T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

FABER POLİNOMLARININ İLERİ ASİMPTOTİK ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ali DOĞU

Balıkesir, Haziran-2011

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

FABER POLİNOMLARININ İLERİ ASİMPTOTİK ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ALİ DOĞU

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Yunus Emre YILDIRIR

Sınav Tarihi: 27.06.2011

Jüri Üyeleri: Yrd. Doç. Dr. Yunus Emre YILDIRIR (Danışman-BAÜ)

Doç. Dr. Ramazan AKGÜN (BAÜ)

Doç. Dr. Özden KORUOĞLU (BAÜ)

Enstitü Yönetim Kurulunun .... tarih .... sayılı oturumunun ..... nolu kararı ile .... mezun olmuştur.

Balıkesir, Haziran-2011

ÖZET

FABER POLİNOMLARININ İLERİ ASİMPTOTİK ÖZELLİKLERİ

Ali DOĞU

Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

(Yüksek Lisans Tezi / Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Yunus Emre YILDIRIR)

Balıkesir, 2011

Bu çalışmanın amacı Faber polinomlarının asimptotik özelliklerini incelemektir.

Giriş ve sonuç bölümü dışında bu tez dört ana bölümden oluşmaktadır.

2.bölümde, tezin ilerleyen bölümlerinde kullanılan bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir.

3. bölümde, Faber polinomları, genelleşmiş Faber polinomları p-Faber polinomları ve p-Faber esas kısmının tanımları, integral gösterimleri ve temel özellikleri incelenmiştir.

4. bölümde, Faber polinomlarının en basit asimptotik özellikleri ispatlanmış, genelleşmiş Faber polinomları ve p-Faber polinomları için elde edilmiş olan benzer asimptotik özellikler ifade edilmiştir.

5. bölümde, p-Faber esas kısmı için asimptotik özellikler ifade edilmiş ve ispatlanmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Faber polinomları / genelleşmiş Faber polinomları / p-Faber polinomları / p-Faber esas kısmı

ABSTRACT

FURTHER ASYMPTOTIC PROPERTIES OF FABER POLYNOMIALS

Ali DOĞU

Balıkesir University, Institute of Science

Department of Mathematics

(M.S.Thesis / Supervisor:Asst.Prof: Dr. Yunus Emre YILDIRIR)

Balıkesir-Turkey, 2011

The purpose of this work is to investigate the asymptotic properties of Faber polynomials.

Expect the introductory and the conclusion chapter, the thesis consist of four main chapters.

In chapter 2, some basic definitions and theorems that will be used in the further chapters are given.

In chapter 3, the definitions, integral representations and basic properties of Faber polynomials, generalized Faber polynomials, p-Faber polynomials and p- Faber principle part are given.

In chapter 4, the simplest asymptotic properties of Faber polinomials are proved. The similar asymptotic properties of generalized Faber polynomials and p-Faber polynomials are stated.

In chapter 5, the asymptotic properties of p-Faber principle part are proved.

KEY WORDS: Faber polynomials / generalized Faber polynomials / p-Faber polynomials / p- Faber principle part.

İÇİNDEKİLER **Sayfa**

SEMBOL LİSTESİ

Simge	Adı
$\boldsymbol{C}$	Karmaşık sayılar kümesi
$\boldsymbol{R}$	Gerçel sayılar kümesi
$\boldsymbol{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\boldsymbol{K}$	Kontinyum
$\boldsymbol{G}$	Sınırlı basit bağlantılı bölge
Γ	G bölgesinin sınırı
Γ_R	K kontinyumunun seviye çizgisi
G_R	Γ_R seviye çizgisinin içi
D_R	Γ_R seviye çizgisinin içi
$\{F_k(z)\}$	K kontinyumunun Faber pol.
$\left\{\tilde{F}_{k,p}\left(1/z\right)\right\}$	G bölgesinin p-Faber esas kısmı
$l(\Gamma)$	Γ eğrisinin uzunluğu
$\bar{G}$	G bölgesinin kapanışı
U	$\{z \in C : \lvert z\rvert < 1\}$ (açık birim disk)
$D(z_0, \delta)$	$\{z \in C : \lvert z - z_0\rvert < \delta\}$ kümesi
CG	G bölgesinin tümleyeni
$A(t, z)$	Faber pol. üreteç fonksiyonları
$\tilde{\Gamma}_R$	G bölgesinin seviye eğrisi
$\tilde{G}_R$	$\tilde{\Gamma}_R$ seviye çizgisinin içi
$\tilde{D}_R$	$\tilde{\Gamma}_R$ seviye çizgisinin dışı

ÖNSÖZ

Faber polinomları ve Faber polinomlarının ileri asimptotik özelliklerini konu alan bu çalışmam esnasında bana zamanını ayırıp yardımlarını esirgemeyen Yrd. Doç.Dr. Yunus Emre YILDIRIR hocama teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bu zamana kadar maddi ve manevi yardımlarını esirgemeyen aileme ve arkadaşlarıma da teşekkürü borç bilirim.

ALİ DOĞU

1.GİRİŞ

Faber polinomları 1903 yılında alamn matematikçi G.Faber tarafından tanımlanmıştır. Bu polinomlar kompleks fonksiyonların yaklaşım teorisinde önemli bir rol oynamaktadır.Faber polinomlarının serileri, basit bağlantılı bölgelerde analitik fonksiyonların gösterimi için kullanılmış ve analitik fonksiyonların yaklaşım ile ilgili bir çok teoremide bu serilerin yardımıyla ispatlanmıştır.

Faber polinomlarının temel özellikleri ile ilgili teoremler Bartolomeo, J. He, M. [8] Brui, I.N. [9] Coleman, J.P.& Smith, R.A. [10] Dodunova, L.K [11] Ewing, J.H& Schober, G. [12] Gatermann, K. Hofmann, C.Opfer, G. [13] ve He, M.X.&Saff, E.B. [14] tarafından incelenmiştir.

Bu tez çalışmasında, p-faber esas kısmı tanımlanmış ve Faber polinomları için elde edilmiş olan asimptotik özelliklerin benzerlerinin p-Faber esas kısmı için de geçerli olduğu isptlanmıştır.

2.ÖN BİLGİLER

2.1 Temel Tanımlar ve Teoremler

2.1.1 Tanım: Karmaşık düzlemde açık ve bağlantılı kümeye bölge, kapalı ve bağlantılı kümeye de kontinyum denir. [1, s:1]

2.1.2 Tanım: $[a,b] \subset R$ olmak üzere sürekli bir

$$\Gamma : [a,b] \to C$$

fonksiyonuna karmaşık düzlemde bir eğri denir. Burada $\Gamma(a)$ ve $\Gamma(b)$ noktalarına sırasıyla eğrinin başlangıç ve bitim noktaları denir. Bir Γ eğrisi verildiğinde $\Gamma(a)=\Gamma(b)$ ise Γ'ya kapalı eğri; bir Γ eğrisi sadece $t_1 = t_2$ için $\Gamma(t_1)=\Gamma(t_2)$ oluyorsa Γ'ya Jordon eğrisi; Γ' türevi var ve sürekli ise Γ'ya diferansiyellenebilir eğri; diferansiyellenebilir bir Γ eğrisi için eğer, $\Gamma'(t) \neq 0$ oluyorsa Γ'ya düzgün eğri denir. [2,s:126]

2.1.3 Tanım: B karmaşık düzlemde bir bölge olmak üzere $f : B \to C$ sürekli dönüşümü verilsin. Eğer bir $z_0 \in B$ noktasından geçen ve aralarında α açısı yapan γ_1 ve γ_2 eğrilerinin $f(\gamma_1)$ ve $f(\gamma_2)$ görüntü eğrileri de $w_0 = f(z_0)$ da aralarında yön ve büyüklük bakımından α açısı yapıyorlarsa f fonksiyonuna z_0 da bir konform dönüşümdür denir.[2,s:309-310]

2.1.4 Tanım: Bir f karmaşık fonksiyonu bir z_0 noktasının belli bir $D(z_0,\delta)$, $\delta > 0$, komşuluğundaki bütün noktalarda diferansiyellenebiliyorsa f, z_0 ,da analitiktir denir. [2,s:100]

2.1.5 Tanım: Γ karmaşık düzlemde bir eğri olsun. Eğer bir T çemberini Γ'ya resmeden T çemberinin bir komşuluğunda konform olan bir dönüşüm varsa Γ eğrisine analitik eğri denir. [3,s:20]

2.1.6 Tanım: Bir $\gamma(t)=z(t)=x(t)+iy(t)$, $0\leq t\leq 1$ eğrisini alalım. Bu eğrinin uç noktaları $z_0=z(0)$ ve $z_1=z(1)$ olsun. Eğer, eğri üzerindeki noktalar, z_0 dan başlamak üzere t' nin artışına karşılık geliş sırasına göre taranırsa, γ pozitif yönde dönülmüş olur. [2,s:129]

2.1.7 Tanım: $[a,b]\subset R$ olmak üzere $\Gamma: z=z(t)=x(t)+iy(t)$ eğrisi verilmiş olsun. Eğer n doğal sayı olduğunda $a=t_1<t_2<...<t_{n+1}=b$ koşulunu sağlayan t_1, $t_2,...,t_{n+1}$ değerlerinin keyfi bir dizisi için $\sum_{k=1}^{\infty}\left|z(t_{k+1})-z(t_k)\right|$ toplamı sınırlı kalıyorsa Γ eğrisine sonlu uzunluklu eğri denir. Başka bir değişle, Γ eğrisini gösteren z fonksiyonu sınırlı değişimli ise Γ 'ya sonlu uzunluklu eğri denir. [7,s:417]

2.1.8 Teorem(Riemann Dönüşüm Teoremi): $G\subset C$ sınırı en az iki noktadan oluşan basit bağlantılı bir bölge ve $z_0\in G$ olsun. Bu durumda, G bölgesini U birim diskine

$$f(z_0)=0 \text{ ve } f'(z_0)>0$$

koşulları altında resmeden bir tek f konform dönüşümü vardır. [4,s:8]

2.1.9 Teorem: Düzlemde bir G bölgesi verilsin. $\overline{G}$ kapalı bölgesinin tümleyeni D olsun. Riemann konform dönüşüm teoremine göre D bölgesini $|w|>1$ bölgesine dönüştüren bir ϕ konform dönüşümü vardır ve

$$\phi(\infty)=\infty \text{ ve } \phi'(\infty)=\lim_{z\to\infty}\frac{\phi(z)}{z}>0 \tag{2.1}$$

koşulları altında bu ϕ konform dönüşümü tektir. [4,s:104]

İspat: D bölgesinin $z=\infty$ noktasını $z_1=0$ noktasına taşıyan

$$z_1=\frac{1}{z-z_0}(z_0\in G)$$

dönüşümü altındaki görüntüsü G_1 bölgesi olsun ve $w_1=\varphi(z_1)$, G_1 bölgesini

$$\varphi(0)=0 \ , \ \varphi'(0)=\lim_{z_1\to 0}\frac{w_1}{z_1}>0$$

koşulları altında $|w|<1$ bölgesine dönüştüren fonksiyon olsun. Buradan D bölgesini $|w|>1$ bölgesine dönüştüren

$$w=\phi(z)=\frac{1}{\varphi\left(\dfrac{1}{z-z_1}\right)}$$

fonksiyonu (2.1) de istenen özellikleri sağlar.

