T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BAZI ÖNEMLİ CEBİRSEL YAPILARIN CROSSED (ÇAPRAZ) ÇARPIMININ ÖZELLİKLERİ

DOKTORA TEZİ

AHMET EMİN

BALIKESİR, EKİM - 2015

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BAZI ÖNEMLİ CEBİRSEL YAPILARIN CROSSED (ÇAPRAZ) ÇARPIMININ ÖZELLİKLERİ

DOKTORA TEZİ

AHMET EMİN

BALIKESİR, EKİM - 2015

KABUL VE ONAY SAYFASI

Ahmet EMİN tarafından hazırlanan "**BAZI ÖNEMLİ CEBİRSEL YAPILARIN CROSSED (ÇAPRAZ) ÇARPIMININ ÖZELLİKLERİ**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 23.10.2015 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Doç. Dr. Fırat ATEŞ	....
Üye Prof. Dr. Recep ŞAHİN	....
Üye Doç. Dr. Özden KORUOĞLU	....
Üye Doç.Dr. İlker İNAM	....
Üye Doç. Dr. Musa DEMİRCİ	....

Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Doç. Dr. Necati ÖZDEMİR ....

Bu tez çalışması Balıkesir Üniversitesi tarafından 2014/95 nolu proje ile desteklenmiştir.

ÖZET

BAZI ÖNEMLİ CEBİRSEL YAPILARIN CROSSED (ÇAPRAZ) ÇARPIMININ ÖZELLİKLERİ
DOKTORA TEZİ
AHMET EMİN
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI:DOÇ. DR. FIRAT ATEŞ)

BALIKESİR, EKİM - 2015

Bu çalışmada bazı monoidlerin orthodoxluk, strongly π- inverselik ve π-regülerlik özellikleri üzerinde durulmuştur. Bu tez altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde tezin tarihçesi ve gelişiminden bahsedilmiştir ve diğer bölümlerde kullanılacak tanımlar, teoremler ve sonuçlar verilmiştir.

İkinci bölümde, crossed (çapraz) çarpım altında schützenberger çarpımının yeni versiyonu ve bu versiyonun sunuşu verilmiştir.

Üçüncü bölümde, regülerlik tanımı verilerek crossed (çapraz) çarpım, crossed (çapraz) çarpım altında schützenberger çarpımının yeni versiyonu ve çift yönlü yarı direkt çarpımının regülerliği araştırılmıştır.

Dördüncü bölümde, crossed (çapraz) çarpım ve schützenberger çarpımının strongly (kuvvetli) π- inverseliği incelenmiştir.

Beşinci bölümde, crossed (çapraz) çarpım, crossed (çapraz) çarpım altında schützenberger çarpımının yeni versiyonu ve schützenberger çarpımının orthodoxluk özelliği çalışılmıştır.

Altıncı bölümde, tezde elde edilen sonuçlar özetlenmiş ve sonra yapılacak çalışmalar için açık problemler verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Monoid, Yarı direkt çarpım, Schützenberger çarpım, Crossed (çapraz) çarpım, Regüler monoid, Strongly (kuvvetli) π-inverse monoid, Orthodox monoid.

ABSTRACT

SOME IMPORTANT ALGEBRAIC CONSTRUCTION PROPERTIES OF CROSSED PRODUCTS
PH.D THESIS
AHMET EMİN
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS
(SUPERVISOR:ASSOC. PROF. DR. FIRAT ATEŞ)

BALIKESİR, OCTOBER 2015

In this study, generally properties of orthodox, strongly π- inverse and π-regularity of monoids are concerned. This thesis contains of six chapters.

In the first chapter, the development and history of this thesis are given. The definitions, theorems and the results which are used for the other chapters are given.

In the second chapter, we define a new monoid construction under crossed products and the presentation of this new product are investigated.

In the third chapter, as being defined regularity of monoids also regularity property of this new product, the crossed products and the two sided product of monoids are examined.

In the fourth chapter, the property of strongly π- inverse monoids of the crossed products and the schützenberger products are examined.

In the fifth chapter, the property of orthodox monoids of the crossed products and a new monoid construction under crossed products are studied.

In the sixth chapter, the result obtained from this thesis are summarized and open problems for next studies are given.

KEYWORDS: Monoid, Semidirect products, Schützenberger products, Crossed products, Regularity of monoids, Strongly π- inverse monoids, Orthodox monoids.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

<u>Simge</u>	**<u>Adı</u>**
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}^+$	Pozitif tamsayılar kümesi
$\emptyset$	Boş küme
w	Kelime
$r(w)$	w kelimesinin başlangıç harfi
$\tau(w)$	w kelimesinin bitiş harfi
X^+	X kümesindeki pozitif kelimelerden oluşan küme
X^*	X kümesindeki pozitif kelimeler ve birim elemanın birleşiminden oluşan küme
$F(X)$	X ile üretilen serbest (free) monoid
$\lvert X\rvert$	X kümesinin eleman sayısı, $F(X)$ in rankı
$\wp = [X: R]$	X tarafından üretilen ve R bağıntı kümelerinin oluşturduğu monoid sunuşu
$M(\wp)$	$\wp$ sunuşu ile tanımlanmış monoid
$[w]$	w kelimesinin denklik sınıfı
$Gör(\mu)$	μ dönüşümünün görüntü kümesi
$Çek(\mu)$	μ dönüşümünün çekirdeği
(r_+, r_-)	X kümesi üzerinde birbirinden farklı pozitif semboller
$M_n(\mathbb{Z})$	Her bir bileşeni negatif olmayan tam sayılardan oluşan $n \times n$ tipindeki matrislerin kümesi
(A, B, α, f)	Crossed (çapraz) sistem
$End(M)$	M nin bütün endomorfizmalarının kümesi
1_M	M monoidinin birim elemanı
$A \times B$	A ile B monoidinin direkt çarpımı
$A\#_\alpha^f B$	A ile B monoidinin crossed (çapraz) çarpımı
$A_{cp}\#_\alpha^f B$	A ile B monoidinin crossed (çapraz) çarpım altında schützenberger çarpımının yeni versiyonu
$A \rtimes_\theta B$	A ile B monoidinin yarı direkt çarpımı
$A \lozenge B$	A ile B monoidinin schützenberger çarpımı
$A \lozenge_{sv} B$	A ile B monoidinin yarı direkt çarpım altında schützenberger çarpımının yeni versiyonu

$A_{\beta} \bowtie_{\alpha} B$	A ile B monoidinin çift yönlü yeni bir yarı direkt çarpımı
$\wp(A)$	A kümesinin kuvvet kümesi
C_n	n. mertebeden Devirli monoid
$Z(M)$	M monoidinin merkezi
a^{-1}	a elemanının inversi
$E(M)$	M monoidinin idempotent elemanlarının kümesi
$RegM$	M monoidinin regüler elemanlarının kümesi
$\square$	İspatların sonuna eklenir

ÖNSÖZ

Lisans, Yüksek Lisans ve Doktora eğitimim boyunca tüm çalışmalarımda kıymetli zamanını bana ayırarak bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım benden hiçbir zaman desteğini esirgemeyen çok değerli hocam Doç. Dr. Fırat ATEŞ'e sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Lisans eğitimimden Doktora eğitimimin sonuna kadar bana her konuda yardımcı olan ve destek veren çok değerli hocalarım Prof. Dr. Recep ŞAHİN'e, Doç. Dr. Özden KORUOĞLU'na ve Doç. Dr. Sebahattin İKİKARDEŞ'e çok teşekkür ederim.

Yüksek Lisans ve Doktora eğitimim sürecinde, kendilerini ve ailelerini çok yakından tanımakla mesut olduğum Bilal DEMİR ve Taner YARAL'a ayrıca Ümit SARP'a en derin sevgi ve saygılarımı sunuyorum.

Son olarak başta babam, annem ve kardeşlerim olmak üzere her zaman en büyük yardımcım ve destekçim olan sevgili eşim Bedia'yı ve evimizin neşe kaynağı biricik kızım Mihrimah'ı nasip ettiği için Allah'a sonsuz teşekkürler…

Balıkesir, 2015 Ahmet EMİN

1. GİRİŞ

Yarı grupların (monoidlerin veya grupların) yarı direkt, crossed (çapraz) ve schützenberger çarpımları, yarı grup (monoid veya grup) teorisinin tarihi gelişim sürecinde büyük bir öneme sahiptir. Birçok cebirsel özelliklerde bu çarpımlar çok önemli rol oynamaktadır. Bu doğrultuda [1] de 1983 yılında William R. Nico yarı direkt çarpımının regüler olması için gerekli ve yeterli koşulu vermiştir. [2] de 1996 tarihinde Yufen Zhang, Shizheng Li ve Desheng Wang yarı direkt çarpımının strongly π-inverseliğini incelemişlerdir ve herhangi iki monoidin yarı direkt çarpımının strongly π-inverse olması için gerekli ve yeterli koşulu vermişlerdir. 1989 yılında ise [3] de Tatsuhiko Saito tarafından yarı direkt çarpımının orthodoxluğu incelenmiş olup herhangi iki monoidin yarı direkt çarpımının orthodox olması için gerekli ve yeterli koşulu vermiştir.

[4] de 2008 yılında Ana-Loredena Agore ve G. Militaru, [5] de 2010 yılında Ana-Loredena Agore ve Dragoş Fratila tarafından crossed (çapraz) çarpım çalışılmış, bir grup olduğu ayrıca yarı direkt çarpım ile olan ilişkisi gösterilmiştir.

1920 yılında dünyaya gelen ve bir tıp doktoru olan Marcel-Paul Schützenberger çocukluğundan beri matematiğe çok ilgi duymuş ve bu ilgisini, tutkusunu Paris Üniversitesinde 1953 yılında ikinci doktorasını matematik alanında alarak sürdürmüştür. Özellikle Automata ve Language teorisinde matematikçiler tarafından çok kullanılan ve kendi ismiyle anılan Schützenberger çarpımını ortaya koymuştur. [6] da 1991 yılında John M. Howie bu çarpımın bir monoid olduğunu göstermiştir ve [7] de 1994 tarihinde John M. Howie ve Nico Ruskuc bu çarpımın sunuşunu veren önerme ve teoremi vermişlerdir. [8] de 2010 yılında Eylem Güzel Karpuz, Fırat Ateş ve Ahmet Sinan Çevik, schützenberger çarpımının regülerliğini incelemişlerdir ve herhangi iki monoidin schützenberger çarpımının regüler olması için gerekli ve yeterli koşulu vermişlerdir.

[9] da 2009 yılında Fırat Ateş tarafından schützenberger çarpım ve yarı direkt çarpım birleştirilerek schützenberger çarpım altında yarı direkt çarpımının yeni versiyonu adında yeni bir monoid yapısı elde edilmiştir. Elde edilen bu çarpımının bir monoid olduğunu göstermiştir ve bu çarpımının regülerliğini incelemiştir. [10] da

2011 yılında Eylem Güzel Karpuz ve Ahmet Sinan Çevik bu yeni çarpımın strongly π-inverseliğini incelemişlerdir ve herhangi iki monoidin bu yeni çarpımının strongly π-inverse olması için gerekli ve yeterli koşulu vermişlerdir. Ayrıca [9] da Fırat Ateş yarı direkt çarpımını çift yönlü olarak inceleyerek yeni bir monoid yapısı elde etmiştir. Bu yeni yapının monoid olduğunu gösterip sunuşunu veren önerme ve teoremleri de ispatlamıştır.

Yukarıda bahsi geçen tüm çalışmalardan hareketle birinci bölümde bu tez çalışmasının diğer bölümlerinde genel olarak kullanılacak bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. İlk olarak serbest (free) monoidler incelenmiş olup kelime yapısına değinilmiştir. Daha sonra ise genel anlamda monoid sunuşlarının yapısı ve bu konuyla ilgili diğer bölümlerde kullanacağımız önerme ve teoremlere yer verilmiştir. Bu bölümde verilen bilgiler standart olup bu konuyla ilgili daha ayrıntılı bilgiler [13-21] ve [24-26] kaynaklarından elde edilebilir.

İkinci bölümde crossed çarpım ve schützenberger çarpım birleştirilerek crossed çarpım altında schützenberger çarpımının yeni versiyonu adında bir monoid yapısı elde edildi. İlk olarak elde edilen bu yeni yapının bir monoid olduğu ispatlandı daha sonra ise bu yeni monoidin sunuşunu veren teorem verilip ispatı yapılmıştır.

Üçüncü bölümde regülerlik tanımı verilmişir ve ilk olarak crossed çarpımının regülerliği incelenmiştir. Herhangi iki monoid için crossed çarpımının regüler olması için gerekli ve yeterli koşul verilmiştir. Daha sonra ikinci bölümde tanımlanmış olan crossed çarpım altında schützenberger çarpımının yeni versiyonunun regülerliği incelendi ve regüler olması için gerekli ve yeterli koşul verilmiştir. Son olarak da çift yönlü yarı direkt çarpımının regülerliği incelenmiş ve herhangi iki monoidin yarı direkt çarpımının regüler olması için gerekli ve yeterli koşul verilmiştir.

Dördüncü bölümde ilk olarak strongly π-inverse monoidin tanımı verilmiştir. Daha sonra crossed çarpımının strongly π-inverseliği incelenmiştir. Son olarak da schützenberger çarpımının strongly π-inverseliği incelenmiştir ve herhangi iki monoidin schützenberger çarpımının strongly π-inverse olması için gerekli ve yeterli koşul verilmiştir.

Beşinci bölümde ise orthodoxluk tanımı verilip ilk olarak crossed çarpımının orthodoxluk özelliği incelenmiştir. Daha sonra schützenberger çarpım altında yarı direkt çarpımının yeni versiyonunun orthodoxluğu incelenmiştir. Herhangi iki monoid için bu yeni çarpımın orthodox olması için gerekli ve yeterli koşul verilmiştir. Son olarak da schützenberger çarpımının orthodoxluğu incelenmiştir ve herhangi iki monoid için schützenberger çarpımının orthodox olması için gerekli ve yeterli koşul verilmiştir.

1.1 Serbest (Free) Monoid

1.1.1 Tanım [14]: X boştan farklı bir küme olsun. X kümesinin her bir elemanına *harf* denir. Ayrıca $n \in \mathbb{N}, x_i \in X$ ve $1 \leq i \leq n$ olmak üzere

$$x_1 x_2 \dots x_n$$

ifadesine X üzerinde bir *kelime* denir ve w ile gösterilir.

1.1.2 Tanım [14]: Tanım 1.1.1 de verilen w kelimesinin başlangıç harfi $r(w) = x_1$ ve bitiş harfi de $\tau(w) = x_n$ biçimindedir. Burada $n = 0$ ise w ye *boş kelime* denir ve 1 ile gösterilir.

1.1.3 Tanım [14]: w ve u, X kümesi üzerinde iki kelime olsun. w ve u kelimelerinin çarpımı, w kelimesinin arkasına u kelimesini yazarak elde edilir ve bu çarpım wu biçiminde gösterilir.

Boş olmayan bir kelime üzerinde aşağıdaki işlemler tanımlanabilir:

(i) Herhangi bir kelime içindeki 1 boş kelimesi silinebilir. Yapılan bu işleme, kelime üzerindeki *indirgeme* işlemi denir.

(ii) Herhangi bir kelime içerisinde 1 boş kelimesi eklenebilir. Yapılan bu işleme *ekleme* işlemi denir.

1.1.4 Tanım [15]: M bir monoid ve X de bu monoidin üreteç kümesi olmak üzere X^+ kümesi X üreteç kümesindeki elemanlarla oluşturulan en az bir uzunluklu kelimelerin kümesi olarak tanımlansın. X^* kümesini, $X^* = X^+ \cup \{1\}$ kümesi ile tanımlayalım. Buradaki 1, M monoidinin birim elemanıdır. $m, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m \in X$ olsun. Ayrıca $w_1, w_2 \in X^*$ için, $w_1 = x_1 x_2 \dots x_n$, $w_2 = y_1 y_2 \dots y_m$ kelimeleri arasındaki işlem

$$w_1 w_2 = (x_1 x_2 \dots x_n)(y_1 y_2 \dots y_m) = x_1 x_2 \dots x_n y_1 y_2 \dots y_m$$

biçiminde tanımlansın. Kelimeler arasında tanımlanan bu işleme gore X^* bir monoid oluşturur ve oluşan bu monoide *Serbest (Free) Monoid* adı verilir ve $F(X)$ ile gösterilir.

1.1.5 Tanım [15]: X kümesinin eleman sayısına $F(X)$ in *rankı* denir ve $|X|$ ile gösterilir.

1.2 Monoid Sunuşu

1.2.1 Tanım [15]: X boştan farklı bir küme (üreteç kümesi) ve $R \subseteq X^* \times X^*$ olacak şekilde R alt kümesi (bağıntı kelimelerinin bir kümesi) olsun. Bu durumda

$$\wp[X: R]$$

ikilisine bir *Monoid Sunuşu* denir.

Eğer X ve R kümelerinin her ikisi de sonlu ise $\wp$ sunuşu da sonludur. r_+ ve r_- sembolleri X kümesi üzerinde birbirinden farklı pozitif sembolleri ifade etmek üzere, her bir $r \epsilon R$ bağıntısı (r_+, r_-) sıralı çifti olarak tanımlanır. Genellikle $r : r_+ = r_-$ biçiminde yazılır. Ayrıca w_1 ve w_2 kelimeleri X kümesinden elde edilen pozitif kelimeler olmak üzere $\wp$ sunuşuna bağlı olarak, bu iki kelimeden biri diğerinden Tanım 1.1.3 de verilen (i) ve (ii) işlemin sonlu sayıda uygulanmasıyla elde edilebiliyorsa, w_1 ve w_2 *denktir* denir ve $w_1 \approx w_2$ şeklinde gösterilir. Elde edilen $\approx$ bağıntısı denklik bağıntısı olup, herhangi bir w pozitif kelimesini içeren serbest denklik sınıfı $[w]$ ile gösterilir. Bu denklik sınıfı üzerinde çarpma işlemi

$$[w_1][w_2] = [w_1 w_2]$$

şeklinde tanımlanır. Bu çarpma işlemi altında denklik sınıfları kümesi monoid oluşturur. Oluşan bu monoide *$\wp$ sunuşu ile tanımlanmış monoid* denir ve $M(\wp)$ ile gösterilir.

M bir monoid ve X bir küme olsun. Ayrıca

$$\mu: X \to M\ , x \mapsto m_x$$

dönüşümünü göz önüne alalım. Burada X kümesi üzerinde $x_1 x_2 \dots x_n \in X$ boştan farklı bir $w = x_1 x_2 \dots x_n$ kelimesi için,

$$\mu^*(w) = m_{x_1} m_{x_2} \dots m_{x_n} \tag{1.1}$$

kuralı ile tanımlı

$$\mu^*: F(X) \to M$$

homomorfizmasının varlığını biliyoruz. Özel olarak w boş kelime ise, $\mu^*(w) = 1$ dir. Şimdi (1.1) ile tanımlanan μ^* homomorfizması yardımıyla, bir M monoidinin sunuşunun oluşturulmasında kullanılan aşağıdaki önermeyi verebiliriz .

1.2.2 Önerme [27]: $\wp[X{:}\,R]$ bir monoid sunuşu olsun. (1.1) de verilen μ^* homomorfizmasının

$$\mu_*: M(\wp) \to M\ , [x] \mapsto m_x$$

şeklinde homomorfizmaya genişletebilmesi için gerek ve yeter koşul, her $r\epsilon R$ için,

$$\mu(r_+) = \ \mu(r_-)$$

olmasıdır.

1.2.3 Örnek : $M_n(\mathbb{Z}^+)$ kümesi, her bir bileşeni negatif olmayan tam sayılardan oluşan $n \times n$ tipindeki matrislerin kümesi ve $\wp = [x, y{:}\, x^2y^3 = yx]$ bir monoid sunuşu olsun. Buna gore $m_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $m_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olmak üzere,

$$\mu{:}\, \{x, y\} \to M_n(\mathbb{Z}^+), x \mapsto m_1, y \mapsto m_2$$

fonksiyonunu düşünelim. Burada $\mu(x^2y^3) = \mu(yx)$ olduğundan Önerme 1.2.2 den, μ dönüşümü

$$\mu_*: M(\wp) \to M_n(\mathbb{Z}^+)$$

öyle ki

$$[x] \mapsto m_1, [x] \mapsto m_2$$

homomorfizmasına genişletilir.

1.2.4 Tanım [26,27] : M bir monoid, $X = \{m_x{:}\, x\epsilon X\}$ kümesi M monoidi için bir üreteç kümesi ve $\wp = [X{:}\,R]$ olsun. Eğer

$$\mu{:}\, X \to M\ , x \mapsto m_x$$

dönüşümü

$$\mu_*: M(\wp) \to M\ , [x] \mapsto m_x$$

izomorfizmasına genişletilebiliyorsa, bu $\wp$ sunuşuna M monoidinin sunuşu denir.

