T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BAZI ÖNEMLİ MONOİD GENİŞLEMELERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ahmet EMİN

Balıkesir, Temmuz – 2011

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİMDALI

BAZI ÖNEMLİ MONOİD GENİŞLEMELERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ahmet EMİN

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Fırat ATEŞ

Sınav Tarihi : 01.07.2011
Sınav Üyeleri : Doç. Dr. Fırat ATEŞ (Danışman-BAÜ)
Yrd. Doç. Dr. Sebahattin İKİKARDEŞ (BAÜ)
Yrd. Doç. Dr. Eylem GÜZEL KARPUZ (KMÜ)

Enstitü Yönetim Kurulu .... tarih .... sayılı oturumunun............ nolu kararı ile .... Mezun olmuştur.

Balıkesir, Temmuz - 2011

ÖZET

BAZI ÖNEMLİ MONOİD GENİŞLEMELERİ

Ahmet EMİN
Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

(Yüksek Lisans Tezi / Tez Danışmanı : Doç. Dr. Fırat ATEŞ)

Balıkesir, 2011

Bu çalışmada bazı önemli monoidlerin genişlemeleri üzerinde durulmuş ve bu genişlemelerin sunuşlarının nasıl elde edileceği incelenmiştir. Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde serbest monoidler incelenmiş ve temel özellikleri ile ilgili hatırlatmalar yapılmıştır.

İkinci bölümde, monoidlerin yarı direkt çarpımının ve Wreath çarpım sunuşlarına yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Bruck-Reilly genişlemesi, Schützenberger çarpım, monoid üzerinde Schützenberger çarpımının yeni versiyonu ve bu yeni versiyonun sunuşu tanımlanmıştır. Ayrıca bu yeni çarpımın regülerlik özelliği üzerinde durulmuştur. Ayrıca monoidlerin güçlü yarılatisleri ve Rees matris yarıgruplarının sunuşlarına yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde, monoidlerin çift yönlü çarpımı tanımlanmış ve bu çarpımın sunuşu verilmiştir.

Beşinci bölümde, Bruck-Reilly genişlemeleri daha da genelleştirilerek Genelleştirilmiş Bruck-Reilly* genişlemesi kavramına ve bunların sonuçlarına değinilmiştir.

ANAHTAR SÖZCÜKLER: Monoid, Yarı Direkt Çarpım, Bruck-Reilly Genişlemesi, Schützenberger Çarpım, Monoidlerin Güçlü Yarılatisleri.

ABSTRACT

EXTENSIONS OF SOME IMPORTANT MONOIDS

Ahmet EMİN
Balıkesir University, Institute of Science
Department of Mathematics

(M. Sc. Thesis / Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Fırat ATEŞ)

Balıkesir - Turkey, 2011

This study, generally concerns about the extensions of some important monoids extensions and how to obtain these presentations for these extensions. The thesis consists of five main chapters.

In the first chapter we examine free monoids and recall their fundamental properties.

In the second chapter, we study on the presentations of the semidirect and wreath product of monoids.

In the third chapter, we give the presentations for the Bruck-Reilly Extension, the Schützenberger Product, the new version of schützenberger product of monoids and give the presentation of it. Also we examine the regularity property of this new product. Next, we give the presentations of Strong Semilattices of monoids and Rees Matrix Semigroups.

In the fourth chapter, we define the two-sided product of monoids and we give the presentation of it.

In the fifth chapter, Bruck-Reilly Extension has been developed and the concept of the Generalized Bruck-Reilly* Extension and its results have been mentioned.

KEY WORDS: Monoid, Semidirect Product, Bruck-Reilly Extension, Schützenberger Product, Strong Semilattice of Monoids, Rees Matrix Semigroup.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

Simge	Adı
ω	Kelime
$r(\omega)$	ω kelimseinin başlangıç harfi
$\tau(\omega)$	ω kelimseinin bitiş harfi
X^+	X kümesindeki pozitif kelimelerden oluşan küme
X^*	X kümesindeki pozitif kelimeler ve birim elemanın birleşiminden oluşan küme
$F(X)$	X ile üretilen Serbest Monoid
$\wp_M$	$\wp$ sunuşunun temsil ettiği monoid
$\wp_M = [X : R]$	M monoidinin sunuşu X üreteç kümesi R bağıntı kümesi
$\langle X : R \rangle$	Yarıgrup Sunuşu X üreteç kümesi R bağıntı kümesi
$[\omega]$	ω kelimseinin denklik sınıfı
$[\omega]_\wp$	$\wp$ sunuşuna bağlı olarak ω kelimseinin denklik sınıfı
$Çek(\varphi)$	φ dönüşümünün çekirdeği
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{N}^0$	Sıfırı içeren doğal sayılar kümesi
S^1	Birim elemanı içeren yarıgrup
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar Kümesi
$\mathbb{Z}^+$	Pozitif Tamsayılar Kümesi
$Mat_n(\mathbb{Z}^+)$	Her bir bileşeni negatif olmayan tam sayılardan oluşan $n \times n$ tipindeki matrislerin kümesi
$End(M)$	M monoidinin bütün endomorfizmalarının kümesi
$K \rtimes_\theta A$	K ile A monoidinin yarı direkt çarpımı
$A^{\times B}$	A nın B nin mertebesi kadar kendisi ile kartezyen çarpımı
$A^{\oplus B}$	$B \to A$ fonksiyonunun sonlu desteğe sahip olanların kümesi

$AwrB$	A nın B ile olan Wreath çarpımı
$A\Diamond B$	A nın B ile olan Schützenberger Çarpımı
$\wp(A \times B)$	A× B nin tüm alt kümelerinin kümesi
$(1_A, \emptyset, 1_B)$	A nın B ile olan Schützenberger Çarpımının Birimi
$A\Diamond_{sv}B$	A nın B ile yarı direkt çarpımı altında Schützenberger çarpımının yeni bir versiyonu
$S(A, \theta)$	Bruck-Reilly genişlemesi
A_α	Ayrık monoidlerin ailesi
$S\left(Y; A_\alpha, \phi_{\alpha,\beta}\right)$	Monoidlerin güçlü yarılatisleri
$M^0[A; I, \Lambda; P]$	Rees matris yarıgrubu
$A_\beta \bowtie_\alpha B$	A ve B nin çift yönlü yeni bir yarı direkt çarpımı
$(1_A, P_e, 1_B)$	A ve B nin çift yönlü yeni bir yarı direkt çarpımının birimi $P_e = (1_A, 1_B)$
$GBR^*(T; \beta, \gamma, u)$	T nin u elemanı ve β, γ homomorfizmaları ile oluşturulmuş genelleştirilmiş Bruck-Reilly Genişlemesi
$\square$	İspatların sonuna konur.

Bu çalışmada herhangi bir x elemanının bir f fonksiyonu altındaki görüntüsü soldan, yani xf formunda gösterilecektir. Ayrıca iki fonksiyonun bileşkesi $(k)\theta \circ f = ((k)\theta)f$ olarak gösterilecektir.

ÖNSÖZ

Çalışmalarımda zamanını bana ayırarak bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, daima tezimle ilgilenerek maddi ve manevi desteğini esirgemeyen sevgili hocam ve danışmanım sayın Doç. Dr. Fırat ATEŞ' e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisansımın her aşamasında bana sürekli destek veren ailem, mesai arkadaşlarım ve ev arkadaşlarım Ferhet Mesut GÖRÜR, Berkan DEMİREL ile Mehmet ARSLAN'a sevgilerimi ve şükranlarımı sunarım.

Bu tezi çok değerli;
annem Fatma EMİN,
babam Mahmut EMİN,
abim Muhammed EMİN,
kardeşlerim Mustafa EMİN ve Sümeyye EMİN'e ithaf ederim.

Balıkesir, 2011 **Ahmet EMİN**

1. GİRİŞ

Bu tez çalışmasının bu bölümünde tezin diğer bölümlerinde genel olarak kullanılacak bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Bu bölümde ilk önce serbest monoidler incelenmiş olup $kelime$ yapısına değinilmiştir. Daha sonra ise genel anlamda monoid sunuşlarının yapısı tanıtılmıştır. Bu konuyla ilgili daha ayrıntılı bilgiler [1], [2] ve [3] kaynaklarından elde edilebilir.

1.1 Serbest Monoidler

X boştan farklı bir küme olsun. X'in her bir elemanına $harf$ denir. Ayrıca $n \in \mathbb{N}, x_i \in X \; ve \; 1 \leq i \leq n$ olmak üzere

$$x_1 x_2 \dots x_n$$

ifadesine X üzerinde bir $kelime$ denir ve ω ile gösterilir. ω kelimesinin $başlangıç \; harfi \;\; r(\omega) = x_1 \; ve \; bitiş \; harfi \; de \; \tau(\omega) = x_n$ biçimindedir. Burada $n = 0$ ise $boş \; kelime$ elde edilir ve 1 ile gösterilir.

ω ve u, X kümesi üzerinde iki kelime olsun. ω ve u kelimelerinin çarpımı, ω kelimesinin arkasına u kelimesini yazarak elde edilir ve bu çarpım ωu biçiminde gösterilir.

Boş olmayan bir kelime üzerinde aşağıdaki işlemler tanımlanabilir:

i) Herhangi bir kelime içindeki 1 boş kelimesi silinir. Yapılan bu işleme, kelime üzerindeki $indirgeme$ işlemi denir.

ii) Herhangi bir kelime içerisine 1 boş kelimesi eklenebilir. Yapılan bu işleme $ekleme$ işlemi denir.

1.1.1 Tanım : M bir monoid ve X de bu monoidin üreteç kümesi olmak üzere X^+ kümesi X ürteç kümesindeki elemanlarla oluşturulan en az bir uzunluklu kelimelerin kümesi olarak tanımlanır. X^* $kümesini,$ $X^* = X^+ \cup \{1\}$ kümesi ile tanımlayalım. Buradaki "1" M monoidinin birim elemanıdır. $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m \in X$, $(n, m \in \mathbb{N})$ olsun. Ayrıca $\omega_1, \omega_2 \in X^*$ için, $\omega_1 = x_1 x_2 \dots x_n$, $\omega_2 = y_1 y_2 \dots y_m$ kelimeleri arasındaki işlem

$$\omega_1 \omega_2 = (x_1 x_2 \dots x_n)(y_1 y_2 \dots y_m) = x_1 x_2 \dots x_n y_1 y_2 \dots y_m$$

biçiminde tanımlansın. Kelimeler arasında tanımlanan bu işleme göre X^* bir monoid oluşturur ve oluşan bu monoide $serbest\ monoid$ adı verilir ve $F(X)$ ile gösterilir.

1.2 Monoid Sunuşu

X boştan farklı bir küme (Üreteç Kümesi) ve $R \subseteq X^* \times X^*$ olacak şekilde R alt kümesi (bağıntı kelimelerinin bir kümesi) olsun. Bu durumda

$$\wp_M = [X : R]$$

ikilisine bir $monoid\ sunuşu$ denir. Eğer X ve R kümelerinin her ikisi de sonlu ise $\wp_M$ sunuşu da sonludur.

Şimdi, aşağıda verilecek teoremde önemli bir yer oluşturan "kongruans" terimini açıklayalım:

M bir monoid ve ρ, M üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. Her $x, y, s \in M$ için $(x, y) \in \rho \Rightarrow (xs, ys) \in \rho$ oluyor ise ρ bağıntısına bir $sağ\ kongruans$ bağıntısı, $(x, y) \in \rho \Rightarrow (sx, sy) \in \rho$ oluyor ise ρ bağıntısına bir $sol\ kongruans$

bağıntısı denir. Eğer ρ bağıntısı hem sağ hem de sol kongruans oluyor ise bu ρ bağıntısına $kongruans$ bağıntısı denir.

1.3.1 Teorem [4] : M bir monoid, X de M için bir üreteç kümesi ve ρ, X^* kümesi üzerinde R yi içeren en küçük kongruans olsun. Bu durumda

$$M \cong {}^{X^*}/_{\rho}$$

dir.

İspat: $\wp_M$ sunuşunun temsil ettiği M monoidi ve X üreteç kümesi için,

$$\varphi_0 : X \to M,$$
$$x \mapsto [x]_{\wp}$$

dönüşümünü tanımlayalım. Bu dönüşüm

$$\varphi : X^* \to M,$$
$$[\omega] \mapsto [\omega]_{\wp}$$

şeklinde tek bir örten homomorfizmasına genişletilebilir. Ayrıca $Çek(\varphi), R$ yi içeren en küçük kongruans bağıntısı olduğundan, $Çek(\varphi) = \rho$ dir. Dolayısıyla 1.İzomorfizma Teoreminden

$$M \cong {}^{X^*}/_{\rho}$$

sonucuna ulaşılır.□

2.YARI DİREKT ÇARPIM VE WREATH ÇARPIM

2.1 Monoidlerin Yarı Direkt Çarpımı

Verilen bir monoidin sunuşunu tanımlamak üzerinde çok çalışılan konulardan biridir. Özellikle de yarı direkt çarpım Combinatorial grup teoride çok önemli bir yere sahip olduğundan bu bölümde yarı direkt çarpımın sunuşu çalışılmıştır. Bu nedenle yarı direkt çarpımının sunuşunu vermeden önce, verilen bir sunuşun bir monoid cebirsel yapısını temsil edebilmesi için gerek ve yeter koşulları verilecektir. Buna göre M bir monoid ve X bir küme olsun. Ayrıca

$$\mu : X \to M, \quad x \mapsto m_x$$

dönüşümünü göz önüne alalım. Burada X kümesi üzerinde, boştan farklı bir $w = x_1 x_2 \dots x_r$ $(x_1, x_2, \dots, x_r \in X)$ kelimesi için,

$$(w)\mu^* = m_{x_1} m_{x_2} \dots m_{x_r} \tag{2.1}$$

kuralı ile tanımlı $F(X) \to M$ homomorfizmasının varlığını biliyoruz. Özel olarak w boş kelime ise, $(w)\mu^* = 1_M$ dir. Şimdi (2.1) ile tanımlanan μ^* homomorfizması yardımıyla, bir M monoidinin sunuşunun oluşturulmasında kullanılan aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

2.1.1 Önerme $[15]$: $\wp = [X : r]$ bir monoid sunuşu olsun. (2.1) de verilen μ^* homomorfizmasının

$$\mu_* = M(\wp) \to M, \quad [x]_\wp \mapsto m_x$$

şeklinde homomorfizmaya genişletilebilmesi için gerek ve yeter koşul, her $R \in r$ için,

$$(R_+)\mu = (R_-)\mu$$

olmasıdır.

2.1.2 Örnek: $Mat_n(\mathbb{Z}^+)$ kümesi, her bir bileşeni negatif olmayan tam sayılardan oluşan $n \times n$ tipindeki matrislerin kümesi ve $\wp = [x, y : x^2y^3 = yx]$ bir monoid sunuşu olsun. Buna göre $m_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $m_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olmak üzere,

$$\mu: \{x, y\} \to Mat_n(\mathbb{Z}^+), \quad x \to m_1, \ y \to m_2,$$

fonksiyonunu düşünelim. Burada $(x^2y^3)\mu = (yx)\mu$ olduğundan 2.1.1 Önermeden, μ dönüşümü

$$\mu_* = M(\wp) \to Mat_n(\mathbb{Z}^+) \text{ öyle ki } [x]_\wp \mapsto m_1, \ [x]_\wp \mapsto m_2$$

homomorfizmasına genişletilir.

2.1.3 Tanım : M bir monoid, X$= \{m_x : x \in X\}$ kümesi M monoidi için bir üreteç kümesi ve $\wp = [X : r]$ olsun. Eğer

$$\mu: X \to M, \ x \mapsto m_x$$

dönüşümü,

$$\mu_* = M(\wp) \to M, \ [x]_\wp \mapsto m_x,$$

izomorfizmasına genişletilebiliyorsa, bu $\wp$ sunuşuna M monoidinin sunuşu denir.

Bu bölümün temel yapısını oluşturan “devirli (cyclic veya monogenic [16]) monoidler” ile ilgili detaylı bilgilere [12], [15] ve [16] gibi kaynaklardan ulaşılabilir.

2.1.4 Önerme : M mertebesi $k > l$ olan ve m ile üretilen sonlu devirli monoid olsun. O zaman X$= \{m\}$ üreteç kümesi üzerinde M nin sunuşu

$$\wp_{k,l} = [x : x^k = x^l] \tag{2.2}$$

biçimindedir.