2.1.10 Teorem(Sınırsız Bölgeler İçin Cauchy İntegral Formülü): G, sonlu uzunluklu bir Jordon eğrisi ile sınırlanmış sınırlı bir bölge ve Γ bunun pozitif yönlendirilmiş sınırı olsun. f , CG bölgesinde analitik bir fonksiyon ise

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\begin{cases} f(\infty)-f(z); & z\in C\overline{G} \\ f(\infty); & z\in G \end{cases}$$

olur. [6,s:486]

2.1.11 Teorem(Hölder Eşitsizliği): E bir ölçüm uzayı olmak üzere , $p>1$, $q>1$ ve

$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ için $f\in L^p(E)$ ve $g\in L^q(E)$ ise $fg\in L^1(E)$ ve

$$\left|\int_E f(x)g(x)dx\right|\leq\left(\int_E|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_E|g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

olur. [7,s:388]

2.1.12 Teorem(Weierstrass M-Testi): $A \subset C$ ve g_n, A üzerinde tanımlı fonksiyonların bir dizisi olsun. Gerçel sayıların aşağıdaki özellikleri sağlayan bir M_n dizisi varsa, $\sum_1^{\infty} g_k$, A üzerinde mutlak ve düzgün yakınsaktır.

(i) $M_n \geq 0$, için $\sum_1^{\infty} M_n$ yakınsak,

(ii) Her $z \in A$ için $|g_k(z)| \leq M_k$, $k = 1, 2, ...$

[2,s:189]

2.1.13 Tanım: Eğer G bölgesinin sınırı bir Jordon eğrisi ise, G'nin U'ya her konform dönüşümü $\overline{G}$'a birebir ve sürekli olarak genişletilebilir. Ayrıca yine G bölgesinin sınırı bir Jordon eğrisi ise, $C\overline{G}$ nun $C\overline{U}$' ya her konform dönüşümü CG' ye birebir ve sürekli olarak genişletilebilir. [1,s:24]

2.1.14 Tanım: x_n ve y_n iki pozitif dizi olsun. Eğer $|x_n| \leq c.y_n$, $n = 1, 2, ...$ olacak şekilde n'den bağımsız bir $c > 0$ varsa $x_n = O(y_n)$ gösterimi kullanılır.

3. FABER POLİNOMLARI

3.1 Faber polinomlarının tanımı

Γ sınırı en az iki noktadan oluşan basit bağlantılı bir G bölgesi verilsin. $K = G \cup \Gamma$ kontinyumunun tümleyeni D basit bağlantılı olsun $\left(D = C - \overline{G}\right)$. Riemann konform dönüşüm teoremine göre D bölgesini $|w| > 1$ bölgesine birebir ve konform olarak resmeden ve

$$\phi(\infty) = \infty \ , \ \phi'(\infty) = \lim_{z\to\infty} \frac{\phi(z)}{z} = \gamma > 0 \tag{3.1}$$

koşullarını sağlayan ϕ dönüşümü tektir.

ϕ fonksiyonu D'de sadece ∞ noktasında analitik değildir. (3.1) deki şartlar altında ∞ noktası ϕ fonksiyonun basit kutup yeridir. Buradan ∞' un komşuluğundaki Laurent açılımı

$$\phi(z) = \gamma z + \gamma_0 + \frac{\gamma_1}{z} + \frac{\gamma_2}{z^2} + \dots$$

biçimindedir. $k = 0,1,2\dots$ için

$$\left[\phi(z)\right]^k = \left(\gamma z + \gamma_0 + \frac{\gamma_1}{z} + \frac{\gamma_2}{z^2} + \dots\right)^k$$

$$= \gamma^k z^k + a_{k-1}^{(k)} z^{k-1} + a_{k-2}^{(k)} z^{k-2} + \dots + a_1^{(k)} z + a_0^{(k)} + \frac{b_1^{(k)}}{z} + \frac{b_2^{(k)}}{z^2} + \dots + \frac{b_n^{(k)}}{z^n} + \dots$$

olduğu görülmektedir. Sonuncu eşitliğin sağındaki z 'nin negatif olmayan kuvvetlerinden oluşan

$$F_k(z) = \gamma^k z^k + a_{k-1}^{(k)} z^{k-1} + a_{k-2}^{(k)} z^{k-2} + \dots + a_1^{(k)} z + a_0^{(k)}$$

polinomuna G bölgesi için k. *metebeden Faber polinomu* denir.

$$\frac{b_1^{(k)}}{z} + \frac{b_2^{(k)}}{z^2} + \dots + \frac{b_n^{(k)}}{z^n} + \dots$$

toplamını da $-E_k(z)$ ile gösterirsek

$$F_k(z) = \left[\phi(z)\right]^k + E_k(z)$$

elde ederiz.

$R>1$ olmak üzere, merkezi 0 ve yarıçapı R olan çemberin ϕ fonksiyonu alındaki ters görüntüsü

$$\Gamma_R=\{z:|\phi(z)|=R,R>1\}$$

olsun.

Γ_R, $(R>1)$ eğrilerine G bölgesinin seviye eğrileri denir.

Her Γ_R seviye çizgisi iki kanonik bölge tanımlar; eğrinin içi G_R ve eğrinin dışı D_R:

$$G_R:=\operatorname{int}\Gamma_R\,,\quad D_R:=ext\Gamma_R$$

3.1.1 Teorem: $\forall z\in G_R$ için

$$F_k(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{[\phi(\zeta)]^k}{\zeta-z}d\zeta$$

olur.

İspat: $z\in G_R$ alalım. $E_k(z)$ fonksiyonu $\overline{D}_R$ kapalı bölgesinde analitiktir. Sınırsız bölgeler için Cauchy İntegral Formülüne göre

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{E_k(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=E_k(\infty)=0 \qquad (3.2)$$

olur. Buradan (3.2) ve Cauchy İntegral Formülüne göre

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{[\phi(\zeta)]^k}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{F_k(\zeta)-E_k(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{F_k(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{E_k(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{F_k(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = F_k(z)$$

olduğu görülür. Böylece her $z \in G_R$ için

$$F_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{F_k(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

bulunur.

3.1.2 Teorem: $\forall z \in D_R$ için

$$E_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{[\phi(\zeta)]^k}{\zeta - z} d\zeta$$

olur.

İspat: $z \in D_R$ alalım. Sınırsız Bölgeler için Cauchy İntegral Formülünden

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{E_k(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = E_k(\infty) - E_k(z) \qquad (3.3)$$

elde edilir. $E_k(\infty) = 0$ olduğundan (3.3) ve Cauchy İntegral Formülüne göre

$$E_k(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{E_k(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{F_k(\zeta) - [\phi(\zeta)]^k}{\zeta - z} d\zeta$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{F_k(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{[\phi(\zeta)]^k}{\zeta - z} d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{[\phi(\zeta)]^k}{\zeta - z} d\zeta$$

bulunur. Böylece

$$E_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{[\phi(\zeta)]^k}{\zeta - z} d\zeta, \qquad z \in D_R$$

elde edilir. Sonuç olarak Faber polinomlarının integral gösterimleri aşağıdaki gibi olur.

$$F_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{[\phi(\zeta)]^k}{\zeta - z} d\zeta \qquad z \in G_R \qquad (3.4)$$

$$E_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{[\phi(\zeta)]^k}{\zeta - z} d\zeta \qquad z \in D_R \qquad (3.5)$$

$w = \phi(z)$ konform dönüşümünün ters dönüşümünü $z = \psi(w)$ ile gösterelim. Buna göre (3.4) ve (3.5) eşitliklerinde $\zeta = \psi(t)$ dönüşümü yaparsak

$$F_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=R} \frac{\psi'(t)}{\psi(t) - z} t^k dt$$

$$E_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=R} \frac{\psi'(t)}{\psi(t) - z} t^k dt$$

elde edilir.

$$A(t,z) = \frac{\psi'(t)}{\psi(t) - z}$$

denirse, bu son eşitlikte görüldüğü gibi $F_k(z)$ Faber polinomları $A(t,z)$ fonksiyonunun $t = \infty$ noktasının delinmiş komşuluğundaki açılımının Laurent katsayılarıdır. Dolayısıyla $A(t,z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_k(z)}{t^{k+1}}$, $z \in G_R$, $|t| > R$ yazabiliriz. Görüldüğü gibi $F_k(z)$ polinomları $A(t,z)$ polinomları yardımıyla üretilmiş olur. Böylece $A(t,z)$ fonksiyonuna Faber polinomlarının üreteç fonksiyonları denir.

Şimdi bazı önemli kümelerin Faber polinomlarını verelim.

3.1.1 Örnek: U birim disk alındığında $\phi(z)=z$ olur. Dolayısıyla $F_k(z)=\left[\phi(z)\right]^k=z^k$ olur. Bunu şöyle de gösterebiliriz.

$$A(t,z)=\frac{\psi'(t)}{\psi(t)-z}=\frac{t'}{t-z}=\frac{1}{t-z}=\frac{1}{t(1-\frac{z}{t})}=\frac{1}{t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{t^k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{t^{k+1}}$$

olur.