Şimdide aşağıda verilen önerme ile devirli (cyclic veya monogenic [26]) monoidlerin sunuşunu veren önerme'yi inceleyelim.

1.2.5 Önerme [26] : M, mertebesi k olan ve m ile üretilen sonlu devirli monoid olsun. Bu durumda $X = \{m\}$ üreteç kümesi üzerinde M nin sunuşu

$$\wp = [x : x^k = x^l (k > l)] \tag{1.2}$$

biçimindedir.

İspat : (1.2) de verilen $x^k = x^l$ bağıntısını göz önüne alalım. Ayrıca

$$\mu : X \to M \ , x \mapsto m_x$$

dönüşümü için $\mu(x^k) = \mu(x^l)$ olduğundan Önerme 1.2.2 den

$$\mu_* : M(\wp) \to M \ , [x] \mapsto m$$

genişletilmiş homomorfizmasını elde ederiz. Burada $m \epsilon Gör(\mu_*)$ olduğunda, μ_* örtendir. $\wp$ sunuşundan elde edilecek olan birbirinden farklı elemanlar

$$1, x, x^2, \dots, x^{k-1}$$

biçiminde olup Tanım 1.2.4 yardımıyla, $M(\wp)$ nin farklı elemanları

$$[1], [x], [x^2], \dots, [x^{k-1}]$$

olacaktır. Buradan $|M(\wp)| = k$ elde edilir. Özel olarak μ_* nın bire bir olmamasının kabulü $|Im(\mu_*)| < |M(\wp)| = k$ eşitsizliğini vereceğinden dolayı μ_* bire bir olmak zorundadır. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

1.2.6 Tanım [28] : M bir monoid ve ρ, M üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. Her $x, y, s \in M$ için

$$(x, y) \in \rho \Rightarrow (xs, ys) \in \rho$$

oluyor ise ρ bağıntısına bir *sağ kongruans* bağıntısı,

$$(x, y) \in \rho \Rightarrow (sx, sy) \in \rho$$

oluyor ise ρ bağıntısına bir *sol kongruans* bağıntısı denir. Eğer ρ bağıntısı hem sağ hem de sol kongruans oluyor ise bu ρ bağıntısına *kongruans* bağıntısı denir.

1.2.7 Teorem [28] : M bir monoid, X de M için bir üreteç kümesi ve ρ, X^* kümesi üzerinde R yi içeren en küçük kongruans olsun. Bu durumda

$$M \cong {}^{X^*}/_{\rho}$$

dir.

İspat: $\wp$ sunuşunun temsil ettiği M monoidi ve X üreteç kümesi için,

$$\mu_*: X \to M\,, x \mapsto [x]$$

dönüşümünü tanımlayalım. Bu dönüşüm

$$\mu: X^* \to M\,, [w] \mapsto [w]$$

şeklinde tek bir örten homomorfizmasına genişletilebilir. Ayrıca $Çek(\mu), R$ yi içeren en küçük kongruans bağıntısı olduğundan, $Çek(\mu) = \rho$ dir. Dolayısıyla 1. izomorfizma teoremi gereği

$$M \cong {}^{X^*}/_{\rho}$$

elde edilir. □

1.2.8 Tanım [29] : Bir M monoidinin kendisinden, kendisi üstüne tanımlanan homomorfizmasına *endomorfizma* adı verilir. Aslında M nin bütün endomorfizmalarının kümesi bileşke işlemi altında bir monoid oluşturur ve $End(M)$ ile gösterilir. Burada birim eleman

$$id: M \to M$$

dir.

Endomorfizma ile ilgili farklı örneklere [29] da ulaşılabilir.

1.3 Bazı Önemli Monoid Genişlemeleri

Crossed (çapraz) çarpım, yarı direkt çarpım ve schützenberger çarpım; grup, yarı grup ve monoid cebirsel yapıları üzerinde çok çalışılan konulardandır. Özellikle yarı direkt çarpım, combinatorial grup teoride çok önemli bir yere sahiptir. [1-3], [6-11], [12,14], [16-17] ve [21-22] de verilen çalışmalarda matematikçiler acaba bu üç önemli çarpım kullanılarak yeni bir çarpım yani yeni bir monoid cebirsel yapısı, bir monoid genişlemesi elde edilebilir mi? sorusunu gündeme getirmişlerdir. Bu bölümde bazı önemli monoid genişlemelerin tanımı verilmiş olup monoid sunuşları üzerinde çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmalara [7-11] kaynaklarından ulaşılabilir.

1.3.1 Monoidlerin Crossed (Çapraz) Çarpımı

1.3.1.1 Tanım [11] : A ve B herhangi iki monoid olsunlar. A 'nın endomorfizmalarının kümesi $End(A)$ olmak üzere

$$f: B \times B \to A \text{ ve } \alpha: B \to End(A)$$

aşağıdaki koşulları sağlayan iki dönüşüm olsunlar. Her $b_1, b_2, b_3 \in B$ ve $a \in A$ için

$$\alpha_{b_1}\left(\alpha_{b_2}(a)\right) f(b_1, b_2) = f(b_1, b_2)\alpha_{b_1 b_2}(a) \quad (1.3)$$

$$f(b_1, b_2) f(b_1 b_2, b_3) = \alpha_{b_1}\big(f(b_2, b_3)\big) f(b_1, b_2 b_3) \quad (1.4)$$

eşitlikleri sağlansın. Bu durumda (A, B, α, f) dörtlüsüne bir *crossed (çapraz) sistem* denir. Eğer $f(1_B, 1_B) = 1_A$ ise (A, B, α, f) crossed sistemine *normalleştirilmiş (normalized) sistem* denir. $\alpha: B \to End(A)$ dönüşümüne *weak action (zayıf hareket)* ve $f: B \times B \to A$ dönüşümü ise $\alpha - cocycle$ olarak adlandırılır. Eğer (A, B, α, f) normalleştirilmiş crossed sistem ise bu durumda $f(1_B, b) = f(b, 1_B) = 1_A$ ve $\alpha_{1_A}(a) = a$ dır.

A ve B herhangi iki monoid ve $f: B \times B \to A$ ile $\alpha: B \to End(A)$, (1.3) ve (1.4) koşulunu sağlayan iki dönüşüm olsunlar. Bu durumda A ve B' nin crossed çarpımı $a_1, a_2 \in A$ ve $b_1, b_2 \in B$ olmak üzere

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) = \big(a_1 \alpha_{b_1}(a_2) f(b_1, b_2), b_1 b_2\big)$$

şeklinde tanımlanır ve $A\#_\alpha^f B$ biçiminde gösterilir. Şimdi $A\#_\alpha^f B$'nin birim elemanı $1_{A\#_\alpha^f B} = (1_A, 1_B)$ olan bir monoid olduğunu gösterelim. Her $a, a_1, a_{2,} a_3 \in A$ ve $b, b_1, b_2, b_3 \in B$ için

$$
\begin{aligned}
\left[(a_1,b_1)(a_2,b_2)\right](a_3,b_3) &= \left(a_1\alpha_{b_1}(a_2)\, f(b_1,b_2), b_1b_2\right)(a_3,b_3)\\
&= \left(a_1\alpha_{b_1}(a_2)\, f(b_1,b_2)\,\alpha_{b_1b_2}(a_3)\, f(b_1b_2,b_3), b_1b_2b_3\right)\\
&= \left(a_1\alpha_{b_1}(a_2)\,\alpha_{b_1}\left(\alpha_{b_2}(a_3)\right) f(b_1,b_2)\, f(b_1b_2,b_3), b_1b_2b_3\right)\\
&= \left(a_1\alpha_{b_1}(a_2)\,\alpha_{b_1}\left(\alpha_{b_2}(a_3)\right)\alpha_{b_1}\left(f(b_2,b_3)\right) f(b_1,b_2b_3), b_1b_2b_3\right)\\
&= \left(a_1\alpha_{b_1}(a_2)\,\alpha_{b_1}\left(\alpha_{b_2}(a_3)\, f(b_2,b_3)\right) f(b_1,b_2b_3), b_1b_2b_3\right)\\
&= \left(a_1\alpha_{b_1}\left(a_2\alpha_{b_2}(a_3)\, f(b_2,b_3)\right) f(b_1,b_2b_3), b_1b_2b_3\right)\\
&= (a_1,b_1)\left[a_2\alpha_{b_2}(a_3)\, f(b_2,b_3), b_2b_3\right]\\
&= (a_1,b_1)\left[(a_2,b_2)(a_3,b_3)\right]
\end{aligned}
$$

bu da bize

$$\left[(a_1,b_1)(a_2,b_2)\right](a_3,b_3) = (a_1,b_1)\left[(a_2,b_2)(a_3,b_3)\right]$$

eşitliğini verir. Ayrıca

$$
\begin{aligned}
(a,b)(1_A,1_B) &= \left(a\alpha_b(1_A)\, f(b,1_B), b1_B\right) = (a,b)\\
(1_A,1_B)(a,b) &= \left(1_A\alpha_{1_B}(a)\, f(1_B,b), 1_Bb\right) = (a,b)
\end{aligned}
$$

olduğundan

$$(a,b)(1_A,1_B) = (1_A,1_B)(a,b) = (a,b)$$

olur ki bu $A\#_\alpha^f B$ ’ nin birim elemanı $1_{A\#_\alpha^f B} = (1_A, 1_B)$ olan bir monoid olduğu anlamına gelir.

1.3.2 Monoidlerin Yarı Direkt Çarpımı

1.3.2.1 Tanım [1,2] : A ve B herhangi iki monoid olmak üzere, her $a \in A \quad b, b_1, b_2 \in B$ için

$$\theta: B \to End(A), b \mapsto \theta_b \text{ ve } 1 \mapsto id_{End(A)}$$

şeklinde tanımlanan θ homomorfizması

$$\theta_{b_1}\left(\theta_{b_2}(a)\right) = \theta_{b_1 b_2}(a) \tag{1.5}$$

şartını sağlasın. Buna gore A 'nın B ile olan yarı direkt çarpımı, her $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A \times B$ sıralı ikilisi için,

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) = \left(a_1\theta_{b_1}(a_2), b_1 b_2\right) \tag{1.6}$$

kuralını sağlayan bir kümedir.

1.3.2.2 Teorem [2] : Tanım 1.3.2.1 deki koşulları sağlayan kümeye M diyelim. M kümesi (1.6) da verilen işleme göre birim elemanı $(1_A, 1_B)$ olan bir monoiddir.

İspat : M nin bir monoid olduğunu gösterebilmemiz için M nin birleşme özelliğini sağladığını ve birim elemanı $(1_A, 1_B)$ olduğunu göstermemiz gerekir. Her $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ ve $(a_3, b_3) \in A \times B$ için,

$$\begin{aligned}
\left[(a_1,b_1)(a_2,b_2)\right](a_3,b_3) &= \left(a_1\theta_{b_1}(a_2), b_1b_2\right)(a_3,b_3) \\
&= \left(a_1\theta_{b_1}(a_2)\theta_{b_1b_2}(a_3), b_1b_2b_3\right) \\
&= \left(a_1\theta_{b_1}\left(a_2\theta_{b_2}(a_3)\right), b_1b_2b_3\right) \\
&= (a_1,b_1)\left(a_2\theta_{b_2}(a_3), b_2b_3\right) \\
&= (a_1,b_1)\left[(a_2,b_2)(a_3,b_3)\right]
\end{aligned}$$

dir. Buradan

$$[(a_1, b_1)(a_2, b_2)](a_3, b_3) = (a_1, b_1)[(a_2, b_2)(a_3, b_3)]$$

eşitliği var olduğundan birleşme özelliği vardır. Ayrıca her $a \in A$ ve $b \in B$ için

$$(a, b)(1_A, 1_B) = (a\theta_b(1_A), b1_B) = (a, b)$$

ve

$$(1_A, 1_B)(a, b) = \left(1_A\theta_{1_B}(a), 1_B b\right) = (a, b)$$

olduğundan

$$(a, b)(1_A, 1_B) = (1_A, 1_B)(a, b) = (a, b)$$

olur ki bu M kümesinin bir monoid olduğu anlamına gelir. □

1.3.2.3 Tanım [1,2] : (1.6) da verilen işlem ile tanımlanmış olan M monoidine A' nın B ile olan *yarı direkt çarpımı* denir ve $A \rtimes_\theta B$ ile gösterilir.

1.3.2.4 Teorem [28,30] : A ve B monoidlerinin sunuşları sırasıyla $\wp_A = [X: R]$ ve $\wp_B = [Y: S]$ olsun. Özel olarak $x \in X$ ve $y \in Y$ olmak üzere T_{yx} simgesi ile

$$yx = \left(\theta_y(x)\right) y$$

biçimindeki bir bağıntıyı gösterelim. Ayrıca T kümesi, T_{yx} formundaki bütün bağıntıların kümesi olsun. O zaman M yarı direkt çarpım monoidinin sunuşu

$$\wp = [X, Y: R, S, T] \tag{1.7}$$

biçimindedir.

İspat : $X = \{(x, 1_B): x \in X\}$ ve $Y = \{(1_A, y): y \in Y\}$ olsun ve $Z = X \cup Y$ diyelim. Z^* ile Z kümesinden elde edilen kelimelerin kümesini gösterelim.

$$\varphi: Z^* \rightarrow A \rtimes_\theta B$$

homomorfizmasını

$$\varphi(x) = (x, 1_B),$$

$$\varphi(y) = (1_A, y)$$

işlemleri ile tanımlayalım. $(x_1, 1_B), (x_2, 1_B), (1_A, y_1)$ ve $(1_A, y_2) \in A \rtimes_\theta B$ olmak üzere

$$(x_1, 1_B)(x_2, 1_B) = (x_1 x_2, 1_B) \tag{1.8}$$

$$(1_A, y_1)(1_A, y_2) = (1_A, y_1 y_2) \tag{1.9}$$

$$(x, 1_B)(1_A, y) = (x, y) \tag{1.10}$$

eşitlikleri ile $Z, A \rtimes_\theta B$ için bir üreteç kümesidir. Şimdi $A \rtimes_\theta B$ nın (1.7) deki bağıntıları sağladığını gösterelim. $x_1, x_2, \dots, x_s \in X$ olmak üzere $R = x_1 x_2 \dots x_s$ olsun. Bu durumda

$$(x_1, 1_B)(x_2, 1_B) \dots (x_s, 1_B) = (x_1 x_2 \dots x_s, 1_B) = (R, 1_B) = (1_A, 1_B)$$

elde edilir. Ayrıca $y_1, y_2, \dots, y_k \in Y$ olmak üzere $S = y_1 y_2 \dots y_k$ olsun. Bu durumda

$$(1_A, y_1)(1_A, y_2) \dots (1_A, y_k) = (1_A, y_1 y_2 \dots y_k) = (1_A, S) = (1_A, 1_B)$$

elde edilir. Şimdi $x \in X$ ve $y \in Y$ için $yx = \left(\theta_y(x)\right) y$ olsun.

$$\begin{aligned} \varphi(yx) &= \varphi(y)\varphi(x) \\ &= (1_A, y)(x, 1_B) \\ &= \left(\theta_y(x), y\right) \\ &= \left(\theta_y(x), 1_B\right)(1_A, y) = \varphi\left(\left(\theta_y(x)\right) y\right) \end{aligned}$$

olur. O halde Önerme 1.2.2 den φ homomorfizması (1.7) ile tanımlanmış herhangi bir N monoidinden $A \rtimes_\theta B$ ye olan $\bar{\varphi}$ homomorfizmasına indirgenir. Şimdi $\bar{\varphi}$ homomorfizmasının bire bir ve örten olduğunu gösterelim. $w\epsilon \in$ boş kümeden farklı bir kelime olsun. $w = w_x w_y \in N$ olacak şekilde $w_x \in X^*$ ve $w_y \in Y^*$ kelimeleri vardır. Böylece

$$\varphi(w) = \varphi\left(w_x w_y\right) = \varphi(w_x)\varphi\left(w_y\right) = (w_x, 1_B)\left(1_A, w_y\right) = \left(w_x, w_y\right)$$

dir. O halde $w', w'' \in Z^*$ olmak üzere $\varphi(w') = \varphi(w'')$ olduğunu kabul edelim.

$$\varphi(w') = \varphi\left(w'_x w'_y\right) = \varphi(w'_x)\varphi\left(w'_y\right) = (w'_x, 1_B)\left(1_A, w'_y\right) = \left(w'_x, w'_y\right)$$

ve

$$\varphi(w'') = \varphi\left(w''_x w''_y\right) = \varphi(w''_x)\varphi\left(w''_y\right) = (w''_x, 1_B)\left(1_A, w''_y\right) = \left(w''_x, w''_y\right)$$

bu iki eşitlikten $(w'_x, w'_y) = (w''_x, w''_y)$ olur ve buradan $w'_x = w''_x$ ve $w'_y = w''_y$ çıkar. (1.7) deki bağıntılardan hareketle $w'_x = w''_x$ ve $w'_y = w''_y$ bağıntılarının N de sağlandığı görülür. Böylece istenen elde edilmiş olur. □

Crossed çarpım ve yarı direkt çarpımların tanımlarını verdikten ve bu çarpımların birer monoid cebirsel yapısında olduğunu gösterdikten sonra bu monoidlerin birbirleriyle olan ilişkisini veren aşağıdaki önermeyi veriyoruz.

1.3.2.5 Önerme [5] : A ve B herhangi iki monoid ve $f: B \times B \to A$ dönüşümü bir trivial (aşikar) dönüşüm olsun, yani her $b_1, b_2 \in B$ için $f(b_1, b_2) = 1_A$ olsun. Bu durumda (A, B, α, f) nın bir crossed sistem olabilmesi için gerek ve yeter koşul $\alpha: B \to End(A)$ dönüşümünün bir homomorfizma olmasıdır.

Bu önerme bize, $f: B \times B \to A$ dönüşümü bir trivial (aşikar) dönüşüm olduğunda $A\#_\alpha^f B = A \rtimes_\alpha B$ olduğunu, yani A'nın B ile olan crossed çarpımının A'nın B ile olan bir yarı direkt çarpımı olduğunu ifade eder.

1.3.3 Schützenberger Çarpım

1.3.3.1 Tanım [7] : A ve B herhangi iki monoid ve $P \subseteq A \times B$ olsun. Her $a \epsilon A$ ve $b \epsilon B$ için

$$aP = \{(ac, d) : (c, d) \epsilon P\}$$
$$Pb = \{(c, db) : (c, d) \epsilon P\}$$

şeklinde bir çarpım tanımlansın. Buna göre A ve B'nin schützenberger çarpımı:

$$(a_1, P_1, b_1)(a_2, P_2, b_2) = (a_1 a_2, P_1 b_2 \cup a_1 P_2, b_1 b_2)$$

işlemi altında tanımlı $A \times \wp(A \times B) \times B$ kümesi olup $A \lozenge B$ şeklinde gösterilir. $A \lozenge B$, birim elemanı $(1_A, \emptyset, 1_B)$ olan bir monoiddir. Gerçekten de her $a_1, a_2, a_3 \in A$, $b_1, b_2, b_3 \in B$ ve $P_1, P_2, P_3 \subseteq A \times B$ için

$$\begin{aligned}
[(a_1, P_1, b_1)(a_2, P_2, b_2)](a_3, P_3, b_3) &= (a_1 a_2, P_1 b_2 \cup a_1 P_2, b_1 b_2)(a_3, P_3, b_3) \\
&= (a_1 a_2 a_3, (P_1 b_2 \cup a_1 P_2) b_3 \cup a_1 a_2 P_3, b_1 b_2 b_3) \\
&= (a_1 a_2 a_3,\ P_1 b_2 b_3 \cup a_1 P_2 b_3 \cup a_1 a_2 P_3, b_1 b_2 b_3)
\end{aligned}$$

$$= (a_1, P_1, b_1)(a_2a_3, P_2b_3 \cup a_2P_3, b_2b_3)$$

$$= (a_1, P_1, b_1)[(a_2, P_2, b_2)(a_3, P_3, b_3)]$$

dir. Buradan

$$[(a_1, P_1, b_1)(a_2, P_2, b_2)](a_3, P_3, b_3) = (a_1, P_1, b_1)[(a_2, P_2, b_2)(a_3, P_3, b_3)]$$

eşitliği var olduğundan birleşme özelliği vardır. Ayrıca her $b \in B$ ve $P \subseteq A \times B$ için

$$(a, P, b)(1_A, \emptyset, 1_B) = (a1_A, P1_B \cup a\emptyset, b1_B) = (a, P, b)$$

ve

$$(1_A, \emptyset, 1_B)(a, P, b) = (1_Aa, \emptyset b \cup 1_AP, 1_Bb) = (a, P, b)$$

olduğundan

$$(a, P, b)(1_A, \emptyset, 1_B) = (1_A, \emptyset, 1_B)(a, P, b) = (a, P, b)$$

olur ki bu $A \lozenge B$' nin birim elemanı $(1_A, \emptyset, 1_B)$ olan bir monoid olduğu anlamına gelir.