İspat: (2.1) de verilen $X \xrightarrow{\mu} M$ dönüşümünü düşünelim. O zaman $(x^k)\mu = (x^l)\mu$ olduğundan, 2.1.1 Önermeden

$$\mu_* = M\left(\wp_{k,l}\right) \to M, \ \ [x]_{\wp_{k,l}} \mapsto m$$

genişletilmiş homomorfizmasını elde ederiz. Burada $m \in Gör(\mu_*)$ olduğundan, μ_* örtendir. $\wp_{k,l}$ sunuşundan elde edilecek olan birbirinden farklı elemanlar

$$1, x, x^2, \dots, x^{k-1}$$

biçiminde olup 2.1.3 Tanım yardımıyla, $M\left(\wp_{k,l}\right)$ nin farklı elemanları

$$[1], [x], [x^2], \dots, [x^{k-1}]$$

olacaktır. Buradan $\left|M\left(\wp_{k,l}\right)\right| = k$ elde edilir. Özel olarak, μ_* nin birebir olmamasının kabulü $|im(\mu_*)| < \left|M\left(\wp_{k,l}\right)\right| = k$ eşitsizliğini vereceğinden, μ_* birebir olmak zorundadır. Bu ise ispatı bitirir.□

2.1.5 Tanım: Bir M monoidinin kendisinden, kendisi üstüne tanımlanan homomorfizmasına $endomorfizma$ adı verilir. Aslında M nin bütün endomorfizmalarının kümesi bileşke işlemi altında bir monoid oluşturur ve $End(M)$ ile gösterilir. Burada birim eleman $id: M \to M$ dir.

Endomorfizma örnekleri [29] da bulunabilir.

2.1.6 Tanım : A ve K herhangi iki monoid olmak üzere, her $a \in A, k \in K$ için,

$$\theta: A \to End(K), \quad a \mapsto \theta_a \quad (a \in A), \quad 1 \mapsto id_{End(K)}$$

şeklinde tanımlanan θ homomorfizması

$$(k)\theta_{a_1 a_2} = \left((k)\theta_{a_1}\right)\theta_{a_2} \tag{2.3}$$

şartını sağlasın. Buna göre K nın A ile olan yarı direkt çarpımı, her $(a,k),(a',k')$ sıralı çifti için,

$$(a,k)(a',k') = \left(aa', (k)\theta_{a'}k'\right) \tag{2.4}$$

kuralını sağlayan bir kümedir.

2.1.7 Teorem : Tanımı sağlayan kümeye M diyelim. M kümesi (2.4) de verilen işleme göre bir monoid dir.

İspat: M nin birleşme özelliğine sahip olduğunu gösterelim. Her $(a_1,k_1),(a_2,k_2)\ ve\ (a_3,k_3) \in A \times K$ için,

$$\begin{aligned}
[(a_1,k_1)(a_2,k_2)]\,(a_3,k_3) &= \left(a_1a_2, (k_1)\theta_{a_2}k_2\right)(a_3,k_3) \\
&= \left(a_1a_2a_3, \left((k_1)\theta_{a_2}k_2\right)\theta_{a_3}k_3\right) \\
&= \left(a_1a_2a_3, \left((k_1)\theta_{a_2a_3}\right)(k_2)\theta_{a_3}k_3\right)
\end{aligned}$$

ve

$$(a_1,k_1)[(a_2,k_2)(a_3,k_3)] = (a_1,k_1)\left(a_2a_3, (k_2)\theta_{a_3}k_3\right)$$

$$= \left(a_1a_2a_3, \left((k_1)\theta_{a_2a_3}\right)(k_2)\theta_{a_3}k_3\right)$$

biçimindedir. Bu şekilde ispat tamamlanmış olur.□

2.1.8 Tanım: (2.4) da verilen işlem ile tanımlanmış olan M monoidine K nın A ile olan yarı direkt çarpımı denir ve $M = K \rtimes_\theta A$ ile gösterilir.

2.1.9 Teorem ([30],[31]): A ve K monoidlerinin sunuşları sırasıyla $\wp_A = [X : r]$ ve $\wp_K = [Y : s]$ olsun. Özel olarak T_{yx} simgesi ile

$$yx = x\big((y)\theta_x\big) \quad (x \in X, y \in Y)$$

biçimindeki bir bağıntıyı gösterelim. Ayrıca t kümesi, T_{yx} formundaki bütün bağıntıların kümesi olsun. O zaman M yarı direkt çarpım monoidinin sunuşu

$$\wp_M = [X, Y : r, s, t] \tag{2.5}$$

biçimindedir.

İspat: $X = \{(x, 1_K) : x \in X\}$ ve $Y = \{(1_A, y) : y \in Y\}$ olsun ve $Z = X \cup Y$ diyelim. Z^* ile Z kümesinden elde edilen kelimelerin kümesini gösterelim.

$$\varphi : Z^* \to K \rtimes_\theta A$$

homomorfizmasını

$$(x)\varphi = (x, 1_K),$$
$$(y)\varphi = (1_A, y)$$

işlemleri ile tanımlayalım. $(x_1, 1_K), (x_2, 1_K), (1_A, y_1)$ ve $(1_A, y_2) \in K \rtimes_\theta A$ olmak üzere

$$(x_1, 1_K)(x_2, 1_K) = (x_1x_2, 1_K) \tag{2.6}$$
$$(1_A, y_1)(1_A, y_2) = (1_A, y_1y_2) \tag{2.7}$$
$$(x, 1_K)(1_A, y) = (x, y) \tag{2.8}$$

eşitlikleri ile Z, $K \rtimes_\theta A$ için bir üreteç kümesidir. Şimdi $K \rtimes_\theta A$ nın (2.5) deki bağıntıları sağladığını gösterelim.

$r = 1_K$ olsun.

$$\begin{aligned}(r)\varphi = (x_1x_2 \dots x_n)\varphi &= (x_1)\varphi(x_2)\varphi \dots (x_n)\varphi \\ &= (x_1, 1_K)(x_2, 1_K) \dots (x_n, 1_K) \\ &= (x_1x_2 \dots x_n, 1_K) \\ &= (r, 1_K) \\ &= (1_K, 1_K) \\ &= (1_K)\varphi\end{aligned}$$

bulunur. Benzer olarak $s = 1_A$ için $(s)\varphi = (1_A)\varphi$ elde edilir. Şimdi $yx = x\big((y)\theta_x\big)$ $(x \in X, y \in Y)$ olsun.

$$\begin{aligned}(yx)\varphi &= (y)\varphi(x)\varphi \\ &= (1_A, y)(x, 1_K) \\ &= (x, (y)\theta_x) \\ &= (x, 1_K)(1_A, (y)\theta_x) \\ &= \Big(x\big((y)\theta_x\big)\Big)\varphi\end{aligned}$$

olur. O halde 2.1.1 Önerme den φ homomorfizması (2.5) ile tanımlanmış herhangi bir N monoidinden $K \rtimes_\theta A$ olan $\overline{\varphi}$ homomorfizmasına genişletilebilir. Şimdi $\overline{\varphi}$ homomorfizmasının birebir ve örten olduğunu gösterelim.

$\omega \in Z^*$ boş kümeden farklı bir kelime olsun. $\omega = \omega_x\omega_y \in N$ olacak şekilde $\omega_x \in X^*$ ve $\omega_y \in Y^*$ kelimeleri vardır. Böylece

$$(\omega)\varphi = (\omega_x\omega_y)\varphi = (\omega_x)\varphi(\omega_y)\varphi = (\omega_x, 1_K)(1_A, \omega_y) = (\omega_x, \omega_y)$$

dir. O halde $\omega', \omega'' \in Z^*$ olmak üzere $(\omega')\varphi = (\omega'')\varphi$ olduğunu kabul edelim.

$$(\omega')\varphi = (\omega'_x\omega'_y)\varphi = (\omega'_x)\varphi(\omega'_y)\varphi = (\omega'_x, 1_K)(1_A, \omega'_y) = (\omega'_x, \omega'_y)$$

ve

$$(\omega'')\varphi = (\omega''_x\omega''_y)\varphi = (\omega''_x)\varphi(\omega''_y)\varphi = (\omega''_x, 1_K)(1_A, \omega''_y) = (\omega''_x, \omega''_y)$$

bu iki eşitlikten $(\omega'_x, \omega'_y) = (\omega''_x, \omega''_y)$ olur ve buradan da $\omega'_x = \omega''_x$, $\omega'_y = \omega''_y$ çıkar. (2.5) deki bağıntılardan hareketle $\omega'_x = \omega''_x$, $\omega'_y = \omega''_y$ bağıntılarının N de sağlandığı görülür. Böylece isteneni elde etmiş oluruz.□

Yarı direkt çarpımın bir genişlemesi olması nedeniyle şimdi de Monoidler üzerindeki Wreath Çarpım dan bahsedebiliriz.

2.2 Monoidlerin Wreath Çarpımı

A ve B monoid olsun. Bu durumda, A nın $|B|$ kadar kendisi ile Kartezyen çarpımı $A^{\times B}$ ile direkt çarpımı ise $A^{\oplus B}$ ile gösterelim. Ayrıca, başka bir ifadeyle, $A^{\times B}$ kümesini B den A monoidine tanımlanan bütün fonksiyonların kümesi, $A^{\oplus B}$ kümesini de bu şekildeki f fonksiyonlarından sonlu desteğe (support) sahip olanların kümesi olarak belirtebiliriz. Burada bir $f: B \to A$ fonksiyonunun sonlu desteğe sahip olma kavramını, $x, x' \in B$ için $x \neq x'$ iken $xf = a$ $(a \in A)$ olduğunda $x'f = 1_A$ olması olarak tanımlarız. Aslında bu durumu kısaca $\{x \in B \mid xf \neq 1_A\}$ kümesinin sonlu olması olarak da açıklayabiliriz.

A nın B ile kısıtlanmamış (unrestricted) ve kısıtlanmış (restricted) wreath çarpımları

$$(f,b)(g,b') = (fg^b, bb')$$

çarpma işlemi altında tanımlanmış, sırasıyla $A^{\times B} \times B$ ve $A^{\oplus B} \times B$ kümeleridir ve AW_rB ile $AwrB$ şeklinde gösterilir. Burada

$$g^{\mathrm{b}}\colon\ B \to A$$
$$xg^{\mathrm{b}} = (xb)g \quad (x \in B)$$

şeklinde tanımlanır. Kolayca görüleceği üzere AW_rB *ve* $AwrB$, birim elemanı $(\overline{1},\, 1_B)$ (Her $x \in B$ için $x\,\overline{1} = 1_{\mathrm{A}}$) olan monoiddir. Ayrıca [2] den $AW_rB = AwrB$ olması için gerek ve yeter koşul $|\mathrm{A}| = 1$ veya B nin sonlu olmasıdır.

Burada $\{(f,b) \mid f \in \mathrm{A}^{\oplus \mathrm{B}}\}$ ve $\{(\overline{1},\mathrm{b}) \mid b \in B\}$ kümeleri sırasıyla $\mathrm{A}^{\oplus \mathrm{B}}$ ve B ye izomorf olan $AwrB$ nin alt monoidleridir. Buradan yukarıda verilen işlem altında,

$$(f, 1_B)(\overline{1},\mathrm{b}) = (f,b), \qquad f \in \mathrm{A}^{\oplus \mathrm{B}},\ b \in B$$

dir. Şimdi $a \in A$ ve $b \in B$ için,

$$\overline{a_b} : B \to A$$

fonksiyonunu

$$\mathrm{c}\overline{a_b} = \begin{cases} a, & c = b \ ise \\ 1_A, & c \neq b \ ise \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Ayrıca, eğer $f\colon B \to A$ fonksiyonu sonlu desteğe sahipse bu durumda

$$f = \prod_{b \in B} \overline{f(b)_b}$$

biçimindedir. Ayrıca eğer A monoidi X kümesi ile üretilmişse, bu durumda A nın her a elemanı X'in elemanlarının $x^{(1)}x^{(2)}\ldots x^{(n)}$ şeklinde bir çarpımıyla ifade edilir. Bu durumda (Her $b \in B$ için)

$$\overline{a_b} = \overline{x_b^{(1)}}\,\overline{x_b^{(2)}} \ldots \overline{x_b^{(n)}}$$

şeklindedir.

2.2.1 Önerme [2] : A ve B monoidleri sırasıyla X ve Y kümeleri tarafından üretilsin ve

$$\overline{X_b} = \{(\overline{x_b}\ ,\ 1_B) \mid x \in X\ , b \in B\}$$
$$\overline{Y} = \{(\overline{1}\ ,\ y) \mid y \in Y\}$$

olsun. Bu durumda;

$\left(\bigcup_{b\in B} \overline{X_b}\right) \cup \overline{Y}$ kümesi $AwrB$ için bir üreteç kümesi olur.

İspat: $x \in X$, $b, b_1, b_2 \in B$ ve $y, y_1, y_2 \in Y$ olsun

$$\left(\overline{x_{b_1}}, 1_B\right)\left(\overline{x_{b_2}}, 1_B\right) = \left(\overline{x_{b_1}}\,\overline{x_{b_2}}, 1_B\right) = \left(\overline{x_b'}, 1_B\right), \quad \left(\overline{x_{b_1}}\,\overline{x_{b_2}} = \overline{x_b'}\right)$$
$$\left(\overline{1}, y_1\right)\left(\overline{1}, y_2\right) = \left(\overline{1}, y_1 y_2\right),$$
$$\left(\overline{1}, y\right)\left(\overline{x_b}, 1\right) = \left(\overline{x_b^y}, y\right),$$
$$\left(\overline{x_b}, 1\right)\left(\overline{1}, y\right) = \left(\overline{x_b}, y\right).$$

olduğundan ispat tamamlanır. □

Grupların Wreath çarpımının aksine yukarıdaki üreteç kümesi genellikle monoidler için mümkün olan en iyisidir. Yani yukarıdaki üreteç kümesinin dışında başka üreteç kümeleri de vardır, fakat en fazla kullanılan üreteç kümesi budur. Eğer B bir ayrıştırılamaz (indecomposable) birime sahipse yani;

$$bc = 1_B \Rightarrow b = c = 1_B\ , \quad (\text{Her } b, c \in B \text{ için})$$

oluyorsa bu durumda $AwrB$ nin herhangi üreteç kümesi

$$\{(f, 1_B) \mid f \in A^{\oplus B}\} \cong A^{\oplus B}$$

alt monoidi için bazı üreteç kümesi ihtiva etmelidir ve genelde $\bigcup_{b\in B} \overline{X_b}$, böylesi kümelerin en küçüğüdür. A nın birimi ayrıştırılamaz olduğunda $\overline{Y}$ nin durumu içinde benzer sonucu söyleyebiliriz.

Herhangi $b, c \in B$ için

$$b.c^{-1} = \{x \in B \mid xc = b\}$$

olsun. Şimdi monoidlerin wreath çarpımının sunuşunu veren aşağıdaki teoremi verebiliriz.

2.2.2 Teorem [2] : A ve B monoidleri sırasıyla $[X; R_A]$ ve $[Y; R_B]$ sunuşlarıyla temsil edilsin. $b \in B$ için $X_b = \{x_b | x \in X\}$ kümesi X'in bir imajı, $R_{A,b}$ kümesi de R_A bağıntı kümesinde her $x \in X$ için X_b yazılarak elde edilen bağıntıların kümesi olsun. Bu durumda $AwrB$ nin üreteç kümesi

$$\left(\bigcup_{beB} X_b\right) \cup Y$$

ve bağıntı kümeleri

$$R_{A,b}\ ,\ b \in B\ ;\ R_B\ ; \tag{2.9}$$

$$x_b x'_c = x'_c x_b\ ,\ x, x' \in X,\ b, c \in B,\ b \neq c\ ; \tag{2.10}$$

$$y x_b = \left(\prod_{c\in by^{-1}} x_c\right) y\ ,\ x \in X, y \in Y, b \in B\ ; \tag{2.11}$$

şeklinde dir.