3.1.2 Örnek: Eğer G bölgesi $|z-z_0|<R_0$ diski ise bu diskin dışının $|w|>1$ bölgesine, $\phi(\infty)=\infty$ ve $\phi'(\infty)=\lim\limits_{z\to\infty}\frac{\phi(z)}{z}>0$ koşullarını sağlayan konform dönüşümü

$$w=\phi(z)=\frac{z-z_0}{R_0}$$

dir. Bu durumda her k doğal sayısı için

$$F_k(z)=\frac{1}{R_0^k}(z-z_0)^k$$

olur. Görüldüğü gibi $|z-z_0|<R_0$ diski için Faber polinomları konform dönüşüm fonksiyonun negatif olmayan tam kuvvetleridir ve $E_k(z)\equiv 0,\ k=0,1,2,...$

3.1.3 Örnek: $K=[-1,1]$ olsun. Bu durumda K kontinyumun dışının $|w|>1$ bölgesine,

$$\phi(\infty)=\infty \text{ ve } \phi'(\infty)=\lim_{z\to\infty}\frac{\phi(z)}{z}>0$$

koşulları altında konform dönüşümü $w=\phi(z)=z+\sqrt{z^2-1}$ şeklindedir. Karekök fonksiyonunun $\lim\limits_{z\to\infty}\frac{1}{z}\sqrt{z^2-1}=1$ koşulunu sağlayan dalını seçtiğimizde ϕ fonksiyonunun tersi

$$z=\psi(w)=\frac{1}{2}\left(w+\frac{1}{w}\right), \qquad |w|>1$$

Zhukovskii fonksiyonu olur. Bu fonksiyonu

$$\phi(t,z)=\frac{\psi'(t)}{\psi(t)-z}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{F_k(z)}{t^{k+1}}, \qquad z\in G_R, \quad |t|>R$$

formülünde yerine yazarsak

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)-z}=\frac{t^2-1}{t(t^2-2t+1)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{F_k(z)}{t^{k+1}}$$

olur. Buradan

$$\frac{t^2-1}{t(t^2-2t+1)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{F_k(z)}{t^k}, \qquad |t|>R, \quad \phi(z)<R$$

elde edilir. $t=\frac{1}{w}$ dersek

$$\frac{1-w^2}{1-2wz+w^2}=\sum_{k=0}^{\infty}w^kF_k(z), \quad |w|<1$$

olduğu görülür. Diğer yandan ortogonal polinomlar teorisinde ispatlanmıştır ki $T_k(x)=\cos(k\arccos x)$ biçiminde tanımlı Chebyshev polinomları için

$$\frac{1-w^2}{1-2wz+w^2}=T_0(z)+2\sum_{k=1}^{\infty}w^kT_k(z)$$

açılımı geçerlidir. Böylece

$$F_0(z)=T_0(z) \quad \text{ve} \quad F_k(z)=2\sum_{k=1}^{\infty}T_k(z)\ , \qquad k\geq 1$$

3.1.4 Örnek: $R>1$ olmak üzere düzlemde odakları ± 1 , yarı eksenleri

$$a=\frac{1}{2}\left(R+\frac{1}{R}\right),\qquad b=\frac{1}{2}\left(R-\frac{1}{R}\right),$$

elips verilsin. Bu elipsin denklemi

$$z=\frac{1}{2}\left(\mathrm{Re}^{i\theta}+\frac{1}{\mathrm{Re}^{i\theta}}\right),\qquad 0\le\theta\le 2\pi$$

şeklinde yazılabilir. Böylece konform dönüşüm fonksiyonu

$$z=\psi(w;R)=\frac{1}{2}\left(Rw+\frac{1}{Rw}\right),$$

$$w=\phi(z;R)=\frac{1}{2}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)$$

formülleri ile tanımlanabilir. Bu elips için Faber polinomları

$$F_k(z;R)=\frac{1}{R^k}F_k(z)=\frac{2}{R^k}T_k(z)\ ,\qquad k\ge 1$$

şeklinde bulunur.

3.1.5 Örnek: K kontinyumu

$$\left|z^p+a_{p-1}z^{p-1}+a_{p-2}z^{p-2}...+a_1z+a_0\right|\le a$$

koşulunu sağlayan noktalar kümesinin belirlediği p odaklı Lemniscate olsun. Bu durumda konform dönüşüm fonksiyonu

$$w=\phi(z)=\frac{z}{a}\left(1+\frac{a_{p-1}}{z}+\frac{a_{p-2}}{z^2}+...\frac{a_1}{z^{p-1}}+\frac{a_0}{z^p}\right)^{1/p},\qquad z\in D$$

dir. Kökün temel değerini alırsak ($\lim\limits_{z\to\infty}\left(1+\frac{a_{p-1}}{z}+...+\frac{a_0}{z^p}\right)^{1/p}=1$ olacak şekilde)

$$\phi^{mp}(z)=\frac{1}{a^{mp}}\left(z^p+a_{p-1}z^{p-1}+a_{p-2}z^{p-2}...+a_1z+a_0\right)^m\ ,m=1,2,...$$

$$F_{mp}(z)=\frac{1}{a^{mp}}\left(z^p+a_{p-1}z^{p-1}+a_{p-2}z^{p-2}...+a_1z+a_0\right)^m, m=1,2,...$$

olur. Bu örnekte $m=1,2,...$ iken mp mertebeli bütün faber polinomları hesaplanabilir. Özellikle eğer iki odaklı $|z^2-1|\le 1$ lemniscate verilirse $F_{2k}(z)=\left(z^2-1\right)^k$ elde edilir. Üstelik

$$\phi(z)=z\left(1-\frac{1}{z^2}\right)^{1/2}=z-\frac{1}{2z}-\frac{1}{8z^3}-\frac{1}{16z^5}+...$$

formülüne dayanarak küçük derecelerin tek Faber polinomları hesaplanabilir. Örneğin

$$F_1(z)=z\ ,\ F_3(z)=z^3-\frac{3}{2}z$$

elde ederiz

3.1.6 Örnek: $z=\psi(w)=w+\frac{1}{3w}$, $|w|>1$ (2.6)

fonksiyonu $|w|>1$ bölgesinde basit kutba sahip olduğu ∞ noktası hariç analitiktir. Bu fonksiyonda $w=e^{i\theta}$ yazarsak

$z=\psi\left(e^{i\theta}\right)=e^{i\theta}+\frac{1}{3e^{i\theta}}=\cos\theta+\sin\theta+\frac{1}{3}\left(\cos 3\theta-i\sin 3\theta\right)$ buluruz. Reel ve imajiner kısımları ayırarak $x=4\cos^3\theta$, $y=4\sin^3\theta$ astroid denklemlerini elde ederiz. Sınırların uygunluğu kuralına dayanarak (2.6) fonksiyonu $|w|>1$ bölgesini birebir ve konform olarak astroidin dışına dönüştürür. Faber polinomlarının üreteç fonksiyonunu hesaplayarak

$$\frac{\psi'(w)}{\psi(w)-z}=\frac{w^4-1}{w\left(w^4+\frac{1}{3}-zw^3\right)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{F_k(z)}{w^{k+1}}$$

elde ederiz.

Bu durumda z'nin keyfi değerleri için Faber polinomlarını yazmak kolay değildir. Sadelik için bu polinomun değerlerini $z=0$ için hesaplayalım. $z=0$ olduğunu farz edersek

$$\frac{w^4-1}{w^5}\frac{1}{1+\left(\frac{1}{3w^4}\right)}=\frac{w^4-1}{w^5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n 4^{4n}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n 4^{4n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n 4^{4n+5}}$$

elde ederiz. Bu açılımdan

$$F_{4k}(0)=\frac{(-1)^n}{3^n}-\frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}=(-1)^n\frac{4}{3^n}, \qquad n\geq 1$$

$$F_k(0)=0, \qquad k\neq 4n$$

olduğu görülür.

3.2 Genelleşmiş Faber Polinomlarının Tanımı

$g(z)$ ağırlık fonksiyonu D bölgesinde analitik ve $a_0=g(\infty)>0$ olsun. ϕ, D bölgesini $|w|>1$ bölgesine birebir ve konform resmeden,

$$\phi(\infty)=\infty \ , \ \phi'(\infty)=\lim_{z\to\infty}\frac{\phi(z)}{z}>0$$

koşularını sağlayan bir dönüşüm olsun. Bu durumda $k\in N$ için $g(z)[\phi(z)]^k$ fonksiyonu ∞ noktasında $k.$ mertebeden kutba sahiptir. Bu nedenle ∞ daki Laurent açılımı

$$g(z)[\phi(z)]^k=a_0\gamma^k z^k+a_{k-1}{}^{(k)}z^{k-1}+a_{k-2}{}^{(k)}z^{k-2}+...+a_1{}^{(k)}z+a_0{}^{(k)}+\frac{b_1{}^{(k)}}{z}+...+\frac{b_n{}^{(k)}}{z^k}+...$$

açılımı geçerlidir. Buradaki z'nin negatif olmayan kuvvetlerinden oluşan

$$F_k(z;g)=a_0\gamma^k z^k+a_{k-1}{}^{(k)}z^{k-1}+a_{k-2}{}^{(k)}z^{k-2}+...+a_1{}^{(k)}z+a_0{}^{(k)}$$

polinomuna $K=G\cup\Gamma$ kontinyumunun g ağırlık fonksiyonuna göre $k.$ mertebeden *geneleşmiş Faber polinomları* denir.

$$\frac{b_1{}^{(k)}}{z}+...+\frac{b_n{}^{(k)}}{z^k}+...$$

toplamını da $-E_k(z;g)$ ile gösterirsek

$$g(z)[\phi(z)]^k = F_k(z;g) - E_k(z;g)$$

eşitliğinden

$$F_k(z;g) = g(z)[\phi(z)]^k + E_k(z;g) \tag{3.7}$$

elde edilir.

3.2.1 Teorem: $\forall z \in G_R$ için

$$F_k(z;g) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{g(\zeta)[\phi(\zeta)]^k}{\zeta - z} d\zeta$$

olur.

İspat: $z \in G_R$ alalım.(3.7) den

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{g(z)[\phi(\zeta)]^k}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{F_k(\zeta;g)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{E_k(\zeta;g)}{\zeta - z} d\zeta$$

elde ederiz. Sınırsız bölgeler için Cauchy İntegral formülüne göre

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{E_k(\zeta;g)}{\zeta - z} d\zeta = E_k(\infty;g) = 0$$

olduğundan Cauchy İntegral formülüne göre

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{g(z)[\phi(\zeta)]^k}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{F_k(\zeta;g)}{\zeta - z} d\zeta = F_k(z;g)$$

olur.