Şimdi de bu monoidin sunuşunu veren teoremi verelim. Ancak teoremi vermeden once $A \lozenge B$' nin üreteç kümesini veren aşağıdaki önermeyi vermeliyiz:

1.3.3.2 Önerme [7] : A ve B monoidleri sırasıyla X ve Y kümeleri tarafından üretilsin. Bu durumda $A \lozenge B$ schützenberger çarpımı

$$\{(x, \emptyset, 1_B): x\epsilon X\} \cup \{(1_A, \emptyset, y): y\epsilon Y\} \cup \{(1_A, \{(a, b)\}, 1_B): a\epsilon A, b\epsilon B\}$$

kümesi tarafından üretilir.

İspat : $a_1, a_2, a_3 \in A$, $b_1, b_2, b_3 \in B$ ve $P_1, P_2 \subseteq A \times B$ olsun.

$$(a_1, \emptyset, 1_B)(a_2, \emptyset, 1_B) = (a_1a_2, \emptyset, 1_B) \quad (1.11)$$

$$(1_A, \emptyset, b_1)(1_A, \emptyset, b_2) = (1_A, \emptyset, b_1b_2) \quad (1.12)$$

$$(1_A, P_1, 1_B)(1_A, P_2, 1_B) = (1_A, P_1 \cup P_2, 1_B) \quad (1.13)$$

$$(1_A, \emptyset, b)(1_A, P, 1_B)(a, \emptyset, 1_B) = (a, P, b) \quad (1.14)$$

olduğundan ispat kolayca görülür. □

Üreteç kümesini verdikten sonra schützenberger çarpımının sunuşunu veren sıradaki teoremi verebiliriz.

1.3.3.3 Teorem [7] : A ve B monoidleri sırasıyla $[X: R_A]$ ve $[Y: R_B]$ sunuşlarıyla temsil edilsinler. Bu durumda $A \lozenge B$ schützenberger çarpımının üreteç kümesi

$$Z = X \cup Y \cup \{z_{a,b}: a \in A, b \in B\}$$

ve bağıntı kümesi;

$$R_A, R_B; \tag{1.15}$$

$$z_{a,b}^2 = z_{a,b}\,,\ z_{a,b}\, z_{c,d} = z_{c,d}\, z_{a,b},\ a, c \epsilon A, b, d \epsilon B; \tag{1.16}$$

$$x z_{a,b} = z_{xa,b} x, \qquad x \epsilon X, a \epsilon A, b \epsilon B; \tag{1.17}$$

$$z_{a,b} y = y z_{a,by}, \qquad y \epsilon Y, a \epsilon A, b \epsilon B; \tag{1.18}$$

$$xy = yx, \qquad x \epsilon X, y \epsilon Y; \tag{1.19}$$

biçimindedir.

İspat : $\varphi: Z^* \to A \lozenge B$ homomorfizma dönüşümünü $x \in X, y \in Y, a \in A$ ve $b \in B$olmak üzere;

$$\varphi(x) = (x, \emptyset, 1_B),$$

$$\varphi(y) = (1_A, \emptyset, y),$$

$$\varphi(z_{a,b}) = (1_A, \{(a, b)\}, 1_B)$$

işlemleri ile birlikte tanımlayalım. Bu dönüşümün Önerme 1.3.3.2 den örten olduğu açıktır. Şimdi (1.15) – (1.19) bağıntılarının $A \lozenge B$'yi sağladığını kontrol edelim. (1.15) ve (1.16) bağıntıları (1.11), (1.12) ve (1.13) den gelir. (1.17), (1.18) ve (1.19) ise her $x \in X, y \in Y, a \in A, b \in B$ için

$$(x, \emptyset, 1_B)(1_A, \{(a, b)\}, 1_B) = (x, \{(xa, b)\}, 1_B) = (1_A, \{(xa, b)\}, 1_B)(x, \emptyset, 1_B),$$

$$(1_A, \{(a, b)\}, 1_B)(1_A, \emptyset, y) = (1_A, \{(a, by)\}, y) = (1_A, \emptyset, y)(1_A, \{(a, by)\}, 1_B),$$

$$(x, \emptyset, 1_B)(1_A, \emptyset, y) = (x, \emptyset, y) = (1_A, \emptyset, y)(x, \emptyset, 1_B).$$

eşitliklerinden elde edilir. Böylece φ dönüşümü (1.15) - (1.19) bağıntıları ile tanımlanan M monoidinden $A \lozenge B$ üzerine olan $\bar{\varphi}$ epimorfizmasına indirgenir.

Şimdi $\bar{\varphi}$ epimorfizmasının bire bir olduğunu gösterelim. Bunun için $w \in Z^*$ boş kelimeden farklı herhangi bir kelimesini düşünelim. Burada (1.17), (1.18) ve (1.19) bağıntılarını kullanarak $l(w) \in Y^*, c(w) \in \{z_{a,b}: a \in A, b \in B\}^*$ ve $r(w) \in X^*$ için M içinde $w = l(w)c(w)r(w)$ olduğunu kolayca görebiliriz. Ayrıca (1.16) bağıntısı kullanılarak da $P(w) \subseteq \mathrm{A} \times \mathrm{B}$ için

$$c(w) = \prod_{(a,b) \in P(w)} z_{a,b}$$

biçimindedir. Bu nedenle herhangi bir $w \in Z^*$ kelimesi için

$$\begin{aligned} \varphi(w) &= \varphi\big(l(w)\big)\varphi\big(c(w)\big)\varphi\big(r(w)\big) \\ &= \big(1_A, \emptyset, l(w)\big)(1_A, P(w), 1_B)(r(w), \emptyset, 1_B) \\ &= \big(r(w), P(w), l(w)\big). \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Bazı $w_1, w_2 \in Z^*$ için $\varphi(w_1) = \varphi(w_2)$ eşitliğinin var olduğunu düşünelim. Bu durumda A içinde $r(w_1) = r(w_2)$, B içinde $l(w_1) = l(w_2)$ ve $P(w_1) = P(w_2)$ eşitlikleri de vardır. Buradan (1.15) de verilen bağıntıları kullanarak M içinde $r(w_1) = r(w_2)$ ve $l(w_1) = l(w_2)$ eşitliklerinin sağlandığını görür böylece $w_1 = w_2$ eşitliği elde edilir. Bu da bize $\bar{\varphi}$ nin bire bir olduğunu verir. □

1.3.4 Yarı Direkt Çarpım Altında Schützenberger Çarpımının Yeni Versiyonu

1.3.4.1 Tanım [9] : A ve B herhangi iki monoid olsunlar. $P \subseteq A \times B$ ve $b \in B$ için

$$Pb = \{(a, db): (a, d) \in P\}$$

çarpımı tanımlansın.

$$\theta: B \to End(A)$$

ve (1.5) şartı sağlansın. A'nın B ile olan yarı direkt çarpım altında schützenberger çarpımının yeni versiyonu;

$$(a_1, P_1, b_1)(a_2, P_2, b_2) = \big(a_1\theta_{b_1}(a_2), P_1b_2 \cup P_2, b_1b_2\big)$$

işlemi altında tanımlı $A \times \wp(A \times B) \times B$ kümesidir ve $A \lozenge_{sv} B$ şeklinde gösterilir.

1.3.4.2 Teorem [9] : $A \lozenge_{sv} B$, birim elemanı $(1_A, \emptyset, 1_B)$olan bir monoiddir.

İspat : $a_1, a_2, a_3 \in A$, $b_1, b_2, b_3 \in B$ ve $P_1, P_2, P_3 \subseteq A \times B$ olsun.

$$\begin{aligned}
\big[(a_1, P_1, b_1)(a_2, P_2, b_2)\big](a_3, P_3, b_3) &= \big(a_1\theta_{b_1}(a_2), P_1b_2 \cup P_2, b_1b_2\big)(a_3, P_3, b_3) \\
&= \big(a_1\theta_{b_1}(a_2)\theta_{b_1b_2}(a_3), (P_1b_2 \cup P_2)b_3 \cup P_3, b_1b_2b_3\big) \\
&= \big(a_1\theta_{b_1}(a_2)\theta_{b_1b_2}(a_3), P_1b_2b_3 \cup P_2b_3 \cup P_3, b_1b_2b_3\big) \\
&= \big(a_1\theta_{b_1}\big(a_2\theta_{b_2}(a_3)\big), P_1b_2b_3 \cup P_2b_3 \cup P_3, b_1b_2b_3\big) \\
&= (a_1, P_1, b_1)\big(a_2\theta_{b_2}(a_3), P_2b_3 \cup P_3, b_2b_3\big) \\
&= (a_1, P_1, b_1)\big[(a_2, P_2, b_2)(a_3, P_3, b_3)\big]
\end{aligned}$$

dir. Bura da her iki eşitlikten yani

$$[(a_1, P_1, b_1)(a_2, P_2, b_2)](a_3, P_3, b_3) = (a_1, P_1, b_1)[(a_2, P_2, b_2)(a_3, P_3, b_3)]$$

eşitliği bize $A \lozenge_{sv} B$'nin birleşme özelliğini sağladığını verir. Ayrıca

$$(a, P, b)(1_A, \emptyset, 1_B) = \big(a\theta_{b_1}(1_A), P1_B \cup \emptyset, b1_B\big) = (a, P, b)$$

ve

$$(1_A,\emptyset,1_B)(a,P,b)=\big(1_A\theta_{1_B}(a),\emptyset b\cup P,1_Bb\big)=(a,P,b)$$

olduğundan

$$(a,P,b)(1_A,\emptyset,1_B)=(1_A,\emptyset,1_B)(a,P,b)=(a,P,b)$$

olur ki bu $A\ \lozenge_{sv}\ B$'nin bir monoid olduğu anlamına gelir. □

Şimdi $A\ \lozenge_{sv}\ B$'nin sunuşunu veren teoremi verebiliriz. Ancak ilk olarak bu monoidin üreteç kümesini veren aşağıdaki önermeyi verelim :

1.3.4.3 Önerme [9] : A ve B monoidleri sırasıyla X ve Y kümeleri tarafından üretilsin. Bu durumda $A\ \lozenge_{sv}\ B$,

$$\{(x,\emptyset,1_B): x\in X\}\cup\{(1_A,\emptyset,y): y\in Y\}\cup\{(1_A,\{(a,b)\},1_B): a\in A, b\in B\}$$

kümesi tarafından üretilir.

İspat : $a,a_1,a_2\in A$, $b,b_1,b_2\in B$ ve $P_1,P_2\subseteq A\times B$ için;

$$(a_1,\emptyset,1_B)(a_2,\emptyset,1_B)=(a_1a_2,\emptyset,1_B) \tag{1.20}$$

$$(1_A,\emptyset,b_1)(1_A,\emptyset,b_2)=(1_A,\emptyset,b_1b_2) \tag{1.21}$$

$$(1_A,P_1,1_B)(1_A,P_2,1_B)=(1_A,P_1\cup P_2,1_B) \tag{1.22}$$

$$(a,\emptyset,1_B)(1_A,\emptyset,b)(1_A,P,1_B)=(a,P,b)$$

eşitlikleri vardır. Dolayısıyla yukarıdaki eşitlikler bize $A\ \lozenge_{sv}\ B$ monoidinin

$$\{(x,\emptyset,1_B): x\in X\}\cup\{(1_A,\emptyset,y): y\in Y\}\cup\{(1_A,\{(a,b)\},1_B): a\in A, b\in B\}$$

kümesi tarafından üretildiğini gösterir. □

$A\ \lozenge_{sv}\ B$ 'nin üreteç kümesini veren önermeyi verdikten sonra aşağıdaki teorem ile $A\ \lozenge_{sv}\ B$' nin sunuşunu verelim :

1.3.4.4 Teorem [9] : A ve B monoidleri sırasıyla $[X:R_A]$ ve $[Y:R_B]$ sunuşlarıyla temsil edilsinler. Bu durumda

$$Z=X\cup Y\cup\{z_{a,b}: a\in A, b\in B\}$$

kümesi $A \lozenge_{sv} B$ nin üreteç kümesidir ve

$$R_A, R_B, \tag{1.23}$$

$$yx = \big(\theta_y(x)y\big), \tag{1.24}$$

$$z_{a,b}^2 = z_{a,b},\ \ z_{a,b}z_{c,d} = z_{c,d}z_{a,b}\ (a, c\epsilon A\ ,\ \ b, d\epsilon B), \tag{1.25}$$

$$z_{a,b}y = yz_{a,by},\ \ xz_{a,b} = z_{a,b}x\ \ (x\epsilon X\ , y\epsilon Y\ , a\epsilon A, b\epsilon B) \tag{1.26}$$

ise bağıntı kümeleridir.

İspat : Z içindeki tüm kelimelerin kümesi Z^* ile gösterelim. Ayrıca

$$\varphi: Z^* \to A \lozenge_{sv} B$$

dönüşümünü her $x \in X$, $y \in Y$, $a \in A$ ve $b \in B$için;

$$\varphi(x) = (x, \emptyset, 1_B),$$

$$\varphi(y) = (1_A, \emptyset, y),$$

$$\varphi\big(z_{a,b}\big) = (1_A, \{(a, b)\}, 1_B)$$

işlemleri ile tanımlayalım. Önerme 1.3.4.3 ten φ nin örten bir homomorfizma olduğu kolayca görülür. Şimdi (1.23) – (1.26) bağıntılarının $A \lozenge_{sv} B$ yi sağladığını kontrol edelim. Aslında (1.23) – (1.25) bağıntıları (1.20), (1.21) ve (1.22) bağıntılarından elde edilir. (1.26) bağıntıları

$$(1_A, \{(a, b)\}, 1_B)(1_A, \emptyset, y) = (1_A, \{(a, by)\}, y) = (1_A, \emptyset, y)(1_A, \{(a, by)\}, 1_B)$$

ve

$$(x, \emptyset, 1_B)(1_A, \{(a, b)\}, 1_B) = (x, \{(a, b)\}, 1_B) = (1_A, \{(a, b)\}, 1_B)(x, \emptyset, 1_B)$$

eşitliklerinden gösterilmiş olur. Şimdi, (1.24) bağıntısının sağlandığını gösterelim. Tüm $x \in X,\ \ y \in Y, a \in A$ ve $b \in B$ için,

$$(1_A, \emptyset, y)(x, \emptyset, 1_B) = \big(\theta_y(x), \emptyset, y\big) = \big(\theta_y(x), \emptyset, 1_B\big)(1_A, \emptyset, y)$$

dir. Bu nedenle (1.23) – (1.26) bağıntıları ile tanımlanan M monoidinden $A \lozenge_{sv} B$ üzerine olan $\bar{\varphi}$ epimorfizmasına indirgenir.

Şimdi $\bar{\varphi}$ epimorfizmasının bire bir olduğunu gösterelim. Bunun için $w\epsilon Z^*$ boş kelimeden farklı herhangi bir kelimesini düşünelim. Burada (1.24) ve (1.26) bağıntılarını kullanarak $w_x \in X^*, w_y \in Y^*$ ve $w_{a,b} \in \{z_{a,b}: a \in A, b \in B\}^*$ için, M içinde $w = w_x w_y w_{a,b}$ olduğunu kolayca görebiliriz. Ayrıca (1.25) bağıntısını kullanarak $P(w) \subseteq A \times B$ için

$$w_{a,b} = \prod_{(a,b)\in P(w)} z_{a,b}$$

biçimindedir. Bu nedenle herhangi bir $w \in Z^*$ için,

$$\begin{aligned}\varphi(w) &= \varphi(w_x w_y w_{a,b})\\ &= \varphi(w_x)\varphi(w_y)\varphi(w_{a,b})\\ &= (w_x, \emptyset, 1_B)(1_A, \emptyset, y)(1_A, P(w), 1_B)\\ &= \varphi(w_x, P(w), w_y)\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Bazı $w', w'' \in Z^*$ için $\varphi(w') = \varphi(w'')$ eşitliğinin var olduğunu düşünelim. Bu durumda bu bileşenlerin eşitliğini kullanarak A içinde $w'_x = w''_x$, B içinde $w'_y = w''_y$ ve $P(w') = P(w'')$ eşitlikleri de vardır. Buradan (1.23) de verilen bağıntılarını kullanarak M içinde $w'_x = w''_x$ ve $w'_y = w''_y$ sağlandığını görür ve böylece $w' = w''$ eşitliğini elde ederiz. Bu da bize $\bar{\varphi}$'nin bire bir olduğunu verir. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

1.3.4.5 Not [9] : Eğer A (yada B) sonsuz ise bu durumda $A \lozenge_{sv} B$ çarpımı sonsuz üreteç kümesine sahip olduğu kolayca görülebilir. Bu nedenle bazı cebirsel özellikleri sonlu üreteç kümeli yarı direkt çarpımından sonsuz (yada sonlu) üreteç kümeli bu yeni versiyona aktarılabilir.

1.3.5 Monoidler için Çift Yönlü Yeni Bir Yarı Direkt Çarpımı

Bu kısımda, bölüm 1.3.2 de ayrıntılı olarak bahsedilen yarı direkt çarpımının çift yönlü incelenmesiyle elde edilen yeni bir monoid genişlemesi ve bu genişlemenin sunuşu takdim edilecektir.

1.3.5.1 Tanım [9] : A ve B herhangi iki monoid olsunlar. Ayrıca $P_1 = (a_1, b_1)$, $P_2 = (a_2, b_2) \in A \times B$ için,

$$P_1P_2 = (a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1a_2, b_1b_2)$$

şeklinde bir çarpım tanımlansın.

$$\alpha_b : B \rightarrow End(A) \text{ ve } \beta_a : A \rightarrow End(B)$$

dönüşümleri tüm $x, a_1, a_2 \in A,\ y, b_1, b_2 \in B$ için

$$\alpha_{b_1}\left(\alpha_{b_2}(x)\right) = \alpha_{b_1b_2}(x) \text{ ve } \beta_{a_1}\left(\beta_{a_2}(y)\right) = \beta_{a_2a_1}(y) \qquad (1.27)$$

koşullarını sağlayan monoid homomorfizmaları olsunlar. A ve B' nin çift yönlü yeni bir yarı direkt çarpımı tüm $a, c \in A$ ve $b, d \in B$ için

$$(a, P_1, b)(c, P_2, d) = \left(a\alpha_{b_1}(c), P_1P_2, \beta_{a_2}(b)d\right) \qquad (1.28)$$

işlemi altında tanımlı $A \times (A \times B) \times B$ kümesi olup $A_\beta \bowtie_\alpha B$ sembolü ile gösterilir.

1.3.5.2 Teorem [9] : $A_\beta \bowtie_\alpha B$, $P_e = (1_A, 1_B)$ olmak üzere birim elemanı $(1_A, P_e, 1_B)$ olan bir monoid dir.

İspat : Her $a, c, e \in A$, $b, d, f \in B$ ve $P_1 = (a_1, b_1), P_2 = (a_2, b_2), P_3 = (a_3, b_3) \subseteq A \times B$ için

$$\left[(a,P_1,b)(c,P_2,d)\right](e,P_3,f)=\left(a\alpha_{b_1}(c),P_1P_2,\beta_{a_2}(b)d\right)(e,P_3,f)$$
$$=\left(a\alpha_{b_1}(c)\alpha_{b_1b_2}(e),P_1P_2P_3,\beta_{a_3}\left(\beta_{a_2}(b)d\right)f\right)$$
$$=\left(a\alpha_{b_1}(c)\alpha_{b_1b_2}(e),P_1P_2P_3,\beta_{a_2a_3}(b)\beta_{a_3}(d)f\right)$$

$$(a,P_1,b)\left[(c,P_2,d)(e,P_3,f)\right]=(a,P_1,b)\left(c\alpha_{b_2}(e),P_2P_3,\beta_{a_3}(d)f\right)$$
$$=\left(a\alpha_{b_1}\left(c\alpha_{b_2}(e)\right),P_1P_2P_3,\beta_{a_2a_3}(b)\beta_{a_3}(d)f\right)$$
$$=\left(a\alpha_{b_1}(c)\alpha_{b_1b_2}(e),P_1P_2P_3,\beta_{a_2a_3}(b)\beta_{a_3}(d)f\right)$$

dir. Bu iki eşitlikten yani;

$$\left[(a,P_1,b)(c,P_2,d)\right](e,P_3,f)=(a,P_1,b)\left[(c,P_2,d)(e,P_3,f)\right]$$

eşitliği bize $A_\beta \bowtie_\alpha B$' nin birleşme özelliğini sağladığını verir. Ayrıca

$$(a,P_1,b)(1_A,P_e,1_B)=\left(a\alpha_{b_1}(1_A),P_1P_e,\beta_{1_A}(b)1_B\right)=(a,P_1,b)$$

ve

$$(1_A,P_e,1_B)(a,P_1,b)=\left(1_A\alpha_{1_B}(a),P_eP_1,\beta_{a_1}(1_B)b\right)=(a,P_1,b)$$

olduğundan

$$(a,P_1,b)(1_A,P_e,1_B)=(1_A,P_e,1_B)(a,P_1,b)=(a,P_1,b)$$

olur ki bu $A_\beta \bowtie_\alpha B$' nin birim elemanı $(1_A,P_e,1_B)$ olan bir monoid olduğu anlamına gelir. □

$A_\beta \bowtie_\alpha B$' nin bir monoid olduğunu gösterdikten sonra şimdi bu genişlemenin sunuşunu veren sıradaki önerme ve Teoremi ve bunların ispatını verelim.