İspat: $\phi : \left(\left(\bigcup_{beB} X_b\right) \cup Y\right)^* \to AwrB$ dönüşümünü

$x_b\phi = (\overline{x_b}\,, 1_{\mathrm{B}})$, $x \in X, b \in B,$
$y\,\phi = (\overline{1}\,, y)$, $y \in Y,$

şeklinde tanımlayalım. Bu dönüşümün 2.2.1 Önerme den örten olduğu görülür. Ayrıca A monoidinin sunuşundaki bağıntıların B nin mertebesi kadar imajı olacağı ve $A^{\oplus B}$ den dolayı da A nın elemanlarının imajlarının çarpımlarının değişmeli olacağı (2.9) ve (2.10) bağıntılarından kolayca görülür. Şimdi (2.11) bağıntısını elde etmeye çalışalım. Bunun için ilk olarak

$$(\overline{1}\,, y)(\overline{x_b}\,, 1_B) = (\overline{x_b^y}\,, y) = (\overline{x_b^y}\,, 1_B)(\overline{1}\,, y)$$

olduğu dikkate alınmalıdır. Her bir $d \in B$ için

$$d\overline{x_b^y} = (dy)\overline{x_b} = \begin{cases} x, & dy = 0\ ise \\ 1_A, & dy \neq 0\ ise \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x, & d \in by^{-1}\ ise \\ 1_A, & d \notin by^{-1}\ ise \end{cases}$$

$$= \prod_{c \in by^{-1}} d\overline{x_c} = d\left(\prod_{c \in by^{-1}} \overline{x_c}\right)$$

dir. Böylece

$$\overline{x_b^y} = \prod_{c \in by^{-1}} \overline{x_c}$$

elde edilir ve buradan da

$$(\bar{1}, y)(\overline{x_b}, 1_B) = \left(\prod_{c\in by^{-1}} (\bar{x}_c, 1_B)\right)(\bar{1}, y)$$

dir. Böylece, ϕ fonksiyonu, (2.9), (2.10) ve (2.11) bağıntıları ile tanımlanmış M monoidinden $AwrB$ üzerine olan bir epimorfizma olur.

Son olarak, ϕ nın bir monomorfizma olduğunu gösterelim. Bunun için w kelimesi M nin bir elemanını temsil etsin. Buradan

$$w = \left(\prod_{b\in B} (w(b))_b\right) w'$$

olacak şekilde $w(b) \in X^*(b \in B)$ ve $w' \in Y^*$ elemanlarının var olduğu kolayca görülebilir. (Burada $z \in X^*$ için z_b kelimesi, ${X_b}^*$ içindeki uygun bir kelimedir.) Şimdi her bir $w \in X^*$ ve $c \in B$ için

$$c\overline{w_b} = \begin{cases} w, & c = b \text{ ise} \\ 1_A, & c \neq b \text{ ise} \end{cases}$$

dir. Böylece bütün $c \in B$ için

$$c\left(\prod_{b\in B} \overline{(w(b))}_b\right) = \prod_{b\in B} \overline{c(w(b))}_b = cw \tag{2.12}$$

elde edilir. Herhangi iki $u, v \in \left(\left(\bigcup_{beB} X_b\right) \cup Y\right)^*$ kelimesi için

$$u\phi = v\phi \Rightarrow \left(\left(\prod_{b\in B} (u(b))_b\right) u'\right)\phi = \left(\left(\prod_{b\in B} (v(b))_b\right) v'\right)\phi$$

$$\Rightarrow \left(\left(\prod_{b\in B} (u(b))_b\right)\phi\right)(u'\phi) = \left(\left(\prod_{b\in B} (v(b))_b\right)\phi\right)(v'\phi)$$

$$\Rightarrow \left(\prod_{b \in B} \overline{(u(b))}_b, 1_B \right)(\bar{1}, u') = \left(\prod_{b \in B} \overline{(v(b))}_b, 1_B \right)(\bar{1}, v')$$

$$\Rightarrow \left(\prod_{b \in B} \overline{(u(b))}_b, u' \right) = \left(\prod_{b \in B} \overline{(v(b))}_b, v' \right)$$

elde edilir. Birinci bileşenlerin eşitliğinden (2.12)'i kullanarak her $c \in B$ için $u(c) = v(c)$ sonucuna ulaşılır. İkinci bileşenlerin eşitliğinden $u' = v'$ eşitliği elde edilir. Buradan da (2.9) bağıntısı M den alınan u ve v için $u = v$ eşitliğini verir. Böylece ϕ birebir ve örtendir.□

3. BAZI ÖNEMLİ MONOİD GENİŞLEMERİ

3.1 Giriş

Bu kısımda monoidler üzerinde en çok çalışılan genişlemelere yer verilecektir. Özellikle Schützenberger çarpımına, Yarı direkt çarpım altında Schützenberger çarpımının yeni bir versiyonuna bu yeni versiyonun Regülerliğine, Bruck – Reilly genişlemesine, Monoidlerin güçlü yarılatislerine, Rees Matris yarıgruplarına değinilecektir. Burada anlatılacak olan konular, [5-11] de ayrıntılı olarak anlatılmıştır.

3.2 Schützenberger Çarpımı

24 Ekim 1920 tarihinde dünyaya gelen ve Tıp doktoru olan Marcel-Paul Schützenberger, 1953 yılında Paris Üniversitesinde ikinci doktorasını matematik alanından almış olup kendi adıyla anılan Schützenberger Çarpımını ortaya koymuştur. Özellikle Automata ve Language Teorisinde çok önemli rol oynayan bu çarpım, günümüz önemli matematikçilerinin çalışma alanlarında konusu olmuştur.

Bu çarpım ile ilgili kısa bir bilgi verdikten sonra şimdi de bu çarpımın inşasına geçebiliriz.

3.2.1 Tanım : A ve B birer monoid olsunlar. Ayrıca $P \subseteq A \times B$ ve $a \in A$, $b \in B$ için

$$aP = \{(ac, d) | (c, d) \in P\}$$
$$Pb = \{(c, db) | (c, d) \in P\}$$

şeklinde bir çarpım tanımlansın. Buna göre A ve B nin Schützenberger çarpımı

$$(a_1, P_1, b_1)(a_2, P_2, b_2) = (a_1 a_2 ,\ P_1 b_2 \cup a_1 P_2 ,\ b_1 b_2)$$

işlemi altında tanımlı $A \times \wp(A \times B) \times B$ kümesi olup $A \Diamond B$ şeklinde gösterilir. Şimdi yukarıda verilen işlem altında $A \Diamond B$ nın birim elemanı $(1_A, \emptyset, 1_B)$ olan bir monoid olduğunu gösterelim.

$a_1, a_2, a_3 \in A$ ve $b_1, b_2, b_3 \in B$ olsun.

$$\begin{aligned}\big((a_1, P_1, b_1)(a_2, P_2, b_2)\big)(a_3, P_3, b_3) &= (a_1 a_2, P_1 b_2 \cup a_1 P_2, b_1 b_2)(a_3, P_3, b_3) \\ &= \big(a_1 a_2 a_3, (P_1 b_2 \cup a_1 P_2) b_3 \cup a_1 a_2 P_3, b_1 b_2 b_3\big) \\ &= (a_1, P_1, b_1)(a_2 a_3, P_2 b_3 \cup a_2 P_3, b_2 b_3) \\ &= (a_1, P_1, b_1)\big((a_2, P_2, b_2)(a_3, P_3, b_3)\big)\end{aligned}$$

olduğundan $A \Diamond B$ bir monoiddir.

3.2.2 Önerme [3] : A ve B monoidleri sırasıyla X ve Y kümeleri tarafından üretilsin.Bu durumda $A \Diamond B$ Schützenberger çarpımı

$$\{(x, \emptyset, 1_B) | x \in X\} \cup \{(1_A, \emptyset, y) | y \in Y\} \cup \{(1_A, \{(a, b)\}, 1_B) | a \in A ,\ b \in B\}$$

kümesi tarafından üretilir.

İspat: $a_1, a_2, a_3 \in A$, $b_1, b_2, b_3 \in B$ ve $P_1, P_2 \subseteq A \times B$ olsun.

$$(a_1, \emptyset, 1_B)(a_2, \emptyset, 1_B) = (a_1 a_2, \emptyset, 1_B) \tag{3.1}$$

$$(1_A, \emptyset, b_1)(1_A, \emptyset, b_2) = (1_A, \emptyset, b_1 b_2) \tag{3.2}$$

$$(1_A, P_1, 1_B)(1_A, P_2, 1_B) = (1_A, P_1 \cup P_2, 1_B) \tag{3.3}$$

$$(1_A, \emptyset, b)(1_A, P, 1_B)(a, \emptyset, 1_B) = (a, P, b) \tag{3.4}$$

olduğundan ispat kolayca görülür.□

Genelde bu üreteç kümesi $A\Diamond B$ için mümkün olan en iyi üreteç kümesidir. Aslında, Eğer $X \cup \{1_A\}$ ve $Y \cup \{1_A\}$ kümelerinin tüm elemanları sırasıyla A ve B nin ayrıştırılamaz elemanları ise, bu durumda 3.2.1 Önerme den $A\Diamond B$ için üreteçler $A\Diamond B$ içinde ayrıştırılamazlar dır ve bu nedenle $A\Diamond B$ nin tüm üreteç kümesine aittir.

Şimdi Schützenberger çarpımın sunuşunu veren aşağıdaki teoremi verebiliriz.

3.2.3 Teorem [3] : A ve B monoidleri sırasıyla $[X:R_A]$ ve $[Y:R_B]$ sunuşlarıyla temsil edilsinler. Bu durumda $A\Diamond B$ Schützenberger çarpımının üreteç kümesi

$Z = X \cup Y \cup \{z_{a,b} | a \in A, b \in B\}$ ve bağıntı kümesi;

$$R_A, R_B \; ; \tag{3.5}$$
$$z_{a,b}^2 = z_{a,b}\,, \; z_{a,b}z_{c,d} = z_{c,d}z_{a,b}, \quad a, c \in A, \; b, d \in B; \tag{3.6}$$
$$xz_{a,b} = z_{xa,b}x\,, \; x \in X, a \in A, b \in B; \tag{3.7}$$
$$z_{a,b}y = yz_{a,by}\,, \; y \in Y, a \in A, b \in B; \tag{3.8}$$
$$xy = yx\,, \; x \in X, y \in Y. \tag{3.9}$$

biçimindedir.

İspat : İlk olarak $\phi : Z^* \to A\Diamond B$ homomorfizma dönüşümünü

$$x\phi = (x, \emptyset, 1_B)\,, \; x \in X,$$
$$y\phi = (1_A, \emptyset, y), \; y \in Y,$$
$$z_{a,b}\phi = (1_A, \{(a,b)\}, 1_B).$$

biçiminde tanımlayalım. Bu dönüşümün 3.2.2 Önerme den örten olduğu kolaylıkla görülür. Şimdi (3.5) – (3.9) bağıntılarının $A\Diamond B$ yi sağladığını kontrol edelim. (3.5) ve (3.6), (3.1),(3.2) ve (3.3) den gelir. (3.7),(3.8) ve (3.9) ise;

Her $x \in X, y \in Y, a \in A, b \in B$ için

$$(x, \emptyset, 1_B)(1_A, \{(a,b)\}, 1_B) = (x, \{(xa,b)\}, 1_B) = (1_A, \{(xa,b)\}, 1_B)(x, \emptyset, 1_B),$$
$$(1_A, \{(a,b)\}, 1_B)(1_A, \emptyset, y) = (1_A, \{(a,by)\}, y) = (1_A, \emptyset, y)(1_A, \{(a,by)\}, 1_B),$$
$$(x, \emptyset, 1_B)(1_A, \emptyset, y) = (x, \emptyset, y) = (1_A, \emptyset, y)(x, \emptyset, 1_B),$$

eşitliklerinden elde edilir. Böylece ϕ dönüşümü (3.5) – (3.9) bağıntıları ile tanımlanan M monoidinden $A \Diamond B$ üzerine olan $\overline{\phi}$ epimorfizmasına indirgenir.

Şimdi $\overline{\phi}$ epimorfizmasının birebir olduğunu gösterelim. Bunun için $w \in Z^*$ boş kelimeden farklı herhangi bir kelimesini düşünelim. Burada (3.7),(3.8) ve (3.9) bağıntılarını kullanarak $l(w) \in Y^*$, $c(w) \in \{z_{a.b} | a \in A, b \in B\}^*$ ve $r(w) \in X^*$ için M içinde $w = l(w)c(w)r(w)$ olduğunu kolayca görebiliriz. Ayrıca (3.6) bağıntısını kullanarak da $P(w) \subseteq A \times B$ için

$$c(w) = \prod_{(a,b) \in P(w)} Z_{a,b}$$

biçimindedir. Bu nedenle herhangi bir $w \in Z^*$ kelimesi için

$$w\phi = (l(w))\phi(\mathrm{c(w)})\phi(r(w))\phi$$
$$= (1_A, \emptyset, l(w))(1_A, P(w), 1_B)(r(w), \emptyset, 1_B) = (r(w), P(w), l(w)).$$

eşitliği elde edilir.

Bazı w_1,$\mathrm{w}_2 \in \mathrm{Z}^*$ için $w_1\phi = w_2\phi$ eşitliğinin var olduğunu düşünelim. Bu durumda A içinde $r(w_1) = r(w_2)$, B içinde $l(w_1) = l(w_2)$ ve $P(w_1) = P(w_2)$ eşitlikleri de vardır. Buradan (3.5) de verilen bağıntıları kullanarak M içinde $r(w_1) = r(w_2)$ ve $l(w_1) = l(w_2)$ eşitliklerinin sağlandığını görür ve böylece $w_1 = w_2$ eşitliği elde edilir. Bu da bize $\overline{\phi}$ nin birebir olduğunu verir.□

3.3 Yarı Direkt Çarpım Altında Schützenberger Çarpımının Yeni Bir Versiyonu

Yarı direkt ve Shützenberger çarpım, önceki bölümlerdede söz edildiği üzere, grup, yarıgrup ve monoid cebrisel yapıları üzerinde çok çalışılan konulardandır. [13],[14],[17] ve [18] de verilen çalışmada yazarlar, acaba bu iki önemli çarpım kullanılarak yeni bir çarpım oluşturulabilir mi? sorusunu gündeme getirmiş ve aşağıda tanımını vereceğimiz yeni bir yapıyı ortaya koyup, bu yeni çarpımın bir takım özelliklerini de belirlemişlerdir.

3.3.1 Tanım : A ve B monoid olsunlar. $P \subseteq A \times B$ ve $b \in B$ için

$$Pb = \{(a, db)\ ;\ (a, d) \in P\}$$

çarpımı tanımlansın. A nın B ile yarı direkt çarpımı altında Schützenberger çarpımının yeni bir versiyonu

$$(a_1, P_1, b_1)(a_2, P_2, b_2) = \left(a_1(a_2)\theta_{b_1},\ P_1b_2 \cup P_2\ ,\ b_1b_2\right)$$

işlemi altında tanımlı $A \times \wp(A \times B) \times B$ kümesidir ve $A\Diamond_{sv}B$ şeklinde gösterilir. Şimdi $A\Diamond_{sv}B$ birim elemanı $(1_A, \emptyset, 1_B)$ olan bir monoid olduğunu gösterelim.

$(a_1, P_1, b_1), (a_2, P_2, b_2)$ ve (a_3, P_3, b_3) $A\Diamond_{sv}B$ nin elemanları olsunlar. Buna göre

$$\begin{aligned}\left((a_1, P_1, b_1)(a_2, P_2, b_2)\right)(a_3, P_3, b_3) &= \left(a_1(a_2)\theta_{b_1}, P_1b_2 \cup P_2\ ,\ b_1b_2\right)(a_3, P_3, b_3)\\ &= \left(a_1(a_2)\theta_{b_1}(a_3)\theta_{b_1b_2}, P_1b_2b_3 \cup P_2b_3 \cup P_3,\ b_1b_2b_3\right)\end{aligned}$$

ve

$$(a_1, P_1, b_1)\left((a_2, P_2, b_2)(a_3, P_3, b_3)\right) = (a_1, P_1, b_1)\left(a_2(a_3)\theta_{b_2}, P_2b_3 \cup P_3, b_2b_3\right)$$

$$= \left(a_1\left(a_2(a_3)\theta_{b_2}\right)\theta_{b_1}, P_1b_2b_3 \cup P_2b_3 \cup P_3,\ b_1b_2b_3\right)$$
$$= \left(a_1(a_2)\theta_{b_1}(a_3)\theta_{b_1b_2}, P_1b_2b_3 \cup P_2b_3 \cup P_3,\ b_1b_2b_3\right)$$

den elde edilir. Buda bize $A\Diamond_{sv}B$ nın bir monoid olduğunu verir.

Şimdi, yukarıda tanımlanan $A\Diamond_{sv}B$ monoidinin sunuşunu oluşturalım. Bunun için ilk önce bu monoidin üreteç kümesini belirleyen aşaığdaki önermeyi verelim.

3.3.2 Önerme [18]: A ve B monoidleri sırasıyla X ve Y kümeleri tarafından üretilsin. Bu durumda $A\Diamond_{sv}B$, $\{(x,\emptyset,1_B); x \in X\}$, $\{(1_A,\emptyset,y); y \in Y\}$ ve $\{(1_A,\{(a,b)\},1_B); a \in A\ ve\ b \in B\}$ kümelerinin birleşimi tarafından üretilir.