3.2.2 Teorem: $\forall z \in D_R$ için

$$E_k(z;g) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{g(\zeta)[\phi(\zeta)]^k}{\zeta - z} d\zeta$$

olur.

İspat: $z \in D_R$ olsun. $E_k(z;g)$ fonksiyonu $\bar{D}_R$ bölgesinde analitiktir. Sınırsız bölgeler için Cauchy İntegral formülünden göre

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{E_k(\zeta;g)}{\zeta - z}d\zeta = E_k(\infty;g) - E_k(z;g)$$

elde edilir. $E_k(\infty;g) = 0$ olduğundan

$$E_{k,p}(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{E_k(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{F_k(\zeta) - g(z)[\phi(z)]^k}{\zeta - z}d\zeta$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{F_k(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{g(z)[\phi(z)]^k}{\zeta - z}d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{g(z)[\phi(z)]^k}{\zeta - z}d\zeta$$

olduğu görülür. Buradan

$$E_k(z;g) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{g(z)[\phi(z)]^k}{\zeta - z}d\zeta\ , \qquad z \in D_R$$

olur ve aşağıdaki integral gösterimleri elde edilmiş olur.

$$F_k(z;g) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{g(\zeta)[\phi(\zeta)]^k}{\zeta - z}d\zeta\ , \qquad z \in G_R \qquad (3.8)$$

$$E_k(z;g) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{g(\zeta)[\phi(\zeta)]^k}{\zeta - z}d\zeta\ , \qquad z \in D_R \qquad (3.9)$$

(3.8) ve (3.9) da $\zeta = \psi(t)$ dönüşümü yaparsak

$$F_k(z;g) = \frac{1}{2\pi i}\int_{t=|R|} t^k \frac{g(\psi(t))\psi'(t)}{\psi(t) - z}dt \qquad z \in G_R$$

$$E_k(z;g)=\frac{1}{2\pi i}\int_{t=|R|} t^k \frac{g(\psi(t))\psi'(t)}{\psi(t)-z}dt \qquad z\in D_R$$

olur. Buradan Laurent katsayılarının tanımına göre

$$A(t,z;g)=\frac{g(\psi(t))\psi'(t)}{\psi(t)-z}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{F_k(z;g)}{t^{k+1}}$$

elde edilir. Buradaki $A(t,z;g)$ fonksiyonuna $F_k(z;g)$ genelleşmiş Faber polinomunun üreteç fonksiyonu denir.

3.3 p-Faber Polinomlarının Tanımı

Γ ile sınırlı, basit bağlantılı bir G bölgesi verilsin. $\overline{G}=G\cup\Gamma$ kapalı bölgesinin tümleyeni D olsun$\left(D=C-\overline{G}\right)$. ϕ , D bölgesini $|w|>1$ bölgesine birebir ve konform resmeden,

$$\phi(\infty)=\infty \ , \ \phi'(\infty)=\lim_{z\to\infty}\frac{\phi(z)}{z}=\gamma>0$$

koşularını sağlayan bir dönüşüm ve $k\in N$, $p\in(1,\infty)$ olsun. $[\phi(z)]^k\sqrt[p]{\phi'(z)}$, ∞ 'un çıkarılmış komşuluğunda analitiktir ve ∞ noktasında bu fonksiyon k.mertebeden kutba sahiptir. Bu durumda ∞ ' daki Laurent açılımı;

$$[\phi(z)]^k\sqrt[p]{\phi'(z)}=\gamma_k z^k+\gamma_{k-1}z^{k-1}+\gamma_{k-2}z^{k-2}+...+\gamma_1 z+\gamma_0+\frac{\delta_1}{z}+\frac{\delta_2}{z^2}+...+\frac{\delta_k}{z^k}+...$$

olur. Bu eşitliğin sağındaki z ‘ nin negatif olmayan kuvvetlerinden oluşan

$$F_{k,p}(z)=\gamma_k z^k+\gamma_{k-1}z^{k-1}+\gamma_{k-2}z^{k-2}+...+\gamma_1 z+\gamma_0$$

polinomuna $\overline{G}$ kümesi için *k. dereceden p − Faber polinomu denir.*

$$\frac{\delta_1}{z}+\frac{\delta_2}{z^2}+...\frac{\delta_k}{z^k}+...$$

toplamını da $-E_{k,p}(z)$ ile gösterirsek

$$[\phi(z)]^k\sqrt[p]{\phi'(z)}=F_{k,p}(z)-E_{k,p}(z)$$

eşitliğinden

$$F_{k,p}(z)=[\phi(z)]^k \sqrt[p]{\phi'(z)}+E_{k,p}(z) \tag{3.10}$$

olur.

3.3.1 Teorem: $\forall z\in G_R$ için

$$F_k(z;g)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{g(\zeta)[\phi(\zeta)]^k}{\zeta-z}d\zeta$$

olur.

İspat: $z\in G_R$ alalım. (3.10) dan

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{[\phi(\zeta)]^k\sqrt[p]{\phi'(\zeta)}}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{F_{k,p}(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{E_{k,p}(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

elde ederiz. Sınırsız bölgeler için Cauchy integral formülüne göre

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{E_{k,p}(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=E_{k,p}(\infty)=0$$

olduğundan

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{[\phi(\zeta)]^k\sqrt[p]{\phi'(\zeta)}}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{F_{k,p}(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=F_{k,p}(z)\ , \qquad z\in G_R$$

olur.

3.3.2 Teorem: $\forall z\in D_R$ için

$$E_{k,p}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{[\phi(\zeta)]^k\sqrt[p]{\phi'(\zeta)}}{\zeta-z}d\zeta$$

olur.

İspat: $z\in D_R$ alalım. $E_{k,p}(z)$ fonksiyonu $\overline{D}_R$ bölgesinde analitiktir. Sınırsız bölgeler için Cauchy İntegral Formülüne göre

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{E_{k,p}(z)}{\zeta-z}d\zeta=E_{k,p}(\infty)-E_{k,p}(z)$$

elde edilir. $E_{k,p}(\infty)=0$ olduğundan

$$E_{k,p}(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{E_{k,p}(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{F_{k,p}(\zeta)-[\phi(\zeta)]^k\sqrt[p]{\phi'(\zeta)}}{\zeta-z}d\zeta$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{F_{k,p}(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{[\phi(\zeta)]^k\sqrt[p]{\phi'(\zeta)}}{\zeta-z}d\zeta$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{[\phi(\zeta)]^k\sqrt[p]{\phi'(\zeta)}}{\zeta-z}d\zeta$$

olduğu görülür. Buradan

$$E_{k,p}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{[\phi(\zeta)]^k\sqrt[p]{\phi'(\zeta)}}{\zeta-z}d\zeta \qquad z\in D_R$$

elde edilir. Sonuç olarak p-Faber polinmlarının aşağıdaki integral gösterimleri geçerlidir.

$$F_{k,p}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{[\phi(\zeta)]^k\sqrt[p]{\phi'(\zeta)}}{\zeta-z}d\zeta \qquad z\in G_R \qquad (3.11)$$

$$E_{k,p}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{[\phi(\zeta)]^k\sqrt[p]{\phi'(\zeta)}}{\zeta-z}d\zeta \qquad z\in D_R \qquad (3.12)$$

(3.11) eşitliğinde $w=\phi(\zeta)$ ve $\zeta=\psi(w)$ dönüşümü altında

$$F_{k,p}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{w=|R|}w^k\frac{\psi'(w)^{1-\frac{1}{p}}}{\psi(w)-z}dw$$

elde edilir ve buradan Laurent katsayılarının tanımına göre

$$A(w,z,p)=\frac{\psi'(w)^{1-\frac{1}{p}}}{\psi(w)-z}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{F_{k,p}(z)}{w^{k+1}}$$

elde edilir. Buradaki $A(w,z,p)$ fonksiyonuna $F_{k,p}(z)$ p-Faber polinomunun üreteç fonksiyonu denir.

3.4 *p*-Faber Esas Kısmının Tanımı

G sınırı sonlu uzunluklu kapalı Γ Jordon eğrisi olan sınırlı bir bölge olsun. ϕ_1 , G bölgesini U^- bölgesine

$$\phi_1(0)=\infty\ ,\ \ \phi_1^{'}(0)=\lim_{z\to 0} z\phi_1(z)>0$$

koşulları altında resmeden konform dönüşüm olsun. ψ_1 , ϕ_1'in ters dönüşümü ve $k\in Z^+$ olsun.

$\left[\phi_1(z)\right]^{k-\frac{2}{p}}\sqrt[p]{\phi_1^{'}(z)}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu fonksiyon $G\setminus\{0\}$ da analitiktir ve 0 noktasında k.mertebeden kutba sahiptir.

Bu fonksiyonun 0 noktasındaki Laurent açılımının esas kısmını $\tilde{F}_{k,p}\left(\frac{1}{z}\right)$ ile gösterirsek $\forall z\in G\setminus\{0\}$ için

$$\left[\phi_1(z)\right]^{k-\frac{2}{p}}\sqrt[p]{\phi_1^{'}(z)}=\tilde{F}_{k,p}\left(\frac{1}{z}\right)+\tilde{E}_{k,p}(z) \tag{3.13}$$

olacak şekilde G de analitik $\tilde{E}_{k,p}(z)$ fonksiyonu vardır. . Buradaki $\tilde{F}_{k,p}\left(\frac{1}{z}\right)$ rasyonel fonksiyonuna $k.$ dereceden $p-Faber\ Esas\ Kısmı$ denir.

R>1 ve $\forall z\in G^-$ için $\tilde{\Gamma}_R=\left\{\zeta\in G:\left|\phi_1(z)\right|=R\right\}$ eğrisine G bölgesinin seviye eğrisi denir. Her $\tilde{\Gamma}_R$ seviye çizgisi iki kanonik bölge tanımlanır; eğrinin içi $\tilde{G}_R$ ve eğrinin dışı $\tilde{D}_R$:

$$\tilde{G}_R:=\operatorname{int}\tilde{\Gamma}_R,\quad \tilde{D}_R:=ext\tilde{\Gamma}_R$$

3.4.1 Teorem: Her $z\in\tilde{D}_R$ için

$$\tilde{F}_{k,p}\left(\frac{1}{z}\right)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\Gamma}_R}\frac{\left[\phi_1(\zeta)\right]^{k-\frac{2}{p}}\sqrt[p]{\phi_1^{'}(\zeta)}}{\zeta-z}d\zeta$$

olur.