1.3.5.3 Önerme [9] : A ve B monoidleri sırasıyla X ve Y kümeleri tarafından üretilsin. Bu durumda $A_\beta \bowtie_\alpha B$,

$$\{(x_1,P_e,1_B): x_1\epsilon X\},$$

$$\{(1_A,(x_2,1_B),1_B): x_2\epsilon X\},$$

$$\{(1_A, P_e, y_1): y_1 \epsilon Y\},$$

$$\{(1_A, (1_A, y_2), 1_B): y_2 \epsilon Y\}.$$

kümelerinin birleşimi tarafından üretilir.

İspat : Her $a, a_1, a_2, c \in A$, $b, b_1, b_2, d \in B$ ve $P_e, P_1, P_2 \subseteq A \times B$ için

$$(a_1, P_e, 1_B)(a_2, P_e, 1_B) = (a_1 a_2, P_e, 1_B), \quad (1.29)$$

$$(1_A, P_e, b_1)(1_A, P_e, b_2) = (1_A, P_e, b_1 b_2), \quad (1.30)$$

$$(1_A, P_1, 1_B)(1_A, P_2, 1_B) = (1_A, P_1 P_2, 1_B), \quad (1.31)$$

$$(a, P_e, 1_B)(1_A, (c, 1_B), 1_B)(1_A, (1_A, d), 1_B)(1_A, P_e, b) = (a, (c, d), b).$$

olduğundan ispat kolayca görülür. □

1.3.5.4 Teorem [9] : A ve B monoidleri sırasıyla $[X: R]$ ve $[Y: S]$ sunuşlarıyla temsil edilsinler. Bu durumda $A_\beta \bowtie_\alpha B$'nin üreteç kümesi

$$Z = X \cup Y \cup \{z_k: k \epsilon X \vee k \epsilon Y\}$$

ve bağıntı kümesi $x, k_1 \in X$ ve $y, k_2 \in Y$ olmak üzere

$$R, S, \quad (1.32)$$

$$xy = yx, \quad (1.33)$$

$$z_{k_1} z_{k_2} = z_{k_1 k_2} = z_{k_2} z_{k_1}, \quad (1.34)$$

$$z_{k_1} x = x z_{k_1}, \quad (1.35)$$

$$y z_{k_2} = z_{k_2} y, \quad (1.36)$$

$$z_{k_2} x = \alpha_{k_2}(x) z_{k_2}, \quad (1.37)$$

$$y z_{k_1} = z_{k_1} \beta_{k_1}(y). \quad (1.38)$$

biçimindedir.

İspat : Z^* kümesi ile Zkümesindeki tüm kelimelerin kümesini gösterelim.

$$\varphi: Z^* \to A_\beta \bowtie_\alpha B$$

homomorfizma dönüşümünü $x, k_1 \in X$ ve $y, k_2 \in Y$ olmak üzere

$$\varphi(x) = (x, P_e, 1_B),$$

$$\varphi(y) = (1_A, P_e, y),$$

$$\varphi(z_{k_1}) = (1_A, (k_1, 1_B), 1_B),$$

$$\varphi(z_{k_2}) = (1_A, (1_A, k_2), 1_B).$$

biçiminde tanımlayalım. Bu dönüşüm Önerme 1.3.5.3 den örten olduğu açıktır. Şimdi (1.32)-(1.38) bağıntılarını $A_\beta \bowtie_\alpha B$ yi sağladığını kontrol edelim. Aslında (1.32) bağıntıları (1.29), (1.30) ve (1.31) den gelir. (1.33), (1.34), (1.35) ve (1.36) bağıntıları ise

$$(x, P_e, 1_B)(1_A, P_e, y) = (x, P_e, y) = (1_A, P_e, y)(x, P_e, 1_B)$$

$$(1_A, (k_1, 1_B), 1_B)(1_A, (1_A, k_2), 1_B) = (1_A, (k_1, k_2), 1_B) = (1_A, (1_A, k_2), 1_B)(1_A, (k_1, 1_B), 1_B)$$

$$(1_A, (k_1, 1_B), 1_B)(x, P_e, 1_B) = (x, (k_1, 1_B), 1_B) = (x, P_e, 1_B)(1_A, (k_1, 1_B), 1_B)$$

$$(1_A, P_e, y)(1_A, (1_A, k_2), 1_B) = (1_A, (1_A, k_2), y) = (1_A, (1_A, k_2), 1_B)(1_A, P_e, y)$$

eşitliklerinden elde edilir. Şimdi (1.37) ve (1.38) bağıntılarının sağlandığını gösterelim. Bunun için tüm $x, k_1 \in X$ ve $y, k_2 \in Y$ için,

$$(1_A, (1_A, k_2), 1_B)(x, P_e, 1_B) = \left(\alpha_{k_2}(x), (1_A, k_2), 1_B\right) = \left(\alpha_{k_2}(x), P_e, 1_B\right)(1_A, (1_A, k_2), 1_B)$$

ve

$$(1_A, P_e, y)(1_A, (k_1, 1_B), 1_B) = \left(1_A, (k_1, 1_B), \beta_{k_1}(y)\right) = (1_A, (k_1, 1_B), 1_B)\left(1_A, P_e, \beta_{k_1}(y)\right)$$

eşitliklerinden kolayca görülebilir. Böylece φ dönüşüm, (1.32) – (1.38) bağıntıları ile tanımlanan bir M monoidinden $A_\beta \bowtie_\alpha B$ üzerine olan bir $\bar{\varphi}$ epimorfizmasına indirgenir.

Şimdi $\bar{\varphi}$ epimorfizmasının bire bir olduğunu gösterelim. Bunun için $w \epsilon Z^*$ boş kelimeden farklı herhangi bir kelimesini göz önüne alalım. Burada (1.33) – (1.34) bağıntılarını kullanarak $w_x \in X^*, w_y \in Y^*$, $w_{k_1} \in \{z_{k_1} : k_1 \in X\}^*$ ve $w_{k_2} \in \{z_{k_2} : k_2 \in X\}^*$ için M içinde $w = w_x w_{k_1} w_{k_2} w_y$ olduğunu kolayca görebiliriz.

Ayrıca $x_1, x_2, \dots, x_m \in X$ ve $y_1, y_2, \dots, y_n \in Y$ olmak üzere $w_{k_1} = z_{x_1} z_{x_2} \dots z_{x_m}$ ve $w_{k_2} = z_{y_1} z_{y_2} \dots z_{y_n}$ olsun. Bu durumda herhangi bir $w \in Z^*$ için, $P(w) = (x_1 x_2 \dots x_m, y_1 y_2 \dots y_n)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\varphi(w) &= \varphi\left(w_x w_{k_1} w_{k_2} w_y\right) \\
&= \varphi(w_x)\varphi\left(w_{k_1}\right)\varphi\left(w_{k_2}\right)\varphi\left(w_y\right) \\
&= (w_x, \emptyset, 1_B)(1_A, (x_1 x_2 \dots x_m, y_1 y_2 \dots y_n), 1_B)\left(1_A, \emptyset, w_y\right) \\
&= \left(w_x, P(w), w_y\right)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Bazı $w', w'' \in Z^*$ için $\varphi(w') = \varphi(w'')$ eşitliğinin var olduğunu düşünelim. Bu durumda A içinde $w'_x = w''_x$ ve B içinde $w'_y = w''_y$ eşitlikleri vardır. Buradan $P(w') = P(w'')$ elde edilir. Ayrıca (1.32) de verilen bağıntılarını kullanarak M içinde $w'_x = w''_x$ ve $w'_y = w''_y$ eşitliklerinin sağlandığını görür ve böylece $w' = w''$ eşitliğini elde ederiz. Bu da bize $\bar{\varphi}$'nin bire bir olduğunu verir. □

2. CROSSED (ÇAPRAZ) ÇARPIM ALTINDA SCHÜTZENBERGER ÇARPIMININ YENİ VERSİYONU

1. Bölümde crossed (çapraz) ve schützenberger çarpımının tanımı verilip bunların sunuşunu veren önerme ve teoremlere değinilmiştir. Bu bölümde ise; bu iki monoid yapılarını birleştirerek acaba yeni bir monoid genişlemesi elde edebilirmiyiz? sorusuna cevap bulabilmek için çalışmalar yaptık ve bu çalışmalar neticesinde yeni bir monoid genişlemesi elde ettik. Bu yeni monoid genişlemesinin sunuşunu veren teoremi bu bölüm içerisinde vereceğiz.

2.1 Tanım : A ve B herhangi iki monoid olsunlar $P \subseteq A \times B$ ve $b \in B$ için

$$Pb = \{(a, db) : (a, d) \in P\}$$

çarpımı tanımlansın.

$$f: B \times B \to A \text{ ve } \alpha: B \to End(A)$$

dönüşümleri Tanım 1.3.1.1 de verildiği gibi olsunlar. A'nın B ile olan crossed (çapraz) çarpımı altında schützenberger çarpımının yeni versiyonu

$$(a_1, P_1, b_1)(a_2, P_2, b_2) = \big(a_1\alpha_{b_1}(a_2)f(b_1, b_2), P_1b_2 \cup P_2, b_1b_2\big)$$

işlemi altında tanımlı $A \times \wp(A \times B) \times B$ kümesidir ve $A_{cp}\#_{\alpha}^{f}B$ şeklinde gösterilir.

2.2 Teorem : $A_{cp}\#_{\alpha}^{f}B$ birim elemanı $(1_A, \emptyset, 1_B)$ olan bir monoiddir.

İspat : Her $a_1, a_2, a_3 \in A$, $b_1, b_2, b_3 \in B$ ve $P_1, P_2, P_3 \subseteq A \times B$ için

$$\left[(a_1,P_1,b_1)(a_2,P_2,b_2)\right](a_3,P_3,b_3)=\left(a_1\alpha_{b_1}(a_2)f(b_1,b_2),P_1b_2\cup P_2,b_1b_2\right)(a_3,P_3,b_3)$$
$$=\left(a_1\alpha_{b_1}(a_2)f(b_1,b_2)\alpha_{b_1b_2}(a_3)f(b_1b_2,b_3),(P_1b_2\cup P_2)b_3\cup P_3,b_1b_2b_3\right)$$
$$=\left(a_1\alpha_{b_1}(a_2)\alpha_{b_1}\left(\alpha_{b_2}(a_3)\right)f(b_1,b_2)f(b_1b_2,b_3),P_1b_2b_3\cup P_2b_3\cup P_3,b_1b_2b_3\right)$$
$$=\left(a_1\alpha_{b_1}(a_2)\alpha_{b_1}\left(\alpha_{b_2}(a_3)\right)\alpha_{b_1}\left(f(b_2,b_3)\right)f(b_1,b_2b_3),P_1b_2b_3\cup P_2b_3\cup P_3,b_1b_2b_3\right)$$

ve

$$(a_1,P_1,b_1)\left[(a_2,P_2,b_2)(a_3,P_3,b_3)\right]=(a_1,P_1,b_1)\left(a_2\alpha_{b_2}(a_3)f(b_2,b_3),P_2b_3\cup P_3,b_2b_3\right)$$
$$=\left(a_1\alpha_{b_1}\left(a_2\alpha_{b_2}(a_3)f(b_2,b_3)\right)f(b_1,b_2b_3),P_1b_2b_3\cup P_2b_3\cup P_3,b_1b_2b_3\right)$$
$$=\left(a_1\alpha_{b_1}(a_2)\alpha_{b_1}\left(\alpha_{b_2}(a_3)\right)\alpha_{b_1}\left(f(b_2,b_3)\right)f(b_1,b_2b_3),P_1b_2b_3\cup P_2b_3\cup P_3,b_1b_2b_3\right)$$

dir. Her iki eşitlikten yani;

$$\left[(a_1,P_1,b_1)(a_2,P_2,b_2)\right](a_3,P_3,b_3)=(a_1,P_1,b_1)\left[(a_2,P_2,b_2)(a_3,P_3,b_3)\right]$$

eşitliği var olduğundan birleşme özelliği vardır. Ayrıca her $a\epsilon A, b\epsilon B$ ve $P\subseteq A\times B$ için

$$(a,P,b)(1_A,\emptyset,1_B)=(a\alpha_b(1_A)f(b,1_B),1_B\cup\emptyset,b1_B)=(a,P,b)$$

ve

$$(1_A,\emptyset,1_B)(a,P,b)=\left(1_A\alpha_{1_B}(a)f(1_B,b),\emptyset b\cup P,1_Bb\right)=(a,P,b)$$

olduğundan

$$(a,P,b)(1_A,\emptyset,1_B)=(1_A,\emptyset,1_B)(a,P,b)=(a,P,b)$$

olur ki bu $A_{cp}\#_{\alpha}^{f}B$' nin birim elemanı $(1_A,\emptyset,1_B)$olan bir monoid olduğu anlamına gelir. □

$A_{cp}\#_{\alpha}^{f}B$' nin bir monoid olduğunu gösterdikten sonra şimdi de bu monoidin sunuşunu veren aşağıdaki teoremi verebiliriz:

2.3 Teorem : A ve B monoidleri sırasıyla $[X:R]$ ve $[Y:S]$sunuşlarıyla temsil edilsinler. Bu durumda $A_{cp}\#_{\alpha}^{f}B$ monoidi

$$Z=X\cup Y\cup\{z_{a,b}:a\in A,b\in B\}$$

tarafından üretilir ve W_s , X üzerinde kelime olmak üzere

$$R, \tag{2.1}$$
$$S = W_s, \tag{2.2}$$
$$yx = \alpha_y(x)y \quad (x\epsilon X, y\epsilon Y), \tag{2.3}$$
$$z_{a,b}^2 = z_{a,b},\ z_{a,b}\, z_{c,d} = z_{c,d} z_{a,b}\ (a, c\epsilon A, b, d\epsilon B) \tag{2.4}$$
$$z_{a,b}y = yz_{a,by}, xz_{a,b} = z_{a,b}x\ (x\epsilon X\ , y\epsilon Y, a\epsilon A, b\epsilon B) \tag{2.5}$$

bu monoidin bağıntı kümeleridir.

İspat : Z içindeki tüm kelimelerin kümesini Z^* ile gösterelim ve

$$\varphi: Z^* \to A_{cp}\#_{\alpha}^{f}B$$

homomorfizma dönüşümünü $x\epsilon X, y\epsilon Y, a\epsilon A$ ve $b\epsilon B$ için

$$\varphi(x) = (x, \emptyset, 1_B),$$
$$\varphi(y) = (1_A, \emptyset, y),$$
$$\varphi\left(z_{a,b}\right) = (1_A, \{(a, b)\}, 1_B).$$

işlemleri ile tanımlayalım. Bu durumda her $a, a_1, a_2 \in A, b, b_1, b_2 \in B$ ve $P, P_1, P_2 \subseteq A \times B$ için

$$(a_1, \emptyset, 1_B)(a_2, \emptyset, 1_B) = (a_1a_2, \emptyset, 1_B) \tag{2.6}$$
$$(1_A, \emptyset, b_1)(1_A, \emptyset, b_2) = (1_A, \emptyset, b_1b_2) \tag{2.7}$$
$$(1_A, P_1, 1_B)(1_A, P_2, 1_B) = (1_A, P_1 \cup P_2, 1_B) \tag{2.8}$$
$$(a, \emptyset, 1_B)(1_A, \emptyset, b)(1_A, P, 1_B) = (a, P, b)$$

olduğundan φ nin örten olduğu söylenir. Şimdi de (2.1) – (2.3) arasındaki bağıntıların sağlandığını gösterelim. $x_1, x_2, \dots, x_s \in X$ olmak üzere $R = x_1x_2 \dots x_s$ olsun. Bu durumda

$$(x_1, \emptyset, 1_B)(x_2, \emptyset, 1_B) \dots (x_s, \emptyset, 1_B) = (R, \emptyset, 1_B) = (1_A, \emptyset, 1_B)$$

elde edilir. Ayrıca $y_1, y_2, \dots, y_k \in Y$ olmak üzere $S = y_1y_2 \dots, y_k$ olsun. Bu durumda

$$(1_A, \emptyset, y_1)(1_A, \emptyset, y_2) \dots (1_A, \emptyset, y_k) = (W_s, \emptyset, y_1y_2 \dots, y_k) = (W_s, \emptyset, S) = (W_s, \emptyset, 1_B)$$

dir. Burada ki $W_s = f(y_1, y_2)f(y_1y_2, y_3)f(y_1y_2y_3, y_4) \dots f(y_1y_2 \dots y_{k-1}, y_k)$ dır. Böylece (2.1) ve (2.2) bağıntıları sağlanmış oldu. Şimdide (2.3) bağıntısının sağlandığını gösterelim:

$$(1_A, \emptyset, y)(x, \emptyset, 1_B) = \big(\alpha_y(x)f(y, 1_B), \emptyset, y\big) = \big(\alpha_y(x), \emptyset, 1_B\big)(1_A, \emptyset, y)$$

dir. (2.4) bağıntısı ise (2.6), (2.7) ve (2.8) den elde edilir. Şimdide (2.5) bağıntısının sağlandığını gösterelim:

$$(1_A, \{(a,b)\}, 1_B)(1_A, \emptyset, y) = (1_A, \{(a, by)\}, y) = (1_A, \emptyset, y)(1_A, \{(a, by)\}, 1_B)$$
$$(x, \emptyset, 1_B)(1_A, \{(a,b)\}, 1_B) = (x, \{(a,b)\}, 1_B) = (1_A, \{(a,b)\}, 1_B)(x, \emptyset, 1_B)$$

dir. Bu nedenle φ dönüşümü (2.1) – (2.5) bağıntıları ile tanımlanan M monoidinden $A_{cp} \#_{\alpha}^{f} B$ monoidi üzerine olan $\bar{\varphi}$ epimorfizmasına indirgenir.

Şimdi de $\bar{\varphi}$ epimorfizmasının bire bir olduğunu gösterelim. Bunun için $w \epsilon Z^*$ boş kelimeden farklı herhangi bir kelimesini düşünelim. Burada (2.3) ve (2.5) bağıntılarını kullanarak $w_x \in X^*, w_y \in Y^*$ ve $w_{a,b} = \{z_{a,b}: a \in A, b \in B\}^*$ için, M içinde $w = w_x w_y w_{a,b}$ vardır. Ayrıca (2.4) bağıntısını kullanarak da $P(w) \subseteq A \times B$ için

$$w_{a,b} = \prod_{(a,b) \epsilon P(w)} z_{a,b}$$

biçimindedir. Bu nedenle herhangi bir $w \epsilon Z^*$ kelimesi için,

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}(w) = \varphi(w) &= \varphi\big(w_x w_y w_{a,b}\big)\\ &= \varphi(w_x)\varphi\big(w_y\big)\varphi\big(w_{a,b}\big)\\ &= (w_x, \emptyset, 1_B)\big(1_A, \emptyset, w_y\big)(1_A, P(w), 1_B)\\ &= \big(w_x, P(w), w_y\big)\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Bazı $w', w'' \in Z^*$ için $w' = w'_x w'_y w'_{a,b}$ ve $w'' = w''_x w''_y w''_{a,b}$ eşitliklerini alalım. Eğer $\varphi(w') = \varphi(w'')$ ise, bu durumda bu bileşenlerin eşitliğini kullanarak A içinde $w'_x = w''_x$, B içinde $w'_y = w''_y$ ve $P(w') = P(w'')$ eşitlikleri de vardır.