İspat : Tanımdan hareketle $a, a_1, a_2 \in A, b, b_1, b_2 \in B,\ P_1, P_2 \subseteq A \times B$ için aşağıdaki eşitliklerden kolayca gösterebiliriz.

$$\left(a_1,\emptyset,1_B\right)\left(a_2,\emptyset,1_B\right) = \left(a_1a_2,\emptyset,1_B\right) \tag{3.10}$$

$$\left(1_A,\emptyset,b_1\right)\left(1_A,\emptyset,b_2\right) = \left(1_A,\emptyset,b_1b_2\right) \tag{3.11}$$

$$\left(1_A,P_1,1_B\right)\left(1_A,P_2,1_B\right) = \left(1_A,P_1 \cup P_2,1_B\right) \tag{3.12}$$

$$\left(a,\emptyset,1_B\right)\left(1_A,\emptyset,b\right)\left(1_A,P,1_B\right) = \left(a,P,b\right).$$

Dolayısıyla yukarıda verilen eşitlikler bize $A\Diamond_{sv}B$ monoidinin

$$\{(x,\emptyset,1_B); x \in X\} \cup \{(1_A,\emptyset,y); y \in Y\} \cup \{(1_A,\{(a,b)\},1_B); a \in A\ ve\ b \in B\}$$

ile üretildiğini söyler. □

3.3.3 Teorem [18] : A ve B monoidleri sırasıyla $[X : R_A]$ ve $[Y : R_B]$ sunuşlarıyla temsil edilsin. Bu durumda $A\Diamond_{sv}B$ monoidinin

$$Z = X \cup Y \cup \{z_{a,b}\ ; a \in A, b \in B\}$$

üreteç kümesi ve

$$R_A, R_B, \tag{3.13}$$

$$yx = \left((x)\theta_y\right) y \ (x \in X\,, y \in Y), \tag{3.14}$$

$$z_{a,b}^2 = z_{a,b},\ z_{a,b}z_{c,d} = z_{c,d}z_{a,b}\ (a, c \in A,\ b, d \in B), \tag{3.15}$$

$$z_{a,b}y = yz_{a,by}\ ,\ xz_{a,b} = z_{a,b}x\ (x \in X, y \in Y, a \in A, b \in B). \tag{3.16}$$

bağıntı kümesidir.

İspat : Z içindeki tüm kelimelerin kümesini Z^* ile gösterelim ayrıca

$$\varphi: Z^* \to A\Diamond_{sv}B$$

dönüşümünü, $x \in X, y \in Y, a \in A$ ve $b \in B$ için

$$x\varphi = (x, \emptyset, 1_B),$$
$$y\varphi = (1_A, \emptyset, y)$$
$$z_{a,b}\varphi = (1_A, \{(a,b)\}, 1_B)$$

ile tanımlayalım. 3.3.2 Önerme den θ nın örten bir homomorfizma olduğu kolayca görülür. Şimdi (3.13)-(3.16) bağıntılarının $A\Diamond_{sv}B$ yi sağladığını kontrol edelim. Aslında (3.13) ve (3.15) bağıntıları (3.10),(3.11) ve (3.12) bağıntılarından elde edilir. (3.16) bağıntıları için

$$\begin{aligned}(1_A, \{(a,b)\}, 1_B)(1_A, \emptyset, y) &= (1_A, \{(a, by)\}, y)\\ &= (1_A, \emptyset, y)(1_A, \{(a, by)\}, 1_B),\\ (x, \emptyset, 1_B)(1_A, \{(a,b)\}, 1_B) &= (x, \{(a,b)\}, 1_B)\\ &= (1_A, \{(a,b)\}, 1_B)(x, \emptyset, 1_B)\end{aligned}$$

eşitlikleri vardır. Şimdi (3.14) bağıntılarının sağlandığını gösterelim.
Tüm $x \in X, y \in Y, a \in A, b \in B$ için,

$$(1_A, \emptyset, y)(x, \emptyset, 1_B) = \left((x)\theta_y, \emptyset, y\right) = \left((x)\theta_y, \emptyset, 1_B\right)(1_A, \emptyset, y)$$

dir. Bu nedenle φ dönüşümü, (3.13) – (3.16) bağıntıları ile tanımlanan M monoidinden $A\Diamond_{sv}B$ üzerine olan $\bar{\varphi}$ epimorfizmasına indirgenir.

Şimdi $\bar{\varphi}$ epimorfizmasının birebir olduğunu gösterelim. Bunun için $\omega \in Z^*$ boş kelimeden farklı herhangi bir kelimesini düşünelim. Burada (3.14) ve (3.16) bağıntılarını kullanarak $\omega_x \in X^*$, $\omega_y \in Y^*$ ve $\omega_{a,b} \in \{z_{a,b}\colon a \in A, b \in B\}^*$ için, M içinde $\omega = \omega_x\omega_y\omega_{a,b}$ olduğunu kolayca görebiliriz. Ayrıca (3.15) bağıntısını kullanarak da $P(\omega) \subseteq A \times B$ için $w_{a,b} = \prod_{(a,b)\in P(w)} z_{a,b}$ biçimindedir. Bu nedenle herhangi bir $\omega \in Z^*$ kelimesi için.

$$\begin{aligned}
\omega\varphi &= (\omega_x\omega_y\omega_{a,b})\varphi = (\omega_x)\varphi(\omega_y)\varphi(\omega_{a,b})\varphi \\
&= (\omega_x, \emptyset, 1_B)(1_A, \emptyset, \omega_y)(1_A, P(\omega), 1_B) \\
&= (\omega_x, P(\omega), \omega_y)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Bazı $\omega', \omega'' \in Z^*$ *için* $(\omega')\varphi = (\omega)\varphi$ eşitliğinin var olduğunu düşünelim. Bu durumda bu bileşenlerin eşitliğini kullanarak A içinde $\omega'_x = \omega''_x$, B içinde $\omega'_y = \omega''_y$ ve $P(\omega') = P(\omega'')$ eşitlikleri de vardır. Buradan (3.13) de verilen bağıntıları kullanarak M içinde $\omega'_x = \omega''_x$ ve $\omega'_y = \omega''_y$ sağlandığını görür ve böylece $\omega' = \omega''$ eşitliği elde ederiz. Bu da bize $\bar{\varphi}$ nin birebir olduğunu verir.□

3.3.3 Teoreminin bir uygulaması olarak A ve B sonlu devirli monoidler olmak üzere aşağıdaki sonucu verebiliriz.

3.3.4 Sonuç [18] : A ve B sonlu devirli monoidleri sırasıyla

$$\wp_A = [x\colon x^k = x^l (k > l)] \quad \text{ve} \quad \wp_B = [y\colon y^s = y^t (s > t)]$$

sunuşlarıyla temsil edilsin. Ayrıca $x^{i^s} = x^{i^t}$ $(0 \leq i \leq k)$ eşitliği verilsin. Bu durumda $A\Diamond_{sv}B$, $0\leq m, p \leq k-1, 0 \leq n, q \leq s-1$ olmak üzere

$$\wp_{A\Diamond_{sv}B} = [x, y, z_{x^m, y^n} : \ x^k = x^l, \ xz_{x^m,y^n} = z_{x^m,y^n}x,$$

$$yx = x^i y, z^2_{x^m y^n} = z_{x^m,y^n},$$

$$z_{x^m,y^n}z_{x^p,y^q} = z_{x^p,y^q}z_{x^m,y^n} ,$$

$$y^s = y^t, z_{x^m,y^n}y = yz_{x^m,y^{n+1}}]$$

sunuşuyla temsil edilir.

İspat : δ_i $(0 \leq i \leq k)$, A nın bir endomorfizması olsun. Bu durumda

$$y \to End(A), \ y \mapsto \delta_i$$

dönüşümü $[15]$ den

$$\theta: B \to End(A), \ y \mapsto \delta_i$$

homomorfizmasına indirgenmesi için gerek ve yeter koşul $\delta_i{}^s = \delta_i{}^t$ olmasıdır. Buradan $x^{i^s} = x^{i^t}$ eşitliğine kolayca ulaşılır. Buda bize $yx = x^i y$ sonucunu verir. Geriye kalan bağıntıları ise (3.13),(3.15) ve (3.16) bağıntılarını kullanarak kolayca görmek mümkündür. Böylece ispat tamamlanır.□

3.3.5 Not : Eğer A (ya da B) sonsuz ise bu durumda $A\Diamond_{sv}B$ çarpımı sonsuz üreteç kümesine sahip olduğu kolayca görülebilir. Bu nedenle bazı cebirsel özellikleri sonlu üreteç kümeli yarı direkt çarpımından sonsuz (yada sonlu) üreteç kümeli bu yeni versiyona aktarılabilir.

3.4 $A\Diamond_{sv}B$ nin Regülerliliği

Bu bölümde amacımız A ve B nin her ikiside keyfiyken $A\Diamond_{sv}B$ nin regüler olması için gerekli ve yeterli koşulları vermektir. Bu nedenle 3.3.5 Not da tarif edildiği gibi sadece sonlu üreteçli kümelerde çalışmayacağız. Aslında $A\Diamond_{sv}B$ nin üreteç kümesi A ve B sonlu üreteç kümesine sahipken sonsuz olabilir.

Bir M monoidinden alınan bir a eleman için, M nin a elemanının terslerinin kümesinden a^{-1} elemanını alalım. Burada

$$a^{-1} = \{b \in B : aba = a \ \ ve \ \ bab = b\}$$

dir. Buna göre M monoidinin regüler olması için gerek ve yeter koşul, tüm $a \in M$ için a^{-1} kümesinin boş kümeden farklı olmasıdır.

3.4.1 Teorem [18]: A ve B herhangi bir monoid olsunlar. $A\Diamond_{sv}B$ çarpımının regüler olması için gerek ve yeter şart:

(i) A ve B regülerdir,

(ii) Tüm $a \in A$ ve $b \in B$ için, bir $e^2 = e \in B$ için $bB = eB$ idempotent ve (2.11) de verildiği gibi $\theta : B \to End(A)$ bir homomorfizma olmak üzere $a \in A(a)\theta_e$ biçimindedir,

(iii) Her $(a, P, b) \in A\Diamond_{sv}B$ için, $P_1 \subseteq A \times B$ ve $d \in b^{-1}$ olmak üzere ya

$$P = P_1 b = \bigcup_{(a_1,b_1)\in P_1} \{(a_1, b_1 b)\}$$

ya da

$$P = P_1 bd = \bigcup_{(a_1,b_1)\in P_1} \{(a_1, b_1 bd)\}$$

olmasıdır.

İspat: $A\Diamond_{sv}B$ nin regüler olduğunu varsayalım. Böylece $(a, \emptyset, 1_B) \in A\Diamond_{sv}B$ için (c, P, d) vardır ve bu

$$(a, \emptyset, 1_B) = (a, \emptyset, 1_B)(c, P, d)(a, \emptyset, 1_B) = (ac(a)\theta_d, P, d),$$
$$(c, P, d) = (c, P, d)(a, \emptyset, 1_B)(c, P, d) = (c(a)\theta_d(c)\theta_d, P, dd).$$

dir. Bu nedenle $d = 1_B$ dir. Bu $a = aca$ ve $c = cac$ olduğunu gösterir. Benzer iddayı kullanarak $b = bdb$ ve $d = dbd$ olduğunu gösterebiliriz. Bu durum bize $bd = e = e^2$ nin $bB = eB$ ve $a \in A(a)\theta_e$ yi sağladığını gösterir. Dolayısıyla (i) ve (ii) sağlanmış olur. $A\lozenge_{sv}B$ nin regülerliliğinin varsayımından, $(a, P, b) \in A\lozenge_{sv}B$ için, $(c, P_2, d) \in A\lozenge_{sv}B$ elemanları vardır ve

$$(a, P, b) = (a, P, b)(c, P_2, d)(a, P, b),$$
$$(c, P_2, d) = (c, P_2, d)(a, P, b)(c, P_2, d)$$

dir. Böylece $P = Pdb \cup P_2b \cup P$ ve $P_2 = P_2bd \cup Pd \cup P_2$ dir. $b = bdb$ ve $d = dbd$ olduğundan, tüm $(a, P, b) \in A\lozenge_{sv}B$ için $P_1 \subseteq A \times B$ ve $d \in b^{-1}$ olmak üzere ya $P = P_1b$ ya da $P = P_1bd$ dir. Aksi takdirde tüm $P_2 \subseteq A \times B$ için P, $Pdb \cup P_2b \cup P$ ye eşit olamazdı ki bu $A\lozenge_{sv}B$ nın regülerliliği için bir çelişki verirdi. Bundan dolayı (iii) sağlanmış olur.

Tersine A ve B nin $(i), (ii)$ ve (iii) koşullarını sağladığını varsayalım. $(a, P, b) \in A\lozenge_{sv}B$, $bB = eB$ olacak şekilde $e^2 = e \in B$ ve $a \in A(a)\theta_e$ olsun. Bu durumda bazı $u \in A$ vardır ve $a = u(a)\theta_e$ dir. Ayrıca $bd = e$ ve $d \in b^{-1}$ olacak şekilde bazı $d \in B$ vardır. A regüler olduğundan bazı $v \in a^{-1}$ için $c = (v)\theta_d$ alabiliriz.

$$\begin{aligned} a(c)\theta_b(a)\theta_{bd} &= u(a)\theta_e\big((v)\theta_d\big)\theta_b(a)\theta_{bd} = u(a)\theta_e(v)\theta_{bd}(a)\theta_{bd} \\ &= u(a)\theta_e(v)\theta_e(a)\theta_e = u(ava)\theta_e = u(a)\theta_e = a, \\ c(a)\theta_d(c)\theta_{db} &= (v)\theta_d(a)\theta_d\big((v)\theta_d\big)\theta_{db} = (v)\theta_d(a)\theta_d(v)\theta_{db} \\ &= (v)\theta_d(a)\theta_d(v)\theta_d = (vav)\theta_d = (v)\theta_d = c. \end{aligned}$$

eşitlikleri vardır. Ayrıca (iii) koşulundan $P_1 \subseteq A \times B$ olmak üzere elimizde $P = P_1b$ vardır. Bu durumda

$$\begin{aligned} Pdb \cup P_2b \cup P &= P_1bdb \cup P_1bdb \cup P_1b = P_1b \cup P_1b \cup P_1b \\ &= P_1b = P, \\ P_2bd \cup Pd \cup P_2 &= P_1bdbd \cup P_1bd \cup P_1bd = P_1bd \cup P_1bd \cup P_1bd \end{aligned}$$

$$= P_1bd = P_2.$$

olacak şekilde $P_2 = P_1bd \subseteq A \times B$ vardır. Sonuç olarak, tüm $(a, P, b) \in A\Diamond_{sv}B$ için,

$$\begin{aligned}
(a,P,b)(c,P_2,d)(a,P,b) &= (a(c)\theta_b(a)\theta_{bd}, P_{db} \cup P_2b \cup P, bdb) \\
&= (a,P,b) \\
(c,P_2,d)(a,P,b)(c,P_2,d) &= (c(a)\theta_d(c)\theta_{db}, P_2bd \cup Pd \cup P_2, dbd) \\
&= (c,P_2,d).
\end{aligned}$$

eşitliklerini sağlayan $(c, P_2, d) \in A\Diamond_{sv}B$ elemanı vardır. Bu da istediğimiz sonuçtur.□

3.5 Bruck – Reilly Genişlemesi

Bruck – Reilly Genişlemesi Bruck, Reilly ve Munn tarafından oluşturulan yapıların genelleştirilmiş halidir ve tersinir yarıgrup teorisinde önemli rol oynamaktadır.

Bruck – Reilly genişlemelerinin inşa edilme süreci, Bruck'un 1958 de her S yarıgrubunun bir monoid içerisine gömülebileceğini göstermesiyle başlamıştır. Bruck, $\mathbb{N}^0 \times S^1 \times \mathbb{N}^0$ kümesi üzerinde S^1 in her elemanını S^1 in birim elemanına eşleyen θ homomorfizmi ile aşağıda tanımlanacak olan işlemini tanımlamış ve bu yapının S ye izomorfik olan bir alt yarıgrubu içeren (bu alt yarıgrup $\{(0, s, 0): s \in S\}$ dir) bir monoid olduğunu göstermiştir. Elde edilen bu yapıya **Bruck genişlemesi** diyoruz.

1966 yılında Reilly aynı yapıyı bir G grubu üzerinde ve θ homomorfizminin G üzerinde herhangi bir endomorfizm alarak tekrar inşa etti. Bu yapıya ise **Reilly genişlemesi** diyoruz. 1970 de Munn bu genişlemeleri genelleştirerek Bruck – Reilly genişlemesi terimini ortaya koymuş ve bunu herhangi bir M monoidinin M den M nin birimlerinin oluşturduğu gruba tanımlanan θ homomorfizmi olan genişlemesi olarak tanımlamıştır. Bu konuyla ilgili daha ayrıntılı bilgiler [20] den elde edilebilir.

