{N}$ bölüm grubu $g; 2, 2, 10$ simgesine sahiptir. Bu durumda,

$$\mathrm{H}(\lambda_4)/\mathrm{N} = \mathrm{T}, \mathrm{S} | \mathrm{T}^2 = \mathrm{S}^2 = \mathrm{TS}^{\ 10} = \mathrm{I} \cong \mathrm{D}_{10}$$

olur. Burada

$= \{\mathrm{I, T, S, TS, TST, TSTS, TSTST, TSTSTS, TSTSTST, TSTSTSTS, TSTSTSTST,}$

$\mathrm{TSTSTSTSTS, TSTSTSTSTST, TSTSTSTSTSTS, TSTSTSTSTSTST, TSTSTSTSTSTSTS}\}$
transversalini seçersek aşağıdaki çarpımları buluruz.

$\mathrm{I.T.\ T^{\ -1} = I}$,	$\mathrm{I.S.\ S^{\ -1} = I}$,
$\mathrm{T.T.\ I^{\ -1} = I}$,	$\mathrm{T.S.\ TS^{\ -1} = I}$,
$\mathrm{S.T.\ (TS)^9\ ^{-1} = ST(S^3T)^9}$,	$\mathrm{S.S.\ I^{\ -1} = S^2}$,
$\mathrm{TS.T.\ TST^{\ -1} = I}$,	$\mathrm{TS.S.\ T^{\ -1} = TS^2T}$,
$\mathrm{TST.T.\ TS^{\ -1} = I}$,	$\mathrm{TST.S.\ TSTS^{\ -1} = I}$,
$\mathrm{TSTS.T.\ TSTST^{\ -1} = I}$,	$\mathrm{TSTS.S.\ TST^{\ -1} = TSTS^2TS^3T}$,

$TSTST.T.\ TSTS^{-1} = I$, $TSTST.S.\ TSTSTS^{-1} = I$,

$TSTSTS.T.\ TSTSTST^{-1} = I$, $TSTSTS.S.\ TSTST^{-1} = (TS)^2TS^2T(S^3T)^2$,

$TSTSTST.T.\ TSTSTS^{-1} = I$, $TSTSTST.S.\ TSTSTSTS^{-1} = I$,

$(TS)^4.T.\ (TS)^4T^{-1} = I$, $(TS)^4.S.\ TSTSTST^{-1}=(TS)^3TS^2T(S^3T)^3$,

$(TS)^4T.T.\ (TS)^{4\ -1} = I$, $(TS)^4T.S.\ TSTSTST^{-1} = I$,

$(TS)^5.T.\ (TS)^5T^{-1} = I$, $(TS)^5.S.\ (TS)^4T^{-1}=(TS)^4TS^2T(S^3T)^4$,

$(TS)^5T.T.\ (TS)^{5\ -1} = I$, $(TS)^5T.S.\ TSTSTST^{-1} = I$,

$(TS)^6.T.\ (TS)^6T^{-1} = I$, $(TS)^6.S.\ (TS)^5T^{-1}=(TS)^5TS^2T(S^3T)^5$,

$(TS)^6T.T.\ (TS)^{6\ -1} = I$, $(TS)^6T.S.\ (TS)^{7\ -1} = I$,

$(TS)^7.T.\ (TS)^7T^{-1} = I$, $(TS)^7.S.\ (TS)^6T^{-1}=(TS)^6TS^2T(S^3T)^6$,

$(TS)^7T.T.\ (TS)^{7\ -1} = I$, $(TS)^7T.S.\ (TS)^{8\ -1} = I$,

$(TS)^8.T.\ (TS)^8T^{-1} = I$, $(TS)^8.S.\ (TS)^7T^{-1}=(TS)^7TS^2T(S^3T)^7$,

$(TS)^8T.T.\ (TS)^{8\ -1} = I$, $(TS)^8T.S.\ (TS)^{9\ -1} = I$,

$(TS)^9.T.\ S^{-1}=(TS)^9TS^3$, $(TS)^9.S.\ (TS)^8T^{-1}=(TS)^8TS^2T(S^3T)^8$.