Buradan (2.1) ve (2.2) bağıntılarını kullanarak M içinde $w'_x = w''_x$ ve $w'_y = w''_y$ eşitlikleri elde edilir. Bu da bize $\overline{\varphi}$'nin bire bir olduğunu gösterir. □

3. CROSSED (ÇAPRAZ) ÇARPIMININ, CROSSED (ÇAPRAZ) ÇARPIM ALTINDA SCHÜTZENBERGER ÇARPIMININ YENİ VERSİYONUNUN VE ÇİFT YÖNLÜ YARI DİREKT ÇARPIMININ REGÜLERLİĞİ

Bu tez çalışmasının bu bölümünde 1. ve 2. bölümlerde tanımını ve sunuşunu vermiş olduğumuz bazı monoid yapılarının regülerlik özelliği incelenmiştir. İlk olarak monoidler üzerindeki regülerliğin tanımını verdik ve ardından başta yarı direkt çarpım daha sonra ise sırasıyla crossed (çapraz) çarpım, crossed (çapraz) çarpım altında tanımlanan schützenberger çarpımının yeni versiyonu ve son olarak da çift yönlü yeni bir yarı direkt çarpımının regülerliği incelenmiştir.

Bir M monoidinden alınan her a elemanı için, $a = aba$ olacak şekilde bir $b \in M$ varsa M ye regüler monoid adı verilir. Bir regüler M monoidinden alınan her a elemanı $a = aba$ ve $b = bab$ olacak şekilde bir $b \in M$ varsa $b$elemanına a nın inversi denir ve $b \in a^{-1}$ şeklinde gösterilir. Bu durumda

$$a^{-1}=\{b \in B: aba = a\ ,\ bab = b\}$$

dir [1,21],[26].

3.1 Yarı Direkt Çarpımının Regülerliği

Tarafımızdan yapılan sonuçlara gelmeden önce çalışmalarımıza ışık tutan ve [1] de teorem ve ispatı bulunan $A \rtimes_\theta B$ yarı direkt çarpımının regülerlik özelliğini aşağıdaki teorem ile verelim:

3.1.1 Teorem [1] : A ve B herhangi iki monoid olsunlar. $A \rtimes_\theta B$ çarpımının regüler olması için gerek ve yeter koşul:

(i) A ve B regülerdir.

(ii) Tüm $a \in A$ ve $b \in B$ için, bir $e^2 = e \epsilon B$ için $bB = eB$ idempotent elemanı vardır ve Tanım 1.3.2.1 de verildiği gibi

$$\theta: B \to End(A)$$

bir homomorfizma olmak üzere

$$a \in A\theta_e(a)$$

biçimindedir.

İspat : $A \rtimes_\theta B$'nin regüler olduğunu varsayalım. Böylece $(a, 1_B) \in A \rtimes_\theta B$ için (c, d) vardır ve bu

$$(a, 1_B) = (a, 1_B)(c, d)(a, 1_B) = (ac\theta_d(a), d)$$

ve

$$(c, d) = (c, d)(a, 1_B)(c, d) = (c\theta_d(a)\theta_d(c), dd)$$

dir. Bu eşitliklerden $d = 1_B$ dir. Bu da bize $a = aca$ ve $c = cac$ olduğunu gösterir. Böylece A'nın regüler olduğunu göstermiş olduk. Benzer iddiayı kullanarak; $(1_A, b) \in A \rtimes_\theta B$ için (c, d) vardır ve bu

$$(1_A, b) = (1_A, b)(c, d)(1_A, b) = (c\theta_b(c), bdb)$$

ve

$$(c, d) = (c, d)(1_A, b)(c, d) = (c\theta_{db}(c), dbd)$$

dir. Bu eşitliklerden $b = bdb$ ve $d = dbd$ olduğunu gösterebiliriz. Böylece B'nin regüler olduğunu göstermiş olduk. Bu durum bize $bd = e = e^2$ nin $bB = eB$ ve $a \in A\theta_e(a)$ yı sağladığını gösterir. Dolayısıyla (i) ve (ii) sağlanmış olur.

Tersine A ve B'nin (i) ve (ii) koşulları sağladığını varsayalım. $(a, b) \epsilon A \rtimes_\theta B, bB = eB$ olacak şekilde $e^2 = e \epsilon B$ ve $a \epsilon A\theta_e(a)$ olsun. Bu durumda bazı $u \in A$ vardır ve $a = u\theta_e(a)$ dır. Ayrıca $bd = e$ ve $d \in b^{-1}$ olacak şekilde bazı $d \epsilon B$ vardır. A regüler olduğundan bazı $v \in a^{-1}$ için $c = \theta_d(v)$alabiliriz.

$$
\begin{aligned}
a\theta_b(c)\theta_{bd}(a) &= u\theta_e(a)\theta_b\big(\theta_d(v)\big)\theta_{bd}(a) \\
&= u\theta_e(a)\theta_{bd}(v)\theta_{bd}(a) \\
&= u\theta_e(a)\theta_e(v)\theta_e(a) \\
&= u\theta_e(ava) \\
&= u\theta_e(a) \\
&= a
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
c\theta_d(a)\theta_{db}(c) &= \theta_d(v)\theta_d(a)\theta_{db}\big(\theta_d(v)\big) \\
&= \theta_d(v)\theta_d(a)\theta_{dbd}(v) \\
&= \theta_d(v)\theta_d(a)\theta_d(v) \\
&= \theta_d(vav) \\
&= \theta_d(v) \\
&= c
\end{aligned}
$$

eşitlikleri vardır. Sonuç olarak, bazı $v \in a^{-1}$ için $c = \theta_d(v)$ koşulunu sağlayan tüm $(a,b) \in A \rtimes_\theta B$ için,

$$(a,b)(c,d)(a,b) = (a\theta_b(c)\theta_{bd}(a), bdb) = (a,b)$$

ve

$$(c,d)(a,b)(c,d) = (c\theta_d(a)\theta_{db}(c), dbd) = (c,d)$$

eşitliklerini sağlayan $(c,d) \in A \rtimes_\theta B$ elemanı vardır. Böylece $A \rtimes_\theta B$ çarpımının regüler olduğunu bulmuş olduk. Bu da istediğimiz sonuçtur.

3.2 Crossed (Çapraz) Çarpımının Regülerliği

Bu bölümde tarafımızdan araştırılan $A\#_{\alpha}^{f}B$ crossed (çapraz) çarpımının regülerlik özelliğini veren aşağıdaki teorem verilecektir.

3.2.1 Teorem : A ve B herhangi iki monoid olsunlar. Ayrıca $b \in d^{-1}$ için

$$f(b,d)\alpha_{bd}(a)f(d,b) = \alpha_b\big(\alpha_d(a)\big) \text{ ve } \alpha_d(a)f(d,b)f(db,d) = \alpha_d(a)$$

olacak şekilde $a \in A\alpha_b\big(\alpha_d(a)\big)$ var olsun. Bu durumda $A\#_{\alpha}^{f}B$ çarpımının regüler olması için gerek ve yeter şart A ve B' nin regüler olmasıdır.

İspat : $A\#_{\alpha}^{f}B$' nin regüler olduğunu varsayalım. Böylece $(a,1_B) \in A\#_{\alpha}^{f}B$ için (c,d) vardır ve bu

$$\begin{aligned}(a,1_B) &= (a,1_B)(c,d)(a,1_B)\\ &= \big(a\alpha_{1_B}(c)f(1_A,d),1_Bd\big)(a,1_B)\\ &= (ac,d)(a,1_B)\\ &= (ac\alpha_d(a)f(d,1_B),d1_B)\\ &= (ac\alpha_d(a),d)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(c,d) &= (c,d)(a,1_B)(c,d)\\ &= (c\alpha_d(a)f(d,1_B),d1_B)(c,d)\\ &= (c\alpha_d(a),d)(c,d)\\ &= (c\alpha_d(a)\alpha_d(c)f(d,d),dd)\\ &= (c\alpha_d(ac)f(d,d),dd)\end{aligned}$$

dir. Burada $d = 1_B$ dir. Bu da bize $a = aca$ ve $c = cac$ olduğunu gösterir. Bu da bize A'nın regüler olduğunu verir.

Benzer iddiayı kullanarak $(1_A, b) \in A\#_\alpha^f B$ için (c, d) vardır ve bu

$$\begin{aligned}(1_A, b) &= (1_A, b)(c, d)(1_A, b)\\ &= (\alpha_b(c)f(b, d), d)(1_A, b)\\ &= (\alpha_b(c)f(b, d)\alpha_{bd}(1_A)f(bd, b), bdb)\\ &= (\alpha_b(c)f(b, d)f(bd, b), bdb)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(c, d) &= (c, d)(1_A, b)(c, d)\\ &= (c\alpha_d(1_A)f(d, b), db)(c, d)\\ &= (cf(d, b)\alpha_{db}(c)f(db, d), dbd)\end{aligned}$$

dir. Bu eşitliklerden $b = bdb$ ve $d = dbd$ elde edilir. Bu da B'nin regüler olduğu anlamına gelir.

Tersine A ve B' nin regüler bir monoid olduğunu varsayalım. Varsayım gereği $b \in d^{-1}$ için

$$f(b, d)\alpha_{bd}(a)f(bd, b) = \alpha_b\big(\alpha_d(a)\big) \text{ ve } \alpha_d(a)f(d, b)f(db, d) = \alpha_d(a)$$

olacak şekilde $a \in A\alpha_b\big(\alpha_d(a)\big)$ vardır. Bu durumda bazı $u\epsilon A$ için $a = u\alpha_b\big(\alpha_d(a)\big)$ ve ayrıca $v \in a^{-1}$ için $c = \alpha_d(v)$ vardır. O halde;

$$\begin{aligned}a\alpha_b(c)\,f(b,d)\alpha_{bd}(a)\,f(bd,b) &= u\alpha_b\big(\alpha_d(a)\big)\alpha_b\big(\alpha_d(v)\big)\,f(b,d)\alpha_{bd}(a)\,f(bd,b)\\ &= u\alpha_b\big(\alpha_d(a)\big)\alpha_b\big(\alpha_d(v)\big)\alpha_b\big(\alpha_d(a)\big)\,f(b,d)\,f(bd,b)\\ &= u\alpha_b\big(\alpha_d(a)\alpha_d(v)\alpha_d(a)\big)\,f(b,d)\,f(bd,b)\\ &= u\alpha_b\big(\alpha_d(ava)\big)\,f(b,d)\,f(bd,b)\\ &= u\alpha_b\big(\alpha_d(a)\big)\,f(b,d)\,f(bd,b)\\ &= uf(b,d)\alpha_{bd}(a)\,f(bd,b)\\ &= u\alpha_b\big(\alpha_d(a)\big)\\ &= a\end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
c\alpha_d(a)f(d,b)\alpha_{db}(c)f(db,d) &= \alpha_d(v)\alpha_d(a)f(d,b)\alpha_{db}(\alpha_d(v))f(db,d) \\
&= \alpha_d(v)\alpha_d(a)f(d,b)f(db,d)\alpha_{dbd}(v) \\
&= \alpha_d(v)\alpha_d(a)f(d,b)f(db,d)\alpha_d(v) \\
&= \alpha_d(v)\alpha_d(a)\alpha_d(v) \\
&= \alpha_d(vav) \\
&= \alpha_d(v) \\
&= c
\end{aligned}
$$

eşitlikleri vardır. Sonuç olarak bazı $b \in d^{-1}$ için

$$f(b,d)\alpha_{bd}(a)f(bd,b) = \alpha_b(\alpha_d(a)) \text{ ve } \alpha_d(a)f(d,b)f(db,d) = \alpha_d(a)$$

olacak şekilde $a \in A\alpha_b(\alpha_d(a))$, ayrıca $v \in a^{-1}$ için $c = \alpha_d(v)$ koşulunu sağlayan her $(a,b) \in A\#_\alpha^f B$ için (c,d) vardır öyle ki;

$$(a,b)(c,d)(a,b) = (a\alpha_b(c)f(b,d)\alpha_{bd}(a)f(bd,b), bdb) = (a,b)$$

ve

$$(c,d)(a,b)(c,d) = (c\alpha_d(a)f(d,b)\alpha_{db}(c)f(db,d), dbd) = (c,d)$$

dir. Bu da bize $A\#_\alpha^f B$ monoidinin regüler olduğunu verir.□

3.2.2 Tanım [5] : A ve B monoidlerini Tanım 1.3.1.1 de verilen α ve f dönüşümlerini göz önüne alalım. Eğer f, trivial (aşikar) bir dönüşüm alırsak bu durumda crossed çarpım bir yarı direkt çarpıma dönüşür. Eğer α' yı trivial (aşikar) bir dönüşüm alırsak bu durumda $Im(f) \subseteq Z(A)$ ve $f: B \times B \to Z(A)$bir $2-cocycle$ olur. Burada $Z(A), A$' nın merkezidir. Bu durumda $A\#_\alpha^f B$ crossed çarpım $A \times^f B$ halini alır ve A ve B' nin $Twisted\ çarpımı$ olarak adlandırılır. $A \times^f B$ twisted çarpımı her $a_1, a_2 \in A$ ve $b_1, b_2 \in B$ için

$$(a_1,b_1)(a_2,b_2) = (a_1a_2f(b_1,b_2), b_1b_2)$$

formülü ile verilir. Bu konuyla ilgili daha ayrıntılı bilgilere [4,5] kaynaklarından ulaşılabilir.

Twisted çarpımın tanımını ve Teorem 3.2.1 de crossed çarpımının regülerliğini veren teoremi verdikten sonra aşağıdaki sonucu verebiliriz:

3.2.3 Sonuç : A ve B herhangi iki monoid olsunlar. Bu durumda $b \in d^{-1}$ için

$$f(b,d)af(bd,b) = a \text{ ve } af(d,b)f(db,d) = a$$

olacak şekilde $a \in A$ olsun. Bu durumda $A \times^f B$ twisted çarpımının regüler olması için gerek ve yeter şart A ve B nin regüler olmasıdır.

3.3 Crossed (Çapraz) Çarpım Altında Schützenberger Çarpımının Yeni Versiyonunun Regülerliği

Bu bölümde, 2. bölümde tanımını ve sunuşunu vermiş olduğumuz $A_{cp}\#_\alpha^f B$ crossed çarpım altında schützenberger çarpımının yeni versiyonunun regülerliğini veren aşağıdaki teorem verilecektir.

3.3.1 Teorem : A ve B herhangi iki monoid olsunlar. Bu durumda $A_{cp}\#_\alpha^f B$ çarpımının regüler olması için gerek ve yeter şart A'nın bir regüler monoid ve B'nin bir grup olmasıdır.

İspat : $A_{cp}\#_\alpha^f$ 'nin regüler olduğunu varsayalım. Böylece $(a,\{(1_A,1_B)\},1_B) \epsilon A_{cp}\#_\alpha^f B$ için (x,P,y) vardır ve bu

$$\begin{aligned}(a,\{(1_A,1_B)\},1_B) &= (a,\{(1_A,1_B)\},1_B)(x,P,y)\,(a,\{(1_A,1_B)\},1_B)\\ &= (ax,\{(1_A,1_B)\}y \cup P,y)(a,\{(1_A,1_B)\},1_B)\\ &= \big(ax\alpha_y(a),\{(1_A,1_B)\}y \cup P \cup \{(1_A,1_B)\},y\big)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(x,P,y) &= (x,P,y)\,(a,\{(1_A,1_B)\},1_B)(x,P,y)\\ &= \big(x\alpha_y(a),P \cup \{(1_A,1_B)\},y\big)(x,P,y)\\ &= \big(x\alpha_y(a)\alpha_y(x)f(y,y),Py \cup \{(1_A,1_B)\}y,yy\big)\end{aligned}$$

dir. Bu nedenle $y = 1_B$ dir. Bu $a = axa$ ve $x = xax$ olduğunu gösterir. Bu da bize A'nın regüler olduğunu verir. Benzer iddiayı kullanarak $(1_A, \{(1_A, 1_B)\}, b) \epsilon A_{cp} \#_\alpha^f B$ için (x, P, y) vardır ve bu

$$
\begin{aligned}
(1_A, \{(1_A, 1_B)\}, b) &= (1_A, \{(1_A, 1_B)\}, b)(x, P, y)\ (1_A, \{(1_A, 1_B)\}, b) \\
&= (\alpha_b(x) f(b, y), \{(1_A, 1_B)\} y \cup P, by)(1_A, \{(1_A, 1_B)\}, b) \\
&= (\alpha_b(x) f(b, y) f(by, b), \{(1_A, 1_B)\} yb \cup Pb \cup \{(1_A, 1_B)\}, byb)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
(x, P, y) &= (x, P, y)(1_A, \{(1_A, 1_B)\}, b)(x, P, y) \\
&= (xf(y, b), Pb \cup \{(1_A, 1_B)\}, yb)(x, P, y) \\
&= \left(xf(y, b)\alpha_{yb}(x) f(yb, y), Pby \cup \{(1_A, 1_B)\} y \cup P, yby\right)
\end{aligned}
$$

dir. Bu eşitliklerden

$$
\{(1_A, 1_B)\} = \{(1_A, 1_B)\} yb \cup Pb \cup \{(1_A, 1_B)\}
$$

$$
P = Pby \cup \{(1_A, 1_B)\} y \cup P
$$

elde edilir. Burada $(1_A, yb) = (1_A, 1_B)$ ve $Pby = P$ eşitlikleri vardır. ve bu da bize $yb = by = 1_B$ yi verir. Bu da B' nin bir grup olduğu anlamına gelir.

Tersine A'nın regüler bir monoid ve B'nin bir grup olduğunu varsayalım. $(a, P_1, b) \in A_{cp} \#_\alpha^f B$ alalım. B bir grup olduğundan $yb = by = 1_B$ olacak şekilde $y \epsilon B$ vardır. Ayrıca A regüler olduğundan $v \in \left(af(b, y)\right)^{-1}$koşulunu sağlayan bazı $f(b, y)v \in a^{-1}$ için $c = \alpha_y(v)$ alabiliriz. Bu durumda

$$
a\alpha_b(c) f(b, y)\alpha_{by}(a) f(by, b) = a\alpha_b(c) f(b, y) a
$$

$$= a\alpha_b\left(\alpha_y(v)\right)f(b,y)a$$

$$= af(b,y)\alpha_{by}(v)a$$

$$= af(b,y)va$$

$$= a$$

ve

$$c\alpha_y(a)f(y,b)\alpha_{yb}(c)f(yb,y) = c\alpha_y(a)f(y,b)c$$

$$= \alpha_y(v)\alpha_y(a)f(y,b)\alpha_y(v)$$

$$= \alpha_y(v)\alpha_y(a)\alpha_y\big(f(b,y)\big)\alpha_y(v)$$

$$= \alpha_y(vaf(b,y)v)$$

$$= \alpha_y(v)$$

$$= c$$

eşitlikleri vardır. Ayrıca $P_1 \subseteq A \times B$ olmak üzere $P_2 = P_1 y \subseteq A \times B$ olarak seçersek

$$P_1 yb \cup P_2 b \cup P_1 = P_1 \cup P_1 yb \cup P_1$$

$$= P_1 \cup P_1 \cup P_1$$

$$= P_1$$

ve

$$P_2 by \cup P_1 y \cup P_2 = P_1 y \cup P_1 y \cup P_1 y$$

$$= P_1 y$$

$$= P_2$$

eşitlikleri de elde ederiz. Sonuç olarak $P_2 = P_1 y, by = yb = 1_B$ve $v \in \left(af(b,y)\right)^{-1}$ koşulunu sağlayan bazı $f(b,y)v \in a^{-1}$ için $c = \alpha_y(v)$ olmak üzere

$$(a,P_1,b)(c,P_2,y)(a,P_1,b)=\left(a\alpha_b(c)\,f(b,y)\,\alpha_{by}(a)\,f(by,b),P_1yb\cup P_2b\cup P_1,byb\right)$$
$$=(a,P_1,b)$$

ve

$$(c,P_2,y)(a,P_1,b)(c,P_2,y)=\left(c\alpha_y(a)\,f(y,b)\,\alpha_{yb}(c)\,f(yb,y),P_2by\cup P_1y\cup P_2,yby\right)$$
$$=(c,P_2,y)$$

eşitlikleri vardır. Bu da bize $A_{cp}\#_{\alpha}^{f}B$ monoidinin regüler monoid olduğunu verir. □

3.4 Çift Yönlü Yeni Bir Yarı Direkt Çarpımının Regülerliği

1. bölümde, [9] da ayrıntılı olarak incelenen $A_{\beta} \bowtie_{\alpha} B$ çift yönlü yeni bir yarı direkt çarpımının tanımı verilip sunuşu incelenmiştir. Bu bölümde ise bu çarpımın regülerlik özelliğini araştırıp aşağıdaki teorem ile $A_{\beta} \bowtie_{\alpha} B$ çarpımının regüler olması için gerekli ve yeterli koşulu verdik.

3.4.1 Teorem : A ve B herhangi iki monoid olsunlar. $P_1=(a_1,b_1)$ ve $P_2=(a_2,b_2)$ olmak üzere $A_{\beta} \bowtie_{\alpha} B$ çarpımının regüler olması için gerek ve yeter şart;

(i) A ve B regülerdir.