İspat: $z\in \tilde{D}_R$ alalım. (3.9) dan

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\Gamma}_R}\frac{\left[\phi_1(\zeta)\right]^{k-\frac{2}{p}}\sqrt[p]{\phi_1'(\zeta)}}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\Gamma}_R}\frac{\tilde{F}_{k,p}\left(1/\zeta\right)}{\zeta-z}d\zeta+\int_{\tilde{\Gamma}_R}\frac{\tilde{E}_{k,p}(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

olur. Cauchy integral teoremine göre

$$\int_{\tilde{\Gamma}_R}\frac{\tilde{E}_{k,p}(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=0$$

ve sınırsız bölgeler için Cauchy integral formülüne göre

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\Gamma}_R}\frac{\tilde{F}_{k,p}\left(1/\zeta\right)}{\zeta-z}d\zeta=\tilde{F}_{k,p}(\infty)-\tilde{F}_{k,p}\left(1/z\right)=-\tilde{F}_{k,p}\left(1/z\right)$$

olduğundan $R>1$ ve $\forall z\in \tilde{D}_R$ için

$$\tilde{F}_{k,p}\left(1/z\right)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\Gamma}_R}\frac{\left[\phi_1(\zeta)\right]^{k-\frac{2}{p}}\sqrt[p]{\phi_1'(\zeta)}}{\zeta-z}d\zeta$$

integral gösterimini elde ederiz.

3.4.2 Teorem: Her $z\in \tilde{G}_R$ için

$$\tilde{E}_{k,p}(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\Gamma}_R}\frac{\left[\phi_1(\zeta)\right]^{k-\frac{2}{p}}\sqrt[p]{\phi_1'(\zeta)}}{\zeta-z}d\zeta$$

olur.

İspat: $z\in \tilde{G}_R$ alalım. Sınırsız bölgeler için Cauchy İntegral formülüne göre

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\Gamma}_R}\frac{\tilde{F}_{k,p}\left(1/\zeta\right)}{\zeta-z}d\zeta=\tilde{F}_{k,p}(\infty)=0$$

ve Cauchy İntegral Formülüne göre

$$\int_{\tilde{\Gamma}_R} \frac{\tilde{E}_{k,p}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \tilde{E}_{k,p}(z)$$

olduğundan (2.13)' ten

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\Gamma}_R} \frac{[\phi_1(\zeta)]^{k-\frac{2}{p}} \sqrt[p]{\phi_1'(\zeta)}}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\Gamma}_R} \frac{\tilde{F}_{k,p}\left(\frac{1}{\zeta}\right) - \tilde{E}_{k,p}(z)}{\zeta - z} d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\Gamma}_R} \frac{\tilde{F}_{k,p}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{\tilde{\Gamma}_R} \frac{\tilde{E}_{k,p}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = -\int_{\tilde{\Gamma}_R} \frac{\tilde{E}_{k,p}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = -\tilde{E}_{k,p}(\zeta)$$

olur ve p-Faber esas kısmı için aşağıdaki integral gösterimleri elde edilmiş olur.

$$\tilde{F}_{k,p}\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\Gamma}_R} \frac{[\phi_1(\zeta)]^{k-\frac{2}{p}} \sqrt[p]{\phi_1'(\zeta)}}{\zeta - z} d\zeta \qquad z \in \tilde{D}_R \qquad (3.14)$$

$$\tilde{E}_{k,p}(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\Gamma}_R} \frac{[\phi_1(\zeta)]^{k-\frac{2}{p}} \sqrt[p]{\phi_1'(\zeta)}}{\zeta - z} d\zeta \qquad z \in \tilde{G}_R \qquad (3.15)$$

(3.14) ve (3.15) eşitliklerine $\phi_1(\zeta) = w$ ve $\zeta = \psi_1(w)$ dönüşümünü uygularsak

$$\tilde{F}_{k,p}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R} w^{k-\frac{2}{p}} \frac{\psi_1'(w)^{1-\frac{1}{p}}}{\psi_1(w) - z} dw$$

$$\tilde{E}_{k,p}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R} w^{k-\frac{2}{p}} \frac{\psi_1'(w)^{1-\frac{1}{p}}}{\psi_1(w) - z} dw$$

elde edilir.

4. FABER POLİNOMLARININ ASİMTOTİK ÖZELLİKLERİ

4.1 Teorem: K, bağlantılı D tümleyenine sahip sınırlı kontinyum ve $F_k(z)$, $k=0,1,2,,$ K kontinyumun Faber polinomları olmak üzere $\forall z\in K$ için

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{\left|F_{k,p}(z)\right|}\le 1$$

olur.

İspat: $z\in K$ olsun. $\varepsilon>0$ olmak üzere $R=1+\varepsilon$ olduğunu varsayalım. Bu durumda (3.4) ten $z\in K$ için

$$\left|F_k(z)\right|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{1+\varepsilon}}\frac{[\phi(\zeta)]^k}{\zeta-z}d\zeta\right|\le\left|\frac{1}{2\pi i}\right|\int_{\Gamma_{1+\varepsilon}}\frac{\left|[\phi(\zeta)]^k\right|}{|\zeta-z|}|d\zeta|\le\frac{(1+\varepsilon)^k}{2\pi}\frac{\ell(\Gamma_{1+\varepsilon})}{\rho(K,\Gamma_{1+\varepsilon})}$$

elde edilir.

Burada $\ell(\Gamma_{1+\varepsilon})$; $\Gamma_{1+\varepsilon}$ eğrisinin uzunluğunu, $\rho(K,\Gamma_{1+\varepsilon})$ da K kontinyumu ile $\Gamma_{1+\varepsilon}$ eğrisi arasındaki uzaklığı göstermektedir.

$$c(\varepsilon)=\frac{1}{(2\pi)}\frac{\ell(\Gamma_{1+\varepsilon})}{\rho(K,\Gamma_{1+\varepsilon})}$$

dersek

$$\left|F_k(z)\right|\le c(\varepsilon)(1+\varepsilon)^k\ , \qquad z\in K$$

olur. Bu eşitsizliğin her iki tarafının k. dereceden kökünü alırsak

$$\left|F_k(z)\right|^{\frac{1}{k}}\le[c(\varepsilon)]^{\frac{1}{k}}(1+\varepsilon)$$

olur. Bu eşitsizliğinde $k\to\infty$ için limit alırsak

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{\left|F_{k,p}(z)\right|}\le 1+\varepsilon$$

elde ederiz. ε keyfi küçüklükte olduğundan ve sol taraf ε'a bağlı olmadığından,

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{\left|F_{k,p}(z)\right|}\le 1 \quad , \qquad\qquad z\in K$$

elde ederiz.

4.2 Teorem: $1<r<R$ olacak şekilde r ve R iki sabit sayı olsun. $F_k(z)$ polinomları K kontinyumun Faber polinomları olmak üzere $\forall z\in \overline{D}_R$ için

$$F_k(z)=\left[\phi(z)\right]^k+O(r^k) \tag{4.1}$$

olur.

İspat: $z\in \overline{D}_R$ olsun. (3.5)'den

$$\left|E_k(z)\right|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r}\frac{\left[\phi(\zeta)\right]^k}{\zeta-z}d\zeta\right|\le\left|\frac{1}{2\pi i}\right|\int_{\Gamma_r}\frac{\left|\left[\phi(\zeta)\right]^k\right|}{\left|\zeta-z\right|}\left|d\zeta\right|\le\frac{1}{2\pi}\frac{r^k\ell(\Gamma_r)}{\rho(\Gamma_r,\Gamma_R)}$$

elde edilir. Burada $\ell(\Gamma_r)$; Γ_r eğrisinin uzunluğu , $\rho(\Gamma_r,\Gamma_R)$ de Γ_r ile Γ_R eğrisi arasındaki uzaklığı göstermektedir.

$$c(R,r):=\frac{1}{(2\pi)}\frac{\ell(\Gamma_r)}{\rho(\Gamma_r,\Gamma_R)}$$

dersek

$$\left|E_k(z)\right|\le c(R,r)r^k$$

olur. Buradan

$$E_k(z)=O(r^k)$$

olduğu görülür ve

$$F_k(z)=[\phi(z)]^k+E_k(z)$$

eşitliğinden

$$F_k(z)=[\phi(z)]^k+O\left(r^k\right)$$

elde edilir.

4.3 Teorem: $\forall z\in D$ için

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left|F_k(z)\right|}=\left|\phi(z)\right|$$

olur ve bu eşitlikteki yakınsama D içindeki her F kompaktında düzgündür.

İspat: $z\in\Gamma_R$ olsun. (4.1)'den

$$F_k(z)=\left[\phi(z)\right]^k\left[1+\frac{\mathrm{O}\left(r^k\right)}{\left[\phi(z)\right]^k}\right]=\left[\phi(z)\right]^k\left[1+\frac{O\left(r^k\right)}{O\left(R^k\right)}\right]=\left[\phi(z)\right]^k\left[1+\mathrm{O}\left(\frac{r^k}{R^k}\right)\right]$$

olur. Buradan

$$\Rightarrow\frac{F_k(z)}{\left[\phi(z)\right]^k}=1+\mathrm{O}\left(\frac{r^k}{R^k}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{F_k(z)}{\left[\phi(z)\right]^k}-1=\mathrm{O}\left(\frac{r^k}{R^k}\right)$$

$$\Rightarrow\left|\frac{F_k(z)}{\left[\phi(z)\right]^k}-1\right|\le c\frac{r^k}{R^k}$$

$$\Rightarrow \left| \left| \frac{F_k(z)}{[\phi(z)]^k} \right| - 1 \right| \leq \left| \frac{F_k(z)}{[\phi(z)]^k} - 1 \right| \leq c \frac{r^k}{R^k}$$

$$\Rightarrow -c \frac{r^k}{R^k} \leq \left| \frac{F_k(z)}{[\phi(z)]^k} \right| - 1 \leq c \frac{r^k}{R^k}$$

$$\Rightarrow 1 - c \frac{r^k}{R^k} \leq \left| \frac{F_k(z)}{[\phi(z)]^k} \right| \leq 1 + c \frac{r^k}{R^k}$$

elde edilir.

$$c_1(R) = 1 - c \frac{r^k}{R^k} \ , c_2(R) = 1 + c \frac{r^k}{R^k}$$

denirse

$$c_1(R) \leq \frac{|F_k(z)|}{R^k} \leq c_2(R)$$

$$\Rightarrow c_1(R) \leq \frac{|F_k(z)|}{R^k} \leq c_2(R)$$

$$\Rightarrow R^k c_1(R) \leq |F_k(z)| \leq R^k c_2(R)$$

olur. Bu eşitsizliğin her üç tarafının k. dereceden kökünün alırsak

$$R[c_1(R)]^{\frac{1}{k}} \leq \sqrt[k]{|F_k(z)|} \leq [c(R)]^{\frac{1}{k}} R$$

elde edilir. $k \to \infty$ için limit aldığımızda

$$R \leq \lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{|F_k(z)|} \leq R$$

$$\lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{|F_k(z)|} = R = |\phi(z)|$$

$$\lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{|F_k(z)|} = R = |\phi(z)|, \qquad z \in D$$

elde edilir. Bu eşitlikteki yakınsama D içindeki her F kompaktında düzgündür.