Burada $ST(S^3T)^{9\ -1} = (TS)^9TS^3$ olduğundan, N normal alt grubunun üreteçleri $a_1 = TSTSTSTS^3, a_2 = S^2,\ a_3 = TS^2T\ , a_4 = TSTS^2TS^3T, a_5 = (TS)^2TS^2T(S^3T)^2,\ a_6 = (TS)^3TS^2T(S^3T)^3,\ a_7 = (TS)^4TS^2T(S^3T)^4,\ a_8 = (TS)^5TS^2T(S^3T)^5, a_9 = (TS)^6TS^2T(S^3T)^6, a_{10} = (TS)^7TS^2T(S^3T)^7, a_{11} = (TS)^8TS^2T(S^3T)^8$ olarak bulunur. Ayrıca grup gösterimi

$$\mathrm{N} = a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11} \mid\ a_2{}^2 = a_3{}^2 = a_4{}^2 = a_5{}^2$$
$$= a_6{}^2 = a_7{}^2 = a_8{}^2 = a_9{}^2 = a_{10}{}^2 = a_{11}{}^2 = \mathrm{I}$$

şeklinde olur. Şimdi Rienmann-Hurwitz formülünden N normal alt grubunun simgesini bulalım.

$$\frac{\mu(\mathrm{N})}{\mu(\mathrm{H}(\lambda_4))} = \mathrm{H}\ \lambda_4 : \mathrm{N}\ = 20$$

$$20 = \frac{2g - 2 + 10.\ 1 - \frac{1}{2}\ + 2\ .2\pi}{2.0 - 2 + (1 - \frac{1}{2}) + (1 - \frac{1}{4}) + 1\ .2\pi}$$

$g = 0$ elde edilir. O halde N normal alt grubunun simgesi $(0; 2^{10}, \infty^{2})$ olarak bulunur.❑

3.1.11 Teorem: $H(\lambda_4)$ Hecke grubu, 22 indeksli 1 tane normal alt gruba sahiptir. Bu normal alt grup

$$\begin{aligned} N = &\ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12} |\ a_2{}^2 = a_3{}^2 = a_4{}^2 \\ &= a_5{}^2 = a_6{}^2 = a_7{}^2 = a_8{}^2 = a_9{}^2 = a_{10}{}^2 = a_{11}{}^2 \\ &= a_{12}{}^2 = I \end{aligned}$$

Ayrıca bu alt grubun simgesi $0; 2^{11}, \infty^{2}$ şeklindedir.

İspat: Eğer N, $H(\lambda_4)$ Hecke grubunun 22 indeksli normal alt grubu ise $H(\lambda_4)/N$ bölüm grubu $g; 2, 2, 11$ simgesine sahiptir. Bu durumda,

$$H(\lambda_4)/N = T, S | T^2 = S^2 = TS^{11} = I \cong D_{11}$$

olur. Burada

= {I, T, S, TS, TST, TSTS, TSTST, TSTSTS, TSTSTST, TSTSTSTS, TSTSTSTST,

TSTSTSTSTS, TSTSTSTSTST, TSTSTSTSTSTS, TSTSTSTSTSTST, TSTSTSTSTSTSTS,

TSTSTSTSTSTSTST, TSTSTSTSTSTSTSTS} transversalini seçersek aşağıdaki çarpımları buluruz.

I.T. $T^{-1} = I$,	I.S. $S^{-1} = I$,
T.T. $I^{-1} = I$,	T.S. $TS^{-1} = I$,
S.T. $(TS)^{10\ -1} = ST(S^3T)^{10}$,	S.S. $I^{-1} = S^2$,