(ii) Tüm $a\in A$ ve $b\in B$ olmak üzere bir $e^2=e\in B$ için $bB=eB$ idempotent ve

$$\alpha_b\colon B\rightarrow End(A)$$

bir homomorfizma olmak üzere $a\in A\alpha_e(a)$ ve ayrıca bir $t^2=t\in A$ için $aA=tA$ idempotent ve

$$\beta_a\colon A\rightarrow End(B)$$

bir homomorfizma olmak üzere $b\in\beta_t(b)B$ vardır.

koşullarının olmasıdır.

İspat : $A_\beta \bowtie_\alpha B$ 'nin regüler olduğunu varsayalım. Böylece $(a, P_e, 1_B) \epsilon A_\beta \bowtie_\alpha B$ için (c, P_1, d) vardır öyle ki;

$$(a, P_e, 1_B) = (a, P_e, 1_B)(c, P_1, d)(a, P_e, 1_B)$$

$$= \left(a\alpha_{b_1}(c), P_e P_1, \beta_{a_1}(1_B)d\right)(a, P_e, 1_B)$$

$$= \left(a\alpha_{b_1}(c), P_1, d\right)(a, P_e, 1_B)$$

$$= \left(a\alpha_{b_1}(c)\alpha_{b_1}(a), P_1 P_e, \beta_{1_A}(d)1_B\right)$$

$$= \left(a\alpha_{b_1}(c)\alpha_{b_1}(a), P_1, d\right)$$

ve

$$(c, P_1, d) = (c, P_1, d)(a, P_e, 1_B)(c, P_1, d)$$

$$= \left(c\alpha_{b_1}(a), P_1 P_e, \beta_{1_A}(d)1_B\right)(c, P_1, d)$$

$$= \left(c\alpha_{b_1}(a), P_1, d\right)(c, P_1, d)$$

$$= \left(c\alpha_{b_1}(a)\alpha_{b_1}(c), P_1 P_1, \beta_{a_1}(d)d\right)$$

dir. Bu nedenle $d = 1_B$ ve $P_1 = P_e$ olması nedeniyle $a_1 = 1_A$ ve $b_1 = 1_B$ dir. Bu $a = aca$ ve $c = cac$ olduğunu gösterir. Bu iki eşitlik bize A nın regüler olduğunu verir.

Benzer iddiayı kullanarak $(1_A, P_e, b) \in A_\beta \bowtie_\alpha B$ için (c, P_1, d) vardır öyle ki:

$$(1_A, P_e, b) = (1_A, P_e, b)(c, P_1, d)(1_A, P_e, b)$$

$$= \left(1_A\alpha_{1_B}(c), P_e P_1, \beta_{a_1}(b)d\right)(1_A, P_e, b)$$

$$= \left(c, P_1, \beta_{a_1}(b)d\right)(1_A, P_e, b)$$

$$= \left(c\alpha_{b_1}(1_A), P_1 P_e, \beta_{1_A}\left(\beta_{a_1}(b)d\right)b\right)$$

$$= \left(c, P_1, \beta_{a_1}(b)db\right)$$

ve

$$(c, P_1, d) = (c, P_1, d)(1_A, P_e, b)(c, P_1, d)$$

$$= \big(c\alpha_{b_1}(1_A), P_1P_e, db\big)(c, P_1, d)$$

$$= (c, P_1, db)(c, P_1, d)$$

$$= \big(c\alpha_{b_1}(c), P_1P_e, \beta_{a_1}(db)d\big)$$

bu iki eşitlikten $P_1 = P_e$ dir. Burada $a_1 = 1_A$ ve $b_1 = 1_B$ dir. Bu $b = bdb$ ve $d = dbd$ olduğunu gösterir. Bu iki eşitlik bize B nin regüler olduğunu verir. Bu durumda $bd = e = e^2$ nin $bB = eB$ ve $a \in A\alpha_e(a)$ yı sağladığını gösterir. Benzer şekilde $ac = t = t^2$ nin $aA = tA$ ve $\beta_t(b)B$ yi sağladığını gösterir. Dolayısıyla (i) ve (ii) koşulları sağlanmış olur.

Tersine A ve B 'nin (i) ve (ii) koşullarını sağladığını varsayalım. $(a, P_1, b)\epsilon A_\beta \bowtie_\alpha B, bB = eB$ olacak şekilde $e^2 = e \in B$ ve $a \in A\alpha_e(a)$ ayrıca $(c, P_2, d)\epsilon A_\beta \bowtie_\alpha B, aA = tA$ olacak şekilde $t^2 = t \in A$ ve $b \in \beta_t(b)B$ olsun. Bu durumda bazı $u \in A$ ve $h \in B$ vardır ve $a = u\alpha_e(a), b = \beta_t(b)h$ dır. Ayrıca $b_1b_2 = e,\ a_1a_2 = t, d \in a^{-1}$ ve $c \in b^{-1}$ olacak şekilde bazı $c \in A$ ve $d \in B$ vardır. Ave B regüler olduğundan bazı $v \in a^{-1}$ için $c = \alpha_{b_2}(v)$ ve $x \in b^{-1}$ için $d = \beta_{a_2}(x)$ alabiliriz.

$$\begin{aligned} a\alpha_{b_1}(c)\alpha_{b_1b_2}(a) &= u\alpha_e(a)\alpha_{b_1}\big(\alpha_{b_2}(v)\big)\alpha_{b_1b_2}(a) \\ &= u\alpha_e(a)\alpha_{b_1b_2}(v)\alpha_{b_1b_2}(a) \\ &= u\alpha_e(a)\alpha_e(v)\alpha_e(a) \\ &= u\alpha_e(ava) \\ &= u\alpha_e(a) \\ &= a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c\alpha_{b_2}(a)\alpha_{b_2b_1}(c) &= \alpha_{b_2}(v)\alpha_{b_2}(a)\alpha_{b_2b_1}\big(\alpha_{b_2}(v)\big) \\ &= \alpha_{b_2}(v)\alpha_{b_2}(a)\alpha_{b_2b_1b_2}(v) \\ &= \alpha_{b_2}(v)\alpha_{b_2}(a)\alpha_{b_2}(v) \\ &= \alpha_{b_2}(vav) \\ &= \alpha_{b_2}(v) \\ &= c \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\beta_{a_1a_2}(b)\beta_{a_1}(d)b &= \beta_{a_1a_2}(b)\beta_{a_1}\left(\beta_{a_2}(x)\right)\beta_t(b)h \\
&= \beta_t(b)\beta_{a_1a_2}(x)\beta_t(b)h \\
&= \beta_t(bxb)h \\
&= \beta_t(b)h \\
&= b
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\beta_{a_2a_1}(d)\beta_{a_2}(b)d &= \beta_{a_2a_1}\left(\beta_{a_2}(x)\right)\beta_{a_2}(b)\beta_{a_2}(x) \\
&= \beta_{a_2a_1a_2}(x)\beta_{a_2}(b)\beta_{a_2}(x) \\
&= \beta_{a_2}(x)\beta_{a_2}(b)\beta_{a_2}(x) \\
&= \beta_{a_2}(xbx) \\
&= \beta_{a_2}(x) \\
&= d
\end{aligned}
$$

eşitlikleri vardır. Ayrıca $P_1P_2P_1 = P_1$ ve $P_2P_1P_2 = P_2$ dir. Gerçekten

$$P_1P_2P_1 = (a_1, b_1)(a_2, b_2)(a_1, b_1) = (a_1, b_1) = P_1$$

ve

$$P_2P_1P_2 = (a_2, b_2)(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_2, b_2) = P_2$$

dir. Sonuç olarak $P_1 = (a_1, b_1)$ ve $P_2 = (a_2, b_2)$ olmak üzere tüm $(a, P_1, b) \epsilon A_\beta \bowtie_\alpha B$ için

$$(a,P_1,b)(c,P_2,d)(a,P_1,b) = \left(a\alpha_{b_1}(c)\alpha_{b_1b_2}(a), P_1P_2P_1, \beta_{a_1a_2}(b)\beta_{a_1}(d)b\right) = (a,P_1,b)$$

ve

$$(c,P_2,d)(a,P_1,b)(c,P_2,d) = \left(c\alpha_{b_2}(a)\alpha_{b_2b_1}(c), P_2P_1P_2, \beta_{a_2a_1}(d)\beta_{a_2}(b)d\right) = (c,P_2,d)$$

eşitliklerini sağlayan $(c, P_2, d) \in A_\beta \bowtie_\alpha B$ elemanı vardır. Bu da bize $A_\beta \bowtie_\alpha B$' nin regüler olduğunu verir. □

4. CROSSED ÇARPIMININ VE SCHÜTZENBERGER ÇARPIMININ STRONGLY $\pi -$ İNVERSELİĞİ

Bu tez çalışmasının bu bölümünde monoidlerin $\pi -$regülerlik ve strongly (kuvvetli) $\pi -$ inverseliğinin tanımı verilecektir. [2] de verilen çalışmadan hareketle crossed çarpım, strongly $\pi -$ inverse monoid iken bulduğumuz sonuç ve schützenberger çarpımının strongly $\pi -$ inverse olması için gerekli ve yeterli koşulu veren teorem verilecektir.

4.1 Tanım [2]: M herhangi iki monoid olsun. $E(M)$ ile M monoidinde ki idempotent elemanların kümesini, $RegM$ ile de M monoidinde ki regüler olan elemanların kümesini gösterelim. Bu durumda her $a \in M$ için bir $m \in \mathbb{N}$ doğal sayısı vardır öyle ki $a^m \in RegM$ oluyorsa M monoidi $\pi -$ *regüler monoid* olarak adlandırılır.

4.2 Tanım [2]: $\pi -$ regüler monoide ilave olarak ayrıca $E(M)$ eğer değişme özelliğini de sağlıyor ise M monoidi *strongly (kuvvetli)* $\pi -$ *inverse* monoid olarak adlandırılır. Burada $RegM$, bir M strongly $\pi -$ inverse monoidinin alt monoididir.

4.3 Teorem : A ve B herhangi iki monoid olsunlar. Bu durumda eğer $A\#_\alpha^f B$ strongly $\pi -$ inverse monoid ise A ve B monoidleri de strongly $\pi -$ inverse monoid olurlar.

İspat : $A\#_\alpha^f B$'nin strongly $\pi -$ inverse monoid olsun. Bu durumda $m \epsilon \mathbb{N}$ için

$$(a, 1_B)^m = (a^m, 1_B) \text{ ve } (1_A, b)^m = (f(b,b)f(b^2,b) \dots f(b^{m-1},b), b^m)$$

dir. O halde her $(a, 1_B)^m \in A\#_\alpha^f B$ için $(c, d) \in A\#_\alpha^f B$ vardır öyle ki

$$(a, 1_B)^m = (a, 1_B)^m (c, d)(a, 1_B)^m$$

$$=(a^m, 1_B)(c,d)(a^m, 1_B)$$

$$=\left(a^m \alpha_{1_B}(c) f(1_B, d), 1_B d\right)(a^m, 1_B)$$

$$= (a^m c \alpha_d(a^m) f(d, 1_B), d)$$

ve

$$(c,d) = (c,d)(a, 1_B)^m (c,d)$$

$$= (c,d)(a^m, 1_B)(c,d)$$

$$= (c\alpha_d(a^m) f(d, 1_B), d1_B)(c,d)$$

$$= (c\alpha_d(a^m)\alpha_d(c) f(d,d), dd)$$

burada $d = 1_B$ olduğundan $a^m = a^m c a^m$ ve $c = c a^m c$ dir. Bu da A ’nın $\pi -$ regüler olduğu anlamına gelir. Şimdi de $a_1, a_2 \in E(A)$ için $E(A)$’ nın değişmeli olduğunu gösterelim. $A\#_\alpha^f B$ strongly $\pi -$ inverse olduğundan tanım gereği

$$(a_1, 1_B)(a_2, 1_B) = (a_2, 1_B)(a_1, 1_B)$$

dir. O halde

$$\left(a_1 \alpha_{1_B}(a_2) f(1_B, 1_B), 1_B 1_B\right)\left(a_2 \alpha_{1_B}(a_1) f(1_B, 1_B), 1_B 1_B\right)$$

dir. Buradan

$$(a_1 a_2, 1_B) = (a_2 a_1, 1_B)$$

elde edilir ki bu

$$a_1 a_2 = a_2 a_1$$

yani A nın strongly $\pi -$ inverse olduğu anlamına gelir.

Aynı şekilde benzer işlemleri B monoidi için uygularsak $m \epsilon \mathbb{N}$ olmak üzere her $(1_A, b)^m \in A\#_\alpha^f B$ için $(c,d) \in A\#_\alpha^f B$ vardır öyle ki

$$(1_A, b)^m = (1_A, b)^m (c,d)(1_A, b)^m$$

dir. Burada

$$(1_A, b)^m = (f(b,b)f(b^2,b) \dots f(b^{m-1},b), b^m)$$

eşitliğinde kolaylık olması nedeniyle

$$x = f(b,b)f(b^2,b) \dots f(b^{m-1},b)$$

eşitliği ile gösterelim.

$$\begin{aligned}(x, b^m) &= (x, b^m)(c,d)(x, b^m) \\ &= (x\alpha_{b^m}(c)f(b^m,d), b^m d)(x, b^m) \\ &= (x\alpha_{b^m}(c)f(b^m,d)\alpha_{b^m d}(x)f(b^m d, b^m), b^m d b^m)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(c,d) &= (c,d)(x,b^m)(c,d) \\ &= (c\alpha_d(x)f(d,b^m), db^m)(c,d) \\ &= (c\alpha_d(x)f(d,b^m)\alpha_{db^m}(c)f(db^m,d), db^m d)\end{aligned}$$

dir. Buradan $b^m = b^m d b^m$ ve $d = db^m d$ olduğundan $B, \pi -$ regüler monoiddir. Şimdi de $b_1, b_2, f(b_1,b_1), f(b_2,b_2) \in E(B)$ için $E(B)$ nin değişmeli olduğunu gösterelim. Burada $(f(b_1,b_1), b_1)$ ve $(f(b_2,b_2), b_2) \in A\#_\alpha^f B$ dir. O halde $A\#_\alpha^f B$ strongly $\pi -$ inverse monoid olduğundan tanım gereği

$$(f(b_1,b_1), b_1)(f(b_2,b_2), b_2) = (f(b_2,b_2), b_2)(f(b_1,b_1), b_1)$$

dir. Bu eşitliği düzenlersek

$$\left(f(b_1,b_1)\alpha_{b_1}\left(f(b_2,b_2)\right)f(b_1,b_2), b_1b_2\right) = \left(f(b_2,b_2)\alpha_{b_2}\left(f(b_1,b_1)\right)f(b_2,b_1), b_2b_1\right)$$

elde edilir ki buradan

$$b_1b_2 = b_2b_1$$

değişme özelliği elde edilir. Bu da B' nin strongly $\pi -$ inverse monoid olduğu anlamına gelir. □

4.4 Teorem : A ve B herhangi iki monoid olsunlar. Bu durumda $A \lozenge B$ schützenberger çarpımının strongly $\pi -$ inverse monoid olması için gerek ve yeter koşul her $(a, P, b) \in A \lozenge B$ için $m \in \mathbb{N}, xA, y \in B, P_1, P_2 \subseteq A \times B$ olmak üzere

(i) $a^m x = 1_A$ ve $yb^m = 1_B$

(ii) Her $(e_1, P_1, f_1), (e_2, P_2, f_2) \in E(A \lozenge B)$ için $P_1 f_2 \cup e_1 P_2 = P_2 f_1 \cup e_2 P_1$ ve $E(A)$ ve $E(B)$ kümelerinin değişmeli olmasıdır.

İspat : $A \lozenge B$'nin strongly $\pi -$ inverse monoid olduğunu varsayalım. O halde her $(a, \{(1_A, 1_B)\}, b) \in A \lozenge B$ için $m \in \mathbb{N}$ ve (x, P, y) vardır öyle ki:

$$(a, \{(1_A, 1_B)\}, b)^m = (a, \{(1_A, 1_B)\}, b)^m (x, P, y)(a, \{(1_A, 1_B)\}, b)^m$$

buradan

$$\begin{aligned}
\left(a,\left\{\left(1_A,1_B\right)\right\},b\right)^m &= (a^m,\left\{\left(1_A,1_B\right)\right\}b^{m-1} \cup a\left\{\left(1_A,1_B\right)\right\}b^{m-2} \cup \ldots \cup a^{m-2}\left\{\left(1_A,1_B\right)\right\}b^{m-(m-1)} \\
&\cup a^{m-1}\left\{\left(1_A,1_B\right)\right\}b^{m-m},b^m)\left(x,P,y\right)(a^m,\left\{\left(1_A,1_B\right)\right\}b^{m-1} \\
&\cup a\left\{\left(1_A,1_B\right)\right\}b^{m-2} \cup \ldots \cup a^{m-2}\left\{\left(1_A,1_B\right)\right\}b^{m-(m-1)} \cup a^{m-1}\left\{\left(1_A,1_B\right)\right\},b^m) \\
&= (a^m x,\left\{\left(1_A,1_B\right)\right\}b^{m-1}y \cup a\left\{\left(1_A,1_B\right)\right\}b^{m-2}y \\
&\cup \ldots \cup a^{m-2}\left\{\left(1_A,1_B\right)\right\}b^{m-(m-1)}y \\
&\cup a^{m-1}\left\{\left(1_A,1_B\right)\right\}y \cup a^m P, b^m y)(a^m,\left\{\left(1_A,1_B\right)\right\}b^{m-1} \\
&\cup a\left\{\left(1_A,1_B\right)\right\}b^{m-2} \cup \ldots \cup a^{m-2}\left\{\left(1_A,1_B\right)\right\}b^{m-(m-1)} \cup a^{m-1}\left\{\left(1_A,1_B\right)\right\},b^m) \\
&= (a^m x a^m,\left\{\left(1_A,1_B\right)\right\}b^{m-1}yb^m \cup a\left\{\left(1_A,1_B\right)\right\}b^{m-2}yb^m \\
&\cup \ldots \cup a^{m-2}\left\{\left(1_A,1_B\right)\right\}b^{m-(m-1)}yb^m \cup a^{m-1}\left\{\left(1_A,1_B\right)\right\}yb^m \\
&\cup a^m P b^m \cup a^m x\left\{\left(1_A,1_B\right)\right\}b^{m-1} \cup a^m x a\left\{\left(1_A,1_B\right)\right\}b^{m-2} \\
&\cup \ldots \cup a^m x a^{m-2}\left\{\left(1_A,1_B\right)\right\}b^{m-(m-1)} \cup a^m x a^{m-1}\left\{\left(1_A,1_B\right)\right\},b^m y b^m)
\end{aligned}$$

dir. Bu eşitlikten

$$
\begin{aligned}
&\{(1_A,1_B)\}b^{m-1}yb^m \cup a\{(1_A,1_B)\}b^{m-2}yb^m \\
&\qquad \cup \ldots \cup a^{m-2}\{(1_A,1_B)\}b^{m-(m-1)}yb^m \cup a^{m-1}\{(1_A,1_B)\}yb^m \\
&\qquad \cup a^m P b^m \cup a^m x\{(1_A,1_B)\}b^{m-1} \cup a^m xa\{(1_A,1_B)\}b^{m-2} \\
&\qquad \cup \ldots \cup a^m xa^{m-2}\{(1_A,1_B)\}b^{m-(m-1)} \cup a^m xa^{m-1}\{(1_A,1_B)\} \\
&\qquad = \{(1_A,1_B)\}b^{m-1} \cup a\{(1_A,1_B)\}b^{m-2} \\
&\qquad \cup \ldots \cup a^{m-2}\{(1_A,1_B)\}b^{m-(m-1)} \cup a^{m-1}\{(1_A,1_B)\}
\end{aligned}
$$

eşitliğini elde ederiz ve buradan

$$
\begin{aligned}
&\{(1_A, b^{m-1}yb^m)\} \cup \{(a, b^{m-2}yb^m)\} \\
&\qquad \cup \ldots \cup \{(a^{m-2}, b^{m-(m-1)}yb^m)\} \cup \{(a^{m-1}, yb^m)\} \\
&\qquad \cup a^m P b^m \cup \{(a^m x, b^{m-1})\} \cup \{(a^m xa, b^{m-2})\} \\
&\qquad \cup \ldots \cup \{(a^m xa^{m-2}, b^{m-(m-1)})\} \cup \{(a^m xa^{m-1}, 1_B)\} \\
&\qquad = \{(1_A, b^{m-1})\} \cup \{(a, b^{m-2})\} \\
&\qquad \cup \ldots \cup \{(a^{m-2}, b^{m-(m-1)})\} \cup \{(a^{m-1}, 1_B)\}
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir. Buda bize her $(a,\{(1_A,1_B)\},b) \in A \lozenge B$ için $m \in \mathbb{N}$ ve $x\epsilon A, y\epsilon B$ var olacak şekilde $a^m x = 1_A$ ve $yb^m = 1_B$ eşitliklerinin sağlandığını gösterir. Böylece (i) sağlanmış olur.