Bu genişlemenin tarihsel gelişimi ile ilgili kısa bir bilgi verdikten sonra bu genişlemenin tanımına geçebiliriz.

3.5.1 Tanım : A bir monoid ve $\theta : A \to A$ bir endomorfizm olsun. Buna göre $\mathbb{N}^0 \times A \times \mathbb{N}^0$ kümesi üzerinde,

$$(m, a, n)(p, b, q) = (m - n + t, (a\theta^{t-n})(b\theta^{t-p}), q - p + t)$$

işlemi tanımlansın. Burada $t = max\,(n, p)$ dir. $\mathbb{N}^0 \times A \times \mathbb{N}^0$ kümesi yukarıda verilen işlemle birlikte birim elemanı $(0, 1_A, 0)$ olan bir monoid olur ve bu monoid $S(A, \theta)$ ile gösterilir.

Eğer her $a \in A$ için $a\theta = 1_A$ ise $S(A, \theta)$ Bruck'un genişlemesine, A nın bir grup olması durumunda ise Reilly'nin genişlemesine sahip oluruz, son olarak da eğer θ nın görüntüsü A grubunun birimini içeriyorsa bu durumda genel Bruck – Reilly genişlemesini elde etmiş oluruz.

3.5.2 Önerme [2] : X kümesi A monoidi için bir üreteç kümesi olsun. Bu durumda

$$\{(0, x, 0) | x \in X\} \cup \{(0, 1_A, 1), (1, 1_A, 0)\}$$

kümesi de $S(A, \theta)$ monoidi için bir üreteç kümesi olur.

İspat: 3.5.1 Tanımda verilen işlem altında,

$$(0, a, 0)(0, b, 0) = (0, ab, 0), \quad a, b \in A, \tag{3.17}$$

$$(m, 1_A, 0)(n, 1_A, 0) = (m + n, 1_A, 0), \;\; m, n \in N^0, \tag{3.18}$$

$$(0, 1_A, m)(0, 1_A, n) = (0, 1_A, m + n), \;\; m, n \in N^0, \tag{3.19}$$

$$(m, 1_A, 0)(0, a, 0)(0, 1_A, n) = (m, a, n), a \in A, m, n \in N^0 \tag{3.20}$$

eşitlikleri kolayca görülür.□

Şimdi Bruck – Reilly genişlemesinin sunuşunu veren aşağıdaki teoremi verebiliriz.

3.5.3 Teorem [2] : A monoidi $[X\colon R]$ sunuşu ile temsil edilsin ve $\theta : A \to A$ bir endomorfizma olsun. Bu durumda $S(A,\theta)$ monoidi

$$[X, y, z : R, yz = 1, yx = (x\theta)y, xz = z(x\theta), x \in X] \tag{3.21}$$

şeklinde bir sunuşa sahiptir.

İspat: İlk olarak $X \cup \{y, z\}$ kümesini Y ile gösterelim. Ayrıca $\phi\colon Y^* \to S(A,\theta)$ dönüşümü

$$x\phi = (0, x, 0),\ \ x \in X,$$
$$y\phi = (0, 1_A, 1),$$
$$z\phi = (1, 1_A, 0),$$

biçiminde tanımlı monoid homomorfizması olsun. Bu durumda ϕ dönüşümü, 3.5.1 Önermeden örten olduğu kolaylıkla görülür.

R bağıntıları A yı sağladığından (3.17) bağıntısı nedeniyle bu bağıntılar ayrıca $S(A,\theta)$ yı da sağlar. (3.21) deki diğer bağıntıların $S\left(A,\theta\right)$ tarafından sağlandığı da

$$(0, 1_A, 1)(1, 1_A, 0) = (0, 1_A, 0),$$
$$(0, 1_A, 1)(0, x, 0) = (0, x\theta, 1) = (0, x\theta, 0)(0, 1_A, 1),$$
$$(0, x, 0)(1, 1_A, 0) = (1, x\theta, 0) = (1, 1_A, 0)(0, x\theta, 0),$$

eşitliklerinden görülür. Bu nedenle ϕ dönüşümü, (3.18) bağıntısı ile tanımlı M monoidinden $S(A,\theta)$ üzerine olan bir $\overline{\phi}$ epimorfizmasına indirgenir.

Şimdi $\overline{\phi}$ epimorfizmasının birebir olduğunu gösterelim. Bunun için boş kelimeden farklı herhangi bir $w \in Y^*$ kelimesinin $m, n \in N^0, u \in X^*$ olmak üzere M içinde $f(m,u,n) = z^m u y^n$ formunda bir kelimeye eşit olduğunu gösterelim. Eğer $|w| = 1$ ise, bu durumda $w = x = f(0,x,0)$, $x \in X$ veya $w = y = f(0,\varepsilon,1)$ veya $w = z = f(1,\varepsilon,0)$ dir. Burada ki ε boş kelimeyi gösterir. Tümevarım gereği l uzunluğundaki her bir kelimenin $f(m,u,n)$ formundaki bir kelimeye indirgenebileceğini varsayalım ve $|w| = l$ olsun. Bu durumda w kelimesi ya $f(m,u,n)x,\ x \in X$ ya $f(m,u,n)y$ ya da $f(m,u,n)z$ formun da yazılabilir.

$$f(m,u,n)x = z^m w y^n x = z^m w(x\theta^n)y^n = f(m, w(x\theta^n), n),$$
$$f(m,u,n)y = z^m w y^n y = f(m,w,n+1),$$
$$f(m,u,n)z = z^m w y^n z = \begin{cases} f(m,w,n-1), & n \geq 1 \ ise \\ f(m+1, w\theta, 0), & n = 0 \ ise, \end{cases}$$

buradaki eşitlikleden tümevarım adımı tamamlanmış olur.

Son olarak $\big(f(m_1,w_1,n_1)\big)\phi = \big(f(m_2,w_2,n_2)\big)\phi$ eşitliğinin var olduğunu düşünelim. Bu durumda $(m_1,w_1,n_1) = (m_2,w_2,n_2)$ olur ve böylece A içinde $\mathrm{w}_1 = \mathrm{w}_2$ ve $m_1 = m_2, n_1 = n_2$ elde edilir. (3.21) sunuşu R yi içerdiğinden M içinde $w_1 = w_2$ eşitliğinin sağlandığı sonucunu çıkarabiliriz ve bu nedenle M içinde $f(m_1,w_1,n_1) = f(m_2,w_2,n_2)$ eşitliği vardır. Böylece $\overline{\phi}$ birebirdir ve istenen elde edilmiş olur.□

3.6 Monoidlerin Güçlü Yarılatisleri

Y bir yarılatis ve A_α, $\alpha \in \mathrm{Y}$, (ayrık) monoidlerin Y ile indekslenen bir ailesi olsun. A_α nın birim elemanı 1_α ile gösterilir. Herhangi iki $\alpha, \beta \in Y$, $\alpha \geq \beta$, için

(a) $\phi_{\alpha,\alpha}$, A_α üzerinde birim dönüşüm;

(b) $\phi_{\alpha,\beta}\phi_{\beta,\gamma} = \phi_{\alpha,\gamma}$, her $\alpha,\beta,\gamma \in Y$ için , $\alpha \geq \beta \geq \gamma$.

koşullarını sağlayan bir $\phi_{\alpha,\beta} : A_\alpha \to A_\beta$ homomorfizması var olsun. $S = \bigcup_{\alpha \in Y} A_\alpha$ kümesi $a \in A_\alpha$ ve $b \in A_\beta$ için,

$$ab = \left(a\phi_{\alpha,\alpha\beta}\right)\left(b\phi_{\beta,\alpha\beta}\right)$$

işlemi ile birlikte bir yarıgruba dönüştürülebilir. Biz bu yarıgrubu $S\left(Y; A_\alpha, \phi_{\alpha,\beta}\right)$ ile göstereceğiz.

Şimdi, yukarıda tanımlanan $S\left(Y; A_\alpha, \phi_{\alpha,\beta}\right)$ yarıgrubunun sunuşunu oluşturabilmemiz için aşağıda ki teoremi verebiliriz.

3.6.1 Teorem [2] : Y bir yarılatis, A_α, $\alpha \in Y$, ayrık monoidlerin bir ailesi ve $\phi_{\alpha,\beta} : A_\alpha \to A_\beta$, $\alpha \geq \beta$ yukarıda tanımda verilen (a) ve (b) koşullarını sağlayan homomorfizmaların bir ailesi olsun. A_α monoidlerinin her biri $\alpha \neq \beta$, $X_\alpha \cap X_\beta \neq \varnothing$ için $\langle X_\alpha : R_\alpha \rangle$ şeklinde bir yarıgrup sunuşuna sahip olsun. $X = \bigcup_{\alpha \in Y} X_\alpha$, $R = \bigcup_{\alpha \in Y} R_\alpha$ ve $1_\alpha \in X_\alpha^+$,$\alpha \in Y$ X_α nın birimini temsil eden bir kelime olsun. Bu durumda

$$\left\langle X : R, 1_\alpha 1_\beta = 1_{\alpha\beta}, \left(\alpha, \beta \in Y \alpha \neq \beta\right), 1_\beta x = x 1_\beta = x\phi_{\alpha,\beta}\left(x \in X_\alpha, \alpha > \beta\right)\right\rangle \tag{3.22}$$

sunuşu, $S\left(Y; A_\alpha, \phi_{\alpha,\beta}\right)$ yarıgrubunun sunuşunu temsil eder.

İspat : $S\left(Y; A_\alpha, \phi_{\alpha,\beta}\right)$ yarıgrubunu S ve T ile gösterelim ve yarıgrup (3.22) den tanımlansın. Listelenen tüm bağıntılar S içinde sağlanır ve böylece S, T nin bir homomorfik görüntüsü olur. Eğer X_α üreteç kümesi içerisindeki iki kelime T yarı grubu içerisinde eşit ise bu durumda bu kelimeler A_α monoidi içerisinde eşittirler ve böylece A_α nın aynı elemanını temsil ederler. Tersine, eğer kelimeler A_α monoidinin aynı elemanını temsil ediyorlarsa bu durumda bunlar R_α bağıntılarına göre denktirler ve böylece bunlar kesinlikle T içerisinde eşit olurlar. Böylece T esasında A_α monoidlerinin ayrık birleşimlerini içerir.

$1_\beta x = x1_{\beta=} x\phi_{\alpha,\beta}$, $x \in X_\alpha$ bağıntıları genişletilerek A_α nın tüm elemanlarını kapsadığı dikkat edilmelidir. Eğer $a = x_1 x_2 \ldots . x_n$, X_α içindeki elemanların bir çarpımı ise bu durumda tüm $\alpha > \beta$ için

$$\begin{aligned} 1_\beta a &= 1_\beta x_1 1_\beta x_2 \ldots 1_\beta x_n \\ &= \left(x_1\phi_{\alpha,\beta}\right)\left(x_2\phi_{\alpha,\beta}\right)\ldots\left(x_n\phi_{\alpha,\beta}\right) \\ &= a\phi_{\alpha,\beta}, \end{aligned}$$

ve benzer olarak $a1_\beta = a\phi_{\alpha,\beta}$.

Eğer $a \in A_\alpha$ ve $b \in G_\beta$ ise bu durumda

$$ab = a1_\alpha 1_\beta b = a1_{\alpha\beta} b = \left(a\phi_{\alpha,\alpha\beta}\right)\left(b\phi_{\beta,\alpha\beta}\right) \in A_{\alpha\beta}$$

olduğu kolayca görülebilir. Böylece T , A_α monoidlerinin ayrık birleşimidir ve S ye izomorftur.□

3.7 Rees Matris Yarıgrupları

A bir monoid, 0, A ya ait olmayan bir eleman, I ve Λ indeks kümeleri ve $P = (p_{\lambda i})$ $\lambda \in \Lambda$, $i \in I$ girdileri $A \cup \{0\}$ kümesinden olan $|\Lambda| \times |I|$ lık bir matris olsun. $M^0[A; I, \Lambda; P]$ Rees matris yarıgrubu

$$(i_1, a_1, \lambda_1)(i_2, a_2, \lambda_2) = \begin{cases} (i_1, a_1 p_{\lambda_1 i_2} a_2, \lambda_2) & p_{\lambda_1 i_2} \neq 0 \; ise \\ 0 & p_{\lambda_1 i_2} = 0 \; ise \end{cases}$$

$$0(i, a, \lambda) = (i.a.\lambda)0 = 00 = 0$$

işlemi ile tanımlı $(I \times A \times \Lambda) \cup \{0\}$ kümesidir.

P nin tüm girdileri 0 ise, bu durumda elde edilen yarıgrup $|I| \times |A| \times |\Lambda| + 1$ elemanlı ve sıfır çarpım yarıgrubudur ve bu yarıgrup için en basit sunuş onun çarpım tablosudur. Bu yüzden biz P, sıfırdan farklı girdiler içerdiğinde sadece aşikar olmayan durumları göz önüne alacağız. Biz bunu daha da sınırlayarak dikkatimizi P nin en azından A nın bir birim elemanını içerdiği yerdeki durumlarla ilgileneceğiz. Bu aslında P nin 1_A ya eşit bir girişi olduğunu varsaymakla eşdeğerdir. Eğer P terslenebilir bir girdiye sahipse biz bunu p_{11} ile gösterebiliriz, bu durumda

$$(i, a, \lambda) \mapsto (i, ap_{11}, \lambda)$$

dönüşümü $P' = (P'_{\lambda i}) = (P_{11}^{-1} P_{\lambda i})$ olmak üzere $M^0[A; I, \Lambda; P]$ den $M^0[A; I, \Lambda; P']$ üzerine bir izomorfizm olur ve açıkça $P'_{11} = 1_A$ olur.

Şimdi, yukarıda tanımlanan $M^0[A; I, \Lambda; P]$ yarıgrubunun sunuşunu oluşturalım. Bunun için ilk önce bu yarıgrubun üreteç kümesini belirleyen aşağıdaki önermeyi verelim.

3.7.1 Önerme [2] : A monoidi X kümesi tarafından bir yarıgrup olarak üretilsin. Ayrıca P, girdileri $A \cup \{0\}$ kümesinden olan $|\Lambda| \times |I|$ lık bir matris ve $p_{11} = 1_A$ olsun. Bu durumda $M^0[A; I, \Lambda; P]$ Rees matris yarıgrubu

$$\{(1, x, 1) | x \in X\} \cup \{(i, 1_A, 1) \big| i \in I - \{1\}\} \cup \{(1, 1_A, \lambda) \big| \lambda \in \Lambda - \{1\}\}$$

kümesi tarafından sıfır ile birlikte bir yarıgrup olarak üretilir.

İspat: $\{(1, x, 1) | x \in X\}$ kümesi $p_{11} = 1_A$ olması nedeniyle $\{(1, a, 1) | a \in A\} \cong A$ altyarıgrubunu üretir. $M^0[A; I, \Lambda; P]$ nın sıfırdan farklı herhangi (i, a, λ) elemanı için $(i, a, \lambda) = (i, 1_A, 1)(1, a, 1)(1, 1_A, \lambda)$ eşitliğinden dolayı ispat kolayca görülebilir. □

Bu önerme ile $M^0[A;I,\Lambda;P]$ yarıgrubunun üreteç kümesini elde ettiğimize göre şimdi $M^0[A;I,\Lambda;P]$ nin sunuşunu veren aşağıdaki teoremi verebiliriz.

3.7.2 Teorem [2] : A bir monoid, P girdileri A dan olan $|\Lambda| \times |I|$ lık bir matris ve $p_{11} = 1_A$ olmak üzere $S = M^0[A;I,\Lambda;P]$ bir Rees matris yarıgrubu olsun. $\langle X:R \rangle$ A için bir yarıgrup sunuşu, $e \in X^*$ A nın 1_A birim elemanını temsil eden boş olmayan bir kelime ve $Y = X \cup \{y_i | i \in I - \{1\}\} \cup \{z_\lambda \mid \lambda \in \Lambda - \{1\}\}$ olsun. Bu durumda

$$\left\langle Y:R, y_i e = y_i, e y_i = p_{1i}, z_\lambda e = z_\lambda, z_\lambda y_i = p_{\lambda i} \left(i \in I - \{1\}, \lambda \in \Lambda - \{1\}\right)\right\rangle \tag{3.23}$$

sunuşu S yi sıfır ile birlikte bir yarıgrup olarak tanımlar.