$TS.T.\ TST^{-1} = I,$

$TST.T.\ TS^{-1} = I,$

$TSTS.T.\ TSTST^{-1} = I,$

$TSTST.T.\ TSTS^{-1} = I,$

$TSTSTS.T.\ TSTSTST^{-1} = I,$

$TSTSTST.T.\ TSTSTS^{-1} = I,$

$(TS)^4.T.\ (TS)^4T^{-1} = I,$

$(TS)^4T.T.\ (TS)^{4\ -1} = I,$

$(TS)^5.T.\ (TS)^5T^{-1} = I,$

$(TS)^5T.T.\ (TS)^{5\ -1} = I,$

$(TS)^6.T.\ (TS)^6T^{-1} = I,$

$(TS)^6T.T.\ (TS)^{6\ -1} = I,$

$(TS)^7.T.\ (TS)^7T^{-1} = I,$

$(TS)^7T.T.\ (TS)^{7\ -1} = I,$

$(TS)^8.T.\ (TS)^8T^{-1} = I,$

$(TS)^8T.T.\ (TS)^{8\ -1} = I,$

$(TS)^9.T.\ (TS)^9T^{-1} = I,$

$(TS)^9T.T.\ (TS)^{9\ -1} = I,$

$(TS)^{10}.T.\ S^{-1}=(TS)^{10}TS^3,$

$TS.S.\ T^{-1}=TS^2T,$

$TST.S.\ TSTS^{-1} = I,$

$TSTS.S.\ TST^{-1}=TSTS^2TS^3T,$

$TSTST.S.\ TSTSTS^{-1} = I,$

$TSTSTS.S.\ TSTST^{-1} = (TS)^2TS^2T(S^3T)^2,$

$TSTSTST.S.\ TSTSTSTS^{-1} = I,$

$(TS)^4.S.\ TSTSTST^{-1}=(TS)^3TS^2T(S^3T)^3,$

$(TS)^4T.S.\ TSTSTST^{-1} = I,$

$(TS)^5.S.\ (TS)^4T^{-1}=(TS)^4TS^2T(S^3T)^4,$

$(TS)^5T.S.\ TSTSTST^{-1} = I,$

$(TS)^6.S.\ (TS)^5T^{-1}=(TS)^5TS^2T(S^3T)^5,$

$(TS)^6T.S.\ (TS)^{7\ -1} = I,$

$(TS)^7.S.\ (TS)^6T^{-1}=(TS)^6TS^2T(S^3T)^6,$

$(TS)^7T.S.\ (TS)^{8\ -1} = I,$

$(TS)^8.S.\ (TS)^7T^{-1}=(TS)^7TS^2T(S^3T)^7,$

$(TS)^8T.S.\ (TS)^{9\ -1} = I,$

$(TS)^9.S.\ (TS)^8T^{-1}=(TS)^8TS^2T(S^3T)^8,$

$(TS)^9T.S.\ (TS)^{10\ -1} = I,$

$(TS)^{10}.S.\ (TS)^9T^{-1}=(TS)^9TS^2T(S^3T)^9.$

Burada $ST(S^3T)^{10\ -1} = (TS)^{10}TS^3$ olduğundan, N normal alt grubunun üreteçleri $a_1 = (TS)^{10}TS^3$, $a_2 = S^2$, $a_3 = TS^2T$ ve $a_4 = TSTS^2TS^3T$, $a_5 = (TS)^2TS^2T(S^3T)^2$, $a_6 = (TS)^3TS^2T(S^3T)^3$, $a_7 = (TS)^4TS^2T(S^3T)^4$, $a_8 = (TS)^5TS^2T(S^3T)^5$, $a_9 = (TS)^6TS^2T(S^3T)^6$, $a_{10} = (TS)^7TS^2T(S^3T)^7$, $a_{11} = (TS)^8TS^2T(S^3T)^8$,$a_{12} = (TS)^9TS^2T(S^3T)^9$ olarak bulunur. Ayrıca grup gösterimi

$$N = a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12} \mid a_2^{\ 2} = a_3^{\ 2} = a_4^{\ 2} = a_5^{\ 2} = a_6^{\ 2} = a_7^{\ 2} = a_8^{\ 2} = a_9^{\ 2} = a_{10}^{\ 2} = a_{11}^{\ 2} = a_{12}^{\ 2} = I$$

şeklinde olur. Şimdi Rienmann-Hurwitz formülünden N normal alt grubunun simgesini bulalım.

$$\frac{\mu(\mathrm{N})}{\mu(\mathrm{H}(\lambda_4))} = \mathrm{H}\ \lambda_4 : \mathrm{N} \ = 22$$

$$22 = \frac{2g - 2 + 11.\ 1 - \frac{1}{2}\ + 2\ .2\pi}{2.0 - 2 + (1 - \frac{1}{2}) + (1 - \frac{1}{4}) + 1\ .2\pi}$$