4.4 Teorem: $\forall z \in D$ için

$$\lim_{k\to\infty}\frac{F_{k+1}(z)}{F_k(z)}=\phi(z)$$

olur ve bu yakınsama D içindeki her F kompaktında düzgündür.

İspat: $z\in\Gamma_R$ alalım.

$$\left[\phi(z)\right]^k=E_k(z)+F_k(z)$$

eşitliğini kullanarak

$$\frac{F_{k+1}(z)}{F_k(z)}=\frac{\left[\phi(z)\right]^{k+1}+O\left(r^{k+1}\right)}{\left[\phi(z)\right]^k+O\left(r^k\right)}=\frac{\left[\phi(z)\right]^{k+1}\left[1+\dfrac{O\left(r^{k+1}\right)}{\left[\phi(z)\right]^{k+1}}\right]}{\left[\phi(z)\right]^k\left[1+\dfrac{O\left(r^k\right)}{\left[\phi(z)\right]^k}\right]}$$

$$=\phi(z)\frac{1+\dfrac{O\left(r^{k+1}\right)}{O\left(R^{k+1}\right)}}{1+\dfrac{O\left(r^k\right)}{O\left(R^k\right)}}=\phi(z)\frac{1+O\left(\dfrac{r^{k+1}}{R^{k+1}}\right)+O\left(\dfrac{r^k}{R^k}\right)-O\left(\dfrac{r^k}{R^k}\right)}{1+O\left(\dfrac{r^k}{R^k}\right)}$$

$$=\phi(z)\left[1+\frac{O\left(\dfrac{r^{k+1}}{R^{k+1}}\right)-O\left(\dfrac{r^k}{R^k}\right)}{1+O\left(\dfrac{r^k}{R^k}\right)}\right]=\phi(z)+\phi(z)\left[\frac{O\left(\dfrac{r^{k+1}}{R^{k+1}}\right)-O\left(\dfrac{r^k}{R^k}\right)}{1+O\left(\dfrac{r^k}{R^k}\right)}\right]$$

elde ederiz. Diğer taraftan

$$\left|\phi(z)\frac{O\left(\dfrac{r^{k+1}}{R^{k+1}}\right)-O\left(\dfrac{r^k}{R^k}\right)}{1+O\left(\dfrac{r^k}{R^k}\right)}\right|\le\left|\phi(z)\right|\left|O\left(\frac{r^{k+1}}{R^{k+1}}\right)-O\left(\frac{r^k}{R^k}\right)\right|$$

$$\le\left|\phi(z)\right|O\left(\frac{r^k}{R^k}\right)=RO\left(\frac{r^k}{R^k}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{F_{k+1}(z)}{F_k(z)} = \phi(z) + \phi(z)\frac{\mathrm{O}\left(\dfrac{r^{k+1}}{R^{k+1}}\right) - \mathrm{O}\left(\dfrac{r^k}{R^k}\right)}{1+\mathrm{O}\left(\dfrac{r^k}{R^k}\right)} = \phi(z) + \mathrm{O}\left(\frac{r^k}{R^k}\right), \qquad z \in \Gamma_R$$

olduğu görülür. Buradan $k \to \infty$ için limit alırsak

$$\lim_{k\to\infty} \frac{F_{k+1}(z)}{F_k(z)} = \phi(z), \qquad z \in D$$

elde edilir. D içindeki her F kompaktında bu yakınsama düzgündür.

Genelleşmiş Faber ve p-Faber polinomları için asmiptotik özellikler benzer yöntemlerle elde edilmiştir.

Genelleşmiş Faber Polinomlarının Asimptotik Özellikleri

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\left|F_k(z;g)\right|} \le 1 \quad , \qquad z \in K$$

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|F_k(z;g)\right|} = \left|\phi(z)\right|, \qquad z \in D$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{F_{k+1}(z;g)}{F_k(z;g)} = \phi(z), \qquad z \in D$$

p- Faber Polinomlarının Asimptotik Özellikleri

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\left|F_{k,p}(z)\right|} \le 1 \quad , \qquad z \in K$$

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|F_{k,p}(z)\right|} = \left|\phi(z)\right|, \qquad z \in D$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{F_{k+1,p}(z)}{F_{k,p}(z)} = \phi(z), \qquad z \in D$$

5. P-FABER ESAS KISMININ ASİMPTOTİK ÖZELLİKLERİ

Faber, Genelleşmiş Faber ve p-Faber polinomları için elde edilmiş olan asimptotik özelliklerin benzerleri p-Faber esas kısmı için de elde edilebilir.

5.1 Teorem: G sınırlı bir bölge ve $\tilde{F}_{k,p}\left(\frac{1}{z}\right)$ $k = 0,1,2,...$ için G bölgesinin p-Faber esas kısmı olmak üzere $\forall z \in CG$ için

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\left|\tilde{F}_{k,p}\left(\frac{1}{z}\right)\right|} \leq 1$$

olur.

İspat: $z \in CG$ olsun. $\varepsilon > 0$ olmak üzere (3.10) eşitliğinde $R = 1+\varepsilon$ olduğunu varsayalım. Bu durumda,

$$\left|\tilde{F}_{k,p}\left(\frac{1}{z}\right)\right| = \left| -\frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\Gamma}_{1+\varepsilon}} \frac{\left[\phi_1(\zeta)\right]^{k-\frac{2}{p}} \sqrt[p]{\phi_1'(\zeta)}}{\zeta - z} d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{(1+\varepsilon)^{k-\frac{2}{p}}}{\rho\left(CG, \Gamma_{1+\varepsilon}\right)} \int_{\tilde{\Gamma}_{1+\varepsilon}} \left|\sqrt[p]{\phi_1'(\zeta)}\right| |d\zeta| \tag{5.1}$$

elde edilir. Burada $\rho\left(G^{-}, \Gamma_{1+\varepsilon}\right)$; CG ile $\Gamma_{1+\varepsilon}$ arasındaki uzaklğı göstermektedir. (5.1) de eşitsizliğinin sağındaki integrale Hölder eşitsizliğini uygularsak

$$\int_{\tilde{\Gamma}_{1+\varepsilon}} \left|\sqrt[p]{\phi_1'(\zeta)}\right| d\zeta \leq \left(\int_{\tilde{\Gamma}_{1+\varepsilon}} \left|\phi_1'(\zeta)\right| |d\zeta| \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\tilde{\Gamma}_{1+\varepsilon}} |d\zeta| \right)^{\frac{1}{q}}$$

olur. $\phi_1(\zeta) = \omega$ $\phi_1'(\zeta) d\zeta = d\omega$ dönüşümü altında

$$\int_{\tilde{\Gamma}_{1+\varepsilon}} \left|\sqrt[p]{\phi_1'(\zeta)}\right| d\zeta \leq \left(\int_{|\omega|=1+\varepsilon} |dw| \right)^{\frac{1}{p}} \left[\ell\left(\tilde{\Gamma}_{1+\varepsilon}\right)\right]^{\frac{1}{q}} = (2\pi)^{\frac{1}{p}} (1+\varepsilon)^{\frac{1}{p}} \left[\ell\left(\tilde{\Gamma}_{1+\varepsilon}\right)\right]^{\frac{1}{q}}$$

olur. Burada Bu eşitsizliği (5.1) de yerine yazarsak

$$\left|\tilde{F}_{k,p}\left(\frac{1}{z}\right)\right| \leq (2\pi)^{\frac{1}{p}} (1+\varepsilon)^{\frac{1}{p}} \left[\ell\left(\tilde{\Gamma}_{1+\varepsilon}\right)\right]^{\frac{1}{q}} \frac{1}{2\pi} \frac{(1+\varepsilon)^{k-\frac{2}{p}}}{\rho\left(CG,\Gamma_{1+\varepsilon}\right)}$$

elde edilir. Burada $\ell\left(\tilde{\Gamma}_{1+\varepsilon}\right)$, $\tilde{\Gamma}_{1+\varepsilon}$ eğrisinin uzunluğudur.

$$c(\varepsilon,p) = (2\pi)^{\frac{1}{p}} \left[\ell\left(\tilde{\Gamma}_{1+\varepsilon}\right)\right]^{\frac{1}{q}} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\rho\left(CG,\Gamma_{1+\varepsilon}\right)}$$

dersek

$$\left|\tilde{F}_{k,p}\left(\frac{1}{z}\right)\right| \leq c(\varepsilon,p)(1+\varepsilon)^{k-\frac{1}{p}}$$

olur. Her iki tarafın da k. dereceden kökünü aldığımızda

$$\sqrt[k]{\left|\tilde{F}_{k,p}\left(\frac{1}{z}\right)\right|} \leq \sqrt[k]{c(\varepsilon,p)}\,(1+\varepsilon)^{1-\frac{1}{pk}}$$

elde edilir ve $k \to \infty$ için limit alınırsa

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\left|\tilde{F}_{k,p}\left(\frac{1}{z}\right)\right|} \leq (1+\varepsilon)$$

olur. Son olarak $\varepsilon \to 0$ için

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\tilde{F}_{k,p}\left(\frac{1}{z}\right)\right|} \leq 1$$

olur ve ispat tamamlanmış olur.

5.2 Teorem: $1 < r < R$ olacak şekilde r ve R iki sabit sayı olsun. $\tilde{F}_{k,p}\left(\frac{1}{z}\right)$ G bölgesinin p-Faber esas kısmı olmak üzere, $\forall z \in \overline{\tilde{G}}_R$ için

$$\tilde{F}_{k,p}\left(\frac{1}{z}\right) = \left[\phi_1(z)\right]^{k-\frac{2}{p}} \sqrt[p]{\phi_1'(z)} + O\left(r^k\right)$$

olur.