İspat : T kümesi (3.23) de tanımlandığı gibi sıfırlı bir yarıgrup olsun. $\phi: Y^* \to S$ dönüşümü

$$x\phi = (1,x,1),$$
$$y\phi = (i,1_A,1),\ i \in I - \{1\},$$
$$z\phi = (1,1_A,\lambda),\ \lambda \in \Lambda - \{1\},$$

ile tanımlayalım.

$$e\phi = (1,1_A,1) \text{ ve } p_{\lambda i}\phi = \begin{cases} (1,p_{\lambda i},1) & p_{\lambda i} \neq 0 \ ise \\ 0 & p_{\lambda i} = 0 \ ise \end{cases}$$

olduğuna dikkat edelim. (3.23) deki tüm bağıntıların S de sağladığını kontrol edelim.

$$(1,a,1)(1,b,1) = (1,ap_{11}b,1) = (1,ab,1),$$
$$(i,1_A,1)(1,1_A,1) = (i,1_A,1),$$
$$(1,1_A,1)(i,1_A,1) = \begin{cases} (1,p_{1i},1) & p_{1i} \neq 0 \ ise \\ 0 & p_{1i} = 0 \ ise\text{'} \end{cases}$$

$$(1,1_A,\lambda)(1,1_A,1)=\begin{cases}(1,p_{\lambda 1},1) & p_{\lambda 1}\neq 0\ ise,\\ 0 & p_{\lambda 1}=0\ ise\end{cases}$$

$$(1,1_A,1)(1,1_A,\lambda)=(1,1_A,\lambda),$$

$$(1,1_A,\lambda)(i,1_A,1)=\begin{cases}(1,p_{\lambda i},1) & p_{\lambda i}\neq 0\ ise\\ 0 & p_{\lambda i}=0\ ise\end{cases}.$$

Bundan dolayı ϕ dönüşümü bir $\overline{\phi}:T\to S$ epimorfizmasına indirgenir.

Bir sonraki adım olarak T nin sıfırdan farklı elemanlarının $f(i,w,\lambda)=y_i w z_\lambda$, $i\in I$, $\lambda\in\Lambda$ şeklinde bir kanonik forma sahip olduğunu gösterelim. Şimdi $y_1,z_1\in X^*$ boş kelime, $w\in X^*$ ise boştan farklı bir kelime olsun. T nin sıfırdan farklı temsil edilen kelimelerinin uzunluğunu tümevarım yoluyla ispatlayacağız. Bu uzunluktaki kelimelerden biri ya $x=y_1xz_1=f(1,x,1)$, $x\in X$ ya $y_i=y_iez_1=f(i,e,1)$, $i\in I$ ya da $z_\lambda=y_1ez_\lambda=f(1,e,\lambda)$, $\lambda\in\Lambda$ dir. T nin sıfırdan farklı bir elemanını temsil eden ve l den daha küçük uzunluğa sahip tüm kelimelerin T içinde bir kanonik forma eşit olduğunu varsayalım. l uzunluğundaki bir kelime T içinde ya $f(i,\omega,\lambda)x$, ya $f(i,\omega,\lambda)y_j$, yada $f(i,\omega,\lambda)z_\mu$ den birine eşittir. Ayrıca,

$$f(i,\omega,\lambda)x=y_i\omega z_\lambda x=y_i\omega z_\lambda ex=y_i\omega p_{\lambda 1}x=f(i,\omega p_{\lambda 1}x,1),$$

$$f(i,\omega,1)y_j=y_i\omega y_j=y_i\omega e y_j=y_i\omega p_{1j}=f(i,\omega p_{1j},1),$$

$$f(i,\omega,\lambda)y_j=y_i\omega z_\lambda y_j=y_i\omega p_{\lambda j}=f(i,\omega p_{\lambda j},1),\ \lambda\neq 1 \text{ için},$$

$$f(i,\omega,\lambda)z_\mu=y_i\omega z_\lambda z_\mu=y_i\omega z_\lambda e z_\mu=y_i\omega p_{\lambda 1}z_\mu=f(i,\omega p_{\lambda 1},\mu),$$

dir. Böylece tümevarım adımı tamamlanmış olur.

Bazı $\omega,\omega'\in Y^*$ için $(y_i\omega z_\lambda)\phi=(y_{i'}\omega' z_{\lambda'})\phi$ eşitliğinin var olduğunu düşünelim. Bu durumda, $(i,\omega,\lambda)=(i'\omega'\ \lambda')$ olması anlamına gelir. Buradan A içinde $\omega=\omega'$ eşitliği vardır ve $i=i',\lambda=\lambda'$. (3.23) deki R bağıntılarının olması T içinde $\omega=\omega'$ olduğunu gösterir ve sonuç olarak T içinde $y_i\omega z_\lambda=y_{i'}\omega' z_{\lambda'}$ dir. Bu da bize $\overline{\phi}$ nin birebir olduğunu verir.□

3.7.3 Sonuç : (3.23) sunuşu için , A sonlu sunuşlu ve eğer I ve Λ indeks kümelerinin her ikiside sonlu ise, bu durumda $M^0[A; I, \Lambda; P]$ Rees matris yarıgrubu da sonlu sunuşludur.

4. MONOİDLER İÇİN ÇİFT YÖNLÜ YENİ BİR YARI DİREKT ÇARPIMIN İNŞASI

4.1 Giriş

Bu kısımda 2. Bölümde tanımını verdiğimiz yarı direkt çarpımının çift yönlü incelenmesiyle elde edilecek yeni bir çarpımın inşası anlatılacaktır.

4.2 Monoidler İçin Çift Yönlü Yeni Bir Yarı Direkt Çarpımı

4.2.1 Tanım : A ve B herhangi iki monoid olsunlar. Ayrıca $P_1 = (a_1, b_1)$, $P_2 = (a_2, b_2) \in A \times B$ için,

$$P_1 P_2 = (a_1 a_2, b_1 b_2)$$

şeklinde bir işlem tanımlansın.

$$\alpha_b : B \to End(A) \quad \text{ve} \quad \beta_a : A \to End(B)$$

dönüşümleri, tüm $x, a_1, a_2 \in$ A, $y, b_1, b_2 \in$ B için

$$(x)\alpha_{b_1 b_2} = \left((x)\alpha_{b_2}\right)\alpha_{b_1} \text{ ve } (y)\beta_{a_1 a_2} = \left((y)\beta_{a_1}\right)\beta_{a_2} \tag{4.1}$$

koşullarını sağlayan monoid homomorfizması olsunlar. A ve B nin çift yönlü yeni bir yarı direkt çarpımı tüm $a \in A$ ve $b \in B$ için

$$(a, P_1, b)(c, P_2, d) = \left(a(c)\alpha_{b_1}\,,\ P_1 P_2\,, (b)\beta_{a_2} d\right), \tag{4.2}$$

işlemi altında tanımlı $A \times (A \times B) \times B$ kümesi olup $A_\beta \bowtie_\alpha B$ şeklinde gösterilir. Şimdi yukarıda verilen işlem altında $A_\beta \bowtie_\alpha B$ nın birim elemanı $(1_A, P_e, 1_B)$ olan bir monoid olduğunu gösterelim. Burada $P_e = (1_A, 1_B)$ dir

$P_1 = (a_1, b_1)$, $P_2 = (a_2, b_2)$ ve $P_3 = (a_3, b_3)$ için

$(a, P_1, b), (c, P_2, d)$ ve $(e, P_3, f) \in A_\beta \bowtie_\alpha B$ olsunlar.

$$\begin{aligned}
\big((a,P_1,b)(c,P_2,d)\big)(e,P_3,f) &= \big(a(c)\alpha_{b_1}, P_1P_2, (b)\beta_{a_2}d\big)(e,P_3,f) \\
&= \Big(a(c)\alpha_{b_1}(e)\alpha_{b_1b_2}, P_1P_2P_3, \big((b)\beta_{a_2}d\big)\beta_{a_3}f\Big) \\
&= \big(\mathrm{a}(\mathrm{c})\alpha_{b_1}(e)\alpha_{b_1b_2}, P_1P_2P_3, (b)\beta_{a_2a_3}(d)\beta_{a_3}f\big) \\
(a,P_1,b)\big((c,P_2,d)(e,P_3,f)\big) &= (a,P_1,b)\big(c(e)\alpha_{b_2}, P_2P_3, (d)\beta_{a_3}f\big) \\
&= \big(a\big(c(e)\alpha_{b_2}\big)\alpha_{b_1}, P_1P_2P_3, (b)\beta_{a_2a_3}(d)\beta_{a_3}f\big) \\
&= \big(\mathrm{a}(\mathrm{c})\alpha_{b_1}(e)\alpha_{b_1b_2}, P_1P_2P_3, (b)\beta_{a_2a_3}(d)\beta_{a_3}f\big)
\end{aligned}$$

olduğundan $A_\beta \bowtie_\alpha B$ bir monoiddir.

Şimdi aşağıda verilecek olan Önerme ve Teorem'den bu bölümün genel amacı olan bu çift yönlü yarı direkt çarpımının bir sunuşunu veren bir üreteç kümesini vereceğiz.

4.2.2 Önerme [18] : A ve B monoidleri sırasıyla X ve Y kümeleri tarafından üretilsin. Bu durumda $A_\beta \bowtie_\alpha B$,

$\{(x_1, P_e, 1_B) : x_1 \in X\}$,

$\{(1_A, (x_2, 1_B), 1_B) : x_2 \in X\}$,

$\{(1_A, P_e, y_1) : y_1 \in Y\}$,

$\{(1_A, (1_A, y_2), 1_B) : y_2 \in Y\}$

kümelerinin birleşimi tarafından üretilir.

İspat: $a, a_1, a_2, c \in A,\ b, b_1, b_2, d \in B,\ P_1, P_2 \in A \times B$ için

$$(a_1, P_e, 1_B)(a_2, P_e, 1_B) = (a_1 a_2, P_e, 1_B), \tag{4.3}$$
$$(1_A, P_e, b_1)(1_A, P_e, b_2) = (1_A, P_e, b_1 b_2), \tag{4.4}$$
$$(1_A, P_1, 1_B)(1_A, P_2, 1_B) = (1_A, P_1 P_2, 1_B) \tag{4.5}$$
$$(a, P_e, 1_B)(1_A, (c, 1_B), 1_B)(1_A, (1_A, d), 1_B)(1_A, P_e, b) = (a, (c.d), b)$$

olduğundan, ispat kolayca görülür.□

4.2.3 Teorem [18]: A ve B monoidlerinin sırasıyla $[X:R]$ ve $[Y:S]$ sunuşlarıyla temsil edilsin. Bu durumda $A_\beta \bowtie_\alpha B$ nin üreteç kümesi

$$Z = X \cup Y \cup \{z_k : k \in X\ yada\ k \in Y\}$$

ve bağıntı kümesi, $x, k_1 \in X$ ve $y, k_2 \in Y$ olmak üzere

$$R, S, \tag{4.6}$$
$$xy = yx, \tag{4.7}$$
$$z_{k_1} z_{k_2} = z_{k_1 k_2} = z_{k_2} z_{k_1}, \tag{4.8}$$
$$z_{k_1} x = x z_{k_1}, \tag{4.9}$$
$$y z_{k_2} = z_{k_2} y, \tag{4.10}$$
$$z_{k_2} x = (x)\alpha_{k_2} z_{k_2}, \tag{4.11}$$
$$y z_{k_1} = z_{k_1} (y)\beta_{k_1}. \tag{4.12}$$

biçimindedir. İspatı vermeden önce Z^* kümesi ile Z kümesindeki tüm kelimelerin kümesini göstermiş olacağımızı belirtelim.

İspat: Şimdi, $\varphi: Z^* \rightarrow A_\beta \bowtie_\alpha B$ homomorfizma dönüşümünü $x, k_1 \in X$ ve $y, k_2 \in Y$ olmak üzere

$$(x)\varphi = (x, P_e, 1_A),$$
$$(y)\varphi = (1_A, P_e, y),$$
$$(z_{k_1})\varphi = (1_A, (k_1, 1_B), 1_B),$$
$$(z_{k_2})\varphi = (1_A, (1_A, k_2), 1_B).$$

biçiminde tanımlayalım. Bu dönüşümün 4.2.2 Önerme den örten olduğu kolaylıkla görülür. Şimdi (4.6) – (4.12) bağıntılarını $A_\beta \bowtie_\alpha B$ yi sağladığını kontrol edelim. Aslında (4.6) bağıntıları (4.3),(4.4) ve (4.5) den gelir. (4.7),(4.8),(4.9) ve (4.10) bağıntıları ise

$$
\begin{aligned}
&(x, P_e, 1_B)(1_A, P_e, y) = (x, P_e, y) = (1_A, P_e, y)(x, P_e, 1_B),\\
&(1_A, (k_1, 1_B), 1_B)(1_A, (1_A, k_2), 1_B) = (1_A, (k_1, k_2), 1_B)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = (1_A, (1_A, k_2), 1_B)(1_A, (k_1, 1_B), 1_B),\\
&(1_A, (k_1, 1_B), 1_B)(x, P_e, 1_B) = (x, (k_1, 1_B), 1_B) = (x, P_e, 1_B)(1_A, (k_1, 1_B), 1_B),\\
&(1_A, P_e, y)(1_A, (1_A, k_2), 1_B) = (1_A, (1_A, k_2), y) = (1_A, (1_A, k_2), 1_B)(1_A, P_e, y)
\end{aligned}
$$

eşitliklerinden elde edilir. Şimdi (4.11) ve (4.12) bağıntılarının sağlandığını gösterelim. Bunun için tüm $x, k_1 \in X$ ve $y, k_2 \in Y$ için

$$
\begin{aligned}
(1_A, (1_A, k_2), 1_B)(x, P_e, 1_B) &= \left((x)\alpha_{k_2}, (1_A, k_2), 1_B\right)\\
&= \left((x)\alpha_{k_2}, P_e, 1_B\right)(1_A, (1_A, k_2), 1_B),\\
(1_A, P_e, y)(1_A, (k_1, 1_B), 1_B) &= \left(1_A, (k_1, 1_B), (y)\beta_{k_1}\right)\\
&= (1_A, (k_1, 1_B), 1_B)\left(1_A, P_e, (y)\beta_{k_1}\right)
\end{aligned}
$$

eşitliklerinden kolayca görülebilir. Böylece φ dönüşümü, (4.6) – (4.12) ile tanımlanan bir M monoidinden $A_\beta \bowtie_\alpha B$ üzerine olan bir $\bar{\varphi}$ epimorfizmasına indirgenir.

Şimdi $\bar{\varphi}$ epimorfizmasının birebir olduğunu gösterelim. Bunun için $\omega \in Z^*$ boş kelimeden farklı herhangi bir kelimesini düşünelim. Burada (4.7) – (4.12) bağıntılarını kullanarak

$\omega_x \in X^*$, $\omega_y \in Y^*$, $\omega_{k_1} \in \{z_{k_1} : k_1 \in X\}^*$ ve $\omega_{k_2} \in \{z_{k_2} : k_2 \in X\}^*$ için M içinde $\omega = \omega_x \omega_{k_1} \omega_{k_2} \omega_y$ olduğunu kolayca görebiliriz. Ayrıca $x_1, x_2, \ldots, x_m \in X$ ve $y_1, y_2, \ldots, y_n \in Y$ olmak üzere $\omega_{k_1} = z_{x_1} z_{x_2} \ldots z_{x_m}$ ve $\omega_{k_2} = z_{y_1} z_{y_1} \ldots z_{y_1}$ olsun. Bu durumda herhangi bir $\omega \in Z^*$ için, $P(\omega) = (x_1 x_2 \ldots x_m, y_1 y_2 \ldots y_n)$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
(\omega)\varphi &= (\omega_x \omega_{k_1} \omega_{k_2} \omega_y)\varphi = (\omega_x)\varphi(\omega_{k_1})\varphi(\omega_{k_2})\varphi(\omega_y)\varphi \\
&= (\omega_x, \emptyset, 1_B)(1_A, (x_1 x_2 \ldots x_m, y_1 y_2 \ldots y_n), 1_B)(1_A, \emptyset, \omega_y) \\
&= (\omega_x, P(\omega), \omega_y)
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir.

Bazı $\omega', \omega'' \in Z^*$ için $(\omega')\varphi = (\omega'')\varphi$ eşitliğinin var olduğunu düşünelim. Bu durumda A içinde $\omega'_x = \omega''_x$ ve B içinde $\omega'_y = \omega''_y$ eşitlikleri vardır. Buradan $P(\omega') = P(\omega'')$ elde edilir. Ayrıca (8.6) bağıntıları kullanılarak, M içinde $\omega'_x = \omega''_x$ ve $\omega'_y = \omega''_y$ eşitliklerinin sağlandığını görür ve böylece $\omega' = \omega''$ eşitliği elde ederiz. Buda bize $\bar{\varphi}$ nin birebir olduğunu verir.□

5. GENELLEŞTİRİLMİŞ BRUCK – REİLLY* GENİŞLEMESİ

5.1 Giriş

Bu bölümde 3. Bölümde bahsedilen Bruck-Reilly genişlemesinin daha genel halini vereceğiz. Fakat ilk önce bu bölümde kullanacağımız Green denklik bağıntıları ve denklik sınıflarını inceleyeceğiz.