$g = 0$ elde edilir. O halde N normal alt grubunun simgesi $(0; 2^{\ 11}, \infty^{\ 2})$ olarak bulunur.❑

3.1.12 Teorem: $\mathrm{H}(\lambda_4)$ Hecke grubu, 24 indeksli 0 cinsli 1 tane normal alt gruba sahiptir. Bu normal alt grup

$$\begin{aligned} \mathrm{N} = \ & a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13} |\ \ a_2^{\ 2} = a_3^{\ 2} = a_4^{\ 2} \\ & = a_5^{\ 2} = a_6^{\ 2} = a_7^{\ 2} = a_8^{\ 2} = a_9^{\ 2} = a_{10}^{\ 2} = a_{11}^{\ 2} \\ & = a_{12}^{\ 2} = a_{13}^{\ 2} = \mathrm{I} \end{aligned}$$

Ayrıca bu alt grubun simgesi $0; 2^{\ 12}, \infty^{\ 2}$ şeklindedir.

İspat: Eğer N, $\mathrm{H}(\lambda_4)$ Hecke grubunun 24 indeksli normal alt grubu ise $\mathrm{H}(\lambda_4)/\mathrm{N}$ bölüm grubu $g; 2, 2, 12$ simgesine sahiptir. Bu durumda,

$$\mathrm{H}(\lambda_4)\ /\mathrm{N} = \ \mathrm{T}, \mathrm{S} | \mathrm{T}^2 = \mathrm{S}^2 = \ \mathrm{TS}^{\ 12} = \mathrm{I}\ \ \cong \mathrm{D}_{12}$$

olur. Burada

= { I, T, S, TS, TST, TSTS, TSTST, TSTSTS, TSTSTST, TSTSTSTS, TSTSTSTST,

TSTSTSTSTS, TSTSTSTSTST, TSTSTSTSTSTS, TSTSTSTSTSTST, TSTSTSTSTSTSTS,

TSTSTSTSTSTSTST, TSTSTSTSTSTSTSTS}

olur.

Bu transversali seçersek aşağıdaki çarpımları buluruz.

$I.T.\ T^{-1} = I,$	$I.S.\ S^{-1} = I,$
$T.T.\ I^{-1} = I,$	$T.S.\ TS^{-1} = I,$
$S.T.\ (TS)^{11\ -1} = ST(S^3T)^{11},$	$S.S.\ I^{-1}=S^2,$
$TS.T.\ TST^{-1} = I,$	$TS.S.\ T^{-1}=TS^2T,$
$TST.T.\ TS^{-1} = I,$	$TST.S.\ TSTS^{-1} = I,$
$TSTS.T.\ TSTST^{-1} = I,$	$TSTS.S.\ TST^{-1}=TSTS^2TS^3T,$
$TSTST.T.\ TSTS^{-1} = I,$	$TSTST.S.\ TSTSTS^{-1} = I,$
$TSTSTS.T.\ TSTSTST^{-1} = I,$	$TSTSTS.S.\ TSTST^{-1} = (TS)^2TS^2T(S^3T)^2,$
$TSTSTST.T.\ TSTSTS^{-1} = I,$	$TSTSTST.S.\ TSTSTSTS^{-1} = I,$
$(TS)^4.T.\ (TS)^4T^{-1} = I,$	$(TS)^4.S.\ TSTSTST^{-1}=(TS)^3TS^2T(S^3T)^3,$
$(TS)^4T.T.\ (TS)^{4\ -1} = I,$	$(TS)^4T.S.\ TSTSTST^{-1} = I,$
$(TS)^5.T.\ (TS)^5T^{-1}=I,$	$(TS)^5.S.\ (TS)^4T^{-1}=(TS)^4TS^2T(S^3T)^4,$
$(TS)^5T.T.\ (TS)^{5\ -1}=I,$	$(TS)^5T.S.\ TSTSTST^{-1}=I,$
$(TS)^6.T.\ (TS)^6T^{-1}=I,$	$(TS)^6.S.\ (TS)^5T^{-1}=(TS)^5TS^2T(S^3T)^5,$
$(TS)^6T.T.\ (TS)^{6\ -1}=I,$	$(TS)^6T.S.\ (TS)^{7\ -1}=I,$
$(TS)^7.T.\ (TS)^7T^{-1}=I,$	$(TS)^7.S.\ (TS)^6T^{-1}=(TS)^6TS^2T(S^3T)^6,$
$(TS)^7T.T.\ (TS)^{7\ -1}=I,$	$(TS)^7T.S.\ (TS)^{8\ -1}=I,$
$(TS)^8.T.\ (TS)^8T^{-1}=I,$	$(TS)^8.S.\ (TS)^7T^{-1}=(TS)^7TS^2T(S^3T)^7,$
$(TS)^8T.T.\ (TS)^{8\ -1}=I,$	$(TS)^8T.S.\ (TS)^{9\ -1}=I,$
$(TS)^9.T.\ (TS)^9T^{-1}=I,$	$(TS)^9.S.\ (TS)^8T^{-1}=(TS)^8TS^2T(S^3T)^8,$
$(TS)^9T.T.\ (TS)^{9\ -1}=I,$	$(TS)^9T.S.\ (TS)^{10\ -1}=I,$
$(TS)^{10}.T.\ (TS)^{10}T^{-1}=I,$	$(TS)^{10}.S.\ (TS)^9T^{-1}=(TS)^9TS^2T(S^3T)^9,$
$(TS)^{10}T.T.\ (TS)^{10\ -1}=I,$	$(TS)^{10}T.S.\ I^{-1}=I,$
$(TS)^{11}.T.\ S^{-1}=(TS)^{11}TS^3,$	$(TS)^{11}.S.\ (TS)^{10}T^{-1}=(TS)^{10}TS^2T(S^3T)^{10}.$