İspat: $z \in \overline{\tilde{G}}_R$ olsun. (3.11) den

$$\left|\tilde{E}_{k,p}(z)\right| = \left| -\frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\Gamma}_r} \frac{\left[\phi_1(\zeta)\right]^{k-\frac{2}{p}} \sqrt[p]{\phi_1'(\zeta)}}{\zeta - z} d\zeta \right|$$

$$\leq \left| -\frac{1}{2\pi i} \right| \int_{\tilde{\Gamma}_r} \frac{\left|\left[\phi_1(\zeta)\right]^{k-\frac{2}{p}}\right| \left|\sqrt[p]{\phi_1'(\zeta)}\right|}{|\zeta - z|} |d\zeta| = \frac{1}{2\pi} \frac{r^{k-\frac{2}{p}}}{\rho\left(\tilde{\Gamma}_R, \tilde{\Gamma}_r\right)} \int_{\tilde{\Gamma}_r} \left|\phi_1'(\zeta)\right|^{\frac{1}{p}} |d\zeta|$$

olur. Hölder eşitsizliğinden

$$\int_{\tilde{\Gamma}_r} \left|\phi_1'(\zeta)\right|^{\frac{1}{p}} |d\zeta| \leq \left(\int_{\tilde{\Gamma}_r} \left|\phi_1'(\zeta)\right| |d\zeta| \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\tilde{\Gamma}_r} |d\zeta| \right)^{\frac{1}{q}}$$

elde ederiz . $\phi_1(\zeta) = \omega$ ve $\phi_1'(\zeta) d\zeta = d\omega$ dönüşümü altında

$$\int_{\tilde{\Gamma}_r} \left|\phi_1'(\zeta)\right|^{\frac{1}{p}} |d\zeta| \leq \left(\int_{|\omega|=r} |d\omega| \right)^{\frac{1}{p}} \left[\ell\left(\tilde{\Gamma}_r\right)\right]^{\frac{1}{q}} = (2\pi)^{\frac{1}{p}} r^{\frac{1}{p}} \left[\ell\left(\tilde{\Gamma}_r\right)\right]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Burada $\ell\left(\tilde{\Gamma}_r\right)$, $\tilde{\Gamma}_r$ eğrisinin uzunluğudur. Sonuç olarak,

$$\left|\tilde{E}_{k,p}(z)\right| \leq (2\pi)^{\frac{1}{p}} r^{\frac{1}{p}} \left[\ell\left(\tilde{\Gamma}_r\right)\right]^{\frac{1}{q}} \frac{1}{2\pi} \frac{r^{k-\frac{2}{p}}}{\rho\left(\tilde{\Gamma}_R, \tilde{\Gamma}_r\right)}$$

olur.

$$C(R, r, p) = (2\pi)^{\frac{1}{p}-1} \left[\ell\left(\tilde{\Gamma}_r\right)\right]^{\frac{1}{q}} \frac{(r)^{-\frac{1}{p}}}{\rho\left(\tilde{\Gamma}_R, \tilde{\Gamma}_r\right)}$$

aldığımızda

$$\Rightarrow \left|\tilde{E}_{k,p}(z)\right| \leq C(R, r, p) r^k$$

$$\Rightarrow \tilde{E}_{k,p}(z) = O(r^k)$$

olur ve (3.9) eşitliğini kullanarak

$$\tilde{F}_{k,p}\left(\frac{1}{z}\right) = \left[\phi_1(z)\right]^{k-\frac{2}{p}} \sqrt[p]{\phi_1'(z)} + O\left(r^k\right), \quad z \in \bar{\tilde{G}}_R, \ 1 < r < R \tag{5.2}$$

asimptotik formülünü elde ederiz ki bu da ispatı tamamlar.

5.3 Teorem: $\forall z \in G$ için

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\tilde{F}_{k,p}\left(\frac{1}{z}\right)\right|} = \left|\phi_1(z)\right|$$

olur ve bu eşitlikteki yakınsama G nin her kompakt alt kümesi üzerinde düzgün yakınsaktır.

İspat: $z \in \tilde{\Gamma}_R$ olsun. (5.2)'den

$$\tilde{F}_{k,p}\left(\frac{1}{z}\right) = \left(\phi_1(z)\right)^k \left[\left(\phi_1'(z)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\phi_1(z)\right)^{-\frac{2}{p}} + \frac{O\left(r^k\right)}{\left(\phi_1(z)\right)^k}\right]$$

$$= \left(\phi_1(z)\right)^k \left[\left(\phi_1'(z)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\phi_1(z)\right)^{-\frac{2}{p}} + \frac{O\left(r^k\right)}{O\left(R^k\right)}\right]$$

dır. Buradan

$$\frac{\tilde{F}_{k,p}\left(\frac{1}{z}\right)}{\left(\phi_1(z)\right)^k} = \left(\phi_1'(z)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\phi_1(z)\right)^{-\frac{2}{p}} + \frac{O\left(r^k\right)}{O\left(R^k\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{\tilde{F}_{k,p}\left(\frac{1}{z}\right)}{\left(\phi_1(z)\right)^k} - \left(\phi_1'(z)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\phi_1(z)\right)^{-\frac{2}{p}} = \frac{O\left(r^k\right)}{O\left(R^k\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{\tilde{F}_{k,p}\left(\frac{1}{z}\right)}{\left(\phi_1(z)\right)^k} - \left(\phi_1'(z)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\phi_1(z)\right)^{-\frac{2}{p}} = O\left(\frac{r^k}{R^k}\right)$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\tilde{F}_{k,p}\left(\frac{1}{z}\right)}{\left(\phi_1(z)\right)^k} - \left(\phi_1'(z)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\phi_1(z)\right)^{-\frac{2}{p}} \right| \leq c\frac{r^k}{R^k}$$

$$\Rightarrow \left| \left| \frac{\tilde{F}_{k,p}\left(\frac{1}{z}\right)}{\left(\phi_1(z)\right)^k} \right| - \left| \left(\phi_1'(z)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\phi_1(z)\right)^{-\frac{2}{p}} \right| \right| \leq c\frac{r^k}{R^k}$$

$$\Rightarrow -c\frac{r^k}{R^k} \leq \left| \frac{\tilde{F}_{k,p}\left(\frac{1}{z}\right)}{\left(\phi_1(z)\right)^k} \right| - \left| \left(\phi_1'(z)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\phi_1(z)\right)^{-\frac{2}{p}} \right| \leq c\frac{r^k}{R^k}$$

$$\Rightarrow \left| \left(\phi_1'(z)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\phi_1(z)\right)^{-\frac{2}{p}} \right| - c\frac{r^k}{R^k} \leq \left| \frac{\tilde{F}_{k,p}\left(\frac{1}{z}\right)}{\left(\phi_1(z)\right)^k} \right| \leq c\frac{r^k}{R^k} + \left| \left(\phi_1'(z)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\phi_1(z)\right)^{-\frac{2}{p}} \right|$$

elde ederiz. $\phi_1'(z) \neq 0$, $\forall z \in \tilde{\Gamma}_R$ için $0 < c_1(p) \leq \left| \left(\phi_1'(z)\right)^{1/p} \right| \leq c_2(p) < \infty$ olacak şekildeki $c_1(p)$ ve $c_2(p)$ sabitleri vardır. Dolayısıyla, 1

$$\left(\phi_1'(z)\right)^{\frac{1}{p}} R^{\frac{-2}{p}} - c\frac{r^k}{R^k} \leq \frac{\left|\tilde{F}_{k,p}\left(\frac{1}{z}\right)\right|}{\left|\left(\phi_1(z)\right)^k\right|} \leq c\frac{r^k}{R^k} + R^{\frac{-2}{p}}\left(\phi_1'(z)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$c_1(R,p) - c\frac{r^k}{R^k} \leq \frac{\left|\tilde{F}_{k,p}\left(\frac{1}{z}\right)\right|}{\left|\left(\phi_1(z)\right)^k\right|} \leq c\frac{r^k}{R^k} + c_2(R,p)$$

olur.

$$c_3(R,r,p) = c_1(R,p) - c\frac{r^k}{R^k} \quad \text{ve} \quad c_4(R,r,p) = c\frac{r^k}{R^k} + c_2(R,p)$$

denilirse

$$c_3(R,r,p) \leq \frac{\left|\tilde{F}_{k,p}\left(\frac{1}{z}\right)\right|}{\left|\left(\phi_1(z)\right)^k\right|} \leq c_4(R,r,p)$$

$$c_3(R,r,p) \leq \frac{\left|\tilde{F}_{k,p}\left(\frac{1}{z}\right)\right|}{R^k} \leq c_4(R,r,p)$$

$$R^k c_3(R,r,p) \leq \left|\tilde{F}_{k,p}\left(\frac{1}{z}\right)\right| \leq c_4(R,r,p) R^k$$

Bu eşitsizliğin her üç tarafının k. dereceden kökünü alırsak

$$Rc_3(R,r,p)^{\frac{1}{k}} \leq \sqrt[k]{\left|\tilde{F}_{k,p}\left(\frac{1}{z}\right)\right|} \leq Rc_4(R,r,p)^{\frac{1}{k}}$$

olduğu görülür. $k \to \infty$ için limit aldığımızda

$$R \leq \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\tilde{F}_{k,p}\left(\frac{1}{z}\right)\right|} \leq R$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\tilde{F}_{k,p}\left(\frac{1}{z}\right)\right|} = R = |\phi_1(z)|$$

elde edilir ve bu yakınsama G nin her kompact alt kümesi üzerinde düzgündür.

4.4 Teorem: $\forall z \in D$ için

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\tilde{F}_{k+1,p}\left(\frac{1}{z}\right)}{\tilde{F}_{k,p}\left(\frac{1}{z}\right)} = \phi_1(z)$$

olur ve bu eşitlikteki yakınsama G nin her kompakt alt kümesi üzerinde düzgündür.