5.2 Green Denklik Sınıfları

5.2.1 Tanım : S bir yarıgrup ve L, S üzerinde

$$xLy \Leftrightarrow S'x = S'y \Leftrightarrow sx = y \text{ ve } ty = x \ (s, t \in S', x, y \in S)$$

biçiminde verilen bir bağıntı olsun. Böylece $x, y \in S$ elemanları S nin aynı sol idealini üretir. Bu üreteç x ve y elemanlarına $L - bağlantılıdır$ denir ve xLy ile gösterilir.

Benzer olarak $x, y \in S$ elemanları

$$xRy \Leftrightarrow xS' = yS' \Leftrightarrow xs = y \text{ ve } yt = x \ (s, t \in S')$$

şeklinde S nin aynı sağ idealini üretiyorsa bu elemanlar $R - bağlantılıdır$ denir ve xRy ile gösterilir.

5.2.2 Not : Bir $s \in S$ nin L ye bağlı olarak oluşturulan denklik sınıfı $L - Sınıfı$ olarak ifade edilir ve genellikle L_s biçiminde gösterilir. Benzer olarak s nin R denklik sınıfı R_s biçiminde gösterilir.

5.2.3 Teorem : Tanım 5.2.1 de verilen L bağıntısı bir sağ kongruans ve R bağıntısı bir sol kongruanstır.

İspat : L ve R nin her ikiside denklik bağıntısıdır. O halde $(x, y) \in L$ alalım. L nin tanımından $y = sx$ ve $x = ty$ $(s, t \in S)$ yazılır. Ayrıca $z \in S$ için $yz = (sx)z = s(xz)$ ve $xz = (ty)z = t(yz)$ olur. Böylece $(xz, yz) \in L$ elde edilir. Benzer İspat R için yapılır.□

5.2.4 Tanım : $H = L \cap R$ ve S bir yarıgrup olsun. Bu durumda $s, t \in S$ elemanları hem $L - bağlantılı$ hem de $R - bağlantılı$ olacağından bu s, t elemanlarına $H - bağlantılıdır$ denir. Aslında H bir denklik bağıntısıdır ve $s \in S$ nin denklik sınıfları

$$H_x = \{t : t \in L_s \cap R_s\}$$

ile gösterilir. Ancak H sağ ve sol kongruans değildir.

5.2.5 Tanım : $D = L \text{ o } R$ olsun. L ve R bağıntılarının bileşkesiyle oluşan bu bağıntıya D $bağıntısı$ denir.

D nin bir denklik bağıntısı olduğunu söylemek diğerlerinde olduğu gibi kolay değildir. D nin denklik bağıntısı olduğunu göstermek için aşağıdaki verilecek olan önermeye ihtiyaç vardır.

5.2.6 Önerme : L ve R bağıntıları değişmelidir.

İspat : $(x, y) \in L \text{ o } R$ elemanı için, $(x, z) \in L$ ve $(z, y) \in R$ olacak biçimde bir $z \in S$ vardır. Buradan,

$$z = s_1 x,\ x = s_2 z,\ y = z t_1,\ z = y t_2\ (s_1, s_2, t_1, t_2 \in S')$$

yazılabilir. Bir $u \in S$ için, $u = x t_1$ olarak tanımlanır ise,

$$ut_2 = xt_1t_2 = s_2zt_1t_2 = s_2yt_2 = s_2z = x,$$
$$s_1u = s_1xt_1 = zt_1 = y,$$
$$s_2y = s_2zt_1 = xt_1 = u$$

olur. Buradan da $(x,u) \in R$ ve $(u,y) \in L$ olduğu kolayca görülür. Böylece $(x,y) \in L\text{o}R$ ve $L \text{ o } R \subseteq R \text{ o } L$ sonucuna ulaşılır. Tersi de benzer şekilde yapılır.□

5.2.7 Teorem : D bir denklik bağıntısıdır.

İspat : D nin yansıyan olduğu açıktır. Çünkü L ve R nin her ikisde yansıyandır. D nin simetri özelliğini sağladığını gösterelim.

$$\begin{aligned}(x,y) \in D &\Rightarrow (\exists z \in S)\big((x,z) \in L \; ve \; (z,y) \in R\big)\\ &\Rightarrow (\exists z \in S)\big((z,x) \in L \; ve \; (y,z) \in R\big)\\ &\Rightarrow (y,x) \in R \text{ o } L\end{aligned}$$

olur. O halde Önerme 5.2.6 dan dolayı $(y,x) \in L \text{ o } R$ dir. Böylece D simetri özelliğini sağlar. Ayrıca

$$\begin{aligned}&(x,y),(y,z) \in D\\ &\Rightarrow (\exists u,v \in S)\big((x,u) \in L \; ve \; (u,y) \in R \; ve \; (y,v) \in L \; ve \; (v,z) \in R\big)\\ &\Rightarrow (\exists u,v \in S)\big((x,u) \in L \; ve \; (u,v) \in R \text{ o } L \; ve \; (v,z) \in R\big)\\ &\Rightarrow (\exists u,v \in S)\big((x,u) \in L \; ve \; (u,v) \in L \text{ o } R \; ve \; (v,z) \in R\big)\\ &\Rightarrow (\exists u,v,w \in S)\big((x,u) \in L \; ve \; (u,w) \in L \; ve \; (w,v) \in R \; ve \; (v,z) \in R\big)\\ &\Rightarrow (\exists\, w \in S)\big((x,w) \in L \; ve \; (w,z) \in R\big)\\ &\Rightarrow (x,z) \in L \text{ o } R = D\end{aligned}$$

olduğundan dolayı D nin geçişkenlik özelliğine sahip olduğu görülür. O halde D denklik bağıntısıdır.□

5.2.8 Tanım : S bir yarıgrup ve $x, y \in S$ olsun. x ve y elemanları S nin aynı sağ ve sol idealini üretiyor ise bu elemanlara $\tau - bağlantılıdır$ denir. Daha genel bir ifadeyle,

$$x\tau y \Leftrightarrow S'xS' = S'yS'$$

dir. [16,28] de yapılmış olan çalışmalara göre Green bağıntıları arasında

$$H \subseteq L,\ H \subseteq R,\ L \subseteq D,\ R \subseteq D,\ D \subseteq \tau$$

şeklinde bir sıralama vardır.

5.2.9 Tanım : Bir S yarıgrubunun tek elemanla üretilmiş her alt yarıgrubu sonlu ise bu S yarıgrubuna $periyodik$ yarıgrup denir. Yani S yarıgrubu periyodik ise , her $a \in S$ için, $a^{m+r} = a^m$ olacak şekilde $m, r \geq 1$ sayıları vardır.

5.2.9 Tanımdan dolayı her sonlu yarıgrubun periyodik bir yarıgrup olduğu sonucu kolayca görülür.

5.2.10 Teorem : S yarıgrubu periyodik ise $\tau = D$ dir.

İspat: $D \subseteq \tau$ olduğu aşikardır. Tersinin doğruluğunu göstermek için $(x, y) \in \tau$ alınır ise $x = ayb,\ y = cxd\ (a, b, c, d \in S)$ olur. Böylece

$$x = (ac)x(db) = (a(cxd)b) = (ayb) = x$$
$$x = (ac)^2x(db)^2 = (ac)(ac)x(db)(db) = (ac)x(db) = x$$
$$\ldots = (ac)^i x(db)^i = x \ldots;$$

olur. S periyodik olduğundan $(ac)^i$ idempotent olacak şekilde $i \in \mathbb{N}^+$ vardır. O zaman

$$x = (ac)^i x(db)^i = (ac)^i(ac)^i x(db)^i(db)^i = (ac)^i x = (ac)^{i-1}acx = (ac)^{i-1}az$$

ve böylece xLz olur. Ayrıca

$$y = (ca)y(bd) = (ca)^2y(bd)^2 = \cdots = (ca)^jy(bd)^j = \cdots;$$

dir. Burada $(bd)^j$ idempotent olacak şekilde $i \in \mathbb{N}^+$ seçilirse,

$$\begin{aligned} z = cx = c(ac)^{j+1}x(db)^{j+1} &= (ca)^{j+1}cxd(bd)^jb = (ca)^{j+1}y(bd)^jb \\ &= (ca)^{j+1}y(bd)^{2j}b = (ca)^{j+1}y(bd)^{j+1}(bd)^{j-1}b = y(bd)^{j-1}b \end{aligned}$$

olur. Buna ek olarak, $zd = cxd = y$ olduğunda, zRy dir ve xDy sonucuna ulaşılır.□

Şimdi D nin sınıf yapısını inceliyelim.

$D = L \circ R = R \circ L$ sınıfı R yi ve L yi içeren bir denklik bağıntısıdır. Ayrıca bir $D -$ sınıf L ve R bağıntılarının bileşkesidir. Eğer $a, b \in S$ için, $L = L_a = \{x \in S: xLa\}$, D de herhangi bir L sınıf ve $R = R_b = \{y \in S: bRy\}$, D de herhangi bir R sınıf ise o zaman arakesitleri olan $L \cap R$ kümesi de boştan farklıdır.

Green bağıntılarının ana teoremi aşağıdaki gibidir.

5.2.11 Teorem ([16],[28]) :

i) $a, b \in S$ öyleki $as = b$ ve $bt = a$ olacak biçimde $R -$ bağlantılı iki eleman olsun. Ayrıca $x\rho_s = xs$ ve $x\rho_t = xt$ olacak biçimde

$$\rho_s: L_a \to L_b \text{ ve } \rho_t: L_b \to L_a$$

dönüşümleri verilsin. O zaman ρ_s ve ρ_t dönüşümleri, 5.2.4 Tanım daki gibi, $H = L \cap R$ sınıfından H sınıfına tersinir bijeksiyonlardır.

ii) $a, b \in S$ öyleki $sa = b$ ve $tb = a$ olacak biçimde $L -$ bağlantılı iki eleman olsun. Ayrıca $x \lambda_s = sx$ ve $x \lambda_t = tx$ olacak biçimde

$$\lambda_s: R_a \to R_b \text{ ve } \lambda_t: R_b \to R_a$$

dönüşümleri verilsin. O zaman $\leftthreetimes_s$ ve $\leftthreetimes_t$ dönüşümleri $H = L \cap R$ sınıfından H sınıfına tersinir bijeksiyonlardır.

İspat: i) İlk olarak $\rho_s: L_a \to L_b$ dönüşümünün varlığını gösterelim. Bunun için $x \in L_a$ alındığı zaman $(x, a) \in L$ olur. Teorem 5.2.3 den dolayı, $(xs, as) \in L$ Olduğu görülür. Böylece $x\rho_s \in L_b$ olur. Benzer biçimde $\rho_t: L_b \to L_a$ bir dönüşümün varlığı gösterilebilir. Bir $s \in L_a$ alındığında $x = ua$ yazılabilir. Buradan da

$$x\rho_s\rho_t = xst = uast = ubt = ua = x$$

sonucuna ulaşılır. Benzer biçimde, her $x \in L_b$ için, $x\rho_t\rho_s = x$ bulunur. Böylece ρ_a ve ρ_b tersinir bijeksiyonlardır. Ayrıca $xst = x$ olduğundan $xR(x\rho_s)$ dir. Eğer $x, y \in L_a$ elemanları H bağlantılı elemanlar ise o zaman $(x\rho_s)RxRyR(y\rho_s)$ olur. Buna ek olarak $x\rho_s$ ve $y\rho_s$ ler R bağlantılı olduğundan $(x\rho_s)H(y\rho_s)$ olur.

ii) nin ispatı i) ispatın bir duali biçimindedir.□

5.2.12 Teorem : H bir S yarıgrubunun H sınıfı olsun. O zaman $H^2 \cap H = \emptyset$ dir veya H bir gruptur.

İspat: $H^2 \cap H \neq \emptyset$ kabul edelim. O zaman $ab \in H$ olacak biçimde $a, b \in H$ vardır. Ayrıca $h \in H$ elemanı alındığında $aRab$ olduğundan, Teorem 5.2.12 (i) den,

$$\rho_b: x \mapsto xb$$

dönüşümü aslında $H_a = H$ dan $H_b = H$ ile bire-bir ve örtendir. Ayrıca Teorem 5.2.12.(ii) den,

$$\leftthreetimes_h: x \mapsto hx$$

dönüşümü aslında $H_b = H$ ve $H_{hb} = H$ $(hb \in H)$ ile bire-bir ve örtendir. Buradan da

$$hH = im \leftthreetimes_h = H \text{ ve } H_h = H$$

olduğu görülür. Böylece H nın bir grup olduğu görülür.□

5.3 Genelleştirilmiş Bruck-Reilly* Genişlemesi

T sırasıyla T nin 1_T birimini içeren $\mathcal{H}^*$ ve $\mathcal{H}$ sınıfları olan ${\mathcal{H}^*}_1$ ve $\mathcal{H}_1$ ile birlikte bir monoid olsun. β ve γ, T den ${\mathcal{H}^*}_1$ üzerine bir homomorfizma olsunlar. Ayrıca u, $\mathcal{H}_1$'in bir elemanı ve $\leftthreetimes_u$, ${\mathcal{H}^*}_1$ üzerinde bir otomorfizm olsun ve

$$x \mapsto uxu^{-1}$$

için

$$\gamma \leftthreetimes_u = \beta\gamma$$

biçiminde tanımlansın. Şimdi $S = \mathbb{N}^0 \times \mathbb{N}^0 \times T \times \mathbb{N}^0 \times \mathbb{N}^0$ yarıgrubunu göz önüne alalım:

$$(m,n,v,p,q)(m',n',v',p',q') =$$
$$\begin{cases} \left(m, n-p+max(p,n'), \left(v\beta^{max(p,n')-p}\right)\left(v'\beta^{max(p,n')-n'}\right), p'-n'+max(p,n'), q'\right), & q = m' ise \\ \left(m,n,v\left(\left(\left(u^{-n'}(v'\gamma)u^{p'}\right)\gamma^{q-m'-1}\right)\beta^{P}\right), p, q'-m'+q\right), & q > m' \; ise \\ (m-q+m', n', (((u^{-n}(v\gamma)u^{p})\gamma^{m'-q-1})\beta^{n'})v', p', q'), & q < m' \; ise \end{cases}$$

Burada β^0, γ^0 T nin birim dönüşümleri olarak ve u^0 , T'nin 1_T birimi olarak alınmıştır. Yukarıdaki yapı ile birlikte $S = \mathbb{N}^0 \times \mathbb{N}^0 \times T \times \mathbb{N}^0 \times \mathbb{N}^0$ monoidi, T nin u elemanı ve β, γ homomorfizmleri ile oluşturulmuş Genelleştirilmiş Bruck-Reilly Genişlemesi adını alır. S monoidi $S = GBR^*(T;\beta,\gamma,u)$ ile gösterilir ve S monoidinin birim elemanı $(0,0,1_T,0,0)$ dır.

5.3.1 Genelleştirilmiş Bruck-Reilly* Genişlemesinin Sunuşu

Bu bölümde $GBR^*(T;\beta,\gamma,u)$ için bir sunuş ve bu sunuşun ispatı üzerinde yoğunlaşacağız. Fakat ilk önce aşağıda vereceğimiz Önerme ile bu sunuş için gerekli olan üreteç kümesini tanımlayalım.

5.3.2 Önerme [27] : X, T monoidi için bir üreteç kümesi olsun. Bu durumda

$$\{(0,0,x,0,0): x \in X\} \cup \{(0,1,1_T,0,0) \cup (1,0,1_T,0,0) \cup (0,0,1_T,1,0) \cup (0,0,1_T,0,1)\}$$

kümesi $S = GBR^*(T;\beta,\gamma,u)$ monoidi için bir üreteç kümesi olur.