Burada olduğundan $ST\ S^3T^{\ 11\ -1} = TS^{\ 11}TS^3$, N normal alt grubunun üreteçleri $a_1 = TS^{\ 11}TS^3, a_2 = S^2,\ a_3 = TS^2T$ ve $a_4 = TSTS^2TS^3T$, $a_5 = (TS)^2TS^2T(S^3T)^2,\ a_6 = (TS)^3TS^2T(S^3T)^3, a_7 = (TS)^4TS^2T(S^3T)^4$, $a_8 =$

$(TS)^5TS^2T(S^3T)^5$, $a_9 = (TS)^6TS^2T(S^3T)^6$, $a_{10} = (TS)^7TS^2T(S^3T)^7$, $a_{11} = (TS)^8TS^2T(S^3T)^8$, $a_{12} = (TS)^9TS^2T(S^3T)^9$, $a_{13} = (TS)^{10}TS^2T(S^3T)^{10}$ olarak bulunur. Ayrıca grup gösterimi

$$\begin{aligned} N = \langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13} \mid & \ a_2{}^2 = a_3{}^2 = a_4{}^2 \\ & = a_5{}^2 = a_6{}^2 = a_7{}^2 = a_8{}^2 = a_9{}^2 = a_{10}{}^2 = a_{11}{}^2 \\ & = a_{12}{}^2 = a_{13}{}^2 = I \rangle \end{aligned}$$

şeklinde olur. Şimdi Rienmann-Hurwitz formülünden N normal alt grubunun simgesini bulalım.

$$\frac{\mu(N)}{\mu(H(\lambda_4))} = |H(\lambda_4) : N| = 24$$

$$24 = \frac{\left(2g - 2 + 12.\left(1 - \frac{1}{2}\right) + 2\right).2\pi}{\left(2.0 - 2 + (1 - \frac{1}{2}) + (1 - \frac{1}{4}) + 1\right).2\pi}$$

$g = 0$ elde edilir. O halde N normal alt grubunun simgesi $(0; 2^{(12)}, \infty^{(2)})$ olarak bulunur.❑

Teorem 3.1.13: $H(\lambda_4)$ Hecke grubunun grubu $m \geq 3$ olmak üzere $2m$ indeksli 0 cinsli normal alt grubu

$$N = \langle a_1, a_2, a_3, a_4, \dots a_{m+1} \mid a_2{}^2 = a_3{}^2 = a_4{}^2 = \dots = a_{m+1}{}^2 = I \rangle$$

Ayrıca bu alt grubun simgesi $(0; 2^{(m)}, \infty^{(2)})$ şeklindedir.