Şimdi $(e_1,P_1,f_1),(e_2,P_2,f_2) \in E(A \lozenge B)$ alalım. $A \lozenge B$ strongly $\pi -$ inverse monoid olduğundan

$$(e_1,P_1,f_1)(e_2,P_2,f_2) = (e_2,P_2,f_2)(e_1,P_1,f_1)$$

değişme özelliği vardır ve buradan

$$(e_1e_2, P_1f_2 \cup e_1P_2, f_1f_2) = (e_2e_1, P_2f_1 \cup e_2P_1, f_2f_1)$$

olur. Buradan

$$P_1f_2 \cup e_1P_2 = P_2f_1 \cup e_2P_1$$

elde edilir. Şimdi $e_1, e_2 \in E(A)$ olduğunu düşünelim. $A \between B$ strongly $\pi -$ inverse olduğu için $E(A \between B)$ değişmelidir. O halde $(e_1, \{(1_A, 1_B)\}, 1_B)$, $(e_2, \{(1_A, 1_B)\}, 1_B)$ $\in E(A \between B)$ olması nedeniyle

$$(e_1, \{(1_A, 1_B)\}, 1_B)(e_2, \{(1_A, 1_B)\}, 1_B) = (e_2, \{(1_A, 1_B)\}, 1_B)(e_1, \{(1_A, 1_B)\}, 1_B)$$

eşitliğinin varlığını söyleyebiliriz. Buradan

$$e_1e_2 = e_2e_1$$

elde ederiz. Bu da $E(A)$'nın değişmeli olduğu anlamına gelir. Benzer şekilde $f_1, f_2 \in E(B)$ olduğunu düşünelim. $A \between B$ strongly $\pi -$ inverse olduğu için $E(A \between B)$ değişmelidir. O halde $(1_A, \{(1_A, 1_B)\}, f_1), (1_A, \{(1_A, 1_B)\}, f_2) \in E(A \between B)$ için

$$(1_A, \{(1_A, 1_B)\}, f_1)(1_A, \{(1_A, 1_B)\}, f_2) = (1_A, \{(1_A, 1_B)\}, f_2)(1_A, \{(1_A, 1_B)\}, f_1)$$

eşitliğinin varlığını söyleyebiliriz. Buradan

$$f_1f_2 = f_2f_1$$

elde ederiz. Bu da $E(B)$' nin değişmeli olduğu anlamına gelir. Böylece (ii) sağlanmış olur.

Tersine $m \in \mathbb{N}$ ve $x \in A, y \in B$ var olacak şekilde A ve B monoidlerinin (i) ve (ii) koşullarını sağladığını varsayalım. Her bir $(a, P, b) \in A \between B$ ve $n = 1,2, \dots, m-1$ olmak üzere $\left(x, xa^nPb^{m-(n+1)}y, y\right) \in A \between B$ elemanını göz önüne alalım. Ayrıca

$$F=\left(a,P,b\right)^m\left(x,xa^nPb^{m-(n+1)}y,y\right)\left(a,P,b\right)^m$$

olarak alalım. O halde

$$\begin{aligned}F=(a^m,Pb^{m-1}\cup aPb^{m-2}\cup a^2Pb^{m-3}\cup\ldots\cup a^{m-2}Pb^{m-(m-1)}&\\ \cup a^{m-1}Pb^{m-m},b^m)\left(x,xa^nPb^{m-(n+1)}y,y\right)(a^m,Pb^{m-1}\cup aPb^{m-2}\cup a^2Pb^{m-3}&\\ \cup\ldots\cup a^{m-2}Pb^{m-(m-1)}\cup a^{m-1}Pb^{m-m},b^m)=(a^mx,Pb^{m-1}y&\\ \cup aPb^{m-2}y\cup a^2Pb^{m-3}y\cup\ldots\cup a^{m-2}Pb^{m-(m-1)}y&\\ \cup a^{m-1}Py\cup a^mxa^nPb^{m-(n+1)}y,b^my)(a^m,Pb^{m-1}\cup aPb^{m-2}&\\ \cup a^2Pb^{m-3}\cup\ldots\cup a^{m-2}Pb^{m-(m-1)}\cup a^{m-1}Pb^{m-m},b^m)&\end{aligned}$$

eşitliği vardır. Böylece

$$\begin{aligned}F=(a^mxa^m,Pb^{m-1}yb^m\cup aPb^{m-2}yb^m&\\ \cup a^2Pb^{m-3}yb^m\cup\ldots\cup a^{m-2}Pb^{m-(m-1)}yb^m\cup a^{m-1}Pyb^m&\\ \cup a^mxa^nPb^{m-(n+1)}yb^m\cup a^mxPb^{m-1}&\\ \cup a^mxaPb^{m-2}\cup a^mxa^2Pb^{m-3}&\\ \cup\ldots\cup a^mxa^{m-2}Pb^{m-(m-1)}\cup a^mxa^{m-1}Pb^{m-m},b^myb^m)&\end{aligned}$$

elde edilir. (i) den $a^mx=1_A$ ve $yb^m=1_B$ alırsak $n=1,2,\ldots,m-1$ için $a^mxa^m=a^m$ ve $b^myb^m=b^m$dir. Ayrıca

$$\begin{aligned}Pb^{m-1}yb^m\cup aPb^{m-2}yb^m\cup a^2Pb^{m-3}yb^m\cup\ldots\cup a^{m-2}Pb^{m-(m-1)}yb^m&\\ \cup a^{m-1}Pyb^m\cup a^mxa^nPb^{m-(n+1)}yb^m\cup a^mxPb^{m-1}&\\ \cup a^mxaPb^{m-2}\cup a^mxa^2Pb^{m-3}\cup\ldots\cup a^mxa^{m-2}Pb^{m-(m-1)}&\\ \cup a^mxa^{m-1}Pb^{m-m}&\\ =Pb^{m-1}\cup aPb^{m-2}\cup a^2Pb^{m-3}&\\ \cup\ldots\cup a^{m-2}Pb^{m-(m-1)}\cup a^{m-1}P\cup a^nPb^{m-(n+1)}&\end{aligned}$$

dir. Böylece $a^n P b^{m-(n+1)}$ ifadesi,

eğer $n = 1$ ise aPb^{m-2} olur,
eğer $n = 2$ ise $a^2 P b^{m-3}$ olur,
eğer $n = 3$ ise $a^3 P b^{m-4}$ olur,
$\vdots \qquad \vdots$
eğer $n = m - 1$ ise $a^{m-1} P b^{m-m} = a^{m-1} P$ olur.

O halde

$$
\begin{aligned}
& Pb^{m-1} \cup aPb^{m-2} \cup a^2 Pb^{m-3} \cup \ldots \cup a^{m-2} Pb^{m-(m-1)} \cup a^{m-1} P \cup a^n Pb^{m-(n+1)} \\
&= Pb^{m-1} \cup aPb^{m-2} \cup a^2 Pb^{m-3} \cup \ldots \cup a^{m-1} Pb^{m-(m-2)} \cup a^m Pb^{m-(m-1)} \cup a^{m+1} Pb^{m-1}
\end{aligned}
$$

olur. Bu da $n = 1,2, \ldots, m - 1$ olmak üzere

$$(a, P, b)^m \left(x, x a^n P b^{m-(n+1)} y, y\right) (a, P, b)^m = (a, P, b)^m$$

eşitliğini verir ki bu $A \lozenge B$' nin $\pi -$ regüler olduğunu gösterir.

Şimdi $E(A \lozenge B)$ 'nin değişmeli olduğunu göstermeliyiz. (ii) den $(e_1, P_1, f_1), (e_2, P_2, f_2) \in E(A \lozenge B)$ için

$$(e_1, P_1, f_1)^2 = (e_1, P_1, f_1) \text{ ve } (e_2, P_2, f_2)^2 = (e_2, P_2, f_2)$$

eşitlikleri vardır. Bu eşitliklerden

$$(e_1^2, P_1 f_1 \cup e_1 P_1, f_1^2) = (e_1, P_1, f_1) \text{ ve } (e_2^2, P_2 f_2 \cup e_2 P_2, f_2^2) = (e_2, P_2, f_2)$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan

$$e_1^2 = e_1, f_1^2 = f_1, e_2^2 = e_2 \text{ ve } f_2^2 = f_2$$

elde edilir ki buda bize $e_1, e_2 \in E(A)$ ve $f_1, f_2 \in E(B)$ olduğunu verir. (ii) den ve $E(A)$ ile $E(B)$' nin değişmeli olması varsayımından göz önünde bulundurursak

$$
\begin{aligned}
(e_1, P_1, f_1)(e_2, P_2, f_2) &= (e_1e_2, P_1f_2 \cup e_1P_2, f_1f_2) \\
&= (e_2e_1, P_2f_1 \cup e_2P_1, f_2f_1) \\
&= (e_2, P_2, f_2)(e_1, P_1, f_1)
\end{aligned}
$$

olur. Bu da $E(A \lozenge B)$' nin değişmeli olduğunu dolayısıyla $A \lozenge B$' nin strongly $\pi -$ inverse monoid olduğunu gösterir. □

Teorem 4.4 ü göz önünde bulundurarak $A \lozenge B$' nin $\pi -$ regüler monoid olması için gerekli ve yeterli koşulu veren aşağıdaki sonucu verebiliriz:

4.5 Sonuç : A ve B herhangi iki monoid olsunlar. Bu durumda $A \lozenge B$ schützenberger çarpımının $\pi -$ regüler monoid olması için gerek ve yeter koşul, Her $(a, P, b) \in A \lozenge B$ için $m \in \mathbb{N}$ ve $x \in A, y \in B$ var olacak şekilde $a^m x = 1_A$ ve $yb^m = 1_B$ olmasıdır.

5. CROSSED (ÇAPRAZ) ÇARPIMININ, YARI DİREKT ÇARPIM ALTINDA SCHÜTZENBERGER ÇARPIMININ YENİ VERSİYONUNUN VE SCHÜTZENBERGER ÇARPIMININ ORTHODOXLUĞU

Bu tez çalışmasının bu kısmında monoidlerin orthodoxluk, sağ inverse ve sol inverse özelliğinin tanımı verilip, $A\#_{\alpha}^{f}B$ crossed çarpımı orthodox, sağ inverse ve sol inverse özelliklerini sağlıyor iken aynı özelliklerin A ve B monoidleri için geçerli olup olmadığını araştırdık. Ayrıca schützenberger çarpım $A \lozenge B$ ve yarı direkt çarpım altında schützenberger çarpımının yeni versiyonu $A \lozenge_{sv} B$ 'nin orthodox monoid olması için gerekli ve yeterli koşul tarafımızdan araştırılmıştır.

5.1 Tanım [3] : Tanım 4.1 ve Tanım 4.2 de verildiği gibi bir regüler M monoidinin idempotent elemanlarının kümesi $E(M)$, M monoidinin bir alt monoidi oluyor ise M ye *orthodox monoid* adı verilir.

5.2 Tanım [3] : Tanım 5.1 de verilen M monoidi ve $a, b \in E(M)$ için eğer $aba = ba$ oluyor ise M monoidine *sol inverse monoid*, eğr $aba = ab$ oluyor ise M monoidine *sağ inverse monoid* adı verilir.

Orthodox, sağ inverse ve sol inverse monoidin tanımları verdikten sonra şimdi $A\#_{\alpha}^{f}B$' nin sağ inverse ve sol inverse monoid olmasıyla ilgili aşağıdaki teoremi verebiliriz.

5.3 Teorem : $A\#_{\alpha}^{f}B$ crossed çarpımı bir orthodox veya sol yada sağ inverse monoid özelliğini sağlıyor ise bu durumda A ve B monoidleri de aynı özellikleri sağlar.

İspat : $A\#_{\alpha}^{f}B$ orthodox monoid olsun. Bu durumda Tanım 5.1 gereği $A\#_{\alpha}^{f}B$ regülerdir ve regüler olması nedeniyle $(a, 1_B) \in A\#_{\alpha}^{f}B$ için (x, y) vardır öyle ki:

$$
\begin{aligned}
(a, 1_B) &= (a, 1_B)(x, y)(a, 1_B) \\
&= \left(a\alpha_{1_B}(x) f(1_B, y), 1_B y\right)(a, 1_B) \\
&= (ax, y)(a, 1_B) \\
&= \left(ax\alpha_y(a) f(y, 1_B), y1_B\right) \\
&= \left(ax\alpha_y(a), y\right)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
(x, y) &= (x, y)(a, 1_B)(x, y) \\
&= \left(x\alpha_y(a) f(y, 1_B), y1_B\right)(x, y) \\
&= \left(x\alpha_y(a), y\right)(x, y) \\
&= \left(x\alpha_y(a)\alpha_y(x) f(y, y), yy\right)
\end{aligned}
$$

Bu iki eşitlikten $y = 1_B$ elde ederiz. Bu eşitlikle birlikte $a = axa$ ve $x = xax$ eşitlikleri vardır ki bu bize A' nın regüler olduğunu verir.

Benzer iddiayı kullanarak $(1_A, b) \in A\#_\alpha^f B$ için, (x, y) vardır öyle ki:

$$
\begin{aligned}
(1_A, b) &= (1_A, b)(x, y)(1_A, b) \\
&= (1_A\alpha_b(x) f(b, y), by)(1_A, b) \\
&= (\alpha_b(x) f(b, y), by)(1_A, b) \\
&= \left(\alpha_b(x) f(b, y)\alpha_{by}(1_A) f(by, b), byb\right) \\
&= (\alpha_b(x) f(b, y) f(by, b), byb)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
(x, y) &= (x, y)(1_A, b)(x, y) \\
&= \left(x\alpha_y(1_A) f(y, b), yb\right)(x, y) \\
&= \left(x f(y, b)\alpha_{yb}(x) f(yb, y), yby\right)
\end{aligned}
$$

eşitlikleri vardır ve bu eşitliklerle birlikte $b = byb$ ve $y = yby$ eşitlikleri vardır ki bu bize B' nin regüler olduğunu verir.

Tanım 5.1 gereği A ve B' nin regülerliğini göstermiş olduk. Eğer $E(A)$ ve $E(B)$ idempotent elemanlarının sırasıyla A ve B monoidlerinin alt monoidleri olduğunu gösterirsek A ve B monoidlerinin orthodox olduğunu göstermiş olacağız.

$a_1,\ a_2 \in\ E(A)$ ve $f(b,b),\ f(b_1,b_1),\ b,\ b_1 \in E(B)$ olsun. O halde $(a_1, 1_B)$, $(a_2, 1_B)$, $(f(b,b), b)$ ve $(f(b_1,b_1), b_1) \in E\big(A\#_\alpha^f B\big)$ dir. Gerçekten de:

$$
\begin{aligned}
(a_1, 1_B)^2 &= (a_1, 1_B)(a_1, 1_B) \\
&= (a_1 a_1, 1_B) \\
&= (a_1^2, 1_B) \\
&= (a_1, 1_B), \\
(a_2, 1_B)^2 &= (a_2, 1_B)(a_2, 1_B) \\
&= (a_2 a_2, 1_B) \\
&= (a_2^2, 1_B) \\
&= (a_2, 1_B), \\
(f(b,b), b)^2 &= (f(b,b), b)(f(b,b), b) \\
&= (f(b,b)f(b,b)f(b,b), b^2) \\
&= (f(b,b), b)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
(f(b_1,b_1), b_1)^2 &= (f(b_1,b_1), b_1)(f(b_1,b_1), b_1) \\
&= (f(b_1,b_1)f(b_1,b_1)f(b_1,b_1), b_1^2) \\
&= (f(b_1,b_1), b_1)
\end{aligned}
$$

dir. $A\#_\alpha^f B$ orthodox monoid olması nedeniyle

$$((a_1a_2)^2, \emptyset, 1_B) = \left((a_1, 1_B)(a_2, 1_B)\right)^2 = (a_1, 1_B)(a_2, 1_B) = (a_1a_2, 1_B)$$

bu eşitlikten

$$(a_1a_2)^2 = a_1a_2$$

eşitliğini elde ederiz ki bu da bize A' nın orthodox monoid olduğunu gösterir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
(f(b,b)f(b_1,b_1)f(b,b_1)f(b,b)f(b_1,b_1)f(b,b_1)f(bb_1,bb_1),(bb_1)^2)& \\
&= \left((f(b,b),b)(f(b_1,b_1),b_1)\right)^2 \\
&= (f(b,b),b)(f(b_1,b_1),b_1) \\
&= (f(b,b)f(b_1,b_1)f(b,b_1),bb_1)
\end{aligned}$$

bu eşitlikten

$$(bb_1)^2 = bb_1$$

eşitliği elde ederiz ki bu da bize B nin orthodox monoid olduğunu gösterir.

Şimdide A ve B' nin sağ ve sol inverse özelliklerini inceleyelim. Eğer $A\#_\alpha^f B$ sağ inverse monoid ise bu durumda

$$\begin{aligned}
(aa_1a, 1_B) &= (a, 1_B)(a_1, 1_B)(a, 1_B) \\
&= (a, 1_B)(a_1, 1_B) \\
&= (aa_1, 1_B)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\left(f(b,b)\alpha_b\left(f(b_1,b_1)\right)f(b,b_1)\alpha_{bb_1}\left(f(b,b)\right)f(bb_1,b),bb_1b\right)& \\
&= (f(b,b),b)(f(b_1,b_1),b_1)(f(b,b),b) \\
&= (f(b,b),b)(f(b_1,b_1),b_1) \\
&= \left(f(b,b)\alpha_b\left(f(b_1,b_1)\right)f(b,b_1),bb_1\right)
\end{aligned}$$

eşitlikleri vardır. Bu iki eşitlikten $aa_1a = aa_1$ ve $bb_1b = bb_1$ eşitlikleri var olduğundan A ve B monoidleri de sağ inverse özelliğini sağlarlar.

Eğer $A\#_\alpha^f B$ sol inverse monoid ise bu durumda benzer yöntemle

$$\begin{aligned}(aa_1a, 1_B) &= (a, 1_B)(a_1, 1_B)(a, 1_B)\\ &= (a_1, 1_B)(a, 1_B)\\ &= (a_1a, 1_B)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}&\big(f(b,b)\alpha_b\big(f(b_1,b_1)\big)f(b,b_1)\alpha_{bb_1}\big(f(b,b)\big)f(bb_1,b), bb_1b\big)\\ &\qquad = (f(b,b),b)(f(b_1,b_1),b_1)(f(b,b),b)\\ &\qquad = (f(b_1,b_1),b_1)(f(b,b),b)\\ &\qquad = \big(f(b_1,b_1)\alpha_{b_1}\big(f(b,b)\big)f(b_1,b), b_1b\big)\end{aligned}$$

eşitlikleri vardır. Bu iki eşitlikten $aa_1a = a_1a$ ve $bb_1b = b_1b$ eşitlikleri var olduğundan A ve B monoidleri de sol inverse özelliğini sağlarlar. □

$A\#_\alpha^f B$' nin orthodox, sağ ve sol inverse monoid özelliklerini veren teoremi verdikten sonra $A \lozenge_{sv} B$' nin orthodox monoid olması için gerekli ve yeterli koşulu veren sıradaki teoremi verebiliriz.

5.4 Teorem : A ve B herhangi iki monoid olsunlar. Ayrıca Tanım 1.3.4.1 de verilen koşulları göz önüne alalım Bu durumda $A \lozenge_{sv} B$' nin orthodox olması için gerekli ve yeterli koşul A' nın orthodox monoid ve B' nin bir grup olmasıdır.

İspat : $A \lozenge_{sv} B$' nin orthodox monoid olduğunu varsayalım. Bu durumda Tanım 5.1 gereği $A \lozenge_{sv} B$ regülerdir ve regüler olması nedeniyle $(a, \{(1_A, 1_B)\}, 1_B) \epsilon A \lozenge_{sv} B$ için (x, P, y) vardır öyle ki:

$$\begin{aligned}(a, \{(1_A, 1_B)\}, 1_B) &= (a, \{(1_A, 1_B)\}, 1_B)(x, P, y)(a, \{(1_A, 1_B)\}, 1_B)\\ &= (ax, \{(1_A, 1_B)\}y \cup P, y)(a, \{(1_A, 1_B)\}, 1_B)\end{aligned}$$

$$= \big(ax\theta_y(a), \{(1_A, 1_B)\}y \cup P \cup \{(1_A, 1_B)\}, y\big)$$

ve

$$(x, P, y) = (x, P, y)(a, \{(1_A, 1_B)\}, 1_B)(x, P, y)$$

$$= \big(x\theta_y(a), P \cup \{(1_A, 1_B)\}, y\big)(x, P, y)$$

$$= \big(x\theta_y(a)\theta_y(x), Py \cup \{(1_A, 1_B)\}y \cup P, yy\big)$$

eşitlikleri vardır. Bu iki eşitlikten $y = 1_B$ elde ederiz. Bu eşitlikle birlikte $a = axa$ ve $x = xax$ eşitlikleri vardır ki bu bize A' nın regüler olduğunu verir.