İspat: $z \in \tilde{\Gamma}_R$ olsun. k ve $k+1$ için (5.2)'den

$$\frac{\tilde{F}_{k+1,p}\left(\frac{1}{z}\right)}{\tilde{F}_{k,p}\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{\left[(\phi_1'(z))^{\frac{1}{p}}(\phi_1(z))^{k+1-\frac{2}{p}} + O(r^{k+1})\right]}{\left[(\phi_1'(z))^{\frac{1}{p}}(\phi_1(z))^{k-\frac{2}{p}} + O(r^{k})\right]}$$

$$= \frac{(\phi_1(z))^{k+1}\left[(\phi_1'(z))^{\frac{1}{p}}(\phi_1(z))^{-\frac{2}{p}} + \frac{O(r^{k+1})}{(\phi_1(z))^{k+1}}\right]}{(\phi_1(z))^{k}\left[(\phi_1'(z))^{\frac{1}{p}}(\phi_1(z))^{-\frac{2}{p}} + \frac{O(r^{k})}{(\phi_1(z))^{k}}\right]}$$

$$=\phi_1(z)\frac{\left(\phi_1'(z)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\phi_1(z)\right)^{-\frac{2}{p}}+\dfrac{O\left(r^{k+1}\right)}{\left(\phi_1(z)\right)^{k+1}}}{\left(\phi_1'(z)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\phi_1(z)\right)^{-\frac{2}{p}}+\dfrac{O\left(r^{k}\right)}{\left(\phi_1(z)\right)^{k}}}$$

$$=\phi_1(z)\frac{\left(\phi_1'(z)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\phi_1(z)\right)^{-\frac{2}{p}}+\dfrac{O\left(r^{k+1}\right)}{O\left(R^{k+1}\right)}}{\left(\phi_1'(z)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\phi_1(z)\right)^{-\frac{2}{p}}+\dfrac{O\left(r^{k}\right)}{O\left(R^{k}\right)}}$$

$$=\phi_1(z)\frac{\left(\phi_1'(z)\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left(\phi_1(z)\right)^{-\frac{2}{p}}+\dfrac{O\left(r^{k+1}\right)}{O\left(R^{k+1}\right)\left(\phi_1'(z)\right)^{\frac{1}{p}}}\right]}{\left(\phi_1'(z)\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left(\phi_1(z)\right)^{-\frac{2}{p}}+\dfrac{O\left(r^{k}\right)}{O\left(R\right)^{k}\left(\phi_1'(z)\right)^{\frac{1}{p}}}\right]}$$

$$=\phi_1(z)\frac{\left(\phi_1(z)\right)^{-\frac{2}{p}}+\dfrac{O\left(r^{k+1}\right)}{O\left(R^{k+1}\right)\left(\phi_1'(z)\right)^{\frac{1}{p}}}}{\left(\phi_1(z)\right)^{-\frac{2}{p}}+\dfrac{O\left(r^{k}\right)}{O\left(R^{k}\right)\left(\phi_1'(z)\right)^{\frac{1}{p}}}}$$

olur ve $z\in\tilde{\Gamma}_R$, $\phi_1'(z)\neq 0$ olduğundan $0<c_1\leq\left|\left(\phi_1'(z)\right)^{\frac{1}{p}}\right|\leq c_2<\infty$ olacak şekilde c_1 ve c_2 sabitleri bulunabilir. Böylece

$$\frac{\tilde{F}_{k+1,p}\left(1/z\right)}{\tilde{F}_{k,p}\left(1/z\right)}=\phi_1(z)\frac{\left(\phi_1(z)\right)^{-\frac{2}{p}}+\dfrac{O\left(r^{k+1}\right)}{O\left(R^{k+1}\right)}}{\left(\phi_1(z)\right)^{-\frac{2}{p}}+\dfrac{O\left(r^{k}\right)}{O\left(R^{k}\right)}}$$

$$=\phi_1(z)\frac{(\phi_1(z))^{-\frac{2}{p}}\left[1+\frac{\mathrm{O}(r^{k+1})}{\mathrm{O}(R^{k+1})(\phi_1(z))^{-\frac{2}{p}}}\right]}{(\phi_1(z))^{-\frac{2}{p}}\left[1+\frac{\mathrm{O}(r^{k})}{\mathrm{O}(R^{k})(\phi_1(z))^{-\frac{2}{p}}}\right]}=\phi_1(z)\frac{\left[1+\frac{\mathrm{O}(r^{k+1})}{\mathrm{O}(R^{k+1})(\phi_1(z))^{-\frac{2}{p}}}\right]}{\left[1+\frac{\mathrm{O}(r^{k})}{\mathrm{O}(R^{k})(\phi_1(z))^{-\frac{2}{p}}}\right]}$$

$$=\phi_1(z)\frac{1+\frac{\mathrm{O}(r^{k+1})}{\mathrm{O}(R^{k+1})(\phi_1(z))^{-\frac{2}{p}}}}{1+\frac{\mathrm{O}(r^{n})}{\mathrm{O}(R^{k})(\phi_1(z))^{-\frac{2}{p}}}}$$

$$=\phi_1(z)\frac{1+\frac{\mathrm{O}(r^{k+1})}{\mathrm{O}(R^{k+1})(\phi_1(z))^{-\frac{2}{p}}}-\frac{\mathrm{O}(r^{k})}{\mathrm{O}(R^{k})(\phi_1(z))^{-\frac{2}{p}}}+\frac{\mathrm{O}(r^{k})}{\mathrm{O}(R^{k})(\phi_1(z))^{-\frac{2}{p}}}}{1+\frac{\mathrm{O}(r^{k})}{\mathrm{O}(R^{k})(\phi_1(z))^{-\frac{2}{p}}}}$$

$$=\phi_1(z)\left[1+\frac{\frac{\mathrm{O}(r^{k+1})}{\mathrm{O}(R^{k+1})(\phi_1(z))^{-\frac{2}{p}}}-\frac{\mathrm{O}(r^{k})}{\mathrm{O}(R^{k})(\phi_1(z))^{-\frac{2}{p}}}}{1+\frac{\mathrm{O}(r^{k})}{\mathrm{O}(R^{k})(\phi_1(z))^{-\frac{2}{p}}}}\right]$$

elde edilir. Buradan ise

$$\left|\phi_1(z)\frac{\frac{\mathrm{O}(r^{k+1})}{\mathrm{O}(R^{k+1})(\phi_1(z))^{-\frac{2}{p}}}-\frac{\mathrm{O}(r^{k})}{\mathrm{O}(R^{k})(\phi_1(z))^{-\frac{2}{p}}}}{1+\frac{\mathrm{O}(r^{k})}{\mathrm{O}(R^{k})(\phi_1(z))^{-\frac{2}{p}}}}\right|$$

$$\leq|\phi_1(z)|\left|\frac{\mathrm{O}(r^{k+1})}{\mathrm{O}(R^{k+1})(\phi_1(z))^{-\frac{2}{p}}}-\frac{\mathrm{O}(r^{k})}{\mathrm{O}(R^{k})(\phi_1(z))^{-\frac{2}{p}}}\right|$$

$$\leq |\phi_1(z)| \left| \frac{O(r^k)}{O(R^k)(\phi_1(z))^{-\frac{2}{p}}} \right| = \left| \frac{O(r^k)}{O(R^k)} \right| R^{1+\frac{1}{p}}$$

olur. Böylece

$$\frac{\tilde{F}_{k+1,p}\left(\frac{1}{z}\right)}{\tilde{F}_{k,p}\left(\frac{1}{z}\right)} = \phi_1(z) + \phi_1(z)\left[\frac{\frac{O(r^{k+1})}{O(R^{k+1})} - \frac{O(r^k)}{O(R^k)}}{1 + \frac{O(r^k)}{O(R^k)}} \right] = (\phi_1(z)) + O\left(\frac{r^k}{R^k}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\tilde{F}_{k+1,p}\left(\frac{1}{z}\right)}{\tilde{F}_{k,p}\left(\frac{1}{z}\right)} = \phi_1(z) + O\left(\frac{r^k}{R^k}\right)$$

olur ve bu eşitlikte $k \to \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\tilde{F}_{k+1,p}\left(\frac{1}{z}\right)}{\tilde{F}_{k,p}\left(\frac{1}{z}\right)} = \phi_1(z)$$

elde edilir ve teorem ispatlanmış olur.

SONUÇ

Bu tez çalışmasında elde edilen yeni sonuçlar 5.bölümde bulunmaktadır. Faber polinomları, genelleşmiş Faber polinomları ve p-Faber polinomları için elde edilmiş olan asimptotik özelliklerin benzerlerinin p-Faber esas kısmı için de geçerli olduğu ispatlanmıştır.

Ayrıca Faber polinomlarının diğer ileri asimptotik özelliklerinin p-Faber polinomları ve p-Faber esas kısmı için de geçerli olduğu ispatlanabilir.

KAYNAKLAR

[1] Pommerenke, C., Univalent functions, Vandenhoeck & Ruprecht (1975)

[2] Başkan, T., Kompleks fonksiyonlar teorisi, Vipaş A.Ş, Bursa ,(2000)

[3] Lehto, O. and Virtanen, K., Quasiconformal mapping in the plane, Springer-Verlag(1973).

[4] Markushevich, A.I., Theory of functions of a comlex variable III, Chelsea ,Publising Company, New York, (1977).

[5] Suetin, P.K., Series of Faber polynomials, Gordon and Breach Science Publisher (1998).

[6] Gonzales ,M.O., Classical complex analysis, Marcel Dekker, Inc (1992).

[7] Gonzalez, G.M, Geometric theory of a Complex Variable, Translations of Mathemtical Monographs, Vol.26, Amer.Math.soc(1969).

[8] Bartolomeo, J. , He, M. On Faber polynomials generated by an *m-star, Mathem.Comput.* 62(1994),277-297.

[9] Brui, I.N The Faber series, Textboo, Gomel Universty pres, Gomel,1983.

[10] Coleman, J.P.& Smith, R.A. , The Faber polynomials for circular setions, *Mathem.Comput.* 49(1987), 231-241.

[11] Dodunova, L.K. , Faber polynomials calculating algortihms, In: Abstracts of the second International Conference: Mathematical algorithms N.Novgorod, June 26-July 1, 1995, Nizhny Novgorod, 199, p.18

[12] Ewing, J.H& Schober, G. On the coefficients of the mapping to the eterior of the Mandelbrot set , *Michigan Mathem.* Journal 37 (1990), 315-320.

[13] Gatermann, K. Hofmann, C.Opfer, G.,Explicit Faber polynomials on circular sector, *Mathem.Comput.* 58 (1992), 241-253

[14] He, M.X.&Saff, E.B. The zeros of Faber polynomials for an m-cusped Hypocyscloid, *Journal of Approximation Theory* 78(1994) 410-432.