İspat: Eğer N, $H(\lambda_4)$ Hecke grubunun $2m$ indeksli normal alt grubu ise $H(\lambda_4)/N$ bölüm grubu $(g; 2, 2, m)$ simgesine sahiptir. Bu durumda,

$$H(\lambda_4)/N = \langle T, S \mid T^2 = S^2 = (TS)^m = I \rangle \cong D_m$$

olur. Burada $= \{ I, T, S, TS, TST, TSTS, TSTST, \dots, (TS)^{m-1}\}$ transversalini seçersek aşağıdaki çarpımları buluruz.

$I.T.\ T^{-1} = I,$	$I.S.\ S^{-1}=I,$
$T.T.\ I^{-1} = I,$	$T.S.\ TS^{-1}=I,$
$S.T.\ (TS)^{m-1\ -1} = ST(S^3T)^{m-1},$	$S.S.\ I^{-1}=S^2,$
$TS.T.\ TST^{-1} = I,$	$TS.S.\ T^{-1}=TS^2T,$
$TST.T.\ TS^{-1} = I,$	$TST.S.\ TSTS^{-1}=I,$
$TSTS.T.\ TSTST^{-1} = I,$	$TSTS.S.\ TST^{-1}=TSTS^2TS^3T,$
$TSTST.T.\ TSTS^{-1} = I,$	$TSTST.S.\ TSTSTS^{-1} = I,$
$TSTSTS.T.\ TSTSTST^{-1} = I,$	$TSTSTS.S.\ TSTST^{-1} = (TS)^2TS^2T(S^3T)^2,$
$TSTSTST.T.\ TSTSTS^{-1} = I,$	$TSTSTST.S.\ TSTSTSTS^{-1} = I,$
$(TS)^4.T.\ (TS)^4T^{-1} = I,$	$(TS)^4.S.\ TSTSTST^{-1}=(TS)^3TS^2T(S^3T)^3,$
$(TS)^4T.T.\ (TS)^{4\ -1} = I,$	$(TS)^4T.S.\ TSTSTST^{-1} = I,$
$(TS)^5.T.\ (TS)^5T^{-1} = I,$	$(TS)^5.S.\ (TS)^4T^{-1}=(TS)^4TS^2T(S^3T)^4,$
...	...
...	...
...	...
$(TS)^{m-1}.T.\ S^{-1}=(TS)^{m-1}TS^3,$	$(TS)^{m-1}.S.\ (TS)^{m-2}T^{-1}=(TS)^{m-2}TS^2T(S^3T)^{m-2}.$

Burada olduğundan $(ST\ S^3T^{\ m-1})^{-1} = (TS)^{m-1}TS^3$, N normal alt grubunun üreteçleri $a_1 = (TS)^{m-1}TS^3, a_2 = S^2,\ a_3 = TS^2T$ ve $a_4 = TSTS^2TS^3T$, $a_5 = (TS)^2TS^2T(S^3T)^2, \dots,\ a_{m+1} = (TS)^{m-2}TS^2T(S^3T)^{m-2}$ olarak bulunur. Ayrıca grup gösterimi

$$N = a_1, a_2, a_3, a_4 \dots, a_{m+1} |\ a_2^{\ 2} = a_3^{\ 2} = a_4^{\ 2} = \dots = a_{m+1}^{\ 2} = I$$

şeklinde olur. Şimdi Rienmann-Hurwitz formülünden N normal alt grubunun simgesini bulalım.

$$\frac{\mu(N)}{\mu(H(\lambda_4))} = H\ \lambda_4 : N = 2m$$

$$2m = \frac{2g - 2 + m.\ 1 - \frac{1}{2}\ \ + 2\ \ .2\pi}{2.0 - 2 + (1 - \frac{1}{2}) + (1 - \frac{1}{4}) + 1\ \ .2\pi}$$

$g = 0$ elde edilir. O halde N normal alt grubunun simgesi $(0; 2^{\,m}, \infty^{\,2})$ olarak bulunur.❑

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada H(λ_4) Hecke grubunun sonlu normal indeksli alt gruplarından bahsedilmiştir. H(λ_4) Hecke grubunun sonlu indeksli normal alt gruplarının sayısı Conder' in makalesinde verilmiştir, [13]. Bu tezde sayıları bilinen bu normal alt grupların üreteçleri, grup gösterimleri ve simgeleri bulunmuştur.