Benzer iddiayı kullanarak $(1_A, \{(1_A, 1_B)\}, b) \in A \lozenge_{sv} B$ için (x, P, y) vardır öyle ki:

$$(1_A, \{(1_A, 1_B)\}, b) = (1_A, \{(1_A, 1_B)\}, b)(x, P, y)\ (1_A, \{(1_A, 1_B)\}, b)$$

$$= (\theta_b(x), \{(1_A, 1_B)\}y \cup P, by)\ (1_A, \{(1_A, 1_B)\}, b)$$

$$= (\theta_b(x), \{(1_A, 1_B)\}yb \cup Pb \cup \{(1_A, 1_B)\}, byb)$$

ve

$$(x, P, y) = (x, P, y)\ (1_A, \{(1_A, 1_B)\}, b)(x, P, y)$$

$$= (x, Pb \cup \{(1_A, 1_B)\}, yb)\ (x, P, y)$$

$$= \big(x\theta_{yb}(x), Pby \cup \{(1_A, 1_B)\}y \cup P, yby\big)$$

eşitlikleri vardır ve bu eşitliklerden

$$\{(1_A, 1_B)\} = \{(1_A, 1_B)\}yb \cup Pb \cup \{(1_A, 1_B)\}$$

$$P = Pby \cup \{(1_A, 1_B)\}y \cup P$$

eşitliklerini elde ederiz. Bu iki eşitlikten $(1_A, yb) = (1_A, 1_B)$ ve $Pby = P$ eşitlikleri vardır. Buradan da $yb = by = 1_B$ elde ederiz ki bu da bize B' nin bir grup olduğunu verir.

Şimdi A' nın orthodox monoid olduğunu gösterelim. $a_1, a_2 \in E(A)$ olsun. O halde $(a_1, \emptyset, 1_B), (a_2, \emptyset, 1_B) \in E(A \lozenge_{sv} B)$ dir. Gerçekten de:

$$(a_1, \emptyset, 1_B)^2 = (a_1, \emptyset, 1_B)(a_1, \emptyset, 1_B) = (a_1 a_1, \emptyset, 1_B) = (a_1^2, \emptyset, 1_B) = (a_1, \emptyset, 1_B)$$

ve

$$(a_2, \emptyset, 1_B)^2 = (a_2, \emptyset, 1_B)(a_2, \emptyset, 1_B) = (a_2 a_2, \emptyset, 1_B) = (a_2^2, \emptyset, 1_B) = (a_2, \emptyset, 1_B)$$

dir. $A \lozenge_{sv} B$' nin orthodox monoid olması nedeniyle

$$((a_1 a_2)^2, \emptyset, 1_B) = \big((a_1, \emptyset, 1_B)(a_2, \emptyset, 1_B)\big)^2 = (a_1, \emptyset, 1_B)(a_2, \emptyset, 1_B) = (a_1 a_2, \emptyset, 1_B)$$

bu eşitlikten

$$(a_1 a_2)^2 = a_1 a_2$$

eşitliği elde ederiz ki bu da bize A' nın orthodox monoid olduğunu gösterir.

Tersine A' nın orthodox monoid ve B' nin bir grup olduğunu varsayalım. $(a, P, b) \in A \lozenge_{sv} B$ alalım. B' nin grup olması nedeniyle bir $y \in B$ vardır öyle ki:

$$yb = by = 1_B$$

dir. A'nın orthodox monoid olması nedeniyle Tanım 5.1 gereği ayrıca regülerdir. A regüler olduğundan bazı $v \in a^{-1}$ için $c = \theta_y(v)$ alabiliriz. Aşağıdaki eşitliği göz önüne alalım :

$$\begin{aligned} a\theta_b(c)\theta_{by}(a) &= a\theta_b\left(\theta_y(v)\right)a \\ &= a\theta_{by}(v)a \\ &= ava \\ &= a \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} c\theta_y(a)\theta_{yb}(c) &= c\theta_y(a)c \\ &= \theta_y(v)\theta_y(a)\theta_y(v) \end{aligned}$$

$$= \theta_y(vav)$$

$$= \theta_y(v)$$

$$= c$$

Ayrıca, $P_1 \subseteq A \times B$ olmak üzere $P_2 = P_1 y \subseteq A \times B$ seçiminden

$$P_1 yb \cup P_2 \cup P_1 = P_1 \cup P_1 yb \cup P_1 = P_1 \cup P_1 \cup P_1 = P_1$$

ve

$$P_2 by \cup P_1 y \cup P_2 = P_1 y \cup P_1 y \cup P_1 y = P_1 y = P_2$$

dir. Sonuç olarak, $P_2 = P_1 y \subseteq A \times B, yb = by = 1_B$ ve bazı $v \in a^{-1}$ için $c = \theta_y(v)$ olacak şekilde her $(a, P_1, b) \in A \lozenge_{sv} B$ için $(c, P_2, y) \in A \lozenge_{sv} B$ vardır öyle ki:

$$(a, P_1, b)(c, P_2, y)(a, P_1, b) = \big(a\theta_b(c)\theta_{by}(a), P_1 yb \cup P_2 b \cup P_1, byb\big)=(a, P_1, b)$$

ve

$$(c, P_2, y)(a, P_1, b)(c, P_2, y) = \big(c\theta_y(a)\theta_{yb}(c), P_2 by \cup P_1 y \cup P_2, yby\big) = (c, P_2, y)$$

dir. Bu iki eşitlik bize $A \lozenge_{sv} B$' nin bir regüler monoid olduğunu verir.

$A \lozenge_{sv} B$ ' nin regüler monoid olduğunu gösterdik. Eğer $E(A \lozenge_{sv} B)$ idempotent elemanlarının kümesinin $A \lozenge_{sv} B$ monoidinin alt monoidi olduğunu gösterirsek $A \lozenge_{sv} B$ monoidinin orthodox olduğunu göstermiş olacağız. Bunu için $(a, P_1, b), (c, P_2, y) \in E(A \lozenge_{sv} B)$ alalım. Yukarıda ispatın ikinci kısmında aldığımız bazı $v \in a^{-1}$ için $c = \theta_y(v)$ ve $yb = by = 1_B$ varsayımlarını tekrar alabiliriz.

$$a\theta_b(c) = a\theta_b\left(\theta_y(v)\right)$$

$$= a\theta_{by}(v)$$

$$= av$$

eşitliğini göz önüne alırsak;

$$(\, a\theta_b(c), P_1 y \cup P_2, by)^2 = (\, av, P_1 y \cup P_2, 1_B)^2$$

$$= (av, P_1 y \cup P_2, 1_B)(av, P_1 y \cup P_2, 1_B)$$

$$= \left(av\theta_{1_B}(av), P_1y \cup P_2 \cup P_1y \cup P_2, 1_B1_B\right)$$

$$= (av, P_1y \cup P_2, 1_B)$$

$$= (a\theta_b(c), P_1y \cup P_2, by)$$

eşitliğini elde ederiz ki bu bize

$$(a\theta_b(c), P_1y \cup P_2, by) = (a, P_1, b)(c, P_2, y) \in E(A \lozenge_{sv} B)$$

olduğunu gösterir, yani bu $A \lozenge_{sv} B$' nin orthodox monoid olduğu anlamına gelir. □

Yarı direkt çarpım altında schützenberger çarpımı $A \lozenge_{sv} B$' nin orthodox monoid olması için gerek ve yeter koşulu veren teoremin ispatını verdikten sonra şimdi de schützenberger çarpım $A \lozenge B$' nin orthodox monoid olması için gerekli ve yeterli koşulu veren sıradaki teoremi verelim:

5.5 Teorem : A ve B herhangi iki monoid olsunlar. Bu durumda $A \lozenge B$' nin orthodox monoid olması için gerekli ve yeterli koşul A ve B'nin birer grup olmasıdır.

İspat : $A \lozenge B$'nin orthodox olduğunu varsayalım. Bu durumda Tanım 5.1 gereği $A \lozenge B$ regülerdir. regüler olması nedeniyle $(a, \{(1_A, 1_B)\}, 1_B) \in A \lozenge B$ için (x, P, y) vardır öyle ki:

$$(a, \{(1_A, 1_B)\}, 1_B) = (a, \{(1_A, 1_B)\}, 1_B)(x, P, y)(a, \{(1_A, 1_B)\}, 1_B)$$

$$= (ax, \{(1_A, 1_B)\}y \cup aP, y)(a, \{(1_A, 1_B)\}, 1_B)$$

$$= (axa, \{(1_A, 1_B)\}y \cup aP \cup ax\{(1_A, 1_B)\}, y)$$

ve

$$(x, P, y) = (x, P, y)(a, \{(1_A, 1_B)\}, 1_B)(x, P, y)$$

$$= (xa, P \cup x\{(1_A, 1_B)\}, y)(x, P, y)$$

$$= (xax, Py \cup x\{(1_A, 1_B)\}y \cup xaP, yy)$$

dir. Bu iki eşitlikten

$$y = 1_B,$$

$$\{(1_A, 1_B)\} = \{(1_A, 1_B)\}y \cup aP \cup ax\{(1_A, 1_B)\},$$

$$P = Py \cup x\{(1_A, 1_B)\}y \cup xaP$$

eşitlikleri vardır. Bu üç eşitlikten

$$\{(1_A, 1_B)\} = \{(ax, 1_B)\} \text{ ve } P = xaP$$

eşitlikleri vardır. Buradan

$$ax = xa = 1_A$$

eşitliğini elde ederiz ki bu bize A' nın bir grup olduğunu verir.

Benzer iddiayı kullanarak $(1_A, \{(1_A, 1_B)\}, b) \in A \lozenge B$ için (x, P, y) vardır öyle ki:

$$\begin{aligned}(1_A, \{(1_A, 1_B)\}, b) &= (1_A, \{(1_A, 1_B)\}, b)(x, P, y)(1_A, \{(1_A, 1_B)\}, b) \\ &= (x, \{(1_A, 1_B)\}y \cup P, by)(1_A, \{(1_A, 1_B)\}, b) \\ &= (x, \{(1_A, 1_B)\}yb \cup Pb \cup x\{(1_A, 1_B)\}, byb)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(x, P, y) &= (x, P, y)(1_A, \{(1_A, 1_B)\}, b)(x, P, y) \\ &= (x, Pb \cup x\{(1_A, 1_B)\}, yb)(x, P, y) \\ &= (xx, Pby \cup x\{(1_A, 1_B)\}y \cup xP, yby)\end{aligned}$$

eşitlikleri vardır ve bu eşitliklerden

$$x = 1_A,$$

$$\{(1_A, 1_B)\} = \{(1_A, 1_B)\}yb \cup Pb \cup x\{(1_A, 1_B)\},$$

$$P = Pby \cup x\{(1_A, 1_B)\}y \cup xP$$

eşitlikleri vardır. Bu üç eşitlikten

$$\{(1_A, 1_B)\} = \{(1_A, yb)\} \text{ ve } P = Pby$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan da

$$yb = by = 1_B$$

eşitliğini elde ederiz ki bu bize B' nin bir grup olduğunu verir.

Tersine A ve B ' nin birer grup olduğunu varsayalım. $(a, P_1, b) \in A \between B$ alalım. A ve B' nin birer grup olması nedeniyle bir $x \in A, y \in B$ vardır öyle ki:

$$ax = xa = 1_A \text{ ve } yb = by = 1_B$$

dir. Ayrıca $P_1 \subseteq A \times B$ olmak üzere $P_2 = xP_1y \subseteq A \times B$ seçiminden

$$P_1yb \cup aP_2b \cup axP_1 = P_1 \cup axP_1yb \cup P_1 = P_1 \cup P_1 \cup P_1 = P_1$$

ve

$$P_2by \cup xP_1y \cup xaP_2 = P_2 \cup xP_1y \cup P_2 = P_2 \cup P_2 \cup P_2 = P_2$$

dir. Sonuç olarak, $P_2 = xP_1y \subseteq A \times B, ax = xa = 1_A$ ve $yb = by = 1_B$ olmak üzere her $(a, P_1, b) \in A \between B$ için $(x, P_2, y) \in A \between B$ vardır öyle ki:

$$\begin{aligned}(a, P_1, b) &= (a, P_1, b)(x, P_2, y)(a, P_1, b)\\ &= (axa, P_1yb \cup aP_2b \cup axP_1, byb)\\ &= (a, P_1, b)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(x, P_2, y) &= (x, P_2, y)(a, P_1, b)(x, P_2, y)\\ &= (xax, P_2by \cup xP_1y \cup xaP_2, yby)\\ &= (x, P_2, y)\end{aligned}$$

dir. Bu iki eşitlik bize $A \between B$' nin birer regüler monoid olduğunu verir.

$A \between B$' nin regüler monoid olduğunu gösterdik. Eğer $E(A \between B)$ idempotent elemanlarının kümesinin $A \between B$ monoidinin alt monoidi olduğunu gösterirsek $A \between B$ monoidinin orthodox monoid olduğunu göstermiş olacağız. Bunu için

$(a, P_1, b), (x, P_2, y) \in E(A \between B)$ alalım. Yukarıda ispatın ikinci kısmında aldığımız bazı $x \in A$ ve $y \in B$ vardır öyle ki:

$$ax = xa = 1_A \text{ ve } yb = by = 1_B$$

varsayımlarını tekrar alabiliriz. O halde;

$$\begin{aligned}
\big((a, P_1, b)(x, P_2, y)\big)^2 &= (ax, P_1 y \cup aP_2, by)^2 \\
&= (1_A, P_1 y \cup aP_2, 1_B)^2 \\
&= (1_A, P_1 y \cup aP_2, 1_B)(1_A, P_1 y \cup aP_2, 1_B) \\
&= (1_A 1_A, P_1 y \cup aP_2 \cup P_1 y \cup aP_2, 1_B 1_B) \\
&= (ax, P_1 y \cup aP_2, by) \\
&= (a, P_1, b)(x, P_2, y)
\end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz ki bu bize

$$(ax, P_1 y \cup aP_2, by)^2 = \big((a, P_1, b)(x, P_2, y)\big)^2 = (a, P_1, b)(x, P_2, y) \epsilon E(A \between B)$$

olduğunu gösterir. Bu da $A \between B$'nin orthodox monoid olduğu anlamına gelir. □

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Tezin birinci bölümünde kelime ve kelime yapısına değinilerek kelimeler arasında tanımlanan işlem ile serbest monoidler hatırlatılmıştır. Monoid sunuşu verilmiş olup diğer bölümlerde çeşitli sonuçları bulunan crossed (çapraz) çarpım, yarı direkt çarpım ve schützenberger çarpımın tanımları verilmiştir. Ayrıca crossed çarpım ile yarı direkt çarpım arasında geçişi veren teorem verilmiştir.

İkinci bölümden itibaren literatürde ilk defa bulunan sonuçlar verilmiştir. Crossed çarpım ile schützenberger çarpım birleştirerek elde edilen yeni cebirsel yapının monoid olduğunu gösteren ve bu monoidin sunuşunu veren teorem ikinci bölümde verilmiştir.

Tezin Üçüncü bölümünde regülerlik tanımı verilip crossed çarpım, crossed çarpım altında tanımlanan schützenberger çarpımının yeni versiyonu ve çift yönlü yarı direkt çarpımının regülerlik özelliğini veren teoremlere yer verilmiştir.

Çalışmanın dördüncü bölümünde strongly π-inverse tanımı verilip schützenberger çarpımının strongly π- inverse monoid olması için gerekli ve yeterli koşulu veren teoreme yer verilmiştir.

Beşinci bölümde ise orthodoxluk tanımı verilip schützenberger çarpımının ve yarı direkt çarpım altında tanımlı schützenberger çarpımının orthodox monoid olması için gerekli ve yeterli koşulu veren teoremlere yer verilmiştir.

Bu çalışmadan hareketle crossed çarpımının orthodox olması için gerekli ve yeterli koşul ve crossed çarpımının strongly π- inverse monoid olması için gerekli ve yeterli koşulu veren durumlar incelenebilir.

7. KAYNAKLAR

[1] Nico, W. R., "On The Regularity of Semidirect Products", *Journal of Algebra*, 80, 29-36, (1983).

[2] Zhang, Y., Li, S. and Wang, D., "Semidirect Products and Wreath Products of Strongly π-Inverse Monoids", *Georgian Mathematical Journal*, 3(3), 293-300, (1996).

[3] Saito, T., "Orthodox Semidirect Products and Wreath Products of Monoids", *Semigroup Forum*, 38, 347-354, (1989).

[4] Agore, A. L. and Militaru, G., "Crossed Product of Groups Applications", *Arabian J. Sci. Eng.*, 33, 1-17, (2008).

[5] Agore, A. L., Fratila, D., "Crossed Product of Cyclic Groups ", *Czechoslovak Mathematical Journal*, 60 (135), 889-901, (2010).

[6] Howie, J. M., *Automata and Languages*, Oxford: Clarendan press, (1991).

[7] Howie, J. M. and Ruskuc, N., "Constructions and Presentations for Monoids", *Communications In Algebra*, 22 (15), 6209-6224, (1994).

[8] Karpuz, E. G., Ateş, F. and Çevik, A. S., "Regular and π-Inverse Monoids Under Schützenberger Products", *Algebras Groups and Geometries*, 27, 455-471, (2010).

[9] Ateş, F., "Some New Monoid and Group Constructions Under Semidirect Products", *Ars Combinatoria*, 91, 203-218, (2009).

[10] Karpuz, E. G. and Çevik, A. S., "A New Example of Strongly π-Inverse Monoids", *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 40(3), 461-468, (2011).

[11] Emin, A., Ateş, F., İkikardeş, S. and Cangül, İ. N., "A New Monoid Construction Under Crossed Products", *Journal of Inequalities and Applications,* 244,1-6 , (2013).

[12] Zhang, R., "A Note on Orthodox Semidirect Products and Wreath Products of Monoids", *Semigroup Forum*, 58, 262-266, (1999).

[13] Robertson, E. F., Ruskuc, N. and Thomson, M. R., "Finite Generation and Presentability of Wreath Products of Monoids", *Journal of Algebra*, 266, 382-392, (2003).

[14] Howie, J. M., *An Introduction to Semigroup Theory*, London-New York-San Francisco: Academic Press, (1976).

[15] Johnson, D. L., *Topics in the Theory of Group Presentations*, Cambridge: Cambridge University Press, (1980).

[16] Lallement, G., *Semigroups and Combinatorial Applications*, New York: Wiley, (1979).

[17] Munn, W. D., "On Simple Inverse Semigroups", *Semigroup Forum*, 1, 63-74, (1970).

[18] Redei, L., *The Theory of Finetely Generated Commutative Semigroups*, Oxford: Pergamon Press, (1965).

[19] Cohen, D. E., *Combinatorial Group Theory: Topological Approach*, Cambridge: Cambridge University Press, (1989).

[20] Johnson, D. L., *Presentation of groups*, Cambridge : Cambridge University Press, 1-17, 41-45, (1990).

[21] Ateş, F. and Çevik, A. S., "Minimal But Inefficient Presentations for Semidirect Products of Finite Cyclic Monoids", *Proceedings of Groups St Andrews L.M.S Lecture Note Series*, CUP, vol 1, 175-180, (2005).

[22] Campbell, C. M., Robertson, E. F., Ruskuc, N. and Thomas, R. M., "On A Class of Semigroups with Symmetric Presentations", *Semigroup Forum*, 46, 286-306, (1993).

[23] Ateş, F., "Grup ve Monoid Yapılarına Geometrik Yaklaşımlar", Doktora Tezi, *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Matematik Anabilim Dalı, Balıkesir, (2007).

[24] Hungerford, T. W., Algebra, New York : *Springer-Verlag*, 103, 230-238, (1974).

[25] Nesin, A., *Temel grup teorisi*, İstanbul: Nesin Yayıncılık Ltd. Şti., 259-261, (2014).

[26] Howie, J. M., *Fundamentals of Semigroup Theory*, Oxford: Clarendan press, (1995).

[27] Çevik, A. S.,"The p-Cockroft property of Semidirect Products of Monoids", *International Journal of Algebra and Computation*, 13, 1-16, (2003).

[28] Ruskuc, N., "Semigroup Presentations", Ph. D. Thesis, University of St. Andrews, (1996).

[29] Dlab, V. and Neumann, B.H., "Semigroups with Few Endomorphisms", *Journal of the Australian Mathematic Society Ser.A*, 10, 162-165, (1969).

[30] Wang, J., "Finite derivation type for semi-direct products of monoids", *Theoretical Computer Science*, 191-219, (1998).