İspat: $v_1, v_2 \in T$ ve $m_i, n_i, p_i, q_i \in \mathbb{N}^0$ $(1 \leq i \leq 2)$ için, aşağıdaki eşitlikleri kolayca görebiliriz.

$$\begin{aligned}
&(0,0,v_1,0,0)(0,0,v_2,0,0) = (0,0,v_1v_2,0,0),\\
&(m_1,0,1_T,0,0)(m_2,0,1_T,0,0) = (m_1+m_2,0,1_T,0,0),\\
&(0,n_1,1_T,0,0)(0,n_2,1_T,0,0) = (0,n_1+n_2,1_T,0,0),\\
&(0,0,1_T,p_1,0)(0,0,1_T,p_2,0) = (0,0,1_T,p_1+p_2,0),\\
&(0,0,1_T,0,q_1)(0,0,1_T,0,q_2) = (0,0,1_T,0,q_1+q_2),\\
&(m_1,0,1_T,0,0)(0,n_2,1_T,0,0) = (m_1,n_2,1_T,0,0),\\
&(0,0,1_T,p_1,0)(0,0,1_T,0,q_2) = (0,0,1_T,p_1,q_2),\\
&(m_1,n_1,1_T,0,0)(0,0,v,0,0)(0,0,1_T,p_1,q_1) = (m_1,n_1,1_T,p_1,q_1).
\end{aligned}$$

Dolayısıyla yukarıda verilen eşitlikler bize $S = GBR^*(T;\beta,\gamma,u)$ monoidinin

$$\{(0,0,x,0,0): x \in X\} \cup \{(0,1,1_T,0,0) \cup (1,0,1_T,0,0) \cup (0,0,1_T,1,0) \cup (0,0,1_T,0,1)\}$$

ile üretildiğini söyler. □

5.3.3 Teorem [27] : T, $[X : R]$ sunuşu ile tanımlanan bir monoid ve β, γ T den $\mathcal{H}^*{}_1$ içine tanımlanan bir homomorfizm olsun. Bu durumda $S = GBR^*(T; \beta, \gamma, u)$ monoidi $x \in X$ olmak üzere

$$[\, X, y, z, a, b : \ R, \tag{5.1}$$

$$yz = 1, \ ba = 1, \tag{5.2}$$

$$yx = (x\gamma)y, \ xz = z(x\gamma), \tag{5.3}$$

$$bx = (x\beta)b, \ xa = a(x\beta), \tag{5.4}$$

$$yb = uy, \ ya = u^{-1}y, \tag{5.5}$$

$$bz = zu, \ az = zu^{-1}] \tag{5.6}$$

sunuşuyla temsil edilir.

İspat: $X \cup \{y, z, a, b\}$ kümesini Y ile gösterelim. Y içindeki tüm kelimelerin kümesini Y^* ile gösterelim. $\varphi: Y^* \to GBR^*(T; \beta, \gamma, u)$ homomorfizmasını

$$x\varphi = (0,0,x,0,0),$$
$$y\varphi = (0,0,1_T,0,1),$$
$$z\varphi = (1,0,1_T,0,0),$$
$$a\varphi = (0,1,1_T,0,0),$$
$$b\varphi = (0,0,1_T,1,0)$$

ile tanımlayalım. Önerme 5.3.2 den φ homomorfizmasının bir epimorfizm olduğu kolayca görülebilir. Şimdi (5.1) - (5.6) bağıntılarının $GBR^*(T; \beta, \gamma, u)$ yu sağlayıp sağlamadığını kontrol edelim. R bağıntıları T de sağlandığından dolayı Önerme 5.3.2 den bu bağıntılar ayrıca $GBR^*(T; \beta, \gamma, u)$ de sağlar. Şimdi ise geriye kalan (5.2) – (5.3) bağıntılarının sağlandığını görelim.

(5.2) : $(0,0,1_T,1,0)(0,1,1_T,0,0) = (0,0,1_T,0,0),$

$(0,0,1_T,0,1)(1,0,1_T,0,0) = (0,0,1_T,0,0),$

(5.3 : $(0,0,1_T,0,1)(0,0,x,0,0) = (0,0,x\gamma,0,1) = (0,0,x\gamma,0,0)(0,0,1_T,0,1),$

$(0,0,x,0,0)(1,0,1_T,0,0) = (1,0,x\gamma,0,0) = (1,0,1_T,0,0)(0,0,x\gamma,0,0),$

(5.4): $(0,0,1_T,1,0)(0,0,x,0,0) = (0,0,x\beta,1,0) = (0,0,x\beta,0,0)(0,0,1_T,1,0),$

$(0,0,x,0,0)(0,1,1_T,0,0) = (0,1,x\beta,0,0) = (0,1,1_T,0,0)(0,0,x\beta,0,0),$

(5.5) : $(0,0,1_T,0,1)(0,0,1_T,1,0) = (0,0,u,0,1) = (0,0,u,0,0)(0,0,1_T,0,1),$

$(0,0,1_T,0,1)(0,1,1_T,0,0) = (0,0,u^{-1},0,1) = (0,0,u^{-1},0,0)(0,0,1_T,0,1),$

(5.6): $(0,0,1_T,1,0)\,(1,0,1_T,0,0)=(1,0,u,0,0)=(1,0,1_T,0,0)\,(0,0,u,0,0)$

$(0,1,1_T,0,0)\,(1,0,1_T,0,0)=(1,0,u^{-1},0,0)=(1,0,1_T,0,0)\,(0,0,u^{-1},0,0)$

Bu nedenle φ dönüşümü, (5.1) – (5.6) bağıntıları ile tanımlanan M monoidinden $GBR^*(T;\beta,\gamma,u)$ üzerine olan bir $\bar{\varphi}$ epimorfizmasına indirgenir.

Şimdi $\bar{\varphi}$ epimorfizmasının birebir olduğunu gösterelim. Şimdi M içinde boş kelimeden farklı herhangi bir $\omega \in Y^*$ kelimesini düşünelim. Bu kelimenin $f(m,n,v,p,q) = z^m a^n v b^p y^q$, $m,n,p,q \in \mathbb{N}^0, v \in X^*$ formunda bir kelimeye eşit olduğunu gösterelim. $|\omega|$ ile ω nun uzunluğunu gösterelim. Eğer $|\omega| = 1$ ise bu durumda,

$w = x = f(0,0,x,0,0)$ $(x \in X)$,

$w = y = f(0,0,1_T,0,1)$,

$w = z = f(1,0,1_T,0,0)$,

$w = a = f(0,1,1_T,0,0)$ ya da

$w = b = f(0,0,1_T,1,0)$

dir. Şimdi tümevarımdan k dan daha küçük uzunluktaki her kelimenin $f(m,n,v,p,q)$ formundaki bir kelimeye indirgenebileceğini ve $|\omega| = k$ olduğunu varsayalım. Bu durumda w,

$f(m,n,v,p,q)x$ $(x \in X)$,

$f(m,n,v,p,q)y$,

$f(m,n,v,p,q)a$,

$f(m,n,v,p,q)b$ ya da

$f(m,n,v,p,q)z$

olarak yazılabilir. Şimdi,

$$f(m,n,v,p,q)x = z^m a^n v b^p y^q x = z^m a^n v\big((x\gamma^q)\beta^p\big) b^p y^q = f\big(m,n,v\big((x\gamma^q)\beta^p\big),p,q\big),$$

$$f(m,n,v,p,q)y = z^m a^n v b^p y^q y = z^m a^n v b^p y^{q+1} = f(m,n,v,p,q+1).$$

$$f(m,n,v,p,q)a = \begin{cases} f\big(m,n,v\big((u^{-1}\gamma^{q-1})\beta^p\big),p,q\big), & q \geq 1 \; ise \\ f(m,n,v,p-1,0), & q = 0, p \geq 1 ise \\ f(m,n+1,v\beta,0,0), & q = p = 0 \; ise \end{cases}$$

$$f(m,n,v,p,q)b = z^m a^n v b^p y^q b = \begin{cases} f\big(m,n,v\big((u\gamma^{q-1})\beta^p\big),p,q\big), & q \geq 1 \; ise \\ f(m,n,v,p+1,0), & q = 0 \; ise \end{cases}$$

$$f(m,n,v,p,q)z = z^m a^n v b^p y^q z = \begin{cases} f(m,n,v,p,q-1), & q \geq 1 \; ise \\ f(m+1,0,u^{-n}(v\gamma)u^p,0,0), & q = 0 \; ise. \end{cases}$$

böylece tümevarım adımı tamamlanır.

Son olarak, $v_1, v_2 \in X^* \; ve \; m_i, n_i, p_i, q_i \in \mathbb{N}^0 \; (1 \leq i \leq 2)$ olmak üzere

$$\big(f(m_1,n_1,v_1,p_1,q_1)\big)\varphi = \big(f(m_2,n_2,v_2,p_2,q_2)\big)\varphi$$

eşitliğinin var olduğunu düşünelim. Bu durumda

$$(z^{m_1} a^{n_1} v_1 b^{p_1} y^{q_1})\varphi = (z^{m_2} a^{n_2} v_2 b^{p_2} y^{q_2})\varphi$$

olur ve böylece

$$(m_1,n_1,v_1,p_1,q_1) = (m_2,n_2,v_2,p_2,q_2)$$

eşitliği elde edilir. Buradan T içinde $v_1 = v_2$ ve $m_1 = m_2$, $n_1 = n_2$, $p_1 = p_2$ ve $q_1 = q_2$ olur. $GBR^*(T;\beta,\gamma,u)$ nun sunuşu R yi içerdiğinden dolayı M içinde $v_1 = v_2$ eşitliğinin sağlandığını görür ve bu nedenle M içinde

$$z^{m_1}a^{n_1}v_1b^{p_1}y^{q_1} = z^{m_2}a^{n_2}v_2b^{p_2}y^{q_2}$$

eşitliğini elde ederiz. Buda bize $\bar{\varphi}$ nin birebir olduğunu verir.□

Teorem 5.3.3 ün bir sonucu olarak aşağıdaki 5.3.4 Sonucu verebiliriz.

5.3.4 Sonuç : v, X^* içinde keyfi bir kelime olsun.

$$\begin{aligned}
&y^m v = (v\gamma^m)y^m,\\
&vz^m = z^m(v\gamma^m),\\
&b^n v = (v\beta^n)b^n,\\
&va^n = a^n(v\beta^n),\\
&y^m b^n = (u\gamma^{m-1})^n y^m,\\
&y^m a^n = (u^{-1}\gamma^{m-1})^n y^m,\\
&b^n z^m = z^m(u\gamma^{m-1})^n,\\
&a^n z^m = z^m(u^{-1}\gamma^{m-1})^n
\end{aligned}$$

bağıntıları tüm $m,n \in \mathbb{N}^0$ için $GBR^*(T;\beta,\gamma,u)$ ı sağlanır. Sonuç olarak her $\omega \in \left(X \cup \{y,z,a,b\}\right)^*$ kelimesi, bazı $v \in X^*$ kelimesi ve $m,n,p,q \in \mathbb{N}^0$ için $GBR^*(T;\beta,\gamma,u)$ içinde $z^m a^n v b^p y^q z$ formunda bir kelimeye eşittir.

Bu konuyla ilgili ayrıntılı bilgiler [19-28] den elde edilebilir.

6. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Tez beş ana bölümden oluşmuş olup, bu bölümlerde aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Tezin birinci bölümünde kelime ve kelimeler arasındaki işlemler hatırlatılarak serbest monoidler ve monoid sunuşu tanımlanmış ve diğer bölümlerde kullanılmış olan temel özellikleri ile ilgili hatırlatmalar yapılmıştır.

İkinci bölümde monoidler için yarı direkt çarpım anlatılmış ve bu çarpımın sunuşu verilmiştir. Ayrıca bu yarı direkt çarpımın bir genişlemesi olan Wreath çarpım ve bu çarpımın sunuşu üzerinde durulmuştur.

Üçüncü bölümde, Bruck-Reilly genişlemesi, Schützenberger çarpım, yarı direkt çarpım altında Schützenberger çarpımının yeni versiyonu ve bu yeni versiyonun sunuşu tanımlanmıştır. Ayrıca bu yeni çarpımın bir sonucu olarak regülerlik özelliği üzerinde durulmuştur. Ayrıca monoidlerin güçlü yarılatisleri ve Rees matris yarıgrupları gibi bazı önemli monoid genişlemeleri ve bu genişlemelerin sunuşlarına da yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde monoidler çift yönlü yarı direkt çarpım tanımlanmış ve bu çarpımın sunuşu verilmiştir.

Son bölümde ise, Bruck-Reilly genişlemeleri daha da genelleştirilerek Genişletilmiş Bruck-Reilly* genişlemesi kavramına ve bu kavramın sunuşu ile sonuçlarına değinilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] Carvalho, (2002). C. Presentations of Semigroups and inverse Semigroups. *M. Sc. Dissertation, University of St. Andrews.*

[2] Howie, J. and Ruskuc, N.(1994). Constructions and Presentations for Monoids. *Communications in Algebra,* 22 (15),6209-6224.

[3] Ruskuc, N.(1999). Presentations for Subgroups of Monoids. *Journal of Algebra*, 220 , 365-380

[4] Lallement, G.(1979). *Semigroups and combinatorial Applications.* New York.

[5] Redei, L. (1965). The Theory of Finitely of Generated Commutative Semigroups. *Pergamon Press, Oxford.*

[6] Campbell, C.M. , Robertson, E. F. , Ruskuc, N. and Thomas, R. M. (1994). Fibonacci Semigroups. *J. Pure Appl. Algebra, 94, 49-57.*

[7] Campbell, C.M. , Robertson, E. F. , Ruskuc, N. and Thomas, R. M. (1993). On a class of semigroups with symmetric presentations. *Semigroup Forum* 46, 286-306.

[8] Campbell, C.M. , Robertson, E. F. , Ruskuc, N. and Thomas, R. M. (1995). Semigroup presentations and minimal ideals. Combinatorial and Geometric Group Theory. *Cambridge University Press*, 29-42.

[9] Campbell, C.M. , Robertson, E. F. , Ruskuc, N. and Thomas, R. M. (1995). Semigroup and group presentations. *Bull. London Math. Soc.,* 27, 46-50.

[10] Campbell, C.M. , Robertson, E. F. , Ruskuc, N. and Thomas, R. M.(1995). Rewriting a semigroup presentation. *Internat. J. Algebra Comput.* , 5, 81-103.

[11].Campbell, C.M. , Robertson, E. F. ,Ruskuc, N. and Thomas, R. M. (1995). Reidemeister-Schreier type rewriting for semigroups. *Semigroup Forum, 51, 47-62.*

[12] Ateş, F. and Çevik, A.S. (2006). Minimal but inefficient presentations for semi-direct products of finite cyclic monoids. *Proceedings of Groups St Andrews 2005, L.M.S Lecture Note Series, CUP, Vol* 1,175-180.

[13] Ateş, F. and Çevik, A.S. (2007). The p-Cockroft property of central extensions of groups II. *Monatshefte für Math*., 150, 181-191 .

[14] Collins, D.J. and Turner, E.C. (1996). All automorphisms of free groups with maximal rank fixed subgroups. *Math. Proc.Cambridge Philos. Soc*. 119, 615-630.

[15] Çevik, A.S. (2003). The p- Cockroft property of semidirect products of monoids. *Int. Journal of Algebra and Computation*, 13(1), 1-16.

[16] Howie, J.M. (1995). Fundamentals of Semigroup Theory. *Oxford University Press*.

[17] Nico, W.R.(1983). On the regularity of semidirect products. *Journal of Algebra* 80, 29-36 .

[18] Ateş, F.(2009). Some new monoid and group constructions under semidirect products. *Ars Combinatoria* 91, 203-218.

[19] Bruck, R.H. (1958). A Survey of Binary Systems. *Springer-Verlag,Berlin*.

[20] Munn, W. (1970).On simple inverse semigroups. Semigroup Forum 1. 63-74.

[21] Reilly, N.R. (1966). Bisimple w-semigroups. *Proc. Glasgow Math. Assoc*. 7 , 160-167.

[22].Kocin, B.P.(1968) . The structure of inverse ideal-simple w-semigroups. *Vestnik Leningrad. Univ*. 23 (7),41-50.

[23] Munn, W. (1968). Regular w – semigroups . *Glasgow Math. J.* 9 , 46-66.

[24] Shung, Y. and Wang, L. M. (2008). ∗- Bisimple type A w^2-semigroups as generalized Bruck-Reilly∗ -extensions. *Southeast Asian Bull. Math.* 32 , 343-361.

[25] Kocapinar, C. , Karpuz, E.G, Ateş, F. , and Çevik, A.S.(2011). Gröbner-Shirsov bases of some monoids. *Discrete Mathematics*, 311 , 1064-1071.

[27] Kocapinar, C. ,Karpuz, E.G. , Ateş, F. and Çevik, A.S. Gröbner-Shirsov bases of the Generalized Bruck-Reilly ∗- Extension.(In Press).

[28] Cohen, E.D. (1989). *Combinatorial Group Theory : A Topological Approach.* Cambridge : Cambridge University Press.

[29] Dlab, V. and Neumann B.H. (1969). Semigroups with few endomorphisms. *Journal of the Australian Mathematic Society Ser.A.* 10, 162.

[30] Ruskuc, N, (1995). *Semigroup presentations. PhD*. Thesis, University of St.Andrews.

[31] Wang, J. (1998). Finite derivation type for semi-direct products of monoids. *Theoretical Computer Scienc,,* 191, 219.