Tezin esas kısmı olan 3. Bölümde H(λ_4) Hecke grubunun 2 den 24 indekse kadar olan normal alt gruplarının üreteçleri, grup gösterimleri ve simgeleri gösterilmiştir. Elde edilen sonuçlar ile cinsi 0 olan normal alt gruplar 3.1.13 teoremde genel olarak ifade edilmiştir.

5. KAYNAKLAR

[1] Hecke, E., "Über die Bestimmung Dirichletscher Reichen durch ihre Funktionalgleichungen", *Math. Ann.,* 112, 664-699, (1936).

[2] Newman, M., "The Structure of Some Subgroups of The Modular Group", *Illionis J. Math.*, 8, 480-487, (1962).

[3] Newman, M., "Free Subgroups and Normal Subgroups of The Modular Group", *Illionis J. Math.*, 8, 262-265, (1964).

[4] Cangül, İ. N., "Normal Subgroups of Hecke Groups", Ph.D. Thesis, *Southampton University*, (1993).

[5] Lang, Mong-Lung; Lim, Chong-Hai; Tan, Ser Peow Subgroups of the Hecke groups with small index. *Linear and Multilinear Algebra* 35/1, 75–77, (1993).

[6] Lang, Mong-Lung The signatures of the congruence subgroups G 0 (τ) of the Hecke groups G 4 and G 6 *Comm. Algebra* 28/8, 3691–3702, (2000).

[7] Rosen, David The substitutions of Hecke group Γ(2cos(π/5)) *Arch. Math. (Basel)* 46/6, 533–538, (1986).

[8] Schmidt, Thomas A.; Sheingorn, Mark Length spectra of the Hecke triangle groups. *Math. Z.* 220/3, 369–397, (1995).

[9] Kulkarni, Ravi S. An arithmetic-geometric method in the study of the subgroups of the modular group. *Amer. J. Math.* 113/6, 1053–1133, (1991).

[10] Cangül, İ. N.; Singerman, D. "Normal subgroups of Hecke groups and regular maps", *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 123/1, 59–74, (1998), .

[11] Jones, Gareth A.; Thornton, John S. "Automorphisms and congruence subgroups of the extended modular group", *J. London Math. Soc.* 34, 26-40, (1986).

[12] Mushtaq, Qaiser Coset diagrams for an action of the extended modular group on the projective line over a finite field. *Indian J. Pure Appl. Math.* 20/8, 747–754, (1989) .

[13] Conder, M.; Dobcsányi, P. "Normal subgroups of the modular group and other Hecke groups." *Combinatorial group theory, discrete groups, and number theory, Contemp. Math. Amer. Math. Soc.* 421, 65-86, (2006).

[14] Başkan, T., Ayrık Gruplar, *Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları*, Beytepe, Ankara, (1980).

[15] Jones, G. A., Singerman, D., Complex Functions, *Cambridge University Press*, Cambridge, 60, (1987).

[16] Maclachlan, C., "Maximal Normal Fuchsian Groups", *Illionis J. Math.*, 15, 104-113, (1971).

[17] Singerman, D., "Subgroups of Fuschian groups and finite permutation groups" *Bull. London Math. Soc.*, 2, 319, (1970).

[18] Malik, D. S., Mordeson, J. M., Sen, M. K., "Fundamentals of Abstract Algebra", *McGraw-Hill*, New York, (1997).

[19] Coxeter H. S. M., Moser W. O. J., "Generators and relations for discrete groups", second ed., *Springer-Verlag*, Berlin-Göttingen-Heidelberg-New York, 35-38, (1965).

[20] Lyndon, R. C., Schupp, P. E., "Combinatorial Group Theory", *Springer-Verlag*, Berlin-Heidelberg-New York, (1977).

[21] Fine, B., Rosenberger, G., "Algebraic Generalizations of Discrete Groups", *Marcel Dekker*, Inc, New-York, (